

Серия 1

1. Докажите, что число $4^n(8k-1)$ не представимо в виде суммы трех квадратов целых чисел.

2. В графе любое ребро инцидентно с вершиной, степень которой не превосходит четырех. Какое наибольшее количество ребер может быть в таком графе, если вершин сорок?

3. Докажите неравенство $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$

4. Вычислите $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + 2020 \cdot 2021 \cdot 2022$

5. Три вещественных числа x, y, z удовлетворяют условию $\frac{1}{x+y+z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Верно ли, что среди них есть два противоположных?

6. 2020 алкоголиков 2021 раз соображали на троих, причем никакая тройка не повторялась дважды. Докажите, что найдутся две тройки, которые пересекаются ровно по одному алкоголику.

7. Окружность Ω пересекает стороны BC, CA, AB треугольника ABC в точках $A_1, A_2; B_1, B_2$ и C_1, C_2 соответственно. Оказалось, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что тогда и прямые AA_2, BB_2, CC_2 также пересекаются в одной точке.