

Analysis III für Ingenieurwissenschaften

Juan Pardo Martin (397882) Tuan Kiet Nguyen (404029)
Leonardo Nerini (414193)

10. Mai 2021

1 Aufgabe

Es seien die Kurven $\gamma_1 : t \mapsto t + i(\sqrt{3})t, 0 < t < \infty$ und $\gamma_2 : t \mapsto \cos t + i\sqrt{3}\sin t, 0 \leq t < \pi$ sowie die Abbildung $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto z^2 - z\sqrt{2}$ gegeben.

- a) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Kurven γ_1 und γ_2 und den Schnittwinkel.
Wir finden die Gemeinsames punkt in dem wir das Problem im \mathbb{R}^2 umstellen.

$$\vec{\gamma}_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad a \mapsto \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\gamma_1(a)) \\ \operatorname{Im}(\gamma_1(a)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\gamma}_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad b \mapsto \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\gamma_2(b)) \\ \operatorname{Im}(\gamma_2(b)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin(b)\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Wir bauen die folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} a \\ a\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(b) \\ \sin(b)\sqrt{3} \end{pmatrix} \implies a = \cos(b) = \sin(b) \implies b_1 = \frac{\pi}{4}, \quad b_2 = \pi + \frac{\pi}{4}$$

Wir wurden 2 Schnittpunkten haben, jedoch fällt 1 raus, da $0 \leq b < \pi$, also, wir haben nur 1 schnittpunkt:

$$P_{\gamma_1, \gamma_2} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

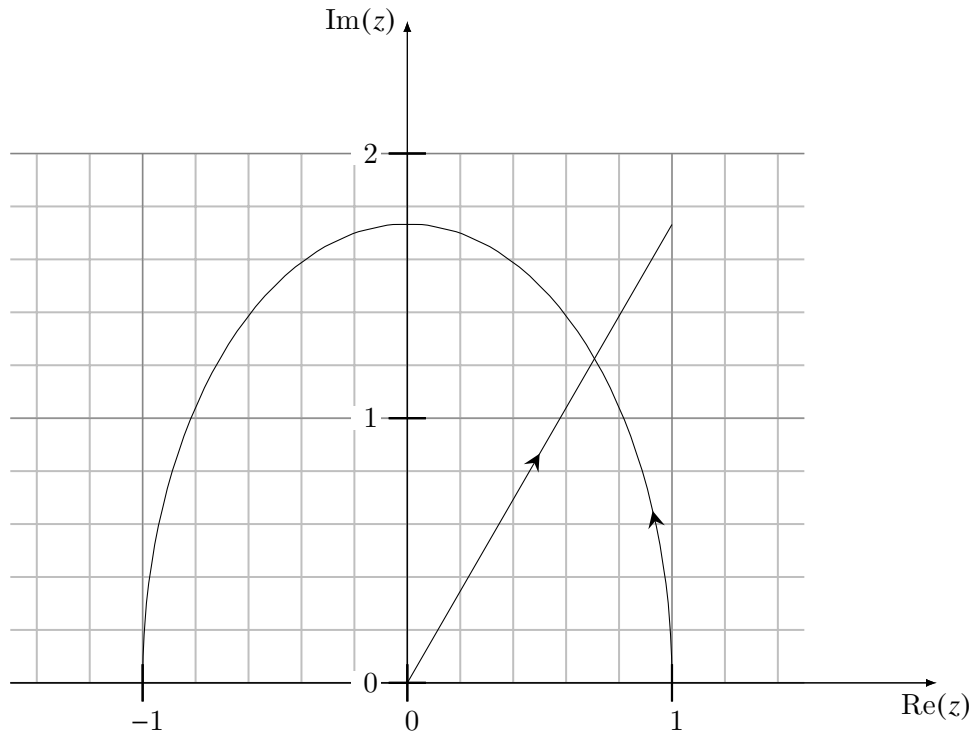


Abbildung 1: Parametrisierung von γ_1 und γ_2

Wir berechnen die Schnittwinkel zwischen γ_1 und γ_2 , dafür linearisieren (Taylor-Approximation) die Funktionen an der Stelle P_{γ_1, γ_2} :

$$\vec{\gamma}_1'(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\gamma}_2'(b) = \begin{pmatrix} -\sin(b) \\ \cos(b)\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

für P_{γ_1, γ_2} :

