Relações Topológicas e Interrogações

Paulo Trigo Silva

Topologia

Como é que os objectos espaciais interagem uns com os outros?

Ideia intuitiva:

Imaginem-se dois polígonos que se tocam (*meet*);

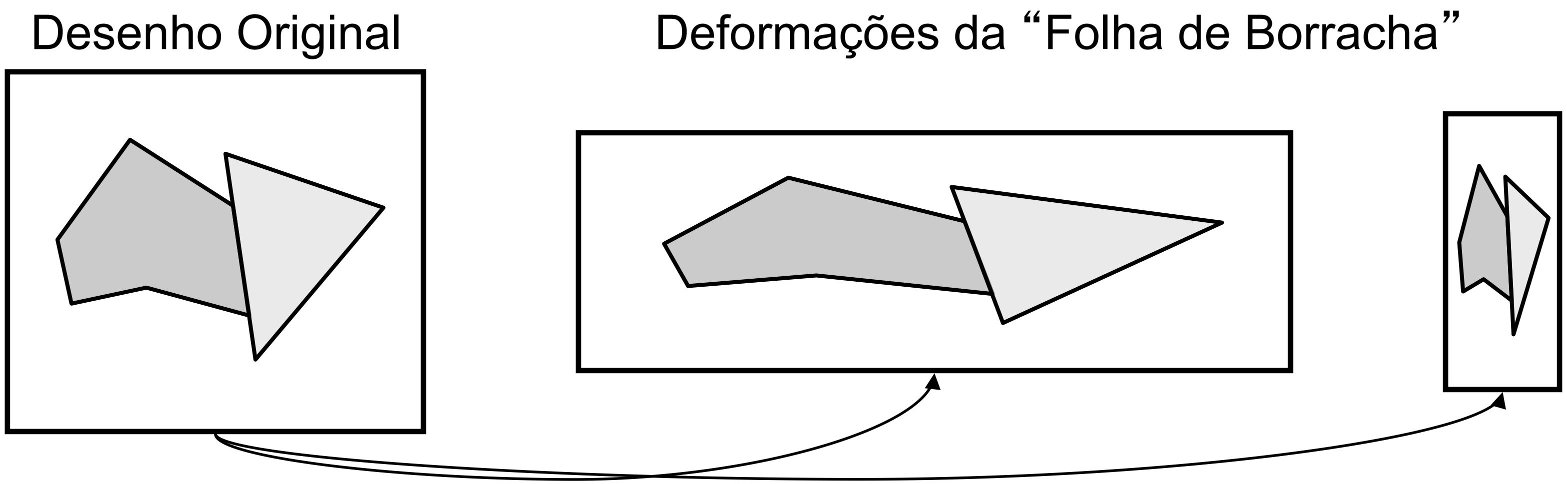
os polígonos estão desenhados sobre uma folha de borracha.

Como se transforma a relação entre os polígonos ao deformar-se a folha de borracha?

1. os polígonos afastam-se
2. os polígonos intersectam-se
3. os polígonos mantêm a fronteira

Paulo Trigo Silva

Topologia (cont.)



... os polígonos mantêm a fronteira

Neste exemplo a relação topológica é a de “tocar” (*meet*)

Ou seja, *meet* é uma relação (propriedade) topológica e o estudo das transformações (deformações) que preservam propriedades topológicas designa-se por *topologia*.

Paulo Trigo Silva

..Relação Topológica e não-Topológica

Considere-se o mapa da Europa com as fronteiras políticas dos países.

Países vizinhos tocam-se (*meet*) quer sejam desenhados na esfera ou no plano.

A área de um país pode definir uma relação topológica?

1. sim, porque se mantém proporcional com a dos outros países
2. não, porque se altera por deformação da superfície onde está inscrita
3. depende, porque pode haver deformações que preservem a área

Paulo Trigo Silva

Relações Topológicas e Interrogações

... a área altera-se por deformação da superfície onde está inscrita

... a área não permite estabelecer uma relação topológica

Algumas relações topológicas são:

tocar (***meet***), estar contido (***within***), sobrepor (***overlap***)

Duas interrogações comuns envolvendo relações topológicas:

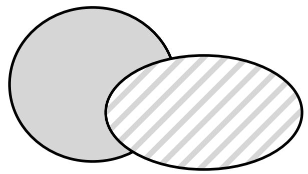
1. **Quais os objectos que têm uma relação R com um dado objecto?**
2. **Qual é a relação topológica entre os objectos A e B?**

Paulo Trigo Silva

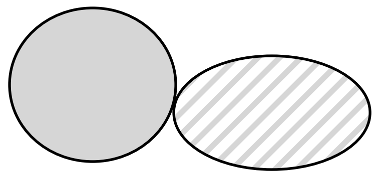
Modelo das 4-Intersecções (I_4)

- Intersectar **fronteiras (f)** e **interiores (i)** de duas regiões espaciais
  - permite identificar 4 relações topológicas – ff, ii, fi, if
  - ... e sobre elas caracterizar as relações de maior interesse prático

- e.g., sobrepor (***overlap***) corresponde à
  - intersecção não vazia das fronteiras (ff), e
  - intersecção não vazia dos interiores (ii)



- e.g., tocar (***meet***) corresponde à
  - intersecção não vazia das fronteiras (ff), e
  - intersecção vazia dos interiores (ii)

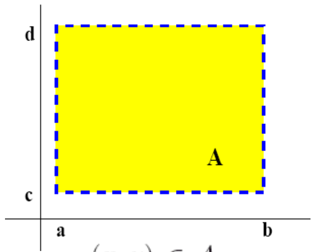


Estamos a assumir uma definição intuitiva dos conceitos de fronteira e de interior

A definição formal recorre às noções de conjunto aberto e fechado

... conjunto Aberto e Fechado

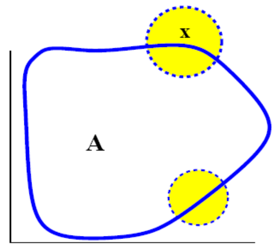
- Sejam r > 0 e $x_0 \in \mathbb{R}^n$. A **bola** de centro x_0 e raio r denota-se $B(x_0, r)$
  - e é dada por $B(\mathbf{x}_0, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r\}$
- Em $\mathbb{R}^2$ tem-se $x_0=(x_0, y_0)$ e $x=(x, y)$
  - pelo que $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$
  - logo $B(\mathbf{x}_0, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$
  - neste caso $B(x_0, r)$ chama-se **disco**



$(x, y) \in A$

$a < x < b$ e $c < y < d$

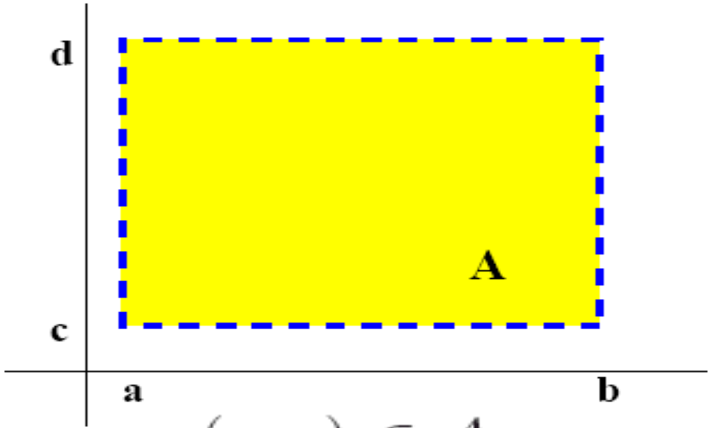
- Um conjunto de pontos S em $\mathbb{R}^2$ é **aberto** sse
  - para cada ponto $p \in S$ existir um $\varepsilon \in \mathbb{R}$, tal que
  - o **disco** de centro p e raio ε está contido em S



- Um conjunto de pontos S em $\mathbb{R}^2$ é **fechado** sse
  - $\mathbb{R}^2 - S$ é aberto

Exemplo – conjunto Aberto

Porque é que o conjunto A = (a, b) × (c, d) é aberto em $\mathbb{R}^2$?



$$(x, y) \in A$$

$$a < x < b \text{ e } c < y < d$$

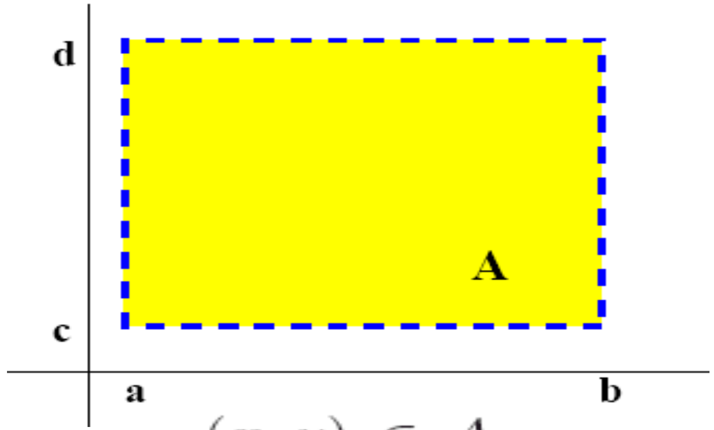
Ou seja,

para cada ponto (x, y) em A qual o ε tal que a bola de centro (x, y) e raio ε está contida em A?

Paulo Trigo Silva

Exemplo – conjunto Aberto (cont.)

Porque é que o conjunto A = (a, b) $\times$ (c, d) é aberto em $\mathbb{R}^2$?



$$(x, y) \in A$$

$$a < x < b \text{ e } c < y < d$$

Considere-se ε o menor número do conjunto:

{ |x – a|, |x – b|, |y – c|, |y – d| }, onde | | é a distância entre números reais

então, por exemplo, considerando r = ε/2, tem-se B((x, y), r) $\subset$ A

Paulo Trigo Silva

Conceito de Interior e de Fronteira

Admita-se a existência de um conjunto, A, não vazio de pontos;

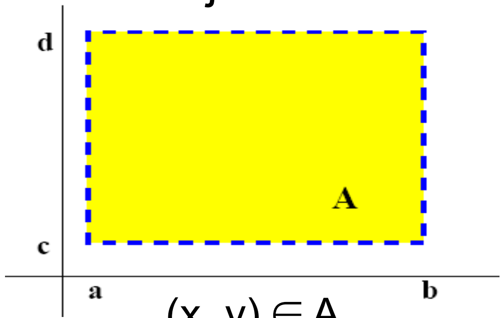
o conjunto A já foi também designado por região-espacial ou objecto-espacial

- $\mathbf{A}^{\mathbf{O}}$ denota o **interior** de A e define-se como
  - a união de todos os conjuntos abertos de A
  - i.e., o maior conjunto aberto contido em A
- [*definição auxiliar*] $\bar{\mathrm{A}}$ denota o fecho de A, define-se como
  - a intersecção de todos os conjuntos fechados que contêm A
- [*definição auxiliar*] $\boldsymbol{C}_{\mathbf{A}}$ denota complemento de A (em $\mathbb{R}^2$) e define-se
  - $\mathbb{R}^2$ – A, i.e. o conjunto de todos pontos não pertencentes a A
- δ**A** denota a **fronteira** de A e define-se (em $\mathbb{R}^2$) como
  - a intersecção do fecho de A com o fecho de $\mathbb{R}^2$ – A, i.e., $\bar{\mathrm{A}} \cap \overline{C}_{A}$

Paulo Trigo Silva

Exemplo – noção intuitiva

A é conjunto aberto



$(x, y) \in A$

$a < x < b$ e $c < y < d$

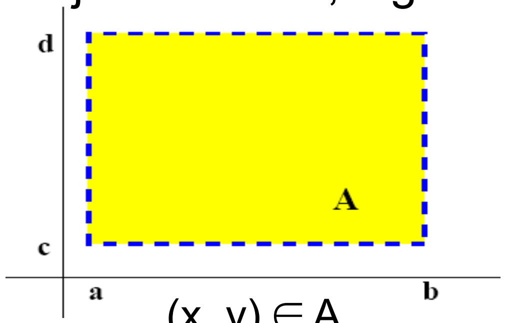
Considerando este conjunto A, representar graficamente os conjuntos:

1. **Interior de A**
2. **Fecho de A**
3. **Complemento de A**
4. **Fronteira de A**

Paulo Trigo Silva

Exemplo – noção intuitiva (cont.)

