Глава 5

Базис, размерност, координати.

Определение 5.1. *Непразно подмножество B на ненулево линейно пространство $V \neq \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$ е базис, ако:*
(i) B е линейно независима система вектори и
(ii) линейната обвивка $l(B) = V$ на B съвпада с цялото пространство V.

Пример 5.2. *Векторите*

$$e_i = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-i}) \in F^n, \quad 1 \leq i \leq n$$

с единствена ненулева компонента 1 в i-та позиция образуват базис на пространството F^n на наредените n-торки с елементи от поле F.

За да докажем това да забележим, че за произволни $x_1, \ldots, x_n \in F$ е в сила

$$x_1e_1 + \ldots + x_ie_i + \ldots + x_ne_n = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n).$$

Затова от $x_1e_1 + \ldots + x_ne_n = (x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$ следва $x_1 = \ldots = x_n = 0$ и векторите $e_1, \ldots, e_n$ са линейно независими. Произволна наредена n-торка $x = (x_1, \ldots, x_n) \in F^n$ е линейна комбинация $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ на $e_1, \ldots, e_n \in F^n$ с коефициенти $x_1, \ldots, x_n \in F$, така че $l(e_1, \ldots, e_n) = F^n$ и по определение, $e_1, \ldots, e_n$ е базис на F^n.

Пример 5.3. *Мономите $1, x, \ldots, x^{n-1}$ образуват базис на линейното пространство*

$$F[x]^{(\leq n-1)} = \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} a_ix^i \,\middle|\, a_i \in F \right\}$$

на полиномите на x от степен $\leq n-1$ с коефициенти от поле F.

Наистина, всеки полином от $F[x]^{(\leq n-1)}$ е линейна комбинация на $1, x, \ldots, x^{n-1}$ с коефициенти от F. По определение, полиномът $\sum\limits_{i=0}^{n-1} a_ix^i \equiv 0$ е тъждествено нулев точно когато всичките му коефициенти $a_i = 0$ се анулират. Това доказва, че $1, x, \ldots, x^{n-1}$ са линейно независими, а оттам и базис на $F[x]^{(\leq n-1)}$.

Пример 5.4. *Множеството $\{x^m \,|\, m \in \mathbb{Z}^{\geq 0}\}$ на всички мономи е базис на пространството $F[x]$ на всички полиноми на x с коефициенти от F. Пространството $F[x]$ няма краен базис.*

Ясно е, че всеки полином $f(x) \in F[x]$ е линейна комбинация на краен брой мономи на x с коефициенти от F. Ако допуснем, че $\{x^m \mid m \in \mathbb{Z}^{\geq 0}\}$ е линейно зависима система вектори от линейното пространство $F[x]$ над F, то съществува крайна линейно зависима подсистема $\{x^{i_1}, \ldots, x^{i_k}\}, 0 \leq i_1 < \ldots < i_k$ от мономи. Съгласно $\{x^{i_1}, \ldots, x^{i_k}\} \subseteq \{1, x, \ldots, x^{i_k}\} \subset F[x]^{(\leq i_k)}$ и линейната независимост на базиса $1, x, \ldots, x^{i_k}$ на $F[x]^{(\leq i_k)}$, мономите $x^{i_1}, \ldots, x^{i_k}$ са линейно независими. Това противоречи на предположението и доказва, че $\{x^m \mid m \in \mathbb{Z}^{\geq 0}\}$ е линейно независима система, а оттам и базис на $F[x]$.
Допускаме, че линейното пространство $F[x]$ има краен базис $f_1(x), \ldots, f_s(x) \in F[x]$. Линейната независимост изисква полиномите $f_i(x) \not\equiv 0$ да не се анулират тъждествено за всички $1 \leq i \leq s$. Следователно $\deg f_i(x) = d_i \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ за всички $1 \leq i \leq s$ и можем да разгледаме максималната степен $d := \max(d_1, \ldots, d_s)$ на полином от този базис. Линейната обвивка $l(f_1(x), \ldots, f_s(x))$ се състои от полиноми $\lambda_1 f_1(x) + \ldots + \lambda_s f_s(x)$, $\lambda_i \in F$ от степен $\leq d$. Но по определението за базис, линейната обвивка $l(f_1(x), \ldots, f_s(x)) = F[x]$ съвпада с пространството $F[x]$ и мономът $x^{d+1} \in F[x] = l(f_1(x), \ldots, f_s(x)) \subseteq F[x]^{(\leq d)}$ се оказва полином от степен $\leq d$. Това е противоречие, което доказва, че линейното пространство $F[x]$ над F няма краен базис.
Да забележим, че нулевото пространство $\{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$ няма базис, защото не съдържа линейно независима система вектори.

