

# Teoria węzłów

nasze nazwiska

5 grudnia 2015

## Spis treści

<b>1</b>	<b>Wstęp, czyli trochę zakłamaney historii i intuicji</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Moja część...</b>	<b>1</b>
2.1	Sformułowanie definicji węzła . . . . .	2
2.2	Równoważność węzłów . . . . .	2
2.3	Diagramy i rzuty węzła na płaszczyznę . . . . .	2
2.4	Orientacja węzła . . . . .	3
2.5	Ruchy Reidemeister'a . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Kolorowania węzłów</b>	<b>4</b>
3.1	Kolorowanie diagramów . . . . .	4
3.2	Równania kolorowań . . . . .	5
3.3	Macierze kolorowań . . . . .	6
3.4	Grupy kolorowań . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Wielomian Jonesa</b>	<b>6</b>
4.1	Nawias Kauffmana . . . . .	7
4.2	Spin . . . . .	8
4.3	Wielomian Jonesa . . . . .	8
4.4	Relacja kłębiasta . . . . .	8
4.5	Odwrotności, lustra i sumy . . . . .	9

## 1 Wstęp, czyli trochę zakłamaney historii i intuicji

Pojęcie węzła wywodzi się z teorii atomu Lorda Kelvina, która głosi, że atomy powstają z wirów energii (cokolwiek miałyby to znaczyć). Takie “wiry” Kelvin wyobrażał sobie jako okręgi w przestrzeni trójwymiarowej, lub, bardziej ogólnie, jako krzywe zamknięte w  $\mathbb{R}^3$  bez samoprzecięć. Po tym, jak owa teoria się przyjęła (co prawda nie na długo), zaczęto szukać języka, w którym możnaby w miarę precyzyjnie (jak na tamte matematycznie prehistoryczne czasy) ją wyrazić. Jak mniemam (autor świadomie używa nieco wycofanej formy “jak mniemam”, zamiast np. “z pewnością”, co pozwala mu nie wdawać się w dyskusję na temat historii matematyki, o której nie ma zielonego pojęcia) te rozważania dały początek teorii węzłów.

Praca Petera Taita, problemy, które naptokał, okazało się, że wiele z nich jest równoważnych temu, czy węzeł nie jest równoważny niewęzłowi, próba sklasyfikowania wszystkich węzłów o niewielkiej liczbie przecięć.

Trochę historii (najpierw Alexander, potem Reidemeister, potem jeszcze ktoś... dobra, to miał być szkielet)

Intuicja, kilka wstępnych przykładów... (muszę się nauczyć tej magicznej technologii służącej do rysowania tych... węzłów)

## 2 Moja część...

Jest dość dużo (więcej niż trzy) definicji węzła. Każda z nich w pewnym sensie oddaje intuicję, która kryje się za potocznym rozumieniem nazwy tego pojęcia. W tym rozdziale podamy jedną z nich. Powiemy też, co to znaczy, że dwa węzły są równoważne, tj. zastanowimy się, kiedy mając dane dwa węzły jesteśmy w stanie zdeformować jeden z nich (powiemy też, co to znaczy zdeformować), aby otrzymać drugi. Na koniec sformułujemy i udowodnimy twierdzenie Reidemeister'a, które dostarczy nam potężnych narzędzi do rozstrzygania, kiedy dane dwa węzły są równoważne.

### 2.1 Sformułowanie definicji węzła

Tutaj powiem, czemu jakieś tam podejście jest złe...

Trararam! Teraz podaję lepsze, od tego złego i mówię czemu jest lepsze...

**Definicja 2.1.** *Węzeł to łamana w  $\mathbb{R}^3$  bez samoprzecięć.*

**Definicja 2.2.** *Wierzchołek węzła...*

**Definicja 2.3.** *Splot - rozłączna suma węzłów...*

### 2.2 Równoważność węzłów

Trochę gadki wstępnej dotyczącej potrzeby wprowadzenia relacji równoważności, tzn. kiedy węzły, które wyglądają trochę inaczej w istocie są tym samym węzłem.

