

Ana III Hausaufgabe, 4 Woche  
Tutor: David Sering  
SS 2021

# Analysis III für Ingenieurwissenschaften

Juan Pardo Martin (397882)      Tuan Kiet Nguyen (404029)  
Leonardo Nerini (414193)

23. Mai 2021

## 1 Aufgabe

Ermitteln Sie das Bild der Kurve  $\gamma : t \mapsto 1 + it$  unter der Abbildung  $f(z) = \frac{1}{z}$  auf zwei Weisen:

- a) mit dem auf den Folien W4V1S2 und W4V1S3 der Vorlesung der 4. Woche verwendeten Verfahren („ $\omega, \bar{\omega}$ “)
- b) mit Hilfe der Kreistreue von Möbius-Transformationen. (Gefundene Kreisgleichungen sind zu beweisen, z.B. anhand einer Überlegung oder durch Nachrechnen.)

## 1.1 Antwort

- a) die Kurve  $\gamma$  lässt sich darstellen als einen „Kreis“ (Im sinne von einen Riemannschekugel)  
als

$$\begin{array}{ll}
 \operatorname{Re}(z) = 1 & |z \Leftrightarrow \frac{1}{\omega} \\
 \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\omega}\right) = 1 & |\operatorname{Re}(z) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \\
 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega} + \overline{\frac{1}{\omega}}\right) = 1 & |\omega \cdot \bar{\omega} \\
 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega} + \overline{\left(\frac{1}{\omega}\right)}\right) \cdot \omega \cdot \bar{\omega} = \omega \cdot \bar{\omega} & |\left(\frac{1}{\omega}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{\bar{\omega}} \\
 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\bar{\omega}}\right) \cdot \omega \cdot \bar{\omega} = \omega \cdot \bar{\omega} & \\
 \frac{1}{2}(\bar{\omega} + \omega) = \omega \cdot \bar{\omega} & | - \frac{1}{2}(\bar{\omega} + \omega) \\
 \omega \cdot \bar{\omega} - \frac{1}{2}(\bar{\omega} + \omega) = 0 & | + \frac{1}{4} \\
 \omega \cdot \bar{\omega} - \frac{1}{2}\bar{\omega} - \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} & |\omega \cdot \bar{\omega} - \frac{1}{2}\bar{\omega} - \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\omega - \frac{1}{2}\right)\left(\bar{\omega} - \frac{1}{2}\right) \\
 \left(\omega - \frac{1}{2}\right)\left(\bar{\omega} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} & \\
 \left|\omega - \frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4} & |\sqrt{\dots} \\
 \left|\omega - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} & 
 \end{array}$$

Der Kreis  $\operatorname{Re}(z) = 1$  wird auf den Kreis  $\left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$  abgebildet.

- b) Da  $\frac{1}{z}$  ist eine Inversion, und damit eine Möbiustransformation. Wir nehmen 3 beliebige  $t$ , wie  $(0, 1, 2)$ , die in  $\gamma$  zu  $(1, 1+i, 1+2i)$  abgebildet sind. Diese punkten werden durch  $f$  in  $(1, \frac{1-i}{2}, \frac{1-2i}{5})$  Wir wissen dass diese Punkten einen Kreis abbilden. Wir können versuche der Zentrum und Radius zu finden so:

$$|z - c| = r,$$

wobei  $c \in \mathbb{C}$  und  $r \in \mathbb{R}^+$  ist für die Folgende Gleichungssystem

$$\begin{array}{l}
 |1 - c| = r \\
 \left|\frac{1-i}{2} - c\right| = r \\
 \left|\frac{1-2i}{5} - c\right| = r
 \end{array}$$

oder

$$(1 - \operatorname{Re}(c))^2 + \operatorname{Im}(c)^2 = r^2 \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{2} - \operatorname{Re}(c)\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - \operatorname{Im}(c)\right)^2 = r^2 \quad (2)$$

$$\left(\frac{1}{5} - \operatorname{Re}(c)\right)^2 + \left(-\frac{2}{5} - \operatorname{Im}(c)\right)^2 = r^2 \quad (3)$$

Wir beobachten, dass (2) und (3) gleich (1) sind.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} - \operatorname{Re}(c)\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \operatorname{Im}(c)\right)^2 &= (1 - \operatorname{Re}(c))^2 + \operatorname{Im}(c)^2 \\ \left(\frac{1}{5} - \operatorname{Re}(c)\right)^2 + \left(\frac{2}{5} + \operatorname{Im}(c)\right)^2 &= (1 - \operatorname{Re}(c))^2 + \operatorname{Im}(c)^2 \end{aligned}$$

Wir multiplizieren aus.