Определение 5.5. *Линейно пространство V над поле F е крайномерно, ако $V = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$ е нулевото пространство или V има краен базис $b_1, \ldots, b_n$.*

Пространството F^n на наредените n-торки с елементи от поле F е крайномерно, защото има краен базис

$$e_i = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-i}) \in F^n, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Пространството $F[x]^{(\leq n-1)}$ на полиномите на x от степен $\leq n-1$ с коефициенти от F е крайномерно, защото има краен базис $1, x, \ldots, x^{n-1}$.
Пространството $F[x]$ на полиномите на x с коефициенти от F не е крайномерно, защото няма краен базис.

Твърдение 5.6. *Линейно пространство V над поле F е крайномерно тогава и само тогава, когато $V = l(a_1, \ldots, a_n)$ е линейна обвивка на краен брой вектори. В такъв случай, ако $V \neq \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$, то можем да изберем базис на V, съставен от подмножество на $\{a_1, \ldots, a_n\}$.*

Доказателство. Ако $V = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$ е нулевото пространство, то $V = l(\overrightarrow{\mathcal{O}})$ е линейна обвивка на един вектор. Ако V има краен базис $b_1, \ldots, b_k$, то отново $V = l(b_1, \ldots, b_k)$ е линейна обвивка на краен брой вектори.
Нека $V = l(a_1, \ldots, a_n)$ е линейна обвивка на краен брой вектори. Ако $a_i = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ за всички $1 \leq i \leq n$, то $V = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$ е нулевото пространство.
Ако съществува $a_i \neq \overrightarrow{\mathcal{O}}$, то след преномерация можем да считаме, че $a_1 \neq \overrightarrow{\mathcal{O}}$. Тогава a_1 е линейно независим и $l(a_1) \subseteq V$. При $l(a_1) = V$ получаваме, че a_1 е базис на V и V е крайномерно пространство. В случая $l(a_1) \subsetneq V = l(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ съществува вектор $a_i \notin l(a_1)$ за някое естествено $2 \leq i \leq n$. В противен случай от $a_2, \ldots, a_n \in l(a_1)$ следва $l(a_1, a_2, \ldots, a_n) \subseteq l(a_1)$, защото

$l(a_1)$ е подпространство на V. Вземайки предвид $l(a_1) \subseteq l(a_1, \ldots, a_n)$, получаваме $l(a_1) = l(a_1, \ldots, a_n) = V$, противно на предположението. След преномериране на $a_2, \ldots, a_n$ можем да считаме, че $a_2 \notin l(a_1)$. По Лемата за линейна независимост (Лема 3.4) системата a_1, a_2 е линейно независима.
Ясно е, че $l(a_1, a_2) \subseteq l(a_1, \ldots, a_n) = V$. Ако $l(a_1, a_2) = V$, то a_1, a_2 е базис на V. При $l(a_1, a_2) \subsetneq l(a_1, \ldots, a_n) = V$ съществува $3 \leq i \leq n$ с $a_i \notin l(a_1, a_2)$. След преномериране на $a_3, \ldots, a_n$ имаме $a_3 \notin l(a_1, a_2)$, така че a_1, a_2, a_3 са линейно независими по Лема 3.4 за линейна независимост.
Продължавайки по същия начин, да предположим, че $a_1, \ldots, a_m$ за някое $m < n$ са линейно независими вектори. Ако $l(a_1, \ldots, a_m) = V$, то $a_1, \ldots, a_m$ е базис на V. В противен случай, $l(a_1, \ldots, a_m) \subsetneq V = l(a_1, \ldots a_n)$ и съществува $a_i \notin l(a_1, \ldots, a_m)$ за някое $m+1 \leq i \leq n$. След преномерация на $a_{m+1}, \ldots, a_n$ можем да считаме, че $a_{m+1} \notin l(a_1, \ldots, a_m)$. По Лема 3.4 за линейна независимост $a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}$ са линейно независими вектори.
Векторите $a_1, \ldots, a_n$ са краен брой, така че след краен брой стъпки ще намерим линейно независими вектори $a_1, \ldots, a_k$, $k \leq n$ с $l(a_1, \ldots, a_k) = V$. Тогава $a_1, \ldots, a_k$ е базис на V.

