单摆运动中的混沌

商泽淦　2013301020030　物理弘毅

摘要

这篇报告讨论了受驱动阻尼摆的运动从线性到非线性的变化，并利用庞加莱映射讨论了驱动力矩对受驱动阻尼摆运动的影响，通过这一非线性系统，介绍了混沌理论。

关键词：受驱动阻尼摆，非线性振动，混沌理论

1. 介绍

传统物理学为各种现象建立了各种线性模型，这些模型都取得了巨大的成功，然而，随着人们的研究更加深入，已有的线性模型开始不足以解释所有的现象。线性意味着方程的解满足线性叠加原理，因此意味着系统的简单性，许多自然现象在一定程度上都可以近似为线性模型，然而，自然的本质是复杂的，更多的情况下，人们无法做到这种近似，需要引入非线性模型。

非线性物理学包括孤立波、混沌以及分形这三个主要部分，其中混沌是一种由特定规律支配的貌似随机进程。理论上系统在任意时刻的状态被初始状态所确定，但由于决定这一运动状态的初始数据并不完全精确，预测的结果必然会产生误差，在混沌体系中，由于对初始量的敏感性，初始数据所产生的误差将会非常巨大，甚至于使得结果完全不可预测。混沌作为非线性科学的前沿领域，深刻体现了有序与无序，确定性与随机性的同一，并且在各个领域取得了空前的成就。

混沌现象可在相当广泛的动力系统中发生，其中，就包含受驱动阻尼摆的运动。虽然整个系统模型具有确定性，但系统本身对运动状态初始值极为敏感，因此仍然是不可预测的。本篇报告主要是利用数值计算的方法，来研究受驱动阻尼摆的运动。

2. 正文

2.1 非线性振动系统

受驱动阻尼摆是一个非线性振动系统，通常可用如下运动方程描述：

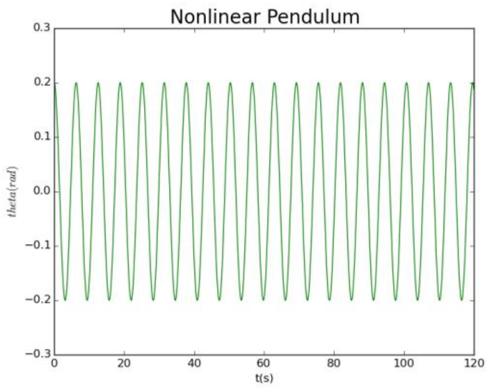
$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{dt}^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta - q\frac{d\theta}{dt} + F_D\sin\Omega_D t$$

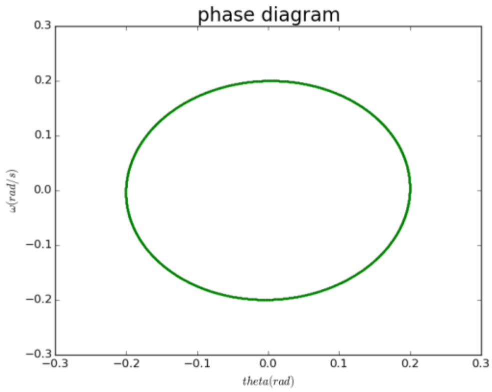
为简便起见，对这个运动方程进行无量纲化，可得：

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{dt}^2} = -\sin\theta - q\frac{d\theta}{dt} + F_D\sin\Omega_D t$$

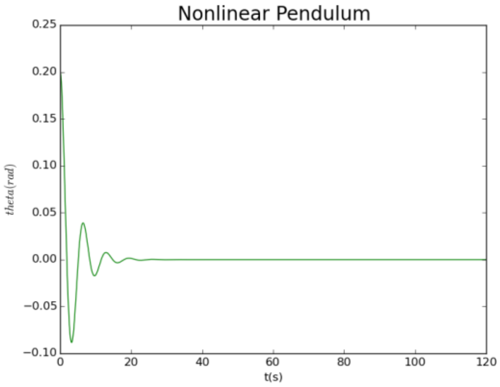
利用 Euler-Cromer method，可以求得方程的数值解。

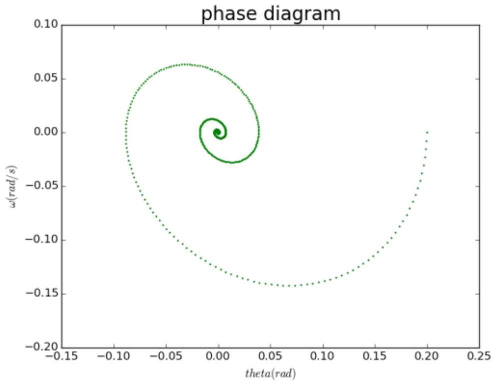
在无阻尼，无驱动的情况下，即$q = F_D = 0$，在小振幅时，可对方程进行线性近似，即可得到简谐振动。





