

ha

set arrow inside/.code

set arrow inside/.code//

Analysis III für Ingenieurwissenschaften

Juan Pardo Martin (397882) Tuan Kiet Nguyen (404029)
Leonardo Nerini (414193)

6. Juni 2021

1 Aufgabe

Berechnen Sie mit dem Integralsatz oder der Integralformel von Cauchy die Integrale

$$\int_{|z-1|=3} \frac{\cos \pi z}{z^2 - 7z + 10} dz, \text{ und } \int_{|z|=1} \tan z dz$$

und begründen Sie Ihr Vorgehen. Benutzen Sie ohne Beweis, dass die Nullstellen der Cosinusfunktion alle reell sind.

1.1 Antwort

a) Wir können das Integral verschieben:

$$\int_{|z+1-1|=3} \frac{\cos(\pi(z+1))}{(z+1)^2 - 7(z+1) + 10} dz$$

und den Nenner reduzieren.

$$\int_{|z|=3} \frac{-\cos(\pi(z))}{(-4+z)(-1+z)} dz$$

Sei $G = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 3 + \varepsilon, \varepsilon > 0\}$ mit einem beliebig kleinen ε , eine offene Gebiet ist die Punkte wo $|z| = 3$ eine kompakte Teilmenge von G . Man kann sehen dass

$$f(z) = -\frac{\cos(\pi z)}{-4+z}$$

ist auf G analytisch, da ihre Pole außerhalb des Kreises $3 + \varepsilon$ liegen. Daraus folgt

$$\int_{|z|=3} \frac{-\cos(\pi(z))}{(-4+z)(-1+z)} dz = 2\pi i f(1) = -2\pi i \frac{\cos(\pi)}{-3} = -\frac{2}{3}\pi i$$

b) Die Pole sind die Nullstellen von $\cos(z)$, das sind alle reellen Zahlen $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Keine Nullstelle ist im Einheitskreis, also das Integral ergibt 0.

2 Aufgabe

Gegeben ist die Funktion $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 2xy + x^2 - y^2$. Ermitteln Sie Stellen und Werte der globalen Extrema der Funktion u auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Benutzen Sie bei Bedarf die speziellen Werte

$$\sin \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}} \text{ und } \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

2.1 Antwort

Wir wissen dass die Extrema der Funktionen sind in Rand, wir verwenden der Lagrange verfahren um Extrema zu finden Kritische punkten:

$$\nabla_{x,y} u = -\lambda \nabla_{x,y} g$$

wobei $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, Also

$$\Lambda(x, y, \lambda) = u(x, y) + \lambda \cdot g(x, y)$$

$$\nabla_{x,y} u = \begin{pmatrix} 2x + 2y \\ 2x - 2y \end{pmatrix}$$

und

$$\nabla_{x,y} g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

Wir können berechnen

$$\det \begin{pmatrix} 2x + 2y & 2x \\ 2x - 2y & 2y \end{pmatrix} = 0 = -4x^2 + 8xy + 4y^2 = -4(x^2 - 2xy - y^2)$$

Wir können sehen dass wegen g liegt x und y auf der Einheitskreis. Also

$$(\cos(\varphi)^2 - 2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) - \sin(\varphi)^2) = 0$$

Wir verwenden den Hinweis und setzten wir $\varphi = \frac{\pi}{8}$ to be continued..

Alternativ können wir berechnen

$$\det \begin{pmatrix} 2\lambda + 2 & 2 \\ 2 & 2\lambda - 2 \end{pmatrix} = 0 = (2\lambda + 2)(2\lambda - 2) - 4 = 4\lambda^2 - 8 \implies \lambda = \pm\sqrt{2}$$

für $\lambda = \pm\sqrt{2}$

$$2x + 2y \pm 2\sqrt{2}x = 0 \implies x(2 \pm 2\sqrt{2}) = -2y \implies y = -x(1 \pm \sqrt{2})$$

Also

$$x^2 + x^2(1 \pm \sqrt{2})^2 - 1 = 0 \implies x^2(1 + (3 \pm 2\sqrt{2})) = 1$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{4 \pm 2\sqrt{2}}} =$$

