Name:	Note:

Test 1:	Test 2:	Test 3:	Test 4:	Test 5:

Semesternote MANIT1:

Heidi Gebauer (geba)
School of Engineering T

Mathematik für Ingenieure MANIT1 — Semesterendprüfung am 12.1.2015, 120 Minuten, Klasse: IT 14t

Hilfsmittel: Sie können einen Taschenrechner aus der Liste, eine Formelsammlung und eine selbstgeschriebene Zusammenfassung im Umfang von 5 beidseitig (oder 10 einseitig) beschriebenen DINA4 Blättern verwenden. Andere Hilfsmittel sind nicht zugelassen.

Hinweis: Stellen Sie Ihren Lösungsweg dar. (Für Resultate, die lediglich durch "Pröbeln" gefunden wurden, gibt es keine Punkte!)

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte Total	6	6	6	6	6	6	6	6	48
Punkte erzielt									

Der Stoff dieser Aufgabe wurde in diesem HS nicht behandelt!!!!
(eine "Ersatz-Aufgabe" zur Optimierung ist am Ende hinzugefügt)

Aufgabe 1
Integralrechnung

(a) (*2 Punkte*) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f(x) = 20x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 10$.

(b) (*2 Punkte*) Berechnen Sie $\int_1^2 \left(4x^3 + \frac{8}{x^3}\right) \mathrm{d}x$

(c) (*2 Punkte*) Berechnen Sie den Inhalt des *abgeschlossenen* Flächenstücks, das durch den Graph der Funktion $f(x) = -x^2 + 3x$ und die x-Achse begrenzt wird.

Aufgabe 2
Funktionen allgemein

(a) (*1.5 Punkte*) Wir betrachten die Funktionen $f(x) = \dfrac{6}{x^2-1}$ und $g(x) = \sqrt{x+2}$. Bestimmen Sie

(i) $(f \circ g)(t)$ (ii) $(g \circ f)(5)$ (iii) $(f+g)(7)$

(b) (*2.5 Punkte*) Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert

$$\lim_{x\to 2} \frac{4x^3+8x^2-20x-24}{x^2+5x-14}$$

(c) (*2 Punkte*) Gesucht ist eine Polynomfunktion $f(x)$ 3. Grades, bei der

- 1, -1 und 2 je eine Nullstelle sind, *und*
- $f(5)$ um 16 grösser ist als $f(3)$.

(a) (i) $(f\circ g)(t) = \dfrac{6}{t+1}$ (ii) $(g\circ f)(5) = \sqrt{2.25}$

(iii) $(f+g)(7) = 1/8 + 3 = 3.125$

(b) Zähler und Nenner mit $(x-2)$ faktorisieren:

$(x^2+5x-14):(x-2) = x+7 \Rightarrow$ Nenner $= (x-2)(x+7)$

$(4x^3+8x^2-20x-24):(x-2)$ mit Hornerschema

	4	8	-20	-24
2		8	32	24
	4	16	12	0

$\Rightarrow$ Zähler $= (x-2)(4x^2+16x+12)$

$\Rightarrow$ gesuchter Grenzwert: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(4x^2+16x+12)}{(x-2)(x+7)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4x^2+16x+12}{x+7}$

einsetzen $\xrightarrow{\quad} \dfrac{4\cdot 2^2+16\cdot 2+12}{2+7} = \underline{\underline{\dfrac{20}{3}}}$

c). Ansatz: $f(x) = a(x-1)(x+1)(x-2)$

$\Rightarrow f(5) = a\cdot 4\cdot 6\cdot 3 = 72a$

$\Rightarrow f(3) = a\cdot 2\cdot 4\cdot 1 = 8a$

Bed: $f(5) = f(3)+16$. Somit: $72a = 8a+16$

$\Rightarrow 64a = 16 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}(x-1)(x+1)(x-2)$

Aufgabe 3
Gebrochenrationale Funktionen

Wir betrachten die gebrochenrationale Funktion

$$f(x) = \frac{4x^2 + cx}{ax^2 - b}$$

(a) (*4.5 Punkte*) Welche Zahlen muss man für a, b und c einsetzen, damit $f(x)$ alle drei folgenden Eigenschaften hat:

- die Asymptote im Unendlichen ist $y = 2$, und
- bei $x_1 = 2$ besitzt $f(x)$ eine Polstelle, und
- bei $x_2 = 0$ hat $f(x)$ die Steigung 3.