**Definicja 2.4.** *Elementarnym przekształceniem węzła nazywamy...*

**Definicja 2.5.** *Mówimy, że węzły J i K są równoważne, gdy...*

Sprawdzenie, że podana relacja jest w istocie relacją równoważności pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie (dobrze?...)

Gadka-szmatka: utożsamiamy z sobą węzły równoważne, mówimy, że dwa węzły, to ten sam węzeł, gdy te dwa węzły są równoważne.

### 2.3 Diagramy i rzuty węzła na płaszczyznę

Od początku tej pracy, artykułu (? trzeba uzgodnić terminologię) z konieczności rysowaliśmy węzły (obiekty żyjące w przestrzeni trójwymiarowej) na płaszczyźnie. Niestety, masowa technologia nie pozwala jeszcze na pisanie prac w formie hologramów, nad czym wszyscy czterej autorzy mniej lub bardziej ubolewają. Głównym celem tego podrozdziału jest pokazanie, że jeśli dwa różne węzły są reprezentowane przez ten sam dwuwymiarowy rysunek, to są równoważne.

**Definicja 2.6.** *Rzutem na płaszczyznę nazywamy...*

Rzuty na płaszczyznę różnych (nierównoważnych) węzłów mogą być równe. Chcemy jednak mówić o takich "ładnych" rzutach...

**Definicja 2.7.** Rzutem regularnym nazywamy takie rzutowanie wężła, że...

Diagram to rzut + info o góra-dół.

**Definicja 2.8.** Diagramem wężła nazywamy...

Trzeba wyraźnie powiedzieć, że różne węzły mogą mieć ten sam diagram (np. w diagramie nie ma info o tym, jak wysoko jeden łuczek przechodzi pod drugim). Okazuje się jednak, że jeśli dwa różne węzły mają ten sam diagram, to są one równoważne. Aby to udowodnić potrzebujemy zdefiniować kilka pojęć pomocniczych...

**Definicja 2.9.** Mówimy, że dwa węzły  $(p_i), (q_j)$  są od siebie odległe o mniej, niż  $t$ , gdy mają tyle samo wierzchołków i gdy dla każdej pary wierzchołków zachodzi  $d(p_k, q_k) < t$ .

**Twierdzenie 2.10.** Niech  $K$  będzie węzłem o uporządkowanym zbiorze wierzchołków  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ . Dla każdego  $\epsilon > 0$  istnieje węzeł  $K'$  o zbiorze wierzchołków  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ , który jest odległy od węzła  $K$  o nie więcej, niż  $\epsilon$ , oraz jego rzut na płaszczyznę  $OXY$  jest regularny.

**Twierdzenie 2.11.** Jeśli węzeł  $K$  ma regularny rzut na płaszczyznę  $OXY$ , to istnieje taka  $\delta > 0$ , że dla każdego węzła  $K'$  odległego od  $K$  o mniej, niż  $\delta$  węzły  $K, K'$  są równoważne, oraz  $K'$  również ma rzut regularny.

**Twierdzenie 2.12.** Jeśli dwa węzły  $K$  oraz  $J$  mają ten sam diagram, to są równoważne.

Terminologia: łuki, skrzyżowania, overpass, underpass - chciałbym to sensownie przetłumaczyć, bo wygodnie by było mieć jednosłowne nazwy na te pojęcia.

ćwiczenie: liczba skrzyżowań = liczba łuków.

## 2.4 Orientacja wężła

ble, ble, ble... Węzeł to taki uporządkowany zbiór skończony. Jak go cyklicznie spermutujemy, albo odwrócimy kolejność jego elementów, to otrzymamy ten sam węzeł. O ile rąbniecie naszego porządku cyklem wydaje się nie zaburzać porządku krawędzi naszego wężła, o tyle odwrócenie kolejności elementów, już tak...

