Глава 9

Транспониране на детерминанта. Основни свойства на детерминантите. Развитие на детерминанта по ред и по стълб.

Да забележим, че $(-1)^{[2,3,1]+[3,2,1]}a_{23}a_{32}a_{11} = -a_{11}a_{23}a_{32}$ е събираемо на детерминантата (8.2). В сила е следната по-обща

Твърдение 9.1. *Нека $j_1, \ldots, j_n$ и $k_1, \ldots, k_n$ са пермутации на $1, \ldots, n$ с $[j_1, \ldots, j_n]$, съответно $[k_1, \ldots, k_n]$ инверсии. Тогава*

$$\alpha = (-1)^{[j_1,\ldots,j_n]+[k_1,\ldots,k_n]} \quad a_{j_1,k_1}a_{j_2,k_2}\ldots a_{j_n,k_n}$$

е събираемо на детерминантата $\det(a_{i,j})_{i,j=1}^n$ на матрицата $(a_{i,j})_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(F)$.

Доказателство. За произволни $1 \leq p < q \leq n$ прилагането на транспозицията (j_p, j_q) към $j_1, \ldots, j_n$ и на транпозицията (k_p, k_q) към $k_1, \ldots, k_n$ трансформира α в

$$\beta = (-1)^{[j_1,\ldots,j_q,\ldots,j_p,\ldots,j_n]+[k_1,\ldots,k_q,\ldots,k_p,\ldots,k_n]} \quad a_{j_1,k_1}\ldots a_{j_q,k_q}\ldots a_{j_p,k_p}\ldots a_{j_n,k_n}.$$

Умножението в F е комутативно, така че

$$a_{j_1,k_1}\ldots a_{j_p,k_p}\ldots a_{j_q,k_q}\ldots a_{j_n,k_n} = a_{j_1,k_1}\ldots a_{j_q,k_q}\ldots a_{j_p,k_p}\ldots a_{j_n,k_n}.$$

Прилагането на транспозицията (j_p, j_q) към $j_1, \ldots, j_n$ променя четността на тази пермутация и

$$(-1)^{[j_1,\ldots,j_q,\ldots,j_p,\ldots,j_n]} = -(-1)^{[j_1,\ldots,j_p,\ldots,j_q,\ldots,j_n]}.$$

Аналогично, прилагането на транспозицията (k_p, k_q) към $k_1, \ldots, k_n$ променя четността на тази пермутация, така че

$$(-1)^{[k_1,\ldots,k_q,\ldots,k_p,\ldots,k_n]} = -(-1)^{[k_1,\ldots,k_p,\ldots,k_q,\ldots,k_n]}$$

Следователно

$$(-1)^{[j_1,\ldots,j_q,\ldots,j_p,\ldots,j_n]+[k_1,\ldots,k_q,\ldots,k_p,\ldots,k_n]} = (-1)^{[j_1,\ldots,j_p,\ldots,j_q,\ldots,j_n]+[k_1,\ldots,k_p,\ldots,k_q,\ldots,k_n]}$$

и $\beta = \alpha$.

С подходяща последователност от транспозиции свеждаме $j_1, \ldots, j_n$ към пермутацията $1, \ldots, n$. По-точно, ако $j_s = 1$, то разменяме j_s с j_1, така че получената пермутация да започва с 1. После преместваме числото 2 на втора позиция чрез транспозиция на j_2 с $j_t = 2$ и т.н., докато получим пермутацията $1, \ldots, n$. Съответните транспозиции свеждат пермутацията $k_1, \ldots, k_n$ на $1, \ldots, n$ към пермутация $i_1, \ldots, i_n$. Това дава възможност да представим

$$\alpha = (-1)^{[1,\ldots,n]+[i_1,\ldots,i_n]} \quad a_{1,i_1}\ldots a_{n,i_n} = (-1)^{[i_1,\ldots,i_n]} \quad a_{1,i_1}\ldots a_{n,i_n},$$

като събираемо на

$$\det(a_{i,j})_{i,j=1}^n = \sum_{i_1,\ldots,i_n} (-1)^{[i_1,\ldots,i_n]} \quad a_{1,i_1}\ldots a_{n,i_n}.$$

□

Определение 9.2. *Нека $A \in M_{m\times n}(F)$ е матрица с m реда и n стълба. Разменяйки редовете и стълбовете на A, получаваме транспонираната матрица $A^t \in M_{n\times m}(F)$ с елементи*

$$(A^t)_{i,j} := A_{j,i} \quad \text{за всички} \quad 1 \le i \le n \quad \text{и } 1 \le j \le m.$$

Например, транспонираната на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

е

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

и

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \det(A^t).$$

Следващото твърдение доказва, че детерминантата на произволна матрица съвпада с детерминантата на нейната транспонирана.

