Глава 8

Определение за детерминанта.

Твърдение 8.1. *Нека F е числово поле, V е линейно пространство над F с базис $e_1, \ldots, e_n$. Тогава съществува единствена полилинейна анти-симетрична функция*

$$f : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n} \longrightarrow F$$

на n аргумента с $f(e_1, \ldots, e_n) = 1$.

Доказателство. *Единственост:* Да предположим, че V е линейно пространство над числово поле F с базис $e_1, \ldots, e_n$ и

$$f : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n} \longrightarrow F$$

е полилинейна анти-симетрична функция на n аргумента с $f(e_1, \ldots, e_n) = 1$. Тогава за произволни вектори

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} e_j, \quad 1 \leq i \leq n$$

е изпълнено

$$\begin{aligned} f(a_1, a_2, \ldots, a_n) &= f\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{1,i_1} e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} a_{2,i_2} e_{i_2}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{n,i_n} e_{i_n}\right) = \\ &= \sum_{i_1=1}^{n} a_{1,i_1} f\left(e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} a_{2,i_2} e_{i_2}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{n,i_n} e_{i_n}\right) = \\ &= \ldots = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \ldots \sum_{i_n=1}^{n} a_{1,i_1} a_{2,i_2} \ldots a_{n,i_n} f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) \end{aligned}$$

поради полилинейността на f. Съгласно Твърдение 7.5, анти-симетричната функция f над числово поле F се анулира при равни аргументи, така че е достатъчно да сумираме

$$f(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i_1, \ldots, i_n} a_{1,i_1} \ldots a_{n,i_n} f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n})$$

по пермутациите $i_1, \ldots, i_n$ на $1, \ldots, n$. По Твърдение 7.13 имаме

$$f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) = (-1)^{[i_1, \ldots, i_n]} f(e_1, \ldots, e_n) = (-1)^{[i_1, \ldots, i_n]}$$

за броя $[i_1, \ldots, i_n]$ на инверсиите в пермутация $i_1, \ldots, i_n$, откъдето

$$f(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i_1, \ldots, i_n} (-1)^{[i_1, \ldots, i_n]} a_{1,i_1} \ldots a_{n,i_n}.$$

Това доказва единствеността на полилинейната анти-симетрична функция f с необходимите свойства, при предположение, че основното поле F е числово.

Съществуване: Да разгледаме функцията

$$f : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n} \longrightarrow F,$$

$$f(a_1, \ldots, a_n) = f\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{1,i_1} e_{i_1}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{n,i_n} e_{i_n}\right) := \tag{8.1}$$
$$= \sum_{i_1,\ldots,i_n} (-1)^{[i_1,\ldots,i_n]} a_{1,i_1} \ldots a_{n,i_n},$$

където сумирането е по всички пермутации $i_1, \ldots, i_n$ на $1, \ldots, n$ и $[i_1, \ldots, i_n]$ е броят на инверсиите в пермутация $i_1, \ldots, i_n$. Достатъчно е да докажем, че (8.1) е полилинейна анти-симетрична функция с $f(e_1, \ldots, e_n) = 1$, за да установим съществуването на f и да докажем твърдението. Следващите разглеждания не използват, че полето F е числово, така че над произволно поле F функцията (8.1) е полилинейна и анти-симетрична.

За произволно $1 \leq j \leq n$, ако $a'_j = \sum\limits_{i_j=1}^{n} a'_{j,i_j} e_{i_j}$ и $a''_j = \sum\limits_{i_j=1}^{n} a''_{j,i_j} e_{i_j}$, то

$$a'_j + a''_j = \sum_{i_j=1}^{n} a'_{j,i_j} e_{i_j} + \sum_{i_j=1}^{n} a''_{j,i_j} e_{i_j} = \sum_{i_j=1}^{n} (a'_{j,i_j} + a''_{j,i_j}) e_{i_j},$$

$$f(a_1, \ldots, a'_j + a''_j, \ldots, a_n) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} (-1)^{[i_1,\ldots,i_n]} a_{1,i_1} \ldots (a'_{j,i_j} + a''_{j,i_j}) \ldots a_{n,i_n} =$$
$$= \sum_{i_1,\ldots,i_n} (-1)^{[i_1,\ldots,i_n]} a_{1,i_1} \ldots a'_{j,i_j} \ldots a_{n,i_n} + \sum_{i_1,\ldots,i_n} (-1)^{[i_1,\ldots,i_n]} a_{1,i_1} \ldots a''_{j,i_j} \ldots a_{n,i_n} =$$
$$= f(a_1, \ldots, a'_j, \ldots, a_n) + f(a_1, \ldots, a''_j, \ldots, a_n).$$

