Глава 3

Линейна зависимост и независимост. Основна лема на линейната алгебра.

Нулевият вектор $\overrightarrow{\mathcal{O}}$ на линейно пространство V над поле F се представя като линейна комбинация

$$0a_1 + \ldots + 0a_n = \overrightarrow{\mathcal{O}}$$

на произволни вектори $a_1, \ldots, a_n \in V$ с нулеви коефициенти $0 \in F$.

Определение 3.1. *Крайна система вектори $a_1, \ldots, a_n$ от линейно пространство V над поле F е линейно независима, ако единствената линейна комбинация*

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n = \overrightarrow{\mathcal{O}}$$

на $a_1, \ldots, a_n$ с коефициенти $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F$, представяща нулевия вектор $\overrightarrow{\mathcal{O}} \in V$ е тази с нулеви коефициенти $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0 \in F$.
Безкрайна система вектори от линейно пространство V над поле F е линейно независима, ако всяка нейна крайна подсистема е линейно независима.

Оттук следва, че крайна система вектори $b_1, \ldots, b_m$ от линейно пространство V над поле F е линейно зависима, ако съществуват $\mu_1, \ldots, \mu_m \in F$ с поне едно $\mu_i \neq 0$, така че

$$\mu_1 b_1 + \ldots + \mu_i b_i + \ldots + \mu_m b_m = \overrightarrow{\mathcal{O}}.$$

Безкрайна система вектори от линейно пространство V над поле F е линейно зависима, ако съдържа крайна линейно зависима подсистема.

Твърдение 3.2. *Линейната зависимост и независимост на вектори от линейно пространство V над поле F има следните свойства:*
(i) един вектор $u \in V$ е линейно зависим точно когато е нулевият $u = \overrightarrow{\mathcal{O}}$;
(ii) векторите $b_1, \ldots, b_k \in V$, $k \geq 2$ са линейно зависими тогава и само тогава, когато някой от тях е линейна комбинация на останалите, т.е.

$$b_i = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_{i-1} b_{i-1} + \mu_{i+1} b_{i+1} + \ldots + \mu_k b_k$$

за някое $1 \leq i \leq k$;
(iii) ако $b_1, \ldots b_m \in V$ са линейно зависими, то $b_1, \ldots, b_m, b_{m+1}, \ldots, b_n$ са линейно зависими за произволни $b_{m+1}, \ldots, b_n \in V$;
(iv) ако $a_1, \ldots, a_n \in V$ са линейно независими вектори, то за произволно естествено число $1 \leq k \leq n-1$ векторите $a_1, \ldots, a_k$ са линейно независими.

Доказателство. (i) Нулевият вектор $\overrightarrow{\mathcal{O}} \in V$ е линейно зависим, защото за произволно $\lambda \in F$, $\lambda \neq 0$ е в сила $\lambda\overrightarrow{\mathcal{O}} = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ съгласно Твърдение 2.4 (iv).
Ако $u \in V$ е линейно зависим, то по определение съществува $\lambda \in F \setminus \{0\}$ с $\lambda u = \overrightarrow{\mathcal{O}}$. От Твърдение 2.4 (vii) получаваме, че $u = \overrightarrow{\mathcal{O}}$.
(ii) Ако $b_1, \ldots, b_k$ са линейно зависими и $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_i b_i + \ldots + \lambda_k b_k = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ за $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in F$ с поне едно $\lambda_i \neq 0$, то

$$\lambda_i b_i = -\lambda_1 b_1 - \ldots - \lambda_{i-1} b_{i-1} - \lambda_{i+1} b_{i+1} - \ldots - \lambda_k b_k,$$

откъдето

$$b_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} b_1 - \ldots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} b_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} b_{i+1} - \ldots - \frac{\lambda_k}{\lambda_i} b_k$$

и b_i е линейна комбинация на $b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_k$.
Обратно, ако $b_i = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_{i-1} b_{i-1} + \mu_{i+1} b_{i+1} + \ldots + \mu_k b_k$ е линейна комбинация на $b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_k$ с коефициенти $\mu_j \in F$, то

$$\mu_1 b_1 + \ldots + \mu_{i-1} b_{i-1} + (-1) b_i + \mu_{i+1} b_{i+1} + \ldots + \mu_k b_k = \overrightarrow{\mathcal{O}}$$

с $-1 \neq 0$, така че $b_1, \ldots, b_k$ са линейно зависими.
(iii) Ако $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_i b_i + \ldots + \lambda_m b_m = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ с поне едно $\lambda_i \neq 0$, то

$$\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_i b_i + \ldots + \lambda_m b_m + 0.b_{m+1} + \ldots + 0.b_n = \overrightarrow{\mathcal{O}} \quad \text{с} \quad \lambda_i \neq 0$$

доказва линейната зависимост на $b_1, \ldots, b_m, b_{m+1}, \ldots, b_n$.
(iv) Ако допуснем, че $a_1, \ldots, a_k$ са линейно зависими, то $a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n$ са линейно зависими, съгласно (iii). Това противоречи на допускането и доказва линейната независимост на $a_1, \ldots, a_k$.