Твърдение 9.3. *Транспонирането на квадратна матрица $A \in M_{n\times n}(F)$ не променя нейната детерминанта.*

Доказателство. Ако $A = (A_{i,j})_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(F)$ е матрица с елементи $A_{i,j} \in F$, то транспонираната матрица $A^t \in M_{n\times n}(F)$ има елементи

$$(A^t)_{i,j} = A_{j,i}, \quad 1 \le i, j \le n.$$

По определение,

$$\det(A^t) = \sum_{i_1,\dots,i_n} (-1)^{[i_1,\dots,i_n]} \, (A^t)_{1,i_1} \dots (A^t)_{n,i_n} = \sum_{i_1,\dots,i_n} (-1)^{[i_1,\dots,i_n]} \, A_{i_1,1} \dots A_{i_n,n},$$

където сумирането е по всички пермутации $i_1, \dots, i_n$ на числата $1, \dots, n$, а $[i_1, \dots, i_n]$ е броят на инверсиите в пермутация $i_1, \dots, i_n$. Всяко събираемо

$$(-1)^{[i_1,\dots,i_n]} A_{i_1,1} \dots A_{i_n,n} = (-1)^{[i_1,\dots,i_n]+[1,\dots,n]} A_{i_1,1} \dots A_{i_n,n}$$

на $\det(A^t)$ е събираемо на

$$\det(A) = \sum_{i_1,\dots,i_n} (-1)^{[i_1,\dots,i_n]} \, A_{1,i_1} \dots A_{n,i_n}$$

съгласно Твърдение 9.1. Следователно $\det(A^t)$ и $\det(A)$ съвпадат, защото имат един и същи брой събираеми - $n!$.

□

Нека $A \in M_{n\times n}(F)$ е квадратна матрица с редове

$$r_s = (a_{s,1}, a_{s,2}, \dots, a_{s,j}, \dots, a_{s,n}) \in M_{1\times n}(F), \quad 1 \le s \le n.$$

Линейността на детерминантата относно своите редове дава

$$(i)\det\begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r'_p + r''_p \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r'_p \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r''_p \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix}$$

и

$$(ii)\det\begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ \lambda r_p \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix} = \lambda\det\begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_p \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix}.$$

Освен това

$$(iii)\det\begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_p \\ \dots \\ \lambda r_p \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix} = \lambda\det\begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_p \\ \dots \\ r_p \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix} = \lambda 0 = 0,$$

съгласно (ii) и анулирането на детерминанта с равни редове.
Използвайки (i) и (iii) получаваме, че умножението на ред с число и прибавянето му към друг ред не променя детерминантата, т.е.

$$(iv)\det\begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_p + \lambda r_q \\ \dots \\ r_q \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_p \\ \dots \\ r_q \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ \lambda r_q \\ \dots \\ r_q \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_p \\ \dots \\ r_q \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix}.$$

Аналогично, (i) и (iii) дават анулирането на детерминанта с линейно зависими редове,

$$(v)\det\begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ \sum\limits_{\forall q\neq p} \alpha_q r_q \\ \dots \\ r_q \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix} = \sum_{\forall q\neq p}\det\begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ \alpha_q r_q \\ \dots \\ r_q \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix} = 0.$$

От анти-симетричността на детерминантата относно своите редове получаваме, че размяната на редове променя знака на детерминанта,

$$(vi)\det\begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_q \\ \dots \\ r_p \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_p \\ \dots \\ r_q \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix}.$$

Аналогични свойства са в сила относно стълбовете на детерминанта. Те се извеждат чрез транспониране, прилагане на съответните свойства по редове и повторно транспониране. Нека $A \in M_{n\times n}(F)$ е квадратна матрица със стълбове

$$c_s = \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \dots \\ a_{ns} \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}(F), \quad 1 \leq s \leq n,$$

