PARCIAL NO. 2

MANUEL CAMILO RINCON BLANCO

PABLO DE JESUS ARCILA MORA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

MILTON ARMANDO REYES VILLAMIL

CALCULO INTEGRAL

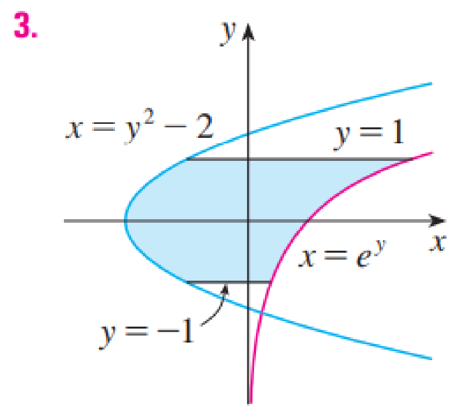
2021

CONTENIDO

1. Área entre curvas

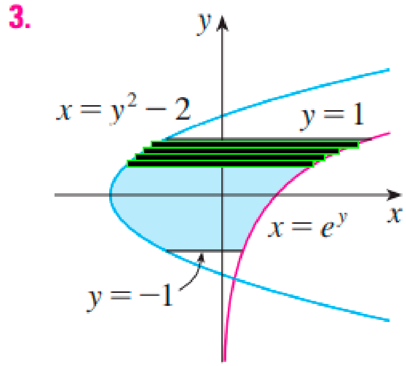
Procederemos a dar solución a un ejercicio del libro *Calculo de una variable de James Stewart* en su séptima edición.

Determine el área de la región sombreada.

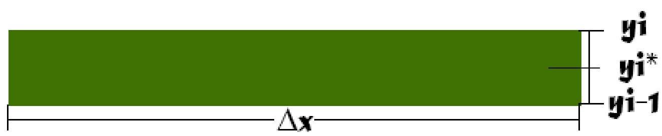


Empezamos por definir los límites de integración, que en este caso en lugar de ser el espacio de recta comprendido en X es el espacio comprendido en Y, y son $y = -1$ y $y = 1$, siendo estos el limite inferior y limite superior respectivamente.

Como sabemos para hallar el área comprendida entre dos curvas es oportuno visualizar esta como la suma de las áreas de infinitos rectángulos, distribuidos continuamente a lo ancho (o largo como en este caso) del área que conforman las dos curvas. Siendo así, es necesario encontrar tanto el ancho como el largo de estos rectángulos.



Este caso es uno particular, pues por lo general la altura (el largo) del rectángulo que visualizamos corresponde a la diferencia entre $f(x_i*)$ y $g(x_i*)$, siendo x_i* un punto entre x_{i-1} y x_i, siendo x_i un punto cualquiera en la recta, sin embargo, en este caso el ancho corresponde a la diferencia entre $f(y_i*)$ y $g(y_i*)$. El ancho del rectángulo en este caso corresponde a Delta de x (Δx).



La razón por la que es necesario calcular el ancho y alto de los rectángulos que imaginamos entre las curvas es porque la fórmula de área de un rectángulo es el resultado de multiplicar el largo por el ancho, lo que nos arroja la siguiente formula:

$$AR = (\mathrm{f}(\mathrm{yi}*) - \mathrm{g}(\mathrm{yi}*))\Delta \mathrm{x}$$

Esta es la manera de calcular el área de uno solo de los rectángulos, sin embargo y como ya hemos indicado, tenemos que calcular el área de infinitos rectángulos y sumarlos, partiendo de la siguiente formula:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x) \cdot \Delta \mathrm{x}$$

Reemplazando tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x)\cdot \Delta \mathrm{x} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{f}(\mathrm{xi}\,*) - \mathrm{g}(\mathrm{xi}\,*))\cdot \Delta \mathrm{x}$$

Lo anterior es igual al límite de una suma de Riemann conforme el número de subdivisiones tiende a infinito, es decir, esta fórmula calcula la suma del área de los rectángulos que imaginamos entre las funciones, determinando así el área entre las curvas.

Esta fórmula es equivalente en calculo integral a la integral definida de a hasta b de f(x):

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x)\cdot \Delta \mathrm{x} = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Reemplazando tenemos que:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b}(\mathrm{f}(\mathrm{xi}\,*) - \mathrm{g}(\mathrm{xi}\,*))dx$$

NOTA: Todas las ecuaciones aquí mostradas que tienen x como variable son equivalentes para y.

Ahora podemos proceder al cálculo, reemplazando en las ecuaciones y resolviendo:

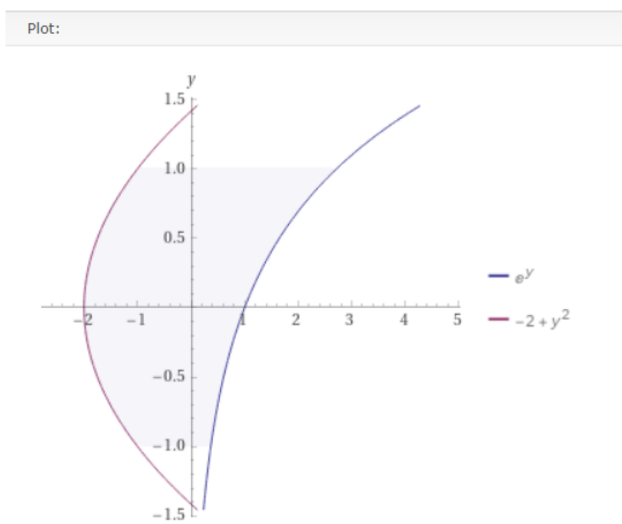
$$\int_{a}^{b}(\mathrm{f}(\mathrm{yi}\,*) - \mathrm{g}(\mathrm{yi}\,*))dy = \int_{-1}^{1}(\mathrm{e}^{y} - (\mathrm{y}^2 - 2))dy = \int_{-1}^{1}(\mathrm{e}^{y} - \mathrm{y}^2 + 2)dy =$$

