Глава 20

Евклидови и унитарни пространства. Ортогонализация по метода на Грам-Шмид

За да говорим за дължина на вектор и ъгъл между ненулеви вектори на линейно пространство над $\mathbb{R}$ или над $\mathbb{C}$, трябва да въведем понятието скаларно произведение.

Определение 20.1. *Скаларно произведение*

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow F,$$

в линейно пространство V над полето $F = \mathbb{R}$ на реалните числа или полето $F = \mathbb{C}$ на комплексните числа е изображение със свойствата:
(i) $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$ за $\forall u, v \in V$;
(ii) $\langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle$ за $\forall u_1, u_2, v \in V$;
(iii) $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ за $\forall u, v \in V$, $\forall \lambda \in F$;
(iv) $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ за $\forall v \in V$ с $\langle v, v \rangle = 0 \in F$ точно когато $v = \mathcal{O}_V \in V$.

Съгласно Твърдение 15.2, скаларното произведение е линейно относно първия си аргумент.

Определение 20.2. *Линейно пространство V над полето $\mathbb{R}$ на реалните числа със скаларно произведение $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ се нарича евклидово.*
Линейно пространство V над полето $\mathbb{C}$ на комплексните числа със скаларно произведение $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ се нарича унитарно.

Следствие 20.3. *Аксиомите за скаларно произведение в евклидово или унитарно пространство V имат следните следствия:*
(а) $\langle u, v_1 + v_2 \rangle = \langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle$ за $\forall u, v_1, v_2 \in V$;
(б) $\langle u, \lambda v \rangle = \overline{\lambda} \langle u, v \rangle$ за $\forall u, v \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ или $\lambda \in \mathbb{C}$;
(в) $\langle \overrightarrow{\mathcal{O}_V}, v \rangle = \langle v, \overrightarrow{\mathcal{O}_V} \rangle = 0$ за $\forall v \in V$ и нулевия вектор $\overrightarrow{\mathcal{O}}_V \in V$;

$$\text{(г)} \quad \langle \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j \rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \, \overline{\mu_j} \, \langle u_i, v_j \rangle$$

за произволни $u_i, v_j \in V$ и $\lambda_i, \mu_j \in F = \mathbb{R}$ или $\lambda_i, \mu_j \in F = \mathbb{C}$.

Доказателство. (а) За произволни вектори $u, v_1, v_2 \in V$ е в сила

$$\langle u, v_1 + v_2 \rangle = \overline{\langle v_1 + v_2, u \rangle} = \overline{\langle v_1, u \rangle + \langle v_2, u \rangle} = \overline{\langle v_1, u \rangle} + \overline{\langle v_2, u \rangle} = \langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle,$$

съгласно $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ за произволни комплексни числа $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
(б) За произволни $u, v \in V$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, съответно, $\lambda \in \mathbb{C}$ е изпълнено

$$\langle u, \lambda v \rangle = \overline{\langle \lambda v, u \rangle} = \overline{\lambda \langle v, u \rangle} = \overline{\lambda} \ \ \overline{\langle v, u \rangle} = \overline{\lambda} \ \ \langle u, v \rangle,$$

използвайки $\overline{(z_1 z_2)} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$ за $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
(в) За произволен вектор $u \in V$ е в сила $0u = \mathcal{O}_V$, така че

$$\langle \mathcal{O}_V, v\rangle = \langle 0u, v\rangle = 0\langle u, v\rangle = 0 \quad \text{и}$$
$$\langle v, \mathcal{O}_V\rangle = \langle v, 0u\rangle = \overline{0}\ \ \langle v, u\rangle = 0\ \ \langle v, u\rangle = 0.$$

Свойство (г) се получава от аксиоми (ii), (iii) за скаларно произведение и следствия (а), (б) от аксиомите за скаларно произведение.

□

Съгласно Следствие 20.3 (а), (б), скаларното произведение в евклидово пространство V е линейно относно втория си аргумент. Да забележим, че скаларното произведение в унитарно пространство не е линейно относно втория си аргумент. Функциите със свойствата (а), (б) от Следствие 20.3 се наричат косолинейни.

