Глава 18

Ядро и образ на линейно изображение, теорема за ранга и дефекта. Обратим линеен оператор

Определение 18.1. *Ако $\varphi : U \to V$ е линейно изображение на пространства над поле F, то множеството*

$$\ker(\varphi) = \{u \in U \mid \varphi(u) = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$$

се нарича ядро на φ, а множеството

$$\operatorname{im}(\varphi) = \{\varphi(u) \in V \mid u \in U\}$$

се нарича образ на φ.

Твърдение 18.2. *Ако $\varphi : U \to V$ е линейно изображение, то ядрото $\ker(\varphi)$ на φ е подпространство на U, а образът $\operatorname{im}(\varphi)$ на φ е подпространство на V.*

Доказателство. Ако $a_1, \dots, a_n \in \ker(\varphi)$, то линейността на φ и свойствата на нулевия вектор на V дават

$$\varphi(x_1a_1 + \ldots + x_na_n) = x_1\varphi(a_1) + \ldots + x_n\varphi(a_n) = x_1\overrightarrow{\mathcal{O}}_V + \ldots + x_n\overrightarrow{\mathcal{O}}_V = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$$

за произволни $x_1, \dots, x_n \in F$. Това доказва, че $x_1a_1 + \ldots + x_na_n \in \ker(\varphi)$ и $\ker(\varphi)$ е подпространство на U.
За произволни $u_1, \dots, u_n \in U$ и $x_1, \dots, x_n \in F$ е изпълнено

$$x_1\varphi(u_1) + \ldots + x_n\varphi(u_n) = \varphi(x_1u_1 + \ldots + x_nu_n) \in \operatorname{im}(\varphi),$$

съгласно линейността на φ. С това установяваме, че $\operatorname{im}(\varphi)$ е подпространство на V.

□

Определение 18.3. *Ако $\varphi : U \to V$ е линейно изображение, то размерността $d(\varphi) = \dim\ker(\varphi)$ на ядрото $\ker(\varphi)$ на φ се нарича дефект на φ, а размерността $\operatorname{rk}(\varphi) = \dim\operatorname{im}(\varphi)$ на образа $\operatorname{im}(\varphi)$ на φ се нарича ранг на φ.*

Твърдение 18.4. *Нека* $\varphi : U \to V$ *е линейно изображение и* $e = (e_1, \dots, e_n)$ *е базис на* U. *Тогава образът*

$$\mathrm{im}(\varphi) = l(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$$

на φ *се поражда от образите* $\varphi(e_i)$ *на базисните вектори* e_i *на* U. *Още повече, ако* V *е крайномерно пространство,* $f = (f_1, \dots, f_m)$ *е базис на* V *и* $A \in M_{m\times n}(F)$ *е матрицата на* φ *спрямо базисите* e *и* f, *то рангът*

$$\mathrm{rk}(\varphi) = \mathrm{rk}(A)$$

на φ *съвпада с ранга на* A.

Доказателство. Произволен вектор от $\mathrm{im}(\varphi)$ има вида $\varphi(u)$ за някакъв вектор $u \in U$. Изразяваме

$$u = ex = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

като линейна комбинация на базисните вектори $e_1, \dots, e_n$ на U. Прилагаме Лема 16.1 и получаваме, че

$$\varphi(u) = \varphi(ex) = \varphi(e)x = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in l(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$$

е линейна комбинация на $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ и $\mathrm{im}(\varphi) \subseteq l(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$. Обратното включване $l(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) \subseteq \mathrm{im}(\varphi)$ се дължи на $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \in \mathrm{im}(\varphi)$ и на това, че $\mathrm{im}(\varphi)$ е подпространство на V. Това доказва

$$\mathrm{im}(\varphi) = l(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)).$$

Рангът на φ е

$$\mathrm{rk}(\varphi) = \dim \mathrm{im}(\varphi) = \dim l(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = \mathrm{rk}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)).$$

Ако V е крайномерно пространство, то по определение, вектор-стълбовете на матрицата $A \in M_{m\times n}(F)$ на φ спрямо базиса e на U и базиса f на V са съставени от координатите на $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ спрямо базиса $f_1, \dots, f_m$ на V. Следователно

$$\mathrm{rk}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = \mathrm{rk}(A) \quad \text{и} \quad \mathrm{rk}(\varphi) = \mathrm{rk}(A).$$

