Ana III Hausaufgabe, 3 Woche
Tutor: David Sering
SS 2021

Analysis III für Ingenieurwissenschaften

Juan Pardo Martin (397882) Tuan Kiet Nguyen (404029)
Leonardo Nerini (414193)

10. Mai 2021

1 Aufgabe

Es seien die Kurven $\gamma_1 : t \mapsto t + i(\sqrt{3})t, 0 < t < \infty$ und $\gamma_2 : t \mapsto \cos t + i\sqrt{3}\sin t, 0 \leq t < \pi$ sowie die Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \longmapsto z^2 - z\sqrt{2}$ gegeben.

a) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Kurven γ_1 und γ_2 und den Schnittwinkel.
Wir finden die Gemeinsames punkt in dem wir das Problem im $\mathbb{R}^2$ umstellen.

$$\vec{\gamma}_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad a \longmapsto \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\gamma_1(a)) \\ \mathrm{Im}(\gamma_1(a)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\gamma}_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad b \longmapsto \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\gamma_2(b)) \\ \mathrm{Im}(\gamma_2(b)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin(b)\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Wir bauen die folgendes Gleichungsystem:

$$\begin{pmatrix} a \\ a\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(b) \\ \sin(b)\sqrt{3} \end{pmatrix} \implies a = \cos(b) = \sin(b) \implies b_1 = \frac{\pi}{4}, \quad b_2 = \pi + \frac{\pi}{4}$$

Wir wurden 2 Schnittpunkten haben, jedoch fällt 1 raus, da $0 \leq b < \pi$, also, wir haben nur 1 schnittpunkt:

$$P_{\gamma_1,\gamma_2} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Wir berechnen die Schnittwinkel zwischen γ_1 und γ_2, dafür linearisieren (Taylor-Approximation) die Funktionen an der Stelle P_{γ_1,γ_2}:

$$\vec{\gamma_1}'(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\gamma_2}'(b) = \begin{pmatrix} -\sin(b) \\ \cos(b)\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

für P_{γ_1,γ_2}:

$$\phi_1 = \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin(b_1)\\ \cos(b_1)\sqrt{3}\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix}-\sin(b_1)\\ \cos(b_1)\sqrt{3}\end{pmatrix}\right|}\right) = \arccos\left(\frac{-\sin(b_1)+3\cos(b_1)}{\sqrt{1+3}\sqrt{3\cos^2(b_1)+\sin^2(b_1)}}\right)$$

$$= \arccos\left(\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}+3\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{4}\sqrt{3(\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}}\right) = \arccos\left(\frac{2\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{3\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{4\frac{1}{2}}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

b) Ermitteln Sie Schnittpunkt und Schnittwinkel der Bildkurven $f(\gamma_1)$ und $f(\gamma_2)$.
Die Schnittpunkt der Bildkurven von $f(\gamma_1)$ und $f(\gamma_2)$ ist gleich der Bild der schnittpunkt der Kurven, d.h

$$P_{f(\gamma_1),f(\gamma_2)} = f(P_{\gamma_1,\gamma_2})$$

Berechnung:

$$\widetilde{P}_{f(\gamma_1),f(\gamma_2)} = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\right)\sqrt{2}$$

$$= -1+i\sqrt{3}-1-i\sqrt{(3)} = -2$$

$$P_{f(\gamma_1),f(\gamma_2)} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$$

Um die Schnittwinkel zu berechnen liniearisieren wir auch $\vec{\mathfrak{f}}(\vec{\gamma}_i(t)), i \in \{1,2\}$

Es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\mathfrak{f}}(\vec{\gamma}_i(t))\right) = \frac{\partial\vec{\mathfrak{f}}}{\partial\vec{\gamma}_i}\frac{\partial\vec{\gamma}_i}{\partial t}$$

$\frac{\partial\vec{\gamma}_i}{\partial t_i}$ sind die Linearisierungen von $\vec{\gamma}_i$, wir haben diese schon berechnet.

$$\frac{\partial\vec{\mathfrak{f}}}{\partial\vec{\gamma}_i} = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial\operatorname{Re}\gamma_i}\operatorname{Re}f & \frac{\partial}{\partial\operatorname{Im}\gamma_i}\operatorname{Re}f\\ \frac{\partial}{\partial\operatorname{Re}\gamma_i}\operatorname{Im}f & \frac{\partial}{\partial\operatorname{Im}\gamma_i}\operatorname{Im}f\end{pmatrix}$$