**Definicja 2.13.** Węzłem zorientowanym nazywamy...

Na zbiorze węzłów zorientowanych można położyć relację równoważności podobną do tej, którą zdefiniowaliśmy wcześniej. Musimy jeszcze żądać, żeby ciąg elementarnych operacji nie zmieniał orientacji naszego wyjściowego wężła...

**Definicja 2.14.** Zorientowane węzły nazywamy równoważnymi, gdy...

Gdyby równoważność w szerszym sensie implikowała równoważność węzłów zorientowanych, powyższa definicja byłaby nudna. Tak na szczęście nie jest, istnieje przykład dwóch węzłów równoważnych, ale nie równoważnych w sensie orientacji.

**Definicja 2.15.** Węzłem odwrotnie zorientowanym nazywamy węzeł zorientowany  $(p_n, p_{n-1}, \dots, p_1)$  powstały z węzła... i oznaczamy  $K^r$ .

## 2.5 Ruchy Reidemeister'a

W tym podrozdziale przedstawimy pierwsze poważne narzędzie, które w wielu przypadkach pozwoli nam rozstrzygnąć, czy dwa węzły są równoważne, czy też nie. Metody kombinatoryczne, ble, ble, ble...

Wcześniej pokazaliśmy, że problem równoważności węzłów można próbować rozstrzygać posługując się diagramami tych węzłów. Sformułujemy i udowodnimy twierdzenie wiążące...

**Definicja 2.16.** Dwa diagramy uważa się za równoważne, gdy wykonując skończoną liczbę przekształceń zwanych ruchami Reidemeister'a, można z jednego diagramu otrzymać drugi

**Definicja 2.17.** Ruchy Reidemeister'a - rysunki.

Trzy ruchy wraz z ich odwrotnościami.

**Twierdzenie 2.18.** (Reidemeister'a) Dwa węzły są równoważne, wtedy i tylko wtedy, gdy ich diagramy są równoważne.

Trochę pozachwycam się tym twierdzeniem i prostotą dowodu, uzasadnię, czemu przyjąłem taką definicję i wystarczy...

### 3 Kolorowania węzłów

W niniejszej części zostanie przedstawione zagadnienie kolorowania węzłów. Podana zostanie definicja kolorowania, oraz warunki które muszą zostać spełnione aby węzeł mógł zostać w określony sposób pokolorowany. Następnie zdefiniowane zostaną równania kolorowań oraz macierze kolorowań. Ostatnim etapem będzie wprowadzenie macierzy kolorowań jako niezmiennika węzłów.

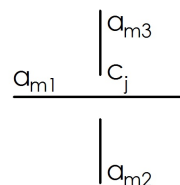
#### 3.1 Kolorowanie diagramów

Niech  $K$  będzie węzłem zorientowanym,  $L$  jego diagramem,  $A$  zbiorem łuków,  $C = \{c_1, \dots, c_k\}$  zbiorem skrzyżowań.

**Definicja 3.1.** Diagram  $L$  jest kolorowalny modulo  $n \in \mathbb{N}$ , gdy każdemu łukowi diagramu  $L$  można przyporządkować liczbę  $a_i \in \{0, \dots, n-1\}$  taką że:

1. Dla każdego skrzyżowania  $c_j$  spełnione jest równanie kolorowania  

$$a_{m2} + a_{m3} - 2a_{m1} \equiv 0 \pmod{n}$$
2. Kolorowanie nie jest stale, tzn istnieją łuki  $a_{m1}, a_{mj}$  którym przyporządkowano różne liczby.



Przyporządkowanie spełniające powyższe własności nazywa się kolorowaniem diagramu mod  $n$ .

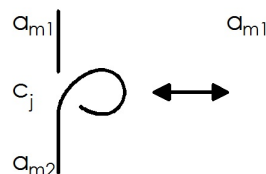
**Twierdzenie 3.2.** Kolorowalność modulo  $n$  jest niezmiennikiem węzła.