在有阻尼，无驱动($q \neq 0; F_D = 0$) 的情况下，取$q = 1/2$，小振幅情况下可得到：

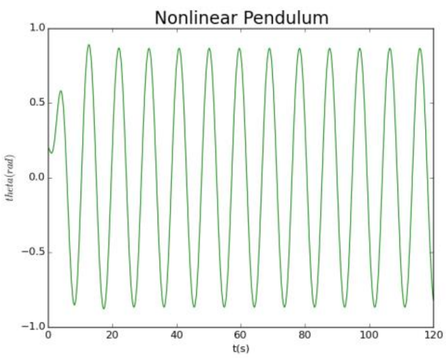


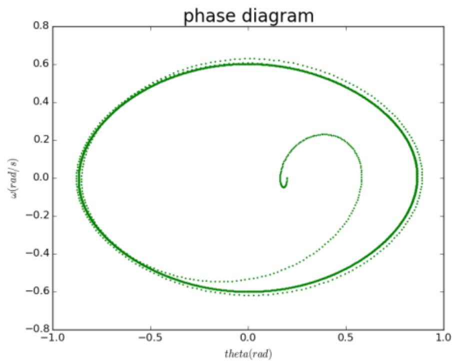


这时单摆的运动相图是一个对数螺旋线，螺旋线中间的空间点被称为“吸引子”，又叫做不动点吸引子。

在有阻尼，有驱动($q \neq 0; F_D \neq 0$)的情况下。单摆会呈现出令人意想不到的复杂性，随着F_D的逐渐增大，单摆的运动会变得越来越难以预测。控制初始的角速度$\omega_0 = 0$，初始角度$\theta_0 = 0.2$，$q = 1/2$，$\Omega_D = 2/3$。

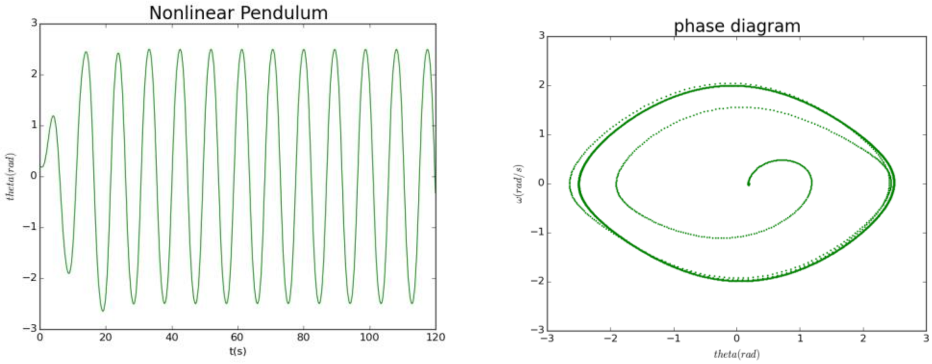
(1) $F_D = 0.5$





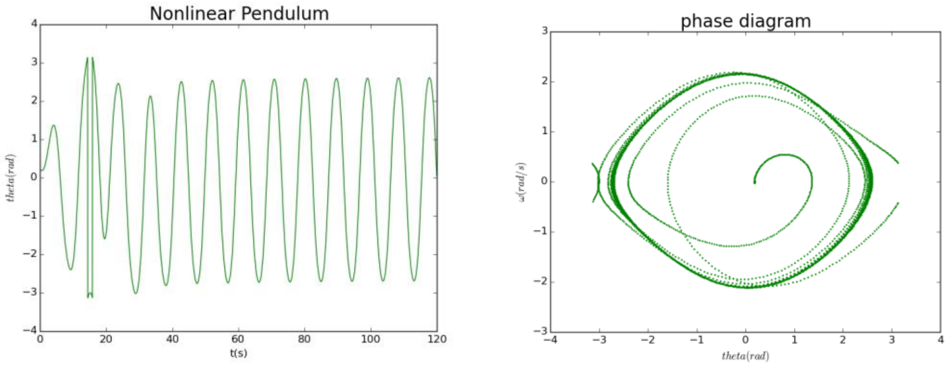
可以看到，在F_D较小的时候，单摆的相图仍然呈现为椭圆形，具有一定的对称性。此时的单摆仍然作单周期运动，在庞加莱截面上呈现为一个单点。