За произволни $1 \leq j \leq n$ и $\lambda \in F$ е изпълнено

$$\lambda a_j = \lambda \left(\sum_{i_j=1}^{n} a_{j,i_j} e_{i_j}\right) = \sum_{i_j=1}^{n} \lambda a_{j,i_j} e_{i_j},$$

$$f(a_1, \ldots, \lambda a_j, \ldots, a_n) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} (-1)^{[i_1,\ldots,i_n]} a_{1,i_1} \ldots (\lambda a_{j,i_j}) \ldots a_{n,j_n} =$$
$$= \lambda \left(\sum_{i_1,\ldots,i_n} (-1)^{[i_1,\ldots,i_n]} a_{1,i_1} \ldots a_{j,i_j} \ldots a_{n,i_n}\right) = \lambda f(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_n).$$

Това доказва линейността на f относно j-тия аргумент, а оттам и полилинейността на функцията f.

Преди да докажем в общия случай анулирането на f за равни аргументи, да разгледаме един пример. В случая $n = 3$, по определение

$$f(a_1, a_1, a_3) = f\left(\sum_{i_1=1}^{3} a_{1,i_1} e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{3} a_{1,i_2} e_{i_2}, \sum_{i_3=1}^{3} a_{3,i_3} e_{i_3}\right) =$$
$$= \sum_{i_1,i_2,i_3} (-1)^{[i_1,i_2,i_3]} a_{1,i_1} a_{1,i_2} a_{3,i_3},$$

където сумирането е по всички пермутации i_1, i_2, i_3 на $1, 2, 3$ и $[i_1, i_2, i_3]$ е броят на инверсиите в i_1, i_2, i_3. Фиксираме $i_3 \in \{1, 2, 3\}$ и означаваме с i_1 и i_2

елементите на $\{1,2,3\} \setminus \{i_3\}$, изпълняващи неравенството $i_1 < i_2$. Тогава

$$f(a_1, a_1, a_3) = \sum_{i_3=1}^{3} (-1)^{[i_1,i_2,i_3]} a_{1,i_1} a_{1,i_2} a_{3,i_3} + (-1)^{[i_2,i_1,i_3]} a_{1,i_2} a_{1,i_1} a_{3,i_3}.$$

От една страна, $(-1)^{[i_2,i_1,i_3]} = -(-1)^{[i_1,i_2,i_3]}$, защото прилагането на транспозиция променя четността на пермутация съгласно Лема 7.10. От друга страна, $a_{1,i_2} a_{1,i_1} a_{3,i_3} = a_{1,i_1} a_{1,i_2} a_{3,i_3}$ поради комутативността на умножението в F. Следователно

$$(-1)^{[i_1,i_2,i_3]} a_{1,i_1} a_{1,i_2} a_{3,i_3} + (-1)^{[i_2,i_1,i_3]} a_{1,i_2} a_{1,i_1} a_{3,i_3} = 0$$

за всяко фиксирано $1 \leq i_3 \leq 3$ и $f(a_1, a_1, a_3) = 0$.
В общия случай, ако $1 \leq p < q \leq n$ и $a_q = a_p$, то

$$\begin{aligned} f(a_1, \dots, a_p, \dots, a_p, \dots, a_n) &= \\ = \sum_{i_1,\dots,i_n} (-1)^{[i_1,\dots,i_p,\dots,i_q,\dots,i_n]} a_{1,i_1} \dots a_{p,i_p} \dots a_{p,i_q} \dots a_{n,i_n} &= \\ = \sum_{i_1,\dots,i_p,\dots,i_q,\dots,i_n, i_p < i_q} (-1)^{[i_1,\dots,i_p,\dots,i_q,\dots i_n]} \ a_{1i_1} \dots a_{pi_p} \dots a_{pi_q} \dots a_{ni_n} &+ \\ +(-1)^{[i_1,\dots,i_q,\dots,i_p,\dots i_n]} \ a_{1i_1} \dots a_{pi_q} \dots a_{pi_p} \dots a_{ni_n}&. \end{aligned}$$

