Лабораторная работа 1. Моделирование изменения денежных средств на вкладе

1. Постановка задачи

Клиент банка открывает вклад, размещая на нем денежные средства при условии начисления i сложных процентов один раз в год. Определить, как будет происходить изменение денежных средств на вкладе по истечении t лет ($t = 1, 2, \ldots$) в двух случаях:

1. В банке при открытии вклада было размещено z_0 тыс. руб., пополнение счета вкладчиком в дальнейшем не производится.

2. После первоначального размещения z_0 тыс. руб. вкладчик ежегодно после начисления процентов вносит дополнительную сумму так, что каждый год он увеличивает дополнительно размещаемую сумму по сравнению с предыдущим годом на величину $0{,}1z_0$.

Решить задачу при следующих исходных данных: $z_0 = 100 + 4p + 3q + 1$, $i = p + q + 1$, где числа p и q задает преподаватель.

Выполнить расчет изменения денежных средств на вкладе для двух рассмотренных случаев. Выяснить, через сколько лет в первом случае вклад удвоится. Определить, через сколько лет во втором случае вклад увеличится в пять раз. Изменение денежных средств проиллюстрировать таблицей. Построить графики изменения суммы вклада.

В условиях второй схемы формирования денежных средств определить, какую сумму z_0 необходимо разместить на вкладе, чтобы через 5 лет наращенная сумма превысила $10(100 + 4p + 3q + 1)$.

2. Имитационная модель процесса

Пусть y_t – сумма денежных средств на вкладе по истечении t лет ($t = 0, 1, 2, \ldots$). При этом при $t = 0$ сумма первоначального вклада y_0 известна и равна z_0.

Построим модель, описывающую процесс изменения денежных средств для двух рассмотренных случаев.

Случай 1. Обозначим через $r = \dfrac{i}{100} = 0{,}01i$ показатель, описывающий приращение вклада по сравнению с предыдущим годом за счет начисления процентов. Например, при $i = 10$ % наращение за год денежных средств на вкладе составит $r = 0{,}01i = 0{,}1$ от суммы, которая была на вкладе год назад. Если эта сумма была равна y_{t-1}, то через год сумма на вкладе станет равной

$$y_t = y_{t-1} + ry_{t-1}.$$

Таким образом, получаем, что изменение денежных средств на вкладе описывается разностным уравнением

$$y_t - (1+r)y_{t-1} = 0. \quad (1.1)$$

Будем искать решение уравнения (1.1) в виде:

$$y_t = C\lambda^t;\ y_{t-1} = C\lambda^{t-1}. \quad (1.2)$$

Подставляем соотношение (1.2) в (1.1) имеем

$C\lambda^t - (1+r)C\lambda^{t-1} = 0$;

$C\lambda^{t-1}(\lambda - 1 - r) = 0$;

$\lambda = 1 + r$.

С учетом формул (1.2) получаем

$$y_t = C(1+r)^t. \quad (1.3)$$

При $t = 0$ известно, что $y_0 = z_0$. Поэтому имеем из формулы (1.3), что

$$y_0 = C = z_0.$$

В результате получаем

$$y_t = z_0(1+r)^t,\ t = 0, 1, 2, \ldots \quad (1.4)$$

Формула (1.4) задает изменение денежных средств на вкладе в случае начисления так называемых сложных процентов.

Случай 2. Рассмотрим теперь вторую задачу. Пусть z_t – сумма денежных средств ежегодно дополнительно размещаемых на вкладе. Согласно условию имеем

$$z_t - z_{t-1} = 0{,}1z_0. \quad (1.5)$$

Будем искать решение уравнения (1.5) в виде:

$$z_t = at + b,\ z_{t-1} = a(t-1) + b. \quad (1.6)$$

Подставляя соотношение (1.6) в уравнение (1.5), имеем

$at + b - a(t-1) - b = 0{,}1z_0$;

$a = 0{,}1z_0$;

$z_t = 0{,}1z_0 t + b$.