$$\left[\mathrm{e}^{y} - \frac{1}{3}y^3 + 2y\right]_{-1}^{1} = \left(e^1 - \frac{1}{3}(1)^3 + 2(1)\right) - \left(e^{-1} - \frac{1}{3}(-1)^3 + 2(-1)\right) =$$

$$\left(e^{1}-\frac{1}{3}+2\right)-\left(e^{-1}+\frac{1}{3}-2\right)=\boldsymbol{e}-\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e}}+\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{3}}$$

Este resultado es fácilmente comprobable usando una calculadora gráfica, en este caso y para este ejercicio se usará la calculadora online WolframAlpha.

$$\int_{-1}^{1}\left(2+e^{y}-y^{2}\right)dy=\frac{10}{3}-\frac{1}{e}+e\approx 5.68374$$



Como se puede observar el programa no solo nos arroja el valor, sino que también nos grafica las funciones ingresadas y sombrea el área entre ellas.

Ahora veamos otro ejercicio de área entre curvas, usaremos el ejercicio 31 del mismo libro.

> Evalúe cada una de las siguientes integrales e interprétela como el área de una región. Dibuje la región.

$$\int_{0}^{\pi/2}|senx-cos2x|dx$$

Lo primero es identificar en qué punto se cruzan las funciones (ya que hablamos de funciones trigonométricas), esto ocurre cuando $senx = cos2x$, podemos a partir de esto aplicar ciertas propiedades y encontrar en qué punto ocurre la intersección.

$$sen\,x = \cos 2x$$

$$\text{sen}\,x = \; cos^2x - sen^2x$$

$$\text{sen}\,x = \; 1 - sen^2x - sen^2x$$

$$\text{sen}\,x = \; 1 - 2sen^2x$$

$$2sen^2x + senx - 1 = 0$$

$$(2senx - 1)(senx + 1) = 0$$

Ahora, la única manera de que esto sea correcto es que uno de los factores sea cero, y para que esto ocurra se debe dar uno de los siguientes casos:

$$1.(2senx - 1) = 0 \qquad\qquad 2.\,(senx + 1) = 0$$

Para el caso número 1 se tiene que $senx$ debe ser:

$$2senx - 1 = 0$$

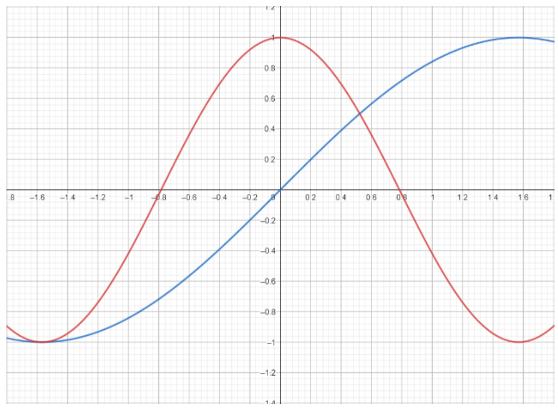
$$senx = \frac{1}{2}$$

Y para el caso número 2 se tiene que $senx$:

$$senx + 1 = 0$$

$$senx = -1$$

Como podemos notar, hemos encontrado dos puntos en los que se cortan las funciones, ahora es trabajo nuestro ver si alguno de estos puntos está dentro de nuestros límites de integración $(0, \frac{\pi}{2})$. Para ello podemos usar una herramienta graficadora, como lo es GeoGebra:



Como podemos ver, cuando $senx$ es igual a -1 estamos por fuera de nuestro límite de integración, mientras que cuando $senx$ es igual a $^1/_2$ si estamos dentro de los limites, por lo que usaremos ese valor para despejar x y posteriormente definir nuestros límites de integración.

$$senx = \frac{1}{2}$$

$$x = \sin^{-1}\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

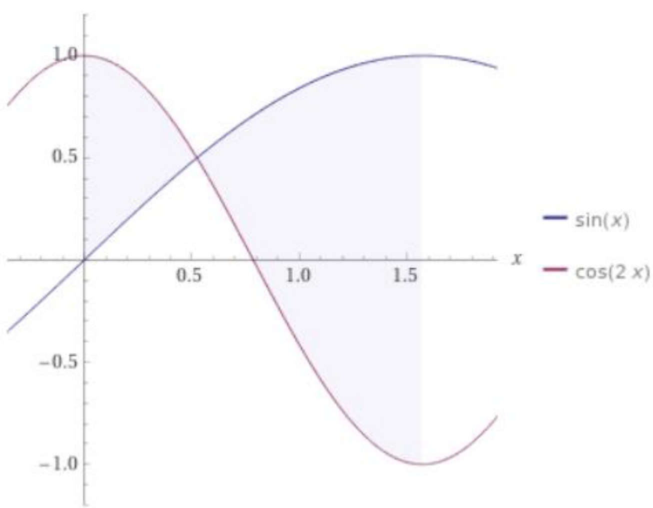
Ahora ya podemos proceder a resolver el problema. Tendremos en cuenta que habrá que calcular la suma de dos integrales, pues como ya vimos hay un momento en que las curvas se cortan, por lo que habrá que definir cuáles son las funciones $f(x)$ y $g(x)$ antes y después del corte.