От една страна,

$$(-1)^{[i_1,\dots,i_q,\dots,i_p,\dots i_n]} = -(-1)^{[i_1,\dots,i_p,\dots,i_q,\dots i_n]},$$

защото прилагането на транспозицията (i_p, i_q) променя четността на пермутация съгласно Лема 7.10. От друга страна,

$$a_{1i_1} \dots a_{pi_q} \dots a_{pi_p} \dots a_{ni_n} = a_{1i_1} \dots a_{pi_p} \dots a_{pi_q} \dots a_{ni_n}$$

поради комутативността на умножението в F. Следователно

$$\begin{aligned} (-1)^{[i_1,\dots,i_p,\dots,i_q,\dots i_n]} \ a_{1i_1} \dots a_{pi_p} \dots a_{pi_q} \dots a_{ni_n} &+ \\ +(-1)^{[i_1,\dots,i_q,\dots,i_p,\dots i_n]} \ a_{1i_1} \dots a_{pi_q} \dots a_{pi_p} \dots a_{ni_n} &= 0 \end{aligned}$$

за произволна пермутация $i_1, \dots, i_p, \dots, i_q, \dots, i_n$ на $1, \dots, n$ с $i_p < i_q$ и функцията $f(a_1, \dots, a_p, \dots, a_p, \dots, a_n) = 0$ се анулира за равни аргументи.
Полилинейната функция f, анулираща се за два равни аргумента е антисиметрична, съгласно Твърдение 7.5, без да е необходимо F да е числово поле.
Вземайки предвид, че координатите на базисните вектори e_p спрямо базиса $e_1, \dots, e_n$ са

$$\delta_{p,j} = \begin{cases} 1 & \text{за } 1 \leq p = j \leq n, \\ 0 & \text{за } 1 \leq p \neq j \leq n, \end{cases}$$

съгласно $e_p = 0.e_1 + \dots + 0.e_{p-1} + 1.e_p + 0.e_{p+1} + \dots + 0.e_n$, пресмятаме, че

$$f(e_1, \dots, e_n) = \sum_{i_1,\dots,i_n} (-1)^{[i_1,\dots,i_n]} \delta_{1,i_1} \dots \delta_{n,i_n} = (-1)^{[1,\dots,n]} \delta_{1,1} \dots \delta_{n,n} = 1$$

и установяваме съществуването на f с необходимите свойства.

□

Определение 8.2. *Ако $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n} \in M_{n\times n}(F)$ е квадратна матрица n реда и n стълба, то детерминантата на A е*

$$\det(A) = \sum_{i_1,\dots,i_n} (-1)^{[i_1,\dots,i_n]} a_{1,i_1} a_{2,i_2} \dots a_{n,i_n},$$

където сумирането е по всички пермутации $i_1,\dots,i_n$ на $1,\dots,n$ и $[i_1,\dots,i_n]$ е броят на инверсиите в $i_1,\dots,i_n$.

Съгласно Твърдение 8.1, детерминантата е полилинейна анти-симетрична функция на вектор-редовете

$$a_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n}) \in M_{1\times n}(F), \quad 1 \leq i \leq n$$

на квадратна матрица

$$A = \left(\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{array} \right) \in M_{n\times n}(F)$$

със стойност 1 за

$$a_i = e_i = (\underbrace{0,\dots,0}_{i-1}, 1, \underbrace{0,\dots,0}_{n-i}), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Матрицата

$$\left(\begin{array}{c} e_1 \\ \dots \\ e_i \\ \dots \\ e_n \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right) = E_n \in M_{n\times n}(F)$$

