Част от теорията по Алгебра 1

за специалност Компютърни науки, II поток, 2018-2019 уч.г.

1. Комплексни числа. Полета - числови полета и примери за нечислови полета.

Задача 1. *Да се даде определение за комплексно число z, реална и имагинерна части на z, комплексно спрегнато $\overline{z}$ на z и модул $|z|$ на z.*

Доказателство. Ако i е решение на уравнението $x^2+1=0$, то полиномите $a+bi$ на i от степен ≤ 1 с коефициенти $a,b\in\mathbb{R}$ се наричат комплексни числа. Означаваме с

$$\mathbb{C} = \{a+bi\,|\,a,b\in\mathbb{R}\}$$

множеството на комплексните числа.

Реалната част на $a+bi$ е $\mathrm{Re}(a+bi)=a$, а имагинерната част е $\mathrm{Im}(a+bi)=b$.

Комплексно спрегнатото на $z=a+bi$ е $\overline{z}=a-bi$. Ако $\mathbb{C}$ се отъждестви с равнината $\mathbb{R}^2$, то z и $\overline{z}$ са симетрични относно реалната ос $Ox^{\rightarrow}$.

Произволно комплексно число има $z.\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2\geq 0$ с $z.\overline{z}=0$ тогава и само тогава, когато $a=b=0$ и $z=0$. Неотрицателният реален корен квадратен от $z.\overline{z}$ се нарича модул на z и се бележи с $|z|$, $|z|=\sqrt{z.\overline{z}}^{\geq 0}=\sqrt{a^2+b^2}^{\geq 0}$.

□

Задача 2. *Да се докаже, че:*

(i) комплексни числа a_1+ib_1 и a_2+ib_2 са равни тогава и само тогава, когато реалните им части $a_1=a_2$ са равни и имагинерните им части $b_1=b_2$ са равни;

(ii) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ и $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$ за произволни комплексни числа $z_1,z_2\in\mathbb{C}$;

$$\text{(iii)}\quad \overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2} \quad \text{и} \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

за комплексни числа $z_1,z_2\in\mathbb{C}$, $z_2\neq 0$.

Доказателство. (i) Ако допуснем, че $a_1+ib_1=a_2+ib_2$ и $b_1\neq b_2$, то

$$i=\frac{a_2-a_1}{b_1-b_2}\in\mathbb{R},$$

което е противоречие. Затова от $a_1+ib_1=a_2+ib_2$ следва $b_1=b_2$ и $a_1=a_2$.

(ii) Ако $z_j=a_j+ib_j$ за $1\leq j\leq 2$ и $a_j,b_j\in\mathbb{R}$, то

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)}=(a_1+a_2)-i(b_1+b_2)=$$
$$=(a_1-ib_1)+(a_2-ib_2)=\overline{z_1}+\overline{z_2}.$$

Прилагайки съгласуваността на събирането на комплексни числа с комплексното спрягане получаваме, че

$$\overline{z_1}=\overline{(z_1-z_2)+z_2}=\overline{z_1-z_2}+\overline{z_2},$$

откъдето

$$\overline{z_1} - \overline{z_2} = \overline{z_1 - z_2}.$$

(iii) Ако $z_j = a_j + ib_j$, за $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq 2$, то

$$\begin{aligned} \overline{z_1 z_2} &= \overline{a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)} = \\ = a_1 a_2 - b_1 b_2 - i(a_1 b_2 + a_2 b_1) &= (a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2) = \overline{z_1}\ \ \overline{z_2}. \end{aligned}$$

Прилагаме доказаното тъждество към произведението на $\frac{z_1}{z_2}$ с z_2 и получаваме

$$\overline{z_1} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right) z_2} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}\overline{z_2},$$

откъдето

$$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}.$$

□

Задача 3. *(i) Ако* $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *и* $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *са ненулеви комплексни числа в тригонометричен вид, да се пресметне* $z_1 z_2$ *и* $\frac{z_1}{z_2}$.

(ii) Да се докаже, че ненулеви комплексни числа $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ *и* $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ *в тригонометричен вид са равни тогава и само тогава, когато модулите им* $r_1 = r_2$ *са равни и аргументите им* $\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ *се различават с цяло кратно на* 2π.

Доказателство. (i) От

$$\begin{aligned} (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) &= \\ = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2) &= \\ = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i(\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) & \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2} &= \\ = \frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2}\ \frac{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2} &= \\ = \frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2}\ \frac{\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)}{\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)} &= \\ = \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\cos 0 + i\sin 0} = \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2) & \end{aligned}$$

следва, че

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \quad \text{и} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

(ii) Ако $r_1 = r_2$ и $\varphi_2 = \varphi_1 + 2k\pi$, то

$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1[\cos(\varphi_1 + 2k\pi) + i\sin(\varphi_1 + 2k\pi)] = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = z_1$$

поради 2π-периодичността на $\cos x$ и $\sin x$.

