MGM_IT Semesterprüfung HS2015

Zeit: 60 Minuten
Zugelassene Hilfsmittel:
- Handschriftliche Notizen im Umfang von 10 Blättern (bzw. 20 Seiten) im Format A4
- Nicht-grafik- und nicht-algebrafähiger Taschenrechner (nur für Grundoperationen und Auswertungen elementarer Funktionen)

---

1. Gegeben sei das Prädikat: $A(x,y)$: x ist eine Stadt in y
   und die Mengen:
   X_1 = {Bern, Hamburg, Berlin}
   X_2 = {Bern, Lausanne, Zürich}
   X_3 = {Brüssel, Amsterdam, Bern}
   Y_1 = {Deutschland, Italien}
   Y_2 = {Schweiz, Niederlande, Belgien}
   Y_3 = {Deutschland, Schweiz, Italien}
   Y_4 = {Schweiz}

   Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche sind falsch (ohne Begründung). Richtige Antwort + 0.5P, falsche Antwort –0.5P insgesamt minimal 0P.
   1. $\forall x \in X_1\ \exists y \in Y_1: A(x,y)$
   2. $\forall x \in X_3\ \exists y \in Y_2: A(x,y)$
   3. $\exists y \in Y_3\ \forall x \in X_2: A(x,y)$
   4. $\forall y \in Y_1\ \exists x \in X_1: A(x,y)$
   5. $\exists x \in X_1\ \exists y \in Y_1: A(x,y)$
   6. $\forall x \in X_2\ \forall y \in Y_4: A(x,y)$

Lösung:
   1. *f*, 2. *w*, 3. *w*, 4. *f*, 5. *w*, 6. *w*

2. Drücken Sie die folgenden Sätze mit Hilfe von Quantoren und Junktoren aus.
   a) Zu jedem x und jedem y gibt es ein z mit $x + y = z$.
   b) Kein x ist kleiner als y.
   c) Es gilt $x + z < y + z$, falls $x < y$ und x, y, z beliebige natürliche Zahlen sind.
   d) Aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt $x = y$ und umgekehrt.

Lösung:
   a) $\forall x,y \in G\ \exists z \in G\ x + y = z$
   b) $\forall x \in G\ \exists y \in G\ \neg(\ x < y) \Leftrightarrow$
   $\forall x \in G\ \exists y \in G\ (\ x \geq y) \Leftrightarrow$
   $\neg\exists x \in G\ \exists y \in G\ (\ x < y)$
   c) $\forall\ x,y,z \in \mathbb{N}\ (x < y) \Rightarrow (x + z < y + z)$
   d) $\forall x,y \in G\ (x \leq y) \wedge (y \leq x) \Leftrightarrow (x = y)$

3. a) Überprüfen Sie durch Umformung <u>oder</u> Wahrheitstabelle, ob der Ausdruck
$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B \Rightarrow C)$ eine Tautologie ist.
b) Überprüfen Sie mit Hilfe der Baummethode, ob $(A \vee B) \Rightarrow (A \wedge B)$ eine Tautologie ist.

Lösung:

a) I. Umformen

$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B \Rightarrow C)$

$\Leftrightarrow \quad (\neg A \vee (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow (\neg (A \wedge B) \vee C)$

$\Leftrightarrow \quad (\neg A \vee (\neg B \vee C)) \Leftrightarrow ((\neg A \vee \neg B) \vee C)$

$\Leftrightarrow \quad (\neg A \vee \neg B \vee C) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B \vee C)$

$\Leftrightarrow \quad T$

II. Wahrheitstabelle

A	B	C	$B \Rightarrow C$	$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$	$A \wedge B$	$A \wedge B \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B \Rightarrow C)$
0	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

b) $(A \vee B) \Rightarrow (A \wedge B)$: f

$(A \vee B)$: w
$(A \wedge B)$: f

A: w $\quad$ A: f
B: f $\quad$ B: w

Es existieren zwei Fällen, in denen die Aussage $(A \vee B) \Rightarrow (A \wedge B)$ falsch wird, damit ist sie sicher nicht immer wahr also keine Tautologie.