$$\int_0^{\pi/2} |\operatorname{sen} x - \cos 2x|\, dx = \int_0^{\pi/6} (\cos 2x - \operatorname{sen} x)\, dx + \int_{\pi/6}^{\pi/2} (\operatorname{sen} x - \cos 2x)\, dx =$$

$$\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \cos x\right]_0^{\pi/6} + \left[-\cos x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right]_{\pi/6}^{\pi/2} =$$

$$\left(\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - (0+1) + (0-0) - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{4}\sqrt{3}\right) = \boldsymbol{\frac{3}{2}\sqrt{3} - 1}$$

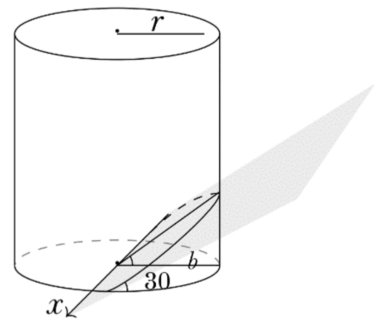
Gráficamente se está representando la siguiente área:



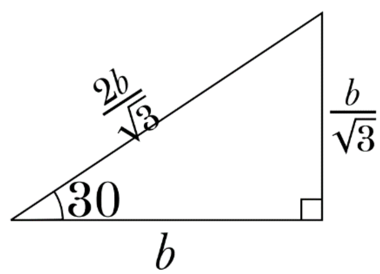
2. Volúmenes de sólidos de sección transversal conocida.

Para esta aplicación usaremos el ejercicio 6 de la sección 7.2 del libro calculo integral en una variable de Jeanneth Galeano Peñaloza y Claudio Rodríguez Beltrán.

Calcule el volumen de la cuña que se determina al cortar un cilindro de radio r por un plano oblicuo, con inclinación de 30°:



Si miramos este sólido desde el frente, la cuña se verá como el triángulo:



Para dar solución a nuestro ejercicio tendremos que tener varias cosas en cuenta, primero hay que definir la base y luego hay que encontrar el área de la sección transversal a trabajar. Algo curioso de este ejercicio es que nos dan la altura del triángulo y su hipotenusa en términos de *b*, esto sumado a que en el grafico ignoran la existencia del eje *y* nos da a entender que los ejes a trabajar son el eje *x* y un eje *b*, que en este ejercicio es equivalente al eje *y*.

Ahora, es necesario que nos preguntemos, ¿cómo hemos de calcular el volumen?, como ya se sabe esta aplicación consiste en tomar infinitas secciones transversales y sumarlas, pero, ¿que hace que esto funcione?, la respuesta es bastante sencilla.

Sabemos por definición que para encontrar el volumen de un sólido rectangular tenemos que multiplicar todas sus dimensiones entre sí (siempre y cuando estemos hablando de tres dimensiones), ahora pues, si vemos el área es el resultado de multiplicar dos de estas dimensiones, por lo que, si tenemos el área basta con multiplicar este valor por la dimensión faltante, claro está que esto es verdadero solo para solidos cuadrados. Nuestro ejercicio tiene un cálculo similar, pues notemos que tenemos un cilindro, y en efecto su volumen corresponde al producto entre el área de la sección transversal y el valor en x (Δx).

$$y = \sqrt{(r)^2 - (x)^2}$$

Primero hay que encontrar el valor de la base de nuestra sección transversal, en este corresponde a *b*, y ya que el corte forma un semicírculo, dividimos la formula en 2:

$$b = \frac{\sqrt{(r)^2 - (x)^2}}{2}$$

Procedemos al cálculo del área:

$$A(x) = b \cdot h$$

$$A(x) = \frac{\sqrt{(r)^2 - (x)^2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{(r)^2 - (x)^2}}{\sqrt{3}} = \frac{(r)^2 - (x)^2}{2\sqrt{3}}$$

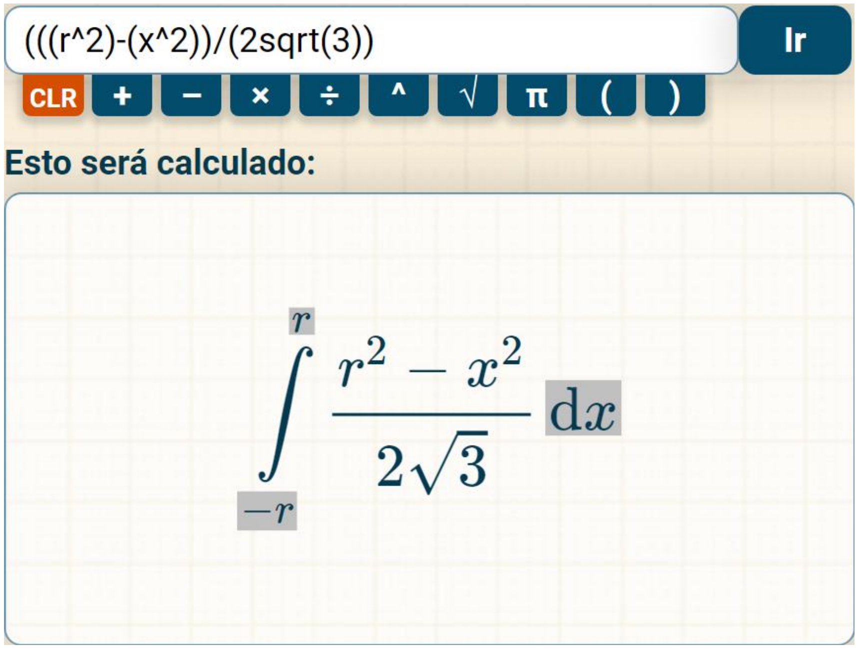
Ahora si podemos calcular el volumen:

$$V = \int_{-r}^{r} \frac{r^2 - x^2}{2\sqrt{3}} dx = 2\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \int_{0}^{r} r^2 - x^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{0}^{r} r^2 - x^2 =$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(r^2 r - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) =$$

$$\frac{r^3}{\sqrt{3}} - \frac{r^3}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} \cdot r^3}{9}$$

Este resultado lo podemos comprobar con una calculadora especializada, en este caso usaremos una calculadora online, de nombre “*Calculadora de integrales”,* de la siguiente manera:



Esta calculadora nos arroja el siguiente resultado:

Que es totalmente equivalente al resultado que nosotros obtuvimos:

$$\frac{2\sqrt{3} \cdot r^3}{9} = \frac{2r^3}{3\sqrt{3}}$$

$$\frac{2\sqrt{3} \cdot r^3}{9} = \frac{2r^3}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

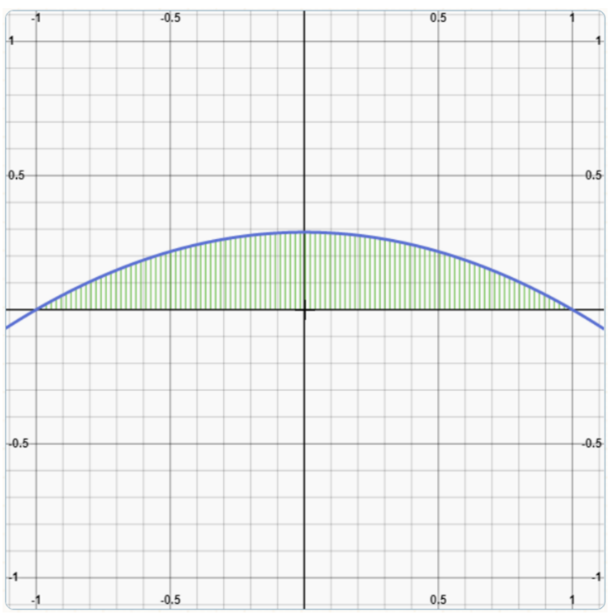
$$\frac{2\sqrt{3}\cdot r^3}{9} = \frac{2\sqrt{3}\cdot r^3}{3\sqrt{3}\sqrt{3}}$$

$$\frac{2\sqrt{3}\cdot r^3}{9} = \frac{2\sqrt{3}\cdot r^3}{3\cdot 3}$$

$$\frac{2\sqrt{3}\cdot r^3}{9} = \frac{2\sqrt{3}\cdot r^3}{9}$$

Solo es cuestión de racionalizar el denominador.

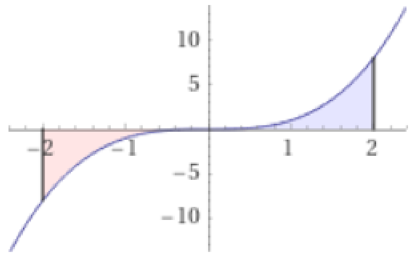
La calculadora online también nos arroja una gráfica en dos dimensiones de lo que estamos calculando:



3. Volúmenes de sólidos revolución.

Para esta aplicación vamos a usar un ejercicio propuesto por los autores.

Calcule el volumen del solido obtenido al hacer girar la función $y = x^3$, limitada por x=-2, x=2, respecto al eje x.



Cuando cortamos a través de punto x obtenemos un disco de radio x^3. El área de esta sección transversal es:

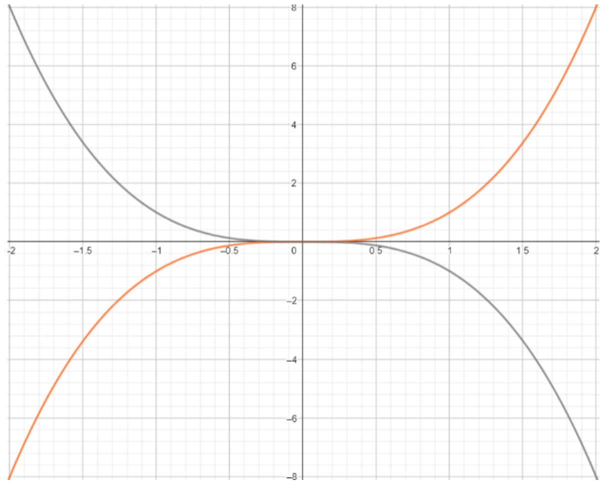
$$A(x) = \pi(x^3)^2 = \pi(x)^6$$

El sólido está entre $x = -2$ y $x = 2$, de modo que el volumen es:

$$V = \int_{-2}^{2} \pi x^6 dx = \pi \frac{x^7}{7}\Big]_{-2}^{2} = \pi\left(\frac{2^7}{7} - \left(\frac{(-2)^7}{7}\right)\right) =$$

$$\pi\left(\frac{128}{7} - \frac{-128}{7}\right) = \pi\left(\frac{128}{7} + \frac{128}{7}\right) = \boldsymbol{\pi\ \frac{256}{7}}$$

Este volumen corresponde al de la función $y = x^3$ al hacerla girar en torno al eje x.