$$\begin{aligned} \cancel{\operatorname{Im}(c)^2} + \operatorname{Im}(c) + \cancel{\operatorname{Re}(c)^2} - \operatorname{Re}(c) + \frac{1}{2} &= \cancel{\operatorname{Im}(c)^2} + \cancel{\operatorname{Re}(c)^2} - 2\operatorname{Re}(c) + 1 \\ \cancel{\operatorname{Im}(c)^2} + \frac{4\operatorname{Im}(c)}{5} + \cancel{\operatorname{Re}(c)^2} - \frac{2\operatorname{Re}(c)}{5} + \frac{1}{5} &= \cancel{\operatorname{Im}(c)^2} + \cancel{\operatorname{Re}(c)^2} - 2\operatorname{Re}(c) + 1 \\ \operatorname{Im}(c) + \operatorname{Re}(c) &= \frac{1}{2} \\ \frac{4\operatorname{Im}(c)}{5} + \frac{8\operatorname{Re}(c)}{5} &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{8}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(c) \\ \operatorname{Im}(c) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(c) \\ \operatorname{Im}(c) \end{pmatrix} &= -\frac{5}{4} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -1 \\ -\frac{8}{5} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(c) \\ \operatorname{Im}(c) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also  $c = \frac{1}{2}$ , jetzt um  $r$  zu finden. Wir ersetzen diese Ergebnis in (1) und somit ist  $r = \frac{1}{2}$   
 Also wir haben den Kreis  $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$  Wir wollen nun herausfinden, was für Durchlaufsin, wo  $\operatorname{Re}(z) < 1$  abgebildet ist, hat. Die Richtung lässt sich bestimmen in den man  $\partial_t f(\gamma(t))$  an einen Punkt berechnet

$$\begin{aligned} \partial_t \frac{1-it}{1+t^2} &= -\frac{2(1-it)t}{(t^2+1)^2} - \frac{i}{t^2+1} \\ &= -\frac{2t}{(t^2+1)^2} + i \left( \frac{2t^2}{(t^2+1)^2} - \frac{1}{t^2+1} \right) \quad |t \rightarrow 0 \\ &= -i \end{aligned}$$

An der Punkt  $(1,0)$  entspricht dass eine Durchrichtung im Uhrsinn, das bedeutet dass  $\operatorname{Re}(z) < 2$  wird Außerhalb dieses Kreis abgebildet.

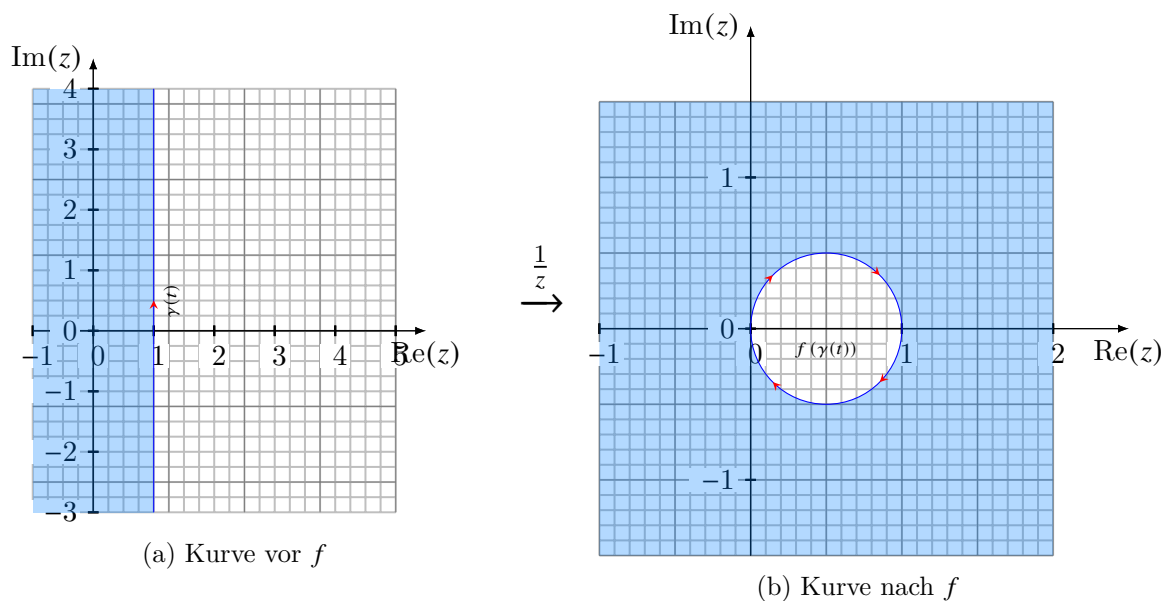


Abbildung 1: Möbiustransform

## 2 Aufgabe

Bestimmen Sie eine Möbius-Transformation  $f$ , welche erstens die Eigenschaft  $f(1+i) = -\frac{1+i}{2}$  hat und zweitens die von links nach rechts durchlaufene reelle Achse  $\rightarrow$  mit der von unten nach oben durchlaufenen imaginären Achse  $\uparrow$  vertauscht und außerdem den im Ursprung zentrierten und im positiven Drehsinn durchlaufenen Einheitskreis  $\cup$  in denselben Kreis  $\cup$ , aber mit negativem Durchlaufssinn, überführt:

$$f(\rightarrow) = \uparrow, \quad f(\uparrow) = \rightarrow, \quad f(\cup) = \bar{\cup}$$

