

# Teoria węzłów

nasze nazwiska

24 stycznia 2016

## Spis treści

<b>1</b>	<b>Wstęp, czyli trochę zakłamaney historii i intuicji</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Rozdział Pierwszy</b>	<b>2</b>
2.1	Definicja . . . . .	2
2.2	Równoważność węzłów . . . . .	3
2.3	Diagram . . . . .	4
2.4	Każdy kij ma dwa końce, czyli orientacja węzła . . . . .	7
2.5	Ruchy Reidemeistera . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Kolorowania węzłów</b>	<b>8</b>
3.1	Kolorowanie diagramów . . . . .	8
3.2	Równania kolorowań . . . . .	10
3.3	Macierze kolorowań . . . . .	12
3.4	Własności wyznacznika diagramu . . . . .	14
3.5	Wyznacznik sumy spójnej . . . . .	18
3.6	Grupy kolorowań . . . . .	19
3.7	Przykład zastosowań - rodzina węzłów . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Wielomian Jonesa</b>	<b>22</b>
4.1	Nawias Kauffmana . . . . .	22
4.2	Spin . . . . .	23
4.3	Wielomian Jonesa . . . . .	24
4.4	Relacja kłębiasta . . . . .	24
4.5	Odwrotności, lustra i sumy . . . . .	25
4.6	Rozpiętość i wielomian Jonesa . . . . .	25
4.7	Wielomian HOMFLY . . . . .	28

## 1 Wstęp, czyli trochę zakłamaney historii i intuicji

Pojęcie węzła wywodzi się z teorii atomu Lorda Kelvina, która głosi, że atomy powstają z wirów energii (cokolwiek miałyby to znaczyć). Takie “wiry” Kelvin wyobrażał sobie jako okręgi w przestrzeni trójwymiarowej, lub, bardziej ogólnie, jako krzywe zamknięte w  $\mathbb{R}^3$  bez samoprzecięć. Po tym, jak owa teoria się przyjęła (co prawda nie na długo), zaczęto szukać języka, w którym możnaby w miarę precyzyjnie (jak na tamte matematycznie prehistoryczne czasy) ją wyrazić. Jak miemam (autor świadomie używa nieco wycofanej formy “jak miemam”, zamiast np. “z pewnością”, co pozwala mu nie wdawać się w

dyskusję na temat historii matematyki, o której nie ma zielonego pojęcia) te rozważania dały początek teorii węzłów.

Praca Petera Taita, problemy, które naptokał, okazało się, że wiele z nich jest równoważnych temu, czy węzeł nie jest równoważny niewęzłowi, próba sklasyfikowania wszystkich węzłów o niewielkiej liczbie przecięć.

Trochę historii (najpierw Alexander, potem Reidemeister, potem jeszcze ktoś... dobra, to miał być szkielec)

Intuicja, kilka wstępnych przykładów... (muszę się nauczyć tej magicznej technologii służącej do rysowania tych... węzłów)

## 2 Rozdział Pierwszy

Jest dość dużo (więcej niż trzy) definicji węzła. Każda z nich w pewnym sensie oddaje intuicję, która kryje się za potocznym rozumieniem nazwy tego pojęcia. W tym rozdziale podamy jedną z nich. Powiemy też, co to znaczy, że dwa węzły są równoważne, tj. zastanowimy się, kiedy mając dane dwa węzły jesteśmy w stanie równoważnie (nie zmieniając "ciągłej struktury") przekształcić jeden z nich, aby otrzymać drugi. Zastanowimy się nad tym, jakie przekształcenia możemy uważać za równoważne. Na koniec sformułujemy i udowodnimy twierdzenie Reidemeistera.

### 2.1 Definicja

Zacniemy ten rozdział do sformułowania definicji węzła. Kiedy definiuje się matematyczne pojęcie ważne jest (przynajmniej takie wrażenie ma autor tej części pracy), żeby definicja odpowiadała naszym oczekiwaniom, tj. żeby gwarantowała oczekiwane własności, a jednocześnie zachowywała możliwie jak największy stopień ogólności.

Na pierwszy rzut oka następujące podejście wygląda dość rozsądnie.

**Definicja 2.1.** Węzłem nazywamy ciągłą funkcję  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , która jest ciągła i spełnia następujące własności:

1.  $f(0) = f(1)$ ,
2.  $\forall x, y \in (0, 1) \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ .

W rzeczywistości ma ono dość poważne wady. Po pierwsze, powyższa definicja dopuszcza tak zwane dzikie węzły (rysunek poniżej), co jest sprzeczne z intuicyjnym pojmowaniem węzła, który może mieć jedynie skończenie wiele pętli.

Po drugie wychodząc od definicji 2.1 mielibyśmy kłopot z określeniem tego, kiedy dane dwa węzły są równoważne. Naturalną definicją wydaje się następująca: węzły  $K$  i  $J$  uważamy za równoważne, gdy istnieje rodzina węzłów  $\{K_t\}_{t \in [0, 1]}$ , taka że  $K_0 = K$ , oraz  $K_1 = J$ . Oprócz tego węzły  $K_t$  i  $K_s$  powinny leżeć dowolnie "blisko" dla  $t$  dostatecznie bliskich  $s$ . W sensie tej definicji (nie wnikając w to, co oznacza, że dwa węzły leżą "blisko"), niewęzeł jest równoważny trójlistnikowi (patrz rysunek poniżej).

Rozwiązanie naszych problemów okazuje się zaskakująco proste. Zamiast definiować węzeł za pomocą ciągłej krzywej, można posłużyć się łamaną. Skąd ten pomysł? Łamana ma skończenie wiele wierzchołków, zatem powinniśmy bez specjalnych problemów wykluczyć z naszych rozważań tak zwane dzikie węzły. Przekształcenia równoważne "powinny" nie zmieniać relacji liniowej niezależności pomiędzy wierzchołkami węzła (jak później się okaże), zatem nie powinniśmy się obawiać, że w jakiś złośliwy i nieoczekiwany sposób pojedyncza pętla okaże się równoważna niewęzłowi.

**Definicja 2.2.** Odcinkiem domkniętym łączącym parę różnych punktów  $p, q \in \mathbb{R}^3$  nazwiemy zbiór

$$[p, q] := \{\lambda p + (1 - \lambda)(q - p) : \lambda \in [0, 1]\}.$$

**Definicja 2.3.** Niech  $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}^3$  będą parami różne. Łamaną o wierzchołkach  $p_i$  nazwiemy zbiór

$$\bigcup_{i=1}^n [p_i, p_{i+1}].$$

Łamaną tej postaci będziemy oznaczać przez  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ . Gdy  $p_1 = p_n$  mówimy o łamanej zamkniętej. Jeśli dodatkowo każdy punkt łamanej należy do dokładnie jednego odcinka (poza krańcami odcinków), mówimy wtedy o łamanej bez samoprzecięć. Odcinek  $[p_i, p_{i+1}]$  będziemy dalej krótko oznaczać przez  $I_i$ .

**Definicja 2.4.** Węzeł to łamana zamknięta w  $\mathbb{R}^3$  bez samoprzecięć.

**Uwaga** Jeśli węzeł  $K$  to łamana  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ , wówczas zbiór  $(p_{\sigma(1)}, p_{\sigma(2)}, \dots, p_{\sigma(n)})$ , gdzie  $\sigma$  to cykl długości  $n$  definiuje ten sam węzeł  $K$ . Co więcej, jeśli dla pewnego  $i$  punkty  $p_{i-1}, p_i, p_{i+1}$  są współliniowe, to oczywiście  $K = (p_1, p_2, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_n)$ . Z ostatniego spostrzeżenia łatwo można wywnioskować, że węzeł jest jednoznacznie wyznaczony przez minimalny (w sensie inkluzji) zbiór wierzchołków łamanej, która ten węzeł definiuje.

**Definicja 2.5.** Niech uporządkowany zbiór  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  definiuje węzeł  $K$ . Jeśli żaden jego właściwy podzbiór nie definiuje węzła  $K$ , wówczas elementy zbioru  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  nazwiemy wierzchołkami węzła  $K$ .

Od tego momentu będziemy definiować węzeł poprzez łamane o minimalnej liczbie wierzchołków, chyba, że zostanie powiedziane inaczej. Na koniec tego podrozdziału podamy definicję splotu węzłów.

**Definicja 2.6.** Splotem nazywamy sumę (mnogościową) skończenie wielu parami rozłącznych węzłów. Każdy jeden  $:$  taki węzeł nazywamy składową splotu. W szczególności węzeł jest splotem o jednej składowej. Nie-splotem nazwiemy sumę skończenie wielu rozłącznych niewęzłów (okręgów) leżących w jednej płaszczyźnie.

**Uwaga** W przypadku nie-splotu warunek leżenia w jednej płaszczyźnie jest istotny. Aby się o tym przekonać czytelnik może zechcieć odpowiedzieć na pytanie, jak mogą leżeć względem siebie rozłączne okręgi w  $\mathbb{R}^3$ , a jak muszą w  $\mathbb{R}^2$ .

## 2.2 Równoważność węzłów

W tym podrozdziale zastanowimy się nad tym, kiedy dwa, pozornie różne węzły, w istocie możemy uważać za takie same (mimo iż explicite nie są tym samym węzłem). Zaczniemy od zdefiniowania kilku pojęć.

**Definicja 2.7.** Niech dane będą węzły  $J = (p_0, p_1, p_2, \dots, p_n)$  oraz  $K = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ . Powiemy, że  $J$  powstaje przez elementarne przekształcenie węzła  $K$  gdy:

1. punkt  $p_0$  nie jest współliniowy z  $p_1$  oraz z  $p_n$ ,
2. część wspólna trójkąta (brzegu trójkąta) o wierzchołkach w punktach  $p_0, p_1, p_n$  z węzłem  $K$  zawiera się w odcinku  $[p_1, p_n]$ .

Przekształcenie odwrotne do elementarnego również jest przekształceniem elementarnym.

**Uwaga** Powyższą definicję można uogólnić zastępując węzeł  $K$  węzłem  $(p_0, p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_n)$  dla  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , oraz zastępując wierzchołki  $p_0, p_1, p_n$  wierzchołkami  $p_i, p_{i-1}, p_{i+1}$  odpowiednio.

**Definicja 2.8.** Mówimy, że węzły  $J$  i  $K$  są równoważne, gdy istnieje skończony ciąg węzłów  $K_0, K_1, \dots, K_n$ , gdzie  $K_0 = K$ ,  $K_n = J$ , oraz  $K_{i+1}$  powstaje przez pewne elementarne przekształcenie węzła  $K_i$ .

Sprawdzenie, że podana relacja jest w istocie relacją równoważności pozostawiamy czytelnikowi jako proste ćwiczenie.

Dla przykładu rozważmy dowolny  $n$ -ką wypukły na płaszczyźnie. Można łatwo pokazać przez indukcję (po liczbie wierzchołków), że każdy taki wielokąt jest niewęzłem. Istotnie, dla trójkąta teza jest oczywista. Załóżmy jej prawdziwość dla wszystkich liczb naturalnych nie większych, niż  $n$ . Mając dowolny  $n + 1$ -ką wypukły  $J = (k_0, k_1, k_2, \dots, k_n)$  łatwo się przekonać, że jest on elementarnym przekształceniem  $n$ -kąta  $K = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ . To, że  $K$  jest wielokątem wypukłym, podobnie jak to, że pierwszy warunek z definicji 2.7 jest spełniony, jest oczywiste. Drugi warunek jest spełniony, ponieważ z wypukłości  $K$  zachodzi  $([p_0, p_1] \cup [p_0, p_n]) \cap K = \{p_1, p_n\}$ .

Od tej chwili węzły równoważne będziemy uważać za tożsame, to znaczy zamiast pisać, że węzeł  $J$  jest równoważny węzłowi  $K$ , będziemy pisać krótko  $J = K$ . Odróżniać będziemy tylko te węzły, które nie są równoważne.

## 2.3 Diagram

Od początku tej pracy, z konieczności rysowaliśmy węzły (obiekty żyjące w przestrzeni trójwymiarowej) na płaszczyźnie. W tym podrozdziale podamy ścisłą definicję tych dwuwymiarowych rysunków (diagramów) i pokażemy, że jeśli dwa węzły mają przedstawienie w postaci tego samego diagramu, to są w istocie równoważne.

**Definicja 2.9.** *Rzutem zbioru  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  na płaszczyznę nazwiemy funkcję  $p: A \rightarrow \mathbb{R}^2$  określoną wzorem  $p(x, y, z) = (x, y)$ . Kiedy  $A$  jest węzłem,  $p[A]$  nazywamy rzutem węzła  $A$  na płaszczyznę.*

**Definicja 2.10.** *Rzutem regularnym węzła  $K$  nazywamy takie rzutowanie  $p$  węzła  $K$  na płaszczyznę, że*

1. dla każdego wierzchołka  $v$ , dla każdego  $a \in K$  jeśli  $p(v) = p(a)$ , to  $p = a$ ,
2. dla każdych  $a_1, a_2, a_3$  jeśli  $p(a_1) = p(a_2) = p(a_3)$ , to  $a_1 = a_2$  lub  $a_1 = a_3$  lub  $a_2 = a_3$ .

Zakładając, że węzeł ma regularny rzut na płaszczyznę, możemy w ścisły sposób zdefiniować pojęcie diagramu. Diagramem węzła  $K$  nazywamy następującą modyfikację regularnego rzutu  $K$  na płaszczyznę. Jeśli przeciwobrazem punktu  $(x_0, y_0)$  jest zbiór dwuelementowy  $\{a, b\}$ , wówczas w tym punkcie przecinają się dwa różne odcinki, które są rzutami dwóch różnych odcinków węzła  $K$ , powiedzmy  $I_a, I_b$ . Ponieważ rzut  $K$  jest rzutem regularnym, więc jeden z tych odcinków leży pod drugim, co oznaczamy, jak na poniższym rysunku.