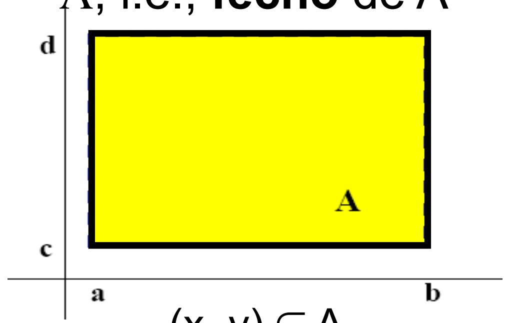
A é conjunto aberto, logo $A = A^O$



$(x, y) \in A$

$a < x < b$ e $c < y < d$

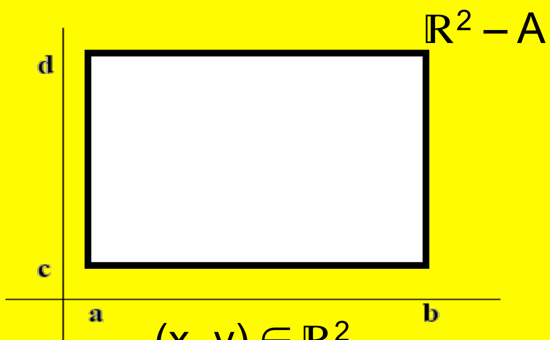
$\bar{A}$, i.e., **fecho** de A



$(x, y) \in A$

$a \leq x \leq b$ e $c \leq y \leq d$

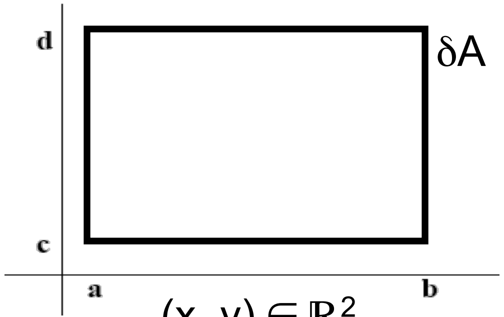
$\boldsymbol{C_A}$, i.e., **complemento** de A
e neste caso $\boldsymbol{C_A} = \boldsymbol{\overline{C}_A}$



$(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$b \leq x$ ou $x \leq a$ e $d \leq y$ ou $y \leq c$

δA, i.e., **fronteira** de A,
ou seja, $\bar{A} \cap C_A$



$(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$((x = a$ ou $x = b)$ e $c \leq y \leq d)$ ou

$((y = c$ ou $y = d)$ e $a \leq x \leq b)$

Paulo Trigo Silva

Algumas indicações úteis

- Fronteira (*boundary*)
  - é um conjunto de geometrias com a próxima dimensão mais baixa
  - do PONTO (dimensão zero) pelo que a sua fronteira é o conjunto vazio
  - do SEGMENTO DE RECTA são os seus dois pontos extremos
  - do POLÍGONO é a linha que separa o interior do exterior
- Interior (*interior*)
  - são os pontos que permanecem depois de se retirar a fronteira
  - do PONTO é o próprio ponto
  - do SEGMENTO DE RECTA é o conjunto de pontos entre os extremos
  - do POLÍGONO é a superfície dentro do polígono
- Exterior (*exterior*) ou Complemento (*complement*)
  - é o universo excepto o interior e a fronteira da geometria

Paulo Trigo Silva

Relações – propriedades e generalização (em $\mathbb{R}^2$)

$\mathbb{R}^2$ pode descrever-se como a união de A^O com δA e C_A. Ou seja,

$$A^O \cup \delta A \cup C_A = \mathbb{R}^2$$

O conjunto A^O é mutuamente exclusivo com δA e C_A. Ou seja,

$$A^O \cap \delta A = \varnothing$$

$$A^O \cap C_A = \varnothing$$

Generalizando, sejam duas regiões espaciais A e B
e seus interiores, A^O, B^O, e fronteiras δA, δB
então, **conhecer as suas relações topológicas é saber se as possíveis intersecções são ou não vazias.**

Paulo Trigo Silva

Relações Topológicas (com A^O, B^O, δA, δB)

Generalizando, sejam duas regiões espaciais A e B
e seus interiores, A^O, B^O, e fronteiras δA, δB
então, **conhecer as suas relações topológicas é saber se as possíveis intersecções são ou não vazias.**

Dados δA, A^O, δB, B^O ***e suas intersecções*** **(**$\delta A \cap \delta B$, $A^O \cap B^O$, $\delta A \cap B^O$, $A^O \cap \delta B$**)**
quantas diferentes combinações de $\varnothing$ ***e*** $\neg\varnothing$ ***existem:***

1. **Há 4; uma por cada intersecção**
2. **Há 8; quatro combinações com $\varnothing$ e quatro com $\neg\varnothing$, i.e., 4×2**
3. **Há 16; duas alternativas para cada intersecção, i.e., 2^4**
4. **Há 256; duas alternativas por conjunto em cada intersecção, i.e., 2^8**

Paulo Trigo Silva

Combinações Topológicas (com A^O, B^O, δA, δB)

Name	$\delta A \cap \delta B$	$A^o \cap B^o$	$\delta A \cap B^o$	$A^o \cap \delta B$
r_0	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
r_1	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
r_2	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
r_3	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
r_4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$
r_5	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$
r_6	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$
r_7	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$
r_8	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$
r_9	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$
r_{10}	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$
r_{11}	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$
r_{12}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$
r_{13}	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$
r_{14}	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$
r_{15}	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$

Cada combinação (4-tuplo) denota uma relação topológica.

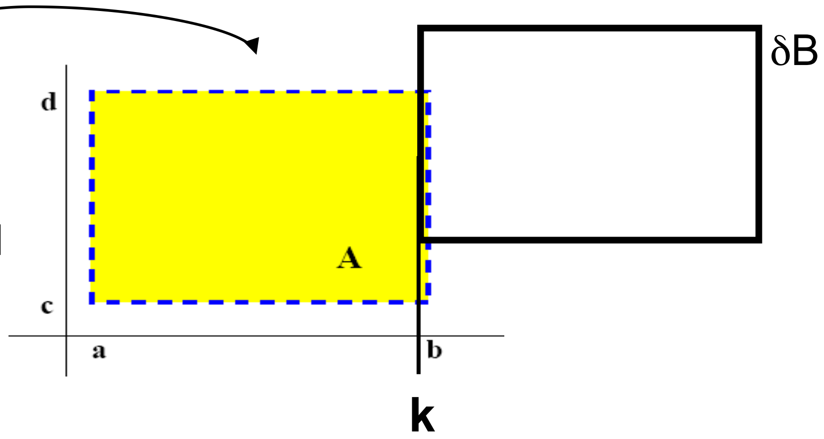
As relações são mutuamente exclusivas (um conjunto não pode ser $\emptyset$ e $\neg\emptyset$)

Uma propriedade: ($A^O \cap \delta B \neq \emptyset$) → ($A^O \cap B^O \neq \emptyset$)

Quando o interior de uma região, A, intersecta a fronteira de outra região, B, o que acontece à intersecção dos interiores dessas regiões?

(x, y) ∈ A

a < x < b e c < y < d



Neste exemplo, a região B tem que ter x = k, onde k < b, pois se k = b o interior de A e B não intersectam

Mas se k < b, então existem pontos entre k e b, i.e., existem x_0 tal que k < x_0 < b e esse x0 pertence ao interior de A (pois x_0 < b) e ao interior de B (k < x_0)

Paulo Trigo Silva

Relações Topológicas Impossíveis

Name	$\delta A \cap \delta B$	$A^o \cap B^o$	$\delta A \cap B^o$	$A^o \cap \delta B$
r_0	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
r_1	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
r_2	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
r_3	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
r_4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$
r_5	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$
r_6	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$
r_7	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$
r_8	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$
r_9	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$
r_{10}	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$
r_{11}	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$
r_{12}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$
r_{13}	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$
r_{14}	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$
r_{15}	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$

Relações topológicas impossíveis. Porquê?

$$(\delta A \cap B^O \neq \emptyset) \vee (A^O \cap \delta B \neq \emptyset) \rightarrow \boxed{(A^O \cap B^O \neq \emptyset)}$$

Paulo Trigo Silva

Relações Topológicas Impossíveis (cont.)

Name	$\delta A \cap \delta B$	$A^o \cap B^o$	$\delta A \cap B^o$	$A^o \cap \delta B$
r_0	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
r_1	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
r_2	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
r_3	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
r_4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$
r_5	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$
r_6	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$
r_7	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$
r_8	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$
r_9	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$
r_{10}	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$
r_{11}	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$
r_{12}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$
r_{13}	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$
r_{14}	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$
r_{15}	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$

Relações topológicas impossíveis.

Também é impossível. Porquê?

$(A^O \cap B^O \neq \emptyset) \rightarrow ((\delta A \cap \delta B \neq \emptyset) \vee (\delta A \cap B^O \neq \emptyset) \vee (A^O \cap \delta B \neq \emptyset))$

Paulo Trigo Silva

Relações Topológicas Impossíveis (cont. 1)

Name	$\delta A \cap \delta B$	$A^o \cap B^o$	$\delta A \cap B^o$	$A^o \cap \delta B$
r_0	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
r_1	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
r_2	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
r_3	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
r_4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$
r_5	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$
r_6	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$
r_7	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$
r_8	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$
r_9	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$
r_{10}	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$
r_{11}	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$
r_{12}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$
r_{13}	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$
r_{14}	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$
r_{15}	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$

Relações topológicas impossíveis.

Também é impossível.
Porquê?

Relações Topológicas Impossíveis (cont. 2)

Name	$\delta A \cap \delta B$	$A^o \cap B^o$	$\delta A \cap B^o$	$A^o \cap \delta B$
r_{14}	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$

Para que isto possa acontecer é preciso que uma das duas regiões (a maior) contenha buracos.

