Ana III Hausaufgabe, 4 Woche
Tutor: David Sering
SS 2021

Analysis III für Ingenieurwissenschaften

Juan Pardo Martin (397882) Tuan Kiet Nguyen (404029)
Leonardo Nerini (414193)

20. Mai 2021

1 Aufgabe

Ermitteln Sie das Bild der Kurve $\gamma : t \mapsto 1 + it$ unter der Abbildung $f(z) = \frac{1}{z}$ auf zwei Weisen:

a) mit dem auf den Folien `W4V1S2` und `W4V1S3` der Vorlesung der 4. Woche verwendeten Verfahren („$\omega, \overline{\omega}$")

b) mit Hilfe der Kreistreue von Möbius-Transformationen. (Gefundene Kreisgleichungen sind zu beweisen, z.B. anhand einer Uberlegung oder durch Nachrechnen.)

1.1 Antwort

a) die Kurve γ lässt sich darstellen als einen „Kreis“ (Im sinne von einen Riemannschekugel) als

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(z) &= 1 && |z \Leftrightarrow \frac{1}{\omega} \\
\operatorname{Re}(\frac{1}{\omega}) &= 1 && |\operatorname{Re}(z) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(z+\overline{z}\right) \\
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega}+\overline{\frac{1}{\omega}}\right) &= 1 && |\omega\cdot\overline{\omega} \\
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega}+\overline{\left(\frac{1}{\omega}\right)}\right)\cdot\omega\cdot\overline{\omega} &= \omega\cdot\overline{\omega} && |\overline{\left(\frac{1}{\omega}\right)} \Leftrightarrow \frac{1}{\overline{\omega}} \\
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\overline{\omega}}\right)\cdot\omega\cdot\overline{\omega} &= \omega\cdot\overline{\omega} && \\
\frac{1}{2}\left(\overline{\omega}+\omega\right) &= \omega\cdot\overline{\omega} && |-\frac{1}{2}\left(\overline{\omega}+\omega\right) \\
\omega\cdot\overline{\omega}-\frac{1}{2}\left(\overline{\omega}+\omega\right) &= 0 && |+\frac{1}{4} \\
\omega\cdot\overline{\omega}-\frac{1}{2}\overline{\omega}-\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{4} &= \frac{1}{4} && |\omega\cdot\overline{\omega}-\frac{1}{2}\overline{\omega}-\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\omega-\frac{1}{2}\right)\left(\overline{\omega}-\frac{1}{2}\right) \\
\left(\omega-\frac{1}{2}\right)\left(\overline{\omega}-\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{4} && \\
\left|\omega-\frac{1}{2}\right|^2 &= \frac{1}{4} && |\sqrt{\cdots} \\
\left|\omega-\frac{1}{2}\right| &= \frac{1}{2} &&
\end{aligned}$$

Der Kreis $\operatorname{Re}(z) = 1$ wird auf den Kreis $\left|z-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ aufgebildet.

b) Da $\frac{1}{z}$ ist eine Inversion, und damit eine Mobiustransformation. Wir nehmen 3 beliebige t, wie $(0,1,2)$, die in γ zu $(1, 1+i, 1+2i)$ abgebildet sind. Diese punkten werden durch f in $\left(1, \frac{1-i}{2}, \frac{1-2i}{5}\right)$ Wir wissen dass diese Punkten einen Kreis abbilden. Wir können versuche der Zentrum und Radius zu finden so:

$$|z-c| = r,$$

wobei $c \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}^+$ ist für die Folgende Gleichungsystem

$$\begin{aligned}
|1-c| &= r \\
\left|\frac{1-i}{2}-c\right| &= r \\
\left|\frac{1-2i}{5}-c\right| &= r
\end{aligned}$$

oder

$$(1-\mathrm{Re}(c))^2+\mathrm{Im}(c)^2=r^2 \tag{1}$$
$$\left(\frac{1}{2}-\mathrm{Re}(c)\right)^2+\left(-\frac{1}{2}-\mathrm{Im}(c)\right)^2=r^2 \tag{2}$$
$$\left(\frac{1}{5}-\mathrm{Re}(c)\right)^2+\left(-\frac{2}{5}-\mathrm{Im}(c)\right)^2=r^2 \tag{3}$$

