

Teoria węzłów

nasze nazwiska

4 grudnia 2015

Spis treści

1	Kolorowania węzłów	1
1.1	Kolorowanie diagramów	1
1.2	Równania kolorowań	3
1.3	Macierze kolorowań	4
1.4	Grupy kolorowań	4
2	Wielomian Jonesa	4
2.1	Nawias Kauffmana	4
2.2	Spin	5
2.3	Wielomian Jonesa	5
2.4	Relacja kłębiasta	6
2.5	Odwrotności, lustra i sumy	6

1 Kolorowania węzłów

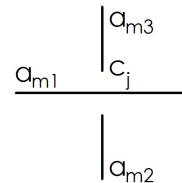
W niniejszej części zostanie przedstawione zagadnienie kolorowania węzłów. Podana zostanie definicja kolorowania, oraz warunki które muszą zostać spełnione aby węzeł mógł zostać w określony sposób pokolorowany. Następnie zdefiniowane zostaną równania kolorowań oraz macierze kolorowań. Ostatnim etapem będzie wprowadzenie macierzy kolorowań jako niezmiennika węzłów.

1.1 Kolorowanie diagramów

Niech K będzie węzłem zorientowanym, L jego diagramem, A zbiorem łuków, $C = \{c_1, \dots, c_k\}$ zbiorem skrzyżowań.

Definicja 1.1. Diagram L jest kolorowalny modulo $n \in \mathbb{N}$, gdy każdemu łukowi diagramu L można przyporządkować liczbę $a_i \in \{0, \dots, n-1\}$ taką że:

1. Dla każdego skrzyżowania c_j spełnione jest równanie kolorowania
$$a_{m2} + a_{m3} - 2a_{m1} \equiv 0 \pmod{n}$$
2. Kolorowanie nie jest stale, tzn istnieją łuki a_{m1}, a_{mj} którym przyporządkowano różne liczby.



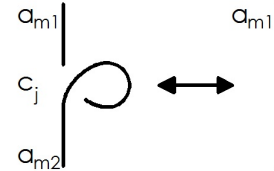
Przyporządkowanie spełniające powyższe własności nazywa się kolorowaniem diagramu mod n .

Twierdzenie 1.2. Kolorowalność modulo n jest niezmiennikiem węzła.

Dowód. Dwa węzły L_1, L_2 są równoważne jeżeli istnieje ciąg ruchów Reidemeistera przekształcający L_1 w L_2 . Wystarczy zatem sprawdzić że kolorowalność modulo n nie zmienia się po wpływie ruchów Reidemeistera.

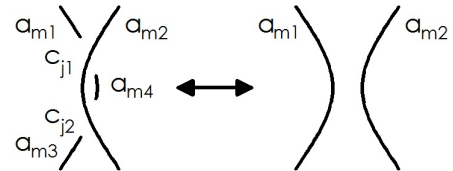
1. Pierwszy ruch Reidemeistera:

Dla skrzyżowania c_j spełnione jest równanie $a_{m1} + a_{m2} - 2a_{m2} \equiv 0 \pmod n$. Zatem $a_{m1} \equiv a_{m2}$.



2. Drugi ruch Reidemeistera:

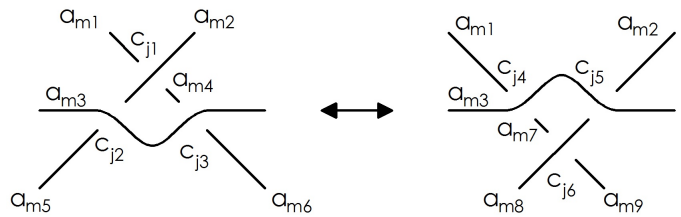
Dla skrzyżowania c_{j1} mamy $a_{m1} + a_{m4} - 2a_{m2} \equiv 0 \pmod n$. Dla skrzyżowania c_{j2} , $a_{m3} + a_{m4} - 2a_{m2} \equiv 0 \pmod n$. Stąd $a_{m1} \equiv a_{m3} \pmod n$.



