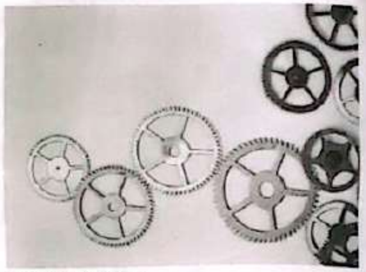
Pendalaman Materi

Ada banyak roda gigi pada mesin. Roda-roda gigi tersebut mempunyai bentuk dasar lingkaran. Jadi roda-roda gigi pada mesin dapat dipandang sebagai lingkaran-lingkaran yang berbeda ukuran dan posisinya. Jika lingkaran-lingkaran tersebut digambarkan pada bidang koordinat, bagaimana cara menentukan persamaannya?

Pada bab ini kamu akan belajar cara menentukan persamaan lingkaran berdasarkan ukurannya (jari-jari lingkaran) dan posisinya (koordinat titik pusat lingkaran).

A. Lingkaran dan Garis Singgungnya

Perhatikan bentuk roda gigi pada **Gambar 1.1.** Pada roda gigi terdapat poros yang merupakan titik pusat roda. Kedudukan roda gigi tergantung pada posisi porosnya. Ukuran roda gigi dilihat dari panjang jari-jarinya. Pada subbab ini kamu akan belajar tentang persamaan lingkaran yang kedudukannya tergantung koordinat titik pusatnya dan ukuran lingkaran tergantung panjang jari-jarinya.



Gambar 1.1 Roda gigi

1. Pengertian Lingkaran

Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap titik tertentu. Titik tertentu tersebut disebut pusat lingkaran, sementara jarak yang sama itu disebut jari-jari lingkaran (radius).

2. Persamaan Lingkaran

a. Persamaan lingkaran yang berpusat di titik O(0, 0) dan *berjari-jari r*

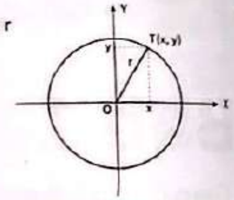
Perhatikan **Gambar 1.2.**

$OT = r \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = r$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2$

Jadi, persamaan lingkaran yang berpusat di titik O(0, 0) dan berjari-jari r adalah:

$$x^2 + y^2 = r^2$$



Gambar 1.2 Lingkaran berpusat di titik O(0, 0)

b. Persamaan lingkaran yang berpusat di titik P(a, b) dan berjari-jari *r*

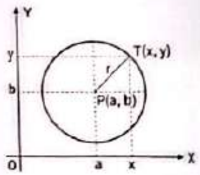
Perhatikan **Gambar 1.3.**

$PT = r \Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r$

$\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

Jadi, persamaan lingkaran yang berpusat di titik P(a, b) dan berjari-jari r adalah:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$



Gambar 1.3 Lingkaran berpusat di titik P(a, b)

c. Bentuk umum persamaan lingkaran

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

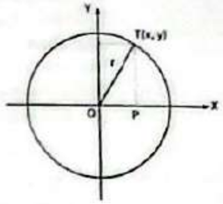
Lingkaran dengan bentuk persamaan di atas mempunyai koordinat titik pusat $(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B)$ dan berjari-jari $r = \sqrt{(-\frac{1}{2}A)^2 + (-\frac{1}{2}B)^2 - C}$.

Aktivitas 1

ANIK YULIA / 20 / XII A2

Menurunkan Rumus Persamaan Lingkaran

Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap titik tertentu. Perhatikan gambar di samping. Titik-titik pada lingkaran berjarak sama (r) dari titik O(0, 0). Misalkan titik T(x, y) merupakan sembarang titik pada lingkaran sehingga:



OP = x

PT = y

OT = r

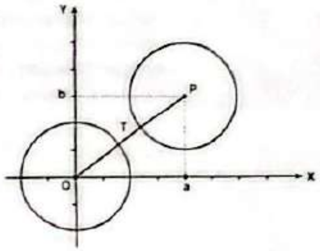
Segitiga OPT siku-siku di P sehingga:

$OP^2 + PT^2 = OT^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2$

Jadi, persamaan lingkaran berpusat di titik O(0, 0) dan berjari-jari r adalah $x^2 + y^2 = r^2$.

Jika lingkaran berpusat di titik O(0, 0) ditransformasikan oleh translasi $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, diperoleh bayangan lingkaran berpusat di titik P(a, b) dengan jari-jari tetap. Persamaan bayangan ditentukan sebagai berikut.



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix}$$

Dari kesamaan matriks diperoleh:

$x' = x + a \quad \Leftrightarrow x = x' - a$

$y' = y + b \quad \Leftrightarrow y = y' - b$

Substitusikan $x = x' - a$ dan $y = y' - b$ ke dalam persamaan lingkaran diperoleh:

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2$

$\Leftrightarrow (x' - a)^2 + (y' - b)^2 = r^2$

Jadi, persamaan lingkaran berpusat di titik P(a, b) dan berjari-jari r adalah $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Lingkaran dengan persamaan $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ mempunyai pusat di titik P(a, b) dan berjari-jari r. Jika persamaan lingkaran tersebut dijabarkan, diperoleh:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + (-2a)x + (-2b)y + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

Persamaan tersebut dapat dituliskan menjadi $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ dengan:

$A = -2a \Leftrightarrow a = -\frac{A}{2}$

$B = -2b \Leftrightarrow b = -\frac{B}{2}$

$C = a^2 + b^2 - r^2 \Leftrightarrow r^2 = a^2 + b^2 - C$

$\Leftrightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2 - C}$

$\Leftrightarrow r = \sqrt{(-\frac{A}{2})^2 + (-\frac{B}{2})^2 - C}$

Jadi, koordinat titik pusat lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ adalah $(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ dan jari-jarinya $r = \sqrt{(-\frac{A}{2})^2 + (-\frac{B}{2})^2 - C}$.

Contoh Soal

1. Tentukan persamaan lingkaran berpusat di titik O(0, 0) dengan ketentuan berikut.
   a. Berdiameter 8.
   b. Melalui titik K(−2, 7).

Jawaban:

Persamaan lingkaran berpusat di titik O(0, 0) dan berjari-jari r adalah $x^2 + y^2 = r^2$.

a. Diameter lingkaran: d = 8

Jari-jari lingkaran: $r = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2} \times 8 = 4$

Persamaan lingkaran:

$x^2 + y^2 = r^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 16$

Jadi, persamaan lingkaran adalah $x^2 + y^2 = 16$.

b. Jari-jari lingkaran merupakan jarak antara titik pusat lingkaran O(0, 0) dengan titik pada lingkaran yaitu K(−2, 7), maka panjang jari-jari lingkaran:

$r = OK = \sqrt{(-2-0)^2 + (7-0)^2}$

$= \sqrt{(-2)^2 + (7)^2}$

$= \sqrt{4 + 49}$

$= \sqrt{53}$

Persamaan lingkaran:

$x^2 + y^2 = r^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = (\sqrt{53})^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 53$

Cara lain:

Persamaan lingkaran berpusat di titik O(0, 0) adalah $x^2 + y^2 = r^2$.

Lingkaran melalui titik K(−2, 7), maka:

$x^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow (-2)^2 + (7)^2 = r^2$

$\Leftrightarrow 4 + 49 = r^2$

$\Leftrightarrow r^2 = 53$

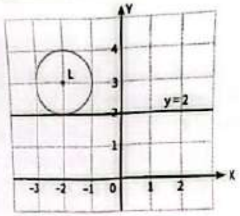
Diperoleh $r^2 = 53$ sehingga persamaan lingkarannya $x^2 + y^2 = 53$.

Jadi, persamaan lingkaran adalah $x^2 + y^2 = 53$.

2. Diketahui lingkaran L berpusat di titik (−2, 3) dan menyinggung garis y = 2. Tentukan persamaan lingkaran L.

Jawaban:

Lingkaran L berpusat di titik (−2, 3) dan menyinggung garis y = 2 digambarkan sebagai berikut.



Dari gambar diperoleh koordinat titik pusat lingkaran (−2, 3) dan panjang jari-jari lingkaran r = 1.

Persamaan lingkaran:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$\Leftrightarrow (x - (-2))^2 + (y - 3)^2 = 1^2$

$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$

Jadi, persamaan lingkaran L adalah $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$.

3. Diketahui persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$.
   a. Tentukan koordinat titik pusat dan jari-jari lingkaran.
   b. Buatlah sketsa grafiknya.

Jawaban:

a. Persamaan lingkaran:

$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x + y^2 - 4y = 3$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 3 + 9 + 4$

$\Leftrightarrow (x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = 16$

$\Leftrightarrow (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4^2$

Koordinat titik pusat: P(−3, 2)

Jari-jari: r = 4

Cara lain:

Dari persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$ diperoleh:

A = 6, B = −4, dan C = −3.

Koordinat titik pusat lingkaran adalah

$P(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B) = P(-3, 2)$.

Jari-jari $= r = \sqrt{(-\frac{1}{2}A)^2 + (-\frac{1}{2}B)^2 - C}$

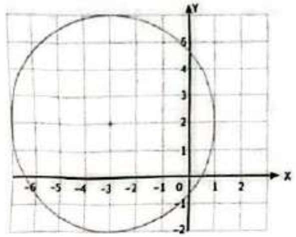
$= \sqrt{(-3)^2 + 2^2 - (-3)}$

$= \sqrt{9 + 4 + 3}$

$= \sqrt{16} = 4$

Jadi, koordinat titik pusat lingkaran P(−3, 2) dan jari-jarinya 4.

b. Sketsa grafik:



4. Tentukan titik pusat dan jari-jari lingkaran berikut.
   a. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$
   b. $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 15 = 0$

Jawaban:

a. *Cara I:*

$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$

Diperoleh A = −2, B = 4, dan C = −20.

Pusat lingkaran: $(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B) = (1, -2)$

Jari-jari: $r = \sqrt{(-\frac{1}{2}A)^2 + (-\frac{1}{2}B)^2 - C}$

$= \sqrt{1^2 + (-2)^2 - (-20)}$

$= \sqrt{25} = 5$

Cara II:

$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 + 4y = 20$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 20 + 1 + 4$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$

Diperoleh a = 1, b = −2, dan $r = \sqrt{25} = 5$.

Jadi, pusat lingkaran di titik (1, −2) dan jari-jari 5.

b. $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 15 = 0$

Diperoleh A = −4, B = −2, dan C = −15.

Pusat lingkaran: $(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B) = (2, 1)$

Jari-jari: $r = \sqrt{(-\frac{1}{2}A)^2 + (-\frac{1}{2}B)^2 - C}$

$= \sqrt{2^2 + 1^2 - (-15)}$

$= \sqrt{20}$

$= 2\sqrt{5}$

Jadi, pusat lingkaran di titik (2, 1) dan jari-jari $2\sqrt{5}$.

3. Kedudukan Titik terhadap Lingkaran

Lingkaran L berpusat di titik P(a, b) dan berjari-jari r. Jarak titik $A(x_1, y_1)$ dengan titik pusat lingkaran P(a, b) dirumuskan:

$$d = \sqrt{(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2}$$

Kedudukan titik $A(x_1, y_1)$ terhadap lingkaran L sebagai berikut.

a. Jika d < r atau $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 < r^2$, titik $A(x_1, y_1)$ terletak di dalam lingkaran L.

b. Jika d = r atau $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$, titik $A(x_1, y_1)$ terletak pada lingkaran L.

c. Jika d > r atau $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 > r^2$, titik $A(x_1, y_1)$ terletak di luar lingkaran L.

4. Kedudukan Garis terhadap Lingkaran

Lingkaran L berpusat di titik P(a, b) dan berjari-jari r. Jarak garis g: px + qy + s = 0 dengan titik pusat lingkaran P(a, b) dirumuskan:

$$d = \left| \frac{pa + qb + s}{\sqrt{p^2 + q^2}} \right|$$

Kedudukan garis g terhadap lingkaran L sebagai berikut.

a. Jika d < r, garis g memotong lingkaran L di dua titik.

b. Jika d = r, garis g menyinggung lingkaran L.

c. Jika d > r, garis g tidak memotong lingkaran L.

5. Kedudukan Lingkaran terhadap Lingkaran Lain

Kedudukan lingkaran M yang berjari-jari r terhadap lingkaran N yang berjari-jari R dapat ditentukan dengan membandingkan jarak kedua pusat (d = MN), r, dan R. Kedudukan lingkaran M terhadap lingkaran N sebagai berikut.

a. Jika $d = 0$, kedua lingkaran sepusat.
b. Jika $d < R - r$, lingkaran kecil terletak di dalam lingkaran besar.
c. Jika $d = R - r$, kedua lingkaran bersinggungan di dalam.
d. Jika $R - r < d < R + r$, kedua lingkaran berpotongan.
e. Jika $d = r + R$, kedua lingkaran bersinggungan di luar.
f. Jika $d > r + R$, kedua lingkaran tidak berpotongan atau saling lepas.

Aktivitas 2 ANIK YULIA /20/XII A2

Menentukan Titik Potong Dua Lingkaran

Diketahui dua lingkaran berikut.

$L_1: x^2 + y^2 = 25$

$L_2: (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 5$

1. Tentukan kedudukan L_1 terhadap L_2.

Jawaban:

L_1 berpusat di titik O(0, 0) dan berjari-jari $r_1 = \sqrt{25} = 5$

L_2 berpusat di titik P(2, 4) dan berjari-jari $r_2 = \sqrt{5}$.

Jarak kedua titik pusat:

$OP = \sqrt{(2-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4{,}472$

$r_1 + r_2 = 5 + \sqrt{5} \approx 5 + 2{,}236 = 7{,}236$

$r_1 - r_2 = 5 - \sqrt{5} \approx 5 - 2{,}236 = 2{,}764$

Diperoleh $r_1 - r_2 < OP < r_1 + r_2$ yang berarti kedua lingkaran saling berpotongan.

2. Tentukan koordinat titik potong kedua lingkaran.

Jawaban:

$L_1 : x^2 + y^2 = 25$

$L_2 : (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 5$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 - 5 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 8y + 15 = 0$

Persamaan garis yang melalui kedua titik potong lingkaran:

$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y^2 - 4x - 8y + 15 = 0 \\ \hline 4x + 8y - 15 = 25 \end{array} -$$

$\Leftrightarrow 4x = 40 - 8y$

$\Leftrightarrow x = 10 - 2y$

ANIK YULIA /XII A2/ 20

Substitusikan $x = 10 - 2y$ ke dalam persamaan L_1 diperoleh:

$x^2 + y^2 = 25$

$\Leftrightarrow (10 - 2y)^2 + y^2 = 25$

$\Leftrightarrow 100 - 40y + 4y^2 + y^2 - 25 = 0$

$\Leftrightarrow 5y^2 - 40y + 75 = 0$

$\Leftrightarrow y^2 - 8y + 15 = 0$

$\Leftrightarrow (y - 3)(y - 5) = 0$

$\Leftrightarrow y - 3 = 0$ atau $y - 5 = 0$

$\Leftrightarrow y = 3$ atau $y = 5$

Substitusikan $y = 3$ ke dalam persamaan garis $x = 10 - 2y$ diperoleh:

$x = 10 - 2 \times 3$

$= 10 - 6$

$= 4$

Diperoleh koordinat titik potong (4, 3).

Substitusikan $y = 5$ ke dalam persamaan garis $x = 10 - 2y$ diperoleh:

$x = 10 - 2 \times 5$

$= 10 - 10$

$= 0$

Diperoleh koordinat titik potong (0, 5).

Jadi, koordinat titik potong kedua lingkaran adalah (4, 3) dan (0, 5).

3. Gambarlah lingkaran L_1 dan L_2 pada satu bidang koordinat, lalu tentukan letak titik potong kedua lingkaran dan persamaan garis yang melalui kedua titik tersebut.

Jawaban:

L_1 berpusat di titik O(0, 0) dan berjari-jari $r_1 = 5$.

L_2 berpusat di titik P(2, 4) dan berjari-jari $r_2 = \sqrt{5}$

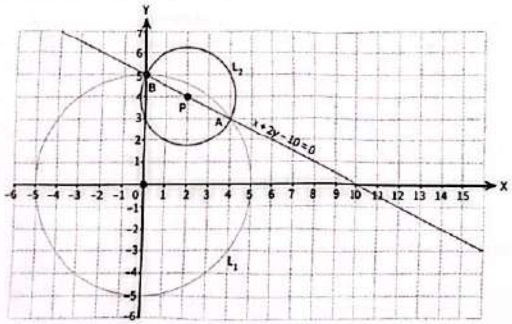
Kedua lingkaran berpotongan di titik A(4, 3) dan B(0, 5).

