

# Übungsaufgaben–Formale Sprachen

*Alphabet*  $\Sigma$  ist eine endliche Menge von Symbolen.

Jedes Element  $\sigma \in \Sigma$  ist ein *Zeichen* des Alphabets.

Jedes Element  $\omega \in \Sigma^*$  wird als *Wort* über  $\Sigma$  bezeichnet.

Jede Teilmenge  $L \subseteq \Sigma^*$  ist eine *formale Sprache* über  $\Sigma$ .

- Falls  $\Sigma$  ein Alphabet ist, so bezeichnet  $\Sigma^*$  die Menge aller Worte bestehend aus Buchstaben  $\in \Sigma$ .
- Menge  $\Sigma^*$  wird als Kleene'sche Hülle bezeichnet und fasst alle endlichen Symbolsequenzen zusammen, die mit Zeichen aus dem Alphabet  $\Sigma$  aufgebaut werden können.
- $\Sigma^+$  bezeichnet eine nicht-leere Menge.

## Aufgabe 1

Überlegen und beschreiben Sie Beispiele von „formalen“ Sprachen, die Sie im Studium, im Alltag oder im Unternehmen kennengelernt haben.

Nutzen Sie die Mengen- und Sprachbeschreibungen, wie Sie es zum Beispiel für Primzahlen kennengelernt haben, um sich einen Überblick zu verschaffen und definieren anschließend die Sprache  $L$ .

## Aufgabe 2

Gegeben sind die folgenden Alphabete:

$$\Sigma_1 := \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

$$\Sigma_2 := \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

$$\Sigma_3 := \{A, B, C, D, E, F\}$$

$$\Sigma_4 := \{8,9\}$$

Finden Sie umgangssprachliche Beschreibungen für die nachstehenden Sprachen:

a)  $\Sigma_2 \mid \Sigma_1 \Sigma_2^*$

b)  $(\Sigma_2 \cup \Sigma_3) \mid (\Sigma_1 \cup \Sigma_3) (\Sigma_2 \cup \Sigma_3)^*$

c)  $(\Sigma_2 \setminus \Sigma_4) \mid (\Sigma_1 \setminus \Sigma_4) (\Sigma_2 \setminus \Sigma_4)^*$

### Aufgabe 3

Gegeben sind die folgenden Mengen:

$$L_1 := \{aa, bb\}$$

$$L_2 := \{a\}^+$$

$$L_3 := \{b\}^+$$

Erzeugen Sie die folgenden Sprachen:

a)  $(L_1 \cup L_2)$

b)  $(L_1 \cup L_3)$

c)  $(L_1^* \cap L_2)$

### Aufgabe 4

Als Beispiel einer Grammatik haben Sie in diesem Kapitel die folgenden Produktionsregeln für eine Teilmenge der deutschen Sprache kennen gelernt:

|              |   |   |
|--------------|---|---|
| <Satz>       | → | <Subjekt> <Prädikat> <Objekt>           |
| <Subjekt>    | → | <Artikel><Adjektiv><Substantiv>         |
| <Artikel>    | → | Der   Die   Das                         |
| <Adjektiv>   | → | kleine   süße   flinke                  |
| <Substantiv> | → | Eisbär   Elch   Kröte   Maus   Nilpferd |
| <Prädikat>   | → | mag   fängt   isst                      |
| <Objekt>     | → | Kekse   Schokolade   Käsepizza          |

Nicht alle Sätze, die sich aus den Produktionen ableiten lassen, sind grammatikalisch korrekt. Wie das Beispiel zeigt, lassen sich Wortsequenzen ableiten, in denen die Satzteile nicht zusammenpassen: „Das kleine Maus mag Käsepizza“.

Schreiben Sie die Grammatik so um, dass nur solche Sätze ableitbar sind, in denen Artikel und Substantiv sprachlich korrekt kombiniert werden.

