2012年《高阶数值方法》课程的总结报告

蔡晓峰 19020111152509

Contents

1. 守恒律的推导

1) 质量守恒定律

在所考察区域中任取一光滑的闭曲面Γ,其所围的区域记Ω.根据质量守恒定律,在时间区间$[t_1,t_2]$内,区域Ω中流体的增加量$\int_\Omega \rho(x,t_w)d\Omega - \int_\Omega \rho(x,t_1)d\Omega$,应等于在此段时间内经过边界$\Gamma$流入$\Omega$中的流体的质量,而后者应等于$-\int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial\Omega}\rho(x,t)\vec{v}\vec{n}dsdt$.
这样,质量守恒定律就写为如下的积分形式:

$$\int_\Omega \rho(x,t_2)d\Omega - \int_\Omega \rho(x,t_1)d\Omega = -\int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial\Omega}\rho(x,t)\vec{v}\vec{n}dsdt, \forall\Omega, \forall[t_1,t_2]. \tag{1.1}$$

在所考察的函数连续可微的条件下,由格林公式,上式可改写为

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t}d\Omega dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \nabla\cdot(\rho\vec{v})d\Omega dt = \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \left[\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v})\right]d\Omega dt = 0, \forall\Omega, \forall[t_1,t_2]. \tag{1.2}$$

于是,由Ω及$[t_1,t_2]$的任意性及被积函数的连续性,就得到质量守恒定律的微分形式如下:

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0 \tag{1.3}$$

这通常称为连续性方程. 注:只有在有关状态函数为连续可微的前提下,微分形式的守恒定律才有意义.而在这些状态函数的连续可微性不具备的情形(对应于气体动力学的激波,无论理论上还是应用上,这恰恰是最为重要的情形),相应的积分形式的守恒定律还是有意义的,且这构成一切进一步讨论的出发点.

2) 动量守恒定律

Date: 2013/1/2.

积分形式:

(1.4)

$$\int_\Omega (\rho\vec{v}(x,t_2)-\rho\vec{(}x,t_1))dx = -\int_{t_1}^{t_2}\int_\Gamma \rho(\vec{v}\bigotimes\vec{v})\vec{n}dSdt-\int_{t_1}^{t_2}\int_\Gamma p\vec{n}dSdt, \forall\Omega, \forall[t_1,t_2].$$

微分形式:

$$(\rho\vec{v})_t + \nabla\cdot(\rho\vec{v}\bigotimes\vec{v}+pI) = 0, \forall\Omega, \forall[t_1,t_2]. \tag{1.5}$$

3) 能量守恒定律

积分形式:

(1.6)

$$\int_\Omega E(x,t_2)dx-\int_\Omega E(x,t_1)dx = -\int_{t_1}^{t_2}\int_\Gamma E\vec{v}\cdot\vec{n}dSdt-\int_{t_1}^{t_2}\int_\Gamma p\vec{v}\vec{n}dSdt, \forall\Omega, \forall[t_1,t_2].$$

微分形式:

$$E_t + \nabla\cdot((E+p)\vec{v}) = 0, \forall[t_1,t_2]. \tag{1.7}$$

特别地，可以由(1.3)、(1.5)、(1.7)得到一维欧拉方程

$$\begin{pmatrix} \rho \\ m \\ E \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} m \\ \frac{m^2}{\rho}+p \\ \frac{m}{\rho}(E+p) \end{pmatrix}_x = 0 \tag{1.8}$$

上述方程为守恒型方程. 其重要特点是:连续、动量和能量方程被写为统一形式.