така че

$$A = (c_1 \dots c_s \dots c_n).$$

Използвайки Определение 9.2 за транспониране на матрица, Твърдение 9.3,

$$(c_p' + c_p'')^t = \begin{pmatrix} a_{1p}' + a_{1p}'' \\ \dots \\ a_{np}' + a_{np}'' \end{pmatrix}^t = (a_{1p}' + a_{1p}'', \dots, a_{np}' + a_{np}'') =$$

$$= (a_{1p}', \dots, a_{np}') + (a_{1p}'', \dots, a_{np}'') = \begin{pmatrix} a_{1p}' \\ \dots \\ a_{np}' \end{pmatrix}^t + \begin{pmatrix} a_{1p}'' \\ \dots \\ a_{np}'' \end{pmatrix}^t = (c_p')^t + (c_p'')^t$$

и свойство (i) на детерминантата относно нейните редове, получаваме свойство

$$\begin{aligned}
(i)' \det(c_1 \dots c_p' + c_p'' \dots c_n) &= \det(c_1 \dots c_p' + c_p'' \dots c_n)^t = \\
= \det \begin{pmatrix} c_1^t \\ \dots \\ (c_p' + c_p'')^t \\ \dots \\ c_n^t \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} c_1^t \\ \dots \\ (c_p')^t + (c_p'')^t \\ \dots \\ c_n^t \end{pmatrix} = \\
= \det \begin{pmatrix} c_1^t \\ \dots \\ (c_p')^t \\ \dots \\ c_n^t \end{pmatrix} &+ \det \begin{pmatrix} c_1^t \\ \dots \\ (c_p'')^t \\ \dots \\ c_n^t \end{pmatrix} = \\
= \det(c_1 \dots c_p' \dots c_n)^t &+ \det(c_1 \dots c_p'' \dots c_n)^t = \\
= \det(c_1 \dots c_p' \dots c_n) &+ \det(c_1 \dots c_p'' \dots c_n)
\end{aligned}$$

на детерминантата относно нейните стълбове.

Аналогично, от

$$(\lambda c_p)^t = \begin{pmatrix} \lambda a_{1p} \\ \dots \\ \lambda a_{np} \end{pmatrix}^t = (\lambda a_{1p}, \dots, \lambda a_{np}) =$$

$$= \lambda(a_{1p}, \dots, a_{np}) = \lambda \begin{pmatrix} a_{1p} \\ \dots \\ a_{np} \end{pmatrix}^t = \lambda c_p^t,$$

Определение 9.2 за транспониране на матрица, Твърдение 9.3 и свойство (ii) на детерминантата относно нейните редове получаваме

$$(ii)' \det(c_1 \dots \lambda c_p \dots c_n) = \det(c_1 \dots \lambda c_p \dots c_n)^t = \det \begin{pmatrix} c_1^t \\ \dots \\ (\lambda c_p)^t \\ \dots \\ c_n^t \end{pmatrix} =$$

$$\det \begin{pmatrix} c_1^t \\ \dots \\ \lambda c_p^t \\ \dots \\ c_n^t \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} c_1^t \\ \dots \\ c_p^t \\ \dots \\ c_n^t \end{pmatrix} = \lambda \det(c_1 \dots c_p \dots c_n)^t = \lambda \det(c_1 \dots c_p \dots c_n),$$

В сила е

$$(iii)' \det(c_1 \dots c_p \dots \lambda c_p \dots c_n) = \det(c_1 \dots c_p \dots \lambda c_p \dots c_n)^t =$$

$$= \det \begin{pmatrix} c_1^t \\ \dots \\ c_p^t \\ \dots \\ (\lambda c_p)^t \\ \dots \\ c_n^t \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} c_1^t \\ \dots \\ c_p^t \\ \dots \\ \lambda c_p^t \\ \dots \\ c_n^t \end{pmatrix} = 0$$

благодарение на Определение 9.2 за транспониране на матрица, Твърдение 9.3 и свойство (iii) на детерминантата относно нейните редове.
Свойства (i)', (ii)' и (iii)' показват, че детерминантата е полилинейна функция на своите стълбове, която се анулира за два равни стълба. Съгласно Твърдение 7.5, детерминантата е антисиметрична функция на своите стълбове.
Използвайки (i)' и (iii)', получаваме

$$(iv)' \det(c_1 \dots c_p + \lambda c_q \dots c_q \dots c_n) =$$
$$\det(c_1 \dots c_p \dots c_q \dots c_n) + \det(c_1 \dots \lambda c_q \dots c_q \dots c_n) = \det(c_1 \dots c_p \dots c_q \dots c_n)$$

и

$$(v)' \det(c_1 \dots \sum_{\forall q \neq p} \alpha_q c_q \dots c_q \dots c_n) = \sum_{q \neq p} \det(c_1 \dots \alpha_q c_q \dots c_q \dots c_n) = 0.$$