Первоначальный вклад при $t = 0$ равен z_0. Отсюда следует $b = z_0$ и тогда

$$z_t = z_0(0{,}1t + 1). \quad (1.7)$$

Согласно постановке задачи по истечению каждого года сумма y_t денежных средств на вкладе увеличивается на величину начисленных процентов ry_{t-1}, а также на величину дополнительной суммы пополнения вклада, изменение которого описывается формулой (1.7). Отсюда следует

$y_t = y_{t-1} + ry_{t-1} + z_t$;

$$y_t - (1+r)y_{t-1} = 0{,}1z_0 t + z_0. \quad (1.8)$$

Решение разностного уравнения (1.8) ищется в виде суммы решения однородного уравнения (1.1) y_t^0 вида (1.3) и любого частного решения $\tilde{y}_t$ неоднородного уравнения (1.8). Частное решение уравнения (1.8) будем искать в виде

$$\tilde{y}_t = At + B;\ \tilde{y}_{t-1} = A(t-1) + B. \quad (1.9)$$

Подставляя равенства (1.9) в (1.8), получаем

$At + B - (1+r)(A(t-1) + B) = 0{,}1z_0 t + z_0$;

$$-rAt + A(1+r) - rB = 0{,}1z_0 t + z_0. \qquad (1.10)$$

Приравнивая коэффициенты при t и слагаемых, не содержащих t, в левой и правой частях равенства (1.10), имеем

$$-rA = 0{,}1z_0;\ A = -\frac{z_0}{10r};$$

$$A(1+r) - rB = z_0;\ B = -\frac{z_0}{10r^2}(1+11r).$$

С учетом формулы (1.9) получаем

$$\tilde{y}_t = -\frac{z_0 t}{10r} - \frac{z_0}{10r^2}(1+11r). \qquad (1.11)$$

Общее решение уравнения (1.8) представимо в виде:

$$y_t = y_t^0 + \tilde{y}_t = C(1+r)^t - \frac{z_0 t}{10r} - \frac{z_0}{10r^2}(1+11r).$$

Постоянную C находим из условия, что при $t=0$ значение $y_0 = z_0$. В результате получаем

$$C = z_0 + \frac{z_0}{10r^2}(1+11r) = \frac{z_0(1+r)}{r} + \frac{z_0}{10r^2}(1+r) = \frac{z_0}{r}(1+r)\left(1+\frac{1}{10r}\right).$$

Таким образом, окончательно имеем

$$y_t = \frac{z_0}{r}\left(1+\frac{1}{10r}\right)(1+r)^{t+1} - \frac{z_0 t}{10r} - \frac{z_0}{10r^2}(1+11r). \qquad (1.12)$$

Формула (1.12) описывает изменение денежных средств на вкладе по истечении t лет, $t = 1, 2, \ldots$

3. *Методические рекомендации по выполнению работы*

Пусть $p=0$ и $q=0$, тогда исходные данные: $z_0 = 101$, $i=1$. Показатель, описывающий приращение вклада, равен $r = \frac{i}{100} = 0{,}01$. Согласно первому случаю процесс приращения вклада описывается формулой (1.4):

$$y_t = z_0(1+r)^t = 101 \cdot 1{,}01^t,\ t = 0, 1, 2, \ldots.$$

Согласно второму случаю вклад растет согласно формуле (1.12):

$$y_t = \frac{z_0}{r}\left(1+\frac{1}{10r}\right)(1+r)^{t+1} - \frac{z_0 t}{10r} - \frac{z_0}{10r^2}(1+11r).$$

Для удобства выполнения расчетов отдельно вычислим постоянные величины в формулах (1.4) и (1.12): $(1+r)$; $\frac{1}{r}\left(1+\frac{1}{10r}\right)$ и $\frac{z_0}{10r^2}(1+11r)$.

Построим расчетную область на листе Excel (рис. 1.1), где соответственно заполним ячейки:

B3→ 101;

B4→ 1;

E1→ =B4/100;

E2→ =1+E1;

E3→ =(1+1/(10*E1))/E1;

E4→ =B3*(1+11*E1)/(10*E1^2).

