Ana III Hausaufgabe, 6 Woche
Tutor: David Sering
SS 2021

Analysis III für Ingenieurwissenschaften

Juan Pardo Martin (397882) Tuan Kiet Nguyen (404029)
Leonardo Nerini (414193)

6. Juni 2021

1 Aufgabe

Berechnen Sie mit dem Integralsatz oder der Integralformel von Cauchy die Integrale

$$\int_{|z-1|=3} \frac{\cos \pi z}{z^2 - 7z + 10} dz, \text{ und } \int_{|z|=1} \tan z dz$$

und begrunden Sie Ihr Vorgehen. Benutzen Sie ohne Beweis, dass die Nüllstellen der Cosinusfunktion alle reell sind.

1.1 Antwort

a) Wir können das Integral verschieben:

$$\int_{|z+1-1|=3} \frac{\cos(\pi(z+1))}{(z+1)^2 - 7(z+1) + 10}\, dz$$

und den Nenner reduzieren.

$$\int_{|z|=3} \frac{-\cos(\pi(z))}{(-4+z)(-1+z)}\, dz$$

Sei $G = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 3 + \varepsilon, \varepsilon > 0\}$ mit eine beliebig klein ε, eine offene Gebiet ist die Punkte wo $|z| = 3$ eine Kompakte Teilmenge von G. Man kann sehen dass

$$f(z) = -\frac{\cos(\pi z)}{-4+z}$$

ist auf G analytisch, da ihre Pole ist außer den Kreis $3 + \varepsilon$. Daraus folgt

$$\int_{|z|=3} \frac{-\cos(\pi(z))}{(-4+z)(-1+z)}\, dz = 2\pi i f(1) = -2\pi i \frac{\cos(\pi)}{-3} = -\frac{2}{3}\pi i$$

b) Die polen sind die Nullstelen von $\cos(z)$, die sind alle Reelle zahlen $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ Keine nullstelle ist im Einheitskreis, also die Integral ergibt 0.

2 Aufgabe

Gegeben ist die Funktion $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto 2xy + x^2 - y^2$. Ermitteln Sie Stellen und Werte der globalen Extrema der Funktion u auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Benutzen Sie bei Bedarf die speziellen Werte

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \text{ und } \cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

2.1 Antwort

Wir wissen dass die Extrema der Funktionen sind in Rand, wir verwenden der Lagrange verfahren um Extrema zu finden Kritische punkten:

$$\nabla_{x,y} u = -\lambda \nabla_{x,y} g$$

wobei $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, Also

$$\Lambda(x,y,\lambda) = u(x,y) + \lambda \cdot g(x,y)$$

$$\nabla_{x,y} u = \begin{pmatrix} 2x + 2y \\ 2x - 2y \end{pmatrix}$$

und

$$\nabla_{x,y} g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

Wir können berechnen

$$det \begin{pmatrix} 2x + 2y & 2x \\ 2x - 2y & 2y \end{pmatrix} = 0 = -4x^2 + 8xy + 4y^2 = -4\left(x^2 - 2xy - y^2\right)$$

Wir können sehen dass wegen g liegt x und y auf der Einheitskreis. Also

$$\left(\cos(\varphi)^2 - 2\cos(\varphi)\sin(\varphi) - \sin(\varphi)^2\right) = 0$$

Wir verwenden den Hinweis und setzten wir $\varphi = \frac{\pi}{8}$ to be continued..

Alternativ können wir berechnen

$$det \begin{pmatrix} 2\lambda + 2 & 2 \\ 2 & 2\lambda - 2 \end{pmatrix} = 0 = (2\lambda + 2)(2\lambda - 2) - 4 = 4\lambda^2 - 8 \implies \lambda = \pm\sqrt{2}$$

für $\lambda = \pm\sqrt{2}$

$$2x + 2y \pm 2\sqrt{2}x = 0 \implies x\left(2 \pm 2\sqrt{2}\right) = -2y \implies y = -x\left(1 \pm \sqrt{2}\right)$$

Also

$$x^2 + x^2\left(1 \pm \sqrt{2}\right)^2 - 1 = 0 \implies x^2\left(1 + \left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)\right) = 1$$