Да допуснем, че комплексните числа $z_1 = z_2$ са равни. Тогава реалните им части $r_1 \cos \varphi_1 = r_2 \cos \varphi_2$ и имагинерните им части $r_1 \sin \varphi_1 = r_2 \sin \varphi_2$ са равни. Оттук,

$$r_1^2 = r_1^2(\cos^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1) = (r_1 \cos \varphi_1)^2 + (r_1 \sin \varphi_1)^2 =$$
$$= (r_2 \cos \varphi_2)^2 + (r_2 \sin \varphi_2)^2 = r_2^2(\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2) = r_2^2.$$

Понеже $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^{>0}$ са положителни реални числа, от $0 = r_1^2 - r_2^2 = (r_1 + r_2)(r_1 - r_2)$ следва $r_1 = r_2$. Сега съвпадението на точките $\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1$ и $\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2$ от единичната окръжност с център $0 \in \mathbb{C}$ изисква $\varphi_2 - \varphi_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$.

□

Задача 4. (Формула на Моавър:) *Ако $z = r(\cos \varphi + isin\varphi) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ е ненулево комплексно число в тригонометричен вид, то множеството $\sqrt[n]{z}$ на n-тите корени на z съвпада с множеството*

$$M = \left\{ \sqrt[n]{r}^{>0} \left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \right] \Big| 0 \leq k \leq n-1 \right\}$$

и се състои от n ненулеви комплексни числа. (С $\sqrt[n]{r}^{>0}$ означаваме положителния n-ти корен от $r \in \mathbb{R}^{>0}$.)

Упътване: *Ако*

$$M' := \left\{ \sqrt[n]{r}^{>0} \left[\cos\left(\frac{\varphi + 2m\pi}{n} \right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2m\pi}{n} \right) \right] \Big| m \in \mathbb{Z} \right\},$$

то проверете, че $M' \subseteq \sqrt[n]{z} \subseteq M' \subseteq M$, откъдето $M = M' = \sqrt[n]{z}$. След това докажете, че множеството M се състои от n различни комплексни числа.

Доказателство. За всяко

$$y = \sqrt[n]{r}^{>0} \left[\cos\left(\frac{\varphi + 2m\pi}{n} \right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2m\pi}{n} \right) \right]$$

е в сила

$$y^n = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = z,$$

така че $M' \subset \sqrt[n]{z}$.

Ако $x = s(\cos \psi + i \sin \psi) \in \sqrt[n]{z}$, то $z = x^n = s^n[\cos(n\psi) + i \sin(n\psi)]$, откъдето $s^n = r$ и $n\psi - \varphi = 2m\pi$ за някое $m \in \mathbb{N}$ и $x \in M'$. Това доказва $\sqrt[n]{z} \subseteq M'$ и $\sqrt[n]{z} = M'$.

Включването $M \subseteq M'$ е ясно. За обратното включване $M' \subseteq M$ делим произволно $m \in \mathbb{Z}$ на n с частно $q \in \mathbb{Z}$ и остатък $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq n-1$, така че $m = nq + k$, Тогава

$$\frac{\varphi + 2m\pi}{n} = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + 2q\pi,$$

откъдето

$$\sqrt[n]{r}^{>0} \left[\cos\left(\frac{\varphi + 2m\pi}{n} \right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2m\pi}{n} \right) \right] =$$
$$= \sqrt[n]{r}^{>0} \left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \right] \in M,$$

съгласно 2π-периодичността на $\cos x$ и $\sin x$. Това доказва $M' \subseteq M$ и $\sqrt[n]{z} = M' = M$.

Ако допуснем, че

$$\sqrt[n]{r}^{>0} \left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \right] = \sqrt[n]{r}^{>0} \left[\cos\left(\frac{\varphi + 2l\pi}{n} \right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2l\pi}{n} \right) \right]$$

за $0 \le k < l \le n-1$, то

$$\left(\frac{\varphi+2l\pi}{n}\right) - \left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) = \frac{2(l-k)\pi}{n} = 2s\pi$$

за някое $s \in \mathbb{N}$. Следователно n дели $0 < l-k \le n-1 < n$, което е противоречие, доказващо че $\sqrt[n]{z}$ се състои от n различни комплексни числа.

$\square$

Задача 5. *(а) Да се даде определение за числово поле.*

(б) Да се докаже, че:

(б-1) множеството $\mathbb{N}$ на естествените числа не е числово поле;

(б-2) множеството $\mathbb{Z}$ на целите числа не е числово поле;

(б-3) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\}$ е числово поле.

Доказателство. (а) Подмножество $F \subseteq \mathbb{C}$ с поне два елемента е числово поле, ако за произволни $a, b \in F$, $b \neq 0$ е в сила

$$a+b, a-b, ab, \frac{a}{b} \in F.$$

(б-1) Множеството $\mathbb{N}$ на естествените числа е затворено относно събиране и умножение, но не и спрямо изваждане и деление. Например, $1, 2 \in \mathbb{N}$, но $1 - 2 = -1 \notin \mathbb{N}$ и $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$.