□

Твърдение 5.7. *Всеки два базиса на ненулево крайномерно пространство V над поле F имат един и същи брой вектори.*

Доказателство. Нека $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_m$ са базиси на линейно пространство V над поле F. Линейната независимост на

$$b_1, \ldots, b_m \in V = l(a_1, \ldots, a_n)$$

изисква $m \leq n$ съгласно Лема 3.3 за линейна зависимост, която се нарича и Основна лема на линейната алгебра. Аналогично, от линейната независимост на

$$a_1, \ldots, a_n \in V = l(b_1, \ldots, b_m)$$

получаваме $n \leq m$ чрез прилагане на Основната лема на линейната алгебра - Лема 3.3. Следователно $m = n$ и всеки два базиса на ненулево крайномерно пространство V имат един и същи брой вектори.

□

Определение 5.8. *Броят на векторите в един, а оттам и всеки един базис на ненулево крайномерно пространство V се нарича размерност на V и се бележи с $\dim V$.*
Размерността на нулевото пространство $\{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$ е $\dim\{\overrightarrow{\mathcal{O}}\} = 0$.
Ненулевите линейни пространства V, които не са крайномерни имат размерност $\dim V = \infty$.

Пример 5.9. *Пространството F^n на наредените n-торки с елементи от F е с размерност $\dim F^n = n$, защото има базис $e_1, \ldots, e_n$, съставен от n вектора.*
Пространството $F[x]^{(\leq n-1)}$ на полиномите на x от степен $\leq n-1$ с коефициенти от F е с размерност n, защото има базис $1, x, \ldots, x^{n-1}$, съставен от n елемента.
Пространството $F[x]$ на всички полиноми на x с коефициенти от F е безкрайномерно, $\dim F[x] = \infty$, защото е ненулево пространство без краен базис.

Твърдение 5.10. *Следните свойства са еквивалентни за вектори $e_1, \ldots, e_n$ от линейно пространство V над поле F:*
(i) $e_1, \ldots, e_n \in V$ е базис на V;
(ii) всеки вектор $v \in V$ има единствено представяне

$$v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$$

като линейна комбинация на $e_1, \ldots, e_n$ с коефициенти $x_1, \ldots, x_n \in F$.
Наредената n-торка $(x_1, \ldots, x_n)$ на коефициентите от представянето $v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ се състои от координатите на v спрямо базиса $e_1, \ldots, e_n$.

Доказателство. $(i) \Rightarrow (ii)$ Ако $e_1, \ldots, e_n$ е базис на V, то $V = l(e_1, \ldots, e_n)$ и произволен вектор $v \in V$ има представяне $v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ като линейна комбинация на $e_1, \ldots, e_n$ с коефициенти $x_1, \ldots, x_n \in F$. Ако

$$x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n = v = y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n \quad \text{с} \quad x_i, y_i \in F$$

са две представяния на v като линейни комбинации на $e_1, \ldots, e_n$, то

$$(x_1 - y_1) e_1 + \ldots + (x_n - y_n) e_n = \overrightarrow{\mathcal{O}}.$$

Съгласно линейната независимост на $e_1, \ldots, e_n$, оттук следва $x_i - y_i = 0$ за всички $1 \leq i \leq n$ и представянето $v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ е единствено.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Ако всеки вектор $v \in V$ има представяне $v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ като линейна комбинация на $e_1, \ldots, e_n$, то $l(e_1, \ldots, e_n) = V$. Съгласно единствеността на представянето на нулевия вектор като линейна комбинация на $e_1 \ldots, e_n \in V$, от

$$x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n = \overrightarrow{\mathcal{O}} = 0 e_1 + \ldots + 0 e_n$$

следва анулирането на всички коефициенти $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Това доказва, че $e_1, \ldots, e_n$ са линейно независими, а оттам и базис на V.

□

Твърдение 5.11. *Нека V е ненулево линейно пространство над поле F. В такъв случай:*
(i) $\dim V = n$ тогава и само тогава, когато съществуват n линейно независими вектора $a_1, \ldots, a_n \in V$ и произволни $n+1$ вектора $b_1, \ldots, b_{n+1} \in V$ са линейно зависими;
(ii) $\dim V = \infty$ тогава и само тогава, когато за всяко естествено число n съществуват n линейно независими вектора $a_1, \ldots, a_n \in V$.