**Definicja 2.11.** *Mówimy, że dwa węzły  $(p_i), (q_j)$  są od siebie odległe o mniej, niż  $t$ , gdy mają tyle samo wierzchołków i gdy dla każdej pary wierzchołków zachodzi  $d(p_k, q_k) < t$ .*

Udowodnimy teraz twierdzenie, które zagwarantuje nam, że dla każdego węzła można znaleźć węzeł dowolnie mu bliski, którego rzut na płaszczyznę jest regularny. Będziemy do tego potrzebować następujących lematów.

**Lemat 2.12.** *Dla dowolnego węzła  $K = (v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)$  i dowolnego  $i = 1, 2, \dots, n$  istnieje taki  $\epsilon > 0$ , że dla każdego  $v' \in B(v_i, \epsilon)$  węzły  $K$  oraz  $(v_1, \dots, v', \dots, v_n)$  są równoważne.*

*Dowód.* Ustalmy dowolne  $i$ . Dodawanie i odejmowanie indeksów w dalszej części dowodu należy rozumieć jak działanie modulo  $n + 1$ . Możemy założyć, że punkty  $v_{i-1}, v_i, v_{i+1}$  nie są współliniowe. Zaczniemy dowód od skonstruowania dwóch stożków. Stożek o wierzchołku  $w$ , środku podstawy  $s$  i promieniu podstawy  $r$  będę oznaczał  $S(s, r, w)$ .

Niech  $p \in \mathbb{R}^3$  będzie wektorem długości jeden prostopadłym do odcinków  $I_{i-1}$  oraz  $I_i$ . Oznaczmy przez  $\alpha$  kąt pomiędzy odcinkami  $I_{i-2}$  i  $I_{i-1}$ . Dobierzmy tak małą  $\mu \in \mathbb{R}^3$ , żeby kąt pomiędzy  $I_{i-1}$

oraz  $[v_{i-1}, v_i + \mu p]$  był mniejszy od  $\alpha$ . Możemy  $\mu$  wyliczyć np. używając trygonometrii w trójkącie prostokątnym o wierzchołkach  $v_{i-1}, v_i, v_i + r \cdot p$ , gdzie  $r \in \mathbb{R}_+$ . Połóżmy

$$\epsilon = \frac{1}{2} \min\{d(I_{i-1}, K \setminus (I_{i-2} \cup I_i)), \mu\}, \text{ oczywiście } \epsilon > 0.$$

Wtedy

1.  $S(v_i, \epsilon, v_{i-1}) \cap K \subseteq I_{i-1} \cup I_i$ ,
2. dla każdego  $\delta \in (0, \epsilon)$  zachodzi  $[v_{i-1}, v_i + \delta p] \subseteq S(v_i, \epsilon, v_{i-1})$ .

Zauważmy, że  $d(v_i, \text{cl}(K \setminus (I_{i-1} \cup I_i))) > 0$ , więc (jako że  $\mathbb{R}^3$  jest  $T_4$ ) można znaleźć takie  $\gamma > 0$ , że  $B(v_i, \gamma) \cap \text{cl}(K \setminus (I_{i-1} \cup I_i)) = \emptyset$ . Możemy wziąć takie  $\gamma$ , żeby  $\gamma < \epsilon$ .

Wtedy stożek  $S_{i-1} = S(v_i + \gamma(v_i - v_{i-1}), \epsilon, v_{i-1})$  spełnia własność 1 oraz własność

dla każdego  $v' \in B(v_i, \gamma)$   $[v_{i-1}, v'] \subseteq S_{i-1}$ .

W analogiczny sposób konstruujemy stożek  $S_i = S(v_i + \gamma'(v_i - v_{i+1}), \epsilon', v_{i+1})$ . Zbiory  $S_{i-1}$  i  $S_i$  mają niepuste wnętrza, oraz  $v_i \in \text{int}(S_i) \cap \text{int}(S_{i+1})$ . Istnieje więc taka liczba  $r > 0$ , że  $B(v_i, r) \subseteq S_i \cap S_{i+1}$ .

Owe stożki pomogą nam pokazać, że dla każdego  $v' \in B(v_i, r)$  węzeł  $(v_1, \dots, v', \dots, v_n)$  jest równoważny  $K$ .

Ustalmy  $v' \in B(v_i, r)$ . Wtedy odcinki  $[v_{i-1}, v']$ ,  $[v', v_i]$ ,  $[v', v_{i+1}]$  należą do zbioru  $S_i \cup S_{i-1}$ , który jest rozłączny z  $K \setminus (I_{i-1} \cup I_i)$ . Rozważmy dwa przypadki.

Jeżeli  $v' \in I_i$  (gdzie  $v' \in I_{i-1}$ , to postępujemy analogicznie), to węzeł  $K$  można zdefiniować za pomocą łamanej  $(v_1, \dots, v_i, v', v_{i+1}, \dots, v_n)$ . Ponieważ wewnątrz odcinka  $[v_{i-1}, v']$  jest rozłączne z  $K$ , więc  $K$  jest równoważny węzłowi  $(v_1, \dots, v_{i-1}, v', v_{i+1}, \dots, v_n)$ .

Jeśli  $v' \notin I_i \cup I_{i-1}$ , wówczas wewnątrz odcinka  $[v_i, v']$  jest rozłączne z  $I_i \cup I_{i-1}$ . Rozważmy odcinek  $[v_{i-1}, v']$ , jeśli przecina on odcinek  $I_i$ , to wtedy odcinek  $[v', v_i]$  nie przecina odcinka  $I_{i-1}$ , zatem bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że wewnątrz odcinka  $[v_{i-1}, v']$  jest rozłączne z  $K$ . Tworzymy następujący ciąg

$$K_0 = K, K_1 = (v_1, \dots, v_{i-1}, v', v_i, \dots, v_n), K_2 = (v_1, \dots, v_{i-1}, v', \dots, v_n).$$

Czytelnik zechce się sam przekonać, że jest to ciąg przekształceń elementarnych. Kładziemy  $K' = K_2$  i kończymy dowód.  $\square$

**Uwaga** Ponieważ funkcja  $d(x, y) \mapsto d(p(x), p(y))$  jest nierosnąca, więc przy oznaczeniach, jak w dowodzie lematu zachodzi  $p(v') \in B(p(v_i), \epsilon)$ .

**Wniosek 2.13.** *Translacja węzła o dowolny wektor nie zmienia jego klasy równoważności.*

**Lemat 2.14.** *Rozpatrzmy węzeł  $K = (v_1, \dots, v_n)$ . Niech  $p$  oznacza rzut na płaszczyznę. Dla każdego  $i$ , dla każdego  $\epsilon > 0$  istnieje węzeł  $J = (q_1, \dots, q_i, \dots, q_n)$  równoważny węzłowi  $K$  odległy od  $K$  o mniej niż  $\epsilon$  oraz spełniający: dla dowolnego  $r \in J$  i dla dowolnego  $i$  zachodzi  $p(q_i) \neq p(r)$ , gdzie  $p$  oznacza rzut prostokątny na płaszczyznę  $OXY$ .*

*Dowód.* Niech  $i$  będzie dowolne. Niech  $\epsilon'$  będzie dobrany do wierzchołka  $v_i$ , jak w tezie lematu 2.12. W razie potrzeby możemy go zmniejszyć, tak by  $\epsilon' < \epsilon$ . Zauważmy, że  $p[B(v_i, \epsilon')] = B(p(v_i), \epsilon')$ , gdzie kula po lewej stronie równości jest z  $\mathbb{R}^3$ , a po prawej z  $\mathbb{R}^2$ . Ponieważ zbiór  $p(K)$  jest nigdziegęstym podzbiorem płaszczyzny, więc możemy wybrać taki  $q_i \in B(v_i, \epsilon')$ , że  $p[\{q_i\}] \cap p[K] = \emptyset$ . Otrzymujemy w ten sposób nowy węzeł  $(v_1, \dots, q_i, \dots, v_n)$ . Powtarzamy opisaną procedurę  $n - 1$  razy i w efekcie otrzymujemy węzeł  $J$ . Ponieważ  $\epsilon'$  był z lematu 2.12, więc  $J$  i  $K$  są równoważne.  $\square$

**Twierdzenie 2.15.** Niech  $K$  będzie węzłem o uporządkowanym zbiorze wierzchołków  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ . Dla każdego  $\epsilon > 0$  istnieje węzeł  $K'$ , który jest odległy od węzła  $K$  o nie więcej, niż  $\epsilon$ , oraz jego rzut na płaszczyznę  $OXY$  jest regularny.

*Dowód.* Najpierw zastosujemy lemat 2.14 do węzła  $K$  i powstały w ten sposób węzeł oznaczmy przez  $K'$ .

Ponieważ rzut węzła  $K'$  spełnia pierwszy warunek z definicji 2.10, więc dla dwóch różnych odcinków  $I, J$  węzła  $K'$  zachodzi  $|p(I) \cap p(J)| \leq 1$ .

Niech  $\mathcal{A}$  będzie rodziną wszystkich takich podzbiorów zbioru odcinków węzła  $K'$ , że dla każdego  $A \in \mathcal{A}$  zachodzi

1.  $|A| > 1$ ,
2. istnieje taki  $r \in \mathbb{R}^2$ , że  $\bigcap_{I \in A} p(I) = \{r\}$ ,
3. dla każdego  $J \notin A$   $(\bigcap_{I \in A} p(I)) \cap p(J) = \emptyset$ .

Niech  $a \in K'$  będzie punktem z wnętrza pewnego odcinka  $I_i$ , takim że istnieją różne od  $a$  punkty  $b, c \in K'$  takie że  $p(a) = p(b) = p(c)$  i  $b \neq c$ . Niech  $\{t_A\}_{A \in \mathcal{A}}$  będzie ciągiem w  $\mathbb{R}^2$ , takim że  $t_A = \bigcap_{I \in A} p(I)$ . Niech  $u \in \mathbb{R}^2$  będzie niezerowym wektorem prostopadłym do osi  $OZ$ , który nie jest równoległy do  $p(I_{i-1})$  oraz nie jest równoległy do  $p(I_{i+1})$ . Wtedy, używając tego samego argumentu, co w dowodzie lematu 2.14, możemy znaleźć dostatecznie małą  $\delta > 0$ , że dla każdej  $0 < \delta' < \delta$  istnieje wektor  $w$ , taki że węzeł  $(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + \delta'w, v_{i+1} + \delta'w, v_{i+2}, \dots, v_n)$  jest równoważny węzłowi  $K'$ , oraz rzut tego węzła spełnia punkt pierwszy definicji 2.10. Ponieważ ciąg  $t_A$  jest skończony, to liczbę  $\delta'$  można wziąć na tyle małą, żeby była mniejsza od dowolnej dodatniej odległości  $d(p(I_j), t_A)$  dla  $j \in \{i-1, i+1\}$ . Wtedy węzeł powstały z  $K'$  przez zastąpienie  $v_i, v_{i+1}$  wierzchołkami  $v'_i = v_i + \delta'w, v'_{i+1} = v_{i+1} + \delta'w$  odpowiednio jest równoważny węzłowi  $K'$ , co więcej, dla każdego  $r \in [v_{i-1}, v'_i] \cup [v'_i, v'_{i+1}] \cup [v'_{i+1}, v_{i+2}]$  istnieje co najwyżej jeden taki  $r' \neq r$ , że  $p(r') = p(r)$ . Zauważmy, że po tej zastosowaniu tej procedury przynajmniej jeden element rodziny  $\mathcal{A}$  ma jeden element mniej. zatem w skończonej liczbie kroków dojdziemy do momentu, kiedy w rodzinie  $\mathcal{A}$  zostaną jedynie zbiory dwuelementowe. Wtedy rzut otrzymanego węzła będzie regularny. □

Warto podkreślić, że dwa różne węzły (w sensie relacji równości) mogą mieć ten sam diagram, np. mając dany węzeł można przesunąć jego wierzchołek o największej trzeciej współrzędnej o wektor równoległy do osi  $OZ$ . Okazuje się jednak, że jeśli dwa węzły mają ten sam diagram, to są równoważne.

**Twierdzenie 2.16.** Jeśli dwa węzły  $K = (v_1, \dots, v_n)$  oraz  $W = (w_1, \dots, w_n)$  mają regularne rzutowanie oraz ich diagramy są równe, to  $K$  i  $J$  są równoważne.

*Dowód.* Ustalmy wierzchołek  $v_i$ . Zauważmy, że bez straty ogólności możemy założyć, że rzut każdego z odcinków  $I_i, I_{i-1}$  węzła  $K$  zawiera co najwyżej jedno skrzyżowanie. Istotnie, jeśli rzut odcinka  $I_i$  zawiera więcej skrzyżowań (oczywiście jest ich skończenie wiele), to niech  $s_0$  oznacza skrzyżowanie najbliższe  $p(v_i)$ , a  $s_1$  skrzyżowanie najbliższe punktowi  $s_0$ . Wybierzmy dowolny punkt z wnętrza odcinka  $[s_0, s_1]$ , oznaczmy go przez  $s$ . Niech  $v' = p^{-1}(s)$ . Wtedy łamana  $(v_1, \dots, v_i, v', v_{i+1})$  definiuje węzeł  $K$ . Wówczas odcinek  $p[[v_i, v']]$  zawiera dokładnie jedno skrzyżowanie. To samo możemy założyć o węźle  $J$  dodając nowy wierzchołek  $q'$  w punkcie  $p^{-1}(s)$ .