## Aufgabe 5

Mit  $L_1$ ,  $L_2$  und  $L_3$  seien drei beliebige Sprachen gegeben. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a)  $(L_1 \cup L_2) L_3 = L_1 L_3 \cup L_2 L_3$

b)  $(L_1 \cap L_2) L_3 = L_1 L_3 \cap L_2 L_3$

c)  $(L_1 \cup L_2)^* = L_1^* \cup L_2^*$

d)  $(L_1 \cap L_2)^* = L_1^* \cap L_2^*$

e)  $(L_1^*)^* = L_1^*$

f)  $(L_1^+)^+ = L_1^+$

g)  $(L_1 L_2)^* L_1 = L_1 (L_2 L_1)^*$  h)  $(L_1 L_2)^+ L_1 = L_1 (L_2 L_1)^+$

## Aufg. 1

$$\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$L$  = Menge aller Notfallnummern

$$\in L = 110, 112, 19222, 116117$$

$$\notin L = 0, 11, 23, 46, 808, \dots$$

---

$$\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$L$  = Menge an ungeraden Zahlen

$$\in L = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \dots$$

$$\notin L = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, \dots$$

## Aufg. 2

a)  $\Sigma_2 \mid \Sigma_1 \Sigma_2^*$

Alle Wörter aus den Alphabeten  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$ , die nicht mit 0 anfangen.

b)  $(\Sigma_2 \cup \Sigma_3) \mid (\Sigma_1 \cup \Sigma_3)(\Sigma_2 \cup \Sigma_3)^*$

Die Sprache besteht aus den Alphabeten  $\Sigma_2$  und  $\Sigma_3$  unter der Bedingung, dass der erste Buchstabe aus der Vereinigung von  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_3$  und der Rest des Wortes aus der Vereinigung von  $\Sigma_2$  und  $\Sigma_3$  beliebiger Länge besteht.

c)  $(\Sigma_2 \setminus \Sigma_4) \mid (\Sigma_1 \setminus \Sigma_4)(\Sigma_2 \setminus \Sigma_4)^*$

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \mid \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \cdot \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}^*$$

Die Sprache besteht aus allen Zahlen aus dem Oktalsystem, die nicht mit einer führenden Null beginnen.

### Aufg. 3

- a)  $(L_1 \cup L_2) = \{a, aa, aaa, a...a, a...abb, bba...a\}$
- b)  $(L_1 \cup L_3) = \{b, bb, bbb, b...b, b...baa, aab...b\}$
- c)  $(L_1^* \cap L_2) = \{aa, aaaa, aaaaaa, 8 \times a, 10 \times a, \dots\}$

### Aufg. 4

< Subjekt >  $\rightarrow$  Der < Adjektiv > Eisbär | Der < Adjektiv >  
Elch | Die < Adjektiv > Kröte |  
Die < Adjektiv > Maus | Das < Adjektiv >  
Nilpferd

### Aufg. 5

$$L_1 = \{1, 2\}, L_2 = \{2, 3\}, L_3 = \{3, 4\}$$

a) **korrekt**

b) **korrekt**

c)  $(L_1 \cup L_2)^* = L_1^* \cup L_2^*$

$$\{1, 2, 3, 11, 22, 33, \dots\} = \{1, 11\dots, 12\dots, 21\dots, 2\dots, 3\dots, 23\dots, 32\dots\}$$

**Aussage ist falsch**

d)  $(L_1 \cap L_2)^* = L_1^* \cap L_2^*$

$$\{2\dots\} = \{1\dots, 2\dots\} \cap \{2\dots, 3\dots\}$$

$$\{2\dots\} = \{2\dots\} \quad \text{korrekt}$$

$$e) (L_1^*)^* = L_1^*$$

$$\{\{\}, 1\dots, 2\dots, 12\dots, 21\dots\} = \{\{\}, 1\dots, 2\dots, 12\dots, 21\dots\}$$

korrekt

$$f) (L_1^+)^+ = L_1^+$$

$$\{1\dots, 2\dots, 12\dots, 21\dots\} = \{1\dots, 2\dots, 12\dots, 21\dots\}$$

korrekt

$$g) (L_1 L_2)^* L_1 = L_1 (L_2 L_1)^*$$

korrekt

$$h) (L_1 L_2)^+ L_1 = L_1 (L_2 L_1)^+$$

korrekt