*Dowód.* Dwa węzły  $L_1, L_2$  są równoważne jeżeli istnieje ciąg ruchów Reidemeistera przekształcający  $L_1$  w  $L_2$ . Wystarczy zatem sprawdzić że kolorowalność modulo  $n$  nie zmienia się po wpływie ruchów Reidemeistera.

1. Pierwszy ruch Reidemeistera:

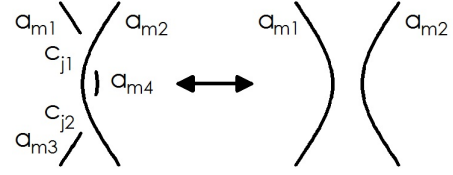
Dla skrzyżowania  $c_j$  spełnione jest równanie  

$$a_{m1} + a_{m2} - 2a_{m2} \equiv 0 \pmod{n}.$$
Zatem  $a_{m1} \equiv a_{m2}$ .



2. Drugi ruch Reidemeistera:

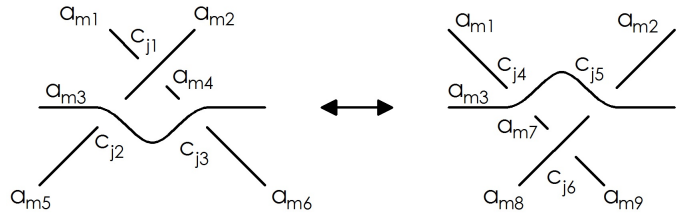
Dla skrzyżowania  $c_{j1}$  mamy  $a_{m1} + a_{m4} - 2a_{m2} \equiv 0 \pmod n$ . Dla skrzyżowania  $c_{j2}$ ,  $a_{m3} + a_{m4} - 2a_{m2} \equiv 0 \pmod n$ . Stąd  $a_{m1} \equiv a_{m3} \pmod n$ .



3. Trzeci ruch Reidemeistera:

Dla skrzyżowania  $c_{j2}$  mamy  $a_{m5} + a_{m2} - 2a_{m3} \equiv 0 \pmod n$ . Analogicznie dla skrzyżowania  $c_{j5}$ ,  $a_{m8} + a_{m2} - 2a_{m3} \equiv 0 \pmod n$ . Stąd  $a_{m8} \equiv a_{m5} \pmod n$ . W drugim przypadku mamy:

$$\begin{aligned} a_{m4} &\equiv 2a_{m2} - a_{m1} \cdot \\ a_{m6} &\equiv 2a_{m3} - a_{m4} \equiv \\ &\equiv 2a_{m3} - 2a_{m2} + a_{m1} \cdot \\ a_{m8} &\equiv 2a_{m3} - a_{m2} \cdot \\ a_{m7} &\equiv 2a_{m3} - a_{m1} \cdot \\ a_{m9} &\equiv 2a_{m8} - a_{m7} \equiv \\ &\equiv 2a_{m3} - 2a_{m2} + a_{m1} \equiv a_{m6} \cdot \end{aligned}$$



□

**Lemat 3.3.** Jeżeli dla diagramu  $L$  istnieje kolorowanie  $\{a_1, \dots, a_k\}$ , to dla każdego  $l \in \mathbb{N}$   $\{a_1 + l, \dots, a_k + l\}$  też jest kolorowaniem.

*Dowód.* Dla każdego  $c_j$  spełnione jest:

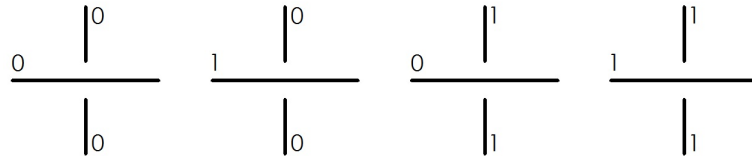
$$a_{m11} + a_{m2} - 2a_{m3} \equiv 0 \pmod n. \text{ Wobec czego}$$

$$a_{m1} + l + a_{m2} + l - 2a_{m3} - 2l \equiv 0.$$

□

**Wniosek:** Jeśli diagram jest kolorowalny to istnieje kolorowanie takie że  $a_1 = 0$ .

**Kolorowanie modulo 2** Jeżeli węzeł jest kolorowalny modulo 2 to dla każdego skrzyżowania zachodzi jedna z czterech możliwości:



W każdym przypadku kolory łuków leżących po przeciwnych stronach skrzyżowania są jednakowe. Startując w dowolnym punkcie węzła i przechodząc go w wybranym kierunku otrzymamy że każdy łuk należący do tej samej komponenty spójności co punkt startowy ma przyporządkowany jednakowy kolor. Zatem węzeł może być kolorowany mod 2  $\Leftrightarrow$  węzeł ma więcej niż jedną komponentę spójności.

**Definicja 3.4.** Węzeł  $K$  jest podzielny jeśli ma conajmniej 2 komponenty spójności, oraz  $\exists U, V$  otwarte,  $U \cap V = \emptyset$ , takie że  $K \subseteq U \cup V$ ,  $K \cap U \neq \emptyset$ ,  $K \cap V \neq \emptyset$ .

**Lemat 3.5.** Jeżeli węzeł  $K$  jest podzielny to,  $\forall n > 1$  diagram  $L$  jest kolorowalny mod  $n$ .

*Dowód.* Niech każdy łuk zawarty w  $U$  będzie pokolorowany na kolor 0, łuk zawarty w  $V$  na kolor 1. Takie przyporządkowanie jest kolorowaniem. Równania skrzyżowań zachodzą dla każdego  $n$ . □

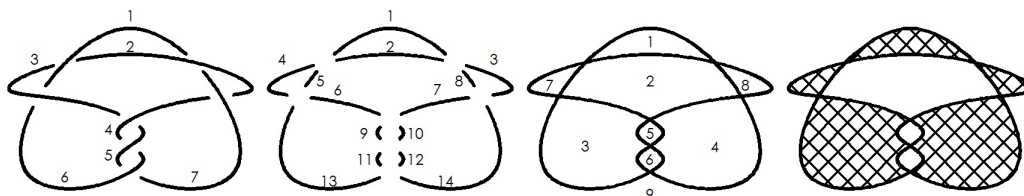
### 3.2 Równania kolorowań

**Definicja 3.6.** Krótki łuk, to część łuku który przechodzi dokładnie przez 2 skrzyżowania.

**Definicja 3.7.** Region to komponenta spójności  $\mathbb{R}^2 \setminus L$ .

**Definicja 3.8.** Szachownica diagramu to przyporządkowanie każdemu regionowi jednego z 2 kolorów tak aby każdy krótki łuk oddzielał regiony o różnych kolorach.

**Przykład:** Węzeł  $7_3$  posiada 7 łuków, 14 krótkich łuków, 9 regionów.

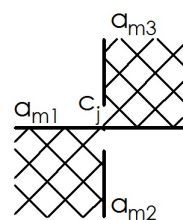
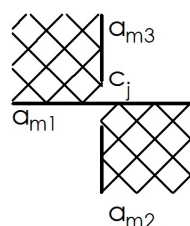


Dla każdego skrzyżowania  $c_j$  równanie można przedstawić na 2 sposoby.

**Definicja 3.9.** Wybór znaku równania nazywa się dobrym, gdy zachodzi następujący warunek.

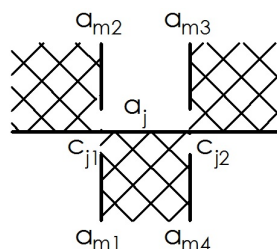
$$a_{m2} + a_{m3} - 2a_{m1} \equiv 0 \pmod n, \text{ dla}$$

$$2a_{m1} - a_{m2} - a_{m3} \equiv 0 \pmod n, \text{ dla}$$



**Twierdzenie 3.10.** Suma równań po wszystkich skrzyżowaniach równa się 0, o ile znaki równań zostały wybrane dobrze.

*Dowód.* Ustalmy dowolny krótki łuk  $a_j$ .  $a_j$  pojawia się dokładnie w 2 równaniach skrzyżowań. Łuk łączy 2 skrzyżowania  $c_{j1}$  oraz  $c_{j2}$ . Istnieje region  $X_1$ , taki że oba skrzyżowania graniczą z  $X_1$ . Bez straty ogólności  $X_1$  jest białe.