3. Trzeci ruch Reidemeistera:

Dla skrzyżowania c_{j2} mamy $a_{m5} + a_{m2} - 2a_{m3} \equiv 0 \pmod n$. Analogicznie dla skrzyżowania c_{j5} , $a_{m8} + a_{m2} - 2a_{m3} \equiv 0 \pmod n$. Stąd $a_{m8} \equiv a_{m5} \pmod n$. W drugim przypadku mamy:

$$\begin{aligned} a_{m4} &\equiv 2a_{m2} - a_{m1} \\ a_{m6} &\equiv 2a_{m3} - a_{m4} \equiv \\ &\equiv 2a_{m3} - 2a_{m2} + a_{m1} \\ a_{m8} &\equiv 2a_{m3} - a_{m2} \\ a_{m7} &\equiv 2a_{m3} - a_{m1} \\ a_{m9} &\equiv 2a_{m8} - a_{m7} \equiv \\ &\equiv 2a_{m3} - 2a_{m2} + a_{m1} \equiv a_{m6} \end{aligned}$$



□

Lemat 1.3. Jeżeli dla diagramu L istnieje kolorowanie $\{a_1, \dots, a_k\}$, to dla każdego $l \in \mathbb{N}$ $\{a_1 + l, \dots, a_k + l\}$ też jest kolorowaniem.

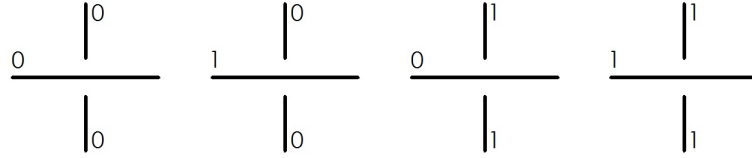
Dowód. Dla każdego c_j spełnione jest:

$$\begin{aligned} a_{m1} + l + a_{m2} + l - 2a_{m3} &\equiv 0 \pmod n. \text{ Wobec czego} \\ a_{m1} + l + a_{m2} + l - 2a_{m3} - 2l &\equiv 0. \end{aligned}$$

□

Wniosek: Jeśli diagram jest kolorowalny to istnieje kolorowanie takie że $a_1 = 0$.

Kolorowanie modulo 2 Jeżeli węzeł jest kolorowalny modulo 2 to dla każdego skrzyżowania zachodzi jedna z czterech możliwości:



W każdym przypadku kolory łuków leżących po przeciwnych stronach skrzyżowania są jednakowe. Startując w dowolnym punkcie węzła i przechodząc go w wybranym kierunku otrzymamy że każdy łuk należący do tej samej komponenty spójności co punkt startowy ma przyporządkowany jednakowy kolor. Zatem węzeł może być kolorowany mod 2 \Leftrightarrow węzeł ma więcej niż jedną komponentę spójności.

Definicja 1.4. Węzeł K jest podzielny jeśli ma co najmniej 2 komponenty spójności, oraz $\exists U, V$ otwarte, $U \cap V = \emptyset$, takie że $K \subseteq U \cup V$, $K \cap U \neq \emptyset$, $K \cap V \neq \emptyset$.

Lemat 1.5. Jeżeli węzeł K jest podzielny to, $\forall n > 1$ diagram L jest kolorowalny mod n .

Dowód. Niech każdy łuk zawarty w U będzie pokolorowany na kolor 0, łuk zawarty w V na kolor 1. Takie przyporządkowanie jest kolorowaniem. Równania skrzyżowań zachodzą dla każdego n . \square

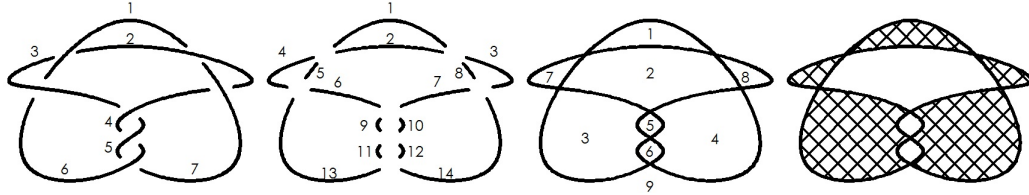
1.2 Równania kolorowań

Definicja 1.6. Krótki łuk, to część łuku który przechodzi dokładnie przez 2 skrzyżowania.

Definicja 1.7. Region to komponenta spójności $\mathbb{R}^2 \setminus L$.

Definicja 1.8. Szachownica diagramu to przyporządkowanie każdemu regionowi jednego z 2 kolorów tak aby każdy krótki łuk oddzielał regiony o różnych kolorach.

Przykład: Węzeł 7_3 posiada 7 łuków, 14 krótkich łuków, 9 regionów.

