

Analysis III für Ingenieurwissenschaften

Juan Pardo Martin (397882) Tuan Kiet Nguyen (404029)
Leonardo Nerini (414193)

28. April 2021

1 Aufgabe

Stellen Sie die folgenden Terme komplexer Funktionen in der Form $u(x, y) + iv(x, y)$ dar, wobei $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ eine komplexe Zahl und $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ reelle Funktionen sind. Geben Sie hierbei die Funktionsterme $u(x, y)$ und $v(x, y)$ explizit an.

a) e^{-iz^2} , b) $z\bar{z}^2 + \bar{z}z^2$

a) Wir ersetzen $z = x + iy$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$

$$e^{-i(x+iy)^2}$$

Wir multiplizieren die Exponente aus.

$$e^{-ix^2+2xy+iy^2}$$

Wir klammern wir die imaginäre teil aus.

$$e^{2xy} e^{-ix^2+iy^2}$$

Wir anwenden die Eulersche Identität

$$e^{2xy} \left(\cos(x^2 - y^2) - i \sin(x^2 - y^2) \right) \\ \left(\underbrace{e^{2xy} \cos(x^2 - y^2)}_{u(x,y)} - i \underbrace{e^{2xy} \sin(x^2 - y^2)}_{v(x,y)} \right)$$

b)

$$z\bar{z}^2 + \bar{z}z^2$$

$$(x + iy)(x - iy)^2 + (x + iy)^2(x - iy)$$

$$x^3 - ix^2y + xy^2 - iy^3 + x^3 + ix^2y + xy^2 + iy^3$$

$$\underbrace{2x^3 + 2xy^2}_{u(x,y)} + \underbrace{0}_{v(x,y)}$$

2 Aufgabe

Konstruieren Sie eine auf ganz \mathbb{C} definierte Funktion f , die genau auf der Geraden $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 2 \operatorname{Im} z\}$ komplex differenzierbar ist und an der Stelle $2 + i$ den Wert 2 annimmt. Der Funktionsterm $f(z)$ ist als Term in der Variablen z zu schreiben.

$$f(2 + i) = 2$$

Wir nutzen die folgende Funktion als Ansatz:

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{\operatorname{Re}(z)^2}{2} + i(\operatorname{Im}(z)^2) + i$$

$$\partial_x u = x = 2y = \partial_y v$$

$$\partial_y u = 0 = 0 = -\partial_x v$$

Die Cauchy-Riemann-DGL-Bedingungen werden nur erfüllt für Punkten, die an der Gerade $\operatorname{Re} z = 2 \operatorname{Im} z$ liegen. Da alle die partielle Ableitungen stetig sind, ist es im Sinne von \mathbb{R}^2 reelle differenzierbar. An der Stelle $(2 + i)$ unsere Funktion liefert $\frac{4}{2} - i + i = 2$, also stimmt es. f entspricht die Bedingungen.

3 Aufgabe

Gegeben ist die komplexe Funktion g mit

$$h(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re}(z^2)}{z} & \text{für } z \neq 0 \\ 0 & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Funktion g im Punkt 0 die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen erfüllt, aber nicht komplex-differenzierbar ist.

$$h(x + iy) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re}((x+iy)^2)}{(x+iy)} & \text{für } z \neq 0 \\ 0 & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

$$h(x+iy) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re}(x^2+2ixy-y^2)}{(x+iy)} & \text{für } z \neq 0 \\ 0 & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

$$h(x+iy) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{(x+iy)} & \text{für } z \neq 0 \\ 0 & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

$$h(x+iy) = \begin{cases} \frac{(x^2-y^2)(x-iy)}{(x^2+y^2)} & \text{für } z \neq 0 \\ 0 & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

$$u(x,y) = \begin{cases} \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)} & \text{für } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & \text{für } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$v(x,y) = \begin{cases} -\frac{y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)} & \text{für } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & \text{für } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Die Cauchy-Riemann bedingungen lauten.