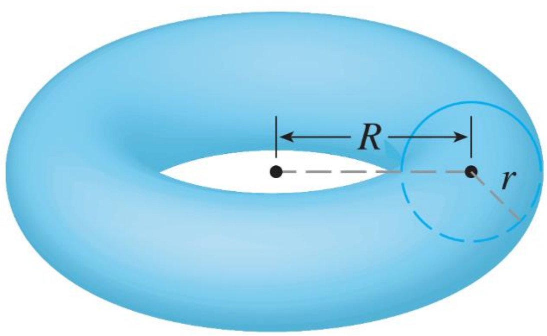


4. Discos, arandelas y cortezas cilíndricas.

Para esta aplicación usaremos el ejercicio 61 de la sección 6.2 del libro *Calculo de una variable de James Stewart* en su séptima edición.

a. Plantee una integral para el volumen de un toro sólido (el sólido en forma de dona mostrado en la figura) de radio r y R.

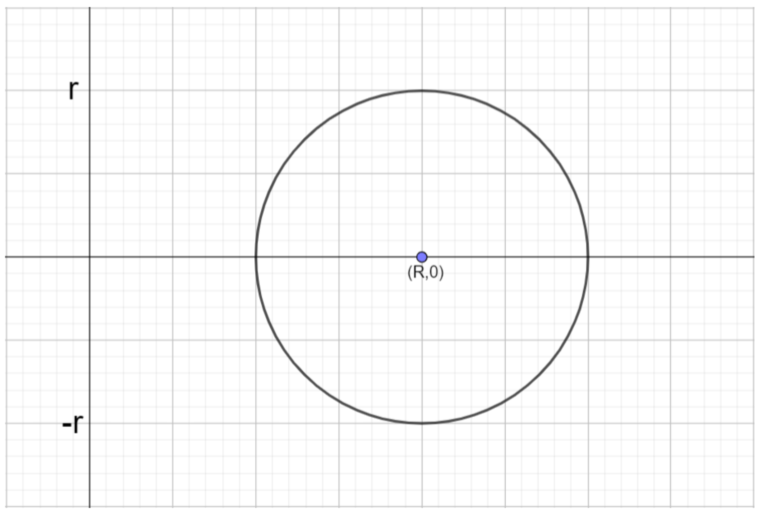
b. Mediante la interpretación de la integral como un área, calcule el volumen del toro.



Para solucionar este ejercicio tendremos que partir de la obtención de la función que nos forma la recta que rotada nos da el toro sólido.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

La anterior es la función que nos arroja un circulo con centro en el origen, sin embargo, nuestro circulo no tiene como centro el origen, pues en el origen se encuentra la zona media del toro sólido, que es un espacio vacío:



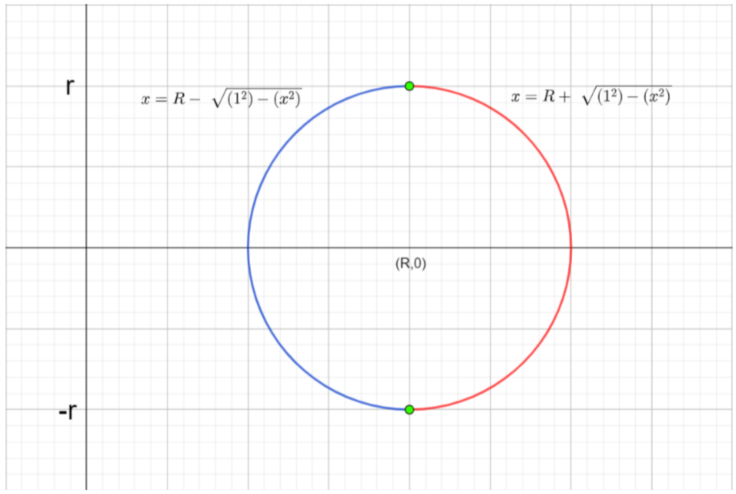
Podemos notar que nuestro circulo tiene como centro el punto (R,0), por lo que nuestra función debe cambiar a:

$$(x - R)^2 + y^2 = r^2$$

Ya que se rota el toro solido alrededor del eje y, debemos despejar x en la formula anterior:

$$x1 = R + \sqrt{r^2 - y^2} \qquad x2 = R - \sqrt{r^2 - y^2}$$

Estas nuevas funciones son las semicircunferencias que representan nuestro circulo:



Ya podemos proceder a solucionar el primer inciso del problema:

$$V = \int_{-r}^{r} \pi \left[\left(R + \sqrt{r^2 - y^2} \right)^2 - \left(R - \sqrt{r^2 - y^2} \right)^2 \right] dy =$$

$$2\pi \int_{0}^{r} \left(\left(R^2 + 2R\sqrt{r^2 - y^2} + r^2 - y^2 \right) - \left(R^2 - 2R\sqrt{r^2 - y^2} + r^2 - y^2 \right) \right) dy =$$