(б-2) Множеството $\mathbb{Z}$ на целите числа е затворено относно събиране, изваждане и умножение, но не и спрямо деление. Например, за $1, -2 \in \mathbb{Z}$ е в сила $\frac{1}{(-2)} = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

(б-3) Множеството $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ съдържа поне две различни комплексни числа. За произволни $a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ е изпълнено

$$(a+b\sqrt{2}) \pm (c+d\sqrt{2}) = (a \pm c) + (b \pm d)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}),$$

$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2}) = (ac+2bd) + (ad+bc)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}).$$

Ако $c + d\sqrt{2} \neq 0$, то

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} = \frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}.\frac{c-d\sqrt{2}}{c-d\sqrt{2}} = \frac{ac-2bd}{c^2-2d^2} + \frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}),$$

защото $c^2 \neq 2d^2$ за $c, d \in \mathbb{Q}$. По-точно, ако разложим числителите и знаменателите на c и d в прости множители и извършим съкращение, то целият степенен показател на 2 в дясната страна на $c^2 = 2d^2$ е нечетен, докато степенният показател на 2 в c^2 е четен. Това доказва $c^2 \neq 2d^2$ за $c, d \in \mathbb{Q}$. С това проверихме, че $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ е затворено относно действията събиране, изваждане, умножение и деление с ненулев елемент, така че $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ е числово поле.

$\square$

Задача 6. *Да се докаже, че:*

(i) множеството $\mathbb{Z}_p$ на остатъците при деление с просто число p е нечислово поле относно операциите събиране $\overline{a} + \overline{b} := \overline{a+b}$ и умножение $\overline{a}\overline{b} := \overline{ab}$;

(ii) множеството $\mathbb{Z}_4$ на остатъците при деление с 4 не е поле.

Доказателство. (i) От асоциативността $(a+b)+c = a+(b+c)$ на събирането на цели числа $a, b, c \in \mathbb{Z}$ следва асоциативността на събирането на остатъци

$$(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c} = \overline{a+b}+\overline{c} = \overline{(a+b)+c} = \overline{a+(b+c)} = \overline{a}+\overline{b+c} = \overline{a}+(\overline{b}+\overline{c}).$$

Условието $a+b=b+a$ за $a,b\in\mathbb{Z}$ е достатъчно за

$$\overline{a}+\overline{b}=\overline{a+b}=\overline{b+a}=\overline{b}+\overline{a}.$$

Освен това,

$$\overline{a}+\overline{0}=\overline{a+0}=\overline{a} \quad \text{и} \quad \overline{a}+\overline{(-a)}=\overline{a+(-a)}=\overline{0}.$$

Аналогично, умножението на остатъци при деление с p има свойствата

$$(\overline{a}\overline{b})\overline{c}=\overline{(ab)}\overline{c}=\overline{(ab)c}=\overline{a(bc)}=\overline{a}\overline{(bc)}=\overline{a}(\overline{b}\overline{c}),$$

$$\overline{a}\overline{b}=\overline{ab}=\overline{ba}=\overline{b}\overline{a},$$

$$\overline{a}\overline{1}=\overline{a.1}=\overline{a}.$$

В сила са дистрибутивни закони за събиране и умножение

$$(\overline{a}+\overline{b})\overline{c}=\overline{(a+b)}\overline{c}=\overline{(a+b)c}=\overline{ac+bc}=\overline{ac}+\overline{bc}=\overline{a}\,\overline{c}+\overline{b}\,\overline{c} \quad \text{и}$$

$$\overline{a}(\overline{b}+\overline{c})=(\overline{b}+\overline{c})\overline{a}=\overline{b}\overline{a}+\overline{c}\overline{a}.$$

За обратимостта на ненулев остатък $\overline{a}\in\mathbb{Z}_p\setminus\{\overline{0}\}$ относно умножението разглеждаме умножението с $\overline{a}$,

$$\mu_{\overline{a}}:\mathbb{Z}_p\longrightarrow\mathbb{Z}_p, \quad \mu_{\overline{a}}(\overline{b})=\overline{a}\overline{b} \quad \text{за всяко } \overline{b}\in\mathbb{Z}_p.$$

Ако $\overline{a}\overline{b}=\mu_{\overline{a}}(\overline{b})=\mu_{\overline{a}}(\overline{c})=\overline{a}\,\overline{c}$, то

$$\overline{0}=\overline{a}\overline{b}-\overline{a}\,\overline{c}=\overline{ab}-\overline{ac}=\overline{ab-ac}=\overline{a(b-c)},$$

откъдето p дели $a(b-c)$. Цялото число a е взаимно просто с p, защото p не дели a. Следователно p дели $b-c$ и $\overline{b}=\overline{c}$. Това доказва инективността на $\mu_{\overline{a}}:\mathbb{Z}_p\to\mathbb{Z}_p$. В резултат, $\mu_{\overline{a}}(\mathbb{Z}_p)$ се състои от p различни остатъка и $\mu_{\overline{a}}(\mathbb{Z}_p)=\mathbb{Z}_p$. В частност, съществува $\overline{b}\in\mathbb{Z}_p$ с $\overline{a}\overline{b}=\mu_{\overline{a}}(\overline{b})=\overline{1}$ и всеки ненулев остатък $\overline{a}\in\mathbb{Z}_p\setminus\{\overline{0}\}$ е обратим относно умножението. Това доказва, че $\mathbb{Z}_p$ е поле.