### 2.1 Antwort

Wir wissen dass die Inverse  $\frac{1}{z}$  bildet die Einheitskreis in denselben Kreis aber mit anderen Durchlaufssinn. Außerdem Rotationen sind Multiplikation mit werte der Einheitskreis, wenn wir  $-i$  multiplizieren Rotieren wir der Kreis um 90 grad, wir können diese Funktionen komponieren (Es gibt nur 2 Rotationen möglich, sodass horizontalen und vertikalen Achsen vertauscht sind, multiplikation mit  $i$  oder mit  $-i$ , und wir können auch nicht skalieren, da sonst verlassen wir den Einheitskreis) :  $f(z) = z \cdot -i \circ \frac{1}{z} = -\frac{i}{z}$  Wir prüfen.

$$f(1+i) = -\frac{i}{1+i} = -\frac{1+i}{2}$$

### 3 Aufgabe

Gegeben sei das Randwertproblem

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0, & \text{für } y > 0 \text{ und } x^2 + (y-4)^2 > 1, \\ u(x, y) &= 0, & \text{für } y = 0, \\ u(x, y) &= 1, & \text{für } x^2 + (y-4)^2 = 1\end{aligned}$$

Lösen Sie es mit der Methode der harmonischen Verpflanzung, indem Sie als Verpflanzungsabbildung die Funktion

$$T(z) = \frac{z - i\sqrt{15}}{z + i\sqrt{15}}$$

und als Ansatzfunktion die harmonische Funktion  $\ln(x^2 + y^2)$  benutzen.

#### 3.1 Antwort

Sei  $\text{ReIm}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  Wir trennen die imaginären und reellen Teilen von  $T$ .

$$T(x + iy) = \frac{(x + iy) - i\sqrt{15}}{(x + iy) + i\sqrt{15}} = \frac{x^2 + y^2 - 15 - i2\sqrt{15}}{x^2 + (\sqrt{15} + y)^2}$$

$$\text{ReIm}(T(x + iy)) = \frac{1}{x^2 + (\sqrt{15} + y)^2} \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 15 \\ -2\sqrt{15} \end{pmatrix}$$

Wir finden heraus, wo die Rände abgebildet sind.

Wir nehmen 3 Punkten für Kreis  $\text{Im}(z) = 0$ .

zum Beispiel, Punkte  $(0, 1, \infty)$ , sind in  $\left(-1, \frac{1-\sqrt{15}}{1+\sqrt{15}}, 1\right)$  abgebildet.

Wir simplifizieren:

$$\frac{1 - \sqrt{15}}{1 + \sqrt{15}} = \frac{1}{16} (1 - i\sqrt{15})^2 = \frac{1}{8} (7 - i\sqrt{15}).$$

Also die Einheitskreis, wo  $\text{Im}(z)$  zu  $|z| > 1$  abgebildet wird.

Wir nehmen wieder 3 punkten für Kreis  $|z - i4| > 1$ .

Z.b  $(i5, i3, 1 + i4)$ .

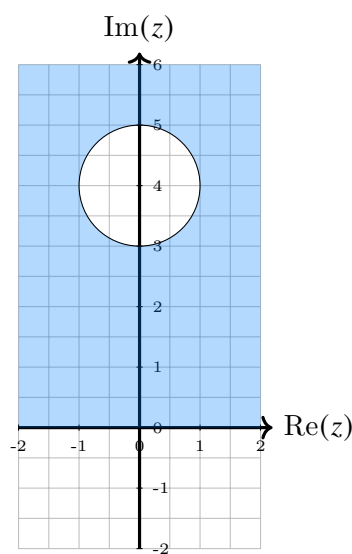
Also

$$\begin{aligned}T(1 + i4) &= \frac{(1 + 4i) - i\sqrt{15}}{(1 + 4i) + i\sqrt{15}} = -1 + \frac{8 - 2i}{\sqrt{15} + (4 - i)} \\ T(i5) &= \frac{5i - i\sqrt{15}}{5i + i\sqrt{15}} = \frac{5 - \sqrt{15}}{5 + \sqrt{15}} = 4 - \sqrt{15} \\ T(i3) &= \frac{3i - i\sqrt{15}}{3i + i\sqrt{15}} = \frac{3 - \sqrt{15}}{3 + \sqrt{15}} = -4 + \sqrt{15}\end{aligned}$$

