MGM_IT Semesterprüfung HS2014

Zeit: 60 Minuten
Zugelassene Hilfsmittel:
- Selbstgeschriebene Notizen im Umfang von 10 Blättern (bzw. 20 Seiten) im Format A4
- Nicht-grafik- und nicht-algebrafähiger Taschenrechner (nur für Grundoperationen und Auswertungen elementarer Funktionen)

Aufgabe 1
Sei $A = \{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$ und die Relation $R = \{(x, 7), (1, 8), (4, 4), (9, 8), (7, 3), (5, 5), (9,1), (8, 9), (8, 1), (1, 9), (3, 3), (8, 8), (7, 7), (1, 1), (y, y)\}$ auf der Menge A.
a) Welche Bedingungen müssen für eine Äquivalenzrelation gelten?
b) Wie hat man $x, y \in A$ zu wählen, damit R eine Äquivalenzrelation auf A ist? Begründen Sie kurz.
c) Geben Sie alle Äquivalenzklassen von R an.

Lösung:
a) Reflexiv, symmetrisch, transitiv
b) $x = 3$: Wegen Symmetrie, es gibt das Element (7,3) also muss es auch das Element (3,7) geben
$y = 9$: Wegen Reflexivität, das Element (9,9) fehlt bislang.
Mit diesen beiden Belegungen ist R auch transitiv.
c) $[1] = \{1,8,9\} = [8] = [9]$
$[3] = \{3,7\} = [7]$
$[4] = \{4\}$
$[5] = \{5\}$
Die Elemente in diesen Äquivalenzklassen verhalten sich jeweils identisch bezüglich der Relation.

Aufgabe 2
Auf den Mengen $A = \{1,2,3,4\}$ und $B = \{a,b,c,d\}$ sind die nachfolgenden Relationen gegeben. Welche Eigenschaften gelten? (Bitte ankreuzen)

$R_i \subseteq A \times B$	Rechtseindeutig	Linkstotal	Rechtstotal	Linkseindeutig
$R_1 = \{(1,c),(4,b),(3,d),(2,a)\}$				
$R_2 = \{(1,a),(1,b),(4,c),(3,d)\}$				
$R_3 = \{(1,d),(2,a),(3,a),(4,c)\}$				

Bei welcher/n Relation(en) handelt es sich um Funktionen?

Lösung:

$R_i \subseteq A \times B$	Rechtseindeutig	Linkstotal	Rechtstotal	Linkseindeutig
$R_1 = \{(1,c),(4,b),(3,d),(2,a)\}$	x	x	x	x
$R_2 = \{(1,a),(1,b),(4,c),(3,d)\}$			x	x
$R_3 = \{(1,d),(2,a),(3,a),(4,c)\}$	x	x		

Bei R_1 und R_3 handelt es sich um Funktionen, da Linkstotal und rechtseindeutig.

Aufgabe 3
Eine Funktion f ist, wie folgt rekursiv definiert:
$f(1) = 1$ und $f(n+1) = f(n) + 8n,\ n \geq 1$.

a) Berechnen Sie $f(5)$.
b) Wie lautet die explizite Form dieser Rekursion? Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass Ihre Lösung für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ stimmt.

Lösung:

a) $f(1) = 1$
$f(2) = 1 + 8 \cdot 1 = 9$
$f(3) = 9 + 8 \cdot 2 = 25$
$f(4) = 25 + 8 \cdot 3 = 49$
$f(5) = 49 + 8 \cdot 4 = 81$

b) Vermutung: $f(n) = (2n - 1)^2$

I. Induktionsverankerung $A(1)$: wahr
$f(1) = 1 \quad = \quad f(1) = (2 \cdot 1 - 1)^2 = 1$ wahr

II. Induktionsschritt

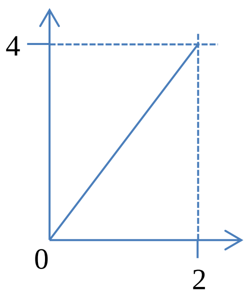
a) Induktionsannahme $A(n)$: wahr
$f(n) = (2n - 1)^2$

b) Induktionsbehauptung $A(n + 1)$: wahr
$f(n+1) = f(n) + 8n = (2 \cdot (n+1) - 1)^2 = (2n + 1)^2$

c) Induktionsschluss
$f(n+1) = f(n) + 8n = (2n - 1)^2 + 8n = (4n^2 - 4n + 1) + 8n = 4n^2 + 4n + 1 = (2n + 1)^2$

Aufgabe 4
Sind die Mengen $A = [0,2]$ und $B = [0,4]$ gleich mächtig? Begründen Sie ausführlich warum nicht oder warum.

