

Analysis III für Ingenieurwissenschaften

Juan Pardo Martin (397882) Tuan Kiet Nguyen (404029)
Leonardo Nerini (414193)

25. April 2021

1 Aufgabe

Beweisen Sie mit Hilfe der Definition der komplexen Potenz die in der Vorlesung angegebenen Formeln

$$\text{a) } (z^p)' = pz^{p-1}, \text{ b) } (a^z)' = a^z \log(a)$$

und geben Sie dabei an, für welche komplexen Werte von z , p und a diese Formeln sinnvoll sind.

a)

$$z^p = e^{p \log(z)}$$

Wir wissen dass

$$\log(z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x - y}{r} = \frac{z\bar{z}}{z} = \frac{1}{z}$$

und

$$f(g(z))' = f'(g(z))g'(z)$$

Also

$$(e^{p \log(z)})' = e^{p \log(z)} \frac{p}{z} = p \frac{e^{p \log(z)}}{z} = p \frac{z^p}{z} = pz^{p-1}$$

In diesem fall $p \in \mathbb{C}; z \in \mathbb{G} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$

b)

$$a^z = e^{z \log(a)}$$

und

$$(e^{z \log(a)})' = e^{z \log(a)} \log(a) = a^z \log(a)$$

In diesem fall $z \in \mathbb{C}; a \in \mathbb{G} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$

2 Aufgabe

Gegeben seien von einer analytischen Funktion $f(z)$ die Eigenschaften $f(i) = i$ sowie

$$\Re f(x + iy) = y \sin x \sinh y + x \cos x \cosh y, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie diese Funktion $f(z)$.

Da f analytisch ist, wissen wir dass:

$$\Delta u(x, y) = \Delta v(x, y) = 0$$

Wir sagen

$$u(x, y) = y \sin x \sinh y + x \cos x \cosh y$$

$$\partial_x u = y \cos x \sinh y + \cosh y (\cos x - x \sin x)$$

$$\partial_x^2 u = -y \sin x \sinh y + \cosh y (-\sin x - (\sin x + x \cos x))$$

$$\partial_y u = \sin x (\sinh y + y \cosh y) + x \cosh x \sinh y$$

$$\partial_y^2 u = \sin x (\cosh y + (y \sinh y + \cosh y)) + x \cosh x \cosh y$$

$\Delta u = 0$, u ist deshalb Harmonisch Sodass f analytisch sein kann, dann f muss überall in seine Definitionsbereich differenzierbar sein. Die C-R-DGL sollen erfüllt sein:

$$\partial_x u = \partial_y v = y \cos x \sinh y + \cosh y (\cos x - x \sin x) \quad (1)$$

$$\partial_y u = -\partial_x v = (\sin x (\sinh y + y \cosh y) + x \cosh x \sinh y) \quad (2)$$

Da wir $\partial_y v$ und $\partial_x v$ haben, können wir nach Harmonizität in v prüfen.

$$\partial_y^2 v = \cos x (\sinh y + y \cosh y) + \sinh y (\cos x - x \sin x)$$

$$\partial_x^2 v = -(\cos x (\sinh y + y \cosh y) + \sinh y (\cos x - x \sin x))$$

$\Delta v = 0$, v ist deshalb Harmonisch. Und jetzt müssen wir ein $v(x, y)$ finden sodass (1) und (2) gelten. Wir integrieren

$$\int y e^y dy = e^y y - \int e^y dy = e^y y - e^y$$

$$\int y e^{-y} dy = -e^{-y} y + \int e^{-y} dy = -e^{-y} y - e^{-y}$$

Daraus folgt:

$$\int y \sinh y dy = \frac{1}{2} \int y(e^y - e^{-y}) dy = \frac{1}{2} (y(e^y + e^{-y}) - e^y + e^{-y}) = (y(\cosh y) - \sinh y)$$

Somit kann man rechnen:

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \int \partial_y v dy \\ &= \int y \cos x \sinh y + \cosh y (\cos x - x \sin x) dy \\ &= \cos x \int y \sinh y dy + \sinh y (\cosh y (\cos x - x \sin x)) \\ &= \cos x (y(\cosh y) - \sinh y) + \sinh y (\cos x - x \sin x) + C(x) \\ &= \cos x (y \cosh y) - \sinh y (x \sin x) + C(x) \end{aligned}$$

Wir leiten nach x ab um $C(x)$ herauszufinden.

$$\begin{aligned} \partial_x v &= -\sin(x)(y \cosh y) - \sinh y (\sin x + x \cos x) + C'(x) \\ &\stackrel{!}{=} -(\sin x (\sinh y + y \cosh y) + x \cosh x \sinh y) \end{aligned}$$

Dafür muss $C'(x) = 0$ bzw Konstant sein. Wir evaluieren $v(x, y)$ an der stelle $(0, 1)$

$$v(0, 1) = (\cosh 1) + C$$

Wir nehmen $C = 1 - \cosh 1$ Somit ist

$$f(x + iy) = y \sin(x) \sinh(y) + x \cos(x) \cosh(y) + i(y \cos(x) \cosh(y) - x \sin(x) \sinh(y) + 1 - \cosh 1)$$

3 Aufgabe

Gegeben sei der Viertelkreisring G mit

$$G := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0 \wedge 0 < \arctan \frac{y}{x} < \frac{\pi}{2} \wedge 1 < x^2 + y^2 < 4 \right\}$$

Finden Sie eine Funktion $u: \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}$, die das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= 0 && \text{für } (x, y) \in G \\ u(x, 0) &= 0 && \text{für } 1 \leq x \leq 2 \\ u(2 \cos(t), 2 \sin(t)) &= t \ln(2) && \text{für } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ u(0, y) &= \frac{\pi}{2} \ln y && \text{für } 1 \leq x \leq 2 \\ u(\cos(t), \sin(t)) &= 0 && \text{für } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

löst, indem Sie die *Methode der harmonischen Verpflanzung* mit der Verpflanzungsabbildung $f(z) = \log z$ verwenden.

Wir wissen das (in \overline{G}).

$$f(x + iy) = \ln(x + iy) = \log \sqrt{x^2 + y^2} + i \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Da $x \geq 0 \wedge y \geq 0$

Wir können die Rände berechnen (in \overline{G}). (Mit eine Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$)

$$(x, 0) \rightarrow (\ln|x|, 0) = (\ln x, 0)$$

$$(0, y) \rightarrow (\ln y, \frac{\pi}{2})$$

$$(a \cos(t), a \sin(t)) \rightarrow (\ln|a|, t)$$

und somit folgt:

$$u(x, 0) = 0 \quad = U(\ln x, 0)$$

$$u(0, y) = \frac{\pi}{2} \ln y = U(\ln y, \frac{\pi}{2})$$

$$u(\cos(t), \sin(t)) = 0 \quad = U(0, t)$$

$$u(2 \cos(t), 2 \sin(t)) = t \ln 2 = U(\ln 2, t)$$

Wir schreiben die übersetztes Randwertproblem.

$$U(\xi, 0) = 0 \quad \text{für } 0 \leq \xi \leq \ln 2$$

$$U(0, \eta) = 0 \quad \text{für } 0 \leq \eta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$U(\ln 2, \eta) = \eta \ln 2 \quad \text{für } 0 \leq \eta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$U(\xi, \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \xi \quad \text{für } 0 \leq \xi \leq \ln 2$$

Eine mögliche abbildung könnte sein:

$$U(\xi, \eta) = \xi \eta$$

Daraus folgt

$$u(x, y) = U(\ln \sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right)) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Da $\Delta U = 0$ und $f = \log z$ analytisch, folgt daraus, dass u Harmonisch sein muss. Also $\Delta u = 0$.