Ponieważ znaki równań zostały wybrane dobrze, znak  $a_j$  w równaniu skrzyżowania  $c_{j1}$ , jest przeciwny do znaku  $a_j$  w równaniu skrzyżowania  $c_{j2}$ . Wobec czego równania sumują się do 0.  $\square$

### 3.3 Macierze kolorowań

### 3.4 Grupy kolorowań

## 4 Wielomian Jonesa

W tej sekcji zbadamy inny wielomianowy niezmiennik węzłów, wielomian Jonesa. Został odkryty w 1984 roku przez Vaughana Jonesa, znajduje zastosowanie między innymi przy badaniu węzłów przemiennych.

### 4.1 Nawias Kauffmana

Zacniemy od zdefiniowania nawiasu Kauffmana. Przypomnijmy, wielomian Laurenta zmiennej  $X$  to formalny symbol  $f = a_r X^r + \dots + a_s X^s$ , gdzie  $r, s, a_r, \dots, a_s$  są całkowite i  $r \leq s$ .

**Definicja 4.1.** Nawias Kauffmana  $\langle D \rangle$  dla diagramu splotu  $D$  to wielomian Laurenta zmiennej  $A$ , który jest niezmienniczy ze względu na gładkie deformacje diagramu, a przy tym spełnia trzy aksjomaty:

1.  $\langle \bigcirc \rangle = 1$
2.  $\langle D \sqcup \bigcirc \rangle = (-A^{-2} - A^2) \langle D \rangle$
3.  $\langle \nearrow \rangle = A \langle \rangle \langle \rangle + A^{-1} \langle \nwarrow \rangle$

Tutaj  $\bigcirc$  oznacza standardowy diagram dla niewęzła,  $D \sqcup \bigcirc$  jest diagramem, który powstaje z  $D$  przez dodanie nieprzecinającej go krzywej zamkniętej, zaś trzy symbole  $\nearrow$ ,  $\rangle \langle$  oraz  $\nwarrow$  odnoszą się do diagramów, które są identyczne wszędzie poza małym obszarem. Diagramy  $\rangle \langle$  oraz  $\nwarrow$  nazywa się odpowiednio dodatnim (prawym) i ujemnym (lewym) wygładzeniem  $\nearrow$ .

**Lemat 4.2.** Nawias Kauffmana dowolnego diagramu można wyznaczyć w skończonym czasie.

*Dowód.* Jeżeli diagram  $D$  ma  $n$  skrzyżowań, to nieustanne stosowanie aksjomatu trzeciego pozwala na zapisanie  $\langle D \rangle$  jako sumy  $2^n$  składników, z których każdy jest po prostu zamkniętą krzywą i ma trywialny nawias ( $\langle \bigcirc \rangle = 1$ ). Nawias sumy wyznacza się korzystając z drugiego aksjomatu.  $\square$

Przedstawimy teraz wpływ ruchów Reidemeistera na nawias Kauffmana.

**Lemat 4.3.** Pierwszy ruch Reidemeistera zmienia nawias Kauffmana zgodnie z poniższą regułą. Pozostałe ruchy Reidemeistera nie zmieniają nawiasu.

$$\langle \text{Ruch 1} \rangle = -A^{-3} \langle \text{Ruch 2} \rangle \cdot \langle \text{Ruch 3} \rangle = \langle \text{Ruch 4} \rangle \cdot \langle \text{Ruch 5} \rangle = \langle \text{Ruch 6} \rangle.$$