Wir beobachten, dass (2) und (3) gleich (1) sind.

$$\left(\frac{1}{2}-\mathrm{Re}(c)\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\mathrm{Im}(c)\right)^2=(1-\mathrm{Re}(c))^2+\mathrm{Im}(c)^2$$
$$\left(\frac{1}{5}-\mathrm{Re}(c)\right)^2+\left(\frac{2}{5}+\mathrm{Im}(c)\right)^2=(1-\mathrm{Re}(c))^2+\mathrm{Im}(c)^2$$

Wir multiplizieren aus.

$$\begin{aligned}\cancel{\mathrm{Im}(c)^2}+\mathrm{Im}(c)+\cancel{\mathrm{Re}(c)^2}-\mathrm{Re}(c)+\frac{1}{2}&=\cancel{\mathrm{Im}(c)^2+\mathrm{Re}(c)^2}-2\,\mathrm{Re}(c)+1\\ \cancel{\mathrm{Im}(c)^2}+\frac{4\,\mathrm{Im}(c)}{5}+\cancel{\mathrm{Re}(c)^2}-\frac{2\,\mathrm{Re}(c)}{5}+\frac{1}{5}&=\cancel{\mathrm{Im}(c)^2+\mathrm{Re}(c)^2}-2\,\mathrm{Re}(c)+1\\ \mathrm{Im}(x)+\mathrm{Re}(c)&=\frac{1}{2}\\ \frac{4\,\mathrm{Im}(c)}{5}+\frac{8\,\mathrm{Re}(c)}{5}&=\frac{4}{5}\end{aligned}$$

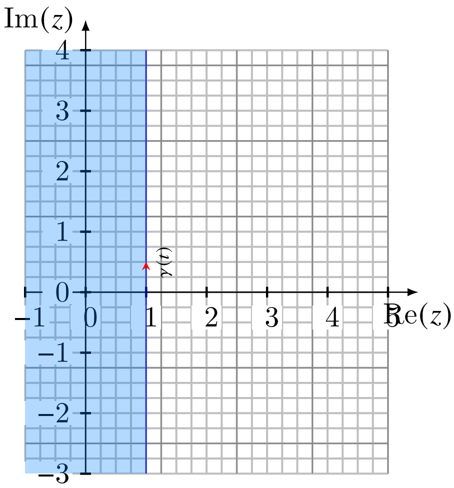
oder

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & 1\\ \frac{8}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathrm{Re}(c)\\ \mathrm{Im}(c)\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{4}{5}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\mathrm{Re}(c)\\ \mathrm{Im}(c)\end{pmatrix}&=-\frac{5}{4}\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & -1\\ -\frac{8}{5} & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{4}{5}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\mathrm{Re}(c)\\ \mathrm{Im}(c)\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

