Глава 12

Обратимост и неособеност на матрици. Формули на Крамер.

Определение 12.1. *Квадратна матрица $A \in M_{n\times n}(F)$ е обратима, ако съществува квадратна матрица $B \in M_{n\times n}(F)$ от същия ред, така че*

$$AB = BA = E_n.$$

Матрицата B е единствена, защото ако B_1 и B_2 изпълняват условията $B_1A = AB_1 = E_n$, съответно, $AB_2 = B_2A = E_n$, то

$$B_2 = E_nB_2 = (B_1A)B_2 = B_1(AB_2) = B_1E_n = B_1,$$

съгласно асоциативността на умножението на матрици и $E_nB_2 = B_2$, $B_1E_n = B_1$. Следователно за всяка обратима матрица A има единствена матрица B, изпълняваща равенството $AB = BA = E_n$, която се нарича обратна на A и се бележи с $B = A^{-1}$.

Лема 12.2. *(i) Ако $A \in M_{n\times n}(F)$ е обратима матрица, то нейната обратна матрица $A^{-1} \in M_{n\times n}(F)$ е обратима и*

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

(ii) Ако $A \in M_{n\times n}(F)$ и $B \in M_{n\times n}(F)$ са обратими матрици, то произведението им $AB \in M_{n\times n}(F)$ е обратима матрица с обратна

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Доказателство. (i) Ако $A \in M_{n\times n}(F)$ е обратима с обратна матрица A^{-1}, то $AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$. По този начин, A изпълнява дефиниционните равенства за обратната на A^{-1} и $(A^{-1})^{-1} = A$.
(ii) Съгласно

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = [A(BB^{-1})]A^{-1} = (AE_n)A^{-1} = AA^{-1} = E_n \quad \text{и}$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = [B^{-1}(A^{-1}A)]B = (B^{-1}E_n)B = B^{-1}B = E_n,$$

матрицата $B^{-1}A^{-1} \in M_{n\times n}(F)$ изпълнява дефиниционните равенства за $(AB)^{-1}$, откъдето съществува обратна на AB и тази обратна е $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

□

Твърдение 12.3. *Квадратна матрица $A \in M_{n\times n}(F)$ е обратима тогава и само тогава, когато е неособена.*

Доказателство. Ако $A \in M_{n\times n}(F)$ е обратима и $A^{-1} \in M_{n\times n}(F)$ е нейната обратна матрица, то $AA^{-1} = E_n$. По Теоремата за умножение на детерминанти

$$1 = \det(E_n) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}).$$

Следователно $\det(A) \neq 0$ и всяка обратима матрица $A \in M_{n\times n}(F)$ е неособена. Нека $A_{i,j}$ е адюнгираното количество на елемента $a_{i,j}$ на A и $A^* \in M_{n\times n}(F)$ е матрицата с елементи $(A^*)_{i,j} = A_{j,i}$ за всички $1 \leq i, j \leq n$. Тогава

$$AA^* = \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \det(A) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det(A) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \det(A) \end{pmatrix},$$

защото за $1 \leq i \neq j \leq n$ е в сила

$$(AA^*)_{i,j} = (a_{i,1}, \dots, a_{i,s}, \dots, a_{i,n}) \begin{pmatrix} A_{j,1} \\ \dots \\ A_{j,s} \\ \dots \\ A_{j,n} \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^{n} a_{i,s}(A^*)_{s,j} = \sum_{s=1}^{n} a_{i,s}A_{j,s} = 0,$$

съгласно фалшивото развитие на детерминанта по ред и

$$(AA^*)_{i,i} = \sum_{s=1}^{n} a_{i,s}(A^*)_{s,i} = \sum_{s=1}^{n} a_{i,s}A_{i,s} = \det(A) \quad \text{за всички} \quad 1 \leq i \leq n,$$

съгласно развитието на $\det(A)$ по i-ти ред. Аналогично,

$$A^*A = \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \det(A) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det(A) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \det(A) \end{pmatrix},$$

защото

$$(A^*A)_{i,j} = \sum_{s=1}^{n} (A^*)_{i,s}a_{s,j} = \sum_{s=1}^{n} A_{s,i}a_{s,j} = (A_{1,i}, \dots, A_{s,i}, \dots, A_{n,i}) \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \dots \\ a_{s,j} \\ \dots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{cases} \det(A) & \text{за } 1 \leq i = j \leq n, \\ 0 & \text{за } 1 \leq i \neq j \leq n, \end{cases}$$

съгласно развитието на $\det(A)$ по i-ти стълб и фалшивото развитие на детерминанта по стълб.
Ако $A \in M_{n\times n}(F)$ е неособена матрица, т.е. $\det(A) \neq 0$, то матрицата

$$B := \frac{1}{\det(A)} A^* \in M_{n\times n}(F)$$

изпълнява дефиниционните равенства

$$AB = \frac{1}{\det(A)} AA^* = E_n \quad \text{и} \quad BA = \frac{1}{\det(A)} A^*A = E_n$$

на обратната матрица на A и

$$B = \frac{1}{\det(A)} A^* = A^{-1}.$$

$\square$

Нека

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(F)$$

е матрица от втори ред с $\det(A) \neq 0$. Ако $A_{i,j}$ е адюнгираното количество на елемента $a_{i,j}$ на A за $1 \leq i, j \leq 2$, то

