Ana III Hausaufgabe, 3 Woche
Tutor: David Sering
SS 2021

Analysis III für Ingenieurwissenschaften

Juan Pardo Martin (397882) Tuan Kiet Nguyen (404029)
Leonardo Nerini (414193)

12. Mai 2021

1 Aufgabe

Es seien die Kurven $\gamma_1 : t \mapsto t + i(\sqrt{3})t, 0 < t < \infty$ und $\gamma_2 : t \mapsto \cos t + i\sqrt{3}\sin t, 0 \leq t < \pi$ sowie die Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \longmapsto z^2 - z\sqrt{2}$ gegeben.

a) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Kurven γ_1 und γ_2 und den Schnittwinkel.
Wir finden die Gemeinsames punkt in dem wir das Problem im $\mathbb{R}^2$ umstellen.

$$\vec{\gamma}_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad a \longmapsto \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\gamma_1(a)) \\ \mathrm{Im}(\gamma_1(a)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\gamma}_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad b \longmapsto \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\gamma_2(b)) \\ \mathrm{Im}(\gamma_2(b)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin(b)\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Wir bauen die folgendes Gleichungsystem:

$$\begin{pmatrix} a \\ a\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(b) \\ \sin(b)\sqrt{3} \end{pmatrix} \implies a = \cos(b) = \sin(b) \implies b_1 = \frac{\pi}{4}, \quad b_2 = \pi + \frac{\pi}{4}$$

Wir wurden 2 Schnittpunkten haben, jedoch fällt 1 raus, da $0 \leq b < \pi$, also, wir haben nur 1 schnittpunkt:

$$P_{\gamma_1,\gamma_2} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

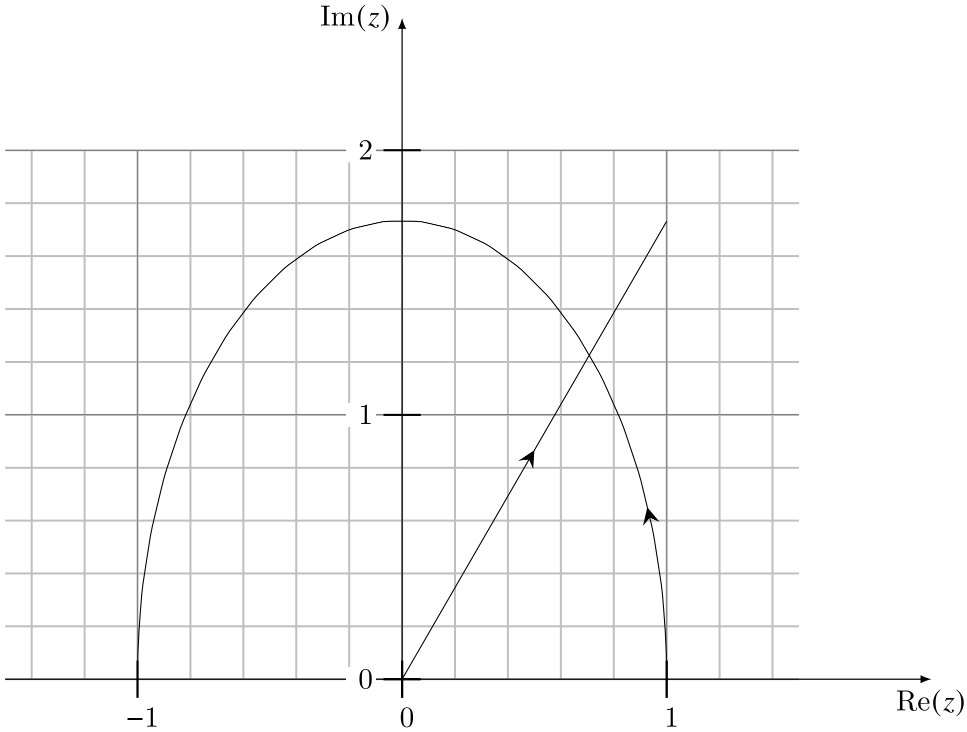

Abbildung 1: Parametrizierung von γ_1 und γ_2

Wir berechnen die Schnittwinkel zwischen γ_1 und γ_2, dafür linearisieren (Taylor-Approximation) die Funktionen an der Stelle P_{γ_1,γ_2}:

$$\vec{\gamma_1}'(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\gamma_2}'(b) = \begin{pmatrix} -\sin(b) \\ \cos(b)\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

für P_{γ_1,γ_2}:

$$\phi_1 = \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(b_1) \\ \cos(b_1)\sqrt{3} \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}\right| \left|\begin{pmatrix} -\sin(b_1) \\ \cos(b_1)\sqrt{3} \end{pmatrix}\right|}\right) = \arccos\left(\frac{-\sin(b_1) + 3\cos(b_1)}{\sqrt{1+3}\sqrt{3\cos^2(b_1) + \sin^2(b_1)}}\right)$$