(b) (*1.5 Punkte*) Skizzieren Sie den *ungefähren* Verlauf des Graphen von $f(x)$, so dass Polstellen, Nullstellen und das asymptotische Verhalten sofort ersichtlich sind.

`Hinweis:` Falls Sie (a) nicht lösen konnten, nehmen Sie die Werte $a = 1$, $b = 9$, $c = -40$

(a) Asymptote $= \frac{4}{a} \overset{!}{=} 2 \Rightarrow \underline{a = 2}$

2 ist Polstelle $\Rightarrow a \cdot 2^2 - b = 0 \Rightarrow \underline{b} = 2^2 \cdot a = 4 \cdot 2 = \underline{8}$

einsetzen ergibt: $f(x) = \frac{4x^2 + cx}{2x^2 - 8}$

Bed: $f'(0) = 3$

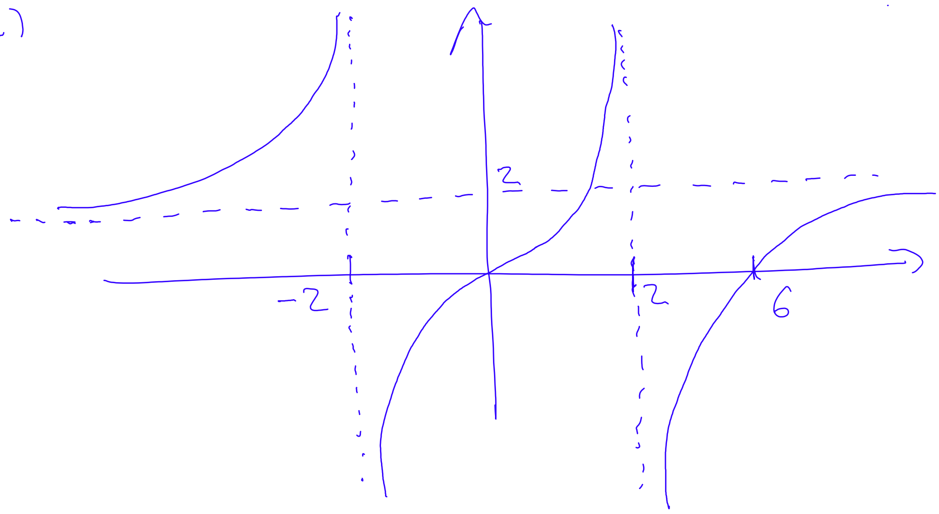
$f'(x)$ berechnen: $f(x) = \frac{u}{v}$ mit $u = 4x^2 + cx$, $u' = 8x + c$, $v = 2x^2 - 8$, $v' = 4x$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(8x+c)(2x^2-8) - (4x^2+cx)\,4x}{(2x^2-8)^2}$$

$$\Rightarrow f'(0) = \frac{c \cdot (-8)}{(-8)^2} = -\frac{c}{8} \overset{!}{=} 3 \Rightarrow \underline{c = -24}$$

(b) $f(x) = \frac{4x(x-6)}{2(x+2)(x-2)}$

Nullstellen: 0, 6
Polstellen: 2, −2
Asymptote: $y = 2$



Aufgabe 4
Folgen und Reihen

(a) (*4 Punkte*) Schreiben Sie die folgende Summe

$$s = \frac{100 \cdot 9}{50} + \frac{97 \cdot 27}{75} + \frac{94 \cdot 81}{100} + \ldots + \frac{(-50) \cdot ?}{1300}$$

mit Hilfe des Summenzeichens und bestimmen Sie das Fragezeichen.

(b) (*2 Punkte*) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(7+5k)}{n^2}$

Tipp: Wenden Sie zuerst für den Zähler eine geeignete Formel an, so dass er danach kein Summenzeichen mehr enthält.