Wir finden die imaginären und reellen Teile von  $T(1+i4)$  und finden wir ihre Betrag

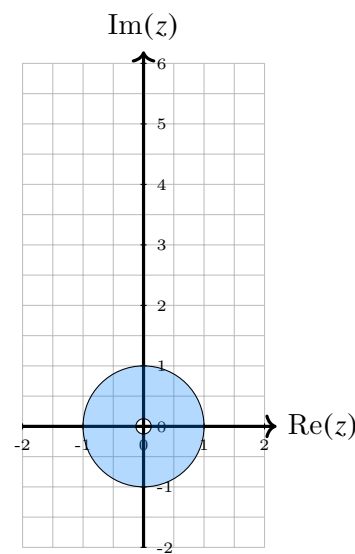
$$\begin{aligned} T(1+i4) &= -1 + \frac{8-2i}{\sqrt{15}+(4-i)} = -1 + \frac{2+8(4+\sqrt{15})}{1+(4+\sqrt{15})^2} + i \left( \frac{8-2(4+\sqrt{15})}{1+(4+\sqrt{15})^2} \right) = \frac{1-i\sqrt{15}}{4(4+\sqrt{15})} \\ &= 1 - \frac{\sqrt{15}}{4} + i \left( \frac{15}{4} - \sqrt{15} \right) \end{aligned}$$

$$|T(1+i4)| = \sqrt{\left(1 - \frac{15}{4}\right)^2 + \left(\frac{15}{4} - \sqrt{15}\right)^2} = \sqrt{\frac{31}{16} - \sqrt{15} + \frac{465}{16} - \frac{15\sqrt{15}}{2}} = \sqrt{31 - 8\sqrt{15}} = 4 - \sqrt{15}$$



(a)  $y > 0$  und  $x^2 + (y-4)^2 > 1$

$T \rightarrow$



(b)  $31 - 8\sqrt{15} < \xi^2 + \chi^2 < 1$

Abbildung 2: Möbiustransform Aufgabe 3

Wir können deutlich sehen, dass alle die Punkten haben betrag  $4 - \sqrt{15}$ , das bedeutet, sie bilden einen Kreis im Ursprung mit einen Radius von  $4 - \sqrt{15}$  Wir schreiben unsere Randwertproblem um.

$$\begin{aligned} \Delta U(\xi, \chi) &= 0, \quad \text{für } 31 - 8\sqrt{15} < \xi^2 + \chi^2 < 1 \\ U(\xi, \chi) &= 0, \quad \text{für } \xi^2 + \chi^2 = 1 \\ U(\xi, \chi) &= 1, \quad \text{für } \xi^2 + \chi^2 = 31 - 8\sqrt{15} \end{aligned}$$

Wir verwenden den Ansatz  $U = A \ln(\xi^2 + \chi^2) + B$

$$\begin{aligned} 0 &= A \ln(\xi^2 + \chi^2) + B = A \ln(1) + B \implies B = 0 \\ 1 &= A \ln(\xi^2 + \chi^2) = A \ln(31 - 8\sqrt{15}) \implies A = \frac{1}{\ln(31 - 8\sqrt{15})} \end{aligned}$$

$$\therefore U(\xi, \chi) = \frac{1}{\ln(31 - 8\sqrt{15})} \ln(\xi^2 + \chi^2)$$

Wir finden  $u(x, y)$  folgendes:

$$u(x, y) = U(\operatorname{ReIm}(T(x + iy)))$$

$$u(x, y) = U\left(\frac{1}{x^2 + (\sqrt{15} + y)^2} (x^2 + y^2 - 15), \frac{1}{x^2 + (\sqrt{15} + y)^2} (-2\sqrt{15})\right)$$

$$u(x, y) = \frac{1}{\ln(31 - 8\sqrt{15})} \ln\left(\left(\frac{1}{x^2 + (\sqrt{15} + y)^2} (x^2 + y^2 - 15)\right)^2 + \left(\frac{1}{x^2 + (\sqrt{15} + y)^2} (-2\sqrt{15})\right)^2\right)$$

$$u(x, y) = \frac{1}{\ln(31 - 8\sqrt{15})} \left(\ln\left(\left(x^2 + y^2 - 15\right)^2 + 60\right) - 2\ln\left(x^2 + (\sqrt{15} + y)^2\right)\right)$$

$$u(x, y) = \frac{\ln\left(1 - \frac{4\sqrt{15}y}{x^2 + y^2 + 2\sqrt{15}y + 15}\right)}{\ln(31 - 8\sqrt{15})}$$