(2) $F_D = 0.9$



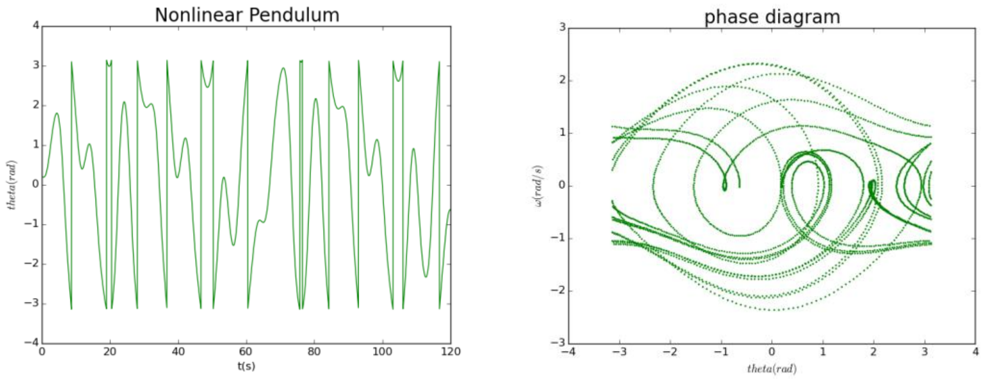
随着F_D逐渐增大，单摆的相图开始逐渐变为蛋形，此时在这里发生了对称性破缺，虽然单摆此时仍应该做单周期运动，但可以观察到，此时的相图已经逐渐变得复杂起来。

(3) $F_D = 1.0$

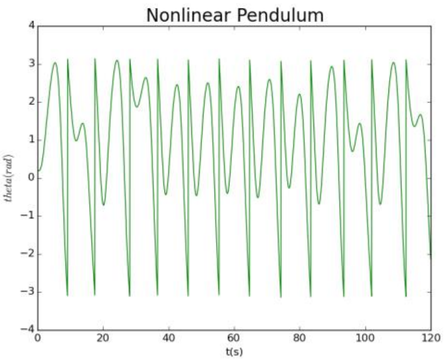


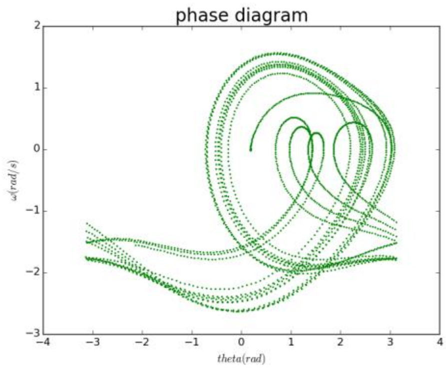
在$F_D \approx 1$处，可以发现，相轨线开始偏离之前闭合的轨道，逐渐变得复杂起来，这时的相轨线虽然在$[-\pi, \pi]$不断环绕，但已经无法再形成闭合轨道，达到原来的周期性重复状态。

(4) $F_D = 1.2$



(5) $F_D = 1.5$





随着F_D的更进一步增大，单摆的相轨线开始变得更加复杂，甚至于无序，此时仅靠相图本身已经无法得到更多关于单摆运动状态的信息，需要引入庞加莱截面进行分析。

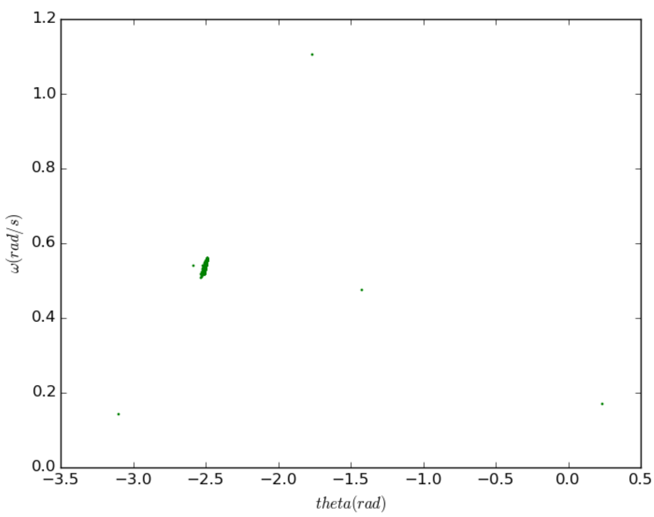
2.2 庞加莱截面

相图可把非线性系统形象地描绘出来，但随着阻尼和驱动力的引入，相图会变得更加复杂。庞加莱在 n 维相空间里取一常数 n-1 维截面，称为”庞加莱截面”，研究相轨线在这个截面上的映射，会使得问题得到简化。