Niech  $I, J$  oznaczają te odcinki węzła  $K$ , że  $p(I) \cap p[I_i] \neq \emptyset$  oraz  $p(J) \cap p[I_{i-1}] \neq \emptyset$ . Wtedy  $I$  leży „pod” odcinkiem  $I_i$  i pod odcinkiem węzła  $W$ , który jest rzutowany na  $p[I_i]$ , albo „nad” oboma tymi odcinkami. To samo się tyczy odcinka  $J$ . Stąd wynika, że wnętrza odcinków  $[v_{i-1}, w_i], [w_i, v_{i+1}]$  są rozłączne z węzłem  $K$ . To, że  $K \cap [v_i, w_i] = \{v_i\}$  jest oczywiste. Dlatego ciąg

$$K_0 = (v_1, \dots, v_n), K_1 = (v_1, \dots, v_{i-1}, w_i, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n), K_3 = (v_1, \dots, v_{i-1}, w_i, v_{i+1}, \dots, v_n)$$

jest ciągiem przekształceń elementarnych. Stosując powyżej opisaną procedurę do każdego wierzchołka wężła  $K$  otrzymamy na końcu węzeł  $J$ , co znaczy, że te węzły są równoważne. □

## 2.4 Każdy kij ma dwa końce, czyli orientacja węzła

Jak już wcześniej zostało powiedziane, węzeł to łamana w  $\mathbb{R}^3$ . Łamana z kolei jest wyznaczona jednoznacznie przez zbiór swoich wierzchołków. Mając dany węzeł o wierzchołkach  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ , możemy go zorientować, to znaczy dla każdego odcinka wężła wybrać początek i koniec tego odcinka. Chcielibyśmy to zrobić w taki sposób, żeby każdy wierzchołek był końcem dokładnie jednego odcinka. W tym sensie węzeł  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  jest węzłem różnym od wężła  $(v_n, \dots, v_2, v_1)$ , mimo, że jako podzbiory  $\mathbb{R}^3$  są sobie równe. Teraz spróbujemy sformalizować to, co dotychczas powiedzieliśmy.

**Definicja 2.17.** Odcinkiem zorientowanym w  $\mathbb{R}^3$  o początku w  $p$  i końcu w  $q$  (zakładamy, że  $p \neq q$ ) nazywamy liniowe włożenie  $l: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , takie że  $l(0) = p$ ,  $l(1) = q$  i oznaczamy przez  $[p, q]_o$ .

Innymi słowy odcinek zorientowany to odcinek z wyróżnionym początkiem i końcem. Co więcej, przy oznaczeniach z definicji zachodzi

$$q - p = |q - p| \cdot \frac{l'(x)}{|l'(x)|}, \text{ dla dowolnego } 0 < x < 1.$$

**Definicja 2.18.** Orientacją wężła  $K = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  nazywamy takie zorientowanie jego odcinków, że każdy wierzchołek jest końcem (równoważnie - początkiem) dokładnie jednego odcinka.

Nie trudno się przekonać, że każdy węzeł można zorientować na dokładnie dwa sposoby. Istotnie, wybranie orientacji jednego odcinka wężła jednoznacznie wyznacza orientację całego wężła.

Przyjmijmy następującą konwencję, jeśli powiemy, że węzeł  $K = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  jest węzłem zorientowanym, będziemy przez to rozumieć, że  $I_1 = [v_1, v_2]_o$ .

**Uwaga** Niech będzie dany węzeł  $K = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ , niech ponadto uporządkowane  $n$ -tki  $K_i = (v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n})$  oraz  $K_j = (v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_n})$  definiują ten sam węzeł  $K$ . Niech  $O_i, O_j$  oznaczają orientację zorientowanych węzłów  $K_i, K_j$  odpowiednio. Powiemy, że orientacja  $O_i$  jest równoważna orientacji  $O_j$ , gdy istnieje taka  $\sigma \in S_n$ , że dla każdego  $k$  zachodzi  $\sigma(i_k) = j_k$ . Sprawdzenie, że ta relacja jest w istocie relacją równoważności pozostawiamy jako proste ćwiczenie.

**Definicja 2.19.** Węzłem zorientowanym nazywamy węzeł z wybraną orientacją.

Przekształcenia elementarne wężła zorientowanego definiuje się w sposób oczywisty. Do zestawu punktów (1), (2) z definicji 2.7 należy dodać następujący warunek.

Odcinki zorientowane koincydentne z wierzchołkiem  $p_0$  są równe  $[p_n, p_0]_o, [p_0, p_1]_o$ .

**Definicja 2.20.** Węzły zorientowane nazywamy równoważnie zorientowanymi, gdy w skończeniu wielu krokach za pomocą przekształceń elementarnych jednego wężła zorientowanego możemy otrzymać drugi.

Należy wyraźnie powiedzieć, że równoważność dwóch węzłów jest istotnie inną relacją, niż równoważność węzłów w sensie orientacji. Istnieją bowiem przykłady węzłów równoważnych ale nie równoważnych w sensie orientacji. Opisanie ich dokładnie wykracza jednak poza możliwości intelektualne autora, dlatego fakt ten, z wyższej konieczności, jest podany czysto informacyjnie. Na koniec tego rozdziału podamy jeszcze jedną definicję.

**Definicja 2.21.** Odwrotnością wężła zorientowanego  $K = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  nazywamy węzeł  $K^r = (v_n, v_{n-1}, \dots, v_1)$ . Powiemy, że  $K$  jest węzłem odwracalnym, jeżeli  $K$  i  $K^r$  są równoważne w sensie orientacji. Dla wężła  $J$  niezorientowanego, powiemy że jest on odwracalny, jeśli istnieje taka orientacja wężła  $J$ , że jest on odwracalny (jako węzeł zorientowany z tą wybraną orientacją).

## 2.5 Ruchy Reidemeistera

W tym podrozdziale przedstawimy pierwsze poważne narzędzie, które w wielu przypadkach pozwoli nam rozstrzygnąć, czy dwa węzły są równoważne, czy też nie. Metody kombinatoryczne, ble, ble, ble...

Wcześniej pokazaliśmy, że problem równoważności węzłów można próbować rozstrzygać posługując się diagramami tych węzłów. Sformułujemy i udowodnimy twierdzenie wiążące...

**Definicja 2.22.** Dwa diagramy uważa się za równoważne, gdy wykonując skończoną liczbę przekształceń zwanych ruchami Reidemeister'a, można z jednego diagramu otrzymać drugi

**Definicja 2.23.** Ruchy Reidemeistera - rysunki.

Trzy ruchy wraz z ich odwrotnościami.

**Twierdzenie 2.24.** (Reidemeister'a) Dwa węzły są równoważne, wtedy i tylko wtedy, gdy ich diagramy są równoważne.

Trochę pozachwycam się tym twierdzeniem i prostotą dowodu, uzasadnię, czemu przyjąłem taką definicję i wystarczy...

## 3 Kolorowania węzłów

Głównym zadaniem teorii węzłów jest stworzenie narzędzi służących do opisywania, klasyfikowania oraz rozróżniania węzłów. Na podstawie twierdzenia przedstawionego w poprzedniej części wiemy że, diagramy są równoważne jeżeli pierwszy można przekształcić do drugiego stosując ruchy Reidemeistera. Sprawdzanie równoważności diagramów w ten sposób jest jednak uciążliwe, oraz czasochłonne. W niniejszej części zostanie przedstawione zagadnienie kolorowania diagramów węzłów. Kolorowanie węzłów jest niezmiennikiem diagramu. Oznacza to że gdy pierwszy diagram posiada pewną własność kolorowania, a drugi nie, to diagramy te nie są równoważne, a więc przedstawiają różne węzły. Kolorowanie nie jest idealnym narzędziem klasyfikującym i istnieją diagramy nierównoważne o takich samych własnościach kolorowania.

Kolejność omawianych zagadnień w tym rozdziale będzie następująca: Najpierw podana zostanie definicja kolorowania, oraz warunki które muszą zostać spełnione aby węzeł mógł zostać w określony sposób pokolorowany. Następnie zdefiniowane zostaną równania kolorowań oraz macierze kolorowań. Kolejnym etapem będzie wprowadzenie macierzy kolorowań jako niezmiennika węzłów. Ostatnią część stanowić będzie wskazanie relacji pomiędzy klasami diagramów węzłów a grupami kolorowań.

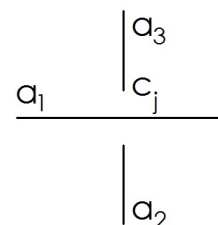
### 3.1 Kolorowanie diagramów

Niech  $K$  będzie węzłem zorientowanym,  $L$  jego diagramem,  $B = \{b_1, \dots, b_k\}$  zbiorem łuków,  $C = \{c_1, \dots, c_k\}$  zbiorem skrzyżowań.

**Definicja 3.1.** Diagram  $L$  jest kolorowalny modulo  $n \in \mathbb{N}$ , gdy każdemu łukowi diagramu  $L$  można przyporządkować liczbę  $a \in \{0, \dots, n-1\}$  w taki sposób, że:

1. Dla każdego skrzyżowania  $c_j$  spełnione jest równanie kolorowania  

$$a_2 + a_3 - 2a_1 \equiv 0 \pmod n$$
2. Kolorowanie nie jest stale, tzn istnieją łuki  $b_i, b_j$  którym przyporządkowano różne liczby.





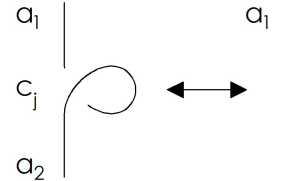
Przyporządkowanie spełniające powyższe własności nazywa się *kolorowaniem diagramu mod  $n$* .

**Twierdzenie 3.2.** *Kolorowalność modulo  $n$  jest niezmiennikiem węzła.*

*Dowód.* Dwa diagramy  $L_1, L_2$  są równoważne jeżeli istnieje ciąg ruchów Reidemeistera przekształcający  $L_1$  w  $L_2$ . Wystarczy zatem sprawdzić że kolorowalność modulo  $n$  nie zmienia się po wpływie ruchów Reidemeistera.

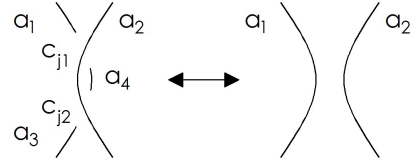
1. Pierwszy ruch Reidemeistera:

Dla skrzyżowania  $c_j$  spełnione jest równanie  
 $a_1 + a_2 - 2a_2 \equiv 0 \pmod n$ . Zatem  $a_1 \equiv a_2$ .



2. Drugi ruch Reidemeistera:

Dla skrzyżowania  $c_{j1}$  mamy  
 $a_1 + a_4 - 2a_2 \equiv 0 \pmod n$ .  
Dla skrzyżowania  $c_{j2}$ ,  
 $a_3 + a_4 - 2a_2 \equiv 0 \pmod n$ .  
Stąd  $a_1 \equiv a_3 \pmod n$ .

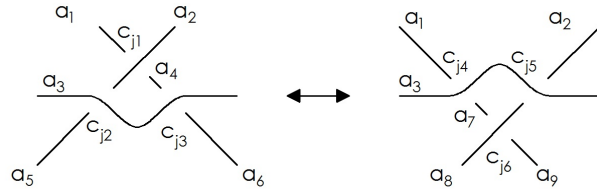


3. Trzeci ruch Reidemeistera:

Dla skrzyżowania  $c_{j2}$  mamy  $a_5 + a_2 - 2a_3 \equiv 0 \pmod n$ . Analogicznie dla skrzyżowania  $c_{j5}$ ,  
 $a_8 + a_2 - 2a_3 \equiv 0 \pmod n$ . Stąd  $a_5 \equiv a_8 \pmod n$ .

W drugim przypadku mamy:

$$\begin{aligned} a_4 &\equiv 2a_2 - a_1. \\ a_6 &\equiv 2a_3 - a_4 \equiv \\ &\equiv 2a_3 - 2a_2 + a_1. \\ a_8 &\equiv 2a_3 - a_2. \\ a_7 &\equiv 2a_3 - a_1. \\ a_9 &\equiv 2a_8 - a_7 \equiv \\ &\equiv 2a_3 - 2a_2 + a_1 \equiv a_6. \end{aligned}$$



Zatem, kolory łuków o indeksach różnych od 7 nie ulegają zmianie. Kolor łuku  $a_7$  zmienia się i wynosi  $a_7 \equiv a_6 - a_2 + a_4$ . W otrzymane kolorowanie spełnia równania kolorowań w diagramie  $L_2$ .

□

**Definicja 3.3.** Niech  $B = \{b_1, \dots, b_k\}$  będzie zbiorem łuków. Kolorowaniem  $(a_{b_1}, \dots, a_{b_k})$  nazywamy przyporządkowanie każdemu łukowi  $b_i$  koloru  $a_{b_i}$ , tak aby spełnione były równania kolorowań. W dalszej części opracowania zapis ten zostanie uproszczony do postaci  $(a_1, \dots, a_k)$ , gdzie indeks przy  $a$ , odpowiada numerowi łuku, którego ten kolor dotyczy.

**Lemat 3.4.** Jeżeli dla diagramu  $L$  istnieje kolorowanie  $(a_1, \dots, a_k)$ , to dla każdego  $l \in \mathbb{N}$   $(a_1 + l, \dots, a_k + l)$  też jest kolorowaniem.

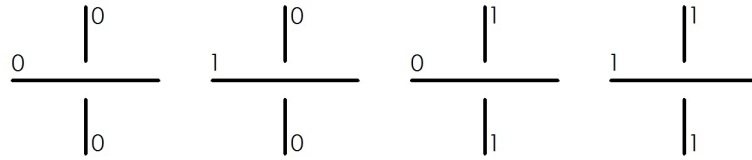
*Dowód.* Dla każdego  $c_j$  spełnione jest:

$$\begin{aligned} a_{m_1} + a_{m_2} - 2a_{m_3} &\equiv 0 \pmod n. \text{ Wobec czego} \\ a_{m_1} + l + a_{m_2} + l - 2a_{m_3} - 2l &\equiv 0. \end{aligned}$$

□

**Wniosek:** Jeśli diagram jest kolorowalny to istnieje kolorowanie takie że  $a_1 = 0$ .

**Kolorowanie modulo 2** Jeżeli węzeł jest kolorowalny modulo 2 to dla każdego skrzyżowania zachodzi jedna z czterech możliwości:



W każdym przypadku kolory łuków leżących po przeciwnych stronach skrzyżowania są jednakowe. Startując w dowolnym punkcie węzła i przechodząc go w wybranym kierunku otrzymamy że każdy łuk należący do tej samej komponenty spójności co punkt startowy ma przyporządkowany jednakowy kolor. Zatem splot może być kolorowany mod 2  $\Leftrightarrow$  splot składa się z co najmniej 2 węzłów.

