Ana III Hausaufgabe, 2 Woche
Tutor: David Sering
SS 2021

Analysis III für Ingenieurwissenschaften

Juan Pardo Martin (397882)   Tuan Kiet Nguyen (404029)
Leonardo Nerini (414193)

4. Mai 2021

1 Aufgabe

Beweisen Sie mit Hilfe der Definition der komplexen Potenz die in der Vorlesung angegebenen Formeln

$$\text{a) } (z^p)' = pz^{p-1}, \text{ b) } (a^z)' = a^z \log(a)$$

und geben Sie dabei an, für welche komplexen Werte von z, p und a diese Formeln sinnvoll sind.

a)

$$z^p = e^{p\log(z)}$$

Wir wissen dass

$$\log(z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x-y}{r} = \frac{z\bar{z}}{z} = \frac{1}{z}$$

und

$$f(g(z))' = f'(g(z))g'(z)$$

Also

$$(e^{p\log(z)})' = e^{p\log(z)}\frac{p}{z} = p\frac{e^{p\log(z)}}{z} = p\frac{z^p}{z} = pz^{p-1}$$

In diesem fall $p \in \mathbb{C}; z \in \mathbb{G} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$

b)

$$a^z = e^{z\log(a)}$$

und

$$(e^{z\log(a)})' = e^{z\log(a)}\log(a) = a^z \log(a)$$

In diesem fall $z \in \mathbb{C}; a \in \mathbb{G} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$

2 Aufgabe

Gegeben seien von einer analytischen Funktion $f(z)$ die Eigenschaften $f(i) = i$ sowie

$$\operatorname{Re} f(x+iy) = y\sin x \sinh y + x\cos x \cosh y,\ \ x, y \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie diese Funktion $f(z)$.

Da f analytisch ist, wissen wir dass:

$$\Delta u(x,y) = \Delta v(x,y) = 0$$

Wir sagen

$$u(x,y) = y\sin x\sinh y + x\cos x\cosh y$$

$$\partial_x u = y\cos x\sinh y + \cosh y(\cos x - x\sin x)$$

$$\partial_x^2 u = -y\sin x\sinh y + \cosh y(-\sin x - (\sin x + x\cos x))$$

$$\partial_y u = \sin x(\sinh y + y\cosh y) + x\cos x\sinh y$$

$$\partial_y^2 u = \sin x(\cosh y + (y\sinh y + \cosh y)) + x\cos x\cosh y$$

$\Delta u = 0$, u ist deshalb Harmonisch Sodass f analytisch seien kann, dann f muss überall in seine Definitionsbereich differenzierbar sein. Die C-R-DGL sollen erfüllt sein:

$$\partial_x u = \partial_y v = y\cos x\sinh y + \cosh y(\cos x - x\sin x) \tag{1}$$

$$\partial_y u = -\partial_x v = (\sin x(\sinh y + y\cosh y) + x\cos x\sinh y) \tag{2}$$

Da wir $\partial_y v$ und $\partial_x v$ haben, können wir nach Harmonizität in v prüfen.

$$\partial_y^2 v = \cos x(\sinh y + y\cosh y) + \sinh y(\cos x - x\sin x)$$

$$\partial_x^2 v = -(\cos x(\sinh y + y\cosh y) + \sinh y(\cos x - x\sin x))$$

$\Delta v = 0$, v ist deshalb Harmonisch. Und jetzt müssen wir ein $v(x,y)$ finden sodass (**??**) und (**??**) gelten. Wir integrieren

$$\int ye^y dy = e^y y - \int e^y dy = e^y y - e^y$$

$$\int ye^{-y} dy = -e^{-y} y + \int e^{-y} dy = -e^{-y} y - e^{-y}$$

Daraus folgt:

$$\int y \sinh y dy = \frac{1}{2}\int y(e^y - e^{-y})dy = \frac{1}{2}(y(e^y + e^{-y}) - e^y + e^{-y}) = (y(\cosh y) - \sinh y)$$