$$= \arccos\left(\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} + 3\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{4}\sqrt{3(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2}}\right) = \arccos\left(\frac{2\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{3\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{4\frac{1}{2}}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

b) Ermitteln Sie Schnittpunkt und Schnittwinkel der Bildkurven $f(\gamma_1)$ und $f(\gamma_2)$.
Die Schnittpunkt der Bildkurven von $f(\gamma_1)$ und $f(\gamma_2)$ ist gleich der Bild der schnittpunkt der Kurven, d.h

$$P_{f(\gamma_1),f(\gamma_2)} = f(P_{\gamma_1,\gamma_2})$$

Berechnung:

$$\widetilde{P}_{f(\gamma_1),f(\gamma_2)} = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\right)\sqrt{2}$$

$$= -1 + i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{(3)} = -2$$

$$P_{f(\gamma_1), f(\gamma_2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Um die Schnittwinkel zu berechnen liniearisieren wir auch $\vec{\mathfrak{f}}(\vec{\gamma}_i(t)), i \in \{1, 2\}$

Es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\mathfrak{f}}(\vec{\gamma}_i(t))\right) = \frac{\partial \vec{\mathfrak{f}}}{\partial \vec{\gamma}_i}\frac{\partial \vec{\gamma}_i}{\partial t}$$

$\frac{\partial \vec{\gamma}_i}{\partial t_i}$ sind die Linearisierungen von $\vec{\gamma}_i$, wir haben diese schon berechnet.

$$\frac{\partial \vec{\mathfrak{f}}}{\partial \vec{\gamma}_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \operatorname{Re}\gamma_i} \operatorname{Re} f & \frac{\partial}{\partial \operatorname{Im}\gamma_i} \operatorname{Re} f \\ \frac{\partial}{\partial \operatorname{Re}\gamma_i} \operatorname{Im} f & \frac{\partial}{\partial \operatorname{Im}\gamma_i} \operatorname{Im} f \end{pmatrix}$$

Also, mit $x = \operatorname{Re}\gamma_i$ und $y = \operatorname{Im}\gamma_i$

$$f(z) = f(x+iy) = (x+iy)^2 - \sqrt{2}(x+iy) = x^2 + 2ixy - \sqrt{2}x - y^2 - i\sqrt{2}y = \underbrace{x^2 - \sqrt{2}x - y^2}_{\operatorname{Re} f} + i\underbrace{\left(2xy - \sqrt{2}y\right)}_{\operatorname{Im} f}$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial \vec{\mathfrak{f}}}{\partial \vec{\gamma}_i} = \begin{pmatrix} 2\operatorname{Re}\gamma_i - \sqrt{2} & -2\operatorname{Im}\gamma_i \\ 2\operatorname{Im}\gamma_i & 2\operatorname{Re}\gamma_i - \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

für γ_1:

$$\frac{\partial \vec{\mathfrak{f}}}{\partial \vec{\gamma}_1}\frac{\partial \vec{\gamma}_1}{\partial a} = \begin{pmatrix} 2\operatorname{Re}\gamma_1 - \sqrt{2} & -2\operatorname{Im}\gamma_1 \\ 2\operatorname{Im}\gamma_1 & 2\operatorname{Re}\gamma_1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - \sqrt{2} & -2a\sqrt{3} \\ 2a\sqrt{3} & 2a - \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2a - \sqrt{2} - 6a \\ 2a\sqrt{3} + \sqrt{3}(2a - \sqrt{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} - 4a \\ 4\sqrt{3}a - \sqrt{6} \end{pmatrix}$$

für γ_2:

$$\frac{\partial \vec{\mathfrak{f}}}{\partial \vec{\gamma}_2}\frac{\partial \vec{\gamma}_2}{\partial b} = \begin{pmatrix} 2\operatorname{Re}\gamma_2 - \sqrt{2} & -2\operatorname{Im}\gamma_2 \\ 2\operatorname{Im}\gamma_2 & 2\operatorname{Re}\gamma_2 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin b \\ \cos b\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos b - \sqrt{2} & -2\sin b\sqrt{3} \\ 2\sin b\sqrt{3} & 2\cos b - \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin b \\ \cos b\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin b(2\cos b - \sqrt{2}) - 6\sin b\cos b \\ -2\sin^2 b\sqrt{3} + \cos b\sqrt{3}(2\cos b - \sqrt{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\sin(b) - 8\sin(b)\cos(b) \\ -2\sqrt{3}\sin^2(b) + 2\sqrt{3}\cos^2(b) - \sqrt{6}\cos(b) \end{pmatrix}$$