Lösung:
Mengen $A = [0,2]$ und $B = [0,4]$ sind gleich mächtig
Zu zeigen: es gibt eine bijektive Abbildung $f\colon A \xrightarrow[\text{bijektiv}]{} B$



$f(x) = 2x$

Diese Funktion ist bijektiv, da
1. [0,4] komplett abgedeckt ist → surjektiv
2. Jeder Wert aus [0,4] nur einmal als Funktionswert angenommen wird (streng monoton steigend) → injektiv

Aufgabe 5
Zeigen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass die nachfolgende Aussage stimmt

$$\forall n \in \mathbb{N}_{>0} \quad \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2) \cdot (3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$$

Lösung:

I. Induktionsverankerung $A(1)$: wahr

$$\frac{1}{1\cdot 4}=\frac{1}{4}=\frac{1}{3\cdot 1+1} \quad \text{wahr}$$

II. Induktionsschritt

a) Induktionsannahme $A(n)$: wahr

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$$

b) Induktionsbehauptung $A(n + 1)$: wahr

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}+\frac{1}{(3n+1)\cdot(3n+4)}=\frac{n+1}{3(n+1)+1}=\frac{n+1}{3n+4}$$

c) Induktionsschluss $A(n) \Rightarrow A(n + 1)$: wahr

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}+\frac{1}{(3n+1)\cdot(3n+4)} &= \frac{n}{3n+1}+\frac{1}{(3n+1)\cdot(3n+4)}\\
&= \frac{n\cdot(3n+4)}{(3n+1)\cdot(3n+4)}+\frac{1}{(3n+1)\cdot(3n+4)}\\
&= \frac{3n^2+4n+1}{(3n+1)\cdot(3n+4)}\\
&= \frac{(3n+1)\cdot(n+1)}{(3n+1)\cdot(3n+4)}=\frac{(n+1)}{(3n+4)}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6

Gesucht ist $a \in \mathbb{N}$, so dass a die Zahlen 238 und 255 teilt.

Lösung

Dann ist $a = 1$ oder $a = 17$. Denn a muss auch 255–238 = 17 teilen.
Da 17 eine Primzahl ist, muss also $a = 1$ oder $a = 17$ sein.

Aufgabe 7

Berechnen Sie den ggT(4711, 1024) mit dem euklidischen Algorithmus:

Lösung:

$$\begin{aligned}
4711 &= 4\cdot 1024 + 615\\
1024 &= 1\cdot 615 + 409\\
615 &= 1\cdot 409 + 206\\
409 &= 1\cdot 206 + 203\\
206 &= 1\cdot 203 + 3\\
203 &= 67\cdot 3 + 2\\
3 &= 1\cdot 2 + 1\\
2 &= 2\cdot 1 + 0
\end{aligned}$$

ggT(4711, 1024) = 1

Aufgabe 8
Berechnen Sie (mindestens 2 Vereinfachungsschritte):
a) $(-7 + 5 + 40) \bmod 8$
b) $(27 \cdot 456 + 33) \bmod 13$
c) $2757^{27} \bmod 9$
d) $2764^{27} \bmod 9$