Also, mit $x = \operatorname{Re}\gamma_i$ und $y = \operatorname{Im}\gamma_i$

$$f(z) = f(x+iy) = (x+iy)^2-\sqrt{2}(x+iy) = x^2+2ixy-\sqrt{2}x-y^2-i\sqrt{2}y = \underbrace{x^2-\sqrt{2}x-y^2}_{\operatorname{Re}f}+i\underbrace{\left(2xy-\sqrt{2}y\right)}_{\operatorname{Im}f}$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial\vec{\mathfrak{f}}}{\partial\vec{\gamma}_i} = \begin{pmatrix}2\operatorname{Re}\gamma_i-\sqrt{2} & -2\operatorname{Im}\gamma_i\\ 2\operatorname{Im}\gamma_i & 2\operatorname{Re}\gamma_i-\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

für γ_1:

$$\frac{\partial\vec{\mathfrak{f}}}{\partial\vec{\gamma}_1}\frac{\partial\vec{\gamma}_1}{\partial a} = \begin{pmatrix}2\operatorname{Re}\gamma_1-\sqrt{2} & -2\operatorname{Im}\gamma_1\\ 2\operatorname{Im}\gamma_1 & 2\operatorname{Re}\gamma_1-\sqrt{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 1\sqrt{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2a-\sqrt{2} & -2a\sqrt{3}\\ 2a\sqrt{3} & 2a-\sqrt{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2a - \sqrt{2} - 6a \\ 2a\sqrt{3} + \sqrt{3}(2a - \sqrt{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} - 4a \\ 4\sqrt{3}a - \sqrt{6} \end{pmatrix}$$

für γ_2:

$$\frac{\partial \vec{\mathfrak{f}}}{\partial \vec{\gamma}_2} \frac{\partial \vec{\gamma}_2}{\partial b} = \begin{pmatrix} 2\operatorname{Re}\gamma_2 - \sqrt{2} & -2\operatorname{Im}\gamma_2 \\ 2\operatorname{Im}\gamma_2 & 2\operatorname{Re}\gamma_2 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin b \\ \cos b\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos b - \sqrt{2} & -2\sin b\sqrt{3} \\ 2\sin b\sqrt{3} & 2\cos b - \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin b \\ \cos b\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin b(2\cos b - \sqrt{2}) - 6\sin b\cos b \\ -2\sin^2 b\sqrt{3} + \cos b\sqrt{3}(2\cos b - \sqrt{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\sin(b) - 8\sin(b)\cos(b) \\ -2\sqrt{3}\sin^2(b) + 2\sqrt{3}\cos^2(b) - \sqrt{6}\cos(b) \end{pmatrix}$$

Wir berechnen die Skalarprodukt

$$\frac{\partial \vec{\mathfrak{f}}}{\partial \vec{\gamma}_1} \frac{\partial \vec{\gamma}_1}{\partial a} \cdot \frac{\partial \vec{\mathfrak{f}}}{\partial \vec{\gamma}_2} \frac{\partial \vec{\gamma}_2}{\partial b} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} - 4a \\ 4\sqrt{3}a - \sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}\sin(b) - 8\sin(b)\cos(b) \\ -2\sqrt{3}\sin^2(b) + 2\sqrt{3}\cos^2(b) - \sqrt{6}\cos(b) \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{=}_{a=\cos(b)=\sin(b)} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} - 4a \\ 4\sqrt{3}a - \sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}a - 8a^2 \\ -2\sqrt{3}a^2 + 2\sqrt{3}a^2 - \sqrt{6}a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} - 4a \\ 4\sqrt{3}a - \sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}a - 8a^2 \\ -\sqrt{6}a \end{pmatrix}$$

$$= \left(-4a - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}a - 8a^2\right) - \sqrt{6}a\left(4\sqrt{3}a - \sqrt{6}\right) = 4a\left(8a^2 - 2\sqrt{2}a + 1\right)$$

und die Längen, bzw Norm der liniearisierte Vektoren.

$$\left|\frac{\partial \vec{\mathfrak{f}}}{\partial \vec{\gamma}_1} \frac{\partial \vec{\gamma}_1}{\partial a}\right| = \left|\begin{pmatrix} -\sqrt{2} - 4a \\ 4\sqrt{3}a - \sqrt{6} \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(\sqrt{2} + 4a)^2 + (4\sqrt{3}a - \sqrt{6})^2}$$

$$\left|\frac{\partial \vec{\mathfrak{f}}}{\partial \vec{\gamma}_2} \frac{\partial \vec{\gamma}_2}{\partial b}\right| = \left|\begin{pmatrix} \sqrt{2}a - 8a^2 \\ -\sqrt{6}a \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(\sqrt{2}a - 8a^2)^2 + (\sqrt{6}a)^2}$$