□

Например, два ненулеви вектора u и v от $\mathbb{R}^3$ са линейно зависими тогава и само тогава, когато правите

$$L((0,0,0), u) = l(u) = l(v) = L((0,0,0), v) \tag{3.1}$$

през началото $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ и тези вектори съвпадат. За да докажем това, да допуснем, че $u, v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ са линейно зависими. Тогава съгласно Твърдение 3.2 (ii) съществува $\lambda \in \mathbb{R}$ с $v = \lambda u \in l(u)$, след евентуална замяна на u с v. Това е достатъчно за $l(v) \subseteq l(u)$, защото $l(u)$ е подпространство на $\mathbb{R}^3$. Векторът $v \neq (0,0,0)$ е ненулев, откъдето $\lambda \neq 0$ и $u = \frac{1}{\lambda} v \in l(v)$. Следователно $l(u) \subseteq l(v)$ и $l(u) = l(v)$, защото $l(v)$ е подпространство на $\mathbb{R}^3$. Обратно, ако $l(u) = l(v)$, то съществува $\lambda \in \mathbb{R}$, така че $v = \lambda u \in l(v) = l(u)$. По Твърдение 3.2 (ii), това е достатъчно за линейната зависимост на u и v.
Нека $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ са ненулеви, непропорциални помежду си вектори. Съгласно Твърдение 3.2 (ii), векторите u, v, w са линейно зависими тогава и само тогава, когато $w = \lambda u + \mu v$ за подходящи $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, след евентуална пермутация на u, v, w. Това е изпълнено точно когато w принадлежи на равнината $l(u, v) = P((0,0,0), u, v) \subset \mathbb{R}^3$ през началото $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$, u и v.

Лема 3.3. (Основна лема на линейната алгебра или Лема за линейна зависимост:) *Ако $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ са вектори от линейно пространство V над поле F,*

$$b_1, \ldots, b_m \in l(a_1, \ldots, a_n) \quad \text{и} \quad m > n,$$

то $b_1, \ldots, b_m$ са линейно зависими.

Доказателство. Ако съществува нулев вектор $b_i = \overrightarrow{\mathcal{O}}$, то b_i е линейно зависим, откъдето и системата $b_1, \dots, b_{i-1}, b_i = \overrightarrow{\mathcal{O}}, b_{i+1}, \dots, b_m$ е линейно зависима. Отсега нататък предполагаме, че векторите $b_1, \dots, b_m \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$ са ненулеви и доказваме лемата с индукция по n.

За $n = 1$ и $m > 1$ от $b_1, b_2 \in l(a_1)$ следва съществуването на $\lambda_1, \lambda_2 \in F$ с $b_1 = \lambda_1 a_1$, $b_2 = \lambda_2 a_1$. Предположението $b_1 \neq \overrightarrow{\mathcal{O}}$ изисква $\lambda_1 \neq 0$ и предоставя представяния

$$a_1 = \frac{1}{\lambda_1} b_1 \quad \text{и} \quad b_2 = \lambda_2 a_1 = \lambda_2 \left(\frac{1}{\lambda_1} b_1 \right) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} b_1 \in l(b_1).$$

Следователно b_1, b_2 са линейно зависими, откъдето $b_1, b_2, \dots, b_m$ са линейно зависими.