Антисиметричността на детерминантата относно нейните стълбове гласи

$$(vi)' \det(c_1 \dots c_q \dots c_p \dots c_n) = -\det(c_1 \dots c_p \dots c_q \dots c_n).$$

Определение 9.4. *Нека $\det(a_{ij})_{i,j=1}^n \in M_{n \times n}(F)$ е детерминанта от n-ти ред с елементи от поле F, а $1 \leq p, q \leq n$ са естествени числа. Ако от събираемите на $\det(a_{ij})_{i,j=1}^n$, които са кратни на a_{pq} изнесем пред скоби a_{pq}, то това което остава в скобата са нарича адюнгирано количество на a_{pq} и се бележи с A_{pq}.*

Адюнгираното количество A_{pq} има $(n-1)!$ събираеми от вида

$$(-1)^{[i_1, \dots, i_{p-1}, q, i_{p+1}, \dots, i_n]} a_{1i_1} \dots a_{p-1 i_{p-1}} a_{p+1 i_{p+1}} \dots a_{n i_n},$$

защото пермутациите $i_1, \dots i_n$ на $1, \dots, n$ с $i_p = q$ са $(n-1)!$ на брой.

Твърдение 9.5. *Нека* $(a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in M_{n\times n}(F)$ *е квадратна матрица от ред* n *с елементи от поле* F, *а* $1 \leq p, q \leq n$ *са естествени числа между* 1 *и* n. *Тогава:*
(i) $\sum\limits_{s=1}^{n} a_{ps}A_{ps} = \det(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ *(развитие на детерминанта по ред) ;*
(ii) $\sum\limits_{s=1}^{n} a_{sq}A_{sq} = \det(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ *(развитие на детерминанта по стълб),*
където $A_{i,j}$ *е адюнгираното количество на* $a_{i,j}$.

Доказателство. (i) Всяко събираемо на A_{ps} е от вида

$$(-1)^{[i_1,\dots,i_{p-1},s,i_{p+1},\dots,i_n]}a_{1i_1}\dots a_{p-1i_{p-1}}a_{p+1i_{p+1}}\dots a_{ni_n}.$$

Следователно всяко събираемо на $a_{p,s}A_{p,s}$ е от вида

$$(-1)^{[i_1,\dots,i_{p-1},s,i_{p+1},\dots,i_n]}a_{1i_1}\dots a_{p-1i_{p-1}}a_{p,s}a_{p+1i_{p+1}}\dots a_{ni_n}$$

и е събираемо на

$$\det(a_{i,j})_{i,j=1}^{n} = \sum_{i_1,\dots,i_n} (-1)^{[i_1,\dots,i_n]}a_{1i_1}\dots a_{p-1i_{p-1}}a_{pi_p}a_{p+1i_{p+1}}\dots a_{n,i_n}.$$

Адюнгираното количество A_{ps} има $(n-1)!$ събираеми, защото това е броят на пермутациите $i_1,\dots,i_{p-1},s,i_{p+1},\dots,i_n$ на $1,\dots,n$ с фиксирано $i_p = s$. Сумата $\sum\limits_{s=1}^{n} a_{ps}A_{ps}$ и детерминантата $\det(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ имат един и същи брой събираеми, т.е. $n(n-1)! = n!$ и съвпадат.
(ii) Всяко събираемо на A_{sq} е от вида

$$(-1)^{[i_1,\dots,i_{s-1},q,i_{s+1},\dots,i_n]}a_{1i_1}\dots a_{s-1i_{s-1}}a_{s+1i_{s+1}}\dots a_{ni_n}.$$

Следователно всяко събираемо на $a_{sq}A_{sq}$ е от вида

$$(-1)^{[i_1,\dots,i_{s-1},q,i_{s+1},\dots,i_n]}a_{1i_1}\dots a_{s-1i_{s-1}}a_{sq}a_{s+1i_{s+1}}\dots a_{ni_n}$$