Доказателство. (i) Нека $\dim V = n$ и $a_1, \ldots, a_n$ е базис на V. Тогава $a_1, \ldots, a_n \in V$ са линейно независими и произволни $n+1$ вектора

$$b_1, \ldots, b_{n+1} \in V = l(a_1, \ldots, a_n)$$

са линейно зависими съгласно Основната лема на линейната алгебра - Лема 3.3 за линейна зависимост.
Обратно, нека $a_1, \dots, a_n \in V$ са линейно независими и произволни $n+1$ вектора $b_1, \dots, b_{n+1} \in V$ са линейно зависими. Достатъчно е да докажем, че $l(a_1, \dots, a_n) = V$, за да твърдим, че $a_1, \dots, a_n$ е базис на V и $\dim V = n$. Линейната обвивка $l(a_1, \dots, a_n)$ на произволни вектори $a_1, \dots, a_n$ от линейно пространство V се съдържа във V. Затова допускането $l(a_1, \dots, a_n) \neq V$ е еквивалентно на $l(a_1, \dots, a_n) \subsetneq V$. Тогава съществува вектор $a_{n+1} \in V \setminus l(a_1, \dots, a_n)$ и $a_1, \dots, a_n, a_{n+1} \in V$ са линейно независими, съгласно Лема 3.4 за линейна независимост. Това противоречи на предположението за линейна зависимост на произволни $n+1$ вектора от V и доказва $l(a_1, \dots, a_n) = V$.
(ii) От $V \neq \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$ следва съществуването на ненулев вектор $a \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$, който е линейно независим съгласно Твърдение 3.2 (i).
С допускане на противното, нека $\dim V = \infty$ и съществува естествено число n, така че произволни n вектора $b_1, \dots, b_n \in V$ са линейно зависими. Тогава $n \geq 2$ и ако n е минималното естествено с това свойство, то съществуват $n-1$ линейно независими вектора $a_1, \dots, a_{n-1} \in V$. Съгласно (i), оттук следва $\dim V = n-1$. Противоречието доказва, че ако $\dim V = \infty$, то за произволно естествено число n съществуват n линейно независими вектора от V.
Да предположим, че за всяко естествено число m съществуват m линейно независими вектора от V и $\dim V \neq \infty$. Съгласно предположението $V \neq \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$ имаме $\dim V = n$ за някое естествено число n. Тогава (i) изисква произволни $n+1$ вектора от V да са линейно зависими. Противоречието доказва, че $\dim V = \infty$, ако за произволно естествено число $m \in \mathbb{N}$ съществуват m линейно независими вектора от V.

□

Твърдение 5.12. *Следните условия са еквивалентни за n вектора $a_1, \dots, a_n$ от n-мерно линейно пространство V над поле F:*
(i) $a_1, \dots, a_n$ са линейно независими;
(ii) $l(a_1, \dots, a_n) = V$;
(iii) $a_1, \dots, a_n$ е базис на V.

Доказателство. По определението за базис, от (iii) следват (i) и (ii).
(i) $\Rightarrow$ (ii) и (iii) Твърдим, че ако $a_1, \dots, a_n$ са n линейно независими вектора от n-мерно линейно пространство V, то $l(a_1, \dots, a_n) = V$ и $a_1, \dots, a_n$ е базис на V. В противен случай, $l(a_1, \dots, a_n) \neq V$ е еквивалентно на $l(a_1, \dots, a_n) \subsetneq V$ и води до съществуването на вектор $a_{n+1} \in V \setminus l(a_1, \dots, a_n)$. По Лема 3.4 за линейна независимост, векторите $a_1, \dots, a_n, a_{n+1} \in V$ са линейно независими. Това противоречи на Твърдение 5.11 (i), съгласно което произволни $n+1$ вектора в n-мерно пространство V са линейно зависими. Противоречието доказва, че ако $a_1, \dots, a_n$ са линейно независими, то $l(a_1, \dots, a_n) = V$.
(ii) $\Rightarrow$ (i) и (iii) Твърдим, че ако $l(a_1, \dots, a_n) = V$ за n-мерно линейно пространство V, то $a_1, \dots, a_n$ са линейно независими, а оттам и базис на V. В противен случай, от линейната зависимост на $a_1, \dots, a_n$ следва съществуването на индекс $1 \leq i \leq n$ с $a_i \in l(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$. Тогава

$$l(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \subseteq l(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

и комбинирайки с включването

$$l(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n) \subseteq l(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n),$$

получаваме

$$V = l(a_1, \dots, a_n) = l(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Съгласно доказателството на Твърдение 5.6, съществува базис на V, който се съдържа в множеството $\{a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n\}$ и размерността на V е $\dim V \leq n-1$. Това противоречи на предположението $\dim V = n$ и доказва, че ако $l(a_1, \dots, a_n) = V$, то $a_1, \dots, a_n$ са линейно независими, а оттам и базис на V.