2. 有限体积型WENO格式

考虑一维标量双曲守恒律方程，

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{2.1}$$

按照标准的WENO格式的网格剖分,设网格剖分为：

$$0 = x_{\frac{1}{2}} < x_{\frac{3}{2}} < \cdots < x_{N-\frac{1}{2}} < x_{N+\frac{1}{2}} = 1, \tag{2.2}$$

网格单元$I_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$,和网格单元中心为$x_i = \frac{1}{2}(x_{i-\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}})$, 步长为$\Delta x_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}, \quad i = 1, 2, ..., N$. 同时,我们定义最大网格单元大小为:

$$\Delta x = \max_{1\le i\le N} \Delta x_i$$

微分方程(2.1)只有在u光滑是成立,其实实际物理过程的守恒律应该是积分型。因此我们将方程(2.1), 在单元I_i上积分可得：

$$\frac{d}{dt}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x,t)dt = -\frac{1}{\Delta x_i}(f(u(x_{i+\frac{1}{2}},t) - f(u(x_{i-\frac{1}{2}},t))) \tag{2.3}$$

定义函数$u(x,t)$的单元平均值

$$\overline{u}_i(t) = \frac{1}{\Delta x_i}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(\xi,t)d\xi \tag{2.4}$$

我们来数值逼近方程(2.3), 用以下的守恒格式：

$$\frac{d\overline{u}_i(t)}{dt} = -\frac{1}{\Delta x_i}(\widehat{f}_{i+\frac{1}{2}} - \widehat{f}_{i-\frac{1}{2}}), \tag{2.5}$$

由于单元平均值已经知道,因此我们需要构造函数在单元边界点(即半网格点)处的值$u_{i+\frac{1}{2}}, i = 0, 1, ...N$. 假定所用边界条件为周期边界条件,假定在计算区域以外的数值解是可以得到的。这样对于一致网格剖分,$\Delta x_i = \Delta x$, 对于给定的单元I_i, 和给定的模板个数k, 我们选择模板

$$S(i) = \{I_{i-r}, ..., I_{i+s}\}, r + s = k - 1$$

这里r是模板的左边界,而s是模板的右边界。由前面的叙述可以知道, 我们的主要问题在于如何求出半网格点$u^{\pm}_{i+\frac{1}{2}}$ 的值, 而$u^{-}_{i+\frac{1}{2}}, u^{+}_{i-\frac{1}{2}}$ 都在单元I_i 内, 所以我们要求出函数$u(x,t)$在区间I_i内的插值多项式$p(x)$, 使得其满足

$$u(x) - p(x) = O(\Delta x^{r+1}), \quad \partial p(x) = r$$

由于守恒问题的需要, 我们要求

$$\frac{1}{\Delta x}\int_{I_l} u(x)dx = \frac{1}{\Delta x}\int_{I_l} p(x)dx, \quad l = j - k + 1, ..., j + k - 1 \tag{2.6}$$

也即是

$$\frac{1}{\Delta x}\int_{I_j} p(x)dx = \overline{u}_j$$

加上模板I_{j-1}, I_{j+1}, 要求使得多项式最光滑, 即多项式导数的绝对值最小。

2.1. **三阶WENO的数值格式的推导.** 此时, $k = 2$, 包含区间I_j的模板有两个, $S_0 = \{I_{j-1}, I_j\}, S_1 = \{I_j, I_{j+1}\}, J = \{I_{j-1}, I_j, I_{j+1}\}$ 要找出多项式$P_0(x), P_1(x), Q(x)$, 满足：

$$\frac{1}{\Delta x}\int_{I_{j+l}} p_0(x)dx = \overline{u}_{j+l}, l = -1, 0 \tag{2.7}$$

$$\frac{1}{\Delta x}\int_{I_{j+l}} p_1(x)dx = \overline{u}_{j+l}, l = 0, 1 \tag{2.8}$$

$$\frac{1}{\Delta x}\int_{I_{j+l}} Q(x)dx = \overline{u}_{j+l}, l = -1, 0, 1 \tag{2.9}$$

不失一般性, 可设多项式为$p(x) = \overline{p}(\xi) = a_0 + a_1\xi, \xi = \frac{x - x_j}{\Delta x}$

对于$p_0(x)$, 所使用的模板为$S_0 = \{I_{j-1}, I_j\}$, 由$p_0(x)$的表达式,可得：

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{j-\frac{3}{2}}}^{x_{j-\frac{1}{2}}} (a_0 + a_1\frac{x - x_j}{\Delta x})dx = \overline{u}_{j-1} \\ \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} (a_0 + a_1\frac{x - x_j}{\Delta x})dx = \overline{u}_j \end{cases} \tag{2.10}$$