**Definicja 3.5.** Niech  $K$  będzie splotem,  $L$  jego diagramem. Diagram  $L$  jest podzielny jeśli splot składa się z co najmniej 2 węzłów, oraz  $\exists U, V$  otwarte,  $U \cap V = \emptyset$ , takie że  $L \subseteq U \cup V$ ,  $L \cap U \neq \emptyset$ ,  $L \cap V \neq \emptyset$ .

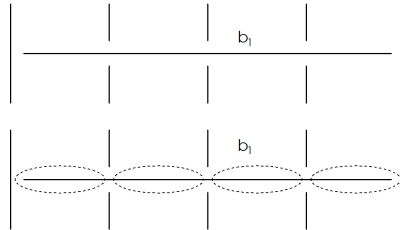
**Lemat 3.6.** Jeżeli splot  $K$  jest podzielny to,  $\forall n > 1$  diagram  $L$  jest kolorowalny mod  $n$ .

*Dowód.* Niech każdy łuk zawarty w  $U$  będzie pokolorowany na kolor 0, łuk zawarty w  $V$  na kolor 1. Takie przyporządkowanie jest kolorowaniem. Równania skrzyżowań zachodzą dla każdego  $n$ .  $\square$

### 3.2 Równania kolorowań

**Definicja 3.7.** Krótki łuk, to część łuku który przechodzi dokładnie przez 2 skrzyżowania.

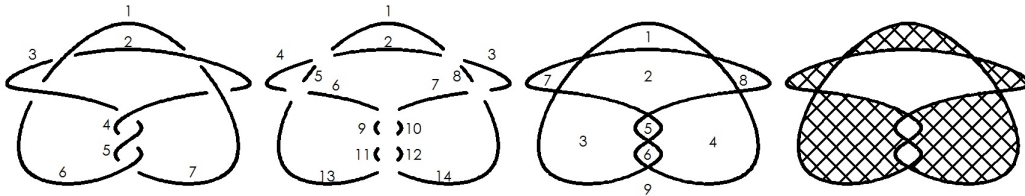
Przykład: Łuk  $b_1$  przechodzi przez 5 skrzyżowań i składa się z 4 krótkich łuków.



**Definicja 3.8.** Region to komponenta spójności  $\mathbb{R}^2 \setminus L$ .

**Definicja 3.9.** Szachownica diagramu to przyporządkowanie każdemu regionowi jednego z 2 kolorów tak aby każdy krótki łuk oddzielał regiony o różnych kolorach.

**Przykład:** Rozważmy węzeł który w literaturze jest oznaczony symbolem  $7_3$ . Diagram węzła jest przedstawiony na rysunku poniżej (pierwszy z lewej). Węzeł posiada 7 łuków, 14 krótkich łuków, oraz 9 regionów.

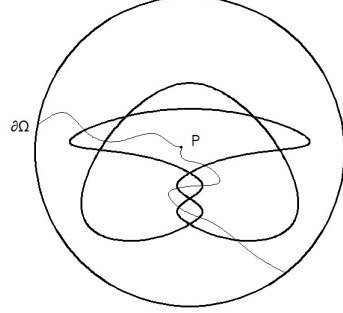


Dla każdego skrzyżowania  $c_j$  równanie można przedstawić na 2 sposoby.

**Lemat 3.10.** Dla każdego węzła  $K$  istnieje szachownica jego diagramu.

*Dowód.* Ustalmy węzeł  $K$ , oraz jego diagram  $L$ . Niech  $L$  będzie zawarty w pewnej kuli otwartej  $\Omega$ . Weźmy dowolny region diagramu  $L$ . Ustalmy punkt  $P$  należący do tego regionu. Weźmy dowolne dwie krzywe o następujących własnościach:

- Krzywe są bez samo przecięć i nie przecinają się wzajemnie,
- Początki krzywych znajdują się w punkcie  $P$ ,
- Końce krzywych znajdują się na brzegu  $\Omega$ ,
- Krzywa nie przechodzi przez skrzyżowania.

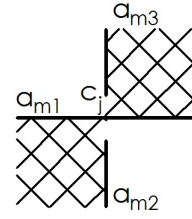
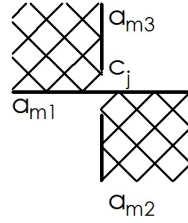


Zatem suma krzywych dzieli węzeł na 2 części. Ponadto obie krzywe przecinają parzystą liczbę łuków. Zatem każda z krzywych przecina taką samą liczbę łuków modulo 2. Stąd kolor regionu nie zależy od wyboru krzywej, więc szachownica diagramu istnieje zawsze.  $\square$

**Definicja 3.11.** Wybór znaku równania kolorowania nazywa się dobrym, gdy przyjmuje następującą postać:

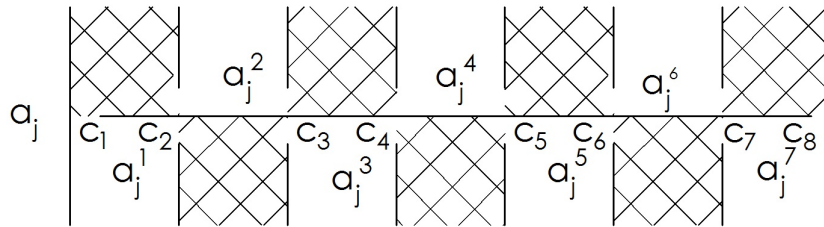
$$a_{m2} + a_{m3} - 2a_{m1} \equiv 0 \pmod{n}, \text{ dla}$$

$$2a_{m1} - a_{m2} - a_{m3} \equiv 0 \pmod{n}, \text{ dla}$$



**Lemat 3.12.** Suma równań po wszystkich skrzyżowaniach równa się 0, o ile znaki równań zostały wybrane dobrze.

*Dowód.* Ustalmy dowolny łuk  $b_j$ . Łuk  $b_j$  składa się z pewnej liczby krótkich łuków  $b_j^i$ . Każdy krótki łuk łączy dokładnie 2 skrzyżowania. Istnieje region  $X_1$ , taki że oba skrzyżowania graniczą z  $X_1$ . Bez straty ogólności  $X_1$  jest białe. Niech  $a_j^i$  oznacza kolor  $b_j^i$  krótkiego łuku. Kolor każdego krótkiego łuku występuje w równaniach dokładnie 2 skrzyżowań.



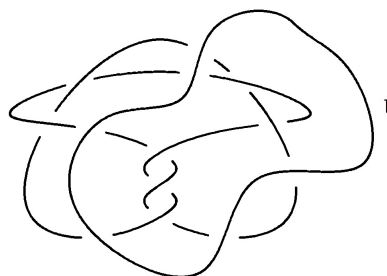
Ponieważ znaki równań zostały *wybrane dobrze*, znak  $a_j^i$  w równaniu skrzyżowania  $c_{j1}$ , jest przeciwny do znaku  $a_j^i$  w równaniu skrzyżowania  $c_{j2}$ . Wobec czego równania dla krótkich łuków sumują się do 0, dla każdego  $i$ . Zatem sumują się również do 0 dla równań kolorowań łuków zwyczajnych.  $\square$

**Wniosek:** Niech łuk  $j$ , ma początek w skrzyżowaniu  $c_m$ . Zaczynając w  $c_m$  a następnie idąc wzdłuż łuku  $i$  sumując współczynniki przy  $j$ -tym łuku w mijanych równaniach skrzyżowań, suma zawsze wynosi  $\pm 1$ .

*Dowód.* Zamiast sumować współczynniki przy  $j$ -tym łuku w kolejnych równaniach skrzyżowań można sumować współczynniki przy odpowiadających mu krótkich łukach. Z lematu współczynniki sumują się do 0. Zatem suma wszystkich współczynników jest równa współczynnikowi krótkiego łuku przy ostatnim mijanym skrzyżowaniu, a ten współczynnik wynosi  $\pm 1$ .  $\square$

### 3.3 Macierze kolorowań

**Definicja 3.13.** Łuk zamknięty w diagramie to węzeł składający się dokładnie z jednego łuku.



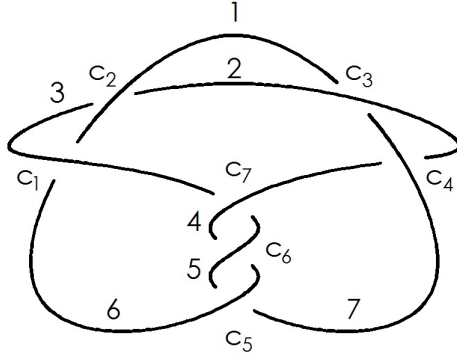
**Lemat 3.14.** Jeżeli węzeł  $K$  nie zawiera łuków zamkniętych, to liczba skrzyżowań i łuków w diagramie  $L$  jest równa.

*Dowód.* Niech  $L$  będzie diagramem zorientowanym. Ponieważ węzeł nie zawiera łuków zamkniętych to dla każdego łuku istnieją dokładnie 2 skrzyżowania które odpowiadają początkowi i końcowi łuku. Dodatkowo każde skrzyżowanie jest początkiem i końcem dokładnie 2 łuków. Zatem funkcja przyporządkowująca łukowi skrzyżowanie będące jego początkiem jest bijekcją.  $\square$

Niech  $L$  będzie diagramem bez łuków zamkniętych,  $B$  zbiorem łuków,  $(a_1, \dots, a_k)$  jego kolorowaniem modulo  $n$ ,  $C$  zbiorem skrzyżowań.

**Definicja 3.15.** Macierz kolorowania  $A_+$  to macierz powstała ze współczynników występujących w równaniach kolorowań diagramu  $L$ .  $A_+ = (a_{ij})$ , gdzie  $a_{ij}$  odpowiada współczynnikowi przy kolorze  $i$ -tego łuku w równaniu  $c_j$ -tego skrzyżowania.

Proces tworzenia macierzy  $A_+$ , dla węzła  $7_3$  został przedstawiony poniżej.



$$\begin{aligned}
 c_1 : \quad & a_1 + a_6 - 2a_3 \equiv 0 \pmod n \\
 c_2 : \quad & a_2 + a_3 - 2a_1 \equiv 0 \pmod n \\
 c_3 : \quad & a_1 + a_7 - 2a_2 \equiv 0 \pmod n \\
 c_4 : \quad & a_2 + a_4 - 2a_7 \equiv 0 \pmod n \\
 c_5 : \quad & a_5 + a_7 - 2a_6 \equiv 0 \pmod n \\
 c_6 : \quad & a_4 + a_6 - 2a_5 \equiv 0 \pmod n \\
 c_7 : \quad & a_3 + a_5 - 2a_4 \equiv 0 \pmod n
 \end{aligned}$$

$$A_+ = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

**Obserwacja:** Równania kolorowań diagramu  $L$  są liniowo zależne, wobec czego wyznacznik macierzy kolorowania  $|\det(A_+)| = 0$ .

**Definicja 3.16.** Macierz kolorowań  $A$  wymiaru  $(k-1) \times (k-1)$ , to minor macierzy  $A_+$  powstały poprzez usunięcie jednego wiersza i jednej kolumny.

**Definicja 3.17.** Wyznacznik diagramu  $\det(L)$  to wyznacznik  $|\det(A)|$ .

**Twierdzenie 3.18.** Wyznacznik diagramu jest dobrze określony, nie zależy od wyboru minora macierzy  $A_+$

*Dowód.* Niech  $A_{i,j}$  oznacza minor powstały poprzez usunięcie  $i$ -tego wiersza, oraz  $j$ -tej kolumny. W macierzy  $A_+$  suma elementów w wierszu, oraz suma elementów w kolumnie równa się 0. Niech  $X$  będzie

macierzą  $k \times k$ , oraz  $X = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ . Rozważmy

$$\det(A + X) = \det \begin{pmatrix} 1 + a_{1,1} & \cdots & 1 + a_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 + a_{k,1} & \cdots & 1 + a_{k,k} \end{pmatrix}$$

Suma elementów w każdej kolumnie, oraz w każdym wierszu równa się  $k$ . Wyznacznik zostanie obliczony w następujących krokach:

1. Po dodaniu do  $i$ -tego wiersza, sumy pozostałych wierszy każdy element  $i$ -tego wiersza będzie miał wartość  $k$ . Wartości w pozostałych komórkach pozostaną niezmienione.

$$\det \begin{pmatrix} 1 + a_{1,1} & \cdots & 1 + a_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k & \cdots & k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 + a_{k,1} & \cdots & 1 + a_{k,k} \end{pmatrix}$$

2. Po dodaniu do  $j$ -tej kolumny, sumy pozostałych kolumn, element  $a_{i,j}$  będzie mieć wartość  $k^2$ . Pozostałe elementy w  $i$ -tym wierszu, oraz  $j$ -tej kolumnie będą mieć wartość  $k$ . Pozostałe elementy pozostaną niezmiennione.

$$\det \begin{pmatrix} 1 + a_{1,1} & \cdots & k & \cdots & 1 + a_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & \cdots & k^2 & \cdots & k \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 + a_{k,1} & \cdots & k & \cdots & 1 + a_{k,k} \end{pmatrix}$$

3. Po wyciągnięciu  $k$  przed wyznacznik, wyrażenie będzie miało postać.

$$k \times \det \begin{pmatrix} 1 + a_{1,1} & \cdots & k & \cdots & 1 + a_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & k & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 + a_{k,1} & \cdots & k & \cdots & 1 + a_{k,k} \end{pmatrix}$$

4. Odejmując  $i$ -ty wiersz od pozostałych wierszy otrzymamy.

$$k \times \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & k & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{k,k} \end{pmatrix}$$

Korzystając z rozwinięcia Laplace'a względem  $j$ -tej kolumny  $|\det(A + X)| = k^2 \times |\det(A_{i,j})|$ , dla każdego  $i, j$ . Zatem  $\det(A_{i,j})$  nie zależy do wyboru  $i, j$ .