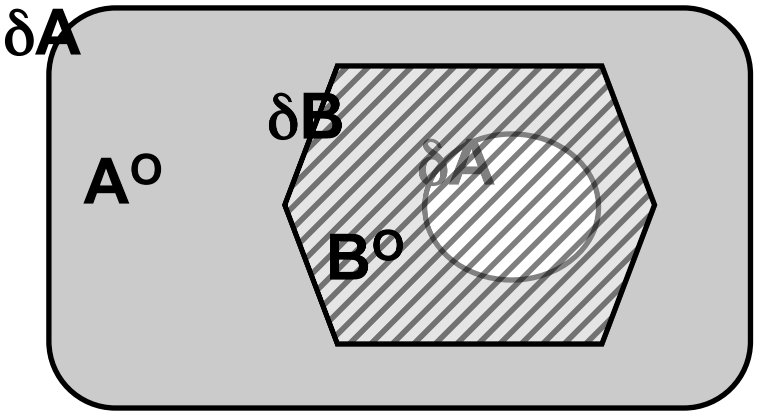
Desenhar um exemplo que satisfaça a relação r_{14}.

Paulo Trigo Silva

Relações Topológicas Impossíveis (cont. 2)

Name	$\delta A \cap \delta B$	$A^o \cap B^o$	$\delta A \cap B^o$	$A^o \cap \delta B$
r_{14}	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$

Para que isto possa acontecer é preciso que uma das duas regiões (a maior) contenha buracos.



Região A: maior e tem um buraco

Região B: menor e contém buraco de A

Ou seja, r_{14} será impossível no *pressuposto* de que:

***uma região espacial não contém buracos*.**

Paulo Trigo Silva

Relações Topológicas Impossíveis (síntese)

Name	$\delta A \cap \delta B$	$A^o \cap B^o$	$\delta A \cap B^o$	$A^o \cap \delta B$
r_0	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
r_1	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
r_2	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
r_3	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
r_4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$
r_5	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$
r_6	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$
r_7	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$
r_8	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$
r_9	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$
r_{10}	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$
r_{11}	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$
r_{12}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$
r_{13}	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$
r_{14}	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$
r_{15}	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$

≡ Relação topológica impossível.

Paulo Trigo Silva

As 8 Relações Topológicas Essenciais

Inst. name	$\delta A \cap \delta B$	$A^o \cap B^o$	$\delta A \cap B^o$	$A^o \cap \delta B$	Rel. name
r_0	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	*A disjoint B*
r_1	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	*A meets B*
r_3	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	*A equals B*
r_6	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	*A inside B*
r_7	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	*B covers A*
r_{10}	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	*B inside A*
r_{11}	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	*A covers B*
r_{15}	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	*A overlaps B*

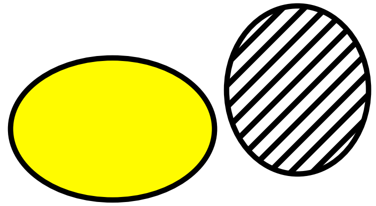
Cobertura mutuamente exclusiva e completa das relações topológicas em $\mathbb{R}^2$.

Apresentar uma figura que ilustre cada possível relação.

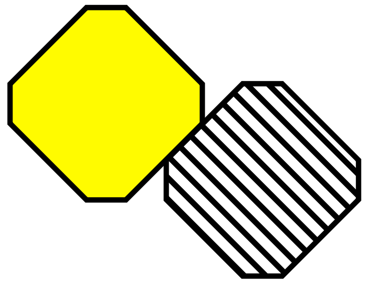
Paulo Trigo Silva

... disjoint, meets

Inst. name	$\delta A \cap \delta B$	$A^o \cap B^o$	$\delta A \cap B^o$	$A^o \cap \delta B$	*Rel. name*
r_0	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	*A disjoint B*



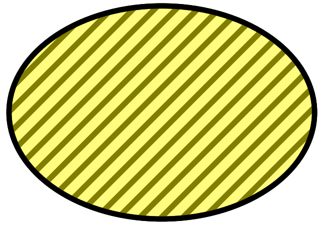
Inst. name	$\delta A \cap \delta B$	$A^o \cap B^o$	$\delta A \cap B^o$	$A^o \cap \delta B$	*Rel. name*
r_1	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	*A meets B*



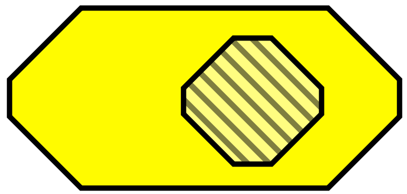
Paulo Trigo Silva

... equals, inside

Inst. name	$\delta A \cap \delta B$	$A^o \cap B^o$	$\delta A \cap B^o$	$A^o \cap \delta B$	Rel. name
r_3	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	*A equals B*



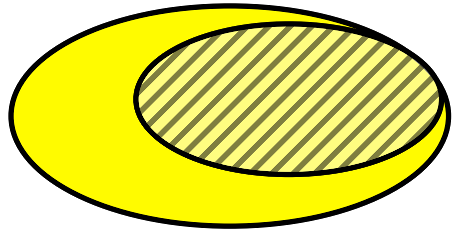
Inst. name	$\delta A \cap \delta B$	$A^o \cap B^o$	$\delta A \cap B^o$	$A^o \cap \delta B$	Rel. name
r_6	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	*A inside B*
r_{10}	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	*B inside A*



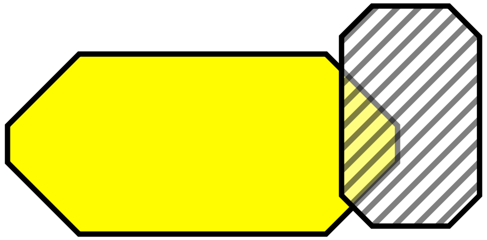
Paulo Trigo Silva

... *covers*, *overlaps*

Inst. name	$\delta A \cap \delta B$	$A^o \cap B^o$	$\delta A \cap B^o$	$A^o \cap \delta B$	Rel. name
r_7	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	*B covers A*
r_{11}	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	*A covers B*



Inst. name	$\delta A \cap \delta B$	$A^o \cap B^o$	$\delta A \cap B^o$	$A^o \cap \delta B$	Rel. name
r_{15}	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	*A overlaps B*



Paulo Trigo Silva

Modelo das 9-Intersecções (I_9)

- O modelo (anterior) das 4-Intersecções pode estender-se
  - para lidar com espaços de maior dimensão
  - ... surgindo a noção de co-dimensão
- Co-Dimensão representa a diferença entre
  - a dimensão do espaço e a dimensão do objecto nele embebido
  - e.g., a co-dimensão de uma linha (1D), num espaço 2D, é 1 (2D – 1D)
- O modelo das 9-Intersecções (I_9) utiliza as noções de
  - fronteira, e.g., δA
  - interior, e.g., A^O
  - complemento, ou exterior, e.g., C_A

Paulo Trigo Silva

Representação do Modelo I_9

O modelo I_9 pode representar-se numa matriz 3×3

$$I_9(A,B) = \begin{pmatrix} A^o \cap B^o & A^o \cap \delta B & A^o \cap C_B \\ \delta A \cap B^o & \delta A \cap \delta B & \delta A \cap C_B \\ C_A \cap B^o & C_A \cap \delta B & C_A \cap C_B \end{pmatrix}$$

O princípio é o mesmo que o do modelo das 4-Intersecções.

Distinguir vazio ($\emptyset$) e não vazio ($\neg\emptyset$) em 3 conceitos dá 2^9 (512) combinações.

Paulo Trigo Silva

Representação, em matriz, do modelo I_9

$$I_9(A, B) = \begin{pmatrix} A^o \cap B^o & A^o \cap \delta B & A^o \cap C_B \\ \delta A \cap B^o & \delta A \cap \delta B & \delta A \cap C_B \\ C_A \cap B^o & C_A \cap \delta B & C_A \cap C_B \end{pmatrix}$$

Distinguir vazio ($\emptyset$) e não vazio ($\neg\emptyset$) em 3 conceitos dá 2^9 (512) combinações.
As 512 reduzem com as restrições impostas no espaço topológico de base.
e.g., com a restrição de não haver buracos no espaço $\mathbb{R}^2$ há só 8 combinações.

Na matriz I_9 cada componente terá o valor zero (0) ou um (1)
o zero (0) corresponde à intersecção vazia ($\emptyset$) e o um (1) à não vazia ($\neg\emptyset$)

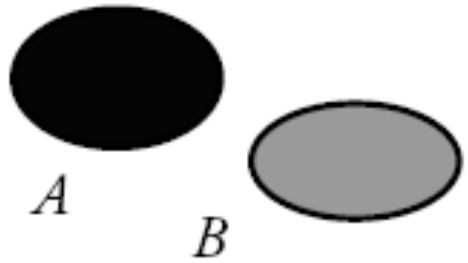
Represente, na matriz I_9, a relação *disjoint*.

Paulo Trigo Silva

Representação I_9 de *disjoint*

$$I_9(A,B) = \begin{pmatrix} A^o \cap B^o & A^o \cap \delta B & A^o \cap C_B \\ \delta A \cap B^o & \delta A \cap \delta B & \delta A \cap C_B \\ C_A \cap B^o & C_A \cap \delta B & C_A \cap C_B \end{pmatrix}$$

disjoint



A disjoint B

B disjoint A

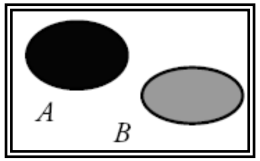
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

... represente, na matriz I_9, a relação *meets*.

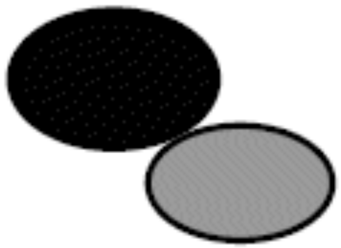
Paulo Trigo Silva

Representação I_9 de *meets*

$$I_9(A,B) = \begin{pmatrix} A^o \cap B^o & A^o \cap \delta B & A^o \cap C_B \\ \delta A \cap B^o & \delta A \cap \delta B & \delta A \cap C_B \\ C_A \cap B^o & C_A \cap \delta B & C_A \cap C_B \end{pmatrix}$$



meets



A meets B
B meets A

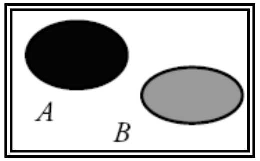
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

... represente, na matriz I_9, a relação *contains*.

Paulo Trigo Silva

Representação I_9 de *contains*

$$I_9(A,B) = \begin{pmatrix} A^o \cap B^o & A^o \cap \delta B & A^o \cap C_B \\ \delta A \cap B^o & \delta A \cap \delta B & \delta A \cap C_B \\ C_A \cap B^o & C_A \cap \delta B & C_A \cap C_B \end{pmatrix}$$



contains

A contains B
B inside A

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B contains A
A inside B

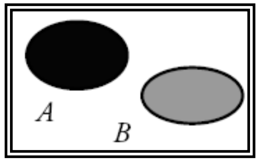
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

... represente, na matriz I_9, a relação *covers*.