因此,可以得到：

$$\begin{cases} a_0 - a_1 = \overline{u}_{j-1}, \\ a_0 = \overline{u}_j \end{cases} \tag{2.11}$$

所以得到, $a_0 = \overline{u}_j, \quad a_1 = \overline{u}_j - \overline{u}_{j-1}$

故有,多项式

$$p_0(x) = \overline{u}_j + (\overline{u}_j - \overline{u}_{j-1})\frac{x - x_j}{\Delta x}$$

同理可得对于多项式$p_1(x)$, 通过类似的运算可得

$$p_1(x) = \overline{u}_j + (\overline{u}_{j+1} - \overline{u}_j)\frac{x - x_j}{\Delta x}$$

因此有,

$$\begin{cases} u(x^-_{j+\frac{1}{2}}) = p_0(x_{j+\frac{1}{2}}) + O(\Delta x^2) = \frac{3}{2}\overline{u}_j - \frac{1}{2}\overline{u}_{j-1} + O(\Delta x^2) \\ u(x^+_{j+\frac{1}{2}}) = p_1(x_{j+\frac{1}{2}}) + O(\Delta x^2) = \frac{1}{2}\overline{u}_j + \frac{1}{2}\overline{u}_{j+1} + O(\Delta x^2) \end{cases} \tag{2.12}$$

而对于多项式$Q(x)$, 则可以将其写成如下的表达式:

$$Q(x) = \overline{u}_{j-1}l_0(x) + \overline{u}_j l_1(x) + \overline{u}_{j+1}l_2(x) \tag{2.13}$$

则其中的基函数$l_i(x)$, 则应该满足:

$$\frac{1}{\Delta x}\int_{I_{j+l}} l_i(x)dx = \delta_{i,l+1}, l = -1, 0, 1, \quad i = 0, 1, 2$$

由于此时是在三个点上的插值,所以此时的基函数应该是二次多项式,故可设

$$l_i(x) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 = a_0 + a_1\frac{x - x_j}{\Delta x} + a_2(\frac{x - x_j}{\Delta x})^2$$

通过运算,可知道:

$$\begin{cases} l_0(x) = -\frac{1}{24} - \frac{1}{2}\frac{x-x_j}{\Delta x} + \frac{1}{2}(\frac{x-x_j}{\Delta x})^2 \\ l_1(x) = \frac{13}{12} - (\frac{x-x_j}{\Delta x})^2 \\ l_2(x) = -\frac{1}{24} + \frac{1}{2}\frac{x-x_j}{\Delta x} + \frac{1}{2}(\frac{x-x_j}{\Delta x})^2 \end{cases} \tag{2.14}$$

所以,

$$Q(x_{j+\frac{1}{2}}) = \overline{u}_{j-1}l_0(x_{j+\frac{1}{2}}) + \overline{u}_j l_1(x_{j+\frac{1}{2}}) + \overline{u}_{j+1}l_2(x_{j+\frac{1}{2}}) = -\frac{1}{6}\overline{u}_{j-1} + \frac{5}{6}\overline{u}_j + \frac{1}{3}\overline{u}_{j+1} + O(\Delta x^3)$$

下面, 我们来求系数r_0, r_1, 使得

$$Q(x_{j+\frac{1}{2}}) = r_0 p_0(x_{j+\frac{1}{2}}) + r_1 p_1(x_{j+\frac{1}{2}})$$

即为:

$$-\frac{1}{6}\overline{u}_{j-1} + \frac{5}{6}\overline{u}_j + \frac{1}{3}\overline{u}_{j+1} = -\frac{r_0}{2}\overline{u}_{j-1} + (\frac{3}{2}r_0 + \frac{1}{2}r_1)\overline{u}_j + \frac{r_1}{2}\overline{u}_{j+1}$$

通过比较等式左右两边的系数,可得$r_0 = \frac{1}{3}, r_1 = \frac{2}{3}$, 称之为线性权.