(a) Nenner: arithmetische Folge: $a_k = 50 + (k-1) \cdot 25$

Zähler: • $100, 97, 94, \ldots$
ist eine arithmetische Folge: $b_k = 100 - (k-1) \cdot 3$

• $9, 27, 81, \ldots$
ist eine geometrische Folge: $c_k = 9 \cdot 3^{k-1}$

Bestimmung von n: $a_n = 50 + (n-1) \cdot 25 = 1300$
$\Rightarrow n-1 = 50 \Rightarrow \underline{n = 51}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{s = \sum_{k=1}^{51} \frac{(100-(k-1)\cdot 3) \cdot 9 \cdot 3^{k-1}}{50+(k-1)\cdot 25}}} \quad \text{und} \quad ? = \underline{\underline{9 \cdot 3^{50}}}$$

b). $\sum\limits_{k=1}^{n}(7+5k) = a_1 \cdot n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d = 12n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 5$

$a_1 = 12, d = 5$

$$\text{Grenzwert} = \lim_{n\to\infty} \frac{12n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 5}{n^2} = \frac{5}{2}$$

Zähler u. Nenner haben gleichen Grad

Aufgabe 5
Differentialrechnung und Stetigkeit

(a) (*5 Punkte*) Die Werte a, b sollen so gewählt werden, dass die untenstehende Funktion bei $x_0 = 1$ stetig *und* differentierbar ist.

$$f(x) = \begin{cases} x + b, & \text{falls } x \leq 1 \\ ax^2 + 3, & \text{falls } x > 1 \end{cases}$$

(b) (*1 Punkt*) Erstellen Sie eine *grobe* Skizze für den Verlauf des Graphen von $f(x)$, so dass das Verhalten in der Nähe von $x_0 = 1$ ersichtlich wird.
`Hinweis:` Die Skizze lässt sich auch erstellen, wenn Sie (a) nicht lösen konnten.

(a) Stetigkeitsbed: $1 + b = a \cdot 1 + 3 \Longrightarrow \underline{b = a + 2}$

Differenzierbarkeitsbed aufstellen:

$f_1(x) = x + b$, $f_1'(x) = 1$

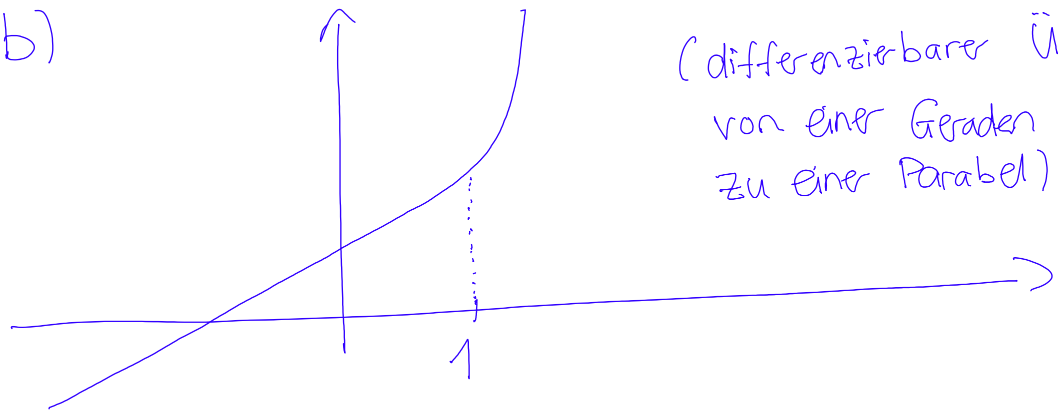
$f_2(x) = ax^2 + b$, $f_2'(x) = 2ax$

Bed: $f_1'(1) = f_2'(1)$

resp. $1 = 2a$

$\Longrightarrow \underline{\underline{a = 1/2}} \Longrightarrow \underline{\underline{b = 1/2 + 2 = 2.5}}$

(b)



(differenzierbarer Übergang von einer Geraden zu einer Parabel)

Aufgabe 6
Differentialrechnung

Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen

(a) (*2 Punkte*) $f(x) = x \cdot \sin(x)$

(b) (*2 Punkte*) $g(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$

(c) (*2 Punkte*) $h(x) = e^{(x^2)}$

(a) $f(x) = u \cdot v$ mit

$u = x, \quad u' = 1$

$v = \sin(x), \quad v' = \cos(x)$

$$f'(x) = u'v + uv' = 1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x) = \underline{\underline{\sin(x) + x \cdot \cos(x)}}$$

(b) $g(x) = \dfrac{u}{v}$ mit

$u = 1+x, \quad u' = 1$

$v = 1-x, \quad v' = -1$

$$g'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{1 \cdot (1-x) - (1+x) \cdot (-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \underline{\underline{\frac{2}{(1-x)^2}}}$$

(c) $h(x) = (F \circ u)(x)$

$F(u) = e^u, \quad F'(u) = e^u$

$u(x) = x^2, \quad u'(x) = 2x$

$$h'(x) = F'(u) \cdot u'(x) = e^u \cdot 2x = \underline{\underline{e^{x^2} \cdot 2x}}$$

Aufgabe 7
Differentialrechnung

Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^3 + 8$.
Mit $t(x)$ bezeichnen wir die Tangente von $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$.