□

Твърдение 18.5. (Теорема за ранга и дефекта на линейно изображение на крайномерно пространство:) *Нека* $\varphi : U \to V$ *е линейно изображение на* n*-мерно пространство* U *в произволно линейно пространство* V. *Тогава рангът* $\mathrm{rk}(\varphi)$ *и дефектът* $d(\varphi)$ *на* φ *изпълняват равенството*

$$\mathrm{rk}(\varphi) + d(\varphi) = n.$$

Доказателство. Нека $k = d(\varphi) = \dim \ker(\varphi)$. Ако $k \in \mathbb{N}$, избираме базис $e_1, \dots, e_k$ на ядрото $\ker(\varphi)$ на φ и допълваме до базис $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ на U. В случая $k = \dim \ker(\varphi) = 0$, нека $e_1, \dots, e_n$ е произволен базис на U. Достатъчно е да проверим, че $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n) \in \mathrm{im}(\varphi)$ е базис на образа $\mathrm{im}(\varphi)$ на φ, за да получим, че

$$\mathrm{rk}(\varphi) := \dim \mathrm{im}(\varphi) = n - k = \dim(U) - d(\varphi)$$

и да докажем твърдението.

По Твърдение 18.4, $\mathrm{im}(\varphi) = l(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k), \varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n))$. Вземайки предвид $\varphi(e_1) = \ldots = \varphi(e_k) = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$ за векторите $e_1, \ldots, e_k \in \ker(\varphi)$, получаваме

$$\mathrm{im}(\varphi) = l(\varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n)).$$

Ако

$$\overrightarrow{\mathcal{O}}_V = \sum_{i=k+1}^{n} x_i \varphi(e_i) = \varphi\left(\sum_{i=k+1}^{n} x_i e_i\right)$$

за линейното изображение φ, то $\sum\limits_{i=k+1}^{n} x_i e_i \in \ker(\varphi)$ и съществуват скалари $x_1, \ldots, x_k \in F$ с

$$\sum_{i=k+1}^{n} x_i e_i = \sum_{j=1}^{k} x_j e_j,$$

защото $e_1, \ldots, e_k$ е базис на $\ker(\varphi)$. В резултат,

$$\sum_{i=1}^{k} x_i e_i + \sum_{i=k+1}^{n} (-x_i) e_i = \overrightarrow{\mathcal{O}}_U,$$

откъдето $x_i = 0$ за всички $1 \leq i \leq n$, съгласно линейната независимост на базиса $e_1, \ldots, e_n$ на U. Това доказва, че $\varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n)$ са линейно независими, а оттам и базис на $\mathrm{im}(\varphi)$.

□

Определение 18.6. *Линейните изоморфизми $\varphi : U \to U$ на пространство U над поле F със себе си се наричат обратими линейни оператори.*

Твърдение 18.7. *Следните условия са еквивалентни за линеен оператор $\varphi : U \to U$ в n-мерно пространство U над поле F:*
(i) φ е обратим линеен оператор;
(ii) ядрото $\ker(\varphi) = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_U\}$ на φ е нулевото подпространство;
(iii) дефектът на φ е $d(\varphi) = 0$;
(iv) рангът на φ е $\mathrm{rk}(\varphi) = n$;
(v) образът $\mathrm{im}(\varphi) = U$ на φ съвпада с цялото пространство U;
(vi) φ трансформира базис $e_1, \ldots, e_n$ на U в базис $\varphi(e_1), \ldots \varphi(e_n)$ на U.

Доказателство. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* Произволен линеен оператор $\varphi : U \to U$ оставя на място нулевия вектор $\varphi(\overrightarrow{\mathcal{O}}_U) = \overrightarrow{\mathcal{O}}_U$, така че $\overrightarrow{\mathcal{O}}_U \in \ker(\varphi)$. Поради взаимната еднозначност на φ, за всеки ненулев вектор $u \in U$, $u \neq \overrightarrow{\mathcal{O}}_U$ е в сила $\varphi(u) \neq \varphi(\overrightarrow{\mathcal{O}}_U) = \overrightarrow{\mathcal{O}}_U$, откъдето $\ker(\varphi) = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_U\}$ се състои само от нулевия вектор $\overrightarrow{\mathcal{O}}_U$ на U.
(ii) $\Rightarrow$ *(iii)* Ако ядрото $\ker(\varphi) = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_U\}$ е нулевото подпространство, то дефектът на φ е $d(\varphi) := \dim \ker(\varphi) = 0$.
(iii) $\Rightarrow$ *(iv)* По Твърдение 18.5 - Теорема за ранга и дефекта на линейно изображение $\varphi : U \to U$ на n-мерно пространство U, рангът на φ е

$$\mathrm{rk}(\varphi) = n - d(\varphi) = n - 0 = n.$$

(iv) $\Rightarrow$ *(v)* Ако подпространството $\mathrm{im}(\varphi)$ на U е с размерност $\dim \mathrm{im}(\varphi) = \mathrm{rk}(\varphi) = n = \dim(U)$, то $\mathrm{im}(\varphi)$ съвпада с U, $\mathrm{im}(\varphi) = U$ съгласно Следствие 5.13.