Ако допуснем, че $\mathbb{Z}_p$ е числово поле, то полето $\mathbb{Q}$ на рационалните числа се съдържа в $\mathbb{Z}_p$. Това е противоречие, защото $\mathbb{Q}$ е безкрайно поле, а $\mathbb{Z}_p$ има точно p елемента. Следователно полето $\mathbb{Z}_p$ на остатъците при деление на просто число p не е числово.

(ii) Множеството $\mathbb{Z}_4$ на остатъците при деление с 4 не е поле, защото съществува ненулев остатък $\overline{2}\in\mathbb{Z}_4$, който не е обратим относно умножението. Ако допуснем, че съществува $\overline{a}\in\mathbb{Z}_4$ с $\overline{2}\overline{a}=\overline{1}$, то почленното умножение с $\overline{2}$ дава

$$\overline{2}=\overline{2}.\overline{1}=\overline{2}.(\overline{2}.\overline{a})=(\overline{2}.\overline{2}).\overline{a}=\overline{0}.\overline{a}=\overline{0}.$$

Това е противоречие, доказващо необратимостта на $\overline{2}\in\mathbb{Z}_4$ относно умножението.

$\square$

2. Определение за линейно пространство, основни свойства и примери. Подпространства и линейна обвивка.

Задача 7. *Да се дадат определение и пример за линейно пространство.*

Доказателство. Непразно множество V е линейно пространство над поле F, ако в него са определени събиране на вектори

$$V \times V \longrightarrow V, \quad (u, v) \mapsto u + v$$

и умножение на вектор със скалар

$$F \times V \longrightarrow V, \quad (\alpha, u) \mapsto \alpha u,$$

изпълняващи следните свойства:

(i) асоциативност на събирането $(u + v) + w = u + (v + w)$ за всички $u, v, w \in V$;

(ii) комутативност на събирането $u + v = v + u$ за всички $u, v \in V$;

(iii) съществуване на нулев вектор $\overrightarrow{\mathcal{O}} \in V$, така че $\overrightarrow{\mathcal{O}} + u = u$ за всяко $u \in V$;

(iv) съществуване на противоположен вектор $-u \in V$ за всеки вектор $u \in V$, така че $u + (-u) = \overrightarrow{\mathcal{O}}$;

(v) дистрибутивен закон над скаларен множител $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ за произволни $\alpha, \beta \in F$, $u \in V$;

(vi) дистрибутивен закон над векторен множител $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ за произволни $\alpha \in F$, $u, v \in V$;

(vii) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$ за произволни $\alpha, \beta \in F$, $u \in V$;

(viii) $1.u = u$ за произволен вектор $u \in V$ и единицата 1 на F.

Например, множеството F^n на наредените n-торки с елементи от поле F е линейно пространство над F относно покомпонентно определените операции събиране на вектори

$$x + y = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \quad \text{за} \quad x, y \in F^n$$

и умножение на вектор със скалар

$$\alpha x = \alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) \quad \text{за} \quad \alpha \in F, \quad x \in F^n.$$

Посочените операции вземат стойности в F^n.

Асоциативността на събирането

$$\begin{aligned}
&[(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)] + (z_1, \dots, z_n) = ((x_1 + y_1) + z_1, \dots, (x_n + y_n) + z_n) = \\
&= (x_1 + (y_1 + z_1), \dots, x_n + (y_n + z_n)) = (x_1, \dots, x_n) + [(y_1, \dots, y_n) + (z_1, \dots, z_n)]
\end{aligned}$$

следва от асоциативността на събирането в F и покомпонентността на събирането на вектори.

Комутативността на събирането

$$\begin{aligned}
&(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = \\
&= (y_1 + x_1, \dots, y_n + x_n) = (y_1, \dots, y_n) + (x_1, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

в F^n се дължи на комутативността на събирането в F и покомпонентността на събирането на вектори.

Векторът $(0, \dots, 0) \in F^n$, чиито всички компоненти са равни на $0 \in F$ е нулев, защото

$$(0, \dots, 0) + (x_1, \dots, x_n) = (0 + x_1, \dots, 0 + x_n) = (x_1, \dots, x_n) \quad \text{за} \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in F^n.$$

Всеки вектор $(x_1, \ldots, x_n) \in F^n$ има противоположен $(-x_1, \ldots, -x_n) \in F^n$, така че

$$(x_1, \ldots, x_n) + (-x_1, \ldots, -x_n) = (x_1 + (-x_1), \ldots, x_n + (-x_n)) = (0, \ldots, 0).$$

За произволни $\alpha, \beta \in F$ и $x = (x_1, \ldots, x_n) \in F^n$ е в сила дистрибутивен закон над скаларен множител

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)(x_1, \ldots, x_n) &= ((\alpha + \beta)x_1, \ldots, (\alpha + \beta)x_n) = (\alpha x_1 + \beta x_1, \ldots, \alpha x_n + \beta x_n) = \\ &= (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) + (\beta x_1, \ldots, \beta x_n) = \alpha(x_1, \ldots, x_n) + \beta(x_1, \ldots, x_n),\end{aligned}$$

съгласно дистрибутивните закони за събиране и умножение в F и покомпонентността на събирането на вектори и умножението на вектор с елемент от F.