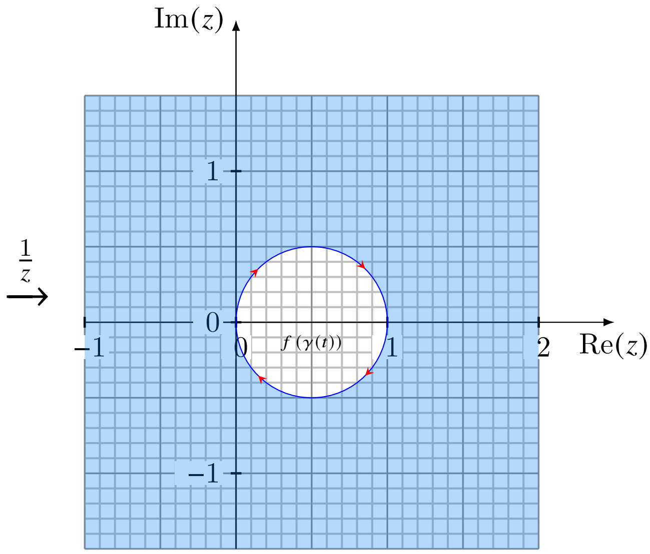
Also $c=\frac{1}{2}$, jetzt um r zu finden. Wir ersetzen diese Ergebnis in (1) und somit ist $r=\frac{1}{2}$ Also wir haben den Kreis $\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ Wir wollen nun herausfinden, was für Durchlaufsinn, wo $Re(z)<1$ abgebildet ist, hat. Die Richtung lässt sich bestimmen in den man $\partial_t f(\gamma(t))$ an einen Punkt berechnet

$$\begin{aligned}\partial_t\frac{1-it}{1+t^2}&=-\frac{2(1-it)t}{\left(t^2+1\right)^2}-\frac{i}{t^2+1}\\ =-\frac{2t}{\left(t^2+1\right)^2}+i\left(\frac{2t^2}{\left(t^2+1\right)^2}-\frac{1}{t^2+1}\right)&\quad |t\to 0\\ &=-i\end{aligned}$$

An der Punkt $(1,0)$ entspricht dass eine Durchrichtung im Uhrsinn, das bedeutet dass $Re(z)<2$ wird Außerhalb dieses Kreis abgebildet.



(a) Kurve vor f



(b) Kurve nach f

Abbildung 1: Möbiustransform

2 Aufgabe

Bestimmen Sie eine Möbius-Transformation f, welche erstens die Eigenschaft $f(1+i) = -\frac{1+i}{2}$ hat und zweitens die von links nach rechts durchlaufene reelle Achse $\rightarrow$ mit der von unten nach oben durchlaufenen imaginären Achse $\uparrow$ vertauscht und außerdem den im Ursprung zentrierten und im positiven Drehsinn durchlaufenen Einheitskreis $\circlearrowleft$ in denselben Kreis $\circlearrowright$, aber mit negativem Durchlaufssinn, überführt:

$$f(\rightarrow) = \uparrow, \quad f(\uparrow) = \rightarrow, \quad f(\circlearrowleft) = \circlearrowright$$

2.1 Antwort

Wir wissen dass die Inverse $\frac{1}{z}$ bildet die Einheitskreis in denselben Kreis aber mit anderen Durchlaufsinn. Außerdem Rotationen sind Multiplikation mit werte der Einheitskreis, wenn wir $-i$ multiplizieren Rotieren wir der Kreis um 90 grad, wir können diese Funktionen komponieren (Es gibt nur 2 Rotationen möglich, sodass horizontalen und vertikalen Achsen vertauscht sind, multiplikation mit i oder mit $-i$, und wir könen auch nicht skalieren, da sonst verlassen wir den Einheitskreis) : $f(z) = z \cdot -i \circ \frac{1}{z} = -\frac{i}{z}$ Wir prüfen.

$$f(1+i) = -\frac{i}{1+i} = -\frac{1+i}{2}$$

3 Aufgabe

Gegeben sei das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \quad \text{für } y > 0 \text{ und } x^2 + (y-4)^2 > 1, \\ u(x,y) &= 0, \quad \text{für } y = 0, \\ u(x,y) &= 1, \quad \text{für } x^2 + (y-4)^2 = 1 \end{aligned}$$

Lösen Sie es mit der Methode der harmonischen Verpflanzung, indem Sie als Verpflanzungsabbildung die Funktion

$$T(z) = \frac{z - i\sqrt{15}}{z + i\sqrt{15}}$$

und als Ansatzfunktion die harmonische Funktion $\ln\left(x^2 + y^2\right)$ benutzen.