对于单周期运动，由于轨线周期性重复穿过同一个点，所以在庞加莱截面上只会留下一个单点。同理，对于具有 n 个不同周期的多周期运动，轨线在庞加莱截面上会留下 n 个点。推广到无规则运动，轨线就会在庞加莱截面上留下无数个点。

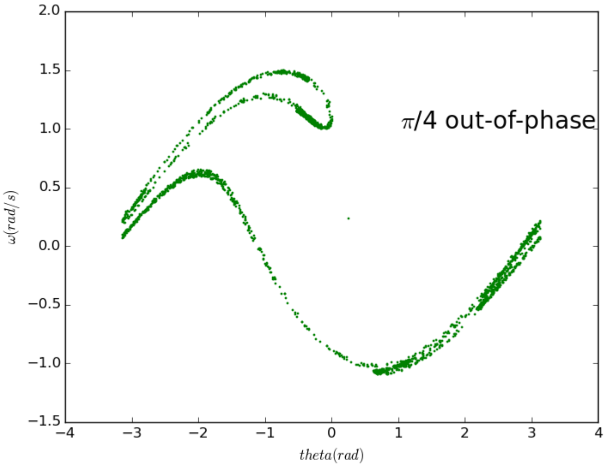
以$F_D = 1.0, 1.2, 1.5$为例，取$\mathrm{t} = 2\mathrm{n}\pi/\Omega_\mathrm{D} + \pi/4$:

$F_D = 1.0$时，

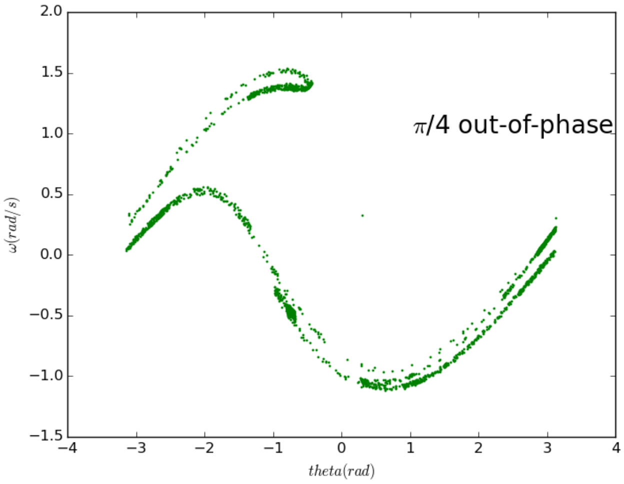


即在庞加莱截面上，相点处于一条曲线上，故此时单摆做准周期运动，接近于周期运动。

$F_D = 1.2$时，



$F_D = 1.5$时，



此时相点开始从曲线上脱离开来。可以发现，虽然相图开始变得复杂，相轨线在庞加莱截面上的映射依然呈现出某种规律。

3. 总结

通过对单摆相图和其在庞加莱截面上映射的研究，我们可以发现，即使是一个确定的系统，要能够通过初始测量值来预言它之后的状态，在某些时候也会是相当困难，甚至是不可能的。受驱动的阻尼摆振动在驱动力足够大的时候，会出现混沌现象。

这种混沌现象貌似随机，显得杂乱无章，但却能够显现出某种结构方面的特殊规律。事实上，混沌具有非常丰富的内部结构层次，在不同层次上，其结构具有相似性。甚至，在不同系统之间跨尺度也具有相似性。

随着技术的发展，在气象、航空航天、交通管理，甚至于物理学、生物学的研究方面，混沌理论的应用变得越来越多。

参考文献

[1] Giodano, N.J., Nakanishi, 计算物理第二版. 清华大学出版社.

[2] Chaos Theory, Wikipedia

[3] 近代物理光学讲座：从单摆到混沌. 武汉大学物理与科学技术学院

[4] 徐少博，计算物理第九次作业

[6] 张琦， 计算物理第九次作业