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \arccos \left(\frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(b_1) \\ \cos(b_1)\sqrt{3} \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} -\sin(b_1) \\ \cos(b_1)\sqrt{3} \end{pmatrix} \right|} \right) = \arccos \left(\frac{-\sin(b_1) + 3 \cos(b_1)}{\sqrt{1 + 3\sqrt{3} \cos^2(b_1) + \sin^2(b_1)}} \right) \\ &= \arccos \left(\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} + 3\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{4\sqrt{3}(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2}} \right) = \arccos \left(\frac{2\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{3\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}} \right) = \arccos \left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{4\frac{1}{2}}} \right) = \arccos \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

b) Ermitteln Sie Schnittpunkt und Schnittwinkel der Bildkurven $f(\gamma_1)$ und $f(\gamma_2)$.

Die Schnittpunkt der Bildkurven von $f(\gamma_1)$ und $f(\gamma_2)$ ist gleich der Bild der schnittpunkt der Kurven, d.h

$$P_{f(\gamma_1), f(\gamma_2)} = f(P_{\gamma_1, \gamma_2})$$

Berechnung:

$$\tilde{P}_{f(\gamma_1), f(\gamma_2)} = f \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right) \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right) \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right) \right) \sqrt{2}$$

$$= -1 + i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3} = -2$$

$$P_{f(\gamma_1), f(\gamma_2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Um die Schnittwinkel zu berechnen linearisieren wir auch $\vec{f}(\vec{\gamma}_i(t)), i \in \{1, 2\}$

Es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{f}(\vec{\gamma}_i(t)) \right) = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{\gamma}_i} \frac{\partial \vec{\gamma}_i}{\partial t}$$

$\frac{\partial \vec{\gamma}_i}{\partial t_i}$ sind die Linearisierungen von $\vec{\gamma}_i$, wir haben diese schon berechnet.

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{\gamma}_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \operatorname{Re} \gamma_i} \operatorname{Re} f & \frac{\partial}{\partial \operatorname{Im} \gamma_i} \operatorname{Re} f \\ \frac{\partial}{\partial \operatorname{Re} \gamma_i} \operatorname{Im} f & \frac{\partial}{\partial \operatorname{Im} \gamma_i} \operatorname{Im} f \end{pmatrix}$$

Also, mit $x = \operatorname{Re} \gamma_i$ und $y = \operatorname{Im} \gamma_i$

$$f(z) = f(x+iy) = (x+iy)^2 - \sqrt{2}(x+iy) = x^2 + 2ixy - \sqrt{2}x - y^2 - i\sqrt{2}y = \underbrace{x^2 - \sqrt{2}x - y^2}_{\operatorname{Re} f} + i \underbrace{(2xy - \sqrt{2}y)}_{\operatorname{Im} f}$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{\gamma}_i} = \begin{pmatrix} 2 \operatorname{Re} \gamma_i - \sqrt{2} & -2 \operatorname{Im} \gamma_i \\ 2 \operatorname{Im} \gamma_i & 2 \operatorname{Re} \gamma_i - \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