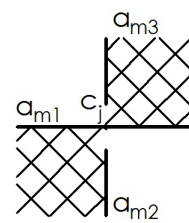
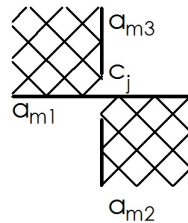


Dla każdego skrzyżowania c_j równanie można przedstawić na 2 sposoby.

Definicja 1.9. Wybór znaku równania nazywa się dobrym, gdy zachodzi następujący warunek.

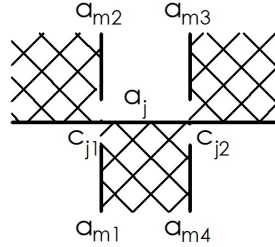
$$a_{m2} + a_{m3} - 2a_{m1} \equiv 0 \pmod n, \text{ dla}$$

$$2a_{m1} - a_{m2} - a_{m3} \equiv 0 \pmod n, \text{ dla}$$



Twierdzenie 1.10. Suma równań po wszystkich skrzyżowaniach równa się 0, o ile znaki równań zostały wybrane dobrze.

Dowód. Ustalmy dowolny krótki łuk a_j . a_j pojawia się dokładnie w 2 równaniach skrzyżowań. Łuk łączy 2 skrzyżowania c_{j1} oraz c_{j2} . Istnieje region X_1 , taki że oba skrzyżowania graniczą z X_1 . Bez straty ogólności X_1 jest białe.



Ponieważ znaki równań zostały wybrane *dobrze*, znak a_j w równaniu skrzyżowania c_{j1} , jest przeciwny do znaku a_j w równaniu skrzyżowania c_{j2} . Wobec czego równania sumują się do 0. \square

1.3 Macierze kolorowań

1.4 Grupy kolorowań

2 Wielomian Jonesa

W tej sekcji zbadamy inny wielomianowy niezmiennik węzłów, wielomian Jonesa. Został odkryty w 1984 roku przez Vaughana Jonesa, znajduje zastosowanie między innymi przy badaniu węzłów przemiennych.

2.1 Nawias Kauffmana

Zacznijmy od zdefiniowania nawiasu Kauffmana. Przypomnijmy, wielomian Laurenta zmiennej X to formalny symbol $f = a_r X^r + \dots + a_s X^s$, gdzie r, s, a_r, \dots, a_s są całkowite i $r \leq s$.

Definicja 2.1. Nawias Kauffmana $\langle D \rangle$ dla diagramu splotu D to wielomian Laurenta zmiennej A , który jest niezmienniczy ze względu na gładkie deformacje diagramu, a przy tym spełnia trzy aksjomaty:

1. $\langle \bigcirc \rangle = 1$
2. $\langle D \sqcup \bigcirc \rangle = (-A^{-2} - A^2) \langle D \rangle$
3. $\langle \nearrow \rangle = A \langle \rangle \langle \rangle + A^{-1} \langle \searrow \rangle$

Tutaj \bigcirc oznacza standardowy diagram dla niewęzła, $D \sqcup \bigcirc$ jest diagramem, który powstaje z D przez dodanie nieprzecinającej go krzywej zamkniętej, zaś trzy symbole \nearrow , $\rangle \langle$ oraz \searrow odnoszą się do diagramów, które są identyczne wszędzie poza małym obszarem. Diagramy $\rangle \langle$ oraz \searrow nazywa się odpowiednio dodatnim (prawym) i ujemnym (lewym) wygładzeniem \nearrow .

Lemat 2.2. Nawias Kauffmana dowolnego diagramu można wyznaczyć w skończonym czasie.

Dowód. Jeżeli diagram D ma n skrzyżowań, to nieustanne stosowanie aksjomatu trzeciego pozwala na zapisanie $\langle D \rangle$ jako sumy 2^n składników, z których każdy jest po prostu zamkniętą krzywą i ma trywialny nawias ($\langle \bigcirc \rangle = 1$). Nawias sumy wyznacza się korzystając z drugiego aksjomatu. \square

Przedstawimy teraz wpływ ruchów Reidemeistera na nawias Kauffmana.