	A	B	C	D	E
1	p=	0		r=	0,01
2	q=	0		1+r=	1,01
3	z0=	101		(1+1/(10r))/r=	1100
4	i=	1		z0(1+11r)/(10rr)=	112110
5					
6	t	yt - 1 случай	yt - 2 случай	z0*2=	202
7	0	101,00	101,00	z0*5=	505
8	1	102,01	213,11		
9	2	103,03	336,44		
10	3	104,06	471,11		
11	4	105,10	617,22		
12	5	106,15	774,89		
13	6	107,21	944,24		
14	7	108,29	1125,38		
15	8	109,37	1318,43		
16	9	110,46	1523,52		
17	10	111,57	1740,75		
18	11	112,68	1970,26		
19	12	113,81	2212,16		
20	13	114,95	2466,59		

Рис. 1.1. Вычисление изменения вклада

Далее построим таблицу для расчета изменения денежных средств по годам. В ячейки А7, А8, А9, … введем $t = 0, 1, 2, \ldots$ – здесь будем указывать изменение времени. В столбце В будем считать изменение денежных средств в условиях первого случая, а в столбце С – второго:

В7→ =В3;

С7→ =В3;

В8→ =$B$3*СТЕПЕНЬ($E$2;A8);

С8→ =$B$3*$E$3*СТЕПЕНЬ($E$2;A8+1)-$B$3*A8/(10*$E$1)-$E$4.

Далее, используя маркер автозаполнения, распространим формулы, заданные в ячейках В8 и С8 вниз. Для данных, выражающих изменение вклада, установим формат числовой с двумя знаками после запятой.

Требуется выяснить, через сколько лет в первом случае вклад удвоится. Подсчитаем величину удвоенного вклада: Е6→ =2*В3. Посмотрим в столбце с данными расчета по первому случаю, когда значение $y_t \geq 2z_0$. Этому условию соответствует ячейка В77, в которой значение $y_t = 202{,}68$ при этом $t = 70$. Следовательно, через 70 лет вклад, рассчитываемый согласно условиям первого случая удвоится.

Определим, через сколько лет во втором случае вклад увеличится в пять раз. Сначала вычислим значение требуемой суммы вклада в ячейке Е7, а затем, используя таблицу, найдем нужное значение. Согласно расчетам в ячейке C11 содержится значение 617,22, которое и будет ответом. При этом $t = 4$. Отсюда можно сделать вывод, что рост средств в условиях второго случая производится гораздо быстрее, чем первого.

Построим графики отдельно для иллюстрации изменения вклада в условия первого и второго случаев. Исходными данными для построения первого графика будет диапазон A6:B17 (рис. 1.2). Исходными данными для построения второго графика будет диапазон A6:C17. Однако при настройке области построения исключим B6:B17, так как этот диапазон иллюстрирует первый случай изменения денежных средств (рис. 1.3).