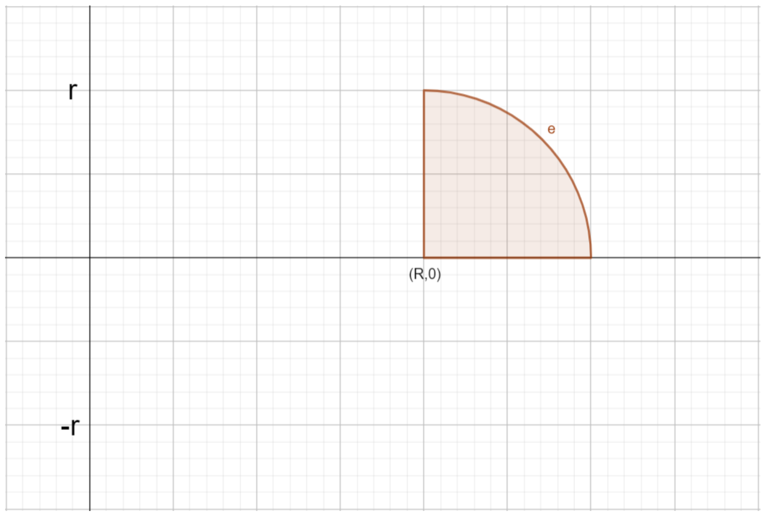
$$2\pi \int_{0}^{r} \left(R^2 + 2R\sqrt{r^2 - y^2} + r^2 - y^2 - R^2 + 2R\sqrt{r^2 - y^2} - r^2 + y^2 \right) dy =$$

$$2\pi \int_{0}^{r} \left(2R\sqrt{r^2 - y^2} + 2R\sqrt{r^2 - y^2} \right) dy = \ 2\pi \int_{-r}^{r} \left(4R\sqrt{r^2 - y^2} \right) dy =$$

$$\boldsymbol{8\pi R \int_{0}^{r} \left(\sqrt{r^2 - y^2} \right) dy}$$

Así pues, hemos planteado una integral para el volumen del toro sólido.

Ahora para el inciso b es cuestión de calcular cuánto del área está representado por la integral obtenida. Observemos que la integral representa un cuarto del área del círculo, pues los límites de integración solo abarcan de 0 a π:



Sabiendo esto es muy sencillo calcular el volumen del toro solido:

$$8\pi R\int_{0}^{r}\left(\sqrt{r^2-y^2}\right)dy = 8\pi R\cdot\frac{1}{4}\pi r^2 = \boldsymbol{2\pi^2 r^2 R}$$

5. Longitud de arco:

Para esta aplicación usaremos el ejercicio 61 de la sección 6.2 del libro *Calculo de una variable de James Stewart* en su séptima edición.

Un viento continuo arrastra un cometa hacia el oeste. La altura del cometa por encima de la superficie de la tierra de la posición horizontal x = 0 a x = 80 ft está dada por $y = 150 - \frac{1}{40}(x-50)^2$. Encuentre la distancia recorrida por la cometa.

Para resolver este ejercicio primero recordemos cual es la formula de la longitud del arco:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

- Entonces tenemos que:

$$y = 150 - \frac{1}{40}(x - 50)^2$$

- Tomamos la expresión:

$$y = -\frac{1}{40}(x - 50)^2$$

- Derivamos esa expresión:

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{40}(x - 50)^2\right) = \frac{x-50}{20}$$

Reemplazamos en la formula los limites superior e inferior, y la derivada:

$$L = \int_0^{80} \sqrt{1 + (\frac{x-50}{20})^2}\ \ dx$$

Y ahora solo hay que resolver la pequeña integral, esta se puede resolver con programación, pero esto lo veremos al final, esta integral es muy extensa ya que necesita varias sustituciones trigonométricas para resolverla.

$$\int_0^{80} \sqrt{1+\left(\frac{x-50}{20}\right)^2}\,dx$$

$$\int \sqrt{1+\left(\frac{x-50}{400}\right)^2}\,dx \to \int \sqrt{\frac{400+(x-50)^2}{400}}\,dx$$

$$\int \sqrt{\frac{400+x^2-100x+2500}{400}}\,dx \to \int \sqrt{\frac{2900+x^2-100x}{400}}\,dx$$

$$\int \frac{\sqrt{2900\quad x^2\quad 100x}}{20}\,dx \to \frac{1}{20}\cdot\int \sqrt{2900+x^2-100x}\,dx$$

$$\frac{1}{20}\cdot\int \sqrt{x^2-100x+2900}\,dx \to \frac{1}{20}\cdot\int \sqrt{x^2-100x+2500+400}\,dx$$

$$\frac{1}{20}\cdot\int \sqrt{(x-50)^2+400}\,dx \to \frac{1}{20}\cdot\int \sqrt{t^2+400}\,dt \qquad t=x-50$$

$$\frac{1}{20}\cdot\int \sqrt{(20\tan(u))^2+400}\cdot 20\sec(u)^2\,du \qquad t=20\tan(u)$$

$$\frac{1}{20}\cdot 20\cdot\int \sqrt{(20\tan(u))^2+400}\,\sec(u)^2\,du$$

$$1\cdot\int \sqrt{(20\tan(u))^2+400}\,\sec(u)^2\,du$$

$$\int \sqrt{(20\tan(u))^2+400}\,\sec(u)^2\,du$$

$$\int \sqrt{400\tan(u)^2+400}\,\sec(u)^2\,du$$

$$\int 20\sqrt{\tan(u)^2+1}\,\sec(u)^2\,du$$

$$\int 20\sqrt{\sec(u)^2}\,\sec(u)^2\,du$$

$$\int 20 \sec(u) \sec(u)^2 \, du$$

$$\int 20 \sec(u)^3 \, du$$

$$20 \cdot \int \sec(u)^3 \, du$$

$$20\left(\frac{1}{2} \cdot \sec(u)\tan(u) + \frac{1}{2} \cdot \int \sec(u)\, du\right)$$