Lösung:
a) $(-7 + 5 + 40) \bmod 8 \equiv 38 \bmod 8 \equiv 6 \bmod 8$
b) $(27 \cdot 456 + 33) \bmod 13 \equiv (27 \cdot 456) \bmod 13 + 33 \bmod 13$
$\equiv (27 \bmod 13 \cdot 456 \bmod 13) + 33 \bmod 13 \equiv (1 \bmod 13 \cdot 1 \bmod 13) + 7 \bmod 13 \equiv 8 \bmod 13$
c) $2757^{27} \bmod 9$
2757: ist durch 3 teilbar
$2757^{27} \bmod 9 \equiv 2757^{25} \cdot 2757^{2} \bmod 9 \equiv (2757^{25} \bmod 9) \cdot (0 \bmod 9) \equiv 0 \bmod 9$
d) $2764^{27} \bmod 9$
$\mathrm{ggT}(2764,9) = 1$
$\varphi(9) = \varphi(3^2) = 3^2 - 3^1 = 6$
$2764^{27} \bmod 9 \equiv 2764^{3} \cdot (2764^{6})^{4} \bmod 9 \equiv 2764^{3} \cdot (1^{6})^{4} \bmod 9 \equiv 2764^{3} \bmod 9$
$\equiv (2764 \bmod 9) \cdot (2764 \bmod 9) \cdot (2764 \bmod 9) \equiv (1 \bmod 9) \cdot (1 \bmod 9) \cdot (1 \bmod 9) \equiv 1 \bmod 9$

Aufgabe 9
Lösen Sie folgende Gleichungen nach x auf:
a) $6x + 2 \equiv 4 \bmod 9$
b) $34x - 95 \equiv 25 \bmod 101$
c) $4x \equiv 8 \bmod 10$
Hinweis: Aufgabe a) ist nicht lösbar. Warum?

Lösung:
a) $6x + 2 \equiv 4 \bmod 9 \Leftrightarrow 6x \equiv 2 \bmod 9$.
Da $\mathrm{ggT}(6,9) = 3$ kein Teiler von 2 ist, hat diese Gleichung keine Lösung.
b) $34x - 95 \equiv 25 \bmod 101 \Leftrightarrow 34x \equiv 95 + 25 \bmod 101 \Leftrightarrow 34x \equiv 19 \bmod 101$
Wir brauchen das Inverse von 34 in $\mathbb{Z}_{101}$. Dafür stellen wir den $\mathrm{ggT}(34,101)$ als Linearkombination von 34 und 101 dar. Dies erfolgt mittels erweiterten Euklidischen Algorithmus:

	$x_0 = 1,\ x_1 = 0$	$y_0 = 0,\ y_1 = 1$
$101 = 2 \cdot 34 + 33$	$x_2 = 1$	$y_2 = 0 - 1 \cdot 2 = -2$
$34 = 1 \cdot 33 + 1$	$x_3 = 0 - 1 \cdot 1 = -1$	$y_3 = 1 - (-2) \cdot 1 = 3$
$33 = 33 \cdot 1 + 0$		

$1 = -1 \cdot 101 + 3 \cdot 34 \Rightarrow [34]^{-1}$ in $\mathbb{Z}_{101}$
$34x \equiv 19 \bmod 101 \Rightarrow 3 \cdot 34x \equiv 3 \cdot 19 \bmod 101 \Rightarrow x \equiv 57 \bmod 101$.
c) $4x \equiv 8 \bmod 10 \quad \Leftrightarrow \quad 4x = 8 + 10t$
$4x - 10t = 8$
$2x - 5t = 4$ für ein $t \in \mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow 2x \equiv 4 \bmod 5$
$x \equiv 2 \bmod 5$
$\Leftrightarrow x \equiv 2 \bmod 10 \vee x \equiv 7 \bmod 10$

Aufgabe 10
Gesucht ist die kleinste Zahlen $x \in \mathbb{N}$, für die gilt:
$x \equiv 12 \bmod 15$
$x \equiv 7 \bmod 16$

Lösung:
$m = 15 \cdot 16 = 240$
$M_1 = 240/15 = 16$ $\quad$ $M_2 = 240/16 = 15$

$[15]^{-1}$ in $\mathbb{Z}_{16}$
$16 = 1 \cdot 15 + 1$ $\quad$ $[15]^{-1} = [-1]$ in $\mathbb{Z}_{16}$

$[16]^{-1}$ in $\mathbb{Z}_{15}$
$16 = 1 \cdot 15 + 1$ $\quad$ $[16]^{-1} = [1]$ in $\mathbb{Z}_{15}$

$x \equiv 12 \cdot 16 \cdot (-1) + 7 \cdot 15 \cdot 1 \equiv 87 \bmod 240$