ZAD 1.

a) Pretpostavimo G je stablo, Pošto je G neusmjeren graf, trebamo samo pokazati da je povezan i acikličan kako bi pokazali da je G stablo. Budući da je G povezan, slijedi da za svaka dva čvora postoji put koji ih povezuje. Ako bi u G postojao ciklus to bi značilo da postoje dva čvora u G koja su povezana više od jednim putem, šta bi značilo da G nije stablo. Slijedi da je G acikličan i povezan tj. stablo.

b) Pretpostavimo da postoje dva vrha x, y u G koji su povezani više od jednog puta. To znači da u G postoji ciklus, šta je kontradikcija s tvrdnjom 1. Slijedi da su svaka dva vrha u G povezana jedinstvenim putem.

c) Pretpostavimo da postoje dva vrha koja nisu povezana nikakvim putem. Budući da je G stablo, postoji barem jedan brid koji povezuje ta 2 vrha. Početna pretpostavka je ako se bilo koji brid makne iz E, G postaje nepovezan, šta je u suprotnosti s pretpostavkom da ne postoji put između ova dva vrha u G. Slijedi da početna tvrdnja vrijedi.

d) Znamo da u stablu s V čvorova postoji V-1 bridova, Pretpostavimo da G ima V čvorova i E = V-1 bridova, ali da G nije stablo. G onda mora imati barem jedan ciklus. Pošto G ima V čvorova, taj ciklus bi morao sadržavati čvor koji nije dio stabla, Znači da mora postojati još jedan brid između ta dva čvora, šta znači da G ima više od V-1 bridova. Slijedi da je G stablo ako vrijedi E = V-1.

e) Pretpostavimo da u G postoji ciklus, pošto je G neusmjeren taj ciklus mora imati barem 3 čvora. Ako uklonimo brid iz tog ciklusa i dalje bi postojao put koji povezuje sve čvorove u ciklusu šta znači da G ima više od V-1 bridova. Slijedi da je G acikličan

f) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi, kada bismo nadodali brid on bi povezao dva čvora u G koji nisu prije bili povezani. Znači da G prije dodavanja tog brida nije bio povezan, šta je kontradikcija s tvrdnjom a). Stoga ako se nadoda brid, G će sadržavati ciklus.

ZAD.2. Kao kontraprimjer možemo zamisliti graf s 4 vrha koji a, b, c, d. Neka su bridovi redom (a, b), (b, c), (c, d), (d, a) i imaju težine 1, 5, 1, 5. Neka je $V_1 = \{a, d\}$, $V_2 = \{b, c\}$, tada postoji samo jedan rubni brid sa svakim od ovih skupova vrhova, pa se stabla koja moramo uzeti na V_1, V_2 sastoje točno od bridova (a, d) i (b, c) za ukupnu težinu od 10 + 1 jer to je težina brida koji ih povezuje. Međutim, MST bi koristila dva brida težine 1 i samo jedan brid težine 5 za ukupnu težinu od 7. Ovime smo pokazali da algoritam nije korektan.

ZAD.3.

a) MAYBE-MST-A, pokazat ćemo za ovaj algoritam da nikada ne uklanja brid koji mora biti dio MST-a. Ako uklonimo brid e tada on ne može biti most, što znači da leži na jedinstvenom ciklusu grafa. S obzirom da uklanjamo bridove u neopadajućem poretku, težina svakog brida na ciklusu mora biti manji ili jednaka težini e. Postoji MST na G sa uklanjenim bridom e, Algoritam vraća MST.

b) MAYBE-MST-B: Ovaj algoritam ne vraća MST jer ako algoritam ispituje bridove u navedenom redoslijedu, uzet će dva teška brida umjesto dva lagana. Npr. Neka bridovi budu (a, b), (b, c), (c, a) s težinama 3, 2, 1. Efikasna implementacija ovog algoritma koristiće razdjelne skupove za praćenje povezanih komponenti. Spajanje unutar iste komponente stvorit će ciklus. S obzirom da radimo V poziva MAKE-SET i najviše 3E poziva FIND-SET i UNION, VSA je $O(E \cdot \alpha(V))$

c) MAYBE-MST-C u algoritmu jedini bridovi koje uklanjamo su bridovi maksimalne težine na nekim ciklusima, a uvijek postoji MST koji ne uključuje te bridove. Slijedi da algoritam vraća MST. Za efikasnu implementaciju koristimo isti pristup kao i pod b) samo još dodatno moramo pronaći najveće težine na ciklusu, to možemo napraviti pomoću DFS-a za svaki brid koji uvodi ciklus. S obzirom da u to vrijeme stablo ima najviše jedan ciklus, ima najviše V bridova, pa DFS možemo izvesti u $O(V)$. Dakle VSA je $O(E \cdot V)$