$$20\left(\frac{1}{2} \cdot \sec(u)\tan(u) + \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\left|\sec(u)+\tan(u)\right|\right)\right)$$

$$20\left(\frac{1}{2} \cdot \sec\left(\arctan\left(\frac{t}{20}\right)\right)\tan\left(\arctan\frac{t}{20}\right) + \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\left|\sec\left(\arctan\left(\frac{t}{20}\right)\right)\right.\right.\right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\left.\left. + \tan\left(\arctan\left(\frac{t}{20}\right)\right)\right|\right)\right)$$

$$20\left(\frac{1}{2} \cdot \sec\left(\arctan\left(\frac{x-50}{20}\right)\right)\tan\left(\arctan\left(\frac{x-50}{20}\right)\right) + \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\left|\sec\right.\right.\right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\left.\left.\left(\arctan\left(\frac{x-50}{20}\right)\right) + \tan\left(\arctan\left(\frac{x-50}{20}\right)\right)\right|\right)\right)$$

$$\frac{\sqrt{2900+x^2-100x}\,(x-50)}{40} + 10\ln\left(\left|\sqrt{2900+x^2-100x}+x-50\right|\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow - 10\ln(20)$$

$$\left(\frac{\sqrt{2900+x^2-100x}\,(x-50)}{40} + 10\ln\left(\left|\sqrt{2900+x^2-100x}+x-50\right|\right) \rightarrow\right.$$

$$\rightarrow \left. - 10\ln(20)\right)\Bigg|_{0}^{80}$$

$$\frac{\sqrt{2900+80^2-100\cdot 80}\,(80-50)}{40} + 10\ln\left(\left|\sqrt{2900+80^2-100\cdot 80}+80-50\right|\right) \rightarrow$$

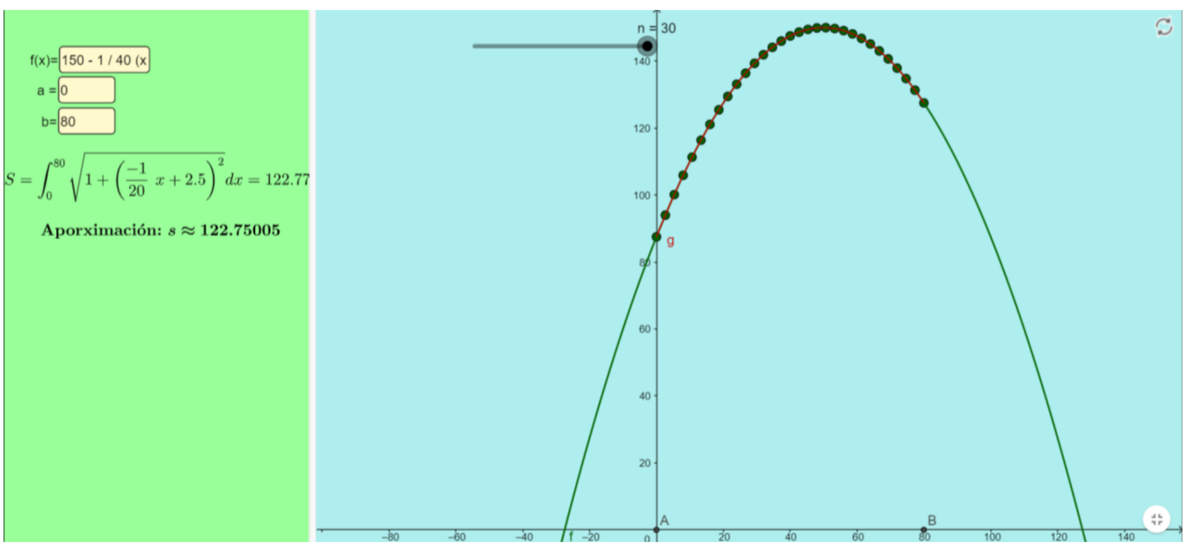
$$-10\ln(20) - \left(\frac{\sqrt{2900+0^2-100\cdot 0}\,(0-50)}{40} + 10\ln\left(\left|\sqrt{2900+0^2-100\cdot 0}\right.\right.\right. \rightarrow$$

$$+0-50|)-10\ln(20))$$

$$=\frac{15\sqrt{13}+25\sqrt{29}}{2}+10\ln\left(\frac{\sqrt{377}+5\sqrt{13}+3\sqrt{29}+15}{4}\right)$$

Hice esta integral a mano ya que fue muy larga, al resolver el resultado de la integral nos da 122,77.

Para comprobar nuestro resultado usaremos el siguiente programa creado en GeoGebra, recordemos que entre mayor sea n, mayor va a ser la aproximación de la longitud del arco, ya que habrá más intervalos.



Como podemos ver en la grafica el resultado fue aproximado, y podemos evidenciar la trayectoria que tuvo la cometa.

7. Momentos y centros de masa

Trace la región acotada por las curvas y estime en forma visual la ubicación del centroide.

Después encuentre las coordenadas exactas del centroide.