□

Следствие 5.13. *Нека V е n-мерно линейно пространство над поле F, а W е подпространство на V. Тогава $\dim W \leq \dim V = n$ с равенство $\dim W = \dim V = n$ тогава и само тогава, когато $W = V$ съвпадат.*

Доказателство. Да допуснем, че подпространството W на линейното пространство V има $\dim(W) > \dim(V) = n$. Тогава $\dim(W) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ изпълнява неравенството $\dim(W) \geq n+1$. Ако $\dim(W) = m \in \mathbb{N}$, то съгласно Твърдение 5.11 (i) съществуват m линейно независими вектора $w_1, \dots, w_m \in W$, $m \geq n+1$. В случая $\dim(W) = \infty$, по Твърдение 5.11 (ii) съществуват m линейно независими вектора $w_1, \dots, w_m \in W$ за всяко $m \in \mathbb{N}$. Независимо от това дали W е крайномерно или безкрайномерно, имаме $n+1$ линейно независими вектора $w_1, \dots, w_n, w_{n+1} \in W \subseteq V$. Възоснова на Твърдение 5.11 (i), това противоречи на $\dim(V) = n$ и доказва $\dim(W) \leq \dim(V)$.
Ако $\dim(W) = \dim(V) = n$, то произволни n линейно независими вектора

$$e_1, \dots, e_n \in W \subseteq V$$

образуват базис на W и базис на V, възоснова на Твърдение 5.12. Следователно

$$W = l(e_1, \dots, e_n) = V.$$

□

Твърдение 5.14. *Нека $b_1, \dots, b_k$ са линейно независими вектори от n-мерно линейно пространство V над поле F. Тогава $k \leq n$ и векторите $b_1, \dots, b_k$ могат да се допълнят до базис $b_1, \dots, b_k, b_{k+1}, \dots, b_n$ на V.*

Доказателство. Нека $e_1, \dots, e_n$ е базис на V. Линейната независимост на

$$b_1, \dots, b_k \in V = l(e_1, \dots, e_n)$$

изисква $k \leq n$ съгласно Основната лема на линейната алгебра - Лема 3.3 за линейна зависимост. Същото следва от Твърдение 5.11 (1) , съгласно което произволни $n+1$ вектора в n-мерно пространство V са линейно зависими, така че ако $b_1, \dots, b_k$ са линейно независими, то $k \leq n$.
Ако $k = n$, то линейно независимите вектори $b_1, \dots, b_n$ в n-мерно линейно пространство V образуват базис на V по Твърдение 5.12.
За $k < n$ е в сила строго включване $l(b_1, \dots, b_k) \subsetneq V$, защото от $l(b_1, \dots, b_k) = V$ за линейно независими вектори $b_1, \dots, b_k$ следва, че $b_1, \dots, b_k$ е базис на V и $\dim(V) = k < n$. Избираме вектор $b_{k+1} \in V \setminus l(b_1, \dots, b_k)$. Тогава $b_1, \dots, b_k, b_{k+1}$ са линейно независими по Лема 3.4 за линейна независимост. Ако $k+1 = n$, то $l(b_1, \dots, b_k, b_{k+1}) = V$. В случая $k+1 < n$ имаме $l(b_1, \dots, b_k, b_{k+1}) \subsetneq V$ и съществува $b_{k+2} \in V \setminus l(b_1, \dots, b_k, b_{k+1})$. Тогава векторите $b_1, \dots, b_k, b_{k+1}, b_{k+2}$ са линейно независими по Лема 3.4 за линейна независимост. Продължавайки по същия начин, след краен брой стъпки получаваме n линейно независими вектора

$b_1, \dots, b_k, b_{k+1}, \dots, b_n$ от n-мерното пространство V така, че $b_1, \dots, b_k, b_{k+1}, \dots, b_n$ е базис на V съгласно Твърдение 5.12.

□

Задача 5.15. *В пространството*

$$\mathbb{R}[x]^{(\leq 4)} = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(f) \leq 4\}$$

на полиномите на x с реални коефициенти и степен ≤ 4 е дадено подмножеството

$$U = \{f(x) \in \mathbb{R}[x]^{(\leq 4)} \mid f(1) = f'(1)\},$$

където $f'(1)$ е стойността на производната $f'(x)$ на $f(x)$ в точката $x = 1$.
(i) Да се докаже, че U е подпространство на $\mathbb{R}[x]^{(\leq 4)}$.
(ii) Да се намери базис B на U.
(iii) Да се допълни B до базис на $\mathbb{R}[x]^{(\leq 4)}$.