Paulo Trigo Silva

Representação I_9 de *covers*

$$I_9(A,B) = \begin{pmatrix} A^o \cap B^o & A^o \cap \delta B & A^o \cap C_B \\ \delta A \cap B^o & \delta A \cap \delta B & \delta A \cap C_B \\ C_A \cap B^o & C_A \cap \delta B & C_A \cap C_B \end{pmatrix}$$



covers

B coveredBy A
A covers B

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B covers A
A coveredBy B

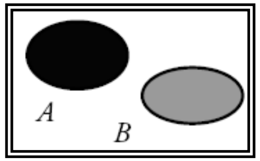
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

... represente, na matriz I_9, a relação *equals*.

Paulo Trigo Silva

Representação I_9 de *equals*

$$I_9(A,B) = \begin{pmatrix} A^o \cap B^o & A^o \cap \delta B & A^o \cap C_B \\ \delta A \cap B^o & \delta A \cap \delta B & \delta A \cap C_B \\ C_A \cap B^o & C_A \cap \delta B & C_A \cap C_B \end{pmatrix}$$



equals

A equals B
B equals A

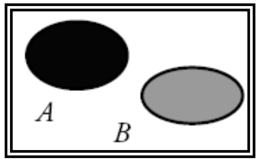
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

... represente, na matriz I_9, a relação *overlaps*.

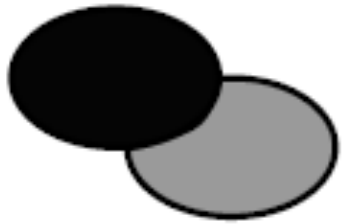
Paulo Trigo Silva

Representação I_9 de *overlaps*

$$I_9(A, B) = \begin{pmatrix} A^o \cap B^o & A^o \cap \delta B & A^o \cap C_B \\ \delta A \cap B^o & \delta A \cap \delta B & \delta A \cap C_B \\ C_A \cap B^o & C_A \cap \delta B & C_A \cap C_B \end{pmatrix}$$



overlaps



A overlaps B
B overlaps A

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Paulo Trigo Silva

Modelo I_9 em $\mathbb{R}^2$ – as 8 relações topológicas primitivas

A disjoint B *B disjoint A*	*B contains A* *A inside B*	*A contains B* *B inside A*	*A equals B* *B equals A*
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A meets B *B meets A*	*B coveredBy A* *A covers B*	*B covers A* *A coveredBy B*	*A overlaps B* *B overlaps A*
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Modelos I_4 e I_9

- Se a co-dimensão zero,
  - i.e., o espaço topológico e o objecto nele imerso têm mesma dimensão
  - então, o modelo I_4 e o modelo I_9 dão o mesmo resultado
- Se a co-dimensão é superior a zero,
  - i.e., o espaço topológico tem dimensão superior à do objecto nele imerso
  - então, o modelo I_9 oferece detalhe adicional para relacionar os objectos

Análise comparativa detalhada em:
"A critical comparison of the 4-Intersection and 9-Intersection models for spatial relations: formal analysis
Max J. Egenhofer and Jayant Sharma

co-dimension 0	**region**	**Line**
region	$\Im_4$: 8 relations $\Im_9$: 8 relations	N/A
line	N/A	$\Im_4$: 8 relations $\Im_9$: 8 relations

co-dimension 1	**line**	*straight line*
region	$\Im_4$: 11 relations $\Im_9$: 19 relations	
convex region		$\Im_4$ *: 10 relations* $\Im_9$ *: 11 relations*
line	$\Im_4$: 16 relations $\Im_9$: 33 relations	
straight line		$\Im_4$ *: 11 relations* $\Im_9$ *: 11 relations*

Aplicação do modelo I_9 com diferentes co-dimensões

Construir matriz indicando para cada intersecção a dimensão resultante.

	Interior	*Boundary*	*Exterior*
Interior	$dim(\ I(a) \cap I(b)\ )$	$dim(\ I(a) \cap B(b)\ )$	$dim(\ I(a) \cap E(b)\ )$
Boundary	$dim(\ B(a) \cap I(b)\ )$	$dim(\ B(a) \cap B(b)\ )$	$dim(\ B(a) \cap E(b)\ )$
Exterior	$dim(\ E(a) \cap I(b)\ )$	$dim(\ E(a) \cap B(b)\ )$	$dim(\ E(a) \cap E(b)\ )$

I(a), *B(a)*, and *E(a)* are the *Interior*, *Boundary*, and *Exterior* of a

dim(X) é a dimensão de X e tem domínio: { 0, 1, 2, T, F, * }, onde:

0 $\equiv$ ponto,

1 $\equiv$ linha,

2 $\equiv$ superfície,

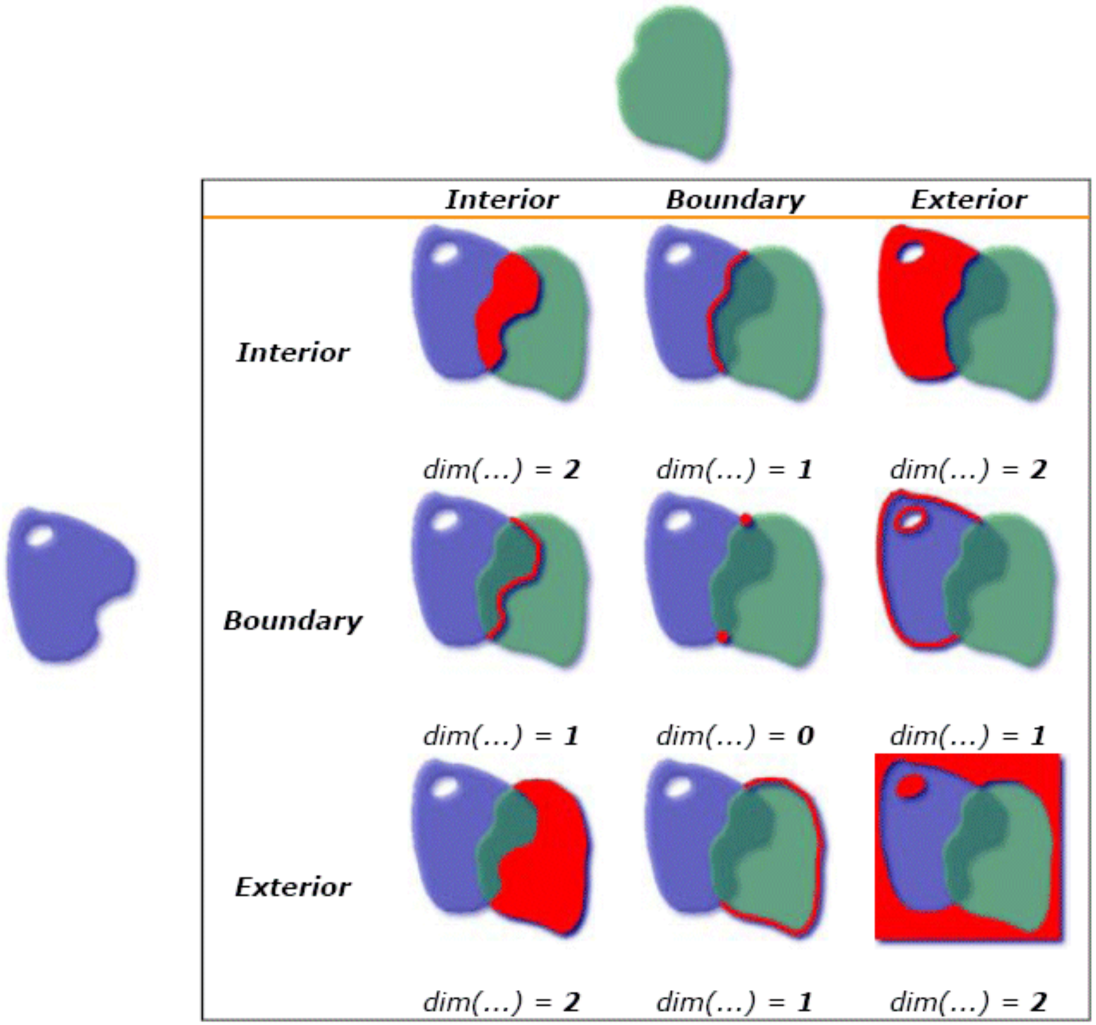
T $\equiv$ { 0, 1, 2 }, i.e., X $\neq \varnothing$

F $\equiv$ -1, i.e., X $= \varnothing$,

*** $\equiv$ {-1, 0, 1, 2 }, i.e., X $\neq \varnothing \vee$ X $= \varnothing$, ou seja, “ignorar”**

Paulo Trigo Silva

A dimensão que resulta de cada intersecção



numa leitura
esquerda-direita e
cima-baixo a matriz
representa-se por:

212101212

Paulo Trigo Silva

Exemplo – intersecção de linhas que é linha

Considere-se que numa rede de estradas se pretende:

identificar todos os segmentos de estrada que se encontram; não se pretende um ponto de intersecção mas uma linha.

	Interior	*Boundary*	*Exterior*
Interior	*dim(I(a) ∩ I(b))*	*dim(I(a) ∩ B(b))*	*dim(I(a) ∩ E(b))*
Boundary	*dim(B(a) ∩ I(b))*	*dim(B(a) ∩ B(b))*	*dim(B(a) ∩ E(b))*
Exterior	*dim(E(a) ∩ I(b))*	*dim(E(a) ∩ B(b))*	*dim(E(a) ∩ E(b))*

Duas linhas que se intersectam numa linha representa-se como a matriz:

1*1*1****

Porquê o valor 1 nesta posição?

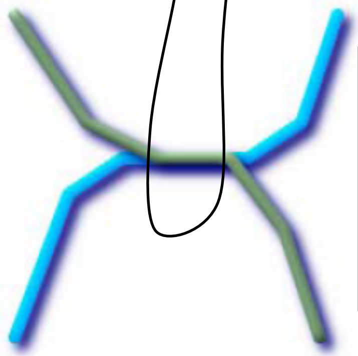
Paulo Trigo Silva

Exemplo – intersecção de linhas que é linha (cont.)

Duas linhas que se intersectam numa linha representa-se como a matriz:

1*1*1****

Porquê o valor 1 nesta posição?