Аналогично, дистрибутивният закон над векторен множител

$$\begin{aligned}\alpha((x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n)) = \alpha(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) = \\ = (\alpha(x_1 + y_1), \ldots, \alpha(x_n + y_n)) = (\alpha x_1 + \alpha y_1, \ldots, \alpha x_n + \alpha y_n) = \\ = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) + (\alpha y_1, \ldots, \alpha y_n) = \alpha(x_1, \ldots, x_n) + \alpha(y_1, \ldots, y_n)\end{aligned}$$

следва от дистрибутивните закони за събиране и умножение в F и покомпонентността на събирането на вектори и умножението на вектор с елемент на F.

За произволни $\alpha, \beta \in F$ и $x = (x_1, \ldots, x_n) \in F^n$ е в сила

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)(x_1, \ldots, x_n) = ((\alpha\beta)x_1, \ldots, (\alpha\beta)x_n) = (\alpha(\beta x_1), \ldots, \alpha(\beta x_n)) = \\ = \alpha(\beta x_1, \ldots, \beta x_n) = \alpha(\beta(x_1, \ldots, x_n))\end{aligned}$$

съгласно асоциативността на умножението в F и покомпонентността на умножението на вектор с елемент на F.

Накрая,

$$1(x_1, \ldots, x_n) = (1.x_1, \ldots, 1.x_n) = (x_1, \ldots, x_n)$$

се получава от определението за единица 1 на F.

$\square$

Задача 8. *Да се дадат определение и пример за подпространство W на линейно пространство V.*

Доказателство. Непразно подмножество W на линейно пространство V е подпространство, ако заедно с произволни свои вектори $w_1, \ldots, w_n \in W$ съдържа всички техни линейни комбинации $\alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_n w_n \in W$ с коефициенти $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$. Доказва се, че $\emptyset \neq W \subseteq V$ е подпространство тогава и само тогава, когато за произволни $w_1, w_2 \in W$ и $\alpha \in F$ е в сила $w_1 + w_2 \in W$ и $\alpha w_1 \in W$.

За произволни естествени числа $k < n$ подмножеството

$$F^{k,n} := \{(x = (x_1, \ldots, x_n) \in F^n \,|\, x_{k+1} = \ldots = x_n = 0\}$$

на F^n е линейно подпространство. Наистина, ако $x, y \in F^{k,n}$ и $\alpha \in F$, то

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_k + y_k, x_{k+1} + y_{k+1}, \ldots, x_n + y_n) \in F^{k,n} \quad \text{и}$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_k, \alpha x_{k+1}, \ldots, \alpha x_n) \in F^{k,n},$$

защото $x_i + y_i = 0 + 0 = 0$ и $\alpha x_i = \alpha.0 = 0$ за всички $k + 1 \leq i \leq n$.

$\square$

Задача 9. *Да се дадат определение и пример за линейна обвивка $l(S)$ на подмножество S на линейно пространство V.*

Доказателство. Линейната обвивка $l(S)$ на непразно подмножество S на линейно пространство V е множеството на линейните комбинации $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$ на вектори $u_1, \ldots, u_n \in S$ с коефициенти $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$.

Линейната обвивка $l(u)$ на вектор $u \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$ е правата $l(u)$ през началото, породена от u.

□

Задача 10. *Нека V е линейно пространство над поле F. Да се докаже, че:*

(i) нулевият вектор $\overrightarrow{\mathcal{O}}$ е единствен;

(ii) всеки вектор $u \in V$ има единствен противоположен $-u \in V$;

(iii) $0u = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ за $0 \in F$, всеки вектор $u \in V$ и $\overrightarrow{\mathcal{O}} \in V$;

(iv) $\alpha\overrightarrow{\mathcal{O}} = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ за всяко $\alpha \in F$ и $\overrightarrow{\mathcal{O}} \in V$.

Доказателство. (i) Ако $\overrightarrow{\mathcal{O}}_1 \in V$ и $\overrightarrow{\mathcal{O}}_2 \in V$ са нулеви вектори, то $\overrightarrow{\mathcal{O}}_1 + \overrightarrow{\mathcal{O}}_2 = \overrightarrow{\mathcal{O}}_2$, защото $\overrightarrow{\mathcal{O}}_1 \in V$ е нулев вектор и $\overrightarrow{\mathcal{O}}_1 = \overrightarrow{\mathcal{O}}_1 + \overrightarrow{\mathcal{O}}_2$, защото $\overrightarrow{\mathcal{O}}_2 \in V$ е нулев вектор. Следователно $\overrightarrow{\mathcal{O}}_1 = \overrightarrow{\mathcal{O}}_2$.

(ii) Ако $u \in V$ има противоположни вектори $u_1, u_2 \in V$, то

$$u_2 = \overrightarrow{\mathcal{O}} + u_2 = (u_1 + u) + u_2 = u_1 + (u + u_2) = u_1 + \overrightarrow{\mathcal{O}} = u_1.$$

Горните равенства използват асоциативността на събирането и определенията за противоположен и нулев вектор.