4. Zeigen Sie, mit Hilfe der Rechenregeln für Mengenoperationen, dass
$(A \cup C) \cap ((B \setminus A) \cup C) = C$ gilt.

Lösung:

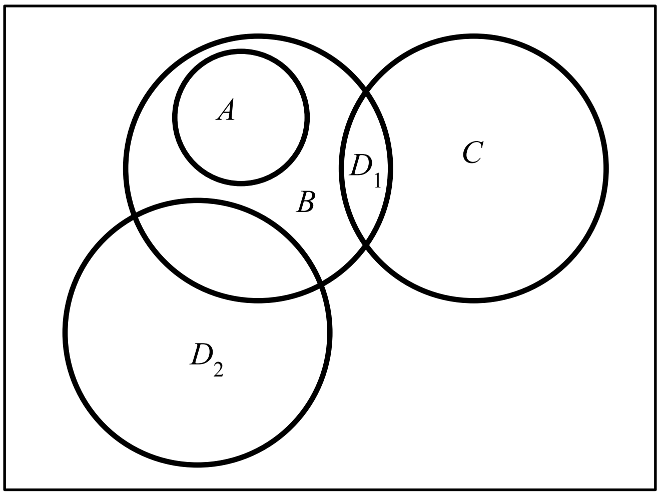
$(A \cup C) \cap ((B \setminus A) \cup C) = (A \cup C) \cap ((B \cap \overline{A}) \cup C) = (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (\overline{A} \cup C) =$
$(A \cap B \cap \overline{A}) \cup C = \emptyset \cup C = C$

oder

$(A \cup C) \cap ((B \setminus A) \cup C) = (A \cap (B \setminus A)) \cup C = \emptyset \cup C = C$

5. Für die Menge aller Dreiecke G seien folgende Teilmengen definiert:
   $A = \{x \in G \mid x \text{ ist gleichseitiges Dreieck}\}$
   $B = \{x \in G \mid x \text{ ist gleichschenkliges Dreieck}\}$
   $C = \{x \in G \mid x \text{ ist rechtwinkliges Dreieck}\}$
   $D = \{x \in G \mid x \text{ ist Dreieck mit wenigstens einem 45°-Winkel}\}$
   Stellen Sie die Beziehungen zwischen diesen Mengen durch ein Venn-Diagramm dar (ohne Begründung)
   Hinweis: Eine Menge kann sich auch aus zwei Teilmengen zusammensetzen.

Lösung:



6. Zeigen Sie, dass die Menge der positiven geraden Zahlen G und die Menge der positiven ungeraden Zahlen U die Menge $\mathbb{N}_{>0}$ partitionieren. (Welche Bedingungen müssen Sie dafür zeigen?)

Lösung:
1. Nichtleere Mengen: $G = \{x \in \mathbb{N}_{>0} \mid \exists k \in \mathbb{N}_{>0}\ x = 2k\}$ und $U = \{y \in \mathbb{N}_{>0} \mid \exists k \in \mathbb{N}_{>0}\ y = 2k + 1\}$
2. Disjunkte Mengen: $2k \neq 2k + 1 \Rightarrow x \neq y \Rightarrow G$ und U disjunkt
3. $G \cup U = \mathbb{N}_{>0}$, da $G \cup U = \{x \in \mathbb{N}_{>0} \mid \exists k \in \mathbb{N}_{>0}\ x = 2k \vee x = 2k + 1\} = \mathbb{N}_{>0}$