Определение 20.4. *Векторите $b_1, \ldots, b_n$ от евклидово или унитарно пространство V са ортогонални, ако $\langle b_i, b_j\rangle = 0$ за всички различни $1 \leq i \neq j \leq n$.*

Лема 20.5. *Произволни ненулеви ортогонални вектори $v_1, \ldots, v_n$ от евклидово (унитарно) пространство V са линейно независими.*

Доказателство. Нека

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_i v_i + \ldots + \lambda_n v_n = \mathcal{O}_V$$

е линейна комбинация на $v_1, \ldots, v_n$, равна на нулевия вектор $\mathcal{O}_V \in V$ с коефициенти $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ или $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Скаларното произведение на тази линейна комбинация с v_i е равно на

$$0 = \langle \mathcal{O}_V, v_i\rangle = \langle \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_i v_i + \ldots + \lambda_n v_n, v_i\rangle = \lambda_i \langle v_i, v_i\rangle,$$

съгласно $\langle v_j, v_i\rangle = 0$ за $1 \leq i \neq j \leq n$. Поради $v_i \neq \mathcal{O}_V$, скаларният квадрат $\langle v_i, v_i\rangle > 0$ е положителен, откъдето $\lambda_i = 0$ за всички $1 \leq i \leq n$ и векторите $v_1. \ldots, v_n$ са линейно независими.

□

Определение 20.6. *Ако V е евклидово или унитарно пространство и $v \in V$, то неотрицателният корен квадратен $||v|| := \sqrt{\langle v, v\rangle}^{\geq 0} \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ от скаларния квадрат $\langle v, v\rangle \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ на v се нарича дължина на v.*

За произволен вектор $v \in V$ и произволен скалар $\lambda \in \mathbb{R}$ или $\lambda \in \mathbb{C}$ е в сила

$$\langle \lambda v, \lambda v\rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle = |\lambda|^2 ||v||^2,$$

откъдето $||\lambda v|| = |\lambda| ||v||$. В частност, ако $v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}_V}\}$ е ненулев вектор от евклидово или унитарно пространство V, то $\frac{v}{||v||} \in V$ има дължина

$$\left|\left|\frac{v}{||v||}\right|\right| = 1.$$

Определение 20.7. *Векторите $e_1, \ldots, e_n$ от евклидово или унитарно пространство V са ортонормирани, ако са ортогонални и $||e_i|| = 1$ за всички $1 \leq i \leq n$.*

Лема 20.8. *Базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ на евклидово или унитарно пространство V е ортонормиран тогава и само тогава, когато*

$$\langle ex, ey\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i} = x^t\overline{y}$$

за произволни вектори $ex, ey \in V$ с координати $x, y \in M_{n\times 1}(F)$, $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ спрямо базиса e.

Доказателство. Ако $e = (e_1, \dots, e_n)$ е ортонормиран базис на V, то

$$\langle ex, ey\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i\overline{y_j}\langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i\overline{y_j}\delta_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i} = (x_1, \dots, x_n)\begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \dots \\ \overline{y_i} \\ \dots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix},$$

съгласно

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{за } 1 \le i \ne j \le n, \\ 1 & \text{за } 1 \le i = j \le n. \end{cases}$$

Обратно, нека $\langle ex, ey\rangle = x^t\overline{y}$ за произволни вектори $ex, ey \in V$. Тогава

$$\langle e_i, e_i\rangle = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{0.0 + \dots + 0.0}_{i=1} + 1.1 + \underbrace{0.0 + \dots + 0.0}_{n-i} = 1 \quad \text{за} \quad \forall 1 \le i \le n.$$

Ако $1 \le i < j \le n$, то

$$\langle e_i, e_j\rangle = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{0.0 + \dots + 0.0}_{i-1} + 1.0 + \underbrace{0.0 + \dots + 0.0}_{j-1-i} + 0.1 + \underbrace{0.0 + \dots + 0.0}_{n-j} = 0$$

и $\langle e_j, e_i\rangle = \overline{\langle e_i, e_j\rangle} = \overline{0} = 0$. Това доказва, че базисът $e = (e_1, \dots, e_n)$ е ортонормиран.