(iii) Забелязваме, че

$$0.u + u = 0.u + 1.u = (0+1)u = 1.u = u,$$

съгласно дистрибутивнния закон над скаларен множител и $1.u = u$. Прибавянето на $-u \in V$ към най-лявата и най-дясната страна на горното равенство дава

$$0.u = 0.u + \overrightarrow{\mathcal{O}} = 0.u + [u + (-u)] = (0.u + u) + (-u) = u + (-u) = \overrightarrow{\mathcal{O}}$$

чрез прилагане на асоциативността на събирането на вектори и определенията за противоположен и нулев вектор.

(iv) Една от аксиомите за линейно пространство гласи, че $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$ за произволни $\alpha, \beta \in F$ и $u \in V$. Полагаме $\beta = 0 \in F$ и прилагаме (iii), за да получим

$$\overrightarrow{\mathcal{O}} = 0.u = (\alpha.0)u = \alpha(0.u) = \alpha\overrightarrow{\mathcal{O}}.$$

□

Задача 11. *Нека V е линейно пространство над поле F. Да се докаже, че:*

(i) $(-1)u = -u$ за $1 \in F$ и произволен вектор $u \in V$;

(ii) за произволни вектори $u, v \in V$ уравнението $x + u = v$ има единствено решение $x_o = v + (-u)$, което означаваме с $x_o = v - u$;

(iii) ако $\alpha u = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ за $\alpha \in F$ и $u \in V$, то $\alpha = 0 \in F$ или $u = \overrightarrow{\mathcal{O}} \in V$;

(iv) $\alpha(\beta u) = \beta(\alpha u)$ за произволни $\alpha, \beta \in F$, $u \in V$.

Доказателство. (i) Пресмятаме, че

$$u + (-1)u = 1.u + (-1).u = [1 + (-1)].u = 0.u = \overrightarrow{\mathcal{O}},$$

съгласно $1.u = u$, дистрибутивния закон над скаларен множител и $0.u = \overrightarrow{\mathcal{O}}$. Следователно $(-1)u \in V$ изпълнява дефиниционното равенство $u + (-u) = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ на противоположния вектор $-u \in V$ и $(-1)u = -u$ поради единствеността на противоположния вектор на u.

(ii) Векторът $x_o = v + (-u) \in V$ е решение на уравнението $x + u = v$, защото

$$[v + (-u)] + u = v + [(-u) + u] = v + \overrightarrow{\mathcal{O}} = v,$$

съгласно асоциативността на събирането на вектори и определенията за противоположен и нулев вектор. Ако $x_1 \in V$ е решение на $x + u = v$, то $x_1 + u = v$. Почленното прибавяне на $-u \in V$ към последното равенство дава

$$x_1 = x_1 + \overrightarrow{\mathcal{O}} = x_1 + [u + (-u)] = (x_1 + u) + (-u) = v + (-u)$$

и установява единствеността на решението $x_o = v + (-u) \in V$ чрез прилагане на асоциативността на събирането на вектори и определенията за противоположен и нулев вектор.

(iii) Ако $\alpha u = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ и $\alpha \neq 0 \in F$, то почленното умножение с $\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha} \in F$ дава

$$u = 1.u = (\alpha^{-1}\alpha)u = \alpha^{-1}(\alpha u) = \alpha^{-1}\overrightarrow{\mathcal{O}} = \overrightarrow{\mathcal{O}}.$$

Тук прилагаме $\gamma\overrightarrow{\mathcal{O}} = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ за всяко $\gamma \in F$ и нулевия вектор $\overrightarrow{\mathcal{O}} \in V$, аксиомата $(\beta\gamma)u = \beta(\gamma u)$ за произволни $\beta, \gamma \in F$, $u \in V$ и $1.u = u$.

(iv) От аксиомата $(\gamma\delta)u = \gamma(\delta u)$ за произволни $\gamma, \delta \in F$ и $u \in V$ получаваме

$$\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u = (\beta\alpha)u = \beta(\alpha u),$$

вземайки предвид комутативността на умножението в F.

□

Задача 12. *Да се докаже, че непразно подмножество W на линейно пространство V е подпространство тогава и само тогава, когато за произволни $w_1, w_2 \in W$ и $\alpha \in F$ е в сила $w_1 + w_2 \in W$ и $\alpha w_1 \in W$.*

Доказателство. По определение, W е подпространство на V, ако заедно с произволни свои вектори $w_1, \ldots, w_n \in W$ съдържа всички техни линейни комбинации

$$\alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_n w_n \in W$$

с коефициенти $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$. Векторите $w_1 + w_2 = 1.w_1 + 1.w_2$ и αw_1 са частни случаи на линейни комбинации на $w_1, w_2 \in W$, така че ако W е подпространство на V и $w_1, w_2 \in W$, то $w_1 + w_2 \in W$ и $\alpha w_1 \in W$.