$$\partial_x u \stackrel{!}{=} \partial_y v \quad (1)$$

$$\partial_y u \stackrel{!}{=} -\partial_x v \quad (2)$$

für $\partial_x u$ im Punkt 0

$$\partial_x u(x,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(h,0) - \overbrace{u(0,0)}^0}{h} = \frac{h^3}{h^3} = 1$$

$$\partial_y v(0,y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(0,h) - \overbrace{v(0,0)}^0}{h} = \frac{h^3}{h^3} = 1$$

Somit (1) gilt.

$$\partial_y u(0,y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{u(0,h)}^0 - \overbrace{u(0,0)}^0}{h} = 0$$

$$\partial_x v(0,y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{v(h,0)}^0 - \overbrace{v(0,0)}^0}{h} = 0$$

Daraus folgt (2) stimmt auch Die Cauchy-Riemannsche bedingungen stimmen, aber es ist nicht hinreichend für Komplexe differenzierbarkeit, wir müssen zeigen dass die Abbildung

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

Reelle differenzierbar sein. Wir untersuchen die differenzierbarkeit an der stelle $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wir berechnen

die Funktionalmatrize an der stelle $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$f'(0,0) = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wenn

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\left| f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) - f'(0,0) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

0 wäre, dann wäre es komplexe differenzierbar.

$$\begin{aligned} \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\left| \begin{pmatrix} u(\Delta x, \Delta y) \\ v(\Delta x, \Delta y) \end{pmatrix} - \overbrace{f(0,0)}^0 - \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\left| \begin{pmatrix} \frac{(\Delta x)((\Delta x)^2 - (\Delta y)^2)}{((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)} - \Delta x \\ -\frac{(\Delta y)((\Delta x)^2 - (\Delta y)^2)}{((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)} - \Delta y \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \\ &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{\frac{\left(\frac{(\Delta x)((\Delta x)^2 - (\Delta y)^2)}{((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)} - \Delta x \right)^2 + \left(-\frac{(\Delta y)((\Delta x)^2 - (\Delta y)^2)}{((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)} - \Delta y \right)^2}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \\ &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{\frac{\left(-\frac{2(\Delta x)(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \right)^2 + \left(-\frac{2(\Delta x)^2(\Delta y)}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \right)^2}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \\ &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{\frac{\left(\frac{2(\Delta x)(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \right)^2 + \left(\frac{2(\Delta x)^2(\Delta y)}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \right)^2}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \\ &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{\frac{(2(\Delta x)(\Delta y)^2)^2 + (2(\Delta x)^2(\Delta y))^2}{((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)^3}} \\ &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} 2 \sqrt{\frac{((\Delta x)(\Delta y)^2)^2 + ((\Delta x)^2(\Delta y))^2}{((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)^3}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} 2 \sqrt{\frac{\left(\left(\frac{1}{k} \right) \left(\frac{1}{k} \right)^2 \right)^2 + \left(\left(\frac{1}{k} \right)^2 \left(\frac{1}{k} \right) \right)^2}{\left(\left(\frac{1}{k} \right)^2 + \left(\frac{1}{k} \right)^2 \right)^3}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} 2 \sqrt{\frac{\left(\left(\frac{1}{k} \right)^3 \right)^2 + \left(\left(\frac{1}{k} \right)^3 \right)^2}{8 \left(\frac{1}{k} \right)^6}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{k} \right)^6}{\left(\frac{1}{k} \right)^6}} = \sqrt{1} = 1 \neq 0 \end{aligned}$$

Die Abbildung f ist nicht Reelle differenzierbar an der Stelle $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Daraus folgt, dass h nicht Komplexe differenzierbar ist. Alternativ könnte man mit die Komplexen Differenzialquotient von h an der stelle 0.

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{h(0 + \Delta z) + h(0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}((\Delta z)^2)}{(\Delta z)^2}$$

Wir nehmen 2 verschiedene 0 Folgen. $\Delta z = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}((\frac{1}{k})^2)}{(\frac{1}{k})^2} = 1$$

und $\Delta z = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1+i}{k}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}((\frac{1+i}{k})^2)}{(\frac{1+i}{k})^2} = 0$$

Der Grenzwert ist nicht definiert und somit ist h nicht komplex differenzierbar an der Stelle 0.