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{4 \pm 2\sqrt{2}}} =$$

Also für $\lambda = \sqrt{2}$

$$x = \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

und

$$y = -x\left(1+\sqrt{2}\right)$$

und für $\lambda = -\sqrt{2}$

$$x = \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

und

$$y = -x\left(1-\sqrt{2}\right)$$

Wir haben hier 4 Kritischepunkten

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)\right),$$
$$\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)\right),$$
$$\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\left(1-\sqrt{2}\right)\right),$$
$$\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\left(1-\sqrt{2}\right)\right)$$

Wir evaluieren auf diesen Stellen.

$$\begin{aligned} u\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)\right) &= u\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)\right) \\ = \frac{1}{4}\left(2-\sqrt{2}\right) - \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right) - \frac{1}{4}\left(1-\sqrt{2}\right)^2\left(2-\sqrt{2}\right) &= -4+3\sqrt{2} \\ u\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\left(1-\sqrt{2}\right)\right) &= u\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\left(1-\sqrt{2}\right)\right) \\ &= -4-3\sqrt{2} \end{aligned}$$

3 Aufgabe

Mit dieser Aufgabe wollen wir ein Ergebnis mit zwei verschiedenen Methoden herleiten, nämlich mit der Methode „direkt“ und mit der Methode „Poissonsche Integralformel“. Auf einer gewissen Kreisscheibe im $\mathbb{R}^2$ sei das Randwertproblem (RWP) für eine Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{für } x^2+y^2 < 1, \\ u(x,y) &= 4x^2-2 && \text{für } x^2+y^2 = 1 \end{aligned}$$

a) Lösen Sie dieses RWP mit einer geeigneten Ansatzfunktion.

b) (Methode „direkt“:) Bestimmen Sie anhand der in a) erhaltenen Lösung u den Wert $u\left(\frac{4}{5}, 0\right)$.

c) Stellen Sie die Poissonsche Integralformel zur Berechnung des Werts $u\left(\frac{4}{5}, 0\right)$ auf (ähnlich wie in einer Tutoriumsaufgabe)

d) Schreiben Sie das Integral in Ihrer Integralformel in ein komplexes Integral über den Einheitskreis $|z| = 1$ um (ähnlich wie in einer Tutoriumsaufgabe)

e) Werten Sie Ihr komplexes Integral mit Hilfe der Cauchyschen Integralsätze und Ergebnissen aus der Vorlesung aus. (Methode, „Poissonsche Integralformel") Hierbei dürfen Sie ohne Nachweis folgende Partialbruchzerlegung benutzen:

$$\frac{1}{z^2\left(z-\frac{4}{5}\right)\left(z+\frac{5}{4}\right)} = \frac{41}{20}\cdot\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{64}{25}\cdot\frac{1}{z-\frac{5}{4}} - \frac{125}{36}\cdot\frac{1}{z-\frac{4}{5}}$$

Begründen Sie aber, warum Sie diese Identität benutzen. Der Rechenweg ist ansonsten (wie immer) vollständig darzustellen.

3.1 Antwort

a) wir nehmen die Folgende Ansatz

$$u(x,y) = 4x^2 - 2 + A(x^2 + y^2 - 1)$$

wenn $A = -2$ ist dann $u(x,y) = 2x^2 - 2y^2 \implies \Delta u = 0$

b)

$$u(\frac{4}{5},0) = 2\left(\frac{4}{5}\right)^2$$

c)

$$u\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(Re^{i\phi}\right)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\phi)+r^2}d\phi.$$

Unsere große Radius ist 1, kleine Radius und θ ist Betrag und Arg von $(\frac{4}{5},0)$. $\theta = 0; r = \frac{4}{5}$

$$u\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(e^{i\phi}\right)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(-\phi)+r^2}d\phi.$$

$$u\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(e^{i\phi}\right)\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}{1-2\left(\frac{4}{5}\right)^2\cos(-\phi)+\left(\frac{4}{5}\right)^2}d\phi.$$

$$u\left(\frac{4}{5};0\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\left(\cos^2(\phi)-\sin^2(\phi)\right)\frac{9}{41-40\cos(\phi)}d\phi$$

$$u\left(\frac{4}{5};0\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\left(\cos^2(\phi)-\sin^2(\phi)\right)\frac{9}{41-40\cos(\phi)}d\phi$$

$$u\left(\frac{4}{5};0\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\left(2\cos^2(\phi)-1\right)\frac{9}{41-40\cos(\phi)}d\phi$$

d) Wir verwenden $\cos(\phi) = \left(\frac{1}{2}\left(e^{i\phi}+e^{-i\phi}\right)\right)$