3.1 Antwort

Sei $\mathrm{ReIm}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2, \quad x + iy \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ Wir trennen die imaginären und reellen Teilen von T.

$$T(x+iy) = \frac{(x+iy) - i\sqrt{15}}{(x+iy) + i\sqrt{15}} = \frac{x^2 + y^2 - 15 - i2\sqrt{15}}{x^2 + (\sqrt{15} + y)^2}$$

$$\mathrm{ReIm}(T(x+iy)) = \frac{1}{x^2 + (\sqrt{15} + y)^2} \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 15 \\ -2\sqrt{15} \end{pmatrix}$$

Wir finden heraus, wo die Rände abgebildet sind.
Wir nehmen 3 Punkten für Kreis $\mathrm{Im}(z) = 0$.
zum Beispiel, Punkte $(0, 1, \infty)$, sind in $\left(-1, \frac{1-\sqrt{15}}{1+\sqrt{15}}, 1\right)$ abgebildet.
Wir simplifizieren:

$$\frac{1 - \sqrt{15}}{1 + \sqrt{15}} = \frac{1}{16}(1 - i\sqrt{15})^2 = \frac{1}{8}\left(7 - i\sqrt{15}\right).$$

Also die Einheitskreis, wo $\mathrm{Im}(z)$ zu $|z| > 1$ abgebildet wird.
Wir nehmen wieder 3 punkten für Kreis $|z - i4| > 1$.
Z.b $(i5, i3, 1 + i4)$.
Also

$$T(1 + i4) = \frac{(1 + 4i) - i\sqrt{15}}{(1 + 4i) + i\sqrt{15}} = -1 + \frac{8 - 2i}{\sqrt{15} + (4 - i)}$$

$$T(i5) = \frac{5i - i\sqrt{15}}{5i + i\sqrt{15}} = \frac{5 - \sqrt{15}}{5 + \sqrt{15}} = 4 - \sqrt{15}$$

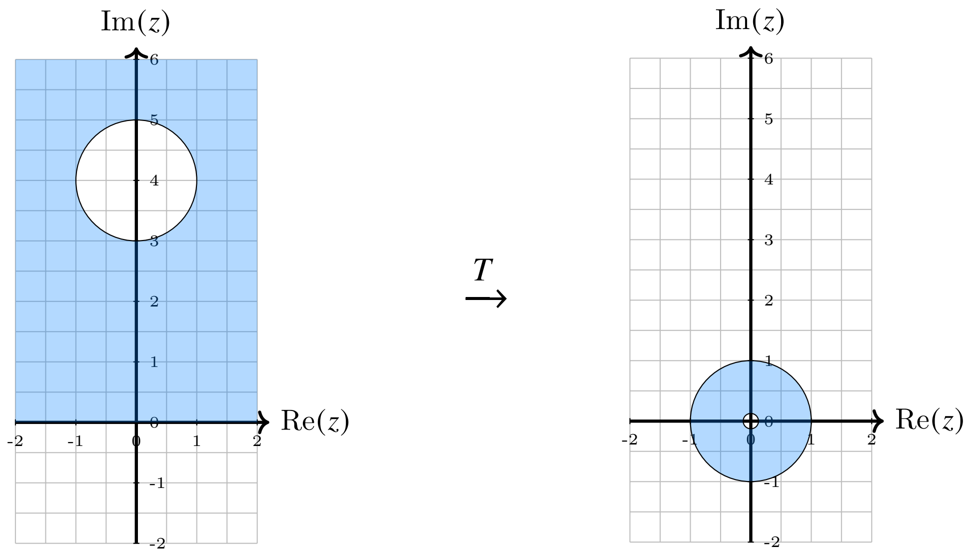
$$T(i3) = \frac{3i - i\sqrt{15}}{3i + i\sqrt{15}} = \frac{3 - \sqrt{15}}{3 + \sqrt{15}} = -4 + \sqrt{15}$$