с вектор-редове $e_1,\dots,e_n$ е единичната матрица E_n от ред n и

$$\det(E_n) = \det \left(\begin{array}{c} e_1 \\ \dots \\ e_i \\ \dots \\ e_n \end{array} \right) = 1.$$

Ако полето F е числово, то детерминантата е единствената полилинейна анти-симетрична функциа на редовете на $A \in M_{n\times n}(F)$ със стойност 1 в E_n.
Ако полето F не е числово, то освен детерминантата може да има и други полилинейни антисиметрични функции на редовете на $A \in M_{n\times n}(F)$ със стойност 1 в единичната матрица E_n. Например, полилинейната анти-симетрична функция

$$f_0 : \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_2^2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2,$$
$$f_0((a_{11}, a_{12}), (a_{21}, a_{22}) = a_{11}a_{21} + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

от Пример 7.6 има стойност

$$f_0(e_1, e_2) = f((\overline{1}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{1})) = \overline{1}.\overline{0} + \overline{1}.\overline{1} - \overline{0}.\overline{0} = \overline{1}$$

в базиса $e_1 = (\overline{1}, \overline{0})$, $e_2 = (\overline{0}, \overline{1})$, но е различна от детерминантата

$$\det((a_{11}, a_{12}), (a_{21}, a_{22})) = \sum_{i_1,i_2} (-1)^{[i_1,i_2]} a_{1,i_1} a_{2,i_2} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

на

$$A = \left(\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right) \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_2),$$

защото

$$\overline{1} = \overline{1}.\overline{1} + \overline{1}.\overline{0} - \overline{0}.\overline{1} = f_0((\overline{1},\overline{0}),(\overline{1},\overline{0})) \neq \det((\overline{1},\overline{0}),(\overline{1},\overline{0})) = \overline{1}.\overline{0} - \overline{0}.\overline{1} = \overline{0}.$$

За $n = 2$ Определение 8.2 гласи,че

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{i_1,i_2} (-1)^{[i_1,i_2]} a_{1i_1} a_{2i_2} =$$

$$= (-1)^{[1,2]} a_{11}a_{22} + (-1)^{[2,1]} a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

За детерминанта от трети ред имаме

$$\begin{aligned} \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \sum_{i_1,i_2,i_3} (-1)^{[i_1,i_2,i_3]} a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3} = \\ = (-1)^{[1,2,3]} a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{[2,3,1]} a_{12}a_{23}a_{31} &+ (-1)^{[3,1,2]} a_{13}a_{21}a_{32} + \\ +(-1)^{[1,3,2]} a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^{[2,1,3]} a_{12}a_{21}a_{33} &+ (-1)^{[3,2,1]} a_{13}a_{22}a_{31} = \\ = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} &- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned} \tag{8.2}$$

по Определение 8.2. Получената формула за детерминанта от трети ред може да се запомни лесно с правилото на Сарус. За целта преписваме първите два стълба извън детерминантата,

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right.$$

и забелязваме, че тройките, чиито произведенията са с положителен знак в Δ_3 са разположени върху главния диагонал и двете прави, успоредни на него и отстоящи на стъпка вдясно от него. Тройките, чиито произведенията са с отрицателен знак в Δ_3 са взети от вторичния диагонал и двете прави, успоредни на него и отстоящи на стъпка вдясно от него.

Задача 8.3. *Да се пресметнат триъгълните детерминанти*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix} \quad \text{и}$$

$$\Delta'_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Решение:

Твърдим, че детерминанта Δ_n на триъгълна относно главния диагонал матрица е равна на произведението на елементите върху главния диагонал. По-точно, събираемите на Δ_n са от вида $(-1)^{[i_1,\dots,i_n]} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{n-1 i_{n-1}} a_{n i_n}$ за някаква пермутация $i_1, \dots, i_n$ на $1, \dots, n$ и броя $[i_1, \dots, i_n]$ на инверсиите в $i_1, \dots, i_n$. Множителят $a_{1i_1} = 0$ се анулира за всички $i_1 > 1$, така че е достатъчно да разглеждаме само онези събираеми на Δ_n, които отговарят на пермутации $i_1, \dots, i_n$ с $i_1 = 1$. Ако $i_2 > 2$, то $a_{2i_2} = 0$. Понеже $i_2 \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1\} = \{2, 3, \dots, n\}$, достатъчно е да разглеждаме само онези събираеми на Δ_n, в които $i_2 = 2$. Продължавайки по същия начин, ако евентуално ненулевите събираеми