Persamaan garis yang melalui titik A dan B diperoleh dengan mengeliminasi x^2 dan y^2 dari kedua persamaan lingkaran yaitu:

$x = 10 - 2y$

$\Leftrightarrow x + 2y - 10 = 0$

Gambar lingkaran L_1 dan L_2:



Contoh Soal

1. Diketahui koordinat titik A(4, –2). Tentukan kedudukan titik A terhadap lingkaran berikut.
   a. $x^2 + y^2 = 9$
   b. $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 18$
   c. $x^2 + y^2 - 4x + 12y + 16 = 0$

Jawaban:

a. Lingkaran: $x^2 + y^2 = 9$
Dari titik A(4, –2) diperoleh $x = 4$ dan $y = -2$ sehingga:
$$x^2 + y^2 = 4^2 + (-2)^2 = 16 + 4 = 20$$
Oleh karena $x^2 + y^2 = 20 > 9$ untuk $x = 4$ dan $y = -2$, maka titik A(4, –2) terletak di luar lingkaran $x^2 + y^2 = 9$.
Jadi, titik A terletak di luar lingkaran $x^2 + y^2 = 9$.

b. Lingkaran: $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 18$
Dari titik A(4, –2) diperoleh $x = 4$ dan $y = -2$ sehingga:
$$(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = (4 - 1)^2 + (-2 + 5)^2 = 3^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18$$
Oleh karena $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 18$ untuk $x = 4$ dan $y = -2$, maka titik A(4, –2) terletak pada lingkaran.
Jadi, titik A terletak pada lingkaran $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 18$.

c. Lingkaran: $x^2 + y^2 - 4x + 12y + 16 = 0$
Dari titik A(4, –2) diperoleh $x = 4$ dan $y = -2$ sehingga:
$$x^2 + y^2 - 4x + 12y + 16$$
$$= 4^2 + (-2)^2 - 4 \times 4 + 12 \times (-2) + 16$$
$$= 16 + 4 - 16 - 24 + 16$$
$$= -4$$
Oleh karena $x^2 + y^2 - 4x + 12y + 16 = -4 < 0$ untuk $x = 4$ dan $y = -2$, maka titik A(4, –2) terletak di dalam lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 12y + 16 = 0$.
Jadi, titik A terletak di dalam lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 12y + 16 = 0$.

2. Diketahui garis $\ell: x + 7y + 10 = 0$ dan lingkaran L: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$.
   a. Tunjukkan bahwa garis ℓ memotong lingkaran L di dua titik.
   b. Tentukan koordinat titik potongnya.

Jawaban:

a. $\ell: x + 7y + 10 = 0 \Leftrightarrow x = -7y - 10$
Substitusikan $x = -7y - 10$ ke dalam persamaan lingkaran L.
$$(-7y - 10)^2 + y^2 - 2(-7y - 10) - 4y - 20 = 0$$
$$\Leftrightarrow 49y^2 + 140y + 100 + y^2 + 14y + 20 - 4y - 20 = 0$$
$$\Leftrightarrow 50y^2 + 150y + 100 = 0$$
$$\Leftrightarrow y^2 + 3y + 2 = 0$$
$$D = 3^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$$
Oleh karena $D = 1 > 0$, garis ℓ memotong lingkaran L di dua titik.

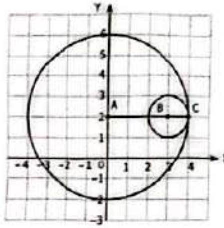
b. Dari persamaan $y^2 + 3y + 2 = 0$ dapat dicari nilai y.
$$y^2 + 3y + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (y + 2)(y + 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow y + 2 = 0 \text{ atau } y + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow y_1 = -2 \text{ atau } y_2 = -1$$
Untuk $y_1 = -2$ maka $x_1 = -7 \times (-2) - 10 = 4$
Untuk $y_2 = -1$ maka $x_2 = -7 \times (-1) - 10 = -3$
Diperoleh koordinat titik potong (4, –2) dan (–3, –1).
Jadi, koordinat titik potong antara garis ℓ dengan lingkaran L adalah (4, –2) dan (–3, –1).

3. Tentukan kedudukan lingkaran $x^2 + (y - 2)^2 = 16$ terhadap lingkaran $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$.

Jawaban:

Lingkaran $x^2 + (y - 2)^2 = 16$ berpusat di titik A(0, 2) dan berjari-jari $r_A = \sqrt{16} = 4$.
Lingkaran $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$ berpusat di titik B(3, 2) dan berjari-jari $r_B = \sqrt{1} = 1$.
Jarak titik A(0, 2) dan B(3, 2):
$$AB = \sqrt{(3 - 0)^2 + (2 - 2)^2} = \sqrt{3^2 + 0^2} = \sqrt{9 + 0} = \sqrt{9} = 3$$
Oleh karena $r_A - r_B = 4 - 1 = 3 = AB$ maka lingkaran A dan lingkaran B bersinggungan di dalam.

Perhatikan gambar kedua lingkaran berikut ini.



Dari gambar tampak lingkaran A dan lingkaran B hanya berpotongan di satu titik yaitu titik C(4, 2). Titik pusat lingkaran B berada di dalam lingkaran A dan kedua lingkaran berpotongan pada satu titik maka lingkaran A dan lingkaran B bersinggungan di dalam.
Jadi, lingkaran A dan lingkaran B bersinggungan di dalam.

Tugas

Kedudukan Garis terhadap Lingkaran

Kerjakan tugas ini secara individu.

Carilah pasangan garis lurus ($y = mx + c$) dan lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ yang mempunyai kedudukan berikut.

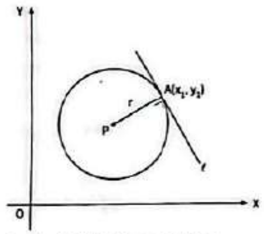
1. Garis dan lingkaran tidak memotong atau menyinggung.
2. Garis dan lingkaran saling bersinggungan.
3. Garis memotong lingkaran.

Buktikan kedudukan garis dan lingkaran tersebut menggunakan nilai diskriminan (D).

6. Persamaan Garis Singgung Lingkaran

a. Pengertian Garis Singgung Lingkaran

Garis singgung lingkaran merupakan garis yang memotong lingkaran di satu titik dan tegak lurus dengan jari-jari lingkaran di titik tersebut. Titik perpotongan garis singgung dan lingkaran dinamakan titik singgung. Pada lingkaran dapat dibuat tak berhingga persamaan garis singgung yang berbeda karena lingkaran merupakan tempat kedudukan titik-titik yang jumlahnya tak berhingga.



Gambar 1.4 Garis ℓ menyinggung lingkaran P

Pada **Gambar 1.4**, garis ℓ menyinggung lingkaran di titik $A(x_1, y_1)$. Garis ℓ tegak lurus dengan jari-jari lingkaran PA. Titik $A(x_1, y_1)$ dinamakan titik singgung.

b. Persamaan Garis Singgung Lingkaran yang Diketahui Gradiennya

Misalkan garis ℓ bergradien m dan menyinggung lingkaran L.

1) Persamaan garis ℓ jika lingkaran L berpusat di titik O(0, 0) dan berjari-jari r:
$$y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

2) Persamaan garis ℓ jika lingkaran L berpusat di titik P(a, b) dan berjari-jari r:
$$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

c. Persamaan Garis Singgung Lingkaran Melalui Suatu Titik pada Lingkaran

Misalkan titik $T(x_1, y_1)$ terletak pada lingkaran.

1) Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ di titik T:

$$x_1x + y_1y = r^2$$

2) Persamaan garis singgung lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ di titik T:

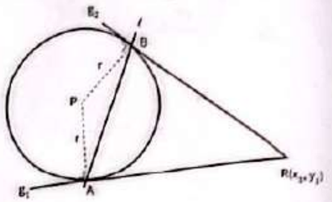
$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$$

3) Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ di titik T:

$$x_1x + y_1y + \frac{A}{2}(x + x_1) + \frac{B}{2}(y + y_1) + C = 0$$

d. Persamaan Garis Singgung Lingkaran Melalui Suatu Titik di Luar Lingkaran

Misalkan titik $R(x_1, y_1)$ terletak di luar lingkaran. Persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik R dapat dicari dengan cara menentukan persamaan garis kutub dari titik R terhadap lingkaran terlebih dahulu. Kemudian, menentukan titik potong garis kutub dengan lingkaran dengan cara mensubstitusikan persamaan garis kutub ke dalam persamaan lingkaran. Titik potong ini sebagai titik singgung. Selanjutnya, menentukan persamaan garis singgung di titik potong tersebut.



Gambar 1.5 Garis singgung melalui titik R di luar lingkaran

Pada **Gambar 1.5**, titik R terletak di luar lingkaran. Garis ℓ merupakan garis kutub dari titik R. Titik A dan B merupakan titik singgung lingkaran. Garis g_1 merupakan garis singgung lingkaran di titik A dan garis g_2 merupakan garis singgung lingkaran di titik B.

Persamaan garis kutub titik $R(x_1, y_1)$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ adalah $x_1x + y_1y = r^2$. Persamaan garis kutub titik $R(x, y)$ terhadap lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ adalah $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$. Persamaan garis kutub titik $R(x_1, y_1)$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ adalah $x_1x + y_1y + \frac{A}{2}(x + x_1) + \frac{B}{2}(y + y_1) + C = 0$.

Info Penting

Rene Descartes (1596–1650)

Rene Descartes dikenal sebagai Renatus Cartesius dalam literatur berbahasa Latin, merupakan seorang filsuf dan Matematikawan Prancis. Descartes mempersembahkan geometri analitis yang akhirnya dikenal sebagai pencipta sistem koordinat Cartesius yang memengaruhi perkembangan kalkulus modern dan menyediakan jalan buat Newton menemukan kalkulus. Descartes memberi kontribusi bagi kemajuan matematika sehingga mendapat sebutan Bapak Matematika Modern.

Salah satu penemuannya ialah tentang "gradien" atau kemiringan pada persamaan garis lurus. Gradien menentukan posisi suatu garis terhadap koordinat X dan koordinat Y.

Banyak ahli matematika mengakui Descartes sebagai orang yang menemukan rumus gradien. Descartes memberikan sebuah metode untuk memecahkan masalah garis dan gradien dalam aljabar dan geometri.

Aktivitas 3 ANIK YULIA /20 /XII A2

Menurunkan Rumus Persamaan Garis Singgung Lingkaran

Lengkapi titik-titik berikut dengan teliti dan benar.

Lingkaran L berpusat di titik O(0, 0) dan berjari-jari r. Jika garis g bergradien m dan menyinggung lingkaran L, tentukan persamaan garis g.

Persamaan lingkaran L: $x^2 + y^2 = r^2$

Persamaan garis g: $y = mx + k$

Titik persekutuan garis g dengan lingkaran L dapat ditentukan dengan mensubstitusikan persamaan garis g ke dalam persamaan lingkaran L.

$x^2 + y^2 = r^2$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + (mx + k)^2 = r^2$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + m^2x^2 + 2mkx + k^2 = r^2$

$\Leftrightarrow \quad (1 + m^2)x^2 + 2mkx + k^2 - r^2 = 0$

Diperoleh persamaan kuadrat dengan $a = 1 + m^2$, $b = 2mk$, dan $c = k^2 - r^2$.

Oleh karena garis g menyinggung lingkaran L maka garis g dan lingkaran L hanya mempunyai satu titik persekutuan. Hal ini berarti persamaan kuadrat $(1 + m^2)x^2 + 2mkx + k^2 - r^2 = 0$ hanya mempunyai satu penyelesaian sehingga:

$D = 0$

$\Leftrightarrow \quad b^2 - 4ac = 0$

$\Leftrightarrow \quad (2mk)^2 - 4(1 + m^2)(k^2 - r^2) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 4m^2k^2 - 4(k^2 - r^2 + m^2k^2 - m^2r^2) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 4m^2k^2 - 4k^2 + 4r^2 - 4m^2k^2 + 4m^2r^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad -4k^2 + 4r^2 + 4m^2r^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad -4k^2 = -4r^2 - 4m^2r^2$

$\Leftrightarrow \quad -4k^2 = -4r^2(1 + m^2)$

$\Leftrightarrow \quad k^2 = r^2(1 + m^2)$

$\Leftrightarrow \quad k = \pm\sqrt{r^2(1 + m^2)}$

$\Leftrightarrow \quad k = \pm r\sqrt{1 + m^2}$

Diperoleh nilai $k = \pm r\sqrt{1+m^2}$.

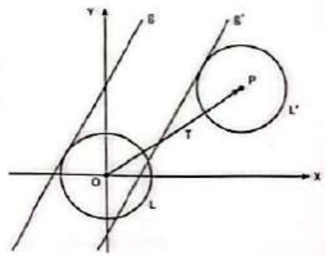
Jadi, persamaan garis g adalah $y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}$.

Jika lingkaran L dan garis g di samping ditranslasikan oleh $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, diperoleh persamaan bayangannya yaitu lingkaran L' dan garis g' sebagai berikut.

Persamaan lingkaran L': $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Persamaan garis g': $y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1+m^2}$

Garis g menyinggung lingkaran L'.



Contoh Soal

1. Tentukan persamaan garis bergradien –1 yang menyinggung lingkaran berikut.
   a. $x^2 + y^2 = 9$
   b. $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 8$

Jawaban:

a. Lingkaran $x^2 + y^2 = 9$ berpusat di titik O(0, 0) dan berjari-jari $r = \sqrt{9} = 3$.
Persamaan garis singgung bergradien $m = -1$:
$y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}$
$\Leftrightarrow\ y = (-1)x \pm 3 \times \sqrt{1+(-1)^2}$
$\Leftrightarrow\ y = -x \pm 3 \times \sqrt{1+1}$
$\Leftrightarrow\ y = -x \pm 3\sqrt{2}$
$\Leftrightarrow\ y = -x + 3\sqrt{2}$ atau $y = -x - 3\sqrt{2}$
Jadi, persamaan garis singgungnya $y = -x + 3\sqrt{2}$ dan $y = -x - 3\sqrt{2}$.

b. Lingkaran $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 8$ berpusat di titik P(2, 3) dan berjari-jari $r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
Persamaan garis singgung bergradien $m = -1$:
$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1+m^2}$
$\Leftrightarrow\ y - 3 = (-1)(x - 2) \pm 2\sqrt{2} \times \sqrt{1+(-1)^2}$
$\Leftrightarrow\ y - 3 = -x + 2 \pm 2\sqrt{2} \times \sqrt{1+1}$
$\Leftrightarrow\ y = -x + 2 + 3 \pm 2\sqrt{2} \times \sqrt{2}$
$\Leftrightarrow\ y = -x + 5 \pm 4$
$\Leftrightarrow\ y = -x + 5 + 4$ atau $y = -x + 5 - 4$
$\Leftrightarrow\ y = -x + 9$ atau $y = -x + 1$
Jadi, persamaan garis singgungnya $y = -x + 9$ dan $y = -x + 1$.

2. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik (15, –5) terhadap lingkaran berikut.
   a. $(x - 10)^2 + (y - 1)^2 = 61$
   b. $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 120 = 0$
   c. $x^2 + y^2 = 225$

Jawaban:

a. Selidiki kedudukan titik (15, –5) terhadap lingkaran L: $(x - 10)^2 + (y - 1)^2 = 61$.
Substitusikan titik (15, –5) ke dalam persamaan lingkaran L.
$(15 - 10)^2 + (-5 - 1)^2 = 25 + 36 = 61$
Oleh karena hasil substitusi titik (15, –5) ke dalam persamaan lingkaran L sama dengan $r^2 = 61$, titik (15, –5) terletak pada lingkaran L.
Persamaan garis singgung di titik (15, –5) pada lingkaran L:
$(15 - 10)(x - 10) + (-5 - 1)(y - 1) = 61$
$\Leftrightarrow\ 5(x - 10) + (-6)(y - 1) = 61$
$\Leftrightarrow\ 5x - 50 - 6y + 6 = 61$
$\Leftrightarrow\ 5x - 6y = 105$
Jadi, persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik (15, –5) adalah $5x - 6y = 105$.

b. Selidiki kedudukan titik (15, –5) terhadap lingkaran L: $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 120 = 0$.
$15^2 + (-5)^2 - 6 \times 15 + 8(-5) - 120 = 0$
Oleh karena hasil substitusi titik (15, –5) ke dalam persamaan lingkaran L sama dengan nol, titik (15, –5) terletak pada lingkaran L.
Persamaan garis singgung di titik (15, –5) pada lingkaran L:
$15x - 5y - 3(x + 15) + 4(y - 5) - 120 = 0$
$\Leftrightarrow\ 15x - 5y - 3x - 45 + 4y - 20 - 120 = 0$
$\Leftrightarrow\ 12x - y = 185$
Jadi, persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik (15, –5) adalah $12x - y = 185$.

c. Selidiki kedudukan titik (15, –5) terhadap lingkaran L: $x^2 + y^2 = 225$.
Substitusikan titik (15, –5) ke dalam persamaan lingkaran L:
$15^2 + (-5)^2 = 225 + 25 = 250 > r^2 = 225$.
Oleh karena hasil substitusi titik (15, –5) ke dalam persamaan lingkaran L lebih dari $r^2 = 225$, titik (15, –5) terletak di luar lingkaran L.
Terlebih dahulu menentukan persamaan garis kutub titik (15, –5) terhadap lingkaran L:
$15x - 5y = 225 \Leftrightarrow 3x - y = 45 \Leftrightarrow y = 3x - 45$
Substitusikan $y = 3x - 45$ ke dalam persamaan lingkaran L.
$x^2 + (3x - 45)^2 = 225$
$\Leftrightarrow\ x^2 + 9x^2 - 270x + 2.025 = 225$
$\Leftrightarrow\ 10x^2 - 270x + 1.800 = 0$
$\Leftrightarrow\ x^2 - 27x + 180 = 0$
$\Leftrightarrow\ (x - 15)(x - 12) = 0$
$\Leftrightarrow\ x = 15$ atau $x = 12$
Untuk $x_1 = 15$ maka $y_1 = 3 \times 15 - 45 = 0$
Untuk $x_2 = 12$ maka $y_2 = 3 \times 12 - 45 = -9$
Diperoleh titik singgung pada lingkaran L: (15, 0) dan (12, –9).
Persamaan garis singgung pada lingkaran L:
(i) Di titik (15, 0): $15x + 0 \times y = 225$
$\Leftrightarrow\ x = 15$
(ii) Di titik (12, –9): $12x - 9y = 225$
$\Leftrightarrow\ 4x - 3y = 75$
Jadi, persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 225$ yang melalui titik (15, –5) adalah $x = 15$ dan $4x - 3y = 75$.