и е събираемо на детерминантата $\det(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$. Броят на събираемите на A_{sq} е равен на броя $(n-1)!$ на пермутациите $i_1,\dots,i_n$ на $1,\dots,n$ с фиксирано $i_s = q$. Оттук $\sum\limits_{s=1}^{n} a_{sq}A_{s,q}$ и $\det(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ имат равен брой събираеми - $n(n-1)! = n!$ и

$$\sum_{s=1}^{n} a_{sq}A_{s,q} = \det(a_{ij})_{i,j=1}^{n}.$$

□

Твърдение 9.6. *Нека* $(a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in M_{n\times n}(F)$ *е квадратна матрица от ред* n, $1 \le p, q \le n$ *са естествени числа, а* A_{pq} *е адюнгираното количество на* a_{pq}. *Тогава*

$$A_{pq} = (-1)^{p+q}\Delta_{p,q}$$

се изразява чрез минора

$$\Delta_{p,q} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,q-1} & a_{1,q+1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p-1,1} & \dots & a_{p-1,q-1} & a_{p-1,q+1} & \dots & a_{p-1,n} \\ a_{p+1,1} & \dots & a_{p+1,q-1} & a_{p+1,q+1} & \dots & a_{p+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,q-1} & a_{n,q+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

от $(n-1)$*-ви ред, който се получава от* $\det(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ *чрез премахване на реда с номер* p *и стълба с номер* q.

Доказателство. Всяко събираемо на A_{pq} е от вида

$$\alpha = (-1)^{[i_1,\dots,i_{p-1},q,i_{p+1},\dots,i_n]} a_{1i_1}\dots a_{p-1i_{p-1}} a_{p+1i_{p+1}}\dots a_{ni_n}.$$

Прилагайки транспозициите $(i_{p-1},q),(i_{p-2},q),\dots,(i_1,q)$ променяме $p-1$ пъти знака на α и получаваме

$$\alpha = (-1)^{p-1}(-1)^{[q,i_1,\dots,i_{p-1},i_{p+1},\dots,i_n]} a_{1i_1}\dots a_{p-1i_{p-1}} a_{p+1i_{p+1}}\dots a_{ni_n}.$$

Изпускането на q от пермутацията $q, i_1,\dots,i_{p-1},i_{p+1},\dots,i_n$ премахва инверсиите на q със стоящите след него числа $q-1,\dots,2,1$, по-малки от q, така че

$$\alpha = (-1)^{p-1}(-1)^{q-1}(-1)^{[i_1,\dots,i_{p-1},i_{p+1},\dots,i_n]} a_{1i_1}\dots a_{p-1i_{p-1}} a_{p+1i_{p+1}}\dots a_{n,i_n}.$$

Да забележим, че

$$\beta := (-1)^{[i_1,\dots,i_{p-1},i_{p+1},\dots,i_n]} a_{1i_1}\dots a_{p-1i_{p-1}} a_{p+1i_{p+1}}\dots a_{ni_n}$$

е събираемо на $\Delta_{p,q}$. Следователно

$$\alpha = (-1)^{p+q-2}\beta = (-1)^{p+q}\beta$$

е събиремо на $(-1)^{p+q}\Delta_{p,q}$. Броят $(n-1)!$ на събираемите на A_{pq} съвпада с броя на събираемите на $(-1)^{p+q}\Delta_{p,q}$, така че $A_{pq} = (-1)^{p+q}\Delta_{p,q}$.

□

Комбинирайки Твърдение 9.5 с Твърдение 9.6 получаваме следното

Следствие 9.7. *Нека* $(a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in M_{n\times n}(F)$ *е квадратна матрица от ред* n *с елементи от поле* F, *а* $1 \le p, q \le n$ *са естествени числа. Тогава:*

(i) $\sum\limits_{s=1}^{n} a_{ps}(-1)^{p+s}\Delta_{p,s} = \det(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ *(развитие на детерминанта по ред) ;*

(ii) $\sum\limits_{s=1}^{n} a_{sq}(-1)^{s+q}\Delta_{s,q} = \det(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ *(развитие на детерминанта по стълб), където* $\Delta_{i,j}$ *е детерминантата на матрицата, получена от* $(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ *чрез премахване на* i*-ти ред и* j*-ти стълб.*

Твърдение 9.8. *Нека $(a_{ij})_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(F)$ е квадратна матрица от ред n, $1 \leq p, q \leq n$ и $r \in \{1, \dots, n\} \setminus \{p, q\}$. Тогава:*
(i) $\sum\limits_{s=1}^n a_{ps}A_{rs} = \sum\limits_{s=1}^n a_{ps}(-1)^{r+s}\Delta_{r,s} = 0$ (фалшиво развитие на детерминанта по ред);
(ii) $\sum\limits_{s=1}^n a_{sq}A_{sr} = \sum\limits_{s=1}^n a_{sq}(-1)^{s+r}\Delta_{s,r} = 0$ (фалшиво развитие на детерминанта по стълб), където A_{ij} е адюнгираното количество на a_{ij}, а $\Delta_{i,j}$ е детерминантата на матрицата, получена от $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ чрез премахване на i-ти ред и j-ти стълб.