Решение: (i) Съгласно Твърдение 2.7, достатъчно е да проверим, че за произволни $f(x), g(x) \in U$ и $r \in \mathbb{R}$ е в сила $f(x) + g(x) \in U$, $rf(x) \in U$, за да твърдим, че U е подпространство на $\mathbb{R}[x]^{(\leq 4)}$. Наистина, от $(f+g)' = f' + g'$, $f(1) = f'(1)$ и $g(1) = g'(1)$ следва

$$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = f'(1) + g'(1) = (f+g)'(1),$$

така че $f(x) + g(x) \in U$. Аналогично, $(rf)' = rf'$ и $f(1) = f'(1)$ са достатъчни за

$$(rf)(1) = rf(1) = rf'(1) = (rf)'(1),$$

откъдето $rf(x) \in U$. Това доказва, че U е подпространство на $\mathbb{R}[x]^{(\leq 4)}$.
(ii) Произволен полином $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \in \mathbb{R}[x]^{(\leq 4)}$ има производна $f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3$. Следователно

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = f(1) = f'(1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4$$

тогава и само тогава, когато

$$a_0 = a_2 + 2a_3 + 3a_4 \tag{5.1}$$

за произволни $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$. За да получим полиноми от U полагаме първо $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = a_4 = 0$ в (5.1) и получаваме $a_0 = 0$. Следователно полиномът $f_1(x) := x \in U$ принадлежи на U. Аналогично, ако $a_2 = 1$, $a_1 = a_3 = a_4 = 0$, то $a_0 = 1$ и $f_2(x) := x^2 + 1 \in U$. За $a_3 = 1$, $a_1 = a_2 = a_4 = 0$ имаме $a_0 = 2$ и $f_3(x) := x^3 + 2 \in U$. Накрая, при $a_4 = 1$, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ получаваме $a_0 = 3$ от (5.1), така че $f_4(x) := x^4 + 3 \in U$.
За произволни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ полиномът

$$\begin{aligned} 0 \equiv \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) + \lambda_4 f_4(x) = \\ = \lambda_1(x) + \lambda_2(x^2+1) + \lambda_3(x^3+2) + \lambda_4(x^4+3) = \\ = \lambda_4 x^4 + \lambda_3 x^3 + \lambda_2 x^2 + \lambda_1 x + (\lambda_2 + 2\lambda_3 + 3\lambda_4) \end{aligned}$$

е тъждествено нулев точно когато $0 = \lambda_4 = \lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1$. Това доказва линейната независимост на $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x) \in U$.

Произволен полином $f(x) \in U$ може да се представи като линейна комбинация

$$f(x) = \sum_{i=0}^{4} a_i x^i = (a_2 + 2a_3 + 3a_4) + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 =$$
$$= a_1 x + a_2(x^2+1) + a_3(x^3+2) + a_4(x^4+3) =$$
$$= a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + a_3 f_3(x) + a_4 f_4(x)$$

на $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ с реални коефициенти $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$. Следователно линейната обвивка $l(f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)) = U$ на построените полиноми съвпада с U и $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ е базис на U.
(iii) В 5-мерното пространство $\mathbb{R}[x]^{(\leq 4)}$ произволни пет линейно независими полинома образуват базис, съгласно Твърдение 5.12. По Лемата за линейна независимост - Лема 3.4, произволен полином

$$f_5(x) \in \mathbb{R}[x]^{(\leq 4)} \setminus l(f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)) = \mathbb{R}[x]^{(\leq 4)} \setminus U$$

задава линейно независима система вектори $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x) \in \mathbb{R}[x]^{(\leq 4)}$. Константният полином $f_5(x) := 1$ има тъждествено нулева производна $f_5'(x) \equiv 0$ и $f_5(1) = 1 \neq 0 = f_5'(1)$. Следователно $f_5(x) = 1 \in \mathbb{R}[x]^{(\leq 4)} \setminus U$ и $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x)$ са линейно независими вектори от $\mathbb{R}[x]^{(\leq 4)}$. Съгласно $\dim(\mathbb{R}[x]^{(\leq 4)} = 5$, полиномите $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x)$ образуват базис на $\mathbb{R}[x]^{(\leq 4)}$.