für γ_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{\gamma}_1} \frac{\partial \vec{\gamma}_1}{\partial a} &= \begin{pmatrix} 2 \operatorname{Re} \gamma_1 - \sqrt{2} & -2 \operatorname{Im} \gamma_1 \\ 2 \operatorname{Im} \gamma_1 & 2 \operatorname{Re} \gamma_1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - \sqrt{2} & -2a\sqrt{3} \\ 2a\sqrt{3} & 2a - \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2a - \sqrt{2} - 6a \\ 2a\sqrt{3} + \sqrt{3}(2a - \sqrt{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} - 4a \\ 4\sqrt{3}a - \sqrt{6} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für γ_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{\gamma}_2} \frac{\partial \vec{\gamma}_2}{\partial b} &= \begin{pmatrix} 2 \operatorname{Re} \gamma_2 - \sqrt{2} & -2 \operatorname{Im} \gamma_2 \\ 2 \operatorname{Im} \gamma_2 & 2 \operatorname{Re} \gamma_2 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin b \\ \cos b \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos b - \sqrt{2} & -2 \sin b \sqrt{3} \\ 2 \sin b \sqrt{3} & 2 \cos b - \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin b \\ \cos b \sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin b (2 \cos b - \sqrt{2}) - 6 \sin b \cos b \\ -2 \sin^2 b \sqrt{3} + \cos b \sqrt{3} (2 \cos b - \sqrt{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \sin(b) - 8 \sin(b) \cos(b) \\ -2\sqrt{3} \sin^2(b) + 2\sqrt{3} \cos^2(b) - \sqrt{6} \cos(b) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir berechnen die Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{\gamma}_1} \frac{\partial \vec{\gamma}_1}{\partial a} \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{\gamma}_2} \frac{\partial \vec{\gamma}_2}{\partial b} &= \begin{pmatrix} -\sqrt{2} - 4a \\ 4\sqrt{3}a - \sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} \sin(b) - 8 \sin(b) \cos(b) \\ -2\sqrt{3} \sin^2(b) + 2\sqrt{3} \cos^2(b) - \sqrt{6} \cos(b) \end{pmatrix} \\ &\stackrel{a=\cos(b)=\sin(b)}{=} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} - 4a \\ 4\sqrt{3}a - \sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}a - 8a^2 \\ -2\sqrt{3}a^2 + 2\sqrt{3}a^2 - \sqrt{6}a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} - 4a \\ 4\sqrt{3}a - \sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}a - 8a^2 \\ -\sqrt{6}a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= (-4a - \sqrt{2}) (\sqrt{2}a - 8a^2) - \sqrt{6}a (4\sqrt{3}a - \sqrt{6}) = 4a (8a^2 - 2\sqrt{2}a + 1)$$

und die Längen, bzw Norm der linearisierte Vektoren.

$$\left| \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{\gamma}_1} \frac{\partial \vec{\gamma}_1}{\partial a} \right| = \left| \begin{pmatrix} -\sqrt{2} - 4a \\ 4\sqrt{3}a - \sqrt{6} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(\sqrt{2} + 4a)^2 + (4\sqrt{3}a - \sqrt{6})^2}$$

$$\left| \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{\gamma}_2} \frac{\partial \vec{\gamma}_2}{\partial b} \right| = \left| \begin{pmatrix} \sqrt{2}a - 8a^2 \\ -\sqrt{6}a \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(\sqrt{2}a - 8a^2)^2 + (\sqrt{6}a)^2}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \cos(\phi_2) &= \frac{\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{\gamma}_1} \frac{\partial \vec{\gamma}_1}{\partial a} \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{\gamma}_2} \frac{\partial \vec{\gamma}_2}{\partial b}}{\left| \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{\gamma}_1} \frac{\partial \vec{\gamma}_1}{\partial a} \right| \left| \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{\gamma}_2} \frac{\partial \vec{\gamma}_2}{\partial b} \right|} = \frac{4a (8a^2 - 2\sqrt{2}a + 1)}{\sqrt{(\sqrt{2} + 4a)^2 + (4\sqrt{3}a - \sqrt{6})^2} \sqrt{(\sqrt{2}a - 8a^2)^2 + (\sqrt{6}a)^2}} \\ &= \frac{a\sqrt{8a^2 - 2\sqrt{2}a + 1}}{2\sqrt{a^2 (8a^2 - 2\sqrt{2}a + 1)}} = \frac{a\sqrt{8a^2 - 2\sqrt{2}a + 1}}{2|a|\sqrt{(8a^2 - 2\sqrt{2}a + 1)}} = \operatorname{sgn}(a) \frac{1}{2} \end{aligned}$$

für $P_{f(\gamma_1), f(\gamma_2)}$ gilt $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\phi_2 = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

2 Aufgabe

Ermitteln Sie für die Möbius-Transformationen h_1 und h_2 mit:

$$h_1(z) = \frac{2z-1}{3z-2}, \quad h_2(z) = \frac{z-1}{-2z+3}$$

die Komposition $h_1 \circ h_2$ und die inversen Transformationen h_1^{-1} und h_2^{-1} .