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} \end{pmatrix}.$$

При това, $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$ и

$$A_{1,1} = (-1)^{1+1}a_{2,2} = a_{2,2}, \quad A_{2,1} = (-1)^{2+1}a_{1,2} = -a_{1,2},$$

$$A_{1,2} = (-1)^{1+2}a_{2,1} = -a_{2,1}, \quad A_{2,2} = (-1)^{2+2}a_{1,1} = a_{1,1}.$$

Следователно

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}} \begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix}.$$

Нека $A \in M_{n\times n}(F)$ е неособена или, еквивалентно, обратима квадратна матрица от ред n. Да забележим, че ако $B \in M_{n\times n}(F)$ е матрица, изпълняваща равенството $AB = E_n$, то $B = A^{-1}$, защото

$$A^{-1} = A^{-1}E_n = A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = E_nB = B.$$

В резултат, за да намерим обратната матрица A^{-1} на A е достатъчно да решим матричното уравнение $AX = E_n$. Аналогично, от $CA = E_n$ за $C \in M_{n\times n}(F)$ следва $C = A^{-1}$, съгласно

$$A^{-1} = E_nA^{-1} = (CA)A^{-1} = C(AA^{-1}) = CE_n = C.$$

За особена матрица $A \in M_{n\times n}(F)$ и произволна матрица $B \in M_{n\times m}(F)$, матричното уравнение $AX = B$ има единствено решение $X = A^{-1}B \in M_{n\times m}(F)$, което се получава чрез ляво умножение на $AX = B$ с A^{-1}. За да намерим това решение, записваме една до друга $(A|B)$ матриците A, B и прилагаме елементарни преобразувания по редове към така образуваната матрица докато в лявата половина получим единичната матрица $E_n \in M_{n\times n}(F)$. Ако резултатът е $(E_n|C)$, твърдим, че $C = A^{-1}B$ е единственото решение на $AX = B$. Поточно, ако елементарните преобразувания по редове, свеждащи A към E_n се реализират чрез леви умножения с неособени матрици $M_1, \ldots, M_k \in M_{n\times n}(F)$, то $M_k \ldots M_1A = E_n$. Следователно $M_k \ldots M_1 = A^{-1}$. Ако същите елементарни преобразувания се приложат към B, получаваме матрицата

$$C = M_k \ldots M_1B = A^{-1}B,$$

която е единственото решение на $AX = B$. В частност, ако A е неособена матрица, то нейната обратна матрица A^{-1} е единственото решение на матричното уравнение $AX = E_n$. Записваме $(A|E_n)$ една до друга и с елементарни преобразувания по редова свеждаме A към E_n. Получената отдясно матрица е A^{-1}.

Ако трябва да решим матрично уравнение $YA = B$ с неособена матрица $A \in M_{n\times n}(F)$, транспонираме уравнението и решаваме $A^tY^t = B^t$. От $\det(A^t) = \det(A) \neq 0$ следва, че A^t е неособена и $A^tY^t = B^t$ има единствено решение $Y^t = S$. Транспонираната матрица $Y = S^t$ е единственото решение на $YA = B$.

Твърдение 12.4. (Формули на Крамер) *Нека*

$$\left| \begin{array}{llllll} a_{1,1}x_1 & +\dots & +a_{1,j}x_j & +\dots & +a_{1,n}x_n & =b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1}x_1 & +\dots & +a_{ij}x_j & +\dots & +a_{i,n}x_n & =b_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1}x_1 & +\dots & +a_{n,j}x_j & +\dots & +a_{n,n}x_n & =b_n \end{array} \right.$$

е система от n линейни уравнения с n неизвестни, чиято матрица от коефициенти $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(F)$ има ненулева детерминанта

$$\Delta = \det(a_{i,j})_{i,j=1}^n \in F \setminus \{0\}.$$

Тогава системата има единствено решение

$$\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \dots, \frac{\Delta_i}{\Delta}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta} \right),$$

където Δ_i е детерминантата на матрицата, получена от A чрез замяна на i-тия стълб на A със стълба

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_i \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

на свободните членове.

Доказателство. Нека $A_{i,j}$ са адюнгираните количества на $a_{i,j}$ и $A^* \in M_{n\times n}(F)$ е матрицата с елементи $(A^*)_{i,j} = A_{j,i}$ за всички $1 \leq i,j \leq n$. Дадената система уравнения е еквивалентна на матричното уравнение $Ax = b$. По предположение, $\Delta = \det(A) \neq 0$, така че матрицата A е неособена, откъдето обратима и системата има единствено решение $s = A^{-1}b$. Съгласно доказателството на Твърдение 12.3,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^* = \frac{1}{\Delta} A^*,$$

така че

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ \dots \\ s_i \\ \dots \\ s_n \end{pmatrix} = s = \frac{1}{\Delta} A^* b.$$

Оттук следва, че за всяко $1 \leq i \leq n$ е в сила

$$s_i = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{1,i} & \dots & A_{p,i} & \dots & A_{n,i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_p \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \sum_{p=1}^n A_{p,i} b_p = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

съгласно формулата за развитие на

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,i-1} & b_p & a_{p,i+1} & \dots & a_{p,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

относно стълба с номер i и съвпадението на адюнгираните количества на i-тия стълб на Δ_i с адюнгираните количества на i-тия стълб на A.

$\square$