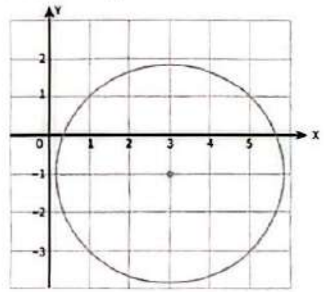
Asesmen 1

A. ***Pilihlah jawaban yang benar!***

1. Persamaan lingkaran berpusat di titik O(0, 0) yang berdiameter $6\sqrt{5}$ adalah . . . .
   a. $x^2 + y^2 = 30$
   b. $x^2 + y^2 = 45$
   c. $x^2 + y^2 = 90$
   d. $x^2 + y^2 = 150$
   e. $x^2 + y^2 = 180$

P (0, 0)
$d = 6\sqrt{5}$
$r = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$
$x^2 + y^2 = r^2$
$x^2 + y^2 = (3\sqrt{5})^2$
$x^2 + y^2 = 3^2(\sqrt{5})^2$
$x^2 + y^2 = 9 \cdot \sqrt{25} \cdot 5$
$x^2 + y^2 = 9 \cdot 5$
$x^2 + y^2 = 45$

2. Perhatikan gambar berikut.



Persamaan lingkaran tersebut adalah . . . .

a. $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 2 = 0$
b. $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 2 = 0$
c. $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 2 = 0$
d. $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 2 = 0$
e. $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 2 = 0$

3. Diketahui koordinat titik $A(4, -1)$ dan $B(-6, -7)$. Jika ruas garis AB diameter lingkaran L, persamaan lingkaran L adalah . . . .
a. $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 34$
b. $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 34$
c. $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 34$
d. $(x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 34$
e. $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 34$

4. Koordinat titik pusat dan panjang jari-jari lingkaran $4x^2 + 4y^2 + 8x - 16y - 16 = 0$ adalah . . . .
a. $(3, -6)$ dan 9
b. $(1, 2)$ dan 3
c. $(1, -2)$ dan 3
d. $(-1, 2)$ dan 3
e. $(-3, 6)$ dan 9

5. Diketahui koordinat titik $A(1, 5)$, $B(-2, 4)$, dan $C(-4, -4)$. Titik yang berada di luar lingkaran $x^2 + y^2 = 26$ adalah . . . .
a. A
b. B
c. C
d. A dan B
e. B dan C

6. Diketahui persamaan lingkaran L: $x^2 + y^2 + 10x - 4y - 11 = 0$. Jika titik $T(-3, a)$ terletak di dalam lingkaran L, nilai a yang memenuhi adalah . . . .
a. $-8 < a < 4$
b. $-4 < a < 8$
c. $-4 < a < -8$
d. $a < -8$ atau $a > 4$
e. $a < -4$ atau $a > 8$

7. Diketahui beberapa persamaan garis berikut.
(i) $x + 2y = 7$
(ii) $x - y = -7$
(iii) $x - 2y = 2$
(iv) $x + y = 1$

Garis yang memotong lingkaran $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 8$ di dua titik adalah . . . .
a. (i) dan (ii)
b. (i) dan (iii)
c. (i) dan (iv)
d. (ii) dan (iii)
e. (ii) dan (iv)

8. Salah satu persamaan garis singgung lingkaran $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 25$ yang sejajar dengan garis $3x + 4y - 8 = 0$ adalah . . . .
a. $3x + 4y + 47 = 0$
b. $3x + 4y + 27 = 0$
c. $3x + 4y + 15 = 0$
d. $3x + 4y - 15 = 0$
e. $3x + 4y - 27 = 0$

9. Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ di titik $(4, -2)$ adalah . . . .
a. $2x + y + 10 = 0$
b. $2x + y - 6 = 0$
c. $2x - y - 6 = 0$
d. $2x - y + 10 = 0$
e. $2x - y - 10 = 0$

10. Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 18$ yang melalui titik $(0, -6)$ adalah . . . .
a. $y = x + 6$ dan $y = x - 6$
b. $y = x + 6$ dan $y = -x - 6$
c. $y = x - 6$ dan $y = x - 6$
d. $y = x - 6$ dan $y = -x - 6$
e. $y = 2x + 6$ dan $y = 2x - 6$

B. *Kerjakan soal-soal berikut!*

1. Tentukan persamaan lingkaran berikut.
a. Berpusat di titik $O(0, 0)$ dan menyinggung garis $x = -4$.
b. Berpusat di titik $P(1, -4)$ dan melalui titik $(-3, 2)$.

2. Tentukan koordinat titik pusat dan jari-jari lingkaran berikut. Selanjutnya, buatlah sketsa grafiknya.
a. $x^2 + y^2 = 16$
b. $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$

3. Diketahui lingkaran L dengan persamaan $x^2 + y^2 = 90$. Tentukan kedudukan titik, garis, dan lingkaran berikut terhadap lingkaran L.
a. $(-6, 9)$
b. $3x - 4y + 30 = 0$
c. $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 40$

4. Tentukan persamaan garis yang bergradien -2 yang menyinggung lingkaran berikut.
a. $x^2 + y^2 = 12$
b. $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 45$

5. Diketahui titik $P(-1, 5)$ dan $Q(3, 1)$. Lingkaran L berpusat di titik P dan berjari-jari 4.
a. Tentukan persamaan lingkaran L.
b. Tentukan kedudukan titik P dan Q terhadap lingkaran L.
c. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran L yang melalui titik Q.

Pendalaman Materi

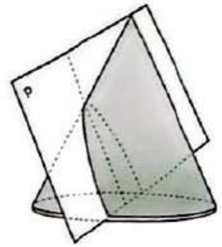
B. Irisan Kerucut: Parabola, Elips, dan Hiperbola

Apakah kamu pernah mengamati bentuk jam di sekitarmu? Selain bentuk lingkaran yang umum, banyak jam memiliki bentuk lain yang menarik, seperti bentuk elips pada gambar di samping. Bentuk elips ini bukan hanya estetis, tetapi juga memiliki makna matematis yang menarik. Bentuk elips merupakan bentuk geometri yang masuk dalam kelompok irisan kerucut, yaitu bentuk geometri yang dapat diperoleh dengan mengiris kerucut. Selain elips, irisan kerucut yang lain yaitu parabola dan hiperbola. Pada materi berikut kamu akan belajar cara menentukan persamaan irisan kerucut dan menentukan persamaan garis singgungnya.

Gambar 1.6 Jam beker berbentuk elips

1. Parabola

Perhatikan **Gambar 1.7**. Sebuah bidang p memotong/mengiris kerucut. Arah perpotongan bidang p sejajar dengan garis pelukis kerucut. Irisan yang dihasilkan berbentuk bidang datar, yaitu parabola seperti tampak pada gambar. Di kelas X, kamu telah belajar fungsi kuadrat yaitu $y = ax^2 + bx + c$. Jika fungsi tersebut digambarkan pada bidang kartesius, diperoleh sebuah kurva parabola. Pada subbab ini, kita akan belajar menentukan persamaan parabola yang diketahui unsur-unsurnya.



Gambar 1.7 Irisan kerucut berbentuk parabola

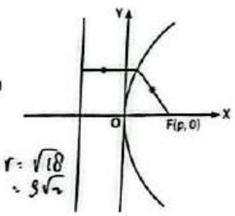
a. **Persamaan Parabola**

Parabola adalah tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap sebuah titik dan sebuah garis tertentu. Titik tertentu disebut fokus (F) dan garis tertentu disebut direktris (garis arah).

1) *Persamaan Parabola dengan Titik Puncak (0, 0)*

a) Persamaan parabola $y^2 = 4px$ merupakan persamaan parabola dengan:
(1) fokus $F(p, 0)$;
(2) persamaan direktris $x = -p$;
(3) persamaan sumbu simetri $y = 0$.

b) Persamaan parabola $x^2 = 4py$ merupakan persamaan parabola dengan:
(1) fokus $F(0, p)$;
(2) persamaan direktris $y = -p$;
(3) persamaan sumbu simetri $x = 0$.



$r^2 = 18 \quad r = \sqrt{18}$
$= 3\sqrt{2}$

2) *Persamaan Parabola dengan Titik Puncak (a, b)*

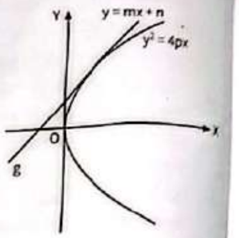
a) Persamaan parabola $(y - b)^2 = 4p(x - a)$ merupakan persamaan parabola dengan:
(1) fokus $F(p + a, b)$;
(2) persamaan direktris $x = -p + a$;
(3) persamaan sumbu simetri $y = b$.

(10) $y = mx \pm r\sqrt{m^2+1}$
$y = x \pm 3\sqrt{2}\sqrt{1^2+1}$
$y = x \pm 6$
(+) $y = x + 6 \;:\; y = 6$
(−) $y = x - 6 \;,\; y = -6$

b) Persamaan parabola $(x - a)^2 = 4p(y - b)$ merupakan persamaan parabola dengan:
(1) fokus $F(a, p + b)$;
(2) persamaan direktris $y = -p + b$;
(3) persamaan sumbu simetri $x = a$.

b. Persamaan Garis Singgung Parabola

1) *Persamaan Garis Singgung Parabola dengan Gradien m*



Perhatikan gambar di samping. Garis g: $y = mx + n$ bersinggungan dengan kurva parabola $y^2 = 4px$. Dengan melakukan substitusi $y = mx + n$ ke dalam $y^2 = 4px$ diperoleh:

$y^2 = 4px \Leftrightarrow (mx + n)^2 = 4px$
$\Leftrightarrow m^2x^2 + 2mnx + n^2 = 4px$
$\Leftrightarrow m^2x^2 + (2mn - 4p)x + n^2 = 0$ (merupakan persamaan kuadrat dalam x)

Syarat garis menyinggung parabola adalah $D = 0$ sehingga diperoleh $n = \frac{p}{m}$.

Dengan proses yang sama, kita dapat mensubstitusikan $y = mx + n$ ke dalam $x^2 = 4py$ diperoleh:

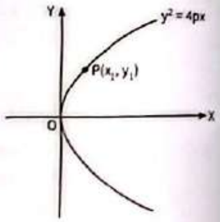
$x^2 = 4py \Leftrightarrow x^2 = 4p(mx + n)$
$\Leftrightarrow x^2 = 4pmx + 4pn$
$\Leftrightarrow x^2 - 4pmx + 4pn = 0$ (merupakan persamaan kuadrat dalam x)

Syarat garis menyinggung parabola adalah $D = 0$ sehingga diperoleh $n = -m^2p$.

Persamaan garis singgung dengan gradien m pada parabola:

a) $y^2 = 4px$ adalah $y = mx + \frac{p}{m}$
b) $x^2 = 4py$ adalah $y = mx - m^2p$
c) $(y - b)^2 = 4p(x - a)$ adalah $y - b = m(x - a) + \frac{p}{m}$
d) $(x - a)^2 = 4p(y - b)$ adalah $y - b = m(x - a) - m^2p$

2) *Persamaan Garis Singgung Parabola di Titik $P(x_1, y_1)$*

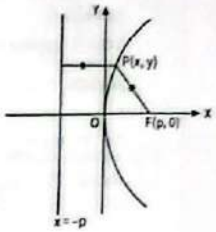


Perhatikan gambar di samping. Titik $P(x_1, y_1)$ terletak pada kurva parabola $y^2 = 4px$. Kita dapat menentukan persamaan garis singgung di titik tersebut. Persamaan garis singgung di titik $P(x_1, y_1)$ pada parabola:

a) $y^2 = 4px$ adalah $y_1y = 2p(x + x_1)$
b) $x^2 = 4py$ adalah $x_1x = 2p(y + y_1)$
c) $(y - b)^2 = 4p(x - a)$ adalah $(y_1 - b)(y - b) = 2p(x + x_1 - 2a)$
d) $(x - a)^2 = 4p(y - b)$ adalah $(x_1 - a)(x - a) = 2p(y + y_1 - 2b)$

Aktivitas 4 ANIK YULIA /20 /XII A2

Menemukan Persamaan Parabola



Lengkapi titik-titik berikut dengan teliti dan benar.

Perhatikan gambar di samping. Titik P(x, y) terletak pada parabola.

Jarak titik P ke garis direktris adalah $\sqrt{(x - (-p))^2 + (y - y)^2}$ atau $(x + p)$.

Jarak titik P ke titik fokus adalah $\sqrt{(x - p)^2 + y^2}$.

Oleh karena jaraknya sama, sehingga $\sqrt{(x - p)^2 + y^2} = (x + p)$.

Dengan mengkuadratkan kedua ruas diperoleh:

$(x - p)^2 + y^2 = (x + p)^2$
$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$
$y^2 = 4px$

Jadi, persamaan parabola adalah $y^2 = 4px$

Contoh Soal

1. Diketahui persamaan parabola $y^2 = 12x$.
Tentukan:
a. koordinat puncak;
b. persamaan sumbu simetri;
c. koordinat fokus;
d. persamaan direktris.

Jawaban:
Persamaan parabola $y^2 = 12x$ berarti $4p = 12$ atau $p = 3$.
a. Koordinat puncak O(0, 0).
b. Persamaan sumbu simetri $y = 0$.
c. Fokus (3, 0).
d. Persamaan direktris $x = -3$.

2. Diketahui persamaan parabola $y^2 - 4y - 8x + 20 = 0$. Tentukan:
a. koordinat puncak;
b. persamaan sumbu simetri;
c. koordinat fokus;
d. persamaan direktris.

Jawaban:
Persamaan parabola $y^2 - 4y - 8x + 20 = 0$ diubah ke dalam bentuk $(y - b)^2 = 4p(x - a)$.

$y^2 - 4y - 8x + 20 = 0$
$\Leftrightarrow y^2 - 4y = 8x - 20$
$\Leftrightarrow (y - 2)^2 - 4 = 8x - 20$
$\Leftrightarrow (y - 2)^2 = 8x - 16$
$\Leftrightarrow (y - 2)^2 = 8(x - 2)$
$4p = 8 \Leftrightarrow p = 2$
a. Koordinat puncak (2, 2).
b. Persamaan sumbu simetri $y = 2$.
c. Fokus (4, 2).
d. Persamaan direktris $x = 0$.

3. Tentukan persamaan garis singgung parabola $(y - 1)^2 = 4(x + 2)$ di titik (2, 5).

Jawaban:
Titik (2, 5) pada parabola, yaitu $(5 - 1)^2 = 4(2 + 2)$.
Persamaan garis singgung:
$(y_1 - b)(y - b) = 2p(x + x_1 - 2a)$
$\Leftrightarrow (5 - 1)(y - 1) = 2 \times 1(x + 2 + 4)$
$\Leftrightarrow 4(y - 1) = 2(x + 6)$
$\Leftrightarrow 4y - 4 = 2x + 12$
$\Leftrightarrow 2y - 2 = x + 6$
$\Leftrightarrow 2y - x - 8 = 0$
$\Leftrightarrow x - 2y + 8 = 0$
Jadi, persamaan garis singgungnya $x - 2y + 8 = 0$.

4. Tentukan persamaan garis singgung yang dapat ditarik dari titik P(−3, 1) terhadap parabola $y^2 = x$.

Jawaban:

Garis singgung $y^2 = x$ dengan gradien m adalah $y = mx + \frac{p}{m}$; dengan $p = \frac{1}{4}$.

$\Leftrightarrow \; y = mx + \frac{\frac{1}{4}}{m}$

Melalui P(−3, 1), maka:

$$1 = -3m + \frac{\frac{1}{4}}{m}$$

$\Leftrightarrow \; m = -3m^2 + \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \; 4m = -12m^2 + 1$

$\Leftrightarrow \; 12m^2 + 4m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \; (6m - 1)(2m + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \; m_1 = \frac{1}{6}$ atau $m_2 = -\frac{1}{2}$

Untuk $m_1 = \frac{1}{6}$ garis singgungnya adalah:

$$y = \frac{1}{6}x + \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{6}}$$

$\Leftrightarrow \; y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \; 6y = x + 9$

$\Leftrightarrow \; x - 6y + 9 = 0$

Untuk $m_2 = -\frac{1}{2}$ garis singgungnya adalah:

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}}$$

$\Leftrightarrow \; y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

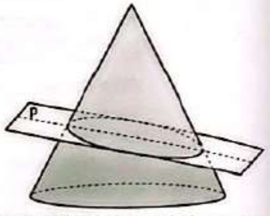
$\Leftrightarrow \; 2y = -x - 1$

$\Leftrightarrow \; x + 2y + 1 = 0$

Jadi, persamaan garis singgungnya $x - 6y + 9 = 0$ dan $x + 2y + 1 = 0$.