□

### 3.4 Własności wyznacznika diagramu

Wyznacznik diagramu jest powiązany z możliwymi kolorowaniami diagramu.

**Lemat 3.19.** Niech  $A$  będzie macierzą o wyrazach całkowitych. Istnieją macierze  $X, Y$  o wyrazach całkowitych, takie że  $|\det(X)| = |\det(Y)| = 1$ , oraz macierz diagonalna  $|D| = (|d_{i,i}|)$ , jedyna z dokładnością do permutacji wyrazów na głównej przekątnej, takie że  $D = XAY$ .

**Dowód.** Niech  $A$  będzie macierzą wymiaru  $k \times k$ , oraz  $a$  liczbą całkowitą. Ustalmy macierze:

- $Z_{i,j}^1$  - Macierz odpowiadająca transpozycji współrzędnych wektora  $(i,j)$ ,
- $Z_{i,a_j}^2$  - Macierz odpowiadająca dodaniu do  $i$ -tej współrzędnej,  $a$ -tą krotność  $j$ -tej współrzędnej.

Każda z powyższych macierzy ma wyznacznik 1.

**Krok 1:** Mnożąc macierz  $A$  z lewej lub prawej przez  $Z^1$  da się ją przekształcić do postaci  $A^{(1)}$ , takiej że najmniejszy co do modułu, niezerowy wyraz znajduje się w lewym górnym rogu macierzy. Następnie mnożąc z lewej lub prawej przez  $Z_{i,a_1}^2$ , można przekształcić macierz do postaci  $A^{(2)}$  takiej że, wartość bezwzględna każdego elementu leżącego w pierwszym wierszu lub pierwszej kolumnie jest mniejsza od wartości bezwzględnej elementu  $a_{1,1}$ .

**Krok 2:** Powtarzając Krok 1, można sprowadzić macierz do postaci

$$A^{(n_1)} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,k} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{k,2} & \cdots & a_{k,k} \end{pmatrix}$$

**Krok 3:** Powtarzając krok 1 i 2 dla macierzy wymiaru  $(k-1) \times (k-1)$  otrzyma się macierz

$$A^{(n_2)} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{k,3} & \cdots & a_{k,k} \end{pmatrix}$$

**Krok 4:** Indukcyjnie, macierz  $A$  może zostać sprowadzona do postaci diagonalnej  $D$ . Operacje wykonywane na kolumnach odpowiadają mnożeniu macierzy  $A$  przez  $Z^i$  z prawej strony, na wierszach przez mnożenie z lewej strony. Zatem macierze  $X, Y$  są postaci:

$$X = \prod_m Z^m.$$

$$Y = \prod_n Z^n.$$

$Z^m, Z^n \in \{Z_{i(m),j(m)}^1, Z_{i(m),a_j(m)}^2\}$ , odpowiadają kolejno wykonywanym operacjom wierszowym i kolumnowym. Ponieważ  $|\det(Z^i)| = 1 \Rightarrow |\det(D)| = |\prod_{i=1}^k d_k| = |\det(XAY)| = |\det(A)|$ ,

□

**Twierdzenie 3.20.** Wyznacznik diagramu  $L$ , oraz wartości w odpowiadającej mu macierzy diagonalnej są niezmiennikiem węzła.

**Dowód.** Niech  $K$  będzie węzłem,  $L$  jego diagramem,  $B$  zbiorem łuków,  $C$  zbiorem skrzyżowań,  $\{a_1, \dots, a_k\}$  jego kolorowaniem modulo  $n$ ,  $A_+$  macierzą kolorowania,  $A$  minorem  $A_+$ , powstałym po usunięciu  $k$ -tego wiersza i  $k$ -tej kolumny. Wystarczy sprawdzić że wyznacznik diagramu oraz struktura macierzy diagonalnej nie zmienia się pod wpływem ruchów Reidemeistera.

1. Pierwszy ruch Reidemeistera. Bez straty ogólności można założyć że ruch Reidemeistera jest przeprowadzany na  $k$ -tym łuku, pomiędzy  $i$ , oraz  $i+1$  skrzyżowaniem. Dodatkowo można przyjąć że indeksy skrzyżowań do których dochodzi łuk  $k$  są mniejsze od  $i+1$ , oraz indeksy skrzyżowań do których dochodzi  $k+1$ , są większe od  $i$ . W rezultacie, macierz  $A'_+$  po transformacji, ma wymiar  $k+1$ . Elementy o obu indeksach mniejszych od  $k$  pozostają niezmiennicze.

$$A'_+ = \begin{pmatrix} & & a_{1,k} & 0 \\ & & \vdots & \vdots \\ & & a_{i,k} & 0 \\ A & & 0 & a_{i+1,k} \\ & & \vdots & \vdots \\ & & 0 & a_{k-1,k} \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & a_{k,k} & 1 \end{pmatrix}$$

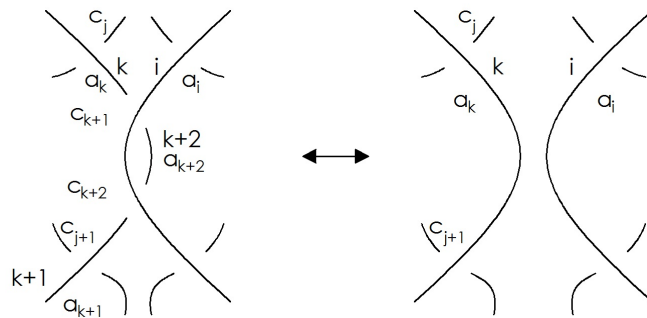
Równania skrzyżowań o indeksach od 1 do  $i$  nie zmieniają się. W równaniach skrzyżowań o indeksach większych od  $i$ ,  $k$ -ty kolor zostaje zastąpiony  $k+1$ -szym. Ostatni wiersz macierzy wynika z równania  $c_{k+1}$  skrzyżowania. Na mocy lematu znaki równań mogą być tak dobrane aby sumowały się one do 0. Co więcej taki dobór znaków jest również właściwy dla macierzy  $A_+$ . Niech  $A'$  będzie minorem  $A'_+$  powstałym poprzez usunięcie ostatniej kolumny i ostatniego wiersza.

Dodając do  $k$ -tego wiersza sumę pozostałych wierszy otrzymamy macierz:

$$A' = \begin{pmatrix} & a_{1,k} \\ & \vdots \\ & a_{i,k} \\ A & 0 \\ & \vdots \\ & 0 \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k-1} & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} & a_{1,k} \\ & \vdots \\ & a_{i,k} \\ A & 0 \\ & \vdots \\ & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Stąd korzystając z rozwinięcia Laplace'a względem ostatniego wiersza,  $|\det(A')| = |1 \times \det(A)|$ . Przenosząc element  $a_{k,k} = 1$  w lewy górny róg macierzy i powtarzając rozumowanie z twierdzenia o postaci macierzy diagonalnej, otrzymujemy, że jeśli macierz diagonalna odpowiadająca  $A$  ma wartości na głównej przekątnej  $\{|d_1|, \dots, |d_{k-1}|\}$ , to macierz diagonalna odpowiadająca  $A'$ , ma wartości  $\{1, |d_1|, \dots, |d_{k-1}|\}$

2. Drugi ruch Reidemeistera. Bez straty ogólności można założyć że ruch Reidemeistera dotyczy  $i$ -tego, oraz  $k$ -tego łuku, gdzie  $i$ -ty łuk jest łukiem górnym, oraz ruch jest pomiędzy skrzyżowaniami  $c_j, c_{j+1}$ .



Niech indeksy skrzyżowań do których dochodzi łuk  $k$  są mniejsze od  $i+1$ , oraz indeksy skrzyżowań do których dochodzi  $k+1$ , są większe od  $i$ . Równania skrzyżowań do których nie dochodzi łuk  $k+1$  nie zmieniają się. Macierze kolorowania mają zatem postacie:



$$A'_+ = \begin{pmatrix} & & & & & & a_{1,k} & 0 & 0 \\ & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & & & a_{i,k} & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & a_{i+1,k} & 0 \\ & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & & & 0 & a_{k-1,k} & 0 \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,i} & \cdots & a_{k,k-1} & 0 & 0 & a_{k,k} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} & & & & & & a_{1,k} & 0 \\ & & & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & & & a_{i,k} & 0 \\ & & & & & & 0 & a_{i+1,k} \\ & & & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & & & 0 & a_{k-1,k} \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,i} & \cdots & a_{k,k-1} & 0 & 0 & a_{k,k} \\ 0 & \cdots & 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Po wykonaniu na macierzy  $A'$  następujących operacji: Dodanie do ostatniej( $k+1$ ) kolumny sumy pozostałych kolumn, oraz dodania do przedostatniego wiersza ( $k$ ) sumy wierszy od 1 do  $k-1$ , oraz zastosowaniu rozwinięcia Laplace'a otrzymamy:  $|\det(A')| = |\det(A)|$ . Macierz diagonalna ma postać  $\{1, 1, |d_1|, \dots, |d_k|\}$ . Argumentacja jest analogiczna jak w pierwszym ruchu Reidemeistera.

3. Trzeci ruch Reidemeistera. Trzeci ruch nie zmienia liczby skrzyżowań. Macierze  $A_+$ , oraz  $A'_+$  mają wymiar  $k \times k$ . Bez straty ogólności można przyjąć

□

**Twierdzenie 3.21.** *Diagram  $L$  może być kolorowalny mod  $n \Leftrightarrow |\det(L)|$  oraz  $n$  nie są względnie pierwsze.*

*Dowód.* Istnienie kolorowania mod  $n$  oznacza istnienie kolorów  $\{a_1, \dots, a_k\}$ , takich że równania kolorowań są spełnione dla każdego skrzyżowania. Równoważnie, jest spełnione równanie macierzowe:  $A_+x \equiv 0 \pmod n$ ,  $x \in \mathbb{Z}_n^k$ . Z lematu wynika, że można przyjąć  $a_1 = 0$ . Ponieważ równania kolorowań są liniowo zależne i  $a_1 = 0$ , zatem powyższa równość zachodzi  $\Leftrightarrow Ax' \equiv 0 \pmod n$ ,  $x' \in \mathbb{Z}_n^{k-1}$ .

Korzystając z twierdzenia o postaci diagonalnej otrzymujemy  $A = X^{-1}DY^{-1}$ .  $X^{-1}, Y^{-1}$  są macierzami całkowitoliczbowymi. Niech  $\overline{X^{-1}} = X^{-1} \pmod n$ ,  $\overline{Y^{-1}} = Y^{-1} \pmod n$ , oznacza przypisanie każdemu elementowi macierzy, reszty z dzielenia mod  $n$ . Stąd  $Ax' \equiv 0 \Leftrightarrow \overline{A}x' \equiv 0 \Leftrightarrow \overline{X^{-1}}\overline{D}\overline{Y^{-1}}x' \equiv 0 \Leftrightarrow \overline{X^{-1}} \times \overline{D} \times \overline{Y^{-1}}x' \equiv 0 \Leftrightarrow \overline{D}y' \equiv 0$ ,  $y' = Y^{-1}x'$ ,  $y' \in \mathbb{Z}_n^{k-1}$ . Ponieważ kolorowanie  $x'$  nie jest trywialne, to  $y' \neq 0 \pmod n$ . Zatem  $\exists i \in \{1, \dots, k\}$   $d_i \times y'_i \neq 0 \pmod n$ . Ponieważ  $\forall i \in \{1, \dots, k\}$   $y'_i \in \mathbb{Z}_n$ , to  $d_i$ , oraz  $n$ , nie są względnie pierwsze. Ponadto  $|\det(L)| = |\det(D)| = \prod_{i=1}^k |d_i|$ . Stąd  $\det(L)$ , oraz  $n$  nie są względnie pierwsze. □

**Wniosek:**

- Jeżeli  $|\det(L)| = 0$ , to dla każdego  $n$ , diagram jest kolorowalny modulo  $n$ ,
- Jeżeli  $|\det(L)| = 1$ , to dla żadnego  $n$ , diagram nie jest kolorowalny modulo  $n$

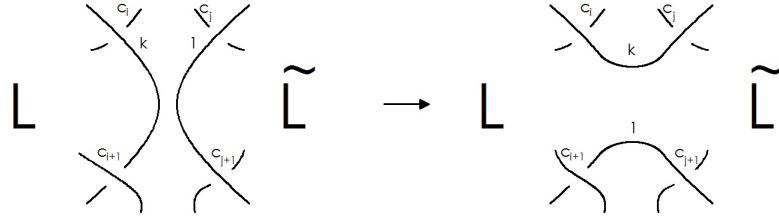
### 3.5 Wyznacznik sumy spójnej

Niech  $K, \tilde{K}$  będą węzłami,  $L, \tilde{L}$  ich diagramami,  $A_+, \tilde{A}_+$  macierzami kolorowania,  $C, \tilde{C}$  zbiorami skrzyżowań. Rozważmy sumę spójną węzłów  $K \# \tilde{K}$ . Bez straty ogólności można przyjąć dwa upraszczające założenia:

- Diagramy zostały połączone względem  $k$ -tego łuku w diagramie  $L$ , oraz względem pierwszego łuku w diagramie  $\tilde{L}$ .
- Skrzyżowania w diagramie  $L$  zostały tak ponumerowane że skrzyżowania do których dochodzi łuk  $k$ , oraz znajdują się przed miejscem połączenia diagramów mają numer mniejszy od  $i+1$ , zaś skrzyżowania znajdujące się za miejscem połączenia mają numer większy od  $i$ . Analogicznie dla diagramu  $\tilde{L}$ .