下面再求非线性权, 也称为光滑指示器(or smooth indicater) 有公式

$$\beta_r = \sum_{l=1}^{k-1}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \Delta x^{2l-1}(\frac{\partial^l p_r(x)}{\partial^l x})^2 dx \tag{2.15}$$

所以当$k = 2$时, $l = 1$, 因此

$$\beta_0=\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}\Delta x(\frac{\partial p_0(x)}{\partial x})^2dx=(\overline{u}_j-\overline{u}_{j-1})^2$$

同理

$$\beta_1=\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}\Delta x(\frac{\partial p_1(x)}{\partial x})^2dx=(\overline{u}_{j+1}-\overline{u}_j)^2$$

所以非线性权

$$\widetilde{w}_l=\frac{r_l}{(\beta_l+\epsilon)^2},\omega_l=\frac{\widetilde{w}_l}{\sum_{s=0}^{k-1}\widetilde{w}_s}$$

最后求出$u(x^-_{j+\frac{1}{2}})$的近似值

$$u(x^-_{j+\frac{1}{2}})=\omega_0p_0(x_{j+\frac{1}{2}})+\omega_1p_1(x_{j+\frac{1}{2}})$$

同理可以求出

$$u(x^+_{j-\frac{1}{2}})=\omega_0p_0(x_{j-\frac{1}{2}})+\omega_1p_1(x_{j-\frac{1}{2}})$$

其中,

$$\omega_l=\frac{\widetilde{\omega}_l}{\sum_{s=0}^{k-1}\widetilde{\omega}_s},\quad \widetilde{\omega}_l=\frac{\widetilde{r}_l}{(\beta_l+\epsilon)^2},\quad \widetilde{r}_l=r_{k-1-l}$$

2.2. **五阶WENO的数值格式的推导.** 此时,$k=3$, 包含I_j的可选模板有三个,

$S_0=\{I_{j-2},I_{j-1},I_j\},S_1=\{I_{j-1},I_j,I_{j+1}\},S_2=\{I_j,I_{j+1},I_{j+2}\},J=\{I_{j-2},I_{j-1},I_j.I_{j+1},I_{j+2}\}$

和三阶WENO的情形相似, 我们寻找多项式$p_0(x),p_1(x),p_2(x)$, 使得其满足在单元上的积分等于其单元平均值:

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{\Delta x}\int_{I_{j+l}}p_0(x)dx=\overline{u}_{j+l},l=-2,-1,0\\ \frac{1}{\Delta x}\int_{I_{j+l}}p_1(x)dx=\overline{u}_{j+l},l=-1,0,1\\ \frac{1}{\Delta x}\int_{I_{j+l}}p_2(x)dx=\overline{u}_{j+l},l=0,1,2\\ \frac{1}{\Delta x}\int_{I_{j+l}}Q(x)dx=\overline{u}_{j+l},l=-2,-1,0,1,2\end{array}\right. \tag{2.16}$$

不失一般性, 设所选多项式在每个模板上为不超过二次的多项式, 即设

$$p(x)=a_0+a_1\xi+a_2\xi^2=a_0+a_1\frac{x-x_j}{\Delta x}+a_2(\frac{x-x_j}{\Delta x})^2$$

例如对于情况, $S_1=\{I_{j-1},I_j,I_{j+1}\}$, 通过运算可以得到:

$$\left\{\begin{array}{l}a_0-a_1+\frac{13}{12}a_2=\overline{u}_{j-1}\\ a_0+\frac{1}{12}a_2=\overline{u}_j\\ a_0+a_1+\frac{13}{12}a_2=\overline{u}_{j+1}\end{array}\right. \tag{2.17}$$

联立解之可得,

$$a_0=\overline{u}_j-\frac{1}{24}\delta^2\overline{u}_j,\quad a_1=\frac{1}{2}(\overline{u}_{j+1}-\overline{u}_{j-1}),\quad a_2=\frac{1}{2}\delta^2\overline{u}_j,$$

其中$\delta^2\overline{u}_j=\overline{u}_{j+1}-2\overline{u}_j+\overline{u}_{j-1}$

所以,

$$p_1(x_{j+\frac{1}{2}}) = (a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2)|_{\xi=\frac{1}{2}} = -\frac{1}{6}\overline{u}_{j-1} + \frac{5}{6}\overline{u}_j + \frac{1}{3}\overline{u}_{j+1}$$