∎

В Лема 20.8 видяхме, че скаларното произведение се задава удобно чрез коорнатите на векторите спрямо ортонормиран базис на евклидово или унитарно пространство V. Сега ще разгледаме алгоритъм, наречен ортогонализация по метода на Грам-Шмид, чрез който от произволен базис $b_1, \ldots, b_n$ на V получаваме ортонормиран базис $e_1, \ldots, e_n$.

Твърдение 20.9. *Съществува алгоритъм, наречен ортогонализация по метода на Грам-Шмид, който по зададени линейно независими вектори $a_1, \ldots, a_n$ от евклидово (унитарно) пространство V построява ненулеви ортогонални вектори $b_1, \ldots, b_n \in V$ с*

$$l(a_1, \ldots, a_i) = l(b_1, \ldots, b_i) \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

Ако $a_1, \ldots, a_m$ са ортогонални за някое $2 \leq m \leq n$, то

$$b_1 = a_1, \quad b_2 = a_2, \ldots, b_m = a_m.$$

Доказателство. С индукция по $1 \leq i \leq n$, за произволни линейно независими $a_1, \ldots, a_i \in V$ ще докажем, че съществуват ненулеви ортогонални вектори $b_1, \ldots, b_i \in V$ с линейна обвивка $l(b_1, \ldots, b_i) = l(a_1, \ldots, a_i)$. В частност, ако $a_1, \ldots, a_i$ са ортогонални, то $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2$, ..., $b_i = a_i$.
За $n = 1$ избираме $b_1 = a_1$.
Ако $a_1, \ldots, a_i \in V$ са линейно независими вектори, то $a_1, \ldots, a_{i-1}$ са линейно независими и по индукционно предположение съществуват ненулеви ортогонални вектори $b_1, \ldots, b_{i-1} \in V$ с $l(a_1, \ldots, a_{i-1}) = l(b_1, \ldots, b_{i-1})$. Търсим

$$b_i = a_i + \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_{i,k} b_k \tag{20.1}$$

с такива $\lambda_{i,j} \in F = \mathbb{R}$ или $F = \mathbb{C}$, че b_i да е ортогонален на $b_1, \ldots, b_{i-1}$. Това изисква

$$0 = \langle b_i, b_j \rangle = \langle a_i, b_j \rangle + \langle \lambda_{i,j} b_j, b_j \rangle = \langle a_i, b_j \rangle + \lambda_{i,j} \langle b_j, b_j \rangle \quad \text{за всички} \quad 1 \leq j \leq i-1.$$

Съгласно $b_j \neq \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$, скаларните квадрати $\langle b_j, b_j \rangle \in \mathbb{R}^{>0}$ са различни от 0, така че можем да изберем

$$\lambda_{i,j} = -\frac{\langle a_i, b_j \rangle}{\langle b_j, b_j \rangle} \quad \text{за} \quad 1 \leq j \leq i-1.$$

Тогава $b_1, \ldots, b_{i-1}, b_i$ образуват ортогонална система вектори.
Ако допуснем, че $b_i = \mathcal{O}_V$, то

$$a_i = \sum_{j=1}^{i-1} (-\lambda_{i,j}) b_j \in l(b_1, \ldots, b_{i-1}) = l(a_1, \ldots, a_{i-1})$$

противоречи на линейната независимост на $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i$. Това доказва, че векторите $b_1, \ldots, b_{i-1}, b_i$ са ненулеви.
За да проверим

$$l(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i) = l(b_1, \ldots, b_{i-1}, b_i)$$

използваме, че $l(a_1, \ldots, a_{i-1}) = l(b_1, \ldots, b_{i-1})$, откъдето

$$l(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i) = l(a_1, \ldots, a_{i-1}) + l(a_i) = l(b_1, \ldots, b_{i-1}) + l(a_i) = l(b_1, \ldots, b_{i-1}, a_i).$$

За

$$l(b_1, \ldots, b_{i-1}, a_i) = l(b_1, \ldots, b_{i-1}, b_i)$$

е достатъчно да забележим, че от (20.1) следва

$$b_i \in l(b_1, \dots, b_{i-1}, a_i) \quad \text{и} \quad a_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{i,j} b_j \in l(b_1, \dots, b_{i-1}, b_i).$$