Somit kann man rechnen:

$$v(x,y) = \int \partial_y v dy = \int y \cos x \sinh y + \cosh y(\cos x - x \sin x)dy$$
$$= \cos x \int y \sinh y dy + \sinh y(\cosh y(\cos x - x \sin x))$$
$$= \cos x(y(\cosh y) - \sinh y) + \sinh y(\cos x - x \sin x) + C(x) = \cos x(y \cosh y) - \sinh y(x \sin x) + C(x)$$

Wir leiten nach x ab um $C(x)$ herauszufinden.

$$\partial_x v = -\sin(x)(y \cosh y) - \sinh y(\sin x + x \cos x) + C'(x) \overset{!}{=} -(\sin x(\sinh y + y \cosh y) + x \cos x \sinh y)$$

Dafür muss $C'(x) = 0$ bzw Konstant sein. Wir evaluieren $v(x,y)$ an der stelle $(0,1)$

$$v(0,1) = (\cosh 1) + C$$

Wir nehmen $C = 1 - \cosh 1$ Somit ist

$$f(x+iy) = y\sin(x)\sinh(y) + x\cos(x)\cosh(y) + i(y\cos(x)\cosh(y) - x\sin(x)\sinh(y) + 1 - \cosh 1)$$

3 Aufgabe

Gegeben sei der Viertelkreisring G mit

$$G := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x, y > 0 \wedge 0 < \arctan\frac{y}{x} < \frac{\pi}{2} \wedge 1 < x^2 + y^2 < 4\right\}$$

Finden Sie eine Funktion $u\colon \overline{G} \to \mathbb{R}$, die das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0 && \text{für } (x,y) \in G \\ u(x,0) &= 0 && \text{für } 1 \le x \le 2 \\ u(2\cos(t), 2\sin(t)) &= t\ln(2) && \text{für } 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ u(0,y) &= \frac{\pi}{2}\ln y && \text{für } 1 \le x \le 2 \\ u(\cos(t), \sin(t)) &= 0 && \text{für } 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

löst, indem Sie die *Methode der harmonischen Verpflanzung* mit der Verpflanzungsabbildung $f(z) = \log z$ verwenden.

Wir wissen das (in $\overline{G}$).

$$f(x+iy) = \ln(x+iy) = \log\sqrt{x^2+y^2} + i\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Da $x \geq 0 \wedge y \geq 0$
Wir können die Rände berechnen (in $\overline{G}$). (Mit eine Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$)

$$(x,0) \longrightarrow (\ln|x|, 0) = (\ln x, 0)$$

$$(0,y) \longrightarrow (\ln y, \frac{\pi}{2})$$

$$(a\cos(t), a\sin(t)) \longrightarrow (\ln|a|, t)$$

und somit folgt:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0 &&= U(\ln x, 0) \\ u(0,y) &= \frac{\pi}{2}\ln y &&= U(\ln y, \frac{\pi}{2}) \\ u(\cos(t), \sin(t)) &= 0 &&= U(0,t) \\ u(2\cos(t), 2\sin(t)) &= t\ln 2 &&= U(\ln 2, t) \end{aligned}$$

Wir schreiben die übersetzes Randwertproblem.

$$\begin{aligned} U(\xi, 0) &= 0 && \text{für } 0 \leq \xi \leq \ln 2 \\ U(0,\eta) &= 0 && \text{für } 0 \leq \eta \leq \frac{\pi}{2} \\ U(\ln 2, \eta) &= \eta \ln 2 && \text{für } 0 \leq \eta \leq \frac{\pi}{2} \\ U(\xi, \frac{\pi}{2}) &= \frac{\pi}{2}\xi && \text{für } 0 \leq \xi \leq \ln 2 \end{aligned}$$

Eine mögliche abbildung könnte sein:

$$U(\xi,\eta) = \xi\eta$$

Daraus folgt

$$u(x,y) = U(\ln\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right)) = \ln\sqrt{x^2+y^2}\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Da $\Delta U = 0$ und $f = \log z$ analytisch, folgt daraus, dass u Harmonisch sein muss. Also $\Delta u = 0$.