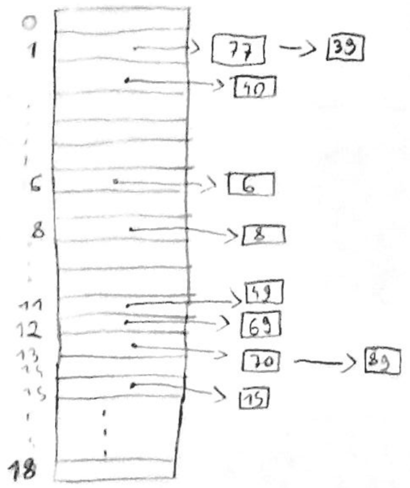
ZADATAK 1. 77, 69, 39, 70, 6, 8, 40, 89, 49, 15, $m = 19$.

1. DIO:

a) ULANČAVANJE, $h(k) = k \bmod m$



b) PROBIRANJE (DVOSTRUKO PROBIRANJE)

$i = 0, 1, \ldots, m-1$, $h(k,i) = (h_1(k) + i \cdot h_2(k)) \bmod m$

$h_1(k) = k \bmod m \quad h_2(k) = 1 + (k \bmod (m-1))$

$h(k,i) = (k \bmod m + i(1 + (k \bmod (m-1)))) \bmod m$

0		
1	77	
	40	
.		
.		
5	39	$i=1$
6	6	
7		
8	8	
9	15	$i=2$
10		
11	89	$i=2$
12	69	
13	70	
14		
15	49	$i=3$
.		
.		
18		

2. DIO:

n-znam. dec. br. $x_1 x_2 \ldots x_n$

$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \pmod 8$

$f(x)$ nije univerzalna funkcija:

kontraprimjer: $a_i = 0 \ \forall i \in 1, \ldots, n$

$f(x) = 0, \forall x$

ZADATAK 2.

n - ključeva

m - vel. tablice

unif. raspršivanje $\Rightarrow P(h(k) = h(l)) = \frac{1}{m}$

$E[\{k, l\} : k \neq l, h(k) = h(l)\}] =$

$= \sum_{i=1}^{n} P(h(k) = h(l)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m}$

$= \frac{n(n-1)}{2m}$ //

ZADATAK 3. $n \leq m/2$, OTVORENO ADRESIRANJE S PROBIRANJEM

1) UNIF. RASPRŠ., $i = 1, \ldots, n$ P("i-to ubacivanje zahtjeva strogo više od k probiranja najviše 2^{-k}")

- VJEROJATNOST DA SE KLJUČ UBACI U NEKO MJESTO U TABLICI JE $1/m$, PA JE VJEROJATNOST DA SE KLJUČ NE UBACI NA TO MJESTO TJ. STVORI SE KOLIZIJA $1 - \frac{1}{m}$

- ZA i-ti KLJUČ SLIJEDI:

$P(X > i) = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{i-1}$

TJ. i-to ubacivanje zahtjeva strogo više od k probiranja.

$\Rightarrow P(X > k) = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{k-1}$

$P(\text{i-to ubacivanje} > 2\lg n \text{ probiranja}) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

2) VJEROJATNOST DA SE i-ti ključ ubaci u SLOBODNU ĆELIJU JE $\frac{m-(i-1)}{m}$

POŠTO SU PROŠLI KLJUČEVI VEĆ ZAUZELI $\frac{i-1}{m}$ MJESTA, GLEDAMO VJEROJATNOST DA SE PREOSTALI KLJUČEVI UBACE U PREOSTALE DIJELOVE U TABLICI

TJ. $\frac{m-(i-1)}{m} \cdot \frac{n-(i-1)}{m-(i-1)} = \frac{n-(i-1)}{m} \leq \frac{n-(i-1)}{m} \cdot \left(1 - \frac{n-(i-1)}{m}\right)^{2\lg n - 1} \leq \frac{n}{m} \cdot \left(1 - \frac{n}{m}\right)^{2\lg n - 1}$ (*)

$(*) \leq \frac{n}{m} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{2\lg n - 1} \leq \frac{n}{m} \cdot \frac{1}{n^{2\lg n - 1}}$

$\leq \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n^{2\lg n - 2}}) \overset{\{n \leq \frac{m}{2}\}}{\leq} \frac{2}{n^{2\lg n - 2}} \leq c \cdot \frac{1}{n^2}$

npr. $c = 2$

$\Rightarrow O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ //

3) VJEROJATNOST KOLIZIJE NA i-tom BACANJU JE $\frac{i-1}{m}$ $\quad P(X_i > k) = P($"SVI PRETHODNI ZAUZIMAJU k-POZICIJA U TABLICI"$) \leq \left(\frac{k}{m}\right)^i$ (*)

za $k = 2\lg n$

$$P(X_i > 2\lg n) = P(\max(X_1 \dots X_n) > 2\lg n)$$

$$\leq P(X_1 > 2\lg n) + P(X_2 > 2\lg n) + \dots + P(X_n > 2\lg n)$$

$$\overset{(*)}{\leq} n \cdot \left(2\lg \frac{n}{m}\right)^{2\lg n} = n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{2\lg n} \Rightarrow O\left(\frac{1}{n}\right)$$

4) NAJDULJA SEKVENCA n

VJEROJATNOST $P(X > 2\lg n) = \frac{1}{n}$ IZ 3)

IZ DEF. POTPUNE VJEROJATNOSTI SLIJEDI

$$E[X] \leq P(X \leq 2\lg n) \cdot 2\lg n + P(X > 2\lg n) \cdot n =$$

$$= \frac{n-1}{n} \cdot 2\lg + \frac{1}{n} \cdot n = O\left(\frac{\lg n}{n}\right) \Rightarrow O(\lg n)$$