2. Elips

Perhatikan **Gambar 1.8**. Sebuah bidang p memotong/mengiris kerucut. Dimisalkan sudut antara garis pelukis dan tinggi kerucut sebagai α, sudut antara bidang p dan tinggi kerucut sebagai β. Jika arah perpotongan bidang p membentuk sudut $\alpha < \beta < 90°$, terbentuk irisan berupa elips seperti tampak pada gambar. Pada subbab ini, kita akan belajar menentukan persamaan elips yang diketahui unsur-unsurnya.



Gambar 1.8 Irisan kerucut berbentuk elips

a. Persamaan Elips

Elips adalah tempat kedudukan titik-titik yang mempunyai hasil penjumlahan jarak terhadap dua titik tertentu tetap nilainya. Kedua titik tertentu tersebut disebut fokus (F).

1) Persamaan Elips dengan Titik Pusat (0, 0)

a) Persamaan elips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ merupakan persamaan elips dengan:

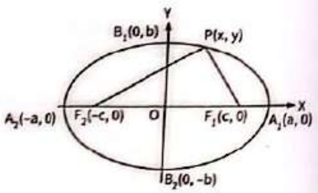
(1) pusat (0, 0);

(2) fokus $F_1(c, 0)$ dan $F_2(-c, 0)$ dengan $c = \sqrt{a^2 - b^2}$;

(3) puncak $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$, $B_1(0, b)$, dan $B_2(0, -b)$;

(4) sumbu utama $y = 0$ dan sumbu sekawan $x = 0$;

(5) panjang sumbu mayor = 2a dan panjang sumbu minor = 2b.



b) Persamaan elips $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ merupakan persamaan elips dengan:

(1) pusat (0, 0);

(2) fokus $F_1(0, c)$ dan $F_2(0, -c)$;

(3) puncak $A_1(0, a)$, $A_2(0, -a)$, $B_1(b, 0)$, dan $B_2(-b, 0)$;

(4) sumbu utama $x = 0$ dan sumbu sekawan $y = 0$;

(5) panjang sumbu mayor = 2a dan panjang sumbu minor = 2b.

2) Persamaan Elips dengan Titik Pusat (p, q)

a) Persamaan elips $\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$ merupakan persamaan elips dengan:

(1) pusat (p, q);

(2) fokus $F_1(p + c, q)$ dan $F_2(p - c, q)$;

(3) puncak $A_1(p + a, q)$, $A_2(p - a, q)$, $B_1(p, q + b)$, dan $B_2(p, q - b)$;

(4) sumbu utama $y = q$ dan sumbu sekawan $x = p$;

(5) panjang sumbu mayor = 2a dan panjang sumbu minor = 2b.

b) Persamaan elips $\frac{(y-q)^2}{a^2} + \frac{(x-p)^2}{b^2} = 1$ merupakan persamaan elips dengan:

(1) pusat (p, q);

(2) fokus $F_1(p, q + c)$ dan $F_2(p, q - c)$;

(3) puncak $A_1(p, q + a)$, $A_2(p, q - a)$, $B_1(p + b, q)$, dan $B_2(p - b, q)$;

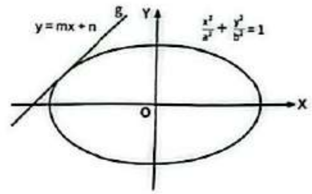
(4) sumbu utama $x = p$ dan sumbu sekawan $y = q$;

(5) panjang sumbu mayor = 2a dan panjang sumbu minor = 2b.

b. Persamaan Garis Singgung Elips

1) Persamaan Garis Singgung Elips dengan Gradien m

Perhatikan gambar di samping. Garis g: $y = mx + n$ bersinggungan dengan kurva elips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.



Dengan melakukan substitusi $y = mx + n$ ke dalam $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ diperoleh:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

$\Leftrightarrow b^2x^2 + a^2(mx + n)^2 = a^2b^2$

$\Leftrightarrow b^2x^2 + a^2(m^2x^2 + 2mnx + n^2) = a^2b^2$

$\Leftrightarrow (b^2 + a^2m^2)x^2 + 2a^2mnx + a^2n^2 - a^2b^2 = 0$

Bentuk di atas merupakan persamaan kuadrat dalam x. Syarat garis menyinggung parabola adalah D = 0 sehingga diperoleh $n = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}$.

Dengan proses yang sama, kita dapat mensubstitusikan $y = mx + n$ ke dalam $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ sehingga diperoleh $n = \pm\sqrt{a^2 + b^2m^2}$.

Persamaan garis singgung dengan gradien m pada elips:

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ adalah $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$

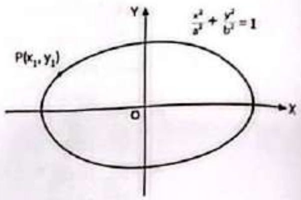
b) $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ adalah $y = mx \pm \sqrt{a^2 + b^2m^2}$

c) $\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$ adalah $y - q = m(x - p) \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$

d) $\frac{(y-q)^2}{a^2} + \frac{(x-p)^2}{b^2} = 1$ adalah $y - q = m(x - p) \pm \sqrt{a^2 + b^2m^2}$

2) Persamaan Garis Singgung Elips di Titik $P(x_1, y_1)$

Perhatikan gambar di samping. Titik $P(x_1, y_1)$ terletak pada kurva elips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Kita dapat menentukan persamaan garis singgung di titik tersebut. Persamaan garis singgung di titik $P(x_1, y_1)$ pada elips:



a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ adalah $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$

b) $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ adalah $\frac{y_1y}{a^2} + \frac{x_1x}{b^2} = 1$

c) $\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$ adalah $\frac{(x_1-p)(x-p)}{a^2} + \frac{(y_1-q)(y-q)}{b^2} = 1$

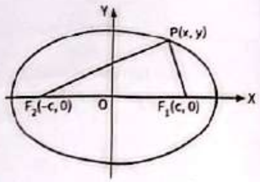
d) $\frac{(y-q)^2}{a^2} + \frac{(x-p)^2}{b^2} = 1$ adalah $\frac{(y_1-q)(y-q)}{a^2} + \frac{(x_1-p)(x-p)}{b^2} = 1$

Aktivitas 5 ANIK YULIA / 20 / XII A2

Menemukan Persamaan Elips

Lengkapi titik-titik berikut dengan teliti dan benar!

Perhatikan gambar di samping. Titik P(x, y) terletak pada elips.



Jarak titik P ke F_1 adalah $\sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2}$ atau $\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$.

Jarak titik P ke F_2 adalah $\sqrt{(x - c)^2 + (y - c)^2}$ atau $\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$.

Jumlah jarak tersebut sama dengan 2a sehingga $PF_1 + PF_2 = 2a$.

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$

Dengan mengkuadratkan kedua ruas diperoleh:

$(\sqrt{(x - c)^2 + y^2})^2 = (2a - \sqrt{(x + c)^2 + y^2})^2$

$\Leftrightarrow (x - c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + (x + c)^2 + y^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$

ANIK YULIA / 20 / XII A2

$\Leftrightarrow -4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2}$

$\Leftrightarrow 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx$

$\Leftrightarrow a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = a^2 + cx$

Dengan mengkuadratkan kedua ruas diperoleh:

$a^2((x + c)^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$

$\Leftrightarrow a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$

$\Leftrightarrow a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$

$\Leftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$

$\Leftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$

Misalkan: $a^2 - c^2 = b^2$ maka persamaan tersebut dapat disusun ulang seperti berikut.

$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$

$\Leftrightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

$\Leftrightarrow \frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Jadi, persamaan elips adalah $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Keterampilan Abad 21

Desain Kreatif dengan Persamaan Elips

Langkah-Langkah Kegiatan:

1. Buatlah kelompok terdiri atas 3–4 orang.
2. Setiap kelompok merancang karya seni digital dengan menggunakan persamaan elips sebagai inspirasi.
3. Setiap kelompok melakukan riset tentang persamaan elips dan mulai merencanakan desain karya mereka menggunakan perangkat lunak desain grafis atau aplikasi kreatif lainnya.
4. Setiap kelompok mewujudkan desain mereka dengan mengimplementasikan persamaan elips dalam karya seni digital mereka.
5. Setiap kelompok menulis deskripsi singkat tentang karya seni digital dan aplikasi persamaan elips dalam desain tersebut.
6. Setiap kelompok mempresentasikan karya seni digital mereka kepada kelas atau audiens lainnya serta menjelaskan konsep-konsep matematika yang terkait dengan desain mereka.
7. Kelompok lain memberikan umpan balik kepada setiap kelompok tentang keberhasilan mereka dalam mengimplementasikan konsep persamaan elips dalam desain karya seni digital mereka.

Contoh Soal

1. Diketahui persamaan elips $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Tentukan:
   a. koordinat pusat;
   b. koordinat puncak;
   c. koordinat fokus;
   d. panjang sumbu mayor;
   e. panjang sumbu minor;
   f. sumbu utama;
   g. sumbu sekawan.

   Jawaban:

   $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

   $a = 5$, $b = 4$, dan $c = \sqrt{25-16} = 3$.
   a. Koordinat pusat (0, 0).
   b. Koordinat puncak (5, 0), (–5, 0), (0, 4), dan (0, –4).
   c. Koordinat fokus (3, 0) dan (–3, 0).
   d. Panjang sumbu mayor $= 2a = 2 \times 5 = 10$.
   e. Panjang sumbu minor $= 2b = 2 \times 4 = 8$.
   f. Sumbu utama adalah sumbu X.
   g. Sumbu sekawan adalah sumbu Y.

2. Diketahui persamaan elips $4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$. Tentukan:
   a. koordinat pusat;
   b. koordinat puncak;
   c. koordinat fokus.

   Jawaban:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad 4(x^2 - 12x) + 9(y^2 + 8y) &= -144 \\ \Leftrightarrow \quad 4(x^2 - 12x + 36) + 9(y^2 + 8y + 16) &= -144 + 144 + 144 \\ \Leftrightarrow \quad 4(x-6)^2 + 9(y+4)^2 &= 144 \\ \Leftrightarrow \quad \frac{(x-6)^2}{36} + \frac{(y+4)^2}{16} &= 1 \end{aligned}$$

   $a = 6$, $b = 4$, $c = \sqrt{36-16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, $p = 6$, dan $q = -4$.
   a. Koordinat pusat $(p, q) = (6, -4)$.
   b. Koordinat puncak:
      $(p + a, q) = (12, -4)$; $(p - a, q) = (0, -4)$;
      $(p, q + b) = (6, 0)$; dan $(p, q - b) = (6, -8)$
   c. Koordinat fokus
      $F_1(p + c, q) = (6 + 2\sqrt{5}, -4)$
      $F_2(p - c, q) = (6 - 2\sqrt{\ }, -4)$

3. Tentukan persamaan elips yang berpusat di titik (–2, 1), sumbu utama sejajar dengan sumbu X, panjang sumbu mayor 16, dan panjang sumbu minor 12.

   Jawaban:

   Pusat elips di (–2, 1) berarti $p = -2$ dan $q = 1$.
   Panjang sumbu mayor 16 berarti $2a = 16 \Rightarrow a = 8$.
   Panjang sumbu minor 12 berarti $2b = 12 \Rightarrow b = 6$.
   Sumbu utama sejajar sumbu X, persamaan elips adalah $\frac{(x+2)^2}{64} + \frac{(y-1)^2}{36} = 1$.

4. Tentukan persamaan garis singgung elips $\frac{(x-5)^2}{28} + \frac{(y-1)^2}{21} = 1$ di titik (9, 4).

   Jawaban:

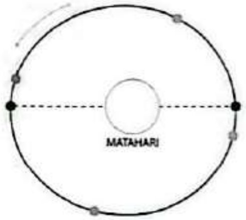
   Titik (9, 4) terletak pada kurva elips.
   Persamaan garis singgungnya:

$$\begin{aligned} & \frac{(x_1-p)(x-p)}{a^2} + \frac{(y_1-q)(y-q)}{b^2} = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{(9-5)(x-5)}{28} + \frac{(4-1)(y-1)}{21} = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{4(x-5)}{28} + \frac{3(y-1)}{21} = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{x-5}{7} + \frac{y-1}{7} = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & x - 5 + y - 1 = 7 \\ \Leftrightarrow \quad & x + y - 13 = 0 \end{aligned}$$

   Jadi, persamaan garis singgungnya adalah $x + y - 13 = 0$.

Kegiatan Berdiferensiasi

1. Lakukan kegiatan berikut secara berkelompok.
2. Amati permasalahan berikut.
   Lintasan bumi mengelilingi matahari berbentuk elips dengan matahari terletak pada salah satu titik fokusnya. Jarak terdekat bumi dengan matahari (*aphelion*) adalah 147 juta kilometer dan jarak terjauhnya (*perihelion*) 152 juta km.



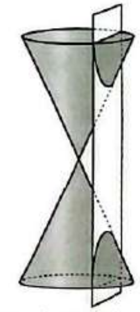
3. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut.
   a. Buatlah model matematika pada permasalahan tersebut dengan menggambarkan lintasan bumi pada bidang koordinat.
   b. Tentukan persamaan elips dari lintasan bumi yang kamu gambarkan tersebut.
   c. Buatlah analisis atau interpretasi pada permasalahan tersebut.

3. Hiperbola

Perhatikan **Gambar 1.9**. Sebuah bidang p memotong/mengiris kerucut. Dimisalkan sudut antara garis pelukis dan tinggi kerucut sebagai α, sudut antara bidang p dan tinggi kerucut sebagai β. Jika arah perpotongan bidang p membentuk sudut $0° < \beta < \alpha$, terbentuk irisan berupa hiperbola seperti tampak pada gambar. Pada subbab ini, kita akan belajar menentukan persamaan hiperbola yang diketahui unsur-unsurnya.

a. Persamaan Hiperbola

Hiperbola adalah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jaraknya terhadap dua titik tertentu tetap nilainya. Kedua titik tertentu tersebut disebut fokus (F).



Gambar 1.9 Irisan kerucut berbentuk hiperbola

1) *Persamaan Hiperbola dengan Titik Pusat (0, 0)*

a) Persamaan hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ merupakan persamaan hiperbola dengan:

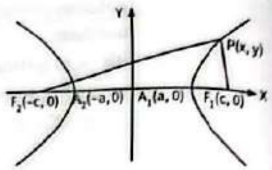
(1) pusat (0, 0);

(2) fokus $F_1(c, 0)$ dan $F_2(-c, 0)$ dengan $c = \sqrt{a^2 + b^2}$;

(3) puncak $A_1(a, 0)$ dan $A_2(-a, 0)$;

(4) sumbu utama $y = 0$ dan sumbu sekawan $x = 0$;

(5) persamaan asimtot $y = \pm \frac{b}{a} x$.



b) Persamaan hiperbola $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ merupakan persamaan hiperbola dengan:

(1) pusat (0, 0);

(2) fokus $F_1(0, c)$ dan $F_2(0, -c)$;

(3) puncak $A_1(0, a)$ dan $A_2(0, -a)$;

(4) sumbu utama $x = 0$ dan sumbu sekawan $y = 0$;

(5) persamaan asimtot $y = \pm \frac{a}{b} x$.

2) *Persamaan Hiperbola dengan Titik Pusat (p, q)*

a) Persamaan hiperbola $\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$ merupakan persamaan hiperbola dengan:

(1) pusat (p, q);

(2) fokus $F_1(p + c, q)$ dan $F_2(p - c, q)$;

(3) puncak $A_1(p + a, q)$ dan $A_2(p - a, q)$;

(4) sumbu utama $y = q$ dan sumbu sekawan $x = p$;

(5) persamaan asimtot $y - q = \pm\ (x - p)$.

b) Persamaan hiperbola $\frac{(y-q)^2}{a^2} - \frac{(x-p)^2}{b^2} = 1$ merupakan persamaan hiperbola dengan:

(1) pusat (p, q);

(2) fokus $F_1(p, q + c)$ dan $F_2(p, q - c)$;

(3) puncak $A_1(p, q + a)$ dan $A_2(p, q - a)$;

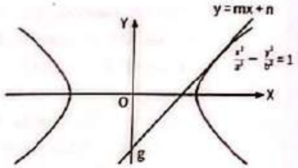
(4) sumbu utama $x = p$ dan sumbu sekawan $y = q$;

(5) persamaan asimtot $y - q = \pm \frac{a}{b}(x - p)$.

b. Persamaan Garis Singgung Hiperbola

1) *Persamaan Garis Singgung Hiperbola dengan Gradien m*

Perhatikan gambar di samping. Garis g: $y = mx + n$ bersinggungan dengan kurva hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Dengan melakukan substitusi $y = mx + n$ ke dalam $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ diperoleh:



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$
$$\Leftrightarrow b^2x^2 - a^2(mx + n)^2 = a^2b^2$$
$$\Leftrightarrow b^2x^2 - a^2(m^2x^2 + 2mnx + n^2) = a^2b^2$$
$$\Leftrightarrow (b^2 - a^2m^2)x^2 - 2a^2mnx - a^2n^2 - a^2b^2 = 0$$

Bentuk di atas merupakan persamaan kuadrat dalam x. Syarat garis menyinggung parabola adalah D = 0 sehingga diperoleh $n = \pm\sqrt{a^2m^2 - b^2}$.