Lemat 2.3. Pierwszy ruch Reidemeistera zmienia nawias Kauffmana zgodnie z poniższą regułą. Pozostałe ruchy Reidemeistera nie zmieniają nawiasu.

$$\langle \text{braid} \rangle = -A^{-3} \langle \text{crossing} \rangle \cdot \langle \text{cup} \rangle = \langle \text{uncrossing} \rangle \cdot \langle \text{cup} \rangle = \langle \text{uncrossing} \rangle.$$

Dowód. Pierwszy ruch Reidemeistera:

$$\langle \text{braid} \rangle \stackrel{K3}{=} A \langle \text{cup} \rangle + A^{-1} \langle \text{uncup} \rangle \stackrel{K2}{=} A \langle \text{crossing} \rangle + A^{-1}(-A^{-2} - A^2) \langle \text{crossing} \rangle = -A^{-3} \langle \text{crossing} \rangle$$

Pierwsza równość wynika z K3, druga z K2, trzecia jest oczywista. Dla drugiego ruchu:

$$\begin{aligned} \langle \text{crossing} \rangle &\stackrel{K3}{=} A \langle \text{cup} \rangle + A^{-1} \langle \text{uncup} \rangle \stackrel{K1}{=} -A^{-2} \langle \text{uncup} \rangle + A^{-1} \langle \text{uncup} \rangle \\ &\stackrel{K3}{=} -A^{-2} \langle \text{uncup} \rangle + A^{-1} A \langle \text{crossing} \rangle + A^{-1} A^{-1} \langle \text{uncup} \rangle = \langle \text{crossing} \rangle \end{aligned}$$

Dla trzeciego ruchu:

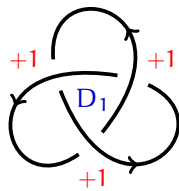
$$\begin{aligned} \langle \text{uncrossing} \rangle &\stackrel{K3}{=} A \langle \text{uncup} \rangle + A^{-1} \langle \text{cup} \rangle \stackrel{R2}{=} A \langle \text{uncup} \rangle + A^{-1} \langle \text{cup} \rangle \\ &\stackrel{R2}{=} A \langle \text{uncup} \rangle + A^{-1} \langle \text{cup} \rangle \stackrel{K3}{=} \langle \text{uncrossing} \rangle \end{aligned}$$

korzystaliśmy tu z własności drugiego ruchu. □

2.2 Spin

Kolejnym składnikiem jest spin.

Definicja 2.4. Niech D będzie diagramem zorientowanego splotu lub węzła. **Spinem** D jest $w(D) = \sum_c \text{sign } c$, gdzie sumowanie przebiega po wszystkich skrzyżowaniach.



Lemat 2.5. Pierwszy ruch Reidemeistera zmniejsza spin o jeden, pozostałe nie mają wpływu.

$$w(\text{braid}) = w(\text{crossing}) - 1$$

Dowód. Proste ćwiczenie. □

2.3 Wielomian Jonesa

Definicja 2.6. Wielomian Jonesa zorientowanego splotu to wielomian Laurenta $V(L) \in \mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$ określony przez

$$V(L) = \left[(-A)^{-3w(D)} \langle D \rangle \right]_{t^{1/2}=A^{-2}},$$

gdzie D to dowolny diagram dla L .

Twierdzenie 2.7. Wielomian Jonesa jest niezmiennikiem zorientowanych splotów.

Dowód. Skorzystamy z tego, że indeks zaczepienia jest niezmiennikiem. Wystarczy pokazać niezmienniczość $(-A)^{-3w(D)} \langle D \rangle$ na ruchy Reidemeistera, ale

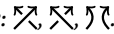
$$\begin{aligned} (-A)^{-3w} \left(\text{diagram} \right) \langle \text{diagram} \rangle &= (-A)^{-3w} \left(\text{diagram} \right)^{+3} (-A)^{-3} \langle \text{diagram} \rangle \\ &= (-A)^{-3w} \left(\text{diagram} \right) \langle \text{diagram} \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

2.4 Relacja kłębiasta

Dotychczas wyznaczyliśmy wielomian Jonesa jedynie dla trywialnych splotów. Spowodowane jest to tym, że chociaż nawias Kauffmana jest przydatny przy dowodzeniu różnych własności, to zupełnie nie nadaje się do obliczeń. Dużo lepszym narzędziem jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.8 (relacja kłębiasta). Wielomian Jonesa spełnia równość $V(\bigcirc) = 1$ oraz relację

$$t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) + (t^{-1/2} - t^{1/2})V(L_0) = 0,$$

gdzie L_+ , L_- , L_0 to zorientowane sploty, które różnią się jedynie na małym obszarze: 

Dowód. Wyraźmy wielomian Jonesa przez nawias Kauffmana i spin. Chcemy pokazać, że

$$A^4(-A)^{-3w(L_+)} \langle \nearrow \rangle - A^{-4}(-A)^{-3w(L_-)} \langle \searrow \rangle + (A^2 - A^{-2})(-A)^{-3w(L_0)} \langle \rangle \langle \rangle = 0.$$