Ако $a_1, \dots, a_i \in V$ са ортогонални, то $a_1, \dots, a_{i-1} \in V$ са ортогонални и

$$b_1 = a_1, \quad \dots, b_{i-1} = a_{i-1}$$

по индукционно предположение. Тогава при търсене на b_i по правилото (20.1) получаваме

$$\lambda_{i,j} = -\frac{\langle a_i, b_j \rangle}{\langle b_j, b_j \rangle} = -\frac{\langle a_i, a_j \rangle}{\langle a_j, a_j \rangle} = 0$$

за всички $1 \leq j \leq i-1$, откъдето $b_i = a_i$.

□

Следствие 20.10. *Нека $a_1, \dots, a_n$ са линейно независими вектори от евклидово (унитарно) пространство V и $a_{n+1} \in l(a_1, \dots, a_n)$. Тогава прилагането на ортогонализация по метода на Грам-Шмид към $a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$ дава $b_{n+1} = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$.*

Доказателство. Чрез ортогонализация по метода на Грам-Шмид, от линейно независимите вектори $a_1, \dots, a_n \in V$ получаваме ненулеви ортогонални $b_1, \dots, b_n \in V$ с $l(a_1, \dots, a_n) = l(b_1, \dots, b_n)$. Търсим

$$b_{n+1} = a_{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{n+1,j} b_j.$$

Съгласно $a_{n+1} \in l(a_1, \dots, a_n) = l(b_1, \dots, b_n)$ съществуват $\mu_j \in F$, $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}$, така че

$$a_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j b_j.$$

В резултат,

$$b_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j b_j + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{n+1,j} b_j = \sum_{j=1}^{n} (\mu_j + \lambda_{n+1,j}) b_j.$$

От условията

$$0 = \langle b_{n+1}, b_j \rangle = (\mu_j + \lambda_{n+1,j}) \langle b_j, b_j \rangle$$

следва $\mu_j + \lambda_{n+1,j} = 0$ за всички $1 \leq j \leq n$ и $b_{n+1} = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$.

□

Следствие 20.11. *Нека V е n-мерно евклидово (унитарно) пространство, а $e_1, \dots, e_k \in V$ е ортонормирана система вектори. Тогава $k \leq n$ и $e_1, \dots, e_k$ може да се допълни до ортонормиран базис $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ на V.*
В частност, съществува ортонормиран базис $e_1, \dots, e_n$ на V.

Доказателство. Ненулевите ортогонални вектори $e_1, \dots, e_k$ са линейно независими по Лема 20.5. Съгласно Твърдение 5.14, $k \leq n$ и можем да допълним $e_1, \dots, e_k$ до базис $e_1, \dots, e_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ на V. В частност, съществува базис $v_1, \dots, v_n$ на V.

Към линейно независимите вектори $e_1, \dots, e_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ или $v_1, \dots, v_n$ прилагаме ортогонализация по метода на Грам-Шмид и получаваме ненулеви ортогонални вектори $b_1, \dots, b_n \in V$. При това, $b_1 = e_1, \dots, b_k = e_k$, ако $v_1 = e_1, \dots, v_k = e_k$ са два по два ортогонални. Векторите $b_1, \dots, b_n$ са линейно независими и образуват базис на V съгласно Твърдение 5.12. Полагаме

$$||b_i|| := \sqrt{\langle b_i, b_i \rangle}^{\geq 0}, \quad e_i := \frac{b_i}{||b_i||} \quad \text{за всички} \quad 1 \leq i \leq n$$

и получаваме ортонормирана система вектори $e_1, \dots, e_n \in V$. Тази система е линейно независима съгласно Лема 20.5. Прилагаме Твърдение 5.12 и получаваме, че $e_1, \dots, e_n$ е ортонормиран базис на n-мерното пространство V. Ако $v_1 = e_1, \dots, v_k = e_k$, то ортогонализацията по метода на Грам-Шмид и нормирането запазват $e_1, \dots, e_k$ и полученият базис $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ съдържа $e_1, \dots, e_k$.

$\square$