Dengan proses yang sama, kita dapat mensubstitusikan $y = mx + n$ ke dalam $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ diperoleh $n = \pm\sqrt{a^2 - b^2m^2}$.

Persamaan garis singgung dengan gradien m pada hiperbola:

a) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ adalah $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$

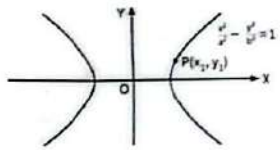
b) $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ adalah $y = mx \pm \sqrt{a^2 - b^2m^2}$

c) $\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$ adalah $y - q = m(x - p) \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$

d) $\frac{(y-q)^2}{a^2} - \frac{(x-p)^2}{b^2}$ 1 adalah $y - q = m(x - p) \pm \sqrt{a^2 - b^2m^2}$

2) *Persamaan Garis Singgung Hiperbola di Titik $P(x_1, y_1)$*

Perhatikan gambar di samping. Titik $P(x_1, y_1)$ terletak pada kurva hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Kita dapat menentukan persamaan garis singgung di titik tersebut. Persamaan garis singgung di titik $P(x_1, y_1)$ pada hiperbola:



a) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ adalah $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$

b) $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ adalah $\frac{y_1y}{a^2} - \frac{x_1x}{b^2} = 1$

c) $\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$ adalah $\frac{(x_1-p)(x-p)}{a^2} - \frac{(y_1-q)(y-q)}{b^2} = 1$

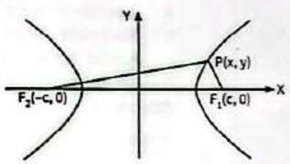
d) $\frac{(y-q)^2}{a^2} - \frac{(x-p)^2}{b^2} = 1$ adalah $\frac{(y_1-q)(y-q)}{a^2} - \frac{(x_1-p)(x-p)}{b^2} = 1$

Aktivitas 6 ANIK YULIA /20/ XII A2

Menemukan Persamaan Hiperbola

Lengkapi titik-titik berikut dengan teliti dan benar.

Perhatikan gambar di samping. Titik P(x, y) terletak pada hiperbola.



Jarak titik P ke F_2 adalah $\sqrt{(x - (c))^2 + (y - y)^2}$ atau $\sqrt{(x + c)^2 + y^2}$.

Jarak titik P ke F_1 adalah $\sqrt{(x - c)^2 + (y - c)^2}$ atau $\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$.

Selisih jarak tersebut sama dengan 2a sehingga $PF_2 - PF_1 = 2a$.

$$PF_2 - PF_1 = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

Dengan mengkuadratkan kedua ruas diperoleh:

$$(\sqrt{(x + c)^2 + y^2})^2 = (2a + \sqrt{(x - c)^2 + y^2})^2$$

$$\Leftrightarrow (x + c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2$$

ANIK YULIA /20/ XII A2

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - x^2 + 2cx + c^2 + y^2$

$\Leftrightarrow \quad 4cx = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

$\Leftrightarrow \quad 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4cx - 4a^2$

$\Leftrightarrow \quad a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx - a^2$

Dengan mengkuadratkan kedua ruas diperoleh:

$a^2((x-c)^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$

$\Leftrightarrow \quad a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$

$\Leftrightarrow \quad a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$

$\Leftrightarrow \quad (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$

$\Leftrightarrow \quad (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$

Misalkan: $a^2 - c^2 = -b^2$ maka persamaan di atas dapat disusun ulang seperti berikut.

$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$

$\Leftrightarrow \quad -b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$

$\Leftrightarrow \quad \frac{-b^2x^2}{-a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{-a^2b^2} = 1$

$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Jadi, persamaan hiperbola adalah $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Contoh Soal

1. Diketahui kurva hiperbola $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$.
   Tentukan:
   a. koordinat pusat;
   b. koordinat fokus;
   c. koordinat puncak;
   d. jarak kedua fokus.

   Jawaban:

   Hiperbola $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$

   $a = 5, b = 4$, dan $c = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$.

   a. Koordinat pusat (0, 0).
   b. Koordinat fokus $(\sqrt{41}, 0)$ dan $(-\sqrt{41}, 0)$.
   c. Koordinat puncak (5, 0) dan (−5, 0).
   d. Jarak kedua fokus $= 2c = 2\sqrt{41}$.

2. Tentukan persamaan asimtot hiperbola berikut.
   a. $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-5)^2}{4} = 1$
   b. $\frac{(y-3)^2}{36} - \frac{(x+1)^2}{9} = 1$

   Jawaban:

   a. $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-5)^2}{4} = 1$

   $a = 3, b = 2, p = -2$, dan $q = 5$.

   Persamaan asimtot:

   $y - 5 = \pm\frac{2}{3}(x+2)$

   $y - 5 = \frac{2}{3}(x+2)$

   $\Leftrightarrow \quad 3y - 15 = 2x + 4$

   $\Leftrightarrow \quad 3y - 2x - 19 = 0$

   $y - 5 = -\frac{2}{3}(x+2)$

   $\Leftrightarrow \quad 3y - 15 = -2x - 4$

   $\Leftrightarrow \quad 3y + 2x - 11 = 0$

   b. $\frac{(y-3)^2}{36} - \frac{(x+1)^2}{9} = 1$

   $a = 6, b = 3, p = -1$, dan $q = 3$.

   Persamaan asimtot:

   $y - 3 = \pm\frac{6}{3}(x+1)$

   $\Leftrightarrow \quad y - 3 = \pm 2(x+1)$

   $y - 3 = 2(x+1)$

   $\Leftrightarrow \quad y - 3 = 2x + 2$

   $\Leftrightarrow \quad y - 2x - 5 = 0$

   $y - 3 = -2(x+1)$

   $\Leftrightarrow \quad y - 3 = -2x - 2$

   $\Leftrightarrow \quad y + 2x - 1 = 0$

3. Tentukan persamaan hiperbola yang mempunyai titik puncak (3, 3) dan (3, −1) serta salah satu titik fokusnya (3, 5).

   Jawaban:

   Puncak $(3, 3) \Rightarrow (p, q + a) = (3, 3)$
   $(3, -1) \Rightarrow (p, q - a) = (3, -1)$

   Diperoleh $p = 3$, $q + a = 3$
   $q - a = -1$ +
   $2q = 2$
   $\Leftrightarrow q = 1 \Rightarrow a = 2$

   Fokus $(3, 5) \Rightarrow F_1(p, q + c) \Rightarrow q + c = 5$
   $F_2(p, q - c) \quad 1 + c = 5$
   $c = 4$

   $b^2 = c^2 - a^2$
   $= 16 - 4 = 12$

   Persamaan hiperbola:

   $\frac{(y-q)^2}{a^2} + \frac{(x-p)^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{(y-1)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{12} = 1$

4. Tentukan persamaan garis singgung hiperbola $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ yang tegak lurus dengan garis $4x + 3y - 7 = 0$.

   Jawaban:

   Garis $4x + 3y - 7 = 0$ gradiennya $m_1 = -\frac{4}{3}$.

   Misalkan garis singgungnya g maka:

   $m_g \times m_1 = -1$

   $\Leftrightarrow \quad m_g \times (-\frac{4}{3}) = -1$

   $\Leftrightarrow \quad m_g = \frac{3}{4}$

   Persamaan garis singgung:

   $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$

   $= \frac{3}{4}x \pm \sqrt{20 \times \frac{9}{16} - 5}$

   $= \frac{3}{4}x \pm \sqrt{\frac{45}{4} - 5}$

   $= \frac{3}{4}x \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$

   $= \frac{3}{4}x \pm \frac{5}{2}$

   $\Leftrightarrow \quad 4y = 3x \pm 10$

   Jadi, persamaan garis singgungnya $4y = 3x \pm 10$.

Asesmen 2

A. *Pilihlah jawaban yang benar!*

1. Parabola $y^2 - 6y + 4x + 17 = 0$ mempunyai puncak di titik . . . .
   a. (3, 2)
   b. (−2, 3)
   c. (2, −3)
   d. (−2, −3)
   e. (3, −2)

2. Persamaan parabola yang memiliki titik puncak (−2, 4), sumbu simetri sejajar sumbu Y, dan melalui titik (−1, 3) adalah . . . .
   a. $x^2 + 4x + y = 0$
   b. $x^2 + 4x + y - 7 = 0$
   c. $x^2 - 4x + y - 8 = 0$
   d. $x^2 - 4x + y + 8 = 0$
   e. $x^2 - 4x + 2y - 7 = 0$

3. Persamaan garis singgung parabola $y^2 = 16x$ yang tegak lurus dengan garis $x + y + 3 = 0$ adalah . . . .
   a. $y = x - 8$
   b. $y = x + 8$
   c. $y = x + 16$
   d. $y = x - 4$
   e. $y = x + 4$

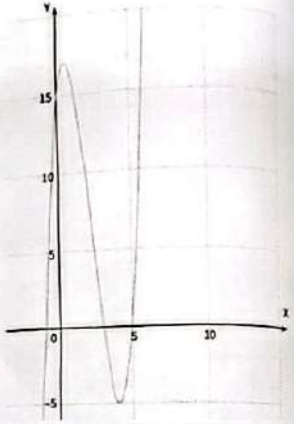
4. Koordinat fokus elips $x^2 + 2y^2 + 4x - 4y + 2 = 0$ adalah . . . .
   a. $(-2 - 2\sqrt{2}, 1)$ dan $(-2 + 2\sqrt{2}, 1)$
   b. $(-2 - \sqrt{2}, 1)$ dan $(-2 + \sqrt{2}, 1)$
   c. $(-2 - 2\sqrt{6}, 1)$ dan $(-2 + 2\sqrt{6}, 1)$
   d. $(-2 - \sqrt{6}, 1)$ dan $(-2 + \sqrt{6}, 1)$
   e. $(2 - \sqrt{2}, 1)$ dan $(2 + \sqrt{2}, 1)$

5. Persamaan elips yang mempunyai puncak (7, −3), (−3, −3), (2, 1), dan (2, −7) adalah . . . .
   a. $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$
   b. $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$
   c. $\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$
   d. $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} =$
   e. $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} =$

Pendalaman Materi

Misalkan biaya produksi dinyatakan dengan fungsi f(x). Nilai tertinggi dan terendah fungsi tersebut dapat ditentukan dengan beberapa cara. Cara pertama, dengan mengamati grafiknya. Misalkan diketahui fungsi $f(x) = x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ di samping. Dari grafik fungsi tersebut dapat diamati nilai f(x) tertinggi dan nilai f(x) terendah.

Cara kedua, dengan menentukan turunan fungsi. Pada cara kedua ini, kamu harus memahami konsep turunan fungsi. Seperti apakah konsep turunan fungsi itu?

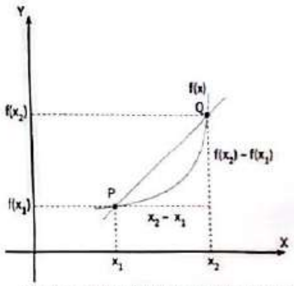


Gambar 3.1 Nilai terendah dan tertinggi fungsi $f(x) = x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ dapat dilihat pada grafik

A. Definisi Turunan Fungsi

1. Konsep dan Notasi Turunan Fungsi

Perhatikan gambar grafik berikut.



Gambar 3.2 Kurva f(x) dan garis PQ yang memotongnya

Titik P dan Q terletak pada kurva fungsi f. Kemiringan garis PQ dinotasikan dengan m. Nilai m merupakan hasil pembagian perubahan nilai fungsi (Δy) oleh perubahan nilai x (Δx). Kemiringan garis PQ dituliskan $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Koordinat titik $P(x_1, f(x_1))$ dan $Q(x_2, f(x_2))$ sehingga $x_2 - x_1$ ditulis sebagai Δx. Diperoleh:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

Jika titik Q mendekati titik P, selisih nilai x makin kecil atau Δx mendekati nol. Oleh karena itu, kemiringan garis PQ dirumuskan $m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Bentuk m ini disebut sebagai turunan fungsi f di titik x yang dinotasikan dengan f'(x). Notasi f'(x) juga dapat ditulis sebagai $\frac{df(x)}{dx}$ atau $\frac{dy}{dx}$.

Sebagai catatan, notasi Δx juga sering ditulis sebagai h sehingga turunan fungsi f ditulis:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Aktivitas 1

Menentukan Rumus f'(x)

Misalkan diketahui $f(x) = 5x$. Bagaimana bentuk f'(x)? Selidiki dengan melengkapi isian berikut.

Diketahui $f(x) = 5x$ sehingga:

$f(x + \Delta x) = 5(x + \Delta x) = 5x + 5\Delta x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5x + 5\Delta x - \ldots}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \ldots \\ &= 5 \end{aligned}$$

Jadi, $f'(x) = 5$.

Contoh Soal

Jika diketahui $f(x) = 3x^2$, tentukan bentuk f'(x).

Jawaban:

Dengan definisi turunan fungsi diperoleh rumus f'(x) berikut.

$f(x + \Delta x) = 3(x + \Delta x)^2 = 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2\right) - 3x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (6x + 3\Delta x) \\ &= 6x \end{aligned}$$

Jadi, $f'(x) = 6x$.

2. Sifat-Sifat Turunan Fungsi

Dengan sifat-sifat turunan fungsi, kamu lebih mudah menentukan turunan fungsi. Perhatikan sifat-sifat berikut.

Misalkan $f(x) = k$ dan $g(x) = ax^n$ dengan k konstanta, a koefisien, dan $n \neq 0$. Berlaku:

a. $f'(x) = 0$

b. $g'(x) = anx^{n-1}$

Contoh Soal

Tentukan $f'(x)$ untuk fungsi f berikut.

a. $f(x) = 1.000$
b. $f(x) = 3x - 50$
c. $f(x) = 8x^6$
d. $f(x) = 2x^{10} - 4x^9$

Jawaban:

a. Fungsi $f(x) = 1.000$ memuat konstanta $k = 1.000$ sehingga $f'(x) = 0$.
b. Dari $f(x) = 3x - 50$ diperoleh suku $3x$ dan -50.
   Turunan $3x$ adalah 3, sedangkan turunan -50 adalah 0.
   Diperoleh $f'(x) = 3$.
c. Dari $f(x) = 8x^6$ diperoleh $a = 8$ dan $n = 6$.
   $f'(x) = anx^{n-1} = 8 \times 6x^{6-1} = 48x^5$
d. Dari $f(x) = 2x^{10} - 4x^9$ diperoleh:
   $f'(x) = 2 \times 10x^{10-1} - 4 \times 9x^{9-1} = 20x^9 - 36x^8$

3. Turunan Fungsi $f(x) = uv$ dan $f(x) = \frac{u}{v}$

Misalkan $f(x)$ berbentuk fungsi perkalian atau pembagian. Turunan pertama fungsi f ditentukan sebagai berikut.

a. Untuk $f(x) = u(x)v(x)$ dengan u dan v fungsi dalam x.
   Turunan pertama fungsi f ditentukan dengan $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.
   Notasi fungsi dapat disederhanakan menjadi $f'(x) = u'v + uv'$.
b. Untuk $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ dengan u dan v fungsi dalam x
   Turunan pertama fungsi f ditentukan dengan $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Agar lebih memahami cara menentukan turunan pertama fungsi berbentuk perkalian atau pembagian, lakukan kegiatan berikut.

Aktivitas 2

Menemukan Turunan Pertama Fungsi $f(x) = \frac{3x+1}{2x-3}$

Ikuti dan lengkapi langkah-langkah berikut.

Dari $f(x) = \frac{3x+1}{2x-3}$ diperoleh $u = 3x + 1$ dan $v = 2x - 3$

Diperoleh:

$u' = 3$

$v' = \ldots$

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{3 \times (2x-3) - (3x+1) \times 2}{(2x-3)^2} = \frac{6x - 9 - 6x - \ldots}{(2x-3)^2} = -\frac{11}{(2x-3)^2}$$

Jadi, turunan pertama fungsi f adalah $f'(x) = -\frac{11}{(2x-3)^2}$.

Contoh Soal

Tentukan turunan pertama fungsi berikut.

a. $f(x) = (x^4 + 4x^3)(x^{-5})$
b. $g(x) = \frac{x-5}{3x+1}$

Jawaban:

a. Dari $f(x) = (x^4 + 4x^3)(x^{-5})$ diketahui $u = x^4 + 4x^3$ dan $v = x^{-5}$.
   Diperoleh:
   $u' = 4x^3 + 12x^2$
   $v' = -5x^{-6}$
   $f'(x) = u'v + uv'$
   $= (4x^3 + 12x^2)(x^{-5}) + (x^4 + 4x^3)(-5x^{-6})$
   $= (4x^{3-5} + 12x^{2-5}) + (-5x^{4-6} - 20x^{3-6})$
   $= 4x^{-2} + 12x^{-3} - 5x^{-2} - 20x^{-3}$
   $= -x^{-2} - 8x^{-3}$
   Jadi, turunan pertama fungsi f adalah $f'(x) = -x^{-2} - 8x^{-3}$.
b. Dari $g(x) = \frac{x-5}{3x+1}$ diketahui $u = x - 5$ dan $v = 3x + 1$.
   Diperoleh:
   $u' = 1$
   $v' = 3$
   $g'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
   $= \frac{1 \times (3x+1) - (x-5) \times 3}{(3x+1)^2}$
   $= \frac{3x + 1 - 3x + 15}{(3x+1)^2}$
   $= \frac{16}{(3x+1)^2}$
   Jadi, turunan pertama fungsi g adalah $g'(x) = \frac{16}{(3x+1)^2}$.