$$u\left(\frac{4}{5};0\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\left(2\left(\frac{1}{2}\left(e^{i\phi}+e^{-i\phi}\right)\right)^2-1\right)\frac{-i9e^{-i\phi}}{41-40\left(\frac{1}{2}\left(e^{i\phi}+e^{-i\phi}\right)\right)}ie^{i\phi}d\phi$$

$$u\left(\frac{4}{5};0\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}2\left(\frac{1}{2}\left(e^{i\phi}+e^{-i\phi}\right)^2-1\right)\frac{-i9e^{-i\phi}}{41-40\left(\frac{1}{2}\left(e^{i\phi}+e^{-i\phi}\right)\right)}ie^{i\phi}d\phi$$

$$u\left(\frac{4}{5};0\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}\left(\left(z+z^{-1}\right)^2-2\right)\frac{-i9z^{-1}}{41-20\left(\left(z+z^{-1}\right)\right)}dz$$

$$u\left(\frac{4}{5};0\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}\left(\left(z+z^{-1}\right)^2-2\right)\frac{-i9z^{-1}}{41-20\left(z+z^{-1}\right)}dz$$

$$u\left(\frac{4}{5};0\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)\frac{-i9z^{-1}}{41-20\left(z+z^{-1}\right)}dz$$

$$u\left(\frac{4}{5};0\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)\frac{-i9}{-20z^2+41z+20}dz$$

$$u\left(\frac{4}{5};0\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}\frac{-i9\left(-z^4-1\right)}{z^2\left(20z^2-41z+20\right)}dz$$

$$u\left(\frac{4}{5};0\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}\frac{-i9\left(-z^4-1\right)}{z^2(4z-5)(5z-4)}dz$$

$$u\left(\frac{4}{5};0\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}\frac{-i9\left(-z^4-1\right)}{(z^2)4\left(z-\frac{5}{4}\right)5\left(z-\frac{4}{5}\right)}dz$$

$$u\left(\frac{4}{5};0\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}\frac{-i9\left(-z^4-1\right)}{20(z^2)\left(z-\frac{5}{4}\right)\left(z-\frac{4}{5}\right)}dz$$

$$u\left(\frac{4}{5};0\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}\frac{i9\left(z^4+1\right)}{20(z^2)\left(z-\frac{5}{4}\right)\left(z-\frac{4}{5}\right)}dz$$

e)

$$u\left(\frac{4}{5};0\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}\frac{i9\left(z^4+1\right)}{20}\left(\frac{41}{20}\cdot\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{64}{25}\cdot\frac{1}{z-\frac{5}{4}}-\frac{125}{36}\cdot\frac{1}{z-\frac{4}{5}}\right)dz$$

$$u\left(\frac{4}{5};0\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}\frac{i9\left(z^4+1\right)}{20}\left(\frac{41}{20}\cdot\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{64}{25}\cdot\underbrace{\frac{1}{z-\frac{5}{4}}}_{\text{wird } 0}-\frac{125}{36}\cdot\frac{1}{z-\frac{4}{5}}\right)dz$$

für $\frac{1}{z-\frac{5}{4}}$ Die Polstelle ist außerhalb der Einheitskreis, es ist 0

$$u\left(\frac{4}{5};0\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}\frac{i9\left(z^4+1\right)}{20}\left(\frac{41}{20}\cdot\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{125}{36}\cdot\frac{1}{z-\frac{4}{5}}\right)dz$$

Wir verwenden die Cauchysche Integralformel

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

Unsere f ist $f(z)=(z^4+1)$ Daraus folgt:

$$u\left(\frac{4}{5};0\right)=\frac{\cancel{1}}{\cancel{2\pi}}\left(\frac{9i}{20}\right)\cancel{2\pi}i\left(-\frac{125}{36}f\left(\frac{4}{5}\right)+\frac{41}{20}f(0)+f'(0)\right)$$

$$u\left(\frac{4}{5};0\right)=\left(\frac{9i}{20}\right)i\left(-\frac{125}{36}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{4}+1\right)+\frac{41}{20}\right)$$

$$u\left(\frac{4}{5};0\right)=-\left(\frac{9}{20}\right)\left(-\frac{881}{180}+\frac{41}{20}\right)$$

$$u\left(\frac{4}{5};0\right)=\frac{32}{25}$$