**Twierdzenie 3.22.** Wyznacznik sumy spójnej diagramów  $|\det(K \# \tilde{K})| = |\det(K)| \times |\det(\tilde{K})|$ . Ponadto jeżeli wartości w odpowiadających macierzach diagonalnych wynoszą  $\{|d_1|, \dots, |d_k|\}$ , oraz  $\{|\tilde{d}_1|, \dots, |\tilde{d}_k|\}$ , to wartości w macierzy diagonalnej dla diagramu sumy spójnej wynoszą  $\{1, |d_1|, \dots, |d_k|, |\tilde{d}_1|, \dots, |\tilde{d}_k|\}$ .

*Dowód.* Operacja sumy spójnej przerywa dwa wybrane łuki i łączy końce.



W diagramie  $L$ , równania skrzyżowań o indeksach większych od  $i$  zostaną zmienione. Współczynnik odpowiadający łukowi  $k$ , będzie odpowiadał łukowi pierwszemu z diagramu  $\tilde{L}$ . W diagramie  $\tilde{L}$ , współczynnik odpowiadający łukowi pierwszemu będzie odpowiadał łukowi  $k$  z diagramu  $L$ . Macierz kolorowania ma postać:

$$(A_{L \# \tilde{L}})_+ = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k} & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,k-1} & a_{i,k} & 0 & & & \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,k-1} & 0 & a_{i+1,k} & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k-1} & 0 & a_{k,k} & & & \\ & & & \tilde{a}_{1,1} & 0 & \tilde{a}_{1,2} & \cdots & \tilde{a}_{1,k} \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & \tilde{a}_{i,1} & 0 & \tilde{a}_{i,2} & \cdots & \tilde{a}_{i,k} \\ & & & 0 & \tilde{a}_{i+1,1} & \tilde{a}_{i+1,2} & \cdots & \tilde{a}_{i+1,k} \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & \tilde{a}_{k,1} & \tilde{a}_{k,2} & \cdots & \tilde{a}_{k,k} \end{pmatrix}$$

Po usunięciu z macierzy  $k+1$ -szego wiersza oraz  $k+1$ -szej kolumny otrzymamy

$$A_{L\#\tilde{L}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k} & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,k-1} & a_{i,k} & & & \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,k-1} & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k-1} & 0 & & & \\ & & & \tilde{a}_{2,1} & \tilde{a}_{2,2} & \cdots & \tilde{a}_{2,k} \\ & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & \tilde{a}_{i,1} & \tilde{a}_{i,2} & \cdots & \tilde{a}_{i,k} \\ & & & 0 & \tilde{a}_{i+1,2} & \cdots & \tilde{a}_{i+1,k} \\ & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & \tilde{a}_{k,2} & \cdots & \tilde{a}_{k,k} \end{pmatrix}$$

Następnie dodając do  $k$ -tego wiersza sumę wierszy od 1 do  $k-1$ , oraz zamieniając  $k$ -ty wiersz z  $k+\tilde{k}$ -szym wierszem i  $k$ -tą kolumnę z  $k+\tilde{k}$  kolumną mamy:

$$A_{L\#\tilde{L}} = \begin{pmatrix} A & O & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \\ O & \tilde{A} & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \sum_{m=1}^i a_{m,k} \end{pmatrix}$$

Na podstawie wniosku o szachownicy diagramu  $\sum_{m=1}^i a_{m,k} = \mp 1$ . Zatem  $|\det(A_{L\#\tilde{L}})| = 1 \times |\det(A_L)| \times |\det(A_{\tilde{L}})|$ . Ponadto przesuwając 1 w lewy górny róg macierzy i stosując proces diagonalizacji otrzymamy, że elementami macierzy diagonalnej są  $\{1, |d_1|, \dots, |d_k|, |\tilde{d}_1|, \dots, |\tilde{d}_k|\}$ . □

### 3.6 Grupy kolorowań

**Definicja 3.23.** Grupa kolorowań diagramu  $\text{Col}(L)$ , to grupa abelowa, w której generatorami są łuki diagramu, zaś relacjami są równania kolorowań, oraz ustalony koloru wybranego łuku,  $a_1 = 0$ .

Formalnie:  $\text{Col}(L) = \langle a_1, \dots, a_k \mid \begin{pmatrix} a_{j_1} + a_{j_2} - 2 \times a_{j_3} \equiv 0 \\ \vdots \\ a_{j_{k-2}} + a_{j_{k-1}} - 2 \times a_{j_k} \equiv 0 \end{pmatrix}, a_1 = 0 \rangle$ .

$$\text{Col}(L) = \langle x \mid Ax \equiv 0, x \in \mathbb{Z}^{k-1} \rangle$$

Grupa kolorowań nie jest dobrze zdefiniowanym pojęciem. Zależy ona bowiem od sposobu indeksowania łuków, skrzyżowań oraz wyboru koloru dla pierwszego elementu.

**Twierdzenie 3.24.** Skończenie generowana grupa przemienna jest izomorficzna z produktem grup cyklicznych.

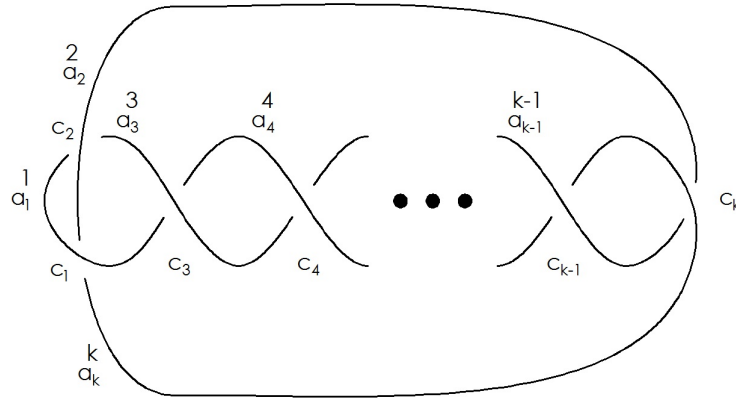
Grupa kolorowań ma zatem postać:  $\text{Col}(L) \cong \prod_{i=1}^m \mathbb{Z}_{n_i}$ .  
Z definicji grupy wynika że  $\text{Col}(L) \cong \mathbb{Z}^m / (A\mathbb{Z}^m)$ . Niech  $A = X^{-1}DY^{-1}$   
 $\mathbb{Z}^m / (A\mathbb{Z}^m) \cong \mathbb{Z}^m / (X^{-1}DY^{-1}\mathbb{Z}^m) \cong \mathbb{Z}^m / (D\mathbb{Z}^m) \cong \mathbb{Z}^m / (\prod_{i=1}^m |d_i|\mathbb{Z}) \cong \prod_{i=1}^m \mathbb{Z}_{|d_i|}$

Klasa izomorfizmów grupy jest dobrze zdefiniowana. Wyznacznik, oraz wartości w macierzy diagonalnej nie zależą od wyboru diagramu, sposobu indeksowania łuków ani skrzyżowań. Produkt grup cyklicznych izomorficzny z grupą kolorowania jest niezmiennikiem węzła.

**Wniosek:** Grupa kolorowań jest nieskończona  $\Leftrightarrow \det(L) = 0$ .

### 3.7 Przykład zastosowań - rodzina węzłów

**Przykład 1:** Rozważmy następującą rodzinę węzłów  $K_k$ ,  $k \geq 3$ . Korzystając z własności kolorowań wykażemy że dla różnych  $k$ , diagramy przedstawiają różne węzły.



Macierz kolorowania ma postać:

$$A_{k+} = \begin{pmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & k-2 & k-1 & k \\ \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ \vdots \\ c_{k-2} \\ c_{k-1} \\ c_k \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Rozważmy macierz  $A$ , powstałą po usunięciu ostatniej kolumny i ostatniego wiersza. Za pomocą operacji wierszowych i kolumnowych, macierz zostanie sprowadzona do postaci diagonalnej.

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dodając do pierwszej kolumny, podwojoną drugą kolumnę, zamieniając pierwszą i drugą kolumnę miejscami, oraz dodając do drugiej wiersza podwojony pierwszy wiersz otrzymujemy.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Niech  $W$  będzie macierzą  $n \times n$ , taką że na głównej przekątnej znajdują się 2, oraz bezpośrednio nad i pod główną przekątną znajdują się -1.

$$W_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$$

Wtedy istnieje ciąg operacji:

- Zamiana pierwszej i drugiej kolumny
- Dodanie do drugiej kolumny  $2m + 1$  krotności pierwszej kolumny.
- Odjęcie pierwszego wiersza od trzeciego wiersza

Przekształca macierz  $H_1$  w macierz  $H_2$ :

$$H_1 = \begin{pmatrix} 2m+1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -2m+1 & & & & \\ 0 & & W_n & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \quad H_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2m+3 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2m-1 & & & & \\ 0 & 0 & & W_{n-1} & & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & & & & \end{pmatrix}$$

Stąd macierz  $A_k$  może zostać przekształcona do postaci diagonalnej takiej że na głównej przekątnej znajdują się elementy  $\{-1, -1, \dots, -1, 2k - 3\}$ . Stąd  $|\det(L_k)| = 2k - 3$ . Ponieważ wyznacznik diagramu jest niezmiennikiem węzła to dla każdego  $k$ , diagram przedstawia różne węzły.

**Przykład 2:** Niech  $K'_k$  będą tymi węzłami z poprzedniego przykładu że, wyznacznik diagramu jest pewną potęgą 3. Czy dla pewnego  $k \geq 9$ ,  $K_k$  jest splotem pewnej, większej od 1, liczby trójlisntników?

Z poprzedniego twierdzenia wyznacznik splotu węzłów, jest iloczynem wyznaczników diagramów. Zatem splot  $n$  trójlisntników ma wyznacznik  $3^n$ . Wobec tego istnieje węzeł  $K'_k$ , że wyznacznik jego diagramu jest równy wyznacznikowi splotu trójlisntników. Z twierdzenia wiadomo również że rozkład wyznacznika diagramu na iloczyn wartości na głównej przekątnej w macierzy diagonalnej jest jego niezmiennikiem. Macierz diagonalna odpowiadająca  $L_k$ , ma na głównej przekątnej wartości  $\{1, 1, \dots, 1, 3_k^n\}$ , zaś macierz diagonalna odpowiadająca diagramowi splotu trójlisntników ma wartości  $\{3, 3, \dots, 3, 3\}$ . Stąd żaden splot trójlisntników nie jest węzłem postaci  $K_k$ .

## 4 Wielomian Jonesa

Przed wprowadzeniem kolejnego wielomianowego niezmiennika przyjrzymy się ich historii. Znamy już wielomian J. Alexandera, który został odkryty około roku 1928. W 1969 J. Conway znalazł sposób na wyznaczenie wielomianu Alexandera dla dowolnego splotu przy użyciu tak zwanej relacji kłębiastej<sup>1</sup>. Jest to równanie wiążące wielomian splotu z wielomianami splotów o zmienionym jednym skrzyżowaniu w diagramie splotu wyjściowego. Relacja kłębiasta okazała się kluczem do sukcesu.

Vaughan Jones, matematyk nowozelandzki, odkrył w 1984 nowy wielomian dla splotów jako produkt uboczny podczas pracy nad algebrami operatorowymi. Odkrycie Jonesa było przełomowe, a już cztery miesiące później ogłoszono znalezienie nowego niezmiennika: wielomianu HOMFLY, którego nazwa pochodzi od pierwszych liter nazwisk odkrywców, to jest: Hoste, Ocneanu, Millett, Freyd, Lickorish, Yetter.

Aby lepiej zrozumieć wielomian Jonesa przyjrzymy się najpierw prostszej konstrukcji, nawiasowi Kauffmana. Później zajmiemy się węzłami alternującymi.

### 4.1 Nawias Kauffmana

Zacniemy od zdefiniowania nawiasu Kauffmana. Przypomnijmy, wielomian Laurenta zmiennej  $X$  to formalny symbol  $f = a_r X^r + \dots + a_s X^s$ , gdzie  $r, s, a_r, \dots, a_s$  są całkowite i  $r \leq s$ .

Poszukujemy niezmiennika dla splotów o kilku prostych własnościach. Przede wszystkim żądamy, by niewęzłowi przypisany był wielomian 1:  $\langle \bigcirc \rangle = 1$ . Po drugie chcemy móc wyznaczać nawiasy znając je dla prostszych splotów, co zapiszemy symbolicznie  $\langle \nearrow \rangle = A \langle \rangle \langle \rangle + B \langle \searrow \rangle$ . Zależy nam wreszcie na tym, by móc dodać do splotu trywialną składową:  $\langle L \sqcup \bigcirc \rangle = C \langle L \rangle$ .

Prosty rachunek pokazuje wpływ drugiego ruchu Reidemeistera na nawias:

$$\langle \bigcirc \rangle = (A^2 + ABC + B^2) \langle \searrow \rangle + BA \langle \rangle \langle \rangle \stackrel{?}{=} \langle \rangle \langle \rangle.$$

Aby zachodziła ostatnia równość wystarczy (choć wcale nie trzeba) przyjąć  $B = A^{-1}$ , co wymusza na nas  $C = -A^2 - A^{-2}$ . W ten sposób odkryliśmy następującą definicję.

**Definicja 4.1.** Nawias Kauffmana  $\langle D \rangle$  dla diagramu splotu  $D$  to wielomian Laurenta zmiennej  $A$ , który jest niezmienniczy ze względu na gładkie deformacje diagramu, a przy tym spełnia trzy aksjomaty:

1.  $\langle \bigcirc \rangle = 1$
2.  $\langle D \sqcup \bigcirc \rangle = (-A^{-2} - A^2) \langle D \rangle$
3.  $\langle \nearrow \rangle = A \langle \rangle \langle \rangle + A^{-1} \langle \searrow \rangle$

Tutaj  $\bigcirc$  oznacza standardowy diagram dla niewęzła,  $D \sqcup \bigcirc$  jest diagramem, który powstaje z  $D$  przez dodanie nieprzecinającej go krzywej zamkniętej, zaś trzy symbole  $\nearrow, \rangle \langle$  oraz  $\searrow$  odnoszą się do diagramów, które są identyczne wszędzie poza małym obszarem. Diagramy  $\rangle \langle$  oraz  $\searrow$  nazywa się odpowiednio dodatnim (prawym) i ujemnym (lewym) wygładzeniem  $\nearrow$ .