Ale $w(L_{\pm}) = w(L_0) \pm 1$, zatem to jest równoważne z $-A \langle \nearrow \rangle + A^{-1} \langle \searrow \rangle + (A^2 - A^{-2}) \langle \rangle \langle \rangle = 0$. Z definicji nawiasu Kauffmana wnioskujemy, że $\langle \nearrow \rangle = A \langle \rangle \langle \rangle + A^{-1} \langle \searrow \rangle$ i $\langle \searrow \rangle = A \langle \nearrow \rangle + A^{-1} \langle \rangle \langle \rangle$. Pierwsze równanie przemnożmy przez A , drugie przez A^{-1} , a następnie dodajmy je do siebie. Wtedy otrzymamy $A \langle \nearrow \rangle - A^{-1} \langle \searrow \rangle = A^2 \langle \rangle \langle \rangle - A^{-2} \langle \rangle \langle \rangle$. \square

Przykład. $V(\bigcirc \bigcirc) = -t^{5/2} - t^{1/2}$ (splot Hopfa), $V(\text{trójlistnik}) = -t^4 + t^3 + t$ (trójlistnik).

2.5 Odwrotności, lustra i sumy

Twierdzenie 2.9. Niech L będzie zorientowanym splotem. $V(rL) = V(L)$, $V(mL)(t) = V(L)(t^{-1})$.

Wniosek 2.10. Wielomian Jonesa nie zależy od orientacji węzła (ale nie splotu!).

Wniosek 2.11. Trójlistnik nie jest równoważny ze swoim lustrem.

Twierdzenie 2.12. Niech L, M będą zorientowanymi splotami, zaś J, K : zorientowanymi węzłami.

1. $V(L \sqcup M) = (-t^{1/2} - t^{-1/2})V(L)V(M)$,
2. $V(J \# K) = V(J)V(K)$.

Starsze materiały

Węzeł to obraz różnowartościowej funkcji $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, która jest gładka i ma wszędzie niezerową pochodną. Przykłady: niewęzeł, trójlistnik, ósemka. **Splot** to suma rozłączna skończenie wielu węzłów. Węzły K i K' są równoważne, jeżeli istnieje rodzina węzłów K_x dla $x \in [0, 1]$, że $K_0 = K$ i $K_1 = K'$ oraz gładka funkcja $[0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, że $F(x, -)$ reprezentuje węzeł K_x .

Twierdzenie Reidemeistera: każdy węzeł (splot) ma diagram, czyli „cień” bez potrójnych skrzyżowań, stycznych i dziobów razem z informacją o skrzyżowaniach. Dwa węzły są równoważne \iff jeden da się otrzymać z drugiego przez ciąg ruchów Reidemeistera i gładkich deformacji.

Linking number: suma znaków skrzyżowań, rozróżnia splot Hopfa od Whiteheada. *Crossing number:* najmniejsza możliwa liczba skrzyżowań na diagramie.

Nowe węzły: lustro, odwrócenie, suma rozłączna i suma spójna.

Kolorowanie: każdemu łukowi przypisujemy pewną liczbę całkowitą tak, by suma (znakowana) tych liczb na każdym skrzyżowaniu była równa zero modulo n . Jest niezmiennikiem, odróżnia ósemkę od trójlistnika. Macierz kolorowania i jej wyznacznik; macierz Goeritza.

Grupa kolorująca: abelowa grupa, której generatory to łuki diagramu, zaś relacje odpowiadają równaniom na skrzyżowaniach (do tego dokładamy $a = 0$). Grupa jest skończona \iff wyznacznik jest niezerowy.

Wielomian Alexandera: wyznacznik pewnej macierzy ze skreśloną kolumną i wierszem. **Wielomian Jonesa** V : należy do $\mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$; wielomian niewęzła to 1, spełniona jest *skein relation*, to znaczy: $t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) + (t^{-1/2} - t^{1/2})V(L_0) = 0$.

Są jeszcze powierzchnie Seiferta z topologii algebraicznej. Adams: notacja Dowkera, Conwaya. Węzły torusowe (5.1), węzły satelitarne i hiperboliczne. Warkocze (5.4), wielomiany HOMFLY (6.3). *Bachelor's unknotting*.

Rzeczy raczej zbyt skomplikowane: niezmiennik Arfa.