Daraus folgt:

$$\cos(\phi_2) = \frac{\frac{\partial \vec{\mathfrak{f}}}{\partial \vec{\gamma}_1} \frac{\partial \vec{\gamma}_1}{\partial a} \cdot \frac{\partial \vec{\mathfrak{f}}}{\partial \vec{\gamma}_2} \frac{\partial \vec{\gamma}_2}{\partial b}}{\left|\frac{\partial \vec{\mathfrak{f}}}{\partial \vec{\gamma}_1} \frac{\partial \vec{\gamma}_1}{\partial a}\right| \left|\frac{\partial \vec{\mathfrak{f}}}{\partial \vec{\gamma}_2} \frac{\partial \vec{\gamma}_2}{\partial b}\right|} = \frac{4a\left(8a^2 - 2\sqrt{2}a + 1\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{2} + 4a\right)^2 + \left(4\sqrt{3}a - \sqrt{6}\right)^2}\sqrt{\left(\sqrt{2}a - 8a^2\right)^2 + \left(\sqrt{6}a\right)^2}}$$

$$= \frac{a\sqrt{8a^2 - 2\sqrt{2}a + 1}}{2\sqrt{a^2\left(8a^2 - 2\sqrt{2}a + 1\right)}} = \frac{a\sqrt{8a^2 - 2\sqrt{2}a + 1}}{2\,|a|\sqrt{\left(8a^2 - 2\sqrt{2}a + 1\right)}} = \operatorname{sgn}(a)\frac{1}{2}$$

für $P_{f(\gamma_1), f(\gamma_2)}$ gilt $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\phi_2 = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

2 Aufgabe

Ermitteln Sie fur die Möbius-Transformationen h_1 und h_2 mit:

$$h_1(z) = \frac{2z - 1}{3z - 2}, \quad h_2(z) = \frac{z - 1}{-2z + 3}$$

die Komposition $h_1 \circ h_2$ und die inversen Transformationen h_1^{-1} und h_2^{-1}.
Die Komposition von $h_1 \circ h_2$ folgt:

$$h_1(h_2(z)) = h_1\left(\frac{z-1}{-2z+3}\right) = \frac{2\left(\frac{z-1}{-2z+3}\right)-1}{3\left(\frac{z-1}{-2z+3}\right)-2} = \frac{2\left(\frac{z-1}{-2z+3}\right)-1}{3\left(\frac{z-1}{-2z+3}\right)-2}\frac{-2z+3}{-2z+3}$$

$$\frac{2(z-1)-(-2z+3)}{3\,(z-1)-2(-2z+3)} = \frac{4z-5}{7z-9}$$

Für die inverse von h_1^{-1} tauschen wir eine Variabel um, $\omega \longleftrightarrow z$ wir lösen es auf ω um.

$$z = \frac{2\omega-1}{3\omega-2}$$

$$(3\omega-2)z = 2\omega-1$$

$$3\omega z - 2z = 2\omega - 1$$

$$\frac{1-2z}{2-3z} = \omega$$

$$\omega = \frac{2z-1}{3z-2} = h_1^{-1}$$

Für die inverse von h_2^{-1} folgt analog:

$$z = \frac{\omega-1}{-2\omega+3}$$

$$(-2\omega+3)z = \omega-1$$

$$-2\omega z + 3z = \omega - 1$$

$$\frac{1+3z}{1+2z} = \omega$$

$$\omega = \frac{3z+1}{2z+1} = h_2^{-1}$$

3 Aufgabe

Eine Möbius-Transformation T werde durch die Angaben

$$f(1) = 1, \quad f(i) = 1+i, \quad f(-1+i) = 2+2i$$

beschrieben.

a) Bestimmen Sie den Term $f(z)$ für $z \in \mathbb{C}$.
Wir verwenden den Ansatz: $f(z) = \frac{za+b}{zc+d}$ Wir haben die folgende Systemgleichung

$$1 = \frac{a+b}{c+d}$$

$$1+i = \frac{ia+b}{ic+d}$$

$$2 + 2i = \frac{(-1+i)a + b}{(-1+i)c + d}$$

Daraus folgt:

$$a + b = c + d \tag{1}$$

$$(ic + d)(i + 1) = -c + d + i(c + d) = ia + b$$

somit gilt:

$$a = c + d$$

$$b = -c + d$$

wegen (1) muss $d = 0$ sein, bzw $a = -b$.

$$(2 + 2i)(i - 1) = -4 = (i - 1)a + b = (i - 1)c - c = c(i - 2)$$

Daraus folgt:

$$c = \frac{4}{2 - i} = \frac{4(2 + i)}{5} = a = -b$$

also

$$f(z) = \frac{z\left(\frac{4(2+i)}{5}\right) - \left(\frac{4(2+i)}{5}\right)}{z\left(\frac{4(2+i)}{5}\right)} = 1 - \frac{1}{z}$$

b) Bestimmen Sie von der offenen Halbgeraden $\gamma : t \mapsto ti, 0 < t < \infty$ rechnerisch das Bild $f(\gamma)$ und beschreiben Sie es als geometrische Figur.

$$f(\gamma) = 1 - \frac{1}{\gamma} = 1 - \frac{1}{ti} = 1 + \frac{i}{t}$$

Es ist eine Halberade parallel zu der $\Im$ Achse, aber nur auf der positiv maginär Seite. $1 + ai, \quad a < 0 < \infty$ oder $x = 1, y > 0$