Wir berechnen die Skalarprodukt

$$\frac{\partial \vec{\mathfrak{f}}}{\partial \vec{\gamma}_1}\frac{\partial \vec{\gamma}_1}{\partial a} \cdot \frac{\partial \vec{\mathfrak{f}}}{\partial \vec{\gamma}_2}\frac{\partial \vec{\gamma}_2}{\partial b} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} - 4a \\ 4\sqrt{3}a - \sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}\sin(b) - 8\sin(b)\cos(b) \\ -2\sqrt{3}\sin^2(b) + 2\sqrt{3}\cos^2(b) - \sqrt{6}\cos(b) \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{=}_{a=\cos(b)=\sin(b)} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} - 4a \\ 4\sqrt{3}a - \sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}a - 8a^2 \\ -2\sqrt{3}a^2 + 2\sqrt{3}a^2 - \sqrt{6}a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} - 4a \\ 4\sqrt{3}a - \sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}a - 8a^2 \\ -\sqrt{6}a \end{pmatrix}$$

$$= \left(-4a - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}a - 8a^2\right) - \sqrt{6}a\left(4\sqrt{3}a - \sqrt{6}\right) = 4a\left(8a^2 - 2\sqrt{2}a + 1\right)$$

und die Längen, bzw Norm der liniearisierte Vektoren.

$$\left|\frac{\partial \vec{\mathfrak{f}}}{\partial \vec{\gamma}_1}\frac{\partial \vec{\gamma}_1}{\partial a}\right| = \left|\begin{pmatrix} -\sqrt{2} - 4a \\ 4\sqrt{3}a - \sqrt{6}\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(\sqrt{2} + 4a)^2 + (4\sqrt{3}a - \sqrt{6})^2}$$

$$\left|\frac{\partial \vec{\mathfrak{f}}}{\partial \vec{\gamma}_2}\frac{\partial \vec{\gamma}_2}{\partial b}\right| = \left|\begin{pmatrix} \sqrt{2}a - 8a^2 \\ -\sqrt{6}a\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(\sqrt{2}a - 8a^2)^2 + (\sqrt{6}a)^2}$$

Daraus folgt:

$$\cos(\phi_2) = \frac{\frac{\partial \vec{\mathfrak{f}}}{\partial \vec{\gamma}_1}\frac{\partial \vec{\gamma}_1}{\partial a} \cdot \frac{\partial \vec{\mathfrak{f}}}{\partial \vec{\gamma}_2}\frac{\partial \vec{\gamma}_2}{\partial b}}{\left|\frac{\partial \vec{\mathfrak{f}}}{\partial \vec{\gamma}_1}\frac{\partial \vec{\gamma}_1}{\partial a}\right|\left|\frac{\partial \vec{\mathfrak{f}}}{\partial \vec{\gamma}_2}\frac{\partial \vec{\gamma}_2}{\partial b}\right|} = \frac{4a\left(8a^2 - 2\sqrt{2}a + 1\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{2} + 4a\right)^2 + \left(4\sqrt{3}a - \sqrt{6}\right)^2}\sqrt{\left(\sqrt{2}a - 8a^2\right)^2 + \left(\sqrt{6}a\right)^2}}$$

$$= \frac{a\sqrt{8a^2 - 2\sqrt{2}a + 1}}{2\sqrt{a^2\left(8a^2 - 2\sqrt{2}a + 1\right)}} = \frac{a\sqrt{8a^2 - 2\sqrt{2}a + 1}}{2\,|a|\sqrt{\left(8a^2 - 2\sqrt{2}a + 1\right)}} = \operatorname{sgn}(a)\frac{1}{2}$$

für $P_{f(\gamma_1), f(\gamma_2)}$ gilt $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\phi_2 = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

2 Aufgabe

Ermitteln Sie fur die Möbius-Transformationen h_1 und h_2 mit:

$$h_1(z) = \frac{2z - 1}{3z - 2}, \quad h_2(z) = \frac{z - 1}{-2z + 3}$$

die Komposition $h_1 \circ h_2$ und die inversen Transformationen h_1^{-1} und h_2^{-1}.
Die Komposition von $h_1 \circ h_2$ folgt:

$$h_1(h_2(z)) = h_1\left(\frac{z - 1}{-2z + 3}\right) = \frac{2\left(\frac{z-1}{-2z+3}\right) - 1}{3\left(\frac{z-1}{-2z+3}\right) - 2} = \frac{2\left(\frac{z-1}{-2z+3}\right) - 1}{3\left(\frac{z-1}{-2z+3}\right) - 2}\frac{-2z + 3}{-2z + 3}$$

$$\frac{2(z - 1) - (-2z + 3)}{3\,(z - 1) - 2(-2z + 3)} = \frac{4z - 5}{7z - 9}$$

Für die inverse von h_1^{-1} tauschen wir eine Variabel um, $\omega \longleftrightarrow z$ wir lösen es auf ω um.