*Dowód.* Pierwszy ruch Reidemeistera:

$$\langle \text{Ruch 1} \rangle \stackrel{K3}{=} A \langle \text{Ruch 2} \rangle + A^{-1} \langle \text{Ruch 3} \rangle \stackrel{K2}{=} A \langle \text{Ruch 4} \rangle + A^{-1}(-A^{-2} - A^2) \langle \text{Ruch 5} \rangle = -A^{-3} \langle \text{Ruch 6} \rangle$$

Pierwsza równość wynika z K3, druga z K2, trzecia jest oczywista. Dla drugiego ruchu:

$$\begin{aligned} \langle \text{Ruch 7} \rangle &\stackrel{K3}{=} A \langle \text{Ruch 8} \rangle + A^{-1} \langle \text{Ruch 9} \rangle \stackrel{K1}{=} -A^{-2} \langle \text{Ruch 10} \rangle + A^{-1} \langle \text{Ruch 11} \rangle \\ &\stackrel{K3}{=} -A^{-2} \langle \text{Ruch 12} \rangle + A^{-1} A \langle \text{Ruch 13} \rangle + A^{-1} A^{-1} \langle \text{Ruch 14} \rangle = \langle \text{Ruch 15} \rangle \end{aligned}$$

Dla trzeciego ruchu:

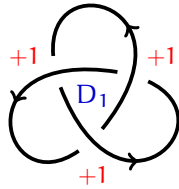
$$\begin{aligned} \left\langle \text{diagram} \right\rangle &\stackrel{\mathbb{K}3}{=} A \left\langle \text{diagram} \right\rangle + A^{-1} \left\langle \text{diagram} \right\rangle \stackrel{\mathbb{R}2}{=} A \left\langle \text{diagram} \right\rangle + A^{-1} \left\langle \text{diagram} \right\rangle \\ &\stackrel{\mathbb{R}2}{=} A \left\langle \text{diagram} \right\rangle + A^{-1} \left\langle \text{diagram} \right\rangle \stackrel{\mathbb{K}3}{=} \left\langle \text{diagram} \right\rangle \end{aligned}$$

korzystaliśmy tu z własności drugiego ruchu.  $\square$

## 4.2 Spin

Kolejnym składnikiem jest spin.

**Definicja 4.4.** Niech  $D$  będzie diagramem zorientowanego splotu lub węzła. **Spinem**  $D$  jest  $w(D) = \sum_c \text{sign } c$ , gdzie sumowanie przebiega po wszystkich skrzyżowaniach.



**Lemat 4.5.** Pierwszy ruch Reidemeistera zmniejsza spin o jeden, pozostałe nie mają wpływu.

$$w \left( \text{diagram} \right) = w \left( \text{diagram} \right) - 1$$

Dowód. Proste ćwiczenie.  $\square$

## 4.3 Wielomian Jonesa

**Definicja 4.6.** Wielomian Jonesa zorientowanego splotu to wielomian Laurenta  $V(L) \in \mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$  określony przez

$$V(L) = \left[ (-A)^{-3w(D)} \langle D \rangle \right]_{t^{1/2} = A^{-2}},$$

gdzie  $D$  to dowolny diagram dla  $L$ .

**Twierdzenie 4.7.** Wielomian Jonesa jest niezmiennikiem zorientowanych splotów.

Dowód. Skorzystamy z tego, że indeks zaczeplenia jest niezmiennikiem. Wystarczy pokazać niezmienniczość  $(-A)^{-3w(D)} \langle D \rangle$  na ruchy Reidemeistera. ale

$$\begin{aligned} (-A)^{-3w} \left( \text{diagram} \right) \left\langle \text{diagram} \right\rangle &= (-A)^{-3w} \left( \text{diagram} \right)^{+3} (-A)^{-3} \left\langle \text{diagram} \right\rangle \\ &= (-A)^{-3w} \left( \text{diagram} \right) \left\langle \text{diagram} \right\rangle. \quad \square \end{aligned}$$