Да допуснем, че непразно подмножество W на линейно пространство V е затворено относно събиране на вектори и умножение на вектор с $\alpha \in F$. С индукция по $n \in \mathbb{N}$ ще проверим, че $\alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_n w_n \in W$ за произволни $w_1, \ldots, w_n \in W$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$. За $n = 1$ имаме $\alpha_1 w_1 \in W$ по предположение. Да допуснем, че

$$w' := \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_{n-1} w_{n-1} \in W$$

за произволни $w_1, \ldots, w_{n-1} \in W$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in F$. По предположение, $\alpha_n w_n \in W$ за произволни $w_n \in W$ и $\alpha_n \in F$. Следователно W съдържа

$$w' + \alpha_n w_n = \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_{n-1} w_{n-1} + \alpha_n w_n$$

и W е подпространство на V.

□

Задача 13. *Нека S е непразно подмножество на линейно пространство V. Да се докаже, че линейната обвивка $l(S)$ на S е подпространство на V и $l(S) = \cap_{W \supseteq S} W$ съвпада със сечението на подпространствата W на V, съдържащи S.*

Доказателство. Линейната обвивка $l(S)$ на S е подпространство на V, защото заедно с произволни свои вектори $u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m$ и $v = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n$ с $u_i, v_j \in S$, $\alpha_i, \beta_j \in F$ съдържа тяхната сума

$$u + v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m + \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n \in l(S) \quad \text{и}$$

$$\gamma u = \gamma(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m) = (\gamma\alpha_1) u_1 + \ldots + (\gamma\alpha_m) u_m \in l(S)$$

за произволно $\gamma \in F$.

Твърдим, че

$$l(S) = \cap_{W \supseteq S} W$$

е сечението на подпространствата W на V, съдържащи S, така че $l(S)$ се съдържа във всяко подпространство на V, съдържащо S и $l(S)$ е минималното подпространство на V, съдържащо S. От определението за подпространство W на V, за произволни $w_1, \ldots, w_n \in S$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$, предположението $S \subseteq W$ води до $\alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_n w_n \in W$. Това доказва включването $l(S) \subseteq \cap_{W \supseteq S} W$. От друга страна, $l(S)$ е подпространство на V, съдържащо S, така че $l(S)$ участва в сечението и $l(S) \supseteq \cap_{W \supseteq S} W$. Следователно

$$l(S) = \cap_{W \supseteq S} W.$$

□

3. Линейна зависимост и независимост. Основна лема на линейната алгебра.

Задача 14. *Да се даде определение за линейно независима система вектори и да се формулира кога система вектори е линейно зависима.*

Доказателство. Крайна система вектори $a_1, \ldots, a_n$ е линейно независима, ако единствената линейна комбинация $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ на $a_1, \ldots, a_n$, представяща нулевия вектор $\overrightarrow{\mathcal{O}} \in V$ е тази с нулеви коефициенти $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0 \in F$.

Безкрайна система вектори е линейно независима, ако всяка нейна крайна подсистема е линейно независима.

Оттук следва, че крайна система вектори $b_1, \ldots, b_m \in V$ е линейно зависима, ако съществуват $\mu_1, \ldots, \mu_m \in F$ с поне едно $\mu_i \neq 0$, така че $\mu_1 b_1 + \ldots + \mu_i b_i + \ldots + \mu_m b_m = \overrightarrow{\mathcal{O}}$.

Безкрайна система вектори е линейно зависима, ако съдържа крайна линейно зависима подсистема.

□

Задача 15. *Да се формулират и докажат свойства на линейната зависимост и независимост на вектори.*

Доказателство. (i) Един вектор $u \in V$ е линейно зависим точно когато $u = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ съвпада с нулевия вектор, защото от $\lambda u = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ с $\lambda \in F \setminus \{0\}$ следва $u = \overrightarrow{\mathcal{O}}$.

(ii) Векторите $b_1, \dots, b_k \in V$, $k \geq 2$ са линейно зависими тогава и само тогава, когато някой от тях

$$b_i = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_{i-1} b_{i-1} + \mu_{i+1} b_{i+1} + \ldots + \mu_k b_k$$

може да се представи като линейна комбинация на останалите. По-точно, ако $b_1, \dots, b_k$ са линейно зависими и $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_i b_i + \ldots + \lambda_k b_k = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ за $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in F$ с поне едно $\lambda_i \neq 0$, то $\lambda_i b_i = -\lambda_1 b_1 - \ldots - \lambda_{i-1} b_{i-1} - \lambda_{i+1} b_{i+1} - \ldots - \lambda_k b_k$, откъдето

$$b_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} b_1 - \ldots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} b_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} b_{i+1} - \ldots - \frac{\lambda_k}{\lambda_i} b_k$$

и b_i е линейна комбинация на $b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_k$.

Обратно, ако $b_i = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_{i-1} b_{i-1} + \mu_{i+1} b_{i+1} + \ldots + \mu_k b_k$ за някакви $\mu_j \in F$, то

$$\mu_1 b_1 + \ldots + \mu_{i-1} b_{i-1} + (-1) b_i + \mu_{i+1} b_{i+1} + \ldots + \mu_k b_k = \overrightarrow{\mathcal{O}}$$

с $-1 \neq 0$, така че $b_1, \dots, b_k$ са линейно зависими.