$(v) \Rightarrow (vi)$ Ако $e_1, \ldots, e_n$ е базис на U, то по Твърдение 18.4 имаме $\mathrm{im}(\varphi) = l(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$. Комбинирайки с предположението $\mathrm{im}(\varphi) = U$, получаваме, че $l(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = U$. Съгласно Твърдение 5.12 за n-мерното пространство U, векторите $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ образуват базис на U.

$(vi) \Rightarrow (i)$ Ако линеен оператор $\varphi : U \to U$ изобразява базис $e_1, \ldots, e_n$ на U в базис $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ на U, то еднозначно определеният линеен оператор $\psi : U \to U$ с $\psi(\varphi(e_i)) = e_i$ за всички $1 \leq i \leq n$ е обратен на φ. По-точно, от определението за $\psi\varphi$, линейността на φ, ψ и определенията на ψ, Id_U имаме

$$(\psi\varphi)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \psi\left(\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)\right) = \psi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \psi(\varphi(e_i)) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \mathrm{Id}_U\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)$$

за произволни $x_i \in F$. Аналогично, определението на $\psi\varphi$, линейността и определението на ψ, линейността на φ и определението на Id_U дават

$$(\varphi\psi)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i \varphi(e_i)\right) = \varphi\left(\psi\left(\sum_{i=1}^{n} y_i \varphi(e_i)\right)\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} y_i \psi(\varphi(e_i))\right) =$$

$$= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} y_i \varphi(e_i) = \mathrm{Id}_U\left(\sum_{i=1}^{n} y_i \varphi(e_i)\right)$$

за всички $y_i \in F$. Следователно $\psi\varphi = \mathrm{Id}_U$, $\varphi\psi = \mathrm{Id}_U$ и $\varphi : U \to U$ е обратим линеен оператор с обратен $\varphi^{-1} = \psi$.

$\square$

Твърдение 18.8. *Линеен оператор $\varphi : U \to U$ в n-мерно пространство U е обратим тогава и само тогава, когато матрицата $A_\varphi \in M_{n\times n}(F)$ на φ спрямо произволен базис $e = (e_1, \ldots, e_n)$ на U е обратима. Ако това е в сила, то матрицата на $\varphi^{-1} : U \to U$ спрямо базиса e е*

$$A_{\varphi^{-1}} = A_\varphi^{-1}.$$

Доказателство. Ако линейният оператор $\varphi : U \to U$ е обратим, то матрицата A_φ на φ спрямо дадения базис e, матрицата $A_{\varphi^{-1}}$ на $\varphi^{-1} : U \to U$ спрямо базиса e и единичната матрица $A_{\mathrm{Id}} = E_n$ на тъждествения линеен оператор $\mathrm{Id} : U \to U$, $\mathrm{Id}(u) = u$, $\forall u \in U$ изпълняват равенствата

$$A_\varphi A_{\varphi^{-1}} = A_{\varphi\varphi^{-1}} = A_{\mathrm{Id}} = E_n = A_{\mathrm{Id}} = A_{\varphi^{-1}\varphi} = A_{\varphi^{-1}} A_\varphi$$

съгласно Твърдение 17.4. Следователно $A_\varphi \in M_{n\times n}(F)$ е обратима и нейната обратна $A_\varphi^{-1} = A_{\varphi^{-1}}$ е матрицата на $\varphi^{-1} : U \to U$ спрямо базиса e.

Обратно, ако матрицата $A_\varphi \in M_{n\times n}(F)$ на $\varphi : U \to U$ е обратима, нека

$$\psi : U \longrightarrow U$$

е линейният оператор с матрица $A_\psi = A_\varphi^{-1}$ спрямо базиса e. С помощта на Твърдение 17.4 пресмятаме, че

$$E_n = A_\varphi A_\varphi^{-1} = A_\varphi A_\psi = A_{\varphi\psi}$$

и

$$E_n = A_\varphi^{-1} A_\varphi = A_\psi A_\varphi = A_{\psi\varphi}.$$

Единственият линеен оператор в U с единична матрица E_n спрямо фиксирания базис e е тъждественият оператор $\mathrm{Id} : U \to U$, така че $\varphi\psi = \mathrm{Id}$ и $\psi\varphi = \mathrm{Id}$. Това доказва, че операторът $\varphi : U \to U$ е обратим и неговият обратен е $\varphi^{-1} = \psi$ има матрица $A_{\varphi^{-1}} = A_\psi = A_\varphi^{-1}$ спрямо фиксирания базис e.

$\square$