MGM_IT Semesterprüfung

Zeit: 60 Minuten
Zugelassene Hilfsmittel:
- Handschriftliche Notizen im Umfang von 10 Blättern (bzw. 20 Seiten) im Format A4
- Nicht-grafik- und nicht-algebrafähiger Taschenrechner (nur für Grundoperationen und Auswertungen elementarer Funktionen)

1. Gegeben sei das Prädikat: $A(x,y)$: x ist eine Stadt in y
   und die Mengen:
   X_1 = {Bern, Hamburg, Berlin}
   X_2 = {Bern, Lausanne, Zürich}
   X_3 = {Brüssel, Amsterdam, Bern}
   Y_1 = {Deutschland, Italien}
   Y_2 = {Schweiz, Niederlande, Belgien}
   Y_3 = {Deutschland, Schweiz, Italien}
   Y_4 = {Schweiz}

   Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche sind falsch (ohne Begründung). Richtige Antwort + 0.5P, falsche Antwort – 0.5P insgesamt minimal 0P.
   1. $\forall x \in X_1\ \exists y \in Y_1: A(x,y)$
   2. $\forall x \in X_3\ \exists y \in Y_2: A(x,y)$
   3. $\exists y \in Y_3\ \forall x \in X_2: A(x,y)$
   4. $\forall y \in Y_1\ \exists x \in X_1: A(x,y)$
   5. $\exists x \in X_1\ \exists y \in Y_1: A(x,y)$
   6. $\forall x \in X_2\ \forall y \in Y_4: A(x,y)$

2. Drücken Sie die folgenden Sätze mit Hilfe von Quantoren und Junktoren aus.
   a) Zu jedem x und jedem y gibt es ein z mit $x + y = z$.
   b) Kein x ist kleiner als y.
   c) Es gilt $x + z < y + z$, falls $x < y$ und x, y, z beliebige natürliche Zahlen sind.
   d) Aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt $x = y$ und umgekehrt.

3. a) Überprüfen Sie durch Umformung <u>oder</u> Wahrheitstabelle, ob der Ausdruck
   $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)$ eine Tautologie ist.
   b) Überprüfen Sie mit Hilfe eines Wahrheitsbaumes (Baummethode), ob $(A \vee B) \Rightarrow (A \wedge B)$ eine Tautologie ist.

4. Zeigen Sie, mit Hilfe der Rechenregeln für Mengenoperationen, dass
   $(A \cup C) \cap ((B \setminus A) \cup C) = C$ gilt.

!!! Es geht weiter auf Seite 2 !!!

5. Für die Menge aller Dreiecke G seien folgende Teilmengen definiert:
   $A = \{x \in G \mid x$ ist gleichseitiges Dreieck$\}$
   $B = \{x \in G \mid x$ ist gleichschenkliges Dreieck$\}$
   $C = \{x \in G \mid x$ ist rechtwinkliges Dreieck$\}$
   $D = \{x \in G \mid x$ ist Dreieck mit wenigstens einem 45°-Winkel$\}$
   Stellen Sie die Beziehungen zwischen diesen Mengen durch ein Venn-Diagramm dar (ohne Begründung)
   Hinweis: Eine Menge kann sich auch aus zwei Teilmengen zusammensetzen.

6. Zeigen Sie, dass die Menge der positiven geraden Zahlen G und die Menge der positiven ungeraden Zahlen U die Menge $\mathbb{N}_{>0}$ partitionieren.
   Hinweis: Welche Bedingungen müssen Sie dafür zeigen?

7. Begründen Sie, ob die folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv und bijektiv sind.
   $A = \{$Vater, Mutter, Sohn, Tochter$\}$, $B = \{1948, 1976, 1950, 1978\}$
   $x \rightarrow y = f(x) =$ Jahrgang von x , $x \in A, y \in B$
   a) Vater hat Jahrgang 1948, Mutter hat Jahrgang 1950,
      Sohn hat Jahrgang 1976, Tochter hat Jahrgang 1978
   b) Vater hat Jahrgang 1948, Mutter hat Jahrgang 1950,
      Sohn und Tochter haben Jahrgang 1978

8. Beweisen Sie den folgenden Satz durch Kontraposition!
   Satz: Ist mindestens eine der ganzen Zahlen $c = a + 2b$ und $d = a + 3b$ NICHT durch 5 teilbar, dann ist auch mindestens eine der ganzen Zahlen a und b NICHT durch 5 teilbar.

9. Untersuchen Sie die folgenden Relationen auf der Menge aller Menschen auf Transitivität und Reflexivität (kurze Begründung, auch sprachlich möglich):
   1. ist Onkel von,
   2. wohnt im selben Haus wie,
   3. ist größer als,
   4. ist nicht kleiner als.
   Hinweis: Wann genügt ein Beispiel, wann müssen Sie allgemein begründen?