同理, 对于S_0, S_2 , 也有

$$p_0(x_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{3}\overline{u}_{j-2} - \frac{7}{6}\overline{u}_{j-1} + \frac{11}{6}\overline{u}_j$$

$$p_2(x_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{3}\overline{u}_j + \frac{5}{6}\overline{u}_{j+1} - \frac{1}{6}\overline{u}_{j+2}$$

而对于多项式$Q(x)$, 则有,

$$Q(x) = \overline{u}_{j-2}l_0(x) + \overline{u}_{j-1}l_1(x) + \overline{u}_j l_2(x) + \overline{u}_{j+1}l_3(x) + \overline{u}_{j+2}l_4(x) \tag{2.18}$$

则其中的基函数$l_i(x)$, 则应该满足:

$$\frac{1}{\Delta x}\int_{I_{j+l}} l_i(x)dx = \delta_{i,l+2}, l = -2, -1, 0, 1, 2 \quad i = 0, 1, 2, 3, 4$$

由于此时是在五个点上的插值,因此多项式$Q(x)$应该是不超过四次的多项式,故可设:

$$l_i(x) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + a_4\xi^4 = a_0 + a_1\frac{x - x_j}{\Delta x} + a_2(\frac{x - x_j}{\Delta x})^2 + a_3(\frac{x - x_j}{\Delta x})^3 + a_4(\frac{x - x_j}{\Delta x})^4$$

经过运算,可得五个基函数的表达式为:

$$\begin{cases} l_0(x) = \frac{3}{640} + \frac{5}{48}\xi - \frac{1}{16}\xi^2 - \frac{1}{12}\xi^3 + \frac{1}{24}\xi^4 \\ l_1(x) = -\frac{29}{480} - \frac{17}{24}\xi + \frac{3}{4}\xi^2 + \frac{1}{6}\xi^3 - \frac{1}{6}\xi^4 \\ l_2(x) = \frac{1067}{960} - \frac{11}{8}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi^4 \\ l_3(x) = -\frac{29}{480} + \frac{17}{24}\xi + \frac{3}{4}\xi^2 - \frac{1}{6}\xi^3 - \frac{1}{6}\xi^4 \\ l_4(x) = \frac{3}{640} - \frac{5}{48}\xi - \frac{1}{16}\xi^2 + \frac{1}{12}\xi^3 + \frac{1}{24}\xi^4 \end{cases} \tag{2.19}$$

这里$\xi = \frac{x-x_j}{\Delta x}$

$$Q(x_{j+\frac{1}{2}}) = (\overline{u}_{j-2}l_0(\xi) + \overline{u}_{j-1}l_1(\xi) + \overline{u}_j l_2(\xi) + \overline{u}_{j+1}l_3(\xi) + \overline{u}_{j+2}l_4(\xi))|_{\xi=\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{30}\overline{u}_{j-2} - \frac{13}{60}\overline{u}_{j-1} + \frac{47}{60}\overline{u}_j + \frac{9}{30}\overline{u}_{j+1} - \frac{1}{20}\overline{u}_{j+1}$$

下面来求线性权,r_0, r_1, r_2,

由

$$Q(x_{j+\frac{1}{2}}) = r_0 p_0(x_{j+\frac{1}{2}}) + r_1 p_1(x_{j+\frac{1}{2}}) + r_2 p_2(x_{j+\frac{1}{2}})$$

$$\frac{1}{30}\overline{u}_{j-2} - \frac{13}{60}\overline{u}_{j-1} + \frac{47}{60}\overline{u}_j + \frac{9}{30}\overline{u}_{j+1} - \frac{1}{20}\overline{u}_{j+1} =$$

$$\frac{r_0}{3}\overline{u}_{j-2} + (-\frac{7}{6}r_0 - \frac{1}{6}r_1)\overline{u}_{j-1} + (\frac{11}{6}r_0 + \frac{5}{6}r_1 + \frac{1}{3}r_2)\overline{u}_j + (\frac{1}{3}r_1 + \frac{5}{6}r_2)\overline{u}_{j+1} - \frac{1}{6}r_2\overline{u}_{j+2}$$