$(-1)^{[i_1,\dots,i_n]}a_{1i_1}a_{2i_2}\dots a_{n-1i_{n-1}}a_{ni_n}$ на Δ_n имат $i_1=1,i_2=2,\dots,i_{n-1}=n-1$, то $i_n\in\{1,\dots,n\}\setminus\{i_1,\dots,i_{n-1}\}=\{n\}$ и единственото, евентуално ненулево събираемо на Δ_n е

$$\Delta_n=(-1)^{[1,\dots,n]}a_{11}a_{22}\dots a_{n-1,n-1}a_{nn}=a_{11}a_{22}\dots a_{n-1,n-1}a_{nn}.$$

За да пресметнем детерминантата Δ'_n на триъгълна относно вторичния диагонал матрица, забелязваме, че събираемите

$$(-1)^{[i_1,\dots,i_n]}a_{1i_1}a_{2,i_2}\dots a_{n-1,i_{n-1}}a_{ni_n}$$

на Δ'_n се анулират за $i_1\in\{1,\dots,n-1\}$. Затова е достатъчно да разглеждаме само събираемите с $i_1=n$. Тогава $i_2\in\{1,\dots,n\}\setminus\{i_1\}=\{1,\dots,n-1\}$ и $a_{2i_2}=0$ за $i_2\in\{1,\dots,n-2\}$ показва, че е достатъчно да разглеждаме само събираемите с $i_2=n-1$. Продължавайки по същия начин, ако евентуално ненулевите събираеми на разглежданата детерминанта са тези с $i_1=n,i_2=n-1,\dots,i_{n-1}=2$, то $i_n\in\{1,\dots,n\}\setminus\{i_1,\dots,i_n\}=\{1\}$ и

$$\Delta'_n=(-1)^{[n,n-1,\dots,2,1]}a_{1n}a_{2,n-1}\dots,a_{n-1,2}a_{n1}.$$

В пермутацията $n,n-1,\dots,2,1$ числото n образува $n-1$ инверсии със стоящите след него числа $n-1,n-2,\dots,2,1$, които са по-малки от n. После $n-1$ образува $n-2$ инверсии със стоящите след него числа $n-2,\dots,2,1$, които са по-малки от $n-1$. Продължавайки по същия начин получаваме, че

$$[n,n-1,n-2,\dots,2,1]=(n-1)+(n-2)+\dots+2+1.$$

Твърдим, че сумата на първите $n-1$ естествени числа е

$$S_{n-1}:=1+2+\dots+(n-2)+(n-1)=\frac{(n-1)n}{2}.$$

Ще докажем това с принципа на математическата индукция. Изобщо, твърдение $T(n)$, зависещо от естествен параметър n е вярно за всяко естествено $n\geq n_o$, $n_o\in\mathbb{N}$, ако $T(n_o)$ е в сила и от верността на $T(n-1)$ за някое $n-1\geq n_o$ следва верността на $T(n)$. В случая, за $n_o=2$ имаме

$$S_{n_o-1}=S_1=1=\frac{1.2}{2}.$$

Ако допуснем, че

$$S_{n-2}=\frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

за някое $n-1\geq 2$, то

$$S_{n-1}=S_{n-2}+(n-1)=\frac{(n-2)(n-1)}{2}+(n-1)=\frac{(n-1)}{2}\left[(n-2)+2\right]=\frac{(n-1)n}{2}.$$

По принципа на математическата индукция, оттук следва

$$S_{n-1}=\frac{(n-1)n}{2}$$

за всяко естествено число $n\geq 2$. В резултат, детерминантата

$$\Delta'_n=(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\dots,a_{n-1,2}a_{n1}.$$