**Lemat 4.2.** Nawias Kauffmana dowolnego diagramu można wyznaczyć w skończenie wielu krokach.

*Dowód.* Jeżeli diagram  $D$  ma  $n$  skrzyżowań, to nieustanne stosowanie aksjomatu trzeciego pozwala na zapisanie  $\langle D \rangle$  jako sumy  $2^n$  składników, z których każdy jest po prostu zamkniętą krzywą i ma trywialny nawias ( $\langle \bigcirc \rangle = 1$ ). Nawias sumy wyznacza się korzystając z drugiego aksjomatu.  $\square$

Przedstawimy teraz wpływ ruchów Reidemeistera na nawias Kauffmana.

---

<sup>1</sup>skein relation

**Lemat 4.3.** Pierwszy ruch Reidemeistera zmienia nawias Kauffmana zgodnie z poniższą regułą. Pozostałe ruchy Reidemeistera nie zmieniają nawiasu.

$$\langle \text{braid} \rangle = -A^{-3} \langle \text{link} \rangle \cdot \langle \text{link} \rangle = \langle \text{link} \rangle \cdot \langle \text{link} \rangle = \langle \text{link} \rangle.$$

Dowód. Pierwszy ruch Reidemeistera:

$$\langle \text{braid} \rangle \stackrel{K3}{=} A \langle \text{braid} \rangle + A^{-1} \langle \text{link} \rangle \stackrel{K2}{=} A \langle \text{link} \rangle + A^{-1}(-A^{-2} - A^2) \langle \text{link} \rangle = -A^{-3} \langle \text{link} \rangle$$

Pierwsza równość wynika z K3, druga z K2, trzecia jest oczywista. Dla drugiego ruchu:

$$\begin{aligned} \langle \text{link} \rangle &\stackrel{K3}{=} A \langle \text{link} \rangle + A^{-1} \langle \text{link} \rangle \stackrel{K1}{=} -A^{-2} \langle \text{link} \rangle + A^{-1} \langle \text{link} \rangle \\ &\stackrel{K3}{=} -A^{-2} \langle \text{link} \rangle + A^{-1} A \langle \text{link} \rangle + A^{-1} A^{-1} \langle \text{link} \rangle = \langle \text{link} \rangle \end{aligned}$$

Dla trzeciego ruchu:

$$\begin{aligned} \langle \text{link} \rangle &\stackrel{K3}{=} A \langle \text{link} \rangle + A^{-1} \langle \text{link} \rangle \stackrel{R2}{=} A \langle \text{link} \rangle + A^{-1} \langle \text{link} \rangle \\ &\stackrel{R2}{=} A \langle \text{link} \rangle + A^{-1} \langle \text{link} \rangle \stackrel{K3}{=} \langle \text{link} \rangle \end{aligned}$$

korzystaliśmy tu z własności drugiego ruchu. □

Okazało się, że użycie najprostszego, I ruchu Reidemeistera, „psuje” nawias! W akcie desperacji moglibyśmy zmienić definicję, zaniechamy tego i przejdziemy do kolejnego składnika w przepisie na wielomian Jonesa.

## 4.2 Spin

Przypomnijmy, że znak skrzyżowania na diagramie to liczba 1 lub  $-1$ :  $\text{sign} \nearrow = +1$ ,  $\text{sign} \nwarrow = -1$ .

**Definicja 4.4.** Niech  $D$  będzie diagramem zorientowanego splotu lub węzła. **Spinem**  $D$  jest  $w(D) = \sum_c \text{sign } c$ , gdzie sumowanie przebiega po wszystkich skrzyżowaniach.

**Przykład 4.5.** Spinem trójlistnika w takiej wersji jest  $+3$ :



**Lemat 4.6.** Tylko I ruch Reidemeistera zmienia spin:  $w(\text{braid}) = w(\text{link}) - 1$ , pozostałe nie mają wpływu. Spin nie zależy od orientacji.

Dowód. Proste ćwiczenie. □

### 4.3 Wielomian Jonesa

**Definicja 4.7.** Wielomian Jonesa zorientowanego splotu to wielomian Laurenta  $V(L) \in \mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$  określony przez

$$V(L) = \left[ (-A)^{-3w(D)} \langle D \rangle \right]_{t^{1/2} = A^{-2}},$$

gdzie  $D$  to dowolny diagram dla  $L$ .

**Twierdzenie 4.8.** Wielomian Jonesa jest niezmiennikiem zorientowanych splotów.

*Dowód.* Wystarczy pokazać niezmienniczość  $(-A)^{-3w(D)} \langle D \rangle$  na ruchy Reidemeistera. Ale

$$(-A)^{-3w} \langle \text{twist} \rangle = (-A)^{-3w} \langle \text{crossing} \rangle = (-A)^{-3w} \langle \text{crossing} \rangle = (-A)^{-3w} \langle \text{crossing} \rangle. \quad \square$$

Wielomian Jonesa jest naprawdę potężnym narzędziem. Pozwala bowiem odróżnić dowolne dwa węzły pierwsze o co najwyżej dziewięciu skrzyżowaniach.

**Hipoteza 4.9.** Nie istnieje nietrywialny węzeł, którego wielomian Jonesa nie odróżnia od niewęzła.

**Twierdzenie 4.10.** Wielomianem węzła  $(m, n)$ -torusowego jest

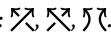
$$\frac{t^{(m-1)(n-1):2}}{1-t^2} \cdot (1 - t^{m+1} - t^{n+1} + t^{m+n}).$$

### 4.4 Relacja kłębiasta

Dotychczas wyznaczyliśmy wielomian Jonesa jedynie dla trywialnych splotów. Spowodowane jest to tym, że chociaż nawias Kauffmana jest przydatny przy dowodzeniu różnych własności, to zupełnie nie nadaje się do obliczeń. Dużo lepszym narzędziem jest następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 4.11** (relacja kłębiasta). Wielomian Jonesa spełnia równość  $V(\bigcirc) = 1$  oraz relację

$$t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) + (t^{-1/2} - t^{1/2})V(L_0) = 0,$$

gdzie  $L_+$ ,  $L_-$ ,  $L_0$  to zorientowane sploty, które różnią się jedynie na małym obszarze: .

*Dowód.* Wyrażmy wielomian Jonesa przez nawias Kauffmana i spin. Chcemy pokazać, że

$$A^4(-A)^{-3w(L_+)} \langle \nearrow \rangle - A^4(-A)^{-3w(L_-)} \langle \searrow \rangle + (A^2 - A^{-2})(-A)^{-3w(L_0)} \langle \rangle \langle \rangle = 0.$$

Ale  $w(L_{\pm}) = w(L_0) \pm 1$ , zatem to jest równoważne z  $-A \langle \nearrow \rangle + A^{-1} \langle \searrow \rangle + (A^2 - A^{-2}) \langle \rangle \langle \rangle = 0$ . Z definicji nawiasu Kauffmana wnioskujemy, że  $\langle \nearrow \rangle = A \langle \rangle \langle \rangle + A^{-1} \langle \searrow \rangle$  i  $\langle \searrow \rangle = A \langle \nearrow \rangle + A^{-1} \langle \rangle \langle \rangle$ . Pierwsze równanie przemnożmy przez  $A$ , drugie przez  $A^{-1}$ , a następnie dodajmy je do siebie. Wtedy otrzymamy  $A \langle \nearrow \rangle - A^{-1} \langle \searrow \rangle = A^2 \langle \rangle \langle \rangle - A^{-2} \langle \rangle \langle \rangle$ .  $\square$

**Przykład 4.12.**  $V(\bigcirc) = -t^{5/2} - t^{1/2}$  (splot Hopfa),  $V(\text{trójlistnik}) = -t^4 + t^3 + t$ .



## 4.5 Odwrotności, lustra i sumy

**Twierdzenie 4.13.** Niech  $L$  będzie zorientowanym splotem.  $V(rL) = V(L)$ ,  $V(mL)(t) = V(L)(t^{-1})$ .

**Wniosek 4.14.** Wielomian Jonesa nie zależy od orientacji węzła (ale nie splotu!).

*Dowód.* Każdy węzeł ma tylko dwie orientacje, splot może mieć ich  $2^n$ , gdzie  $n$  to liczba składowych.  $\square$

**Wniosek 4.15.** Trójlistnik nie jest równoważny ze swoim lustrem.

*Dowód.* W zależności od orientacji wielomianem trójlistnika jest ... lub ....  $\square$

**Twierdzenie 4.16.** Niech  $L, M$  będą zorientowanymi splotami, zaś  $J, K$ : zorientowanymi węzłami.

$$1. V(L \sqcup M) = (-t^{1/2} - t^{-1/2})V(L)V(M),$$

$$2. V(J \# K) = V(J)V(K).$$

*Dowód.* Wybierzmy diagramy  $D, E$  dla (odpowiednio)  $L, M$ . Po podstawieniu  $t^{1/2} = A^{-2}$  widzimy, że chcemy pokazać  $(-A)^{-3w(D \sqcup E)} \langle D \sqcup E \rangle = (-A^2 - A^{-2})(-A)^{-3(w(D)+w(E))} \langle D \rangle \langle E \rangle$ .

Oczywiście  $w(D \sqcup E) = w(D) + w(E)$ , więc wystarczy udowodnić, że

$$\langle D \sqcup E \rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle D \rangle \langle E \rangle.$$

Oznaczmy przez  $f_1(D)$ ,  $f_2(D)$  lewą i prawą stronę ostatniego równania. Są to wielomiany Laurenta, które zależą tylko od  $D$ . Aksjomaty Kauffmana pozwalają na pokazanie, że obie funkcje mają następujące własności:  $f_i(\bigcirc) = (-A^2 - A^{-2}) \langle E \rangle$ ,  $f_i(D \sqcup \bigcirc) = (-A^2 - A^{-2})f_i(D)$ ,  $f_i(\nearrow) = Af_i(\searrow) + A^{-1}f_i(\nwarrow)$ . To pozwala na wyznaczenie ich wartości dla dowolnego  $D$ , zatem  $f_1 \equiv f_2$ , co kończy dowód.  $\square$

*Dowód.* Narysujmy  $J, K$  jako  $\boxed{J} \bowtie \boxed{K}$ . Rozpatrzmy sploty  $\boxed{J} \bowtie \boxed{K}$ ,  $\boxed{J} \bowtie \boxed{K}$ ,  $\boxed{J} \bowtie \boxed{K}$ . Relacja kłębiasta może zostać użyta do pokazania, że

$$t^{-1}V(J \# K) - tV(J \# K) + (t^{-1/2} - t^{1/2})V(J \sqcup K) = 0.$$

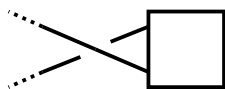
Ale  $V(J \sqcup K) = (-t^{1/2} - t^{-1/2})V(J)V(K)$ , co upraszcza się do  $V(J \# K) = V(J)V(K)$  i kończy dowód.  $\square$

## 4.6 Rozpiętość i wielomian Jonesa

**Twierdzenie 4.17.** Niech  $L$  posiada zredukowany, spójny, alternujący diagram o  $n$  skrzyżowaniach. Wtedy każdy diagram ma co najmniej  $n$  skrzyżowań.

To bardzo ważny rezultat, którego prawdziwość przypuszczał już P. G. Tait w XIX wieku. Nikt nie był w stanie podać dowodu przed pojawieniem się wielomianu Jonesa w latach osiemdziesiątych. Wyjaśnimy teraz użyte tu przymiotniki.

**Definicja 4.18.** Diagram jest alternujący, gdy podczas poruszania się wzdłuż splotu mijamy skrzyżowania na zmianę z góry oraz z dołu. Diagram jest zredukowany, gdy nie zawiera usuwalnych skrzyżowań. Diagram jest spójny, gdy nie można go podzielić na dwie niepuste części, które nie spotykają się na żadnym skrzyżowaniu.



Przykładowo diagram  $\bigcirc \bigcirc$  nie jest spójny, ale  $\bigcirc \bigcirc$  już tak.

W dowodzie przywołanego wyżej twierdzenia użyjemy rozpiętości wielomianu Jonesa.

**Definicja 4.19.** Niech  $f$  będzie wielomianem Laurenta zmiennej  $X$ . Wtedy  $M(f)$  [ $m(f)$ ] to najwyższa [najniższa] potęga pojawiająca się w  $f$ . Rozpiętość to  $\text{span } f = M(f) - m(f)$ .

Zajmiemy się teraz nawiasem Kauffmana. Znajdziemy wzór, który pozwala na wyznaczenie nawiasu dowolnego spłotu o  $n$  skrzyżowaniach (na diagramie) przez dodanie  $2^n$  wyrazów. Wzór ten okaże się użyteczny przy dowodzeniu późniejszych twierdzeń.

**Definicja 4.20.** Niech  $D$  będzie diagramem spłotu.

1. Stan  $D$  to funkcja  $s$  ze zbioru skrzyżowań  $D$  w  $\{-1, +1\}$ .
2. Dla ustalonego stanu  $s$  dla  $D$  przez  $sD$  rozumiemy diagram powstały przez wygładzenie wszystkich skrzyżowań zgodnie z ich nowym znakiem ( $\pm 1$ ), wtedy  $|s|$  to suma wartości  $s$ .
3. Diagram dla  $sD$  jest sumą zamkniętych krzywych, ich liczbę oznaczamy przez  $|sD|$ .

**Twierdzenie 4.21** (o sumowaniu stanów). Niech  $D$  będzie diagramem spłotu. Wtedy

$$\langle D \rangle = \sum_s (-A^2 - A^{-2})^{|sD|-1} A^{|s|},$$

gdzie sumujemy po wszystkich stanach  $s$  dla  $D$ .