7. Begründen Sie, ob die folgenden Funktionen injektiv, surjektiv und bijektiv sind.
   A = {Vater, Mutter, Sohn, Tochter}, B = {1948, 1976, 1950, 1978}
   $x \longrightarrow y = f(x)$ = Jahrgang von x , $x \in A, y \in B$
   a) Vater hat Jahrgang 1948, Mutter hat Jahrgang 1950, Sohn hat Jahrgang 1976, Tochter hat Jahrgang 1978
   b) Vater hat Jahrgang 1948, Mutter hat Jahrgang 1950, Sohn und Tochter haben Jahrgang 1978

Lösung:
a) injektiv (alle Jahreszahlen werden maximal einmal zugeordnet), surjektiv (alle Jahreszahlen werden mindestens einmal zugeordnet) $\Rightarrow$ bijektiv (alle Jahreszahlen werden genau einmal zugeordnet
b) nicht injektiv (1978 tritt zweimal als Bildelement auf..), nicht surjektiv (1976 tritt nicht als Bildelement auf) $\Rightarrow$ nicht bijektiv

8. Beweisen Sie den folgenden Satz durch Kontraposition!
   Satz: Ist mindestens eine der ganzen Zahlen $c = a + 2b$ oder $d = a + 3b$ NICHT durch 5 teilbar, dann ist auch mindestens eine der ganzen Zahlen a oder b NICHT durch 5 teilbar.

Lösung:

A: Mindestens eine der Zahlen $c = a + 2b$ oder $d = a + 3b$ ist NICHT durch 5 teilbar

B: Mindestens eine der ganzen Zahlen a oder b ist NICHT durch 5 teilbar.

$A \Rightarrow B$

Kontraposition:

$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$

$\neg A$: Beide Zahlen $c = a + 2b$ und $d = a + 3b$ sind durch 5 teilbar

$c = a + 2b = 5m \wedge d = a + 3b = 5n$, $a,b,c,d,m,n \in \mathbb{Z}$

$\neg B$: Beide ganze Zahlen a und b sind durch 5 teilbar.

$a = 5k \wedge b = 5l$, $k,l \in \mathbb{Z}$

Vorgehensweise:

Wenn $\neg B$ wahr ist, dann muss auch $\neg A$ wahr sein, damit die Implikation wahr wird.

Direkter Beweis:

$a = 5k$ und $b = 5l$

Eingesetzt in c und d:

$c = a + 2b = 5k + 2 \cdot 5l = 5(k + 2l) = 5m$

$d = a + 3b = 5k + 3 \cdot 5n = 5(k + 3l) = 5n$

$\Rightarrow \neg A$ ist wahr

$\Rightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$ ist wahr

$\Rightarrow A \Rightarrow B$ ist wahr

9. Untersuchen Sie die folgenden Relationen auf der Menge aller Menschen auf Transitivität und Reflexivität (kurze Begründung, auch sprachlich):
   1. ist Onkel von,
   2. wohnt im selben Haus wie,
   3. ist größer als,
   4. ist nicht kleiner als.

Lösung:

1. Nicht transitiv (Gegenbeispiel: mein Onkel Karl hat einen Onkel Erich, dieser ist mein Grossonkel und nicht mein Onkel),
   nicht reflexiv (Gegenbeispiel: ich bin nicht Onkel von mir selbst)
   Falls Sie hier die Begründung für transitiv gegeben hätten (unter der Annahme Grossonkel = Onkel, dann hätte ich das auch als richtig gewertet)
2. Reflexiv (jeder wohnt im selben Haus wie man selbst)
   transitiv (wenn eine Person A im selben Haus wie Person B wohnt und Person B im selben Haus wie Person C wohnt, dann wohnen sicher auch Person A und C im selben Haus)
3. Transitiv (Wenn $a > b$ und $b > c$ dann ist sicher auch $a > c$)
   nicht reflexiv (Gegenbeispiel: ich bin nicht grösser als ich selbst)
4. Transitiv (wenn $a \geq b$ und $b \geq c$ dann ist sicher auch $a \geq c$)
   reflexiv (es gilt sicher $a \geq a$)