Доказателство. (i) Заменяйки r-тия ред на матрицата $(a_{ij})_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(F)$ с нейния p-тия ред $(a_{p1}, \dots, a_{pn})$, получаваме детерминанта

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \end{vmatrix}$$

с два равни реда, която се анулира съгласно свойство (iii). Развитието на Δ' по r-ти ред е

$$0 = \Delta' = \sum_{s=1}^n a_{ps}A'_{r,s} = \sum_{s=1}^n (-1)^{p+s}a_{ps}\Delta'_{r,s},$$

където $\Delta'_{r,s}$ е детерминантата, получена от Δ' чрез премахване на реда с номер r и стълба с номер s. Детерминантите $\Delta = \det(a_{ij})_{i,j=1}^n$ и Δ' имат едни и същи редове с номера, различни от r, така че минорите $\Delta_{r,s} = \Delta'_{r,s}$, получени от Δ и Δ' чрез премахване на редовете с номера r и стълбовете с номера s съвпадат. Оттук, адюнгираните количества $A'_{r,s} = A_{r,s}$ съвпадат и

$$\sum_{s=1}^n a_{ps}A_{ps} = \sum_{s=1}^n (-1)^{r+s}a_{ps}\Delta_{r,s} = \Delta' = 0.$$

(ii) Ако заменим r-тия стълб на $(a_{ij})_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(F)$ с нейния q-тия стълб

$$\begin{pmatrix} a_{1q} \\ \dots \\ a_{nq} \end{pmatrix},$$

получаваме детерминанта

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,q} & \dots & a_{1q} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nq} & \dots & a_{nq} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

която има два равни стълба и се анулира съгласно съгласно свойство (iii)'. Развитието на Δ'' по r-тия стълб е

$$0 = \Delta'' = \sum_{s=1}^n a_{sq}A''_{s,r} = \sum_{s=1}^n (-1)^{s+r}a_{sq}\Delta''_{s,r} =$$
$$= \sum_{s=1}^n (-1)^{s+r}a_{sq}\Delta_{s,r} = \sum_{s=1}^n a_{sq}A_{sq},$$

защото детерминантите $\Delta''_{s,r} = \Delta_{s,r}$ получени от Δ'' и $\Delta = \det(a_{ij})_{i,j=1}^n$ чрез премахване на s-тия ред и r-тия стълб съвпадат. Причина за това е съвпадението на стълбовете на Δ и Δ'' номера, различни от r.

□

Задача 9.9. *Да се намери адюнгираното количество $A_{2,3}$ на*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & a_{45} \\ a_{51} & 0 & a_{53} & a_{54} & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение: Използваме Твърдение 9.6 и развиваме последователно по адюнгирани количества

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & a_{15} \\ a_{31} & 0 & a_{34} & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{45} \\ a_{51} & 0 & a_{54} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\left[(-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & a_{45} \\ a_{51} & a_{54} & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} a_{15} \begin{vmatrix} a_{31} & 0 & a_{34} \\ 0 & a_{42} & 0 \\ a_{51} & 0 & a_{54} \end{vmatrix} \right] =$$

$$= a_{12}(-1)^{2+3} a_{45} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{51} & a_{54} \end{vmatrix} + a_{15}(-1)^{2+2} a_{42} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{51} & a_{54} \end{vmatrix} =$$

$$= (-a_{12}a_{45} + a_{15}a_{42}) \begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{51} & a_{54} \end{vmatrix} = (-a_{12}a_{45} + a_{15}a_{42})(a_{31}a_{54} - a_{34}a_{51}).$$

Задача 9.10. *Да се пресметне детерминантата*

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Решение: Запазваме последния ред и прибваяме подходящи негови кратни към предишните редове, за да получим нули навсякъде във втори стълб над пети ред:

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & -4 & -5 \\ -1 & 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Развиваме по втори стълб и после по трети ред, за да получим

$$\Delta_5 = (-1)^{5+2}(-1) \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 & -5 \\ -1 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3}(-2) \begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 \\ -1 & 5 & 5 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Запазваме първия ред и прибавяме подходящи негови кратни към следващите редове, така че да анулираме елементите от първи стълб под първи ред. Това дава

$$\Delta_5 = -2 \begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 13 & 25 \end{vmatrix}.$$

Развиваме по втори ред и пресмятаме, че

$$\Delta_5 = (-2)(-1)^{2+2}.2 \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 25 \end{vmatrix} = (-4).25 = -100.$$