Y = e^x , y = 0, x = 0, x = 1

Recordemos las fórmulas para hallar los centroides de un polígono acotado:

$A = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\, dx \qquad x = \frac{1}{A}\int_a^b x \times f(x)\, dx \qquad y = \frac{1}{A}\int_a^b \frac{1}{2}(f(x))^2\, dx$

Reemplazamos los datos que tenemos:

$\int_0^1 (0 - e^x)\, dx \quad = \quad \int_0^1 (e^x)\, dx$

Resolvemos la integral:

$e^x|_0^1 = e - 1$

Reemplazamos en la segunda fórmula para hallar x:

$x = \frac{1}{e-1}\int_0^1 xe^x\, dx$

Y resolvemos la integral:

$\int xe^x\, dx = xe^x - \int xe^x\, dx \qquad xe^x - \int e^x\, dx \qquad xe^x - e^x + C$

$x = \frac{1}{e-1}[xe^x - e^x]_0^1 \qquad \frac{1}{e-1}(1e^1 - e^1) - \frac{1}{e-1}(0e^0 - e^0)$

$x = \frac{1}{e-1}$

Ahora reemplazamos en la tercera fórmula para hallar y:

$y = \frac{1}{e-1}\int_0^1 \frac{1}{2}(e^x)^2\,dx \qquad y = \frac{1}{e-1}\int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x}\,dx$

Y nuevamente resolvemos:

$2x = u \qquad 2dx = du \qquad dx = \frac{1}{2}du$

Sustituimos y cambiamos los límites de la integral:

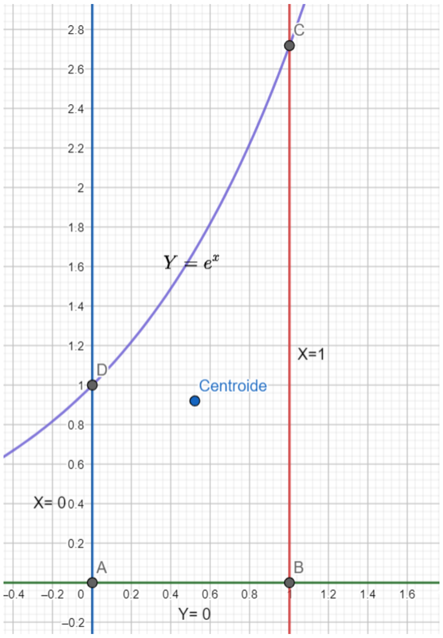
$y = \frac{1}{e-1}\int_0^2 \frac{1}{2}e^u \left(\frac{1}{2}du\right) \qquad y = \frac{1}{4(e-1)}\int_0^2 e^u\,du \qquad y = \frac{1}{4(e-1)}\,e^u\big|_0^2$

$y = \frac{1}{4(e-1)}(e^2 - e^0) \qquad y = \frac{1}{4(e-1)}(e+1)(e-1)$

$y = \frac{e+1}{4}$

De este modo tenemos que las coordenadas del centroide del polígono acotado por las curvas Y = e^x , y = 0, x = 0, x = 1 son:

$\left(\frac{1}{e-1}\ ,\frac{e+1}{4}\right)$ o (0.58, 0.92)



En la grafica podemos ver las diferentes cotas del polígono y el centroide hallado anteriormente.

7.Trabajo

Una cadena que está en el suelo mide 10 m de largo y su masa es de 80 kg. ¿Cuánto trabajo se efectúa para subir un extremo de la cadena a una altura de 6 m?

Para resolver este ejercicio primero debemos analizar bien el enunciado, si la masa es de 80 kg y el largo es de 10 m, eso significa que pesa 8 kg por metro, teniendo en cuenta el hecho de que la aceleración de la gravedad es de 9.8 m/s2, multiplicamos este valor por su peso y el producto seria la fuerza:

$8 \times 9.8 = 78.4\ Newtons$

Ahora sabemos que la altura es de 6 m y la fuerza es 78.4 newtons, la fuerza es una función de la altura, así que de este modo planteamos la siguiente integral:

$$w = \int_0^6 F \times dx = \int_0^6 78{,}4 \times dx = \frac{78.4}{2} x^2 |_0^6$$

$$39.2 \times 36 = 1411.2$$

Este tipo de ejercicios no suelen ser tan complicados y solo requieren un buen análisis, así de sencillo hallamos que el trabajo realizado al subir la cadena 6 metros es 1411.2 J.

Bibliografía

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas* (7a. ed. --.). México D.F.: Cengage Learning.

Galeano,J, Rodirguez,C. (2020). *Calculo integral en una variable*. Bogota D.C.: Universidad Nacional de Colombia.

Autoevaluación:

Pablo De Jesus Arcila Mora: 4.2

Considero que hice un buen trabajo, mas allá de la nota o el trabajo considero que adopte los temas aquí tratados, la razón por la que no me pongo una nota perfecta es debido a que es 100% seguro que no hice un trabajo perfecto, además, estoy entregando mi trabajo tarde, con justificación, pero tarde, a fin de cuentas, en contraste no me pongo una nota inferior porque he considerado el tiempo que le dedique a este trabajo y las ganas que puse en él.

Manuel Camilo Rincon Blanco: 4.2

Mi autoevaluación es de 4.2 ya que logré aplicar de manera adecuada todo lo visto en el curso, a pesar de las dificultades me esforcé para entender lo mejor posible los temas tratados y entregar un trabajo entendible y bueno, sin embargo, la entrega fue tardía por un par de días y por esto justifico mi nota.