4. Aturan Rantai

Misalkan diketahui $f(x) = (3x^2 + x - 1)^6$. Jika $3x^2 + x - 1$ dianggap sebagai $u(x)$, bentuk fungsi dapat ditulis sebagai $f(x) = (u(x))^6$. Apakah kamu dapat menentukan turunan pertama fungsi f?

Turunan pertama fungsi f dapat ditentukan dengan aturan rantai. Coba amati caranya dengan melakukan kegiatan berikut.

Aktivitas 3

Menentukan Turunan Fungsi dengan Aturan Rantai

Misalkan diketahui $f(x) = (3x^2 + x - 1)^6$. Ikuti langkah untuk menentukan turunan pertama fungsi f berikut.

Misalkan $u = 3x^2 + x - 1$ sehingga fungsi f dapat ditulis menjadi $f(u) = u^6$.

Pertama, fungsi u diturunkan terhadap x.

$\frac{du}{dx} = 2 \times 3x^{2-1} + 1 = \ldots + 1$

Kedua, fungsi f diturunkan terhadap u.

$\frac{df}{du} = 6u^{6-1} = \ldots$

Turunan pertama fungsi f terhadap x sebagai berikut.

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \times \frac{du}{dx} = 6u^5(6x + \ldots) = 6(3x^2 + x - 1)^5(6x + 1) = (36x + 6)(3x^2 + x - 1)^5$$

Jadi, turunan pertama fungsi f adalah $f'(x) = (36x + 6)(3x^2 + x - 1)^5$.

Penguatan Profil Pelajar Pancasila

Dimensi : Mandiri

Elemen : Regulasi diri

Tugas ini dapat melatih kemandirianmu. Pelajar Pancasila yang mandiri mampu mengatur pikiran, perasaan, dan perilaku dirinya untuk mencapai tujuan belajar dan pengembangan dirinya baik di bidang akademik maupun nonakademik. Latihlah dirimu untuk memiliki sikap mandiri.

Contoh Soal

Diketahui $f(x) = (x^4 + 2x^3 - x^2 + x + p)^4$. Jika $f'(-1) = 20$, tentukan:

a. nilai p;

b. rumus $f'(x)$.

Jawaban:

a. Misalkan $u = x^4 + 2x^3 - x^2 + x + p$ sehingga $f(x) = u^4$.

$$\frac{du}{dx} = 4x^3 + 6x^2 - 2x + 1$$

$$\frac{df}{du} = 4u^3$$

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= \frac{df}{du} \times \frac{du}{dx} \\ &= 4u^3(4x^3 + 6x^2 - 2x + 1) \\ &= 4(x^4 + 2x^3 - x^2 + x + p)^3(4x^3 + 6x^2 - 2x + 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(-1) &= 4((-1)^4 + 2 \times (-1)^3 - (-1)^2 - 1 + p)^3(4 \times (-1)^3 + 6 \times (-1)^2 - 2 \times (-1) + 1) \\ \Leftrightarrow \quad 20 &= 4(1 - 2 - 1 - 1 + p)^3(-4 + 6 + 2 + 1) \\ \Leftrightarrow \quad 20 &= 4(-3 + p)^3(5) \\ \Leftrightarrow \quad 20 &= 20(-3 + p)^3 \\ \Leftrightarrow \quad (-3 + p)^3 &= 1 \\ \Leftrightarrow \quad -3 + p &= 1 \\ \Leftrightarrow \quad p &= 4\end{aligned}$$

Jadi, nilai p adalah 4.

b. $f'(x) = 4(x^4 + 2x^3 - x^2 + x + p)^3(4x^3 + 6x^2 - 2x + 1)$
$= 4(x^4 + 2x^3 - x^2 + x + 4)^3(4x^3 + 6x^2 - 2x + 1)$

Jadi, $f'(x) = 4(x^4 + 2x^3 - x^2 + x + 4)^3(4x^3 + 6x^2 - 2x + 1)$.

Info Penting

Misalkan fungsi f mempunyai turunan pertama $f'(x)$. Jika $f'(x)$ dapat diturunkan lagi, akan diperoleh turunan kedua fungsi f. Turunan kedua dinotasikan dengan $f''(x)$ atau $\frac{d^2f}{dx^2}$ atau $\frac{df'(x)}{dx}$.

Asesmen 1

A. *Pilihlah jawaban yang benar!*

1. Diketahui $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x + 1$. Turunan pertama fungsi f adalah . . . .
   a. $f'(x) = 2x^2 - 3x + 6$
   b. $f'(x) = 3x^2 - 2x + 6$
   c. $f'(x) = 5x^2 - 3x + 1$
   d. $f'(x) = 6x^2 - 3x + 6$
   e. $f'(x) = 6x^2 - 6x + 6$

2. Turunan pertama $g(x) = \frac{3}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - 3x^3$ adalah . . . .
   a. $g'(x) = 3x^4 + x^3 - 9x^2$
   b. $g'(x) = 3x^4 + 4x^3 - 3x^2$
   c. $g'(x) = 5x^4 + 4x^3 - 9x^2$
   d. $g'(x) = 15x^4 + 4x^3 - 3x^2$
   e. $g'(x) = 15x^4 + 4x^3 - 9x^2$

3. Turunan pertama fungsi $f(x) = (9x^5 - 4x^4 + 2x^3)^{-4}$ adalah . . . .
   a. $f'(x) = 4(45x^4 - 16x^3 + 6x^2)(9x^5 - 4x^4 + 2x^3)^{-5}$
   b. $f'(x) = -(45x^4 - 16x^3 + 6x^2)(9x^5 - 4x^4 + 2x^3)^{-5}$
   c. $f'(x) = -4(45x^4 - 16x^3 + 6x^2)(9x^5 - 4x^4 + 2x^3)^{-5}$
   d. $f'(x) = -4(9x^5 - 4x^4 + 2x^3)^{-5}$
   e. $f'(x) = -(9x^5 - 4x^4 + 2x^3)^{-5}$

4. Jika diketahui fungsi $f(x) = (x^3 - 2x^2)^3(3x^2 + x)$, nilai $f'(2)$ adalah . . . .
   a. 64
   b. 32
   c. 0
   d. −16
   e. −32

5. Diketahui $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$. Turunan pertama fungsi f adalah . . . .
   a. $f'(x) = \frac{4x+7}{x^2+6x+9}$
   b. $f'(x) = \frac{4x+5}{x^2+6x+9}$
   c. $f'(x) = \frac{7}{x^2+6x+9}$
   d. $f'(x) = \frac{5}{x^2+6x+9}$
   e. $f'(x) = \frac{2}{x^2+6x+9}$

6. Diketahui $f(x) = \frac{x-1}{2x+1} + \frac{3x}{4x+2}$. Nilai $f'(1)$ adalah . . . .
   a. 4
   b. 2
   c. $\frac{1}{2}$
   d. $\frac{1}{4}$
   e. $\frac{1}{9}$

7. Turunan kedua fungsi $f(x) = (6x - 5)^4$ adalah . . . .
   a. $f''(x) = 24(6x - 5)^2$
   b. $f''(x) = 24(6x - 5)^3$
   c. $f''(x) = 72(6x - 5)^2$
   d. $f''(x) = 432(6x - 5)^2$
   e. $f''(x) = 432(6x - 5)^3$

8. Jika diketahui $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 9}{x + 5}$, nilai $f(-4) + f'(-6)$ adalah . . . .
   a. 33
   b. 13
   c. −3
   d. −10
   e. −43

9. Diketahui $f(x) = \sqrt[3]{3x+2}$. Nilai turunan pertama fungsi f untuk $x = -\frac{1}{3}$ adalah . . . .
   a. −3
   b. −1
   c. 0
   d. 1
   e. 3

10. Fungsi $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 12x + 19$ mempunyai turunan $f'(x)$. Jika $f'(p) = 0$, nilai p yang memenuhi adalah . . . .
    a. 6 atau −2
    b. 3 atau 2
    c. −4 atau −6
    d. −4 atau 2
    e. −6 atau 2

B. *Kerjakan soal-soal berikut!*

1. Tentukan $f'(x)$ jika diketahui fungsi f berikut.
   a. $f(x) = 2x^{-5} + 3x^{-6} + 4x^{-7}$
   b. $f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$

2. Diketahui $f(x) = \sqrt[3]{6x^4 + 4x^3 - 9x^2}$. Tentukan nilai $f'(1)$.

3. Diketahui $f(x) = x^3 - px^2 + 5x + 5$. Jika $f'(-2) = 25$, tentukan:
   a. nilai p;
   b. turunan kedua fungsi f.

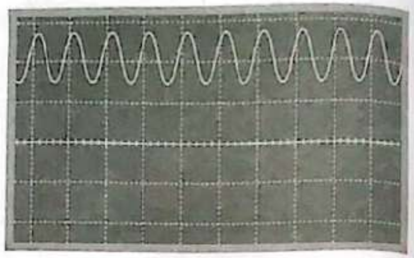
4. Fungsi f dirumuskan dengan $f(x) = (-4x + 5)^3$. Tentukan:
   a. turunan pertama fungsi f;
   b. turunan kedua fungsi f.

5. Diketahui $f(x) = 9x^{\frac{1}{3}} - 5x^{-\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{4}}$ dan $g(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{2 - x}$. Tentukan:
   a. turunan kedua fungsi f;
   b. turunan kedua fungsi g.

Pendalaman Materi

B. Turunan Fungsi Trigonometri

Turunan merupakan salah satu konsep fundamental dalam kalkulus yang digunakan untuk mempelajari perubahan suatu fungsi terhadap variabelnya. Dalam konteks fungsi trigonometri, turunan membantu kita memahami laju perubahan sudut memengaruhi nilai fungsi trigonometri. Turunan fungsi trigonometri merupakan salah satu konsep penting dalam kalkulus yang digunakan untuk mempelajari perubahan nilai fungsi trigonometri terhadap variabelnya. Fungsi trigonometri sering ditemui dalam bahasan teknologi dan gerak benda.


Gambar 3.3 Tampilan grafik fungsi trigonometri di layar osiloskop

Pada gambar di samping, osiloskop merupakan alat yang digunakan untuk memvisualisasikan sinyal listrik yang bervariasi terhadap waktu. Sinyal ini dapat direpresentasikan dengan fungsi trigonometri, seperti sinus dan kosinus.

1. Konsep dan Notasi Turunan Fungsi

Pada subbab awal, kamu telah mempelajari konsep turunan fungsi aljabar. Sekarang kamu akan mempelajari turunan fungsi trigonometri.

Pada dasarnya, konsep turunan fungsi trigonometri sama dengan konsep turunan fungsi aljabar. Keduanya sama-sama dimulai dengan konsep limit. Ingat, turunan fungsi f dinotasikan dengan $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Bagaimana bentuk turunan fungsi $f(x) = \sin x$? Coba selidiki dengan mengikuti kegiatan berikut.

Aktivitas 4

Menentukan Turunan Fungsi $f(x) = \sin x$

Diketahui $f(x) = \sin x$ sehingga $f(x + h) = \sin (x + h)$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \ldots}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \ldots}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \sin h}{h} \\
&= \sin x \lim_{h \to 0} \frac{\ldots}{h} + \cos x \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = \sin x \times 0 + \cos x \times 1 = \cos x
\end{aligned}
$$

Jadi, turunan pertama fungsi $f(x) = \sin x$ adalah $f'(x) = \cos x$.

Info Penting

$\sin (x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\sin (x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
$\cos (x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
$\cos (x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

Secara umum, turunan fungsi trigonometri sederhana dirumuskan sebagai berikut.

a. Turunan $f(x) = \sin x$ adalah $f'(x) = \cos x$.
b. Turunan $f(x) = \cos x$ adalah $f'(x) = -\sin x$.

2. Menentukan Turunan Fungsi Trigonometri

Bagaimana bentuk turunan $f(x) = \tan x$? Turunan fungsi ini dapat diperoleh menggunakan bentuk turunan $f(x) = \sin x$ dan $f(x) = \cos x$ dengan menggunakan sifat-sifat turunan fungsi. Lakukan kegiatan berikut.

Aktivitas 5

Menentukan Turunan Fungsi $f(x) = \tan x$

Diketahui $f(x) = \tan x$. Untuk menentukan turunannya, lengkapi langkah-langkah berikut.

Bentuk $f(x) = \tan x$ dapat ditulis sebagai $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$. Dengan demikian, $f(x) = \tan x$ dapat ditulis dalam bentuk $f(x) = \frac{u}{v}$.

$u = \sin x$ sehingga $u' = \cos x$

$v = \cos x$ sehingga $v' = \ldots$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\
&= \frac{\ldots \times \cos x - \sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2} \\
&= \frac{\cos^2 x + \ldots}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} \\
&= \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 \\
&= \sec^2 x
\end{aligned}
$$

Jadi, turunan $f(x) = \tan x$ adalah $f'(x) = \sec^2 x$.

Bentuk lain yang diperoleh dengan sifat turunan fungsi antara lain:

a. turunan $f(x) = \cot x$ adalah $f'(x) = -\csc^2 x$;
b. turunan $f(x) = \sec x$ adalah $f'(x) = \tan x \sec x$;
c. turunan $f(x) = \csc x$ adalah $f'(x) = -\cot x \times \csc x$.

Penguatan Profil Pelajar Pancasila

Dimensi : Bernalar kritis

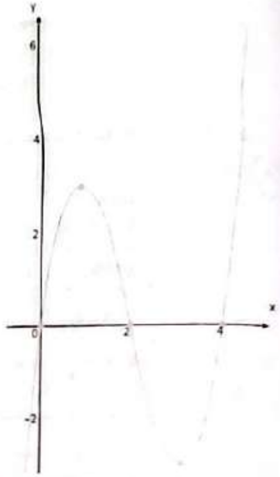
Elemen : Menganalisis dan mengevaluasi penalaran

Kegiatan ini melatihmu bernalar kritis. Kamu harus mampu menggunakan nalar sesuai dengan kaidah sains dan logika dalam penyelesaian pembuktian. Dengan begitu, simpulan atau hasil pembuktian yang kamu peroleh dapat dipertanggungjawabkan.

Pendalaman Materi

C. Aplikasi Turunan Fungsi

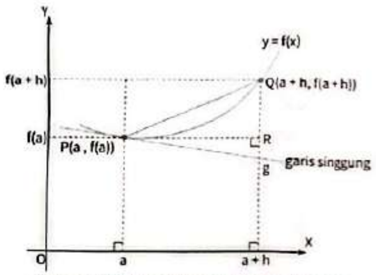
Turunan fungsi memiliki banyak aplikasi dalam berbagai bidang termasuk matematika, fisika, ekonomi, teknik, dan ilmu komputer. Kemampuan untuk menghitung turunan fungsi dan memahami interpretasinya memungkinkan kita untuk memahami dan memodelkan berbagai fenomena alam dan perilaku sistem. Dalam bidang ekonomi, turunan fungsi digunakan untuk menganalisis elastisitas permintaan dan penawaran, margin keuntungan, dan fungsi utilitas. Turunan fungsi juga dapat digunakan untuk menentukan biaya minimum produksi. Misalkan biaya produksi dinyatakan dengan fungsi f(x). Untuk menentukan biaya minimumnya, carilah nilai x yang menyebabkan nilai $f'(x) = 0$. Nilai x yang memenuhi kriteria itu disebut nilai stasioner. Pada subbab ini kamu akan mempelajari konsep nilai stasioner, nilai maksimum atau minimum, dan persamaan garis singgung.



Gambar 3.4 Nilai maksimum dan minimum biasanya terletak pada nilai stasioner

1. Persamaan Garis Singgung pada Kurva

Perhatikan kedudukan grafik fungsi f, garis PQ, dan garis g berikut.



Gambar 3.5 Garis singgung pada kurva y = f(x) di x = a

Info Penting

Garis singgung sering dikaitkan dengan garis normal. Kedua garis ini berkedudukan saling tegak lurus. Oleh karena itu, hasil perkalian kedua gradiennya –1.

Garis g disebut garis singgung grafik fungsi f pada titik P(a, f(a)). Garis g berupa garis lurus. Oleh karena itu, untuk menentukan persamaan garis g perlu diketahui gradien garis g.

Gradien garis g dirumuskan dengan $m_g = f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Dengan demikian, persamaan garis g adalah $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

Contoh Soal

Diketahui $f(x) = x^2 + 4x - 1$. Tentukan persamaan garis singgung dan persamaan garis normal grafik fungsi f di titik (1, 4).

Jawaban:

Dari $f(x) = x^2 + 4x - 1$ diperoleh $f'(x) = 2x + 4$.

Misalkan m_1 = gradien garis singgung di titik (1, 4).