通过比较等式两边的系数,可知：$r_0 = \frac{1}{10}, r_1 = \frac{3}{5}, r_2 = \frac{3}{10}$

再来求非线性权, 有前面知道,

$$\beta_r = \sum_{l=1}^{k-1} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \Delta x^{2l-1} (\frac{\partial^l p_r(x)}{\partial^l x})^2 dx \tag{2.20}$$

此时, $k = 3$, 通过计算,可得非线性权

$$\begin{cases} \beta_0 = \frac{13}{12}(\overline{u}_{j-2} - 2\overline{u}_{j-1} + \overline{u}_j)^2 + \frac{1}{4}(\overline{u}_{j-2} - 4\overline{u}_{j-1} + 3\overline{u}_j)^2 \\ \beta_1 = \frac{13}{12}(\overline{u}_{j-1} - 2\overline{u}_j + \overline{u}_{j+1})^2 + \frac{1}{4}(\overline{u}_{j-1} - \overline{u}_{j+1})^2 \\ \beta_2 = \frac{13}{12}(\overline{u}_j - 2\overline{u}_{j+1} + \overline{u}_{j+2})^2 + \frac{1}{4}(3\overline{u}_j - 4\overline{u}_{j+1} + \overline{u}_{j+2})^2 \end{cases} \tag{2.21}$$

所以非线性权,

$$\widetilde{w}_l = \frac{r_l}{(\beta_l + \epsilon)^2}, \quad \omega_l = \frac{\widetilde{w}_l}{\sum_{s=0}^{k-1} \widetilde{w}_s}$$

最后求出$u(x^-_{j+\frac{1}{2}})$的近似值

$$u(x^-_{j+\frac{1}{2}}) = \omega_0 p_0(x_{j+\frac{1}{2}}) + \omega_1 p_1(x_{j+\frac{1}{2}}) + \omega_2 p_2(x_{j+\frac{1}{2}})$$

同理可求出,$u(x^+_{j-\frac{1}{2}})$ 的值.对于三阶和五阶WENO,我们都取$\epsilon = 10^{-6}$.

3. 有限差分型WENO格式

如果我们直接守恒型微分方程出发构造有限差分型格式

$$\frac{du_j}{dt} = -\frac{1}{\Delta x}(\widehat{f}_{j+\frac{1}{2}} - \widehat{f}_{j-\frac{1}{2}}) \tag{3.1}$$

其中, $\widehat{f}_{j+\frac{1}{2}}$ 为数值流通量, 使得格式具有r阶精度, 即

$$\frac{1}{\Delta x}(\widehat{f}_{j+\frac{1}{2}} - \widehat{f}_{j-\frac{1}{2}}) = f(u)_x|_{x=x_j} + O(\Delta x^r)$$

但是不论构造多高阶的在区间端点处得数值流通量,最终的中心差分

$$\frac{1}{\Delta x}(\widehat{f}_{j+\frac{1}{2}} - \widehat{f}_{j-\frac{1}{2}}) = f(u)_x|_{x=x_j} + O(\Delta x^2)$$

如果我们能找到依赖于网格步长的函数$h(x)$, 使得

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} h(\xi) d\xi = f(u(x,t)) + O(\Delta x^r) \tag{3.2}$$

则可取, $\widehat{f}_{j+\frac{1}{2}} = h(x_{j+\frac{1}{2}})$,

$$f(u)_x|_{x=x_j} = \frac{1}{\Delta x}(h(x_{j+\frac{1}{2}}) - h(x_{j-\frac{1}{2}})) + O(\Delta x^r)$$

很容易看出, $h(x)$的平均值等于$f(x)$的点值, 即$\overline{h}_j = f(u_j)$, 这相当于已知$\{\overline{h}_j\}_{j=1}^N$.

构造$\{h(x_{j+\frac{1}{2}})\}_{j=1}^{N}$，此时,便可以使用前面介绍的有限体积的WENO的重构技巧了.