O valor 1 garante que a intersecção as rectas é uma recta (i.e., tem dimensão 1)

Desenhe uma figura que satisfaça a matriz topológica:

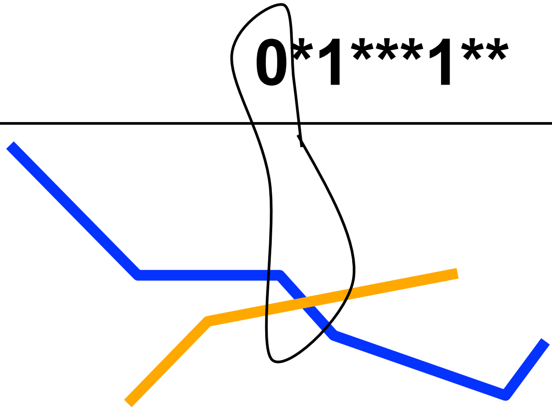
0*1*1****

Paulo Trigo Silva

Exemplo – intersecção de linhas que é linha (cont.1)

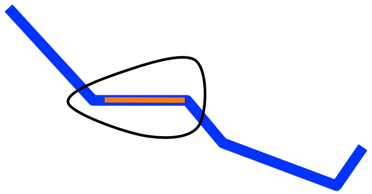
Uma figura que satisfaça o formato matricial:

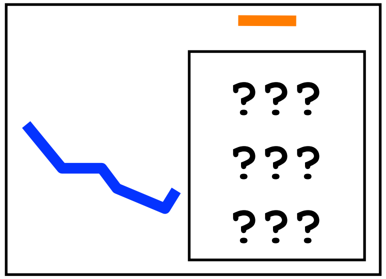
0*1*1****



O valor 0 garante que a intersecção as rectas é um ponto (i.e., tem dimensão 0)

Que matriz topológica descreve a(s) linha(s) contida(s) numa outra?

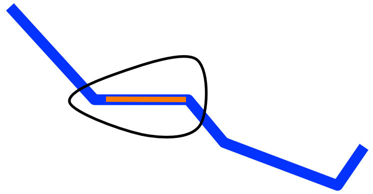


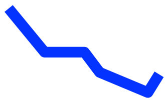


Paulo Trigo Silva

Exemplo – linhas contidas uma na outra

Que matriz topológica descreve a(s) linha(s) contida(s) numa outra?





1	0	1
F	F	0
F	F	2

A matriz topológica:

101FF0FF2

Paulo Trigo Silva

Exemplo – intersecção de linhas que é linha em SQL

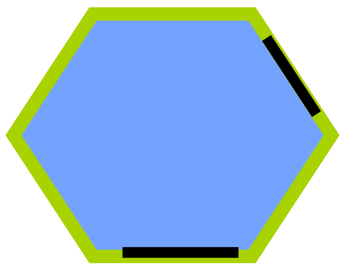
```
-- Segmentos que se cruzam numa linha
SELECT a.id
FROM estrada a, estrada b
WHERE a.id != b.id
AND ST_Relate( a.geo, b.geo, '1*1***1**' );
```

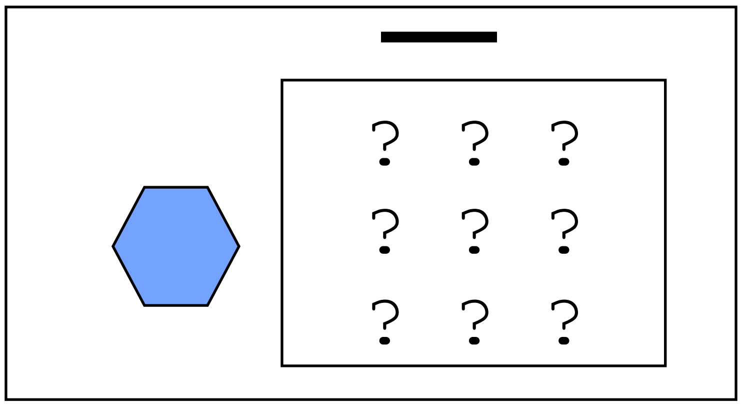
ST_Relate(gA, gB, intersectionMatrixPattern):
True se a geometria de `gA` se relaciona com a de `gB` testando as intersecções entre Interior, Exterior e Fronteira das duas geometrias na `intersectionMatrixPattern`.

Paulo Trigo Silva

Exemplo – linhas contidas em lado de polígono

Que matriz topológica descreve a(s) linha(s) contidas em lado(s) de um polígono?

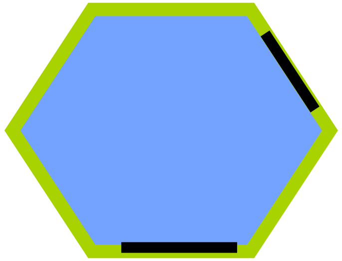


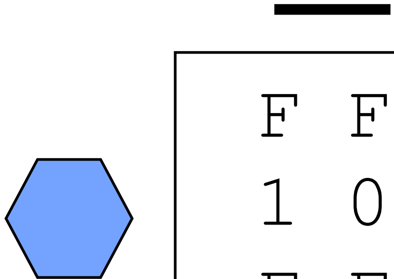


Paulo Trigo Silva

Exemplo – linhas contidas em lado de polígono (cont.)

Que matriz topológica descreve a(s) linha(s) contidas em lado(s) de um polígono?





F	F	2
1	0	1
F	F	2

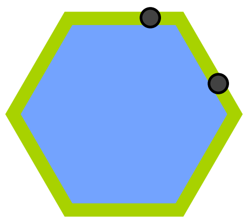
A matriz topológica:

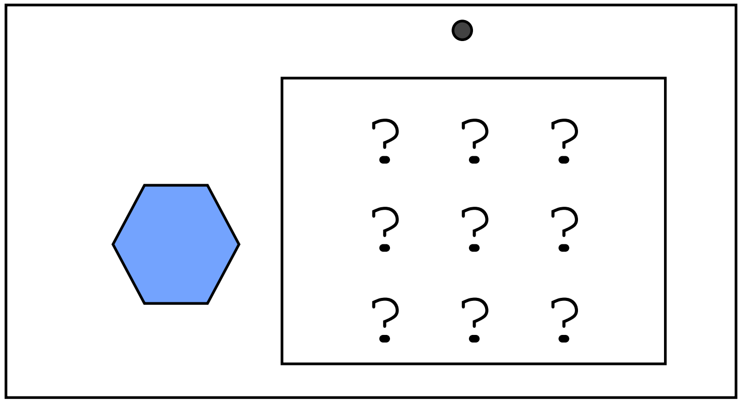
`FF2101FF2`

Paulo Trigo Silva

Exemplo – pontos na fronteira de um polígono

Que matriz topológica descreve o(s) ponto (s) na fronteira de um polígono?

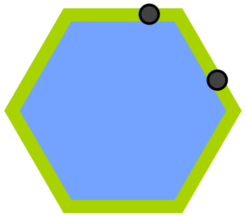


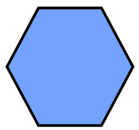


Paulo Trigo Silva

Exemplo – pontos na fronteira de um polígono (cont.)

Que matriz topológica descreve o(s) ponto(s) na fronteira de um polígono?





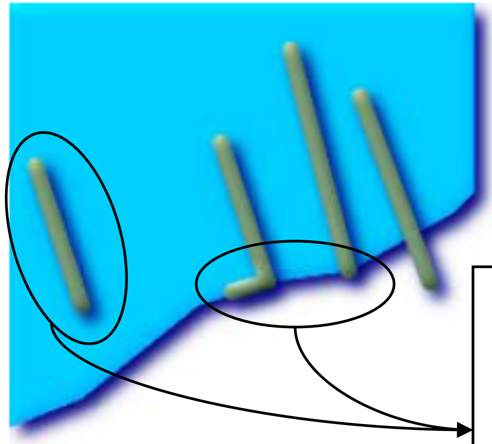
$$\begin{matrix} F & F & 2 \\ 0 & F & 1 \\ F & F & 2 \end{matrix}$$

A matriz topológica:

`FF20F1FF2`

Paulo Trigo Silva

Exemplo – várias intersecções de polígono e linhas



Considerem-se docas de descarga num rio:

identificar todas as docas que estejam completamento dentro do rio ou que tenham uma extremidade em terra.

Nota: neste exemplo a intersecção da fronteira do polígono com as linhas pode ser:

- um ponto
- uma linha
- ou vazio

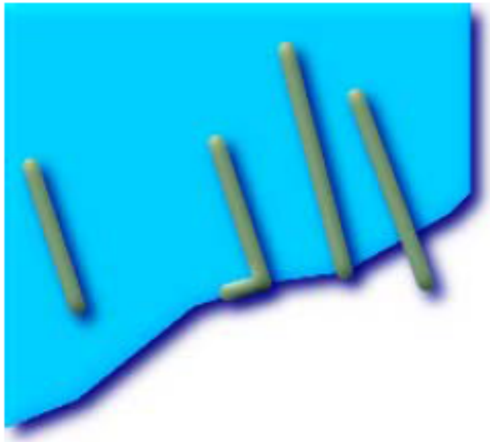
	Interior	**Boundary**	**Exterior**
Interior	$dim(I(a) \cap I(b))$	$dim(I(a) \cap B(b))$	$dim(I(a) \cap E(b))$
Boundary	$dim(B(a) \cap I(b))$	$dim(B(a) \cap B(b))$	$dim(B(a) \cap E(b))$
Exterior	$dim(E(a) \cap I(b))$	$dim(E(a) \cap B(b))$	$dim(E(a) \cap E(b))$

Que matriz topológica exprime o requisito acima descrito?

	doca
	? ? ?
rio	? ? ?
	? ? ?

Paulo Trigo Silva

Exemplo – várias intersecções de polígono e linhas (cont.)



	Interior	Boundary	Exterior
Interior	*dim(I(a) ∩ I(b))*	*dim(I(a) ∩ B(b))*	*dim(I(a) ∩ E(b))*
Boundary	*dim(B(a) ∩ I(b))*	*dim(B(a) ∩ B(b))*	*dim(B(a) ∩ E(b))*
Exterior	*dim(E(a) ∩ I(b))*	*dim(E(a) ∩ B(b))*	*dim(E(a) ∩ E(b))*

dim(X) é a dimensão de X e tem domínio: { 0, 1, 2, T, F, * }, onde:

0 ≡ ponto,

1 ≡ linha,

2 ≡ superfície,

T ≡ { 0, 1, 2 },

F ≡ ∅,

*** ≡ ignorar**

Matriz topológica

	doca
rio	`102`
	`**1`
	`**2`

`102**1**2`

Paulo Trigo Silva

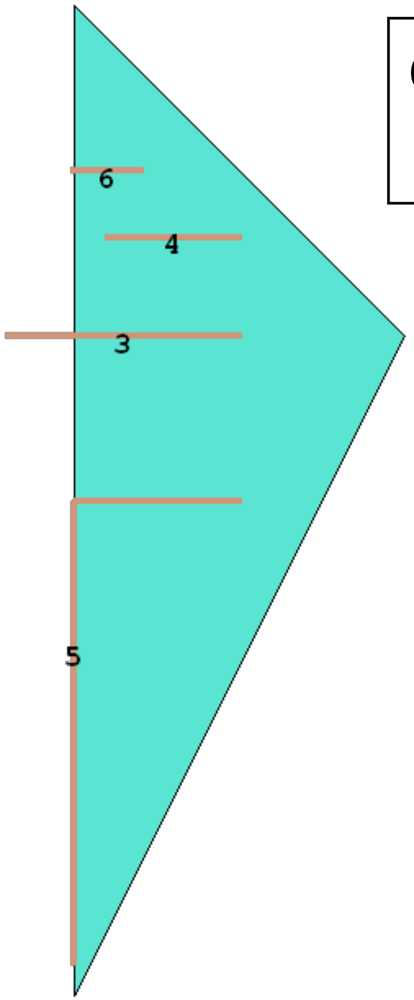
Exemplo – intersecção de polígonos e linhas em SQL

```
-- Segmentos totalmente contidos em polígono ou
-- com fronteira comum ou com
-- segmento coincidente com fronteira do polígono
SELECT a.rio_id, b.doca_id
FROM rio a, doca b
WHERE ST_Relate( a.geo, b.geo, '102**1**2' );
```

	doca
	102
rio	****1**
	****2**

Paulo Trigo Silva

Exemplo – obter a matriz topológica de uma relação



Qual a relação topológica entre o rio ("id=1") e as docas ("id=3", "id=4", "id=5", "id=6")?