$m_1 = f'(1) = 2 \times 1 + 4 = 6$

Persamaan garis singgung:

$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

$\Leftrightarrow y - 4 = 6(x - 1)$

$\Leftrightarrow y - 4 = 6x - 6$

$\Leftrightarrow y = 6x - 2$

Jadi, persamaan garis singgung tersebut $y = 6x - 2$.

Misalkan m_2 = gradien garis normal.

Telah diketahui $m_1 = 6$ sehingga:

$m_1 \times m_2 = -1$

$\Leftrightarrow 6 \times m_2 = -1$

$\Leftrightarrow m_2 = -\frac{1}{6}$

Persamaan garis normal:

$y - f(1) = m_2(x - 1)$

$\Leftrightarrow y - 4 = -\frac{1}{6}(x - 1)$

$\Leftrightarrow 6y - 24 = -x + 1$

$\Leftrightarrow x + 6y = 25$

Jadi, persamaan garis normalnya $x + 6y = 25$.

Tugas

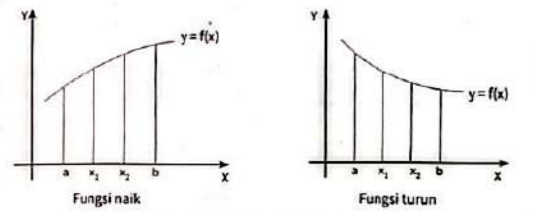
Menggambar Grafik

Kemajuan teknologi memungkinkan kamu menggambar grafik secara *online*. Untuk keperluan ini, lakukan kegiatan berikut.

1. Kunjungi laman pembuat grafik, misalnya *https://www.desmos.com/calculator.*
2. Tentukan fungsi berpangkat tiga dengan bentuk umum $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
3. Tentukan garis singgung grafik fungsi f di salah satu titik.
4. Gunakan *website* itu untuk menggambar grafik f(x) beserta garis singgungnya.
5. Simpan gambar grafik itu.
6. Buatlah laporan, lalu kumpulkan kepada gurumu.

2. Fungsi Naik, Fungsi Turun, dan Fungsi Stasioner

Misalkan f(x) berupa fungsi kontinu pada interval [a, b]. Misalkan pula x_1 dan x_2 terletak di dalam interval [a, b] dan memenuhi $a < x_1 < x_2 < b$. Fungsi f dikatakan naik jika $f(x_1) < f(x_2)$. Sebaliknya, fungsi f dikatakan turun jika $f(x_1) > f(x_2)$.



Gambar 3.6 Tampilan grafik fungsi naik dan grafik fungsi turun

Dengan turunan pertama fungsi f akan diketahui fungsi f naik atau turun di interval [a, b].

a. Jika $f'(x) > 0$, fungsi f dikatakan naik.
b. Jika $f'(x) < 0$, fungsi f dikatakan turun.
c. Jika $f'(x) = 0$, dikatakan fungsi f tidak naik dan tidak turun (stasioner). Pada titik stasioner, fungsi f tidak naik dan tidak turun.

Jika fungsi f naik atau turun pada interval [a, b], dikatakan fungsi f monoton pada interval [a, b].

Contoh Soal

Diketahui $f(x) = x^2 + 6x + 5$. Tentukan:

a. interval saat fungsi f naik;

b. interval saat fungsi f turun.

Jawaban:

a. Dari $f(x) = x^2 + 6x + 5$ diperoleh $f'(x) = 2x + 6$.

Fungsi f naik jika $f'(x) > 0$.

$f'(x) > 0$

$\Leftrightarrow 2x + 6 > 0$

$\Leftrightarrow 2x > -6$

$\Leftrightarrow x > -3$

Jadi, fungsi f naik pada interval $x > -3$.

b. Fungsi f turun jika $f'(x) < 0$.

$f'(x) < 0$

$\Leftrightarrow 2x + 6 < 0$

$\Leftrightarrow 2x < -6$

$\Leftrightarrow x < -3$

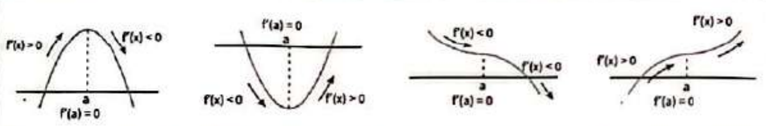
Jadi, fungsi f turun pada interval $x < -3$.

3. Nilai Ekstrem, Nilai Balik Minimum, dan Nilai Balik Maksimum

Titik stasioner dapat menjadi nilai maksimum, nilai minimum, atau titik belok fungsi. Untuk menyelidikinya, titik stasioner diperiksa menggunakan uji turunan pertama dan kedua.

a. Uji Turunan Pertama

Perhatikan gambar berikut.



x	< a	a	> a
f'(x)	+	0	-

1)

x	< a	a	> a
f'(x)	-	0	+

2)

x	< a	a	> a
f'(x)	-	0	-

3)

x	< a	a	> a
f'(x)	+	0	+

4)

Gambar 3.7 Tampilan nilai balik maksimum, nilai balik minimum, dan titik belok

Titik $x = a$ adalah titik stasioner $f(x)$ sehingga $f'(a) = 0$.

1) Dari gambar diketahui $f'(x) > 0$ untuk $x < a$ dan $f'(x) < 0$ untuk $x > a$. Titik (a, f(a)) disebut titik balik maksimum. Nilai f(a) disebut nilai maksimum f(x).
2) Dari gambar diketahui $f'(x) < 0$ untuk $x < a$ dan $f'(x) > 0$ untuk $x > a$. Titik (a, f(a)) disebut titik balik minimum. Nilai f(a) disebut nilai minimum f(x).
3) Dari gambar diketahui $f'(x) < 0$ untuk $x < a$ dan $f'(x) < 0$ untuk $x > a$. Titik (a, f(a)) disebut titik belok.
4) Dari gambar diketahui $f'(x) > 0$ untuk $x < a$ dan $f'(x) > 0$ untuk $x > a$. Titik (a, f(a)) disebut titik belok.

b. Uji Turunan Kedua

Titik $x = a$ adalah titik stasioner f(x) sehingga $f'(a) = 0$.

1) Jika $f''(a) < 0$, titik (a, f(a)) disebut titik balik maksimum. Nilai f(a) disebut nilai maksimum f(x).
2) Jika $f''(a) > 0$, titik (a, f(a)) disebut titik balik minimum. Nilai f(a) disebut nilai minimum f(x).
3) Jika $f'(x) < 0$ untuk $x < a$ dan $f''(a) = 0$, titik (a, f(a)) disebut titik belok turun.
4) Jika $f'(x) > 0$ untuk $x < a$ dan $f''(a) = 0$, titik (a, f(a)) disebut titik belok naik.

c. Nilai Maksimum dan Minimum

Misalkan daerah asal fungsi f dibatasi menjadi [a, b]. Nilai maksimum atau minimum fungsi dalam interval [a, b] disebut nilai maksimum atau minimum relatif. Artinya, jika interval fungsi f diperluas, mungkin saja ada nilai lain yang menyebabkan nilai f lebih besar atau lebih kecil. Dalam bahasan ini, jika dikatakan nilai maksimum atau minimum, dimaksudkan bahwa nilai tersebut nilai maksimum relatif atau nilai minimum relatif.

Nilai maksimum atau minimum fungsi f dapat terletak di ujung interval, di titik stasioner, atau di titik singular. Titik singular adalah titik yang menyebabkan fungsi f tidak mempunyai turunan.

Contoh Soal

Diketahui $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x - 15$. Tentukan nilai maksimum dan minimum fungsi untuk interval $0 \le x \le 6$.

Jawaban:

Diketahui $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x - 15$ sehingga $f'(x) = 6x^2 - 42x + 60$.

Stasioner fungsi diperoleh saat $f'(x) = 0$.

$6x^2 - 42x + 60 = 0$

$\Leftrightarrow 6(x^2 - 7x + 10) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 5) = 0$

$\Leftrightarrow x - 2 = 0$ atau $x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$ atau $x = 5$

Diperoleh stasioner fungsi saat $x = 2$ atau $x = 5$.

Berdasarkan nilai yang menyebabkan stasioner akan diperiksa nilai f'(x) menggunakan diagram.

Ambil $x = 1$ untuk mewakili interval $0 < x < 2$.

$f'(1) = 1^2 - 7 \times 1 + 10$

$= 4\ (> 0)$

Ambil $x = 3$ untuk mewakili interval $2 < x < 5$.

$f'(3) = 3^2 - 7 \times 3 + 10$

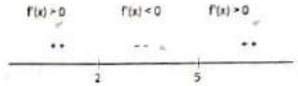
$= -2\ (< 0)$

Ambil $x = 6$ untuk mewakili interval $5 < x < 6$.

$f'(6) = 6^2 - 7 \times 6 + 10$

$= 4\ (> 0)$

Dari nilai-nilai tersebut diperoleh diagram berikut.



Berdasarkan diagram di atas, disimpulkan:

a. nilai $f'(2) = 0$, $f'(x) > 0$ untuk $x < 2$, dan $f'(x) < 0$ untuk $2 < x < 5$. Dengan demikian, f mencapai nilai maksimum lokal pada saat $x = 2$.

b. nilai $f'(5) = 0$, $f'(x) < 0$ untuk $2 < x < 5$, dan $f'(x) > 0$ untuk $x > 5$. Dengan demikian, f mencapai nilai minimum lokal pada saat $x = 5$.

$f(2) = 2 \times 2^3 - 21 \times 2^2 + 60 \times 2 - 15$

$= 16 - 84 + 120 - 15 = 37$

$f(5) = 2 \times 5^3 - 21 \times 5^2 + 60 \times 5 - 15$

$= 250 - 525 + 300 - 15 = 10$

Uji titik ujung interval (yaitu $x = 0$):

$f(0) = 2 \times 0^3 - 21 \times 0^2 + 60 \times 0 - 15 = -15$

Uji titik ujung interval (yaitu $x = 6$):

$f(6) = 2 \times 6^3 - 21 \times 6^2 + 60 \times 6 - 15 = 21$

Disimpulkan bahwa nilai maksimum fungsi 37 dan nilai minimum fungsi −15.

Jadi, nilai maksimum dan minimum fungsi berturut-turut 37 dan −15.

Pendalaman Materi

Kamu telah mempelajari hubungan antara jarak dan kecepatan pada bab turunan fungsi. Fungsi kecepatan merupakan turunan fungsi jarak yang berarti fungsi jarak merupakan antiturunan fungsi kecepatan. Antiturunan disebut juga integral. Permasalahan di awal bab tersebut dapat diselesaikan dengan integral. Langkah pertama kamu harus menentukan fungsi yang menyatakan jarak tempuh dengan melakukan pengintegralan terhadap fungsi yang menyatakan kecepatan.

Bagaimana cara menentukan integral fungsi kecepatan bersepeda pada permasalahan di awal bab? Untuk mengetahuinya, kamu dapat mempelajari materi pada bab ini. Pada bab ini kamu akan mempelajari tentang integral tak tentu, integral tentu, dan penerapan integral.

A. Integral Tak Tentu

Kania bersepeda melintasi rute Shimanami Kaido dengan kecepatan yang dinyatakan dengan $v(t) = 3$ m/s. Diketahui Kania mulai bersepeda 200 meter sebelum garis start artinya $s(0) = -200$. Bagaimana cara menentukan fungsi jaraknya? Perhatikan uraian berikut.

Gambar 4.1 Shimanami Kaido

Fungsi jarak dapat diperoleh dengan melakukan pengintegralan fungsi kecepatan.

$$s(t) = \int v(t)\,dt$$
$$= \int 3\,dt$$
$$= 3t + C$$
$$S(0) = -200$$
$$\Leftrightarrow 3 \times 0 + C = -200$$
$$\Leftrightarrow \quad C = -200$$

Jadi, diperoleh fungsi jarak $s(t) = (3t - 200)$ meter.

$\int 3\,dt$ merupakan bentuk integral tak tentu. Apa itu integral tak tentu? Pada subbab ini kamu akan mempelajari tentang definisi integral tak tentu, sifat-sifat integral tak tentu, dan metode pengintegralan.

Cakap Literasi

Pada bab sebelumnya, kamu telah belajar tentang turunan. Apa yang kamu ketahui tentang turunan? Apa hubungan turunan dan integral? Carilah buku-buku yang membahas tentang turunan dan integral. Bacalah buku-buku yang kamu temukan. Selanjutnya, buatlah poster, *PowerPoint*, atau portofolio yang berisi rangkuman materi tentang turunan yang telah kamu pelajari. Presentasikan hasil karyamu di depan kelas dan kumpulkan kepada guru.

1. Definisi Integral Tak Tentu

a. Mengenal Notasi Integral

Integral merupakan kebalikan turunan. Integral disebut juga sebagai antiturunan. Integral fungsi $f(x)$ dinotasikan dengan $\int f(x)\,dx$. Untuk menambah pemahamanmu lakukan kegiatan berikut.

Aktivitas 1 ANIK YULIA / 20 / XII A2

Mengenal Notasi Integral Tak Tentu

Lakukan kegiatan berikut secara individu dan lengkapi titik-titik berikut.

$F(x)$	$f(x) = F'(x)$
x^2	$2x$
$x^2 + 1$	$2x$
$x^2 + 8$	$2x$
$x^2 + (-2)$	$2x$
$x^2 + C$	$2x$

Berdasarkan tabel tersebut diperoleh turunan fungsi $F(x)$ adalah $f(x)$. Sebaliknya, antiturunan $f(x) = 2x$ adalah $x^2 + C$ dengan C suatu konstanta yang belum diketahui nilainya. Hubungan antara turunan dan antiturunan fungsi digambarkan sebagai berikut.

$$F(x) \xrightarrow{\text{Turunan}} f(x) \xrightarrow{\text{Antiturunan}} F(x) + C$$

Berdasarkan uraian tersebut integral tak tentu dapat dinotasikan sebagai berikut.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + \ldots$$

Penguatan Profil Pelajar Pancasila

Dimensi : Bernalar kritis

Elemen : Memperoleh dan memproses informasi dan gagasan

Kegiatan ini akan mempertajam sikap bernalar kritismu. Sikap ini sangat berguna saat menghadapi berbagai masalah. Dengan memiliki kemampuan bernalar kritis, kamu akan menemukan solusi atas masalah yang dihadapi dengan baik.

Setelah melakukan kegiatan **Aktivitas 1** diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

Jika $F(x)$ fungsi umum yang bersifat $F'(x) = f(x)$ maka $F(x)$ merupakan antiturunan atau *integral* $f(x)$. Pengintegralan fungsi $f(x)$ terhadap x dinotasikan sebagai berikut.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Keterangan:
- $\int$: notasi integral
- $f(x)$: fungsi integral
- $d(x)$: turunan dari x
- $F(x)$: fungsi integral umum
- C : konstanta

b. Rumus Dasar Integral Tak Tentu

Integral tak tentu adalah proses kebalikan turunan. Dalam notasi matematika, integral tak tentu sering ditulis sebagai $\int f(x)\,dx$. Untuk mengetahui rumus dasar integral tak tentu, coba lakukan kegiatan berikut.

Aktivitas 2 ANIK YULIA /20 / XII A2

Rumus Dasar Integral Tak Tentu

Lakukan kegiatan berikut secara individu. Lengkapi titik-titik berikut.

$F(x)$	$f(x) = F'(x)$
$-\frac{1}{3}x^{-3}$	x^{-4}
$-\frac{1}{2}x^{-2}$	x^{-3}
$-x^{-1}$	x^{-2}
x	x^{0}
$\frac{1}{2}x^{2}$	x^{1}
$\frac{1}{3}x^{3}$	x^{2}
$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	x^{n}

Berdasarkan tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa antiturunan $f(x) = x^n$ adalah $F(x) = \frac{1}{n+1} x^{(n+1)} + C$

Setelah melakukan kegiatan **Aktivitas 2**, rumus dasar pengintegralan tak tentu dinyatakan sebagai berikut.

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad \text{atau} \quad \int ax^n\,dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + C$$

Untuk memperjelas penggunaan rumus dasar integral tak tentu, coba perhatikan contoh soal berikut.

Contoh Soal

Tentukan hasil integral tak tentu fungsi aljabar berikut.

$\int 3x^2\,dx$

Jawaban:

$$\begin{aligned} \int 3x^2\,dx &= \frac{3}{2+1}x^{2+1} + C \\ &= \frac{3}{3}x^3 + C \\ &= x^3 + C \end{aligned}$$

2. Sifat-Sifat Integral Fungsi

Dengan menggunakan sifat-sifat turunan fungsi, akan diturunkan sifat-sifat integral. Untuk sembarang fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ serta konstanta k berlaku sifat-sifat integral tak tentu berikut.

a. Pada turunan berlaku sifat turunan fungsi $F(x) = k\,f(x)$ adalah $F'(x) = k\,f'(x)$. Pada integral juga berlaku sifat demikian yaitu:

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

Pada turunan berlaku sifat turunan fungsi $F(x) = f(x) + g(x)$ adalah $F'(x) = f'(x) + g'(x)$. Pada integral juga berlaku sifat demikian yaitu:

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

b. Pada turunan berlaku sifat turunan fungsi $F(x) = f(x) - g(x)$ adalah $F'(x) = f'(x) - g'(x)$. Pada integral juga berlaku sifat demikian yaitu:

$$\int (f(x) - g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$$

Untuk memperjelas materi sifat-sifat integral, perhatikan contoh soal berikut.