*Dowód.* Oznaczmy prawą stronę dowodzonej równości przez  $[D]$ . Pokażemy, że spełnia ona  $[\bigcirc] = 1$ ,  $[D \sqcup \bigcirc] = (-A^{-2} - A^2)[D]$  oraz  $[\text{X}] = A[\text{D}] + A^{-1}[\text{X}]$ . Stąd wynika już, że  $[D] = \langle D \rangle$ .

Niewątpliwie  $\bigcirc$  ma tylko jeden stan  $s$  z  $|s| = 0$  i  $|s\bigcirc| = 1$ .

Zauważmy, że  $D \sqcup \bigcirc$  i  $D$  mają te same skrzyżowania, więc możemy utożsamiać stany  $s$  dla  $D$  ze stanami  $u$  dla  $D \sqcup \bigcirc$ . Wtedy  $|u| = |s|$  oraz  $|u(D \sqcup \bigcirc)| = |sD| + 1$ . Zatem

$$[D \sqcup \bigcirc] = \sum_u (-A^2 - A^{-2})^{|u(D \sqcup \bigcirc)|-1} A^{|u|} = \sum_s (-A^2 - A^{-2})^{|sD|+1} A^{|s|} = (-A^2 - A^{-2})[D].$$

Pozostała trzecia własność. Z definicji  $A[\text{D}] = \sum_u (-A^2 - A^{-2})^{|u\text{D}|-1} A^{|u|+1}$ , gdzie  $u$  przebiega wszystkie stany  $\text{D}$ . Ale  $\text{D}$  to  $\text{X}$  ze skrzyżowaniem (powiedzmy,  $c$ ) wygładzonym dodatnio, co daje bijekcję między stanami  $u$  dla  $\text{D}$  i  $s$  dla  $\text{X}$ , dla których  $s(c) = +1$ . Wtedy  $|s\text{X}| = |u\text{D}| + 1$  i  $|s| = |u| + 1$  oraz

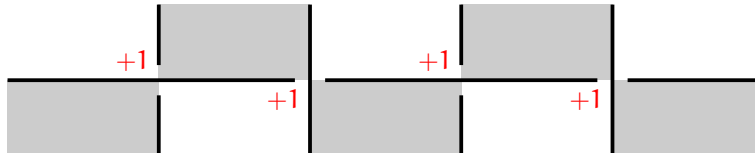
$$A[\text{D}] = \sum_u (-A^2 - A^{-2})^{|u\text{D}|-1} A^{|u|+1} = \sum_{s(c)=+1} (-A^2 - A^{-2})^{|s\text{X}|-1} A^{|s|},$$

podobne rozumowanie pokazuje, że  $A^{-1}[\text{X}] = \sum_{s(c)=-1} (-A^2 - A^{-2})^{|s\text{X}|-1} A^{|s|}$ . Teraz wystarczy dodać do siebie dwa ostatnie równania.  $\square$

Zbadamy teraz dwa najprostsze stany dowolnego diagramu.

**Definicja 4.22.** Stan, który przypisuje znak  $+1$  [ $-1$ ] każdemu skrzyżowaniu, nazywamy  $s_+$  [ $s_-$ ].

Niech  $D$  będzie alternującym, zredukowanym diagramem spójnym. Wszystkie skrzyżowania mają ten sam znak. Wybierzmy dla niego uszachowienie.



Zamieniając białe i czarne w razie potrzeby możemy założyć, że wszystkie skrzyżowania są dodatnie (+1). Takie uszachowanie nazywamy *standardowym*. Porównajmy wyglądy  $s_+D$  z  $s_-D$ :



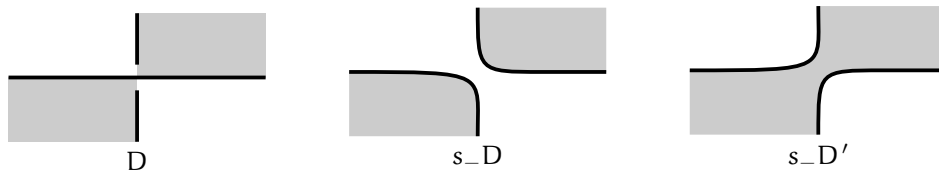
Zamknięte krzywe tworzące  $s_+D$  są brzegami białych obszarów uszachowania, podczas gdy te tworzące  $s_-D$  stanowią brzeg czarnych obszarów. Zauważmy, że na każdym skrzyżowaniu są cztery różne czarne i białe obszary (nie mogą się spotkać w innych miejscach), gdyż diagram był zredukowany.

**Lemat 4.23.** Niech  $D$  będzie spójnym diagramem splotu o  $n$  skrzyżowaniach. Wtedy  $|s_+D| + |s_-D| \leq n + 2$ , z równością dla zredukowanego i alternującego  $D$ .

*Dowód.* Skorzystamy z indukcji względem  $n$ . Łatwo widzieć prawdziwość lematu dla  $n = 0$ . Załóżmy, że jest on prawdziwy dla wszystkich diagramów o  $n - 1$  skrzyżowaniach, następnie ustalmy diagram  $D$  o  $n$  skrzyżowaniach.

Wybermy skrzyżowanie z  $D$ . Można je wygładzić na dwa sposoby, jeden z nich daje spójny diagram  $D'$ . Bez straty ogólności przyjmijmy, że jest to dodatnie wygładzenie. Wtedy zachodzi  $|s_+D'| = |s_+D|$ , ale  $|s_-D'| = |s_-D| \pm 1$ , ponieważ  $s_-D'$  powstaje z  $s_-D$  przez zastąpienie pewnej części  $\searrow$  przez  $\swarrow$ . To rozrywa jedną krzywą na dwa kawałki lub scala dwie krzywe w jedną. Teraz  $|s_+D| + |s_-D| = |s_+D'| + |s_-D'| \pm 1 \leq (n - 1) + 2 \pm 1 \leq n + 2$  (pierwsza nierówność wynika z założenia indukcyjnego).

Założmy, że  $D$  jest spójny, alternujący i zredukowany. Musimy pokazać, że ostatnie dwie nierówności tak naprawdę są równościami. Pierwsza wynika z tego, że  $D'$  jest spójny, alternujący i zredukowany. Z drugiej strony  $|s_-D'| = |s_-D| - 1$ , ponieważ przejście od  $s_-D$  do  $s_-D'$  skleja dwa czarne obszary. To pokazuje drugą równość i kończy dowód.



□

**Lemat 4.24.** Niech  $D$  będzie diagramem splotu o  $n$  skrzyżowaniach. Wtedy

1.  $M\langle D \rangle \leq n + 2|s_+D| - 2$
2.  $m\langle D \rangle \geq -n - 2|s_-D| + 2$

z równością, jeżeli  $D$  jest alternujący, zredukowany i spójny.

*Dowód.* Udowodnimy tylko pierwszą część, druga jest do niej podobna. Dla stanu  $s$  diagramu  $D$  niech  $\langle D | s \rangle := (-A^{-2} - A^2)^{|sD|-1} A^{|s|}$ . Wzór sumujący stany przybiera postać  $\langle D \rangle = \sum_s \langle D | s \rangle$ .

Zauważmy, że  $M\langle D | s \rangle = 2|sD| + |s| - 2$ , a więc w szczególności  $M\langle D | s_+ \rangle = 2|s_+D| + n - 2$ . Gdyby udało się nam pokazać, że  $M\langle D | s \rangle \leq M\langle D | s_+ \rangle$  dla wszystkich innych stanów  $s$ , dowód nierówności byłby zakończony. Ale możemy znaleźć ciąg  $s_+ = s_0, s_1, \dots, s_r = s$ , w którym  $s_{i+1}$  powstaje z  $s_i$  przez pojedynczą zmianę  $+1$  na  $-1$ .

Teraz  $|s_{i+1}| = |s_i| - 2$ , podczas gdy  $|s_{i+1}D| = |s_iD| \pm 1$ , ponieważ  $s_{i+1}D$  uzyskujemy z  $s_iD$  przez połączenie dwóch zamkniętych krzywych lub podział jednej zamkniętej krzywej na dwie części. Zatem

$$M\langle D | s_{i+1} \rangle = 2|s_{i+1}D| + |s_{i+1}| - 2 = (2|s_iD| + |s_i| - 2) + (\pm 2 - 2) \leq M\langle D | s_i \rangle.$$

Teraz widać już, że  $M\langle D | s \rangle = M\langle D | s_r \rangle \leq \dots \leq M\langle D | s_0 \rangle = M\langle D | s_+ \rangle$ .

Pokażemy teraz, że jeśli  $D$  jest zredukowany, alternujący i spójny, to nierówność zamienia się w równość. Będzie to wynikało z  $M\langle D | s \rangle < M\langle D | s_+ \rangle$  dla  $s \neq s_+$ , jeżeli tylko powołamy się na powyższy argument. Wystarczy ograniczyć się do tych  $s$ , które powstają z  $s_+$  przez zmianę pojedynczego stanu  $+1$  na  $-1$ . Ale to już jest oczywiste, gdyż  $sD$  otrzymujemy przez sklejenie dwóch białych obszarów  $s_+D$ .  $\square$

Możemy wreszcie zająć się rozpiętością wielomianu Jonesa.

**Twierdzenie 4.25.** Niech  $L$  będzie zorientowanym splotem o spójnym diagramie  $D$  z  $n$  skrzyżowaniami. Wtedy  $\text{span}(V(L)) \leq n$ , z równością dla zredukowanego i alternującego  $D$ .

*Dowód.* Pokażemy prawdziwość innego, równoważnego stwierdzenia:  $\text{span}\langle D \rangle \leq 4n$  z równością dla zredukowanego i alternującego  $D$ . Dwa poprzednie lematy mówią, że

$$\begin{aligned} \text{span}\langle D \rangle &= M\langle D \rangle - m\langle D \rangle \leq (2|s_+D| + n - 2) + (2|s_-D| + n - 2) \\ &= 2(|s_+D| + |s_-D|) + 2n - 4 \leq 2(n + 2) + 2n - 4 = 4n. \end{aligned} \quad \square$$

Jesteśmy już w stanie podać dowód twierdzenia 4.17 wspomnianego na początku sekcji.

*Dowód.* Założenia mówią nam, że  $\text{span}(V(L)) = n$ . Gdyby istniał diagram o mniejszej liczbie skrzyżowań, mielibyśmy  $\text{span}(V(L)) < n$ , co prowadzi do sprzeczności.  $\square$

Wyznaczanie wielomianu Jonesa dla splotu jest uciążliwe, jednak czasami możemy oszacować jego rozpiętość korzystając z następujących nierówności:

**Wniosek 4.26.** Niech  $L$  będzie zorientowanym splotem ze spójnym diagramem  $D$  o  $n$  skrzyżowaniach. Wtedy

$$\frac{3w(D) - 2|s_+D| + 2 - n}{4} \leq m(V(L) \text{ oraz } M(V(L))) \leq \frac{3w(D) + 2|s_-D| + n - 2}{4},$$

z równością dla zredukowanego i alternującego  $D$ .

*Dowód.* Proste ćwiczenie.  $\square$

## 4.7 Wielomian HOMFLY

Po tym, jak Jones przedstawił światu swój wielomian w 1984 roku, matematycy zaczęli szukać jego uogólnienia zależnego nie od jednej, lecz dwóch zmiennych. Pierwszym takim niezmiennikiem węzłów okazał się wielomian (Laurenta) HOMFLY.

**Definicja 4.27.** Wielomian HOMFLY zorientowanego splotu to wielomian Laurenta zależny od  $m$  i  $l$ , który spełnia dwa aksjomaty:  $P(\bigcirc) = 1$  oraz  $lP(L_+) + l^{-1}P(L_-) + mP(L_0) = 0$  (przy oznaczeniach z twierdzenia 4.11).

**Twierdzenie 4.28.** Wielomian HOMFLY dla sum:

1.  $P(L_1 \sqcup L_2) = -(l + l^{-1})m^{-1}P(L_1)P(L_2)$ .
2.  $P(L_1 \# L_2) = P(L_1)P(L_2)$ .

Okazuje się, że wielomian HOMFLY uogólnia jednocześnie wielomiany Jonesa i Alexandra:

**Twierdzenie 4.29.** Dla dowolnego (splotu / węzła, nie/zorientowanego?) zachodzą równości:

- $V(t) = P(l = it^{-1}, m = i(t^{-1/2} - t^{1/2}))$ ,
- $\Delta(t) = P(l = i, m = i(t^{1/2} - t^{-1/2}))$ .

Zaletą wielomianu HOMFLY jest to, że zazwyczaj wykrywa chiralność<sup>2</sup>, ale nie odróżnia enancjomerów węzłów 09-042, 10-048, 10-071, 10-091, 10-104, oraz 10-125.

Mutanty mają ten sam wielomian HOMFLY. Okazuje się, że istnieje nieskończenie wiele parami różnych węzłów o tym samym wielomianie (Kanenobu 1986). Przykłady: (05-001, 10-132), (08-008, 10-129) (08-016, 10-156), oraz (10-025, 10-056) (Jones 1987).

M. B. Thistlethwaite wyznaczył HOMFLY dla tych, które mają mniej niż 14 skrzyżowań.

---

<sup>2</sup>węzeł chiralny: posiadający formy różnej handedness, które nie są lustrzanie symetryczne

## Starsze materiały

Co potrafimy odróżnić od siebie?

1. splot Hopfa od splotu Whiteheada ..... linking number, suma znaków skrzyżowań
2. trójlistnik od odbicia ..... wielomian Jonesa
3. dowolne dwa węzły pierwsze o mniej niż dziesięciu skrzyżowaniach ..... wielomian Jonesa

Adams: notacja Dowkera, Conwaya.

Węzły torusowe (5.1), węzły satelitarne i hiperboliczne.

Warkocze (5.4), wielomiany HOMFLY (6.3).

*Bachelor's unknotting.*

Arf.

[http : //mathuwr.pl/teoria\\_wzlow/](http://mathuwr.pl/teoria_wzlow/)