$$z = \frac{2\omega - 1}{3\omega - 2}$$

$$(3\omega - 2)z = 2\omega - 1$$

$$3\omega z - 2z = 2\omega - 1$$

$$\frac{1 - 2z}{2 - 3z} = \omega$$

$$\omega = \frac{2z-1}{3z-2} = h_1^{-1}$$

Für die inverse von h_2^{-1} folgt analog:

$$z = \frac{\omega - 1}{-2\omega + 3}$$
$$(-2\omega + 3)z = \omega - 1$$
$$-2\omega z + 3z = \omega - 1$$
$$\frac{1+3z}{1+2z} = \omega$$
$$\omega = \frac{3z+1}{2z+1} = h_2^{-1}$$

3 Aufgabe

Eine Möbius-Transformation T werde durch die Angaben

$$f(1) = 1, \quad f(i) = 1 + i, \quad f(-1+i) = 2 + 2i$$

beschrieben.

a) Bestimmen Sie den Term $f(z)$ für $z \in \mathbb{C}$.
Wir verwenden den Ansatz: $f(z) = \frac{za+b}{zc+d}$ Wir haben die folgende Systemgleichung

$$1 = \frac{a+b}{c+d}$$
$$1 + i = \frac{ia+b}{ic+d}$$
$$2 + 2i = \frac{(-1+i)a+b}{(-1+i)c+d}$$

Daraus folgt:

$$a + b = c + d \tag{1}$$
$$(ic+d)(i+1) = -c + d + i(c+d) = ia + b \tag{2}$$

und

$$((-1+i)c+d)(2+2i) = -4c + 2id + 2d = -a + ia + b = ((-1+i)a + b)$$

mit (2)

$$-4c + 2id + 2d = -a - c + d + i(c+d)$$
$$-3c + id + d = -a + ic$$

Man könnte das in reelle und imaginäre teile trennen, aber es ist möglich mit Rotationen, Translationen und Inversionen, eine Möbiustransform zu bauen, wir beobachten, dass

$f(1) = 1$ ein Feste punkt ist. Sei $g(z) = f(z+1) - 1$ folgt:

$$g(0) = 0$$
$$g(i-1) = i$$
$$g(-2+i) = 1 + 2i$$

Wir drehen unsere Bild so $h(z) = ig(z)$:

$$h(0) = 0$$
$$h(i-1) = -1$$
$$h(-2+i) = -2 + i$$

Wir erhalten eine neue Gleichungsystem.

$$h(0) = \frac{0a + b}{0c + d} = \frac{b}{d} = 0 \implies b = 0$$
$$h(i-1) = \frac{(i-1)a}{(i-1)c + d} = -1 \implies a = -c - \frac{d}{i-1}$$
$$h(i-2) = \frac{(i-2)a}{(i-2)c + d} = i - 2 \implies a = c(i-2) + d$$

Somit:

$$c(i-2) + d = -c - \frac{d}{i-1}$$
$$c(i-1) + d = -\frac{d}{i-1}$$
$$c(i-1)^2 + d(i-1) = -d$$
$$c(i-1)^2 + di = 0$$
$$-2ic + di = 0$$
$$-2c + d = 0$$
$$d = 2c$$

Wir nehmen o.B.d.A dass $c = 1$, dann $d = 2$ und $a = (i-2) + 2 = i$.

$$h(z) = \frac{iz}{z+2}$$

$$f(z) = g(z-1) + 1 = -ih(z-1) + 1 = -i\frac{i(z-1)}{z+1} + 1 = \frac{(z-1)}{z+1} + 1$$
$$f(1) = 0 + 1$$
$$f(i) = \frac{(i-1)}{i+1} + 1 = \frac{(i-1)^2}{(i+1)\,(i-1)^2} + 1 = i + 1$$
$$f(i-1) = \frac{(i-2)}{i} + 1 = -i(i-2) + 1 = 2i + 2$$

b) Bestimmen Sie Bild und Urbild des unendlich fernen Punkts ∞

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \frac{(z-1)}{z+1} + 1 = 1 + 1 = 2$$

Unsere Nenner ist $z + 1$, daraus folgt dass $\lim_{z\to-1} f(z) = \infty$

alt b) Bestimmen Sie von der offenen Halbgeraden $\gamma : t \mapsto ti, 0 < t < \infty$ rechnerisch das Bild $f(\gamma)$ und beschreiben Sie es als geometrische Figur.

$$f(\gamma) = 1 - \frac{1}{\gamma} = 1 - \frac{1}{ti} = 1 + \frac{i}{t}$$

Es ist eine Halberade parallel zu der $\Im$ Achse, aber nur auf der positiv maginär Seite. $1 + ai, \quad a < 0 < \infty$ oder $x = 1, y > 0$