Ana III Hausaufgabe, 1 Woche
Tutor: David Sering
SS 2021

Analysis III für Ingenieurwissenschaften

Juan Pardo Martin (397882) Tuan Kiet Nguyen (404029)
Leonardo Nerini (414193)

9. Mai 2021

1 Aufgabe

Stellen Sie die folgenden Terme komplexer Funktionen in der Form $u(x, y) + iv(x, y)$ dar, wobei $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ eine komplexe Zahl und $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen sind. Geben Sie hierbei die Funktionsterme $u(x, y)$ und $v(x, y)$ explizit an.

$$\text{a) } e^{-iz^2},\ \text{b) } z\overline{z}^2 + \overline{z}z^2$$

a) Wir ersetzen $z = x + iy$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$

$$e^{-i(x+iy)^2}$$

Wir multiplizieren die Exponente aus.

$$e^{-ix^2+2xy+iy^2}$$

Wir klamern wir die imaginäre teil aus.

$$e^{2xy}e^{-ix^2+iy^2}$$

Wir anwenden die Eulersche Identität

$$e^{2xy}\left(\cos\left(x^2 - y^2\right) - i\sin\left(x^2 - y^2\right)\right)$$

$$\left(\underbrace{e^{2xy}\cos\left(x^2 - y^2\right)}_{u(x,y)} - i\,\underbrace{e^{2xy}\sin\left(x^2 - y^2\right)}_{v(x,y)}\right)$$

b)

$$z\overline{z}^2 + \overline{z}z^2$$

$$(x+iy)(x-iy)^2 + (x+iy)^2(x-iy)$$

$$x^3 - ix^2y + xy^2 - iy^3 + x^3 + ix^2y + xy^2 + iy^3$$

$$\underbrace{2x^3 + 2xy^2}_{u(x,y)} + \underbrace{0}_{v(x,y)}$$

2 Aufgabe

Konstruieren Sie eine auf ganz $\mathbb{C}$ definierte Funktion f, die genau auf der Geraden $\{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} z = 2 \operatorname{Im} z\}$ komplex differenzierbar ist und an der Stelle $2+i$ den Wert 2 annimmt. Der Funktionsterm $f(z)$ ist als Term in der Variablen z zu schreiben.

$$f(2+i) = 2$$

Wir nutzen die Folgende funktion als Ansatz:

$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \frac{\operatorname{Re}(z)^2}{2} + i(\operatorname{Im}(z)^2) - i$$

$$\partial_x u = x = 2y = \partial_y v$$

$$\partial_y u = 0 = 0 = -\partial_x v$$

Die Cauchy Riemann DGL bedingungen werden nur erfüllt für punkten die an der Gerade $\operatorname{Re} z = 2 \operatorname{Im} z$ liegen. Da alle die partielle Ableitungen stetig sind, ist es im sinne von $\mathbb{R}^2$ Reelle differenzierbar. An der stelle $(2+i)$ unsere funktion liefert $\frac{4}{2} + i - i = 2$, also stimmt es. f entspricht die Bedingungen.

3 Aufgabe

Gegeben ist die komplexe Funktion g mit

$$h(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re}(z^2)}{z} & \text{für } z \neq 0 \\ 0 & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Funktion g im Punkt 0 die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen erfullt, aber nicht komplex-differenzierbar ist.

$$h(x+iy) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re}((x+iy)^2)}{(x+iy)} & \text{für } z \neq 0 \\ 0 & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

$$h(x+iy) = \begin{cases} \frac{\mathrm{Re}\left(x^2+2ixy-y^2\right)}{(x+iy)} & \text{für } z \neq 0 \\ 0 & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

$$h(x+iy) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{(x+iy)} & \text{für } z \neq 0 \\ 0 & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

$$h(x+iy) = \begin{cases} \frac{(x^2-y^2)(x-iy)}{(x^2+y^2)} & \text{für } z \neq 0 \\ 0 & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

$$u(x,y) = \begin{cases} \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)} & \text{für } \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\ 0 & \text{für } \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \end{cases}$$

$$v(x,y) = \begin{cases} -\frac{y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)} & \text{für } \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \\ 0 & \text{für } \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \end{cases}$$

Die Cauchy-Riemann bedingungen lauten.