Wir finden die imaginären und reellen Teilen von $T(1+i4)$ und finden wir ihre Betrag

$$T(1+i4) = -1 + \frac{8-2i}{\sqrt{15}+(4-i)} = -1 + \frac{2+8(4+\sqrt{15})}{1+\left(4+\sqrt{15}\right)^2} + i\left(\frac{8-2\left(4+\sqrt{15}\right)}{1+\left(4+\sqrt{15}\right)^2}\right) = \frac{1-i\sqrt{15}}{4(4+\sqrt{15})}$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{15}}{4} + i\left(\frac{15}{4} - \sqrt{15}\right)$$

$$|T(1+i4)| = \sqrt{\left(1-\frac{15}{4}\right)^2 + \left(\frac{15}{4} - \sqrt{15}\right)^2} = \sqrt{\frac{31}{16} - \sqrt{15}2 + \frac{465}{16} - \frac{15\sqrt{15}}{2}} = \sqrt{31-8\sqrt{15}} = 4 - \sqrt{15}$$



(a) $y > 0$ und $x^2 + (y-4)^2 > 1$ (b) $31 - 8\sqrt{15} < \xi^2 + \chi^2 < 1$

Abbildung 2: Möbiustransform Aufgabe 3

Wir können deutlich sehen, dass alle die Punkten haben betrag $4-\sqrt{15}$, das bedeutet, sie bilden einen Kreis im Ursprung mit einen Radius von $4-\sqrt{15}$ Wir schreiben unsere Randwertproblem um.

$$\begin{aligned} \Delta U(\xi,\chi) &= 0, \quad \text{für } 31 - 8\sqrt{15} < \xi^2 + \chi^2 < 1 \\ U(\xi,\chi) &= 0, \quad \text{für } \xi^2 + \chi^2 = 1 \\ U(\xi,\chi) &= 1, \quad \text{für } \xi^2 + \chi^2 = 31 - 8\sqrt{15} \end{aligned}$$

Wir verwenden den Ansatz $U = A\ln\left(\xi^2+\chi^2\right) + B$

$$\begin{aligned} 0 &= A\ln\left(\xi^2+\chi^2\right) + B = A\ln(1) + B & &\Longrightarrow B = 0 \\ 1 &= A\ln\left(\xi^2+\chi^2\right) \quad = A\ln\left(31-8\sqrt{15}\right) & &\Longrightarrow A = \frac{1}{\ln\left(31-8\sqrt{15}\right)} \end{aligned}$$

$$\therefore\ U(\xi,\chi) = \frac{1}{\ln\left(31 - 8\sqrt{15}\right)} \ln\left(\xi^2 + \chi^2\right)$$

Wir finden $u(x, y)$ folgendes:

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= U(\mathrm{ReIm}(T(x + iy))) \\
u(x,y) &= U(\frac{1}{x^2 + (\sqrt{15}+y)^2}\left(x^2 + y^2 - 15\right), \frac{1}{x^2 + (\sqrt{15}+y)^2}\left(-2\sqrt{15}\right)) \\
u(x,y) &= \frac{1}{\ln\left(31 - 8\sqrt{15}\right)} \ln\left(\left(\frac{1}{x^2 + (\sqrt{15}+y)^2}\left(x^2 + y^2 - 15\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{x^2 + (\sqrt{15}+y)^2}\left(-2\sqrt{15}\right)\right)^2\right) \\
u(x,y) &= \frac{1}{\ln\left(31 - 8\sqrt{15}\right)} \left(\ln\left(\left(x^2 + y^2 - 15\right)^2 + 60\right) - 2\ln\left(x^2 + (\sqrt{15}+y)^2\right)\right) \\
u(x,y) &= \frac{\ln\left(1 - \frac{4\sqrt{15}y}{x^2+y^2+2\sqrt{15}y+15}\right)}{\ln\left(31 - 8\sqrt{15}\right)}
\end{aligned}$$