Die Komposition von $h_1 \circ h_2$ folgt:

$$h_1(h_2(z)) = h_1\left(\frac{z-1}{-2z+3}\right) = \frac{2\left(\frac{z-1}{-2z+3}\right) - 1}{3\left(\frac{z-1}{-2z+3}\right) - 2} = \frac{2\left(\frac{z-1}{-2z+3}\right) - 1}{3\left(\frac{z-1}{-2z+3}\right) - 2} \frac{-2z+3}{-2z+3}$$

$$\frac{2(z-1) - (-2z+3)}{3(z-1) - 2(-2z+3)} = \frac{4z-5}{7z-9}$$

Für die inverse von h_1^{-1} tauschen wir eine Variabel um, $\omega \longleftrightarrow z$ wir lösen es auf ω um.

$$z = \frac{2\omega - 1}{3\omega - 2}$$

$$(3\omega - 2)z = 2\omega - 1$$

$$3\omega z - 2z = 2\omega - 1$$

$$\frac{1-2z}{2-3z} = \omega$$

$$\omega = \frac{2z-1}{3z-2} = h_1^{-1}$$

Für die inverse von h_2^{-1} folgt analog:

$$z = \frac{\omega-1}{-2\omega+3}$$

$$(-2\omega+3)z = \omega-1$$

$$-2\omega z + 3z = \omega - 1$$

$$\frac{1+3z}{1+2z} = \omega$$

$$\omega = \frac{3z+1}{2z+1} = h_2^{-1}$$

3 Aufgabe

Eine Möbius-Transformation T werde durch die Angaben

$$f(1) = 1, \quad f(i) = 1+i, \quad f(-1+i) = 2+2i$$

beschrieben.

a) Bestimmen Sie den Term $f(z)$ für $z \in \mathbb{C}$.

Wir verwenden den Ansatz: $f(z) = \frac{za+b}{zc+d}$ Wir haben die folgende Systemgleichung

$$1 = \frac{a+b}{c+d}$$

$$1+i = \frac{ia+b}{ic+d}$$

$$2+2i = \frac{(-1+i)a+b}{(-1+i)c+d}$$

Daraus folgt:

$$a+b = c+d \tag{1}$$

$$(ic+d)(i+1) = -c+d+i(c+d) = ia+b$$

somit gilt:

$$a = c+d$$

$$b = -c+d$$

wegen (1) muss $d = 0$ sein, bzw $a = -b$.

$$(2+2i)(i-1) = -4 = (i-1)a+b = (i-1)c-c = c(i-2)$$

Daraus folgt:

$$c = \frac{4}{2-i} = \frac{4(2+i)}{5} = a = -b$$

also

$$f(z) = \frac{z \left(\frac{4(2+i)}{5} \right) - \left(\frac{4(2+i)}{5} \right)}{z \left(\frac{4(2+i)}{5} \right)} = 1 - \frac{1}{z}$$

- b) Bestimmen Sie von der offenen Halbgeraden $\gamma : t \mapsto ti, 0 < t < \infty$ rechnerisch das Bild $f(\gamma)$ und beschreiben Sie es als geometrische Figur.

$$f(\gamma) = 1 - \frac{1}{\gamma} = 1 - \frac{1}{ti} = 1 + \frac{i}{t}$$

Es ist eine Halberade parallel zu der \Im Achse, aber nur auf der positiv imaginär Seite.
 $1 + ai, \quad a < 0 < \infty$ oder $x = 1, y > 0$