В общия случай са дадени ненулевите вектори

$$b_1 = x_{1,1}a_1 + \ldots + x_{1,n-1}a_{n-1} + x_{1,n}a_n = \sum_{j=1}^{n} x_{1,j}a_j,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$b_i = x_{i,1}a_1 + \ldots + x_{i,n-1}a_{n-1} + x_{i,n}a_n = \sum_{j=1}^{n} x_{i,j}a_j$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$b_{m-1} = x_{m-1,1}a_1 + \ldots + x_{m-1,n-1}a_{n-1} + x_{m-1,n}a_n = \sum_{j=1}^{n} x_{m-1,j}a_j$$

$$b_m = x_{m,1}a_1 + \ldots + x_{m,n-1}a_{n-1} + x_{m,n}a_n = \sum_{j=1}^{n} x_{m,j}a_j,$$

които са линейни комбинации на $a_1, \dots, a_n \in V$ с коефициенти $x_{i,j} \in F$. От $b_m \neq \overrightarrow{\mathcal{O}}$ следва съществуването на $1 \leq j \leq n$ с $x_{m,j} \neq 0$. След преномериране на $a_1, \dots, a_n$ можем да считаме, че $x_{m,n} \neq 0$. Прибавяйки подходящи кратни на b_m към $b_1, \dots, b_{m-1}$, елиминираме a_n от представянията на $b_1, \dots, b_{m-1}$. По-точно, заменяме b_i с

$$b_i' := b_i - \frac{x_{i,n}}{x_{m,n}} b_m = \left(\sum_{j=1}^{n} x_{i,j}a_j \right) - \frac{x_{i,n}}{x_{m,n}} \left(\sum_{j=1}^{n} x_{m,j}a_j \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(x_{i,j} - \frac{x_{i,n}}{x_{m,n}} x_{m,j} \right) a_j = \sum_{j=1}^{n-1} \left(x_{i,j} - \frac{x_{i,n}}{x_{m,n}} x_{m,j} \right) a_j \in l(a_1, \dots, a_{n-1})$$

за $1 \leq i \leq m-1$, вземайки предвид

$$\left(x_{i,j} - \frac{x_{i,n}}{x_{m,n}} x_{m,j} \right) \Big|_{j=n} = x_{i,n} - \frac{x_{i,n}}{x_{m,n}} x_{m,n} = 0.$$

Геометрично, векторите $b_1', \dots, b_{m-1}' \in l(a_1, \dots, a_{n-1})$ са проекциите на векторите $b_1, \dots, b_{m-1}$ върху $l(a_1, \dots, a_{n-1})$, успоредно на b_m. По индукционно предположение, векторите

$$b_1', \dots, b_{m-1}' \in l(a_1, \dots, a_{n-1}) \quad \text{с} \quad m-1 > n-1$$

са линейно зависими и съществуват $\mu_1, \dots, \mu_{m-1} \in F$ с поне едно $\mu_k \neq 0$, така че

$$\mu_1 b_1' + \ldots + \mu_k b_k' + \ldots + \mu_{m-1} b_{m-1}' = \overrightarrow{\mathcal{O}}.$$

Заместваме с

$$b_i' = b_i - \frac{x_{i,n}}{x_{m,n}} b_m \quad \text{за} \quad 1 \leq i \leq m-1$$

в горното равенство и получаваме

$$\overrightarrow{\mathcal{O}} = \sum_{i=1}^{m-1} \mu_i b_i' = \sum_{i=1}^{m-1} \mu_i \left(b_i - \frac{x_{i,n}}{x_{m,n}} b_m \right) = \sum_{i=1}^{m-1} \mu_i b_i - \left(\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\mu_i x_{i,n}}{x_{m,n}} \right) b_m$$

с $\mu_k \neq 0$. Това доказва линейната зависимост на $b_1, \ldots, b_m$.

□

Лема 3.4. (Лема за линейна независимост)*: Ако* $a_1, \ldots, a_n$ *са линейно независими вектори от линейно пространство* V *над поле* F *и*

$$a_{n+1} \in V \setminus l(a_1, \ldots, a_n)$$

е вектор извън тяхната линейна обвивка, то $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ *са линейно независими вектори.*

Доказателство. Допускаме противното и разглеждаме представяне

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n + \lambda_{n+1} a_{n+1} = \overrightarrow{\mathcal{O}}$$

на нулевия вектор $\overrightarrow{\mathcal{O}}$ като линейна комбинация на $a_1, \ldots, a_{n+1}$ с коефициенти $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1} \in F$, поне един от които е ненулев.
Ако $\lambda_{n+1} \neq 0$, то

$$a_{n+1} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}} a_1 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} a_n \in l(a_1, \ldots, a_n)$$

противоречи на предположението $a_{n+1} \notin l(a_1, \ldots, a_n)$.
Следователно $\lambda_{n+1} = 0$ и $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ с поне едно $\lambda_i \neq 0$ за някое $1 \leq i \leq n$. В резултат, $a_1, \ldots, a_n$ са линейно зависими, противно на предположението. Противоречието доказва Лемата за линейна независимост,

□