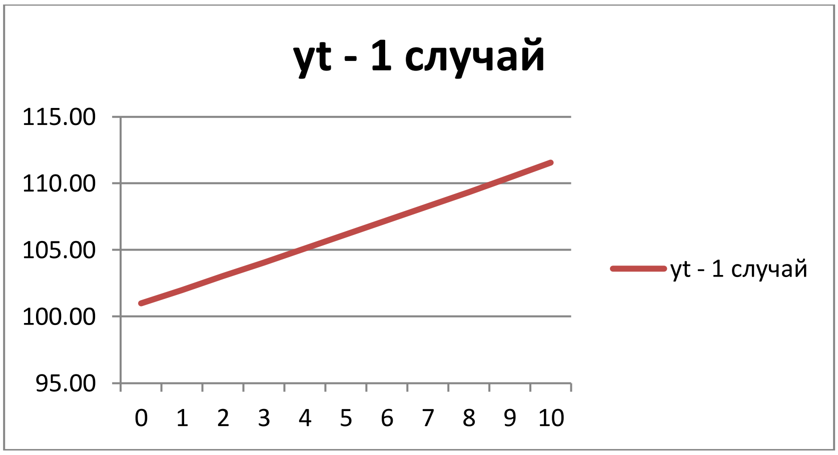

Рис. 1.2. Изменение суммы вклада в условия первого случая

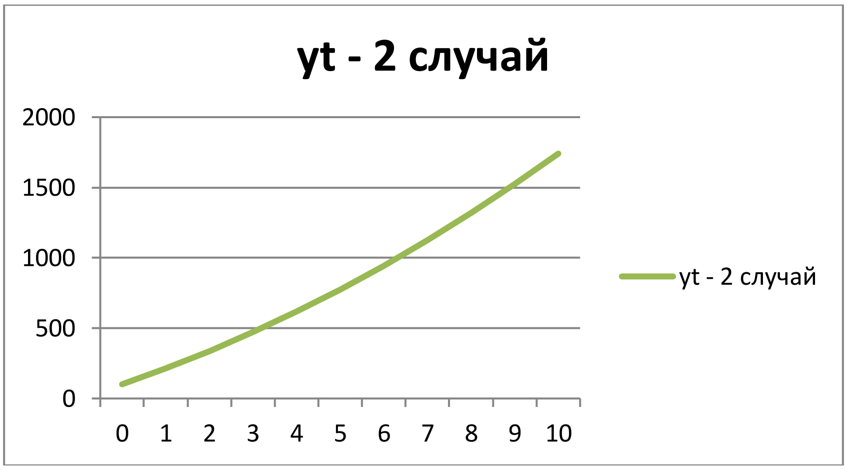

Рис. 1.3. Изменение суммы вклада в условия второго случая

Определим, какую сумму z_0 необходимо разместить на вкладе в условиях второго случая, чтобы через 5 лет наращенная сумма превысила $10(100 + 4p + 3q + 1) = 1010$. Воспользуемся формулой (1.12), откуда выразим z_0 при условии, что $t = 5$, $y_5 = 1010$:

$$y_t \le \frac{z_0}{r}\left(1 + \frac{1}{10r}\right)(1 + r)^{t+1} - \frac{z_0 t}{10r} - \frac{z_0}{10r^2}(1 + 11r);$$

$$z_0 \ge y_5\left(\frac{1}{r}\left(1 + \frac{1}{10r}\right)(1 + r)^{5+1} - \frac{5}{10r} - \frac{1}{10r^2}(1 + 11r)\right)^{-1}.$$

Выполним расчет (рис. 1.4):
H3→ =10*(100+4*B1+3*B2+1)
H4→ =E3*СТЕПЕНЬ(E2;H2+1)-H2/(10*E1)-(1+11*E1)/(10*E1^2)
H5→ =H3/H4.

	G	H	I	J
1	Дополнительный расчет			
2	t=	5		
3	yt=	1010		
4	коэффициент	7,672166		
5	начальный вклад	131,64		

Рис. 1.4. Определение начальной суммы вклада

Следовательно, в рассматриваемых условиях начальный вклад должен составлять не менее 131, 64 тыс. руб., чтобы через пять лет сумма была не менее 1010 тыс. руб. на счете.

3. Реализация модели в Excel и оформление отчета

Порядок организации вычислительной области на листе Excel предполагает:

1. Согласно варианту задать исходные данные.
2. Записать формулы изменения суммы вклада для первого и второго случаев.
3. Выполнить расчет изменения денежных средств на вкладе для первого и второго случаев по формулам (1.4) и (1.12) соответственно.
4. Определить, через какой период времени сумма вклада превысит удвоенную сумму первоначального вклада для первого и второго случаев.
5. Построить графики изменения суммы вклада для обоих случаев.
6. Ответить на вопросы о времени, когда вклад увеличится в два раза при расчете в условиях первого случая и, когда вклад увеличится в пять раз при расчете в условиях второго случая.
7. Выполнить расчет первоначальной суммы вклада z_0, которую необходимо разместить на вкладе, чтобы через 5 лет наращенная сумма превысила $10(100 + 4p + 3q + 1)$ ден. средств.
8. Подготовить отчет.

Отчет оформляется с использованием текстового процессора Microsoft Word и включает:

1. Постановку задачи для заданных исходных данных. В этой лабораторной работы описывается два варианта постановки в соответствии с указанными случаями.
2. Математическую модель задачи для каждого из рассматриваемых случаев.
3. Решение задачи.
4. Описание ответов на вопросы работы.

5. Приложение в виде книги Excel.