(a) (*2 Punkte*) Bestimmen Sie $t(x)$.

(b) (*3 Punkte*) Berechnen Sie *alle* Punkte, die sowohl zum Graph von $t(x)$ als auch zum Graph von $f(x)$ gehören.

Tipp: Hornerschema benutzen, um eine bekannte Lösung abzuspalten.

(c) (*1 Punkt*) In welchem Punkt (x_1, y_1) besitzt $f(x)$ eine Tangente, die parallel zu t ist?

(Bem: Gesucht ist selbstverständlich eine Lösung mit $x_1 \neq 1$.)

(a) Formel: $t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

$f'(x) = 3x^2$

$f'(x_0) = f'(1) = 3 \cdot 1 = 3$

$f(x_0) = f(1) = 1 + 8 = 9$

$\Rightarrow t(x) = \underline{\underline{3(x-1) + 9}}$

(b) Bed: $x^3 + 8 = 3x + 6$

$\Rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0$

durch Erraten: $x = 1$ ist Nullstelle
Berechnung von $(x^3 - 3x + 2) : (x - 1)$ mit Horner-Schema

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
 & 1 & 0 & -3 & 2 \\
1 & & 1 & 1 & -2 \\
\hline
 & 1 & 1 & -2 & 0
\end{array}$$

verbleibendes Polynom: $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$

$\Rightarrow$ Nullstellen: $\underline{1, -2}$

$f(1) = 9$, $f(-2) = 0$ $\Rightarrow$ gesuchte Punkte: $\underline{\underline{(1,9), (-2,0)}}$

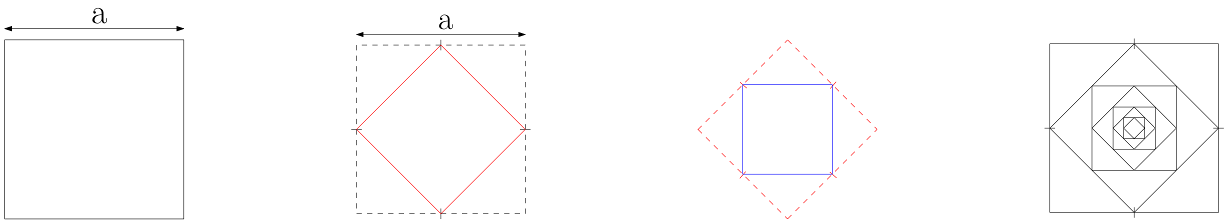
(c) Bed: $f'(x) = 3$

$\Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -1$

nur $x_2 = -1$ kommt als Lösung infrage

$f(-1) = 7 \Rightarrow$ gesuchter Punkt $= \underline{\underline{(-1, 7)}}$

Aufgabe 8



1. Quadrat　　2. Quadrat　　3. Quadrat　　Die ersten 8 Quadrate

Wir starten mit einem beliebigen Quadrat (s. Bild oben links), verbinden die Mittelpunkte der Seiten und erhalten so ein neues Quadrat (rot eingezeichnet).
Wir wiederholen das Vorgehen und erhalten auf diese Weise beliebig viele Quadrate.

(a) (*1 Punkt*) Wir bezeichnen die Seitenlänge des ersten Quadrates mit dem Parameter a. Drücken Sie die Seitenlänge des zweiten Quadrates mithilfe von a aus.

Für den Rest der Aufgabe nehmen wir an, dass $a = 2$ ist.