Vamos admitir o modelo:

```
CREATE TABLE geo_1d
(id int PRIMARY KEY);
SELECT AddGeometryColumn
('', 'geo_1d', 'geo', -1, 'LINESTRING', 2);

CREATE TABLE geo_2d
(id int PRIMARY KEY);
SELECT AddGeometryColumn
('', 'geo_2d', 'geo', -1, 'POLYGON', 2);
```

`ST_Relate``( gA, gB ):`
devolve a matriz topológica (gA em linha; gB em coluna.

Paulo Trigo Silva

Exemplo – uma (ou mais) matrizes topológicas?

Qual a relação topológica entre o rio (“id=1”) e as docas (“id=3”, “id=4”, “id=5”, “id=6”)?

```
SELECT a.id, b.id, ST_Relate( a.geo, b.geo ) as matrix
FROM geo_2d a, geo_1d b
WHERE a.id=1 and b.id IN (3, 4, 5, 6);
```

Quantas linhas devolve esta interrogação:

1. **uma (1) linha; com a matriz topológica**
2. **duas (2) linhas; uma com a matriz topológica outra com os ids**
3. **quatro (4) linhas; duas matrizes topológicas e dois ids**
4. **quatro (4) linhas; quatro matrizes topológicas**

Paulo Trigo Silva

Exemplo – obter matrizes topológicas

Qual a relação topológica entre o rio ("id=1") e as docas ("id=3", "id=4", "id=5", "id=6")?

```
SELECT a.id, b.id, ST_Relate( a.geo, b.geo ) as matrix
FROM geo_2d a, geo_1d b
WHERE a.id=1 and b.id IN (3, 4, 5, 6);
```

```
id | id |  matrix
---+----+----------
 1 |  3 | 1020F1102
 1 |  4 | 102FF1FF2
 1 |  5 | 102101FF2
 1 |  6 | 102F01FF2
```

generalização

`102**1**2`

Paulo Trigo Silva

Síntese – regiões topológicas dos tipos OGC

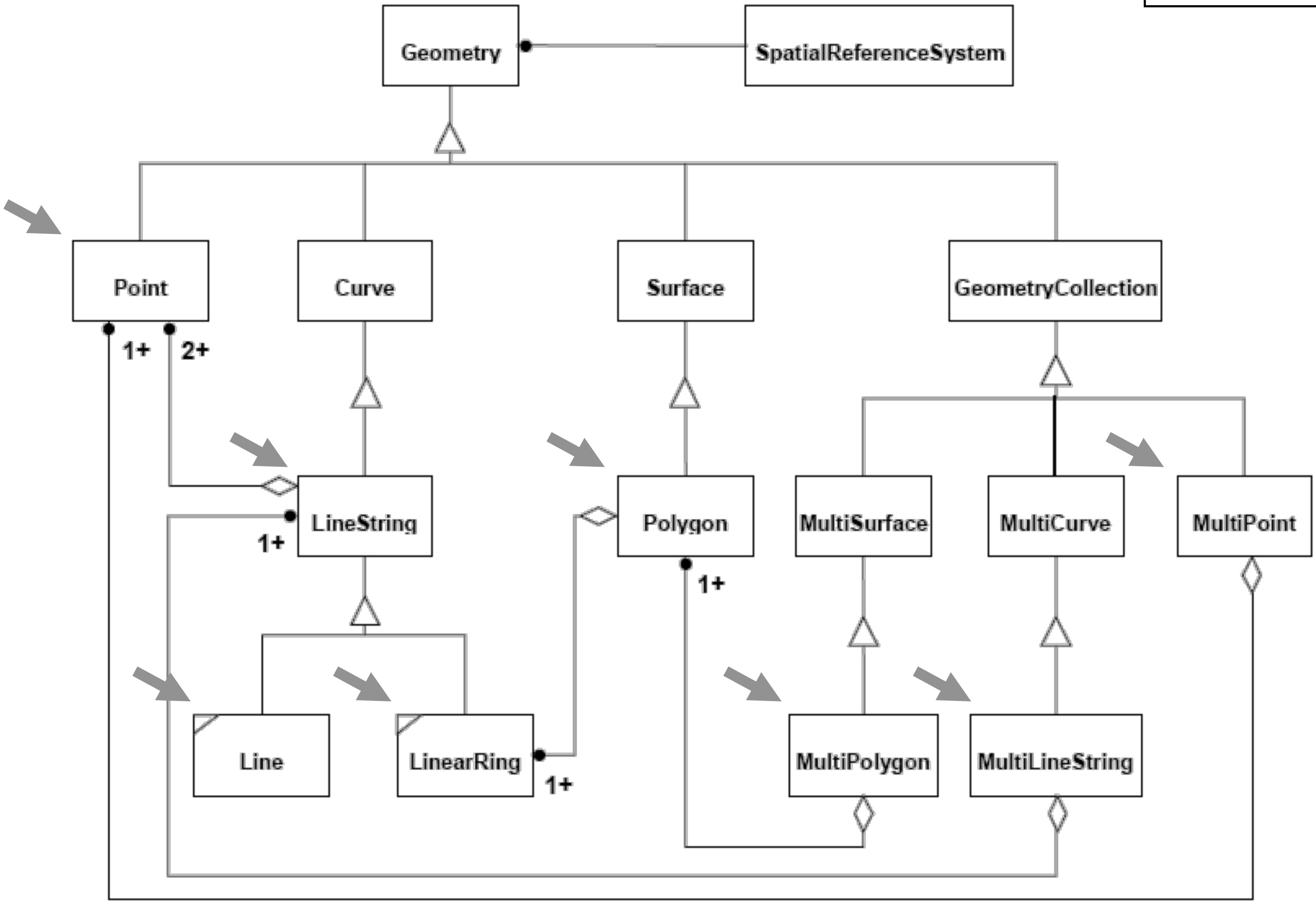
Geometric Subtypes	**Interior (I)**	**Boundary (B)**	**Exterior (E)**
Point, MultiPoint	Point, Points	Empty set	Points not in the interior or boundary
LineString, Line	Points that are left when the boundary points are removed.	Two end Points	Points not in the interior or boundary
LinearRing	All Points along the LinearRing	Empty set	Points not in the interior or boundary
MultiLineString	Points that are left when the boundary points are removed	Those Points that are in the boundaries of an odd number of its element Curves	Points not in the interior or boundary
Polygon	Points within the Rings	Set of Rings	Points not in the interior or boundary
MultiPolygon	Points within the Rings	Set of Rings of its Polygons	Points not in the interior or boundary

Interior, Fronteira e Exterior dos tipos geométricos essenciais descritos pelo "**Open Geospatial Consortion**" (**OGC**)

Paulo Trigo Silva

Síntese – estrutura dos tipos OGC

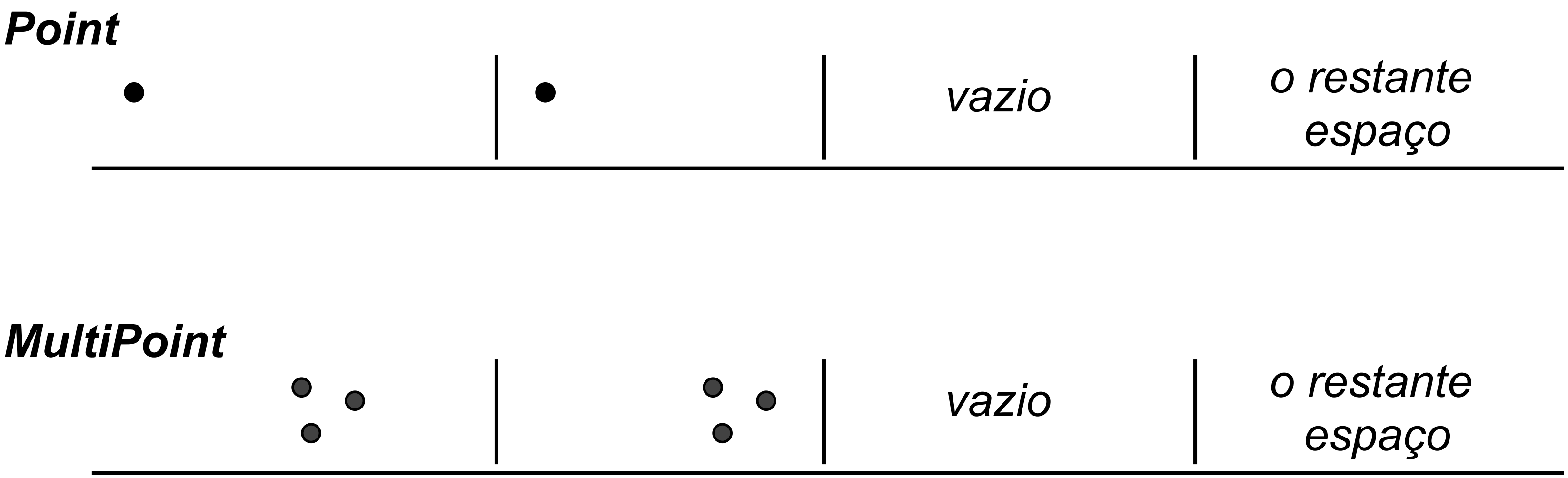
≡ tipo possível de instanciar



Paulo Trigo Silva

Exemplo – regiões topológicas (*Point, MultiPoint*)

Geometric Subtypes	Interior (I)	Boundary (B)	Exterior (E)
Point, MultiPoint	Point, Points	Empty set	Points not in the interior or boundary

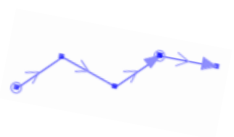


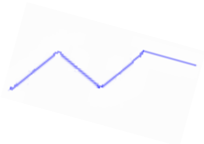
Paulo Trigo Silva

Exemplo – regiões topológicas (*LineString, Line*)

Geometric Subtypes	Interior (I)	Boundary (B)	Exterior (E)
LineString, Line	Points that are left when the boundary points are removed.	Two end Points	Points not in the interior or boundary