#### 4.4 Relacja kłębiasta

Dotychczas wyznaczyliśmy wielomian Jonesa jedynie dla trywialnych splotów. Spowodowane jest to tym, że chociaż nawias Kauffmana jest przydatny przy dowodzeniu różnych własności, to zupełnie nie nadaje się do obliczeń. Dużo lepszym narzędziem jest następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 4.8** (relacja kłębiasta). *Wielomian Jonesa spełnia równość  $V(\bigcirc) = 1$  oraz relację*

$$t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) + (t^{-1/2} - t^{1/2})V(L_0) = 0,$$

gdzie  $L_+$ ,  $L_-$ ,  $L_0$  to zorientowane sploty, które różnią się jedynie na małym obszarze: .

*Dowód.* Wyrażmy wielomian Jonesa przez nawias Kauffmana i spin. Chcemy pokazać, że

$$A^4(-A)^{-3w(L_+)}\langle \nearrow \rangle - A^{-4}(-A)^{-3w(L_-)}\langle \searrow \rangle + (A^2 - A^{-2})(-A)^{-3w(L_0)}\langle \rangle \langle \rangle = 0.$$

Ale  $w(L_{\pm}) = w(L_0) \pm 1$ , zatem to jest równoważne z  $-A\langle \nearrow \rangle + A^{-1}\langle \searrow \rangle + (A^2 - A^{-2})\langle \rangle \langle \rangle = 0$ . Z definicji nawiasu Kauffmana wnioskujemy, że  $\langle \nearrow \rangle = A\langle \rangle \langle \rangle + A^{-1}\langle \searrow \rangle$  i  $\langle \searrow \rangle = A\langle \nearrow \rangle + A^{-1}\langle \rangle \langle \rangle$ . Pierwsze równanie przemnożmy przez  $A$ , drugie przez  $A^{-1}$ , a następnie dodajmy je do siebie. Wtedy otrzymamy  $A\langle \nearrow \rangle - A^{-1}\langle \searrow \rangle = A^2\langle \rangle \langle \rangle - A^{-2}\langle \rangle \langle \rangle$ .  $\square$

Przykład.  $V(\bigcirc \bigcirc) = -t^{5/2} - t^{1/2}$  (splot Hopfa),  $V(\bigcirc \bigcirc \bigcirc) = -t^4 + t^3 + t$  (trójlistnik).

#### 4.5 Odwrotności, lustra i sumy

**Twierdzenie 4.9.** *Niech  $L$  będzie zorientowanym splotem.  $V(rL) = V(L)$ ,  $V(mL)(t) = V(L)(t^{-1})$ .*

**Wniosek 4.10.** *Wielomian Jonesa nie zależy od orientacji węzła (ale nie splotu!).*

**Wniosek 4.11.** *Trójlistnik nie jest równoważny ze swoim lustrem.*

**Twierdzenie 4.12.** *Niech  $L, M$  będą zorientowanymi splotami, zaś  $J, K$ : zorientowanymi węzłami.*

1.  $V(L \sqcup M) = (-t^{1/2} - t^{-1/2})V(L)V(M)$ ,
2.  $V(J \# K) = V(J)V(K)$ .

## Starsze materiały

*Linking number*: suma znaków skrzyżowań, rozróżnia splot Hopfa od Whiteheada. *Crossing number*: najmniejsza możliwa liczba skrzyżowań na diagramie. Nowe węzły: lustro, odwrócenie, suma rozłączna i suma spójna.

**Wielomian Alexandera**: wyznacznik pewnej macierzy ze skreśloną kolumną i wierszem. **Wielomian Jonesa**  $V$ : należy do  $\mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$ ; wielomian niewęzła to 1, spełniona jest *skein relation*, to znaczy:  $t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) + (t^{-1/2} - t^{1/2})V(L_0) = 0$ .

Adams: notacja Dowkera, Conwaya. Węzły torusowe (5.1), węzły satelitarne i hiperboliczne. Warkocze (5.4), wielomiany HOMFLY (6.3). *Bachelor's unknotting*. Arf.