然而，需要注意$\{h(x_{j+\frac{1}{2}})\}_{j=1}^{N}$的选取，我们从守恒律的迎风性质出发构造迎风格式来保证格式稳定性。最简单方法是按照以下过程获得迎风格式:

首先计算Roe速度

$$\overline{a}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{f(u_{j+1}) - f(u_j)}{u_{j+1} - u_j}, \tag{3.3}$$

如果$\overline{a}_{j+\frac{1}{2}} \geq 0$,那么风从左边吹到右边。我们使用$h\left(x^{-}_{j+\frac{1}{2}}\right)$代替数值流通量$\widehat{f}_{j+\frac{1}{2}}$。

如果$\overline{a}_{j+\frac{1}{2}} < 0$那么风从右边吹到左边。我们使用$h\left(x^{+}_{j+\frac{1}{2}}\right)$代替数值流通量$\widehat{f}_{j+\frac{1}{2}}$。

这个过程就是一阶精度的Roe格式[1]。但是Roe格式在处理稀疏波会得到不满足熵条件的膨胀激波。例如Roe格式用于求解以下Burgers方程

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} -1, & if \quad x < 0, \\ 1, & if \quad x \geq 0, \end{cases} \end{cases} \tag{3.4}$$

则解会收敛到不满足熵条件的膨胀激波；

$$u(x,t) = \begin{cases} -1, & if \quad x < 0, \\ 1, & if \quad x \geq 0, \end{cases} \tag{3.5}$$

在[3]中如下局部修正方法可以修补这个方法。

$$h^{RF}_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} f(u_j), & if \ f'(u) \geq 0 \ between \ u_j \ and \ u_{j+1} \\ f(u_{j+1}), & if \ f'(u) < 0 \ between \ u_j \ and \ u_{j+1} \\ h^{LLF}_{j+\frac{1}{2}}, & otherwise; \end{cases} \tag{3.6}$$

但是通常使用更稳健的全局“通量分裂”:

$$f(u) = f^{+}(u) + f^{-}(u) \tag{3.7}$$

其中

$$\frac{df^{+}(u)}{du} \geq 0, \quad \frac{df^{-}(u)}{du} \leq 0. \tag{3.8}$$

最简单的分裂是Lax-Friedrichs型分裂:

$$f^{\pm}(u) = \frac{1}{2}(f(u) \pm \alpha u) \tag{3.9}$$

其中α为在u相关区域上取$\alpha = \max_u |f'(u)|$.

有限体积格式不要求网格一定是一致的,而有限差分方法只能使用于均匀网格或光滑网格.有限差分格式和有限体积格式对一维线性PDE问题是相近的,唯一的不同是它们的初始条件不同, 有限体积方法是利用的准确初值的单元平均值,而有限差分格式则是利用初值的节点值,当然格式仍然是非线性的,然而,这些相似之处对非线性PDE问题是不成立的.

4. 时间离散方法

4.1. **Shu, Osher型Runge-Kutta方法.** WENO格式的时间离散方法用Shu和Osher在[2]中所发展的一类型高阶TVD Runge-kutta型方法。为了解常微分方程

$$\frac{du}{dt} = L(u), \tag{4.1}$$

其中是一个空间算子,一个三阶TVD Runge-kutta方法为

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^n + \Delta t L(u^n) \\ u^{(2)} &= \tfrac{3}{4}u^n + \tfrac{1}{4}(u^{(1)} + \Delta t L(u^{(1)})) \\ u^{n+1} &= \tfrac{1}{3}u^n + \tfrac{2}{3}(u^{(2)} + \Delta t L(u^{(2)})) \end{aligned} \tag{4.2}$$

另一个4阶的非TVD Runge-kutta方法为

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^n + \tfrac{1}{2}\Delta t L(u^n) \\ u^{(2)} &= u^n + \tfrac{1}{2}\Delta t L(u^{(1)}) \\ u^{(3)} &= u^n + \Delta t L(u^{(2)}) \\ u^{n+1} &= \tfrac{1}{3}(-u^n + u^{(1)} + 2u^{(2)} + u^{(3)}) + \Delta t L(u^{(3)})) \end{aligned} \tag{4.3}$$

References

[1] P.L. Roe, Aprroximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes, Journal of Computational Physics, v43 (1981), pp.357-372.

[2] C.-W. Shu, S. Osher, Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes, Journal of Computational Physics, v77 (1988), pp. 439-471.

[3] C.-W. Shu, S. Osher, Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes II, Journal of Computational Physics, 83 (1989), pp. 32-78.