Contoh Soal

Tentukan hasil integral tak tentu fungsi aljabar berikut.

1. $\int 8x^3\,dx$
2. $\int (10x^4 + 9x^2)\,dx$

Jawaban:

1. $$\begin{aligned} \int 8x^3\,dx &= 8\int x^3\,dx \\ &= 8 \times \frac{1}{3+1}x^{3+1} + C \\ &= 8 \times \frac{1}{4}x^4 + C \\ &= 2x^4 + C \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \int (10x^4 + 9x^2)\,dx &= \int 10x^4\,dx + \int 9x^2\,dx \\ &= 10\int x^4\,dx + 9\int x^2\,dx \\ &= 10 \times \frac{1}{4+1}x^{4+1} + 9 \times \frac{1}{2+1}x^{2+1} + C \\ &= 10 \times \frac{1}{5}x^5 + 9 \times \frac{1}{3}x^3 + C \\ &= 2x^5 + 3x^3 + C \end{aligned}$$

Untuk melatih pemahamanmu tentang sifat-sifat integral tak tentu fungsi aljabar, lakukan kegiatan berikut.

Aktivitas 3 ANIK YULIA / 20 / XII A2

Penggunaan Sifat-Sifat Integral Tak Tentu

Lakukan kegiatan ini secara individu.

Tentukan hasil bentuk integral fungsi aljabar berikut. (Gunakan sifat-sifat integral tak tentu yang telah kamu pelajari). Selanjutnya, lengkapi titik-titik berikut.

1. $\int \frac{8}{x^3}\,dx = \int 8x^{-3}\,dx$

$= 8\int x^{-3}\,dx$

$= 8 \times \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} + C$

$= 8 \times \frac{1}{-2} x^{-2} + C$

$= -4x^{-2} + C$

$= \frac{-4}{x^2} + C$

2. $\int (6x^2 - 2x - 1)\,dx = 6\int x^2\,dx - 2\int x\,dx - \int 1\,dx$

$= 6 \times \frac{1}{2+1} x^{2+1} - 2 \times \frac{1}{1+1} x^{1+1} - \frac{1}{0+1} x^{0+1} + C$

$= \frac{6}{3} x^3 - \frac{2}{2} x^2 - x^1 + C$

$= 2x^3 - x^2 - x + C$

3. $\int (4x + 6\sqrt{x})\,dx = \int (4x + 6x^{1/2})\,dx$

$= 4\int x\,dx + 6\int x^{1/2}\,dx$

$= 4 \times \frac{1}{1+1} x^{1+1} + 6 \times \frac{1}{1/2+1} x^{\frac{1}{2}+1} + C$

$= \frac{4}{2} x^2 + \frac{6}{3/2} x^{3/2} + C$

$= 2x^2 + 4x^{3/2} + C$

$\hookrightarrow 4x^{3/2}$

Penguatan Profil Pelajar Pancasila

Dimensi : Mandiri

Elemen : Regulasi diri

Kegiatan ini akan memupuk sikap mandirimu. Kemandirian membuatmu lebih bisa diandalkan dalam berbagai hal. Kamu tidak terlalu bergantung kepada orang lain. Buktikan bahwa kamu bisa menyelesaikan suatu kegiatan secara mandiri.

3. Metode Integral Substitusi

Kamu telah belajar dan berlatih untuk menentukan pengintegralan sesuai dengan rumus-rumus dasar integral. Terkadang proses pengintegralan tidak dapat diselesaikan dengan rumus dasar. Oleh karena itu, diperlukan metode pengintegralan yang lain. Salah satu metode yang umum digunakan yaitu metode substitusi. Metode integral substitusi digunakan untuk memecahkan masalah pengintegralan yang tidak dapat diselesaikan dengan rumus-rumus dasar. Metode substitusi dilakukan dengan cara mensubstitusikan salah satu bentuk variabel, lalu mengubahnya menjadi sebuah bentuk yang lebih sederhana. Bagaimana proses pengintegralan dalam metode tersebut? Kamu dapat mengetahuinya setelah memperhatikan penjelasan berikut.

Misalkan terdapat fungsi komposisi $y = f(g(x))$ maka turunannya $y' = f'(g(x)) \times g'(x)$. Berdasarkan bentuk tersebut diperoleh:

$$\frac{df(g(x))}{dx} = f'(g(x)) \times g'(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad df(g(x)) = f'(g(x)) \times g'(x)\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \int f(g(x))\,dx = \int f'(g(x)) \times g'(x)\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad f(g(x)) + C = \int f'(g(x)) \times g'(x)\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \int f'(g(x)) \times g'(x)\,dx = f(g(x)) + C$$

Jika digunakan permisalan $u = g(x)$ maka $du = g'(x)\,dx$. Dengan demikian diperoleh:

$\int f'(u)\,du = f(u) + C$

Berdasarkan rumus $\int f'(u)\,du = f(u) + C$, kita dapat menurunkan rumus-rumus integral substitusi fungsi berpangkat. Bagaimana cara menentukan rumus-rumus integral substitusi fungsi berpangkat? Untuk mengetahuinya, coba lakukan kegiatan berikut.

Aktivitas 4 ANIK YULIA / 20 / XII A2

Integral Substitusi Fungsi Berpangkat

Lengkapi titik-titik berikut.

1. Tentukan rumus integral bentuk $\int (x+b)^n\,dx$.

Misalkan $u = x + b$ maka $du = dx$

$\int (x+b)^n\,dx = \int u^n\,du$

$= \frac{1}{(n+1)} u^{n+1} + C$

$= \frac{1}{(n+1)} (x+b)^{n+1} + C$

Jadi, $\int (x+b)^n\,dx = \frac{1}{(n+1)} (x+b)^{n+1} + C$

8. Hasil $\int \frac{12}{(2x-5)^3}\,dx$ adalah . . . .
   a. $\frac{3}{(2x-5)^3} + C$
   b. $\frac{2}{(2x-5)^4} + C$
   c. $\frac{-2}{(2x-5)^2} + C$
   d. $\frac{-1}{(2x-5)^4} + C$
   e. $\frac{-3}{(2x-5)^2} + C$

9. Hasil $\int (12x + 3)(2x^2 + x - 6)^7 dx$ adalah . . . .
   a. $\frac{3}{8}(2x^2 + x - 6)^8 + C$
   b. $\frac{1}{3}(2x^2 + x - 6)^8 + C$
   c. $3(2x^2 + x - 6)^8 + C$
   d. $2(2x^2 + x - 6)^8 + C$
   e. $(2x^2 + x - 6)^8 + C$

10. Hasil $\int \frac{2x+3}{\sqrt{3x^2+9x-1}}\,dx$ adalah . . . .
   a. $2\sqrt{3x^2+9x-1} + C$
   b. $\frac{1}{3}\sqrt{3x^2+9x-1} + C$
   c. $\frac{2}{3}\sqrt{3x^2+9x-1} + C$
   d. $\frac{1}{2}\sqrt{3x^2+9x-1} + C$
   e. $\frac{3}{2}\sqrt{3x^2+9x-1} + C$

B. *Kerjakan soal-soal berikut!*

1. Tentukan hasil integral tak tentu fungsi aljabar berikut.
   a. $\int (6 - 2x)\,dx$
   b. $\int (12x^3 + 3x^2 - 4x + 2)\,dx$
   c. $\int (3x - 1)^2\,dx$
   d. $\int (6x - 5)(2x + 3)\,dx$
2. Tentukan hasil integral tak tentu fungsi aljabar berikut.
   a. $\int (5x^4 - \frac{2}{x^3})\,dx$
   b. $\int (8x^3 + 3\sqrt{x})\,dx$
   c. $\int (\frac{7}{\sqrt{x}} + 4)\,dx$
3. Tentukan hasil pengintegralan fungsi aljabar berikut.
   a. $\int \sqrt{2x+7}\,dx$
   b. $\int (1 - 4x)^6\,dx$
4. Tentukan hasil pengintegralan fungsi aljabar berikut.
   a. $\int 2x(7 - x^2)^3\,dx$
   b. $\int (x + 2)(x^2 + 4x - 1)^3\,dx$
5. Tentukan hasil pengintegralan fungsi aljabar berikut.
   a. $\int (x - 2)\sqrt{x^2 - 4x + 1}\,dx$
   b. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{2x^2+6x-3}}\,dx$

Pendalaman Materi

B. Integral Tentu

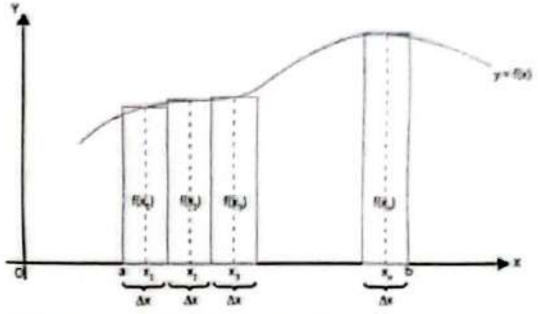
Metode jumlahan Riemann berasal dari seorang matematikawan Jerman pada abad 19 bernama Georg Friedrich Bernhard Riemann atau lebih dikenal Bernhard Riemann. Jumlahan Riemann digunakan untuk memperkirakan luas daerah di antara kurva dan sumbu X pada suatu interval. Jumlahan Riemann dilakukan dengan membagi luas daerah menjadi beberapa persegi panjang dengan lebar sama dan menjumlahkan luas semua persegi panjang tersebut sehingga diperoleh luas pendekatan yang dimaksud. Metode ini dapat digunakan untuk menentukan pendekatan nilai integral tentu. Apa itu integral tentu? Untuk mengetahuinya pelajari subbab ini. Pada subbab ini kamu akan mempelajari tentang definisi integral tentu, *sifat-sifat integral* tentu, dan menentukan nilai integral tentu.

Gambar 4.2 Bernhard Riemann

1. Definisi Integral Tentu

Integral tentu adalah integral yang batas atas dan batas bawahnya diketahui. Perhatikan penjelasan berikut.

Misalkan terdapat suatu fungsi f(x) kontinu pada interval [a, b]. Daerah yang dibatasi oleh $y = f(x)$, sumbu X, garis $x = a$, dan garis $x = b$ dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 4.3 Integral tentu sebagai luas bidang datar

Interval [a, b] dibagi menjadi n bagian interval. Panjang tiap-tiap bagian interval yaitu Δx. Pada tiap-tiap bagian interval ditentukan titik-titik $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$. Kemudian, dibuat daerah-daerah persegi panjang dengan ukuran panjang $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \cdots, f(x_n)$, sedangkan ukuran lebarnya Δx. Luas pendekatan daerah yang dibatasi oleh kurva f(x), sumbu X, garis $x = a$, dan garis $x = b$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} L &= L_1 + L_2 + L_3 + \ldots + L_n \\ &= f(x_1) \times \Delta x + f(x_2) \times \Delta x + f(x_3) \times \Delta x + \ldots + f(x_n) \times \Delta x \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \times \Delta x \end{aligned}$$

Oleh karena kita dapat membuat tak hingga bagian interval maka jumlah luas semua persegi panjang dinyatakan sebagai berikut.

$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \times \Delta x = \int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Bentuk $\int_a^b f(x)\,dx$ disebut integral tentu atau integral Riemann.

Berdasarkan uraian tersebut diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

Misalkan terdapat suatu fungsi f(x) kontinu pada interval tertutup [a, b] dan $F(x) = f'(x)$, maka untuk semua x di dalam interval [a, b] diperoleh:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Untuk lebih memperjelas materi tersebut, lakukan kegiatan berikut.

Aktivitas 5

Menentukan Luas Daerah dengan Integral Riemann

Lakukan kegiatan berikut dengan teman sebangkumu. Lengkapi titik-titik berikut.

Misalkan terdapat suatu fungsi $f(x) = 2x^2 - 3$ kontinu pada interval $[1, 4]$. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x) = 2x^2 - 3$, sumbu X, garis $x = 1$, dan garis $x = 5$.

Jawaban:

Luas daerah yang dibatasi oleh $y = f(x) = 2x^2 - 3$, sumbu X, garis $x = 1$, dan garis $x = 5$ dapat diperoleh dengan melakukan integral fungsi f(x) dengan batas bawah $a = \ldots$ dan batas atas $b = \ldots$ berikut.

$$
\begin{aligned}
L &= \int_a^b f(x)dx \\
&= \int_{\ldots}^{\ldots} (2x^2 - 3)dx \\
&= \left[\frac{2x^3}{\ldots} - \ldots\right]_{\ldots}^{\ldots} \\
&= \left[\frac{2 \times \ldots}{\ldots} - 3 \times \ldots\right] - \left[\frac{2 \times \ldots}{\ldots} - 3 \times \ldots\right] \\
&= \left[\frac{\ldots}{3} - \ldots\right] - \left[\frac{2}{\ldots} - 3\right] \\
&= \frac{\ldots}{3} - \frac{2}{3} - \ldots + 3 \\
&= \frac{\ldots}{3} - 9 \\
&= \ldots - 9 \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

Jadi, luas daerah yang dibatasi oleh $y = f(x) = 2x^2 - 3$, sumbu X, garis $x = 1$, dan garis $x = 5$ adalah ... satuan luas.

Contoh Soal

Tentukan nilai integral tentu berikut.

1. $\int_2^5 (4x + 1)dx$
2. $\int_{-1}^2 (x^2 - 2x + 5)\,dx$

Jawaban:

1. $\int_2^5 (4x+1)\,dx = \left[\frac{4}{2}x^2 + x\right]_2^5$

$$
\begin{aligned}
&= \left[2x^2 + x\right]_2^5 \\
&= (2 \times 5^2 + 5) - (2 \times 2^2 + 2) \\
&= (50 + 5) - (8 + 2) \\
&= 55 - 10 \\
&= 45
\end{aligned}
$$

Jadi, hasil $\int_2^5 (4x+1)\,dx$ adalah 45.

2. $\int_{-1}^2 (x^2 - 2x + 5)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{2}x^2 + 5x\right]_{-1}^2$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5x\right]_{-1}^2 \\
&= (\tfrac{1}{3} \times 2^3 - 2^2 + 5 \times 2) - (\tfrac{1}{3} \times (-1)^3 - (-1)^2 + 5 \times (-1)) \\
&= (\tfrac{8}{3} - 4 + 10) - (-\tfrac{1}{3} - 1 - 5) \\
&= (\tfrac{8}{3} + 6) - (-\tfrac{1}{3} - 6) \\
&= \tfrac{8}{3} + 6 + \tfrac{1}{3} + 6 = 15
\end{aligned}
$$

Jadi, hasil $\int_{-1}^2 (x^2 - 2x + 5)\,dx$ adalah 15.

2. Sifat-Sifat Integral Tentu

Untuk sebarang fungsi f(x) dan g(x) dalam batas [a, b] serta konstanta k, berlaku sifat-sifat integral tentu berikut.

a. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

b. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

c. $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

d. $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

e. $\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

f. $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$, untuk nilai $a < b < c$

4. Tentukan hasil pengintegralan fungsi aljabar berikut.

   a. $\int_{1}^{4} (6x-9)(2+3x-x^2)^3\,dx$

   b. $\int_{0}^{4} (4x+10)\sqrt{x^2+5x}\,dx$

   c. $\int_{-1}^{2} \frac{x-2}{\sqrt{(x^2-4x+4)}}\,dx$

5. Diketahui nilai $\int_{p}^{1} 9x^2(x^3-1)^2\,dx = 8$. Tentukan nilai p (bilangan bulat) yang memenuhi.

Pendalaman Materi

C. Penerapan Integral

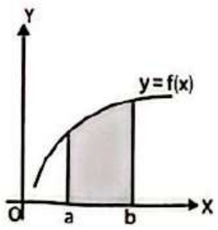
Integral dapat digunakan untuk menentukan luas suatu bidang datar. Selain itu, integral juga dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Misalnya dalam bidang ekonomi, integral digunakan untuk menentukan fungsi biaya produksi yang diketahui fungsi biaya marginal. Dalam bidang fisika, integral digunakan untuk menentukan fungsi jarak yang diketahui fungsi kecepatannya. Penerapan integral lainnya dapat kita temukan dalam berbagai bidang lainnya. Pada subbab ini, kamu akan mempelajari tentang penerapan integral untuk menentukan luas bangun datar dan menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan integral.

Gambar 4.4 Rapat menentukan fungsi produksi

1. Luas Bangun Datar

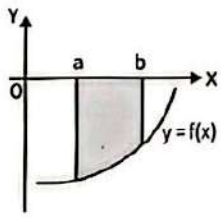
a. Menentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva y = f(x) dan sumbu X pada interval $a \le x \le b$.

1) Kurva di atas sumbu X



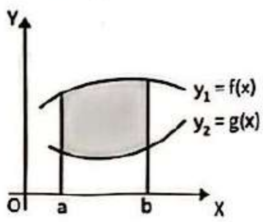
$$L = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

2) Kurva di bawah sumbu X



$$L = -\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{b}^{a} f(x)\,dx$$

b. Menentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva y = f(x) dan kurva y = g(x) pada interval $a \le x \le b$.



$$L = \int_{a}^{b} (y_1 - y_2)\,dx$$
$$= \int_{a}^{b} (f(x) - g(x))\,dx$$