$$\partial_x u \overset{!}{=} \partial_y v \tag{1}$$

$$\partial_y u \overset{!}{=} -\partial_x v \tag{2}$$

für $\partial_x u$ im Punkt 0

$$\partial_x u(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(h,0) - \overbrace{u(0,0)}^{0}}{h} = \frac{h^3}{h^3} = 1$$

$$\partial_y v(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{v(0,h) - \overbrace{v(0,0)}^{0}}{h} = \frac{h^3}{h^3} = 1$$

Somit (1) gilt.

$$\partial_y u(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{u(0,h)}^{0} - \overbrace{u(0,0)}^{0}}{h} = 0$$

$$\partial_x v(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{v(h,0)}^{0} - \overbrace{v(0,0)}^{0}}{h} = 0$$

Daraus folgt (2) stimmt auch Die Cauchy-Riemannsche bedingungen stimmen, aber es ist nicht hinreichend für Komplexe differenzierbarkeit, wir müssen zeigen dass die Abbildung

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

Reelle differenzierbar sein. Wir untersuchen die differenzierbarkeit an der stelle $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Wir berechnen die Funktionalmatrize an der stelle $\binom{0}{0}$

$$f'(0,0) = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wenn

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\left|f(\Delta x,\Delta y) - f(0,0) - f'(0,0)\binom{\Delta x}{\Delta y}\right|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

0 wäre, dann wäre es komplexe differenzierbar.

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\left|\binom{u(\Delta x,\Delta y)}{v(\Delta x,\Delta y)} - \overbrace{f(0,0)}^{0} - \binom{\Delta x}{\Delta y}\right|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\left|\begin{pmatrix} \frac{(\Delta x)((\Delta x)^2-(\Delta y)^2)}{((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)} - \Delta x \\ -\frac{(\Delta y)((\Delta x)^2-(\Delta y)^2)}{((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)} - \Delta y \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

$$= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \sqrt{\frac{\left(\frac{(\Delta x)((\Delta x)^2-(\Delta y)^2)}{((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)} - \Delta x\right)^2 + \left(-\frac{(\Delta y)((\Delta x)^2-(\Delta y)^2)}{((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)} - \Delta y\right)^2}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

$$= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \sqrt{\frac{\left(-\frac{2(\Delta x)(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)^2 + \left(-\frac{2(\Delta x)^2(\Delta y)}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)^2}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

$$= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \sqrt{\frac{\left(\frac{2(\Delta x)(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)^2 + \left(\frac{2(\Delta x)^2(\Delta y)}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)^2}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

$$= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \sqrt{\frac{(2(\Delta x)(\Delta y)^2)^2 + (2(\Delta x)^2(\Delta y))^2}{((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)^3}}$$

$$= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} 2\sqrt{\frac{((\Delta x)(\Delta y)^2)^2 + ((\Delta x)^2(\Delta y))^2}{((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)^3}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} 2\sqrt{\frac{\left((\tfrac{1}{k})(\tfrac{1}{k})^2\right)^2 + \left((\tfrac{1}{k})^2(\tfrac{1}{k})\right)^2}{\left((\tfrac{1}{k})^2 + (\tfrac{1}{k})^2\right)^3}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} 2\sqrt{\frac{\left((\tfrac{1}{k})^3\right)^2 + \left((\tfrac{1}{k})^3\right)^2}{8(\tfrac{1}{k})^6}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{(\tfrac{1}{k})^6}{(\tfrac{1}{k})^6}} = \sqrt{1} = 1 \neq 0$$

Die Abbildung f ist nicht Reelle differenzierbar an der Stelle $\binom{0}{0}$ Daraus folgt, dass h nicht Komplexe differenzierbar ist. Alternativ könnte man mit die Komplexen Differenzialquotient von h an der stelle 0.

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{h(0+\Delta z) + h(0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\mathrm{Re}((\Delta z)^2)}{(\Delta z)^2}$$

Wir nehmen 2 verschiedene 0 Folgen. $\Delta z = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}$

$$\lim_{k\to\infty} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\mathrm{Re}((\frac{1}{k})^2)}{(\frac{1}{k})^2} = 1$$

und $\Delta z = \lim_{k\to\infty} \frac{1+i}{k}$

$$\lim_{k\to\infty} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\mathrm{Re}((\frac{1+i}{k})^2)}{(\frac{1+i}{k})^2} = 0$$

Der Grenzwert ist nicht definiert und somit ist h nicht komplex differenzierbar an der Stelle 0.