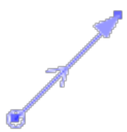
LineString

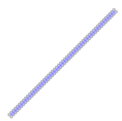




o restante espaço

Line



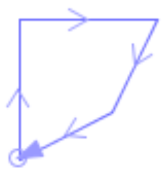


o restante espaço

Exemplo – regiões topológicas (*LinearRing*)

Geometric Subtypes	Interior (I)	Boundary (B)	Exterior (E)
LinearRing	All Points along the LinearRing	Empty set	Points not in the interior or boundary

LinearRing

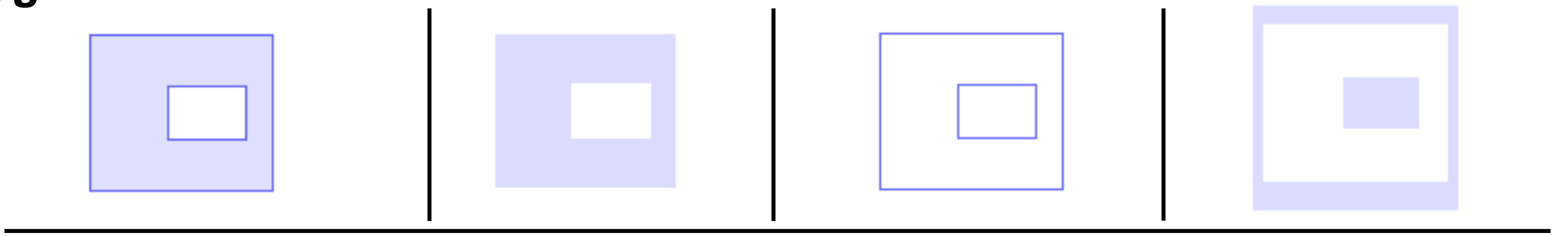
		*vazio*	*o restante espaço*

Paulo Trigo Silva

Exemplo – regiões topológicas (*Polygon, MultiPoligon*)

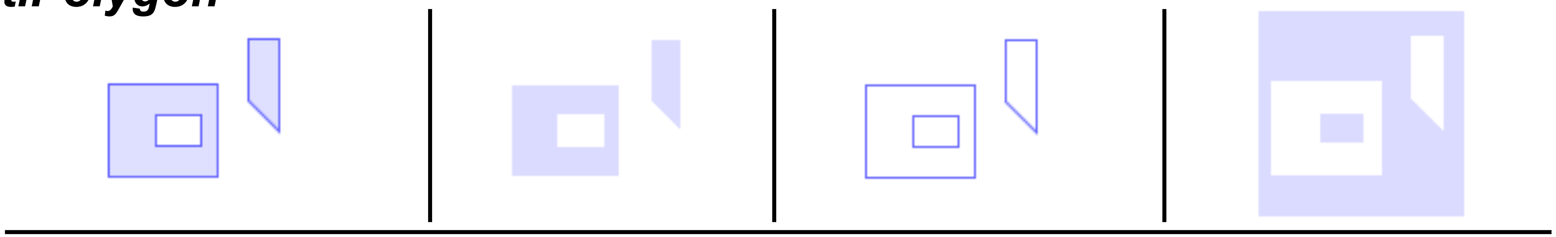
Geometric Subtypes	Interior (I)	Boundary (B)	Exterior (E)
Polygon	Points within the Rings	Set of Rings	Points not in the interior or boundary

Polygon



Geometric Subtypes	Interior (I)	Boundary (B)	Exterior (E)
MultiPolygon	Points within the Rings	Set of Rings of its Polygons	Points not in the interior or boundary

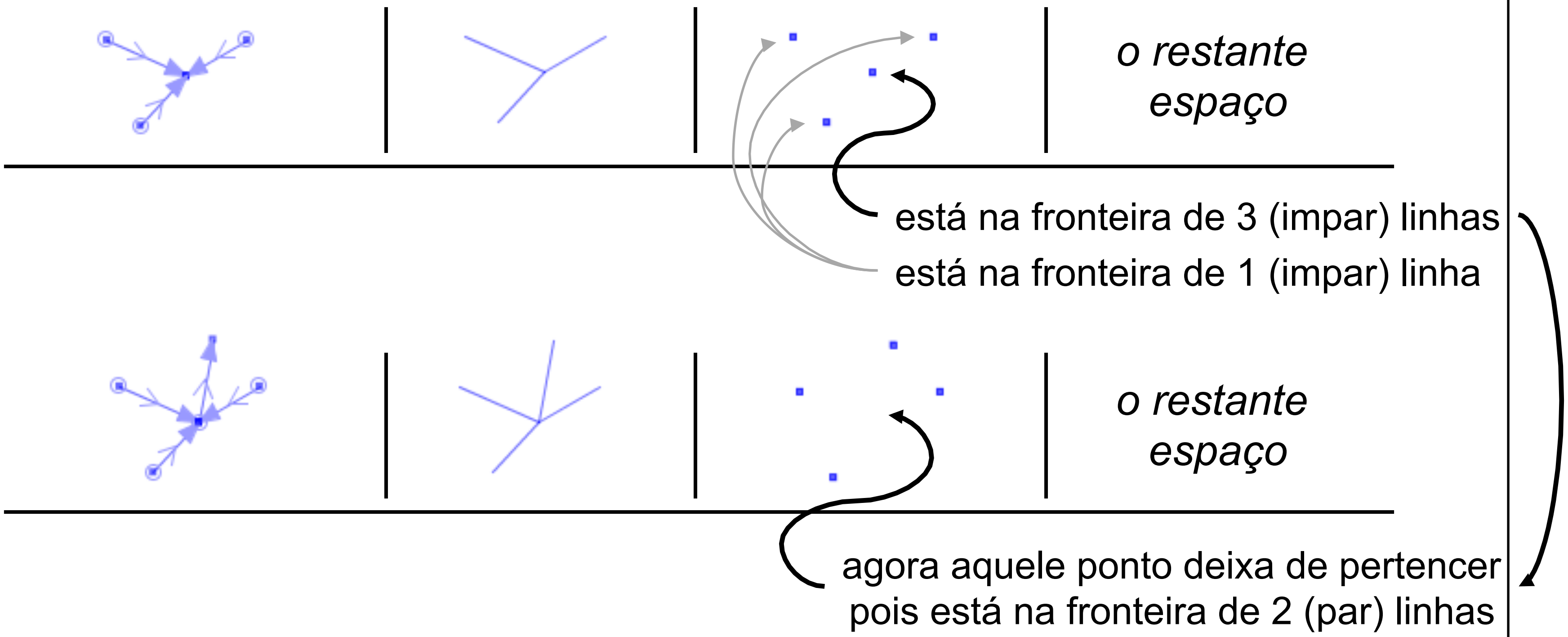
MultiPolygon



Exemplo – regiões topológicas (*MultiLineString*)

Geometric Subtypes	Interior (I)	Boundary (B)	Exterior (E)
MultiLineString	Points that are left when the boundary points are removed	Those Points that are in the boundaries of an odd number of its element Curves	Points not in the interior or boundary

MultiLineString



Paulo Trigo Silva

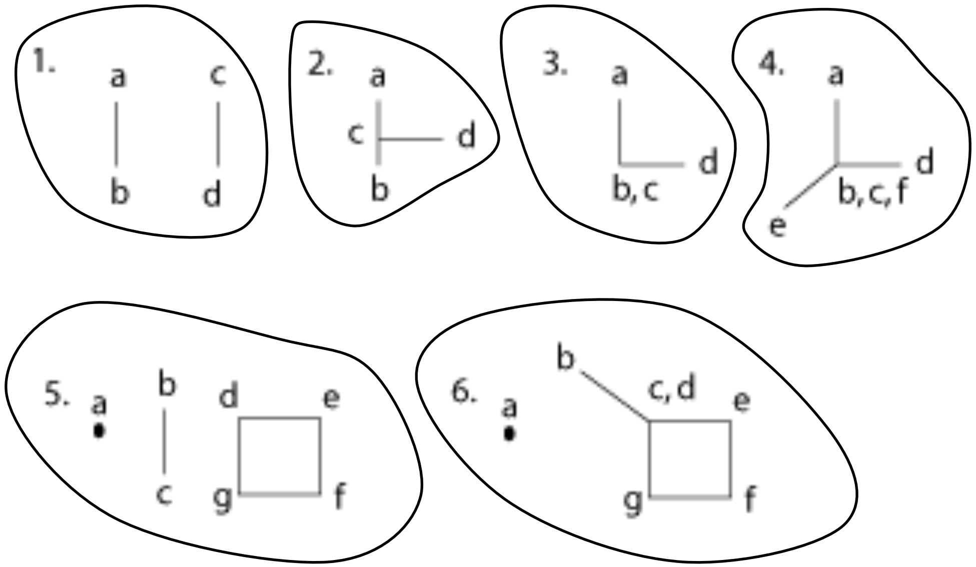
Adicional: sobre "*odd-even rule*" ou "*mod 2 union*"

""For complex geometries, we take the 'mod 2' union of the components.

*That means that a point is in the boundary of a complex object (represented as disjoint representational geometries) if it is in an **odd number** (odd-even rule) of the boundaries of its component simple geometries.*"

in [Open GIS Consortium; "Simple Features Specification for SQL"]

Case	Boundary
1	a, b, c, d
2	a, b, c, d
3	a, d
4	a, b, e, d
5	b, c, polygon((d, e, f, g))
6	b, (polygon((d, e, f, g)) - c)



Paulo Trigo Silva

Adicional: sobre *Polygon* e *Multipolygon* (OCG e PostGIS)

"*The interiors of 2 Polygons that are in a MultiPolygon may not intersect. The Boundaries of any 2 Polygons that are elements of a MultiPolygon may not 'cross' and may touch at only a finite number of points. A MultiPolygon may not have cut lines, spikes or punctures*"

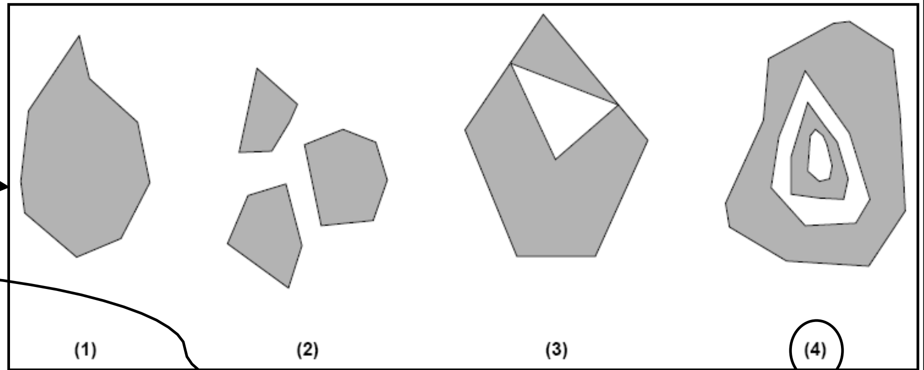
in [Open GIS Consortium; "Simple Features Specification for SQL"]

4 exemplos de *MultiPolygon* com 1, 3, 2 e 2 polígonos.