Also für $\lambda = \sqrt{2}$

$$x = \pm \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

und

$$y = -x(1 + \sqrt{2})$$

und für $\lambda = -\sqrt{2}$

$$x = \pm \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

und

$$y = -x(1 - \sqrt{2})$$

Wir haben hier 4 Kritischepunkten

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}(1 + \sqrt{2}) \right), \\ & \left(-\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}(1 + \sqrt{2}) \right), \\ & \left(\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}(1 - \sqrt{2}) \right), \\ & \left(-\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}(1 - \sqrt{2}) \right) \end{aligned}$$

Wir evaluieren auf diesen Stellen.

$$\begin{aligned} & u\left(\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}(1 + \sqrt{2})\right) = u\left(-\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}(1 + \sqrt{2})\right) \\ & = \frac{1}{4}(2 - \sqrt{2}) - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{2})(2 - \sqrt{2}) - \frac{1}{4}(1 - \sqrt{2})^2(2 - \sqrt{2}) = -4 + 3\sqrt{2} \\ & u\left(\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}(1 - \sqrt{2})\right) = u\left(-\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}(1 - \sqrt{2})\right) \\ & = -4 - 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

3 Aufgabe

Mit dieser Aufgabe wollen wir ein Ergebnis mit zwei verschiedenen Methoden herleiten, nämlich mit der Methode „direkt“ und mit der Methode „Poissonsche Integralformel“. Auf einer gewissen Kreisscheibe im \mathbb{R}^2 sei das Randwertproblem (RWP) für eine Funktion $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & \text{für } x^2 + y^2 < 1, \\ u(x, y) &= 4x^2 - 2 & \text{für } x^2 + y^2 = 1 \end{aligned}$$

- Lösen Sie dieses RWP mit einer geeigneten Ansatzfunktion.
- (Methode „direkt“:) Bestimmen Sie anhand der in a) erhaltenen Lösung u den Wert $u\left(\frac{4}{5}, 0\right)$.
- Stellen Sie die Poissonsche Integralformel zur Berechnung des Werts $u\left(\frac{4}{5}, 0\right)$ auf (ähnlich

wie in einer Tutoriumsaufgabe)

- d) Schreiben Sie das Integral in Ihrer Integralformel in ein komplexes Integral über den Einheitskreis $|z| = 1$ um (ähnlich wie in einer Tutoriumsaufgabe)
- e) Werten Sie Ihr komplexes Integral mit Hilfe der Cauchyschen Integralsätze und Ergebnissen aus der Vorlesung aus. (Methode, „Poissonsche Integralformel“) Hierbei dürfen Sie ohne Nachweis folgende Partialbruchzerlegung benutzen:

$$\frac{1}{z^2 \left(z - \frac{4}{5}\right) \left(z + \frac{5}{4}\right)} = \frac{41}{20} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{64}{25} \cdot \frac{1}{z - \frac{5}{4}} - \frac{125}{36} \cdot \frac{1}{z - \frac{4}{5}}$$

Begründen Sie aber, warum Sie diese Identität benutzen. Der Rechenweg ist ansonsten (wie immer) vollständig darzustellen.

3.1 Antwort

- a) wir nehmen die Folgende Ansatz

$$u(x, y) = 4x^2 - 2 + A(x^2 + y^2 - 1)$$

wenn $A = -2$ ist dann $u(x, y) = 2x^2 - 2y^2 \implies \Delta u = 0$

- b)

$$u\left(\frac{4}{5}, 0\right) = 2\left(\frac{4}{5}\right)^2$$

- c)

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\phi}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi.$$

Unsere große Radius ist 1, kleine Radius und θ ist Betrag und Arg von $(\frac{4}{5}, 0)$. $\theta = 0$; $r = \frac{4}{5}$

$$u\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\phi}) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(-\phi) + r^2} d\phi.$$

$$u\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\phi}) \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2}{1 - 2\left(\frac{4}{5}\right)^2 \cos(-\phi) + \left(\frac{4}{5}\right)^2} d\phi.$$

$$u\left(\frac{4}{5}; 0\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\left(\cos^2(\phi) - \sin^2(\phi)\right) \frac{9}{41 - 40 \cos(\phi)} d\phi$$

$$u\left(\frac{4}{5}; 0\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\left(\cos^2(\phi) - \sin^2(\phi)\right) \frac{9}{41 - 40 \cos(\phi)} d\phi$$

$$u\left(\frac{4}{5}; 0\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\left(2 \cos^2(\phi) - 1\right) \frac{9}{41 - 40 \cos(\phi)} d\phi$$