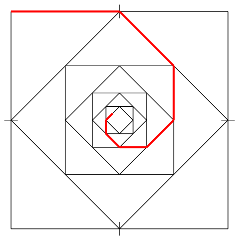
(b) Bestimmen Sie

(i) (*1 Punkt*) die Seitenlängen der ersten drei Quadrate

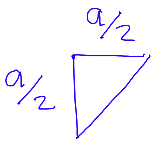
(ii) (*1 Punkt*) die Seitenlänge des neunten Quadrates

(iii) (*2 Punkte*) eine Formel für die Seitenlänge des k-ten Quadrates

(c) (*1 Punkt*) Wir betrachten den Weg, der von allen Quadraten jeweils eine *halbe* Seitenlänge enthält (s. Abbildung rechts).
Bestimmen Sie den Grenzwert seiner Länge.



(a)



$$\text{Seitenlänge} = s = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

(b) (i) $s_1 = 2$

$s_2 = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$s_3 = 1$

(ii) es wird fortlaufend durch $\sqrt{2}$ geteilt $\Rightarrow s_9 = \frac{2}{(\sqrt{2})^8} = \frac{2}{16} = \underline{\underline{\frac{1}{8}}}$

(iii) $s_k = \frac{2}{(\sqrt{2})^{k-1}}$ (geom. Folge mit $a_1 = 2$, $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$)

(c) $\frac{1}{2}\left(s_1 + s_2 + s_3 + \dots\right) = \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$

unendl. geom. Reihe

$$= \underline{\underline{\frac{1}{1-1/\sqrt{2}}}}$$

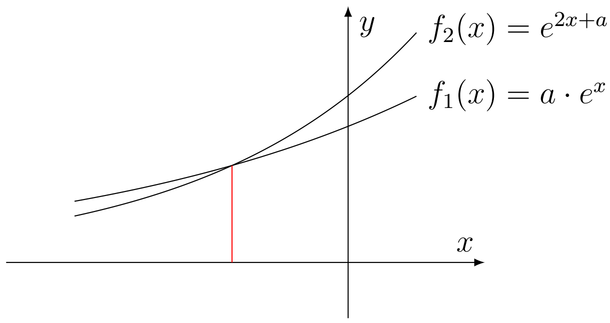
Aufgabe 4
Optimierung

Aufgabe aus der SEP vom FS 2015

Wir betrachten die Funktionen $f_1(x) = a \cdot e^x$ und $f_2(x) = e^{2x+a}$ für ein $a > 0$.

(a) (*2 Punkte*) Bestimmen Sie die Stelle, bei der $f_1(x)$ und $f_2(x)$ einen Schnittpunkt haben. (Gesucht ist ein Ausdruck in Abhängigkeit von a.)

(b) (*4 Punkte*) Wie muss a gewählt werden, damit die rote, vertikale Linie maximale Länge hat? Begründen Sie, weshalb die gefundene Lösung tatsächlich einem Maximum entspricht.



(a) $a \cdot e^x = e^{2x+a}$

$\Rightarrow a \cdot e^x = e^{2x} \cdot e^a$

$\Rightarrow \frac{a}{e^a} = e^x$

$\Rightarrow x = \ln\left(\frac{a}{e^a}\right) = \ln(a) - a$

(b) Länge der roten Linie:

$f_1(x) = f_1(\ln(a) - a) = a \cdot e^{\ln(a) - a} = a \cdot \frac{e^{\ln(a)}}{e^a} = a \cdot \frac{a}{e^a} = \frac{a^2}{e^a}$

Zielfunktion: $g(a) = \frac{a^2}{e^a}$

Ableiten und gleich 0 setzen:

$g(a) = \frac{u}{v}$ mit

$u = a^2, \; u' = 2a$ $\Rightarrow g'(a) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{2ae^a - a^2e^a}{e^{2a}} \overset{!}{=} 0$

$v = e^a, \; v' = e^a$

$\Rightarrow 2ae^a - a^2e^a \overset{!}{=} 0 \;|: e^a$ $\Rightarrow a = 2$ (gem. Aufgabenstellung ist $a \neq 0$)

$\Rightarrow 2a - a^2 = 0 \Rightarrow 2 - a = 0 \Rightarrow a = 2$

$g''(a) = \left(\frac{2a - a^2}{e^a}\right)' = \frac{(2-2a)e^a - (2a - a^2)e^a}{e^{2a}} \Rightarrow g''(2) = \frac{-2e^a}{e^4} < 0 \longrightarrow$ Maximum ✓