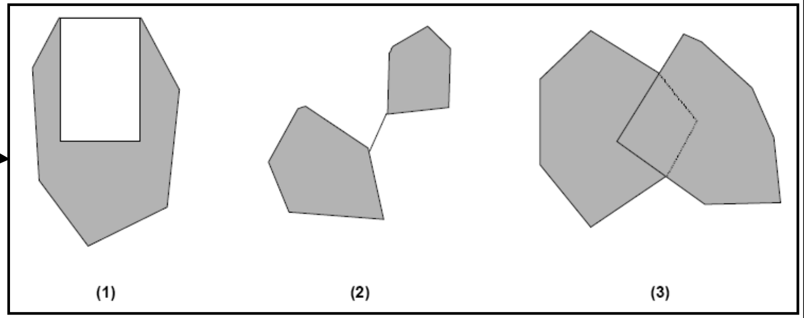
PostGIS – para criar polígonos idênticos aos da figura (e.g., (3) ou (4)) usar:

`ST_MakePolygon`

"*variant 2: creates a Polygon formed by the given shell and array of holes*"



3 exemplos de objectos geométricos que **não se podem** representar numa única instância de *MultiPolygon*.



Paulo Trigo Silva

Síntese – significado dos operadores topológicos

Topological Predicate	Meaning
Equals	The Geometries are topologically equal
Disjoint	The Geometries have no point in common
Intersects	The Geometries have at least one point in common (the inverse of Disjoint)
Touches	The Geometries have at least one boundary point in common, but no interior points
Crosses	The Geometries share some but not all interior points, and the dimension of the intersection is less than that of at least one of the Geometries.
Overlaps	The Geometries share some but not all points in common, and the intersection has the same dimension as the Geometries themselves
Within	Geometry A lies in the interior of Geometry B
Contains	Geometry B lies in the interior of Geometry A (the inverse of Within)

Operadores topológicos e seu significado

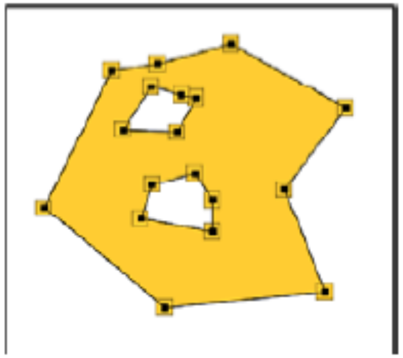
Paulo Trigo Silva

Síntese – operadores e matrizes topológicas (modelo I_9)

Topological Predicate	Pattern Matrix
A.Equals(B)	$\begin{bmatrix} T & * & F \\ * & * & F \\ F & F & * \end{bmatrix}$
A.Disjoint(B)	$\begin{bmatrix} F & F & * \\ F & F & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$
A.Intersects(B)	$\begin{bmatrix} T & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$ **or** $\begin{bmatrix} * & T & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$ **or** $\begin{bmatrix} * & * & * \\ T & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$ **or** $\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & T & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$
A.Touches(B)	$\begin{bmatrix} F & T & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$ **or** $\begin{bmatrix} F & * & * \\ * & T & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$ **or** $\begin{bmatrix} F & * & * \\ T & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$
A.Crosses(B)	$\begin{bmatrix} T & * & T \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$ **or** $\begin{bmatrix} 0 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$
A.Overlaps(B)	$\begin{bmatrix} T & * & T \\ * & * & * \\ T & * & * \end{bmatrix}$ **or** $\begin{bmatrix} 1 & * & T \\ * & * & * \\ T & * & * \end{bmatrix}$
A.Within(B)	$\begin{bmatrix} T & * & F \\ * & * & F \\ * & * & * \end{bmatrix}$
A.Contains(B)	$\begin{bmatrix} T & * & * \\ * & * & * \\ F & F & * \end{bmatrix}$

Paulo Trigo Silva

Exemplo – “*equals*” entre dois “*polygon*”



	Interior (B)	Boundary (B)	Exterior (B)
Interior(A)	2	-1	-1
Boundary (A)	-1	1	-1
Exterior (A)	-1	-1	2

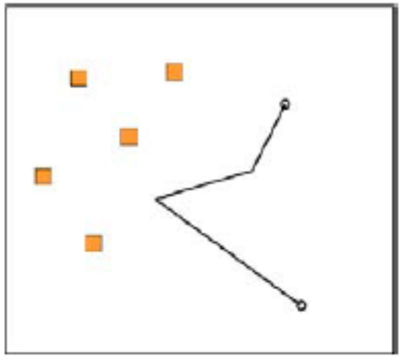
Porquê:

$B(A) \cap B(B) = 1$

?

Paulo Trigo Silva

Exemplo – “*disjoint*” entre “*line*” A e “*multipoint*” B



	Interior (B)	Boundary (B)	Exterior (B)
Interior(A)	-1	-1	1
Boundary (A)	-1	-1	0
Exterior (A)	0	-1	2

Nota: recordar que a fronteira de um ponto é, por definição, vazia (i.e. tem dimensão zero)

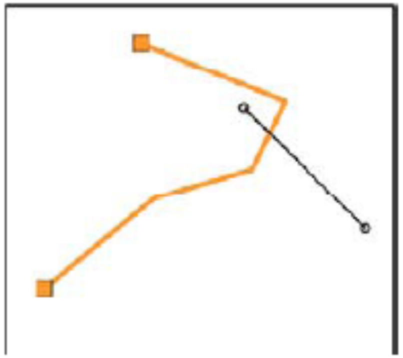
Porquê:

$$E(A) \cap I(B) = 0$$

?

Paulo Trigo Silva

Exemplo – “*crosses*” entre “*lineString*” A e “*line*” B



	Interior (B)	Boundary (B)	Exterior (B)
Interior(A)	0	-1	1
Boundary (A)	-1	-1	0
Exterior (A)	1	0	2

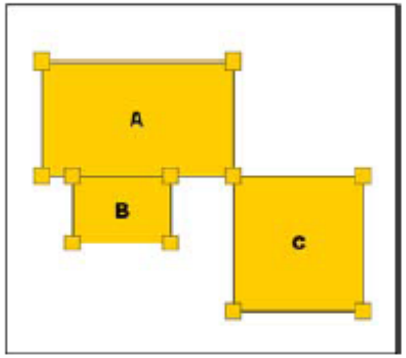
Porquê:

$$\mathbf{I(A) \cap I(B) = 0}$$

?

Paulo Trigo Silva

Exemplo – “*touches*” entre “*polygon*” A e “*polygon*” B



	Interior (B)	Boundary (B)	Exterior (B)
Interior(A)	-1	-1	2
Boundary (A)	-1	**1/0**	1
Exterior (A)	2	1	2

Porquê:

B(A) ∩ B(B) = 0

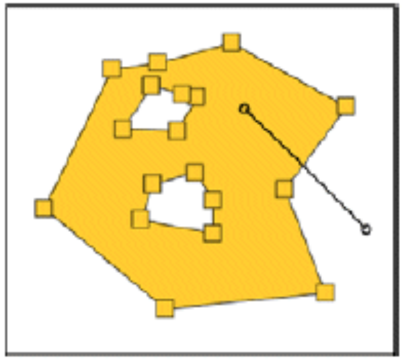
ou

B(A) ∩ B(B) = 1

?

Paulo Trigo Silva

Exemplo – “*crosses*” entre “*polygon*” A e “*line*” B



	Interior (B)	Boundary (B)	Exterior (B)
Interior(A)	1	0	2
Boundary (A)	0	-1	1
Exterior (A)	1	0	2

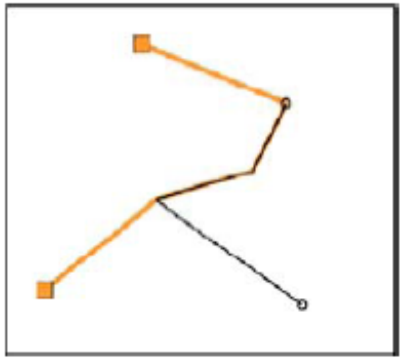
Porquê:

E(A) ∩ I(B) = 1

?

Paulo Trigo Silva

Exemplo – "*overlaps*" entre "*lineString*" A e "*lineString*" B



	Interior (B)	Boundary (B)	Exterior (B)
Interior(A)	1	**-1/0**	1
Boundary (A)	**0/-1**	-1	0
Exterior (A)	1	0	2

Porquê:

$$\mathbf{B(A) \cap I(B) = 0}$$

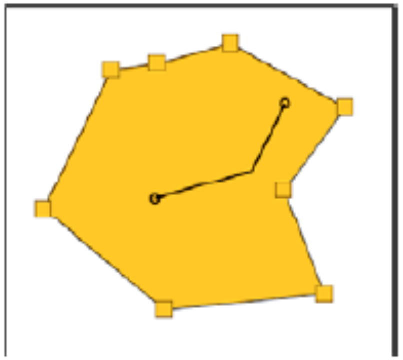
ou

$$\mathbf{B(A) \cap I(B) = -1}$$

?

Paulo Trigo Silva

Exemplo – “*within*” entre “*line*” A e “*polygon*” B



	Interior (B)	Boundary (B)	Exterior (B)
Interior(A)	1	-1	-1
Boundary (A)	0	-1	-1
Exterior (A)	2	1	2

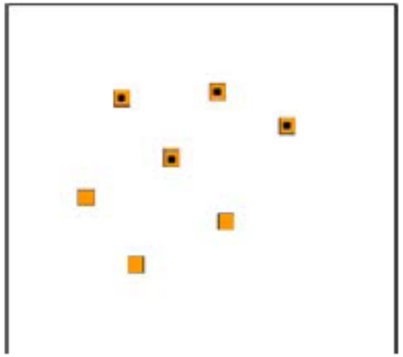
Porquê:

$$\mathbf{I(A) \cap B(B) = -1}$$

?

Paulo Trigo Silva

Exemplo – “*contains*” entre “*multipoint*” A e “*multipoint*” B



	Interior (B)	Boundary (B)	Exterior (B)
Interior(A)	0	-1	0
Boundary (A)	-1	-1	-1
Exterior (A)	-1	-1	2

Nota: os pontos de A estão representados por quadrados e os de B por círculos.

Porquê:

I(A) ∩ E(B) = 0

?

Paulo Trigo Silva

Adicional: bibliotecas que suportam especificações OCG

Os tipos e operações definidos pela OCG são suportados por extensões do modelo relacional, e.g., PostGIS (extensão do PostgreSQL).

No entanto também há bibliotecas a implementar as especificações OCG:

JTS Topology Suite *is an API (open source) of spatial predicates and functions for processing geometry*.

`http://tsusiatsoftware.net/`**`jts`**`/`

Java

GEOS (Geometry Engine, Open Source) is a C++ port of the Java Topology Suite (JTS); GEOS is used as the engine of **PostGIS**.

`http://trac.osgeo.org/`**`geos`**`/`

C++

Shapely is based on the widely deployed GEOS and lets you do PostGIS-ish outside the context of a database using idiomatic Python.

`http://gispython.org/`

`http://pypi.python.org/pypi/`**`Shapely`**`/`

Python

Paulo Trigo Silva