- d) Wir verwenden $\cos(\phi) = \left(\frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi})\right)$

$$u\left(\frac{4}{5}; 0\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\left(2\left(\frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi})\right)^2 - 1\right) \frac{-i9e^{-i\phi}}{41 - 40\left(\frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi})\right)} i e^{i\phi} d\phi$$

$$\begin{aligned}
u\left(\frac{4}{5}; 0\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\left(\frac{1}{2}\left(e^{i\phi} + e^{-i\phi}\right)^2 - 1\right) \frac{-i9e^{-i\phi}}{41 - 40\left(\frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi})\right)} i e^{i\phi} d\phi \\
u\left(\frac{4}{5}; 0\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \left(\left(z + z^{-1}\right)^2 - 2\right) \frac{-i9z^{-1}}{41 - 20((z + z^{-1}))} dz \\
u\left(\frac{4}{5}; 0\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \left(\left(z + z^{-1}\right)^2 - 2\right) \frac{-i9z^{-1}}{41 - 20(z + z^{-1})} dz \\
u\left(\frac{4}{5}; 0\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) \frac{-i9z^{-1}}{41 - 20(z + z^{-1})} dz \\
u\left(\frac{4}{5}; 0\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) \frac{-i9}{-20z^2 + 41z + 20} dz \\
u\left(\frac{4}{5}; 0\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \frac{-i9(-z^4 - 1)}{z^2(20z^2 - 41z + 20)} dz \\
u\left(\frac{4}{5}; 0\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \frac{-i9(-z^4 - 1)}{z^2(4z - 5)(5z - 4)} dz \\
u\left(\frac{4}{5}; 0\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \frac{-i9(-z^4 - 1)}{(z^2)4(z - \frac{5}{4})5(z - \frac{4}{5})} dz \\
u\left(\frac{4}{5}; 0\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \frac{-i9(-z^4 - 1)}{20(z^2)(z - \frac{5}{4})(z - \frac{4}{5})} dz \\
u\left(\frac{4}{5}; 0\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \frac{i9(z^4 + 1)}{20(z^2)(z - \frac{5}{4})(z - \frac{4}{5})} dz
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
u\left(\frac{4}{5}; 0\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \frac{i9(z^4 + 1)}{20} \left(\frac{41}{20} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{64}{25} \cdot \frac{1}{z - \frac{5}{4}} - \frac{125}{36} \cdot \frac{1}{z - \frac{4}{5}} \right) dz \\
u\left(\frac{4}{5}; 0\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \frac{i9(z^4 + 1)}{20} \left(\frac{41}{20} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{64}{25} \cdot \underbrace{\frac{1}{z - \frac{5}{4}}}_{\text{wird 0}} - \frac{125}{36} \cdot \frac{1}{z - \frac{4}{5}} \right) dz
\end{aligned}$$

für $\frac{1}{z - \frac{5}{4}}$ Die Polstelle ist außerhalb der Einheitskreis, es ist 0

$$u\left(\frac{4}{5}; 0\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \frac{i9(z^4 + 1)}{20} \left(\frac{41}{20} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{125}{36} \cdot \frac{1}{z - \frac{4}{5}} \right) dz$$

Wir verwenden die Cauchysche Integralformel

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Unsere f ist $f(z) = (z^4 + 1)$ Daraus folgt:

$$u\left(\frac{4}{5}; 0\right) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{9i}{20} \right) 2\pi i \left(-\frac{125}{36} f\left(\frac{4}{5}\right) + \frac{41}{20} f(0) + f'(0) \right)$$

$$u\left(\frac{4}{5};0\right)=\left(\frac{9i}{20}\right)i\left(-\frac{125}{36}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^4+1\right)+\frac{41}{20}\right)$$

$$u\left(\frac{4}{5};0\right)=-\left(\frac{9}{20}\right)\left(-\frac{881}{180}+\frac{41}{20}\right)$$

$$u\left(\frac{4}{5};0\right)=\frac{32}{25}$$