(iii) Ако $b_1, \ldots b_m$ са линейно зависими, то $b_1, \dots, b_m, b_{m+1}, \dots, b_n$ са линейно зависими за произволни $b_{m+1}, \dots, b_n$. Наистина, ако $\lambda b_1 + \ldots + \lambda_i b_i + \ldots + \lambda_m b_m = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ с поне едно $\lambda_i \neq 0$, то

$$\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_i b_i + \ldots + \lambda_m b_m + 0.b_{m+1} + \ldots + 0.b_n = \overrightarrow{\mathcal{O}} \quad \text{с} \quad \lambda_i \neq 0$$

доказва линейната зависимост на $b_1, \dots, b_m, b_{m+1}, \dots, b_n$.

(iv) Ако $a_1, \dots, a_n$ са линейно независими вектори, то за всяко $1 \leq k \leq n-1$ векторите $a_1, \dots, a_k$ са линейно независими. В противен случай, от линейната зависимост на $a_1, \dots, a_k$ следва линейната зависимост на $a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n$, противно на предположението.

□

Задача 16. *Да се формулира и докаже Основната лема на линейната алгебра, т.е. Лемата за линейна зависимост.*

Доказателство. Лемата за линейна зависимост гласи, че ако $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$ са вектори от линейно пространство V, $b_1, \dots, b_m \in l(a_1, \dots, a_n)$ и $m > n$, то $b_1, \dots, b_m$ са линейно зависими.

Ако съществува нулев вектор $b_i = \overrightarrow{\mathcal{O}}$, то b_i е линейно зависим, откъдето и системата $b_1, \dots, b_{i-1}, b_i = \overrightarrow{\mathcal{O}}, b_{i+1}, \dots, b_m$ е линейно зависима.

Отсега нататък предполагаме, че векторите $b_1, \dots, b_m \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$ са ненулеви и доказваме лемата с индукция по n. За $n = 1$ и $m > 1$ от $b_1, b_2 \in l(a_1)$ следва съществуването на $\lambda_1, \lambda_2 \in F$ с $b_1 = \lambda_1 a_1$, $b_2 = \lambda_2 a_1$. Предположението $b_1 \neq \overrightarrow{\mathcal{O}}$ изисква $\lambda_1 \neq 0$ и предоставя представяне

$$b_2 = \lambda_2 \left(\frac{1}{\lambda_1} b_1 \right) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} b_1 \in l(b_1).$$

Следователно b_1, b_2 са линейно зависими, откъдето $b_1, b_2, \dots, b_m$ са линейно зависими.

В общия случай са дадени ненулевите вектори

$$b_1 = x_{1,1}a_1 + \ldots + x_{1,n-1}a_{n-1} + x_{1,n}a_n = \sum_{j=1}^{n} x_{1,j}a_j,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_i = x_{i,1}a_1 + \ldots + x_{i,n-1}a_{n-1} + x_{i,n}a_n = \sum_{j=1}^{n} x_{i,j}a_j$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_{m-1} = x_{m-1,1}a_1 + \ldots + x_{m-1,n-1}a_{n-1} + x_{m-1,n}a_n = \sum_{j=1}^{n} x_{m-1,j}a_j$$

$$b_m = x_{m,1}a_1 + \ldots + x_{m,n-1}a_{n-1} + x_{m,n}a_n = \sum_{j=1}^{n} x_{m,j}a_j$$

за някои $x_{i,j} \in F$. От $b_m \neq \overrightarrow{\mathcal{O}}$ следва съществуването на $1 \leq j \leq n$ с $x_{m,j} \neq 0$. След преномериране на $a_1, \ldots, a_n$ можем да считаме, че $x_{m,n} \neq 0$. Прибавяйки подходящи кратни на b_m към $b_1, \ldots, b_{m-1}$, елиминираме a_n от представянията на $b_1, \ldots, b_{m-1}$. По-точно, заменяме b_i с

$$b'_i := b_i - \frac{x_{i,n}}{x_{m,n}} b_m = \left(\sum_{j=1}^{n} x_{i,j}a_j \right) - \frac{x_{i,n}}{x_{m,n}} \left(\sum_{j=1}^{n} x_{m,j}a_j \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(x_{i,j} - \frac{x_{i,n}}{x_{m,n}} x_{m,j} \right) a_j = \sum_{j=1}^{n-1} \left(x_{i,j} - \frac{x_{i,n}}{x_{m,n}} x_{m,j} \right) a_j \in l(a_1, \ldots, a_{n-1})$$

за $1 \leq i \leq m-1$, вземайки предвид

$$\left(x_{i,j} - \frac{x_{i,n}}{x_{m,n}} x_{m,j} \right) \Big|_{j=n} = 0.$$

Геометрично, $b'_1, \ldots, b'_{m-1} \in l(a_1, \ldots, a_{n-1})$ са проекциите на векторите $b_1, \ldots, b_{m-1}$ върху $l(a_1, \ldots, a_{n-1})$, успоредно на b_m. По индукционно предположение, векторите $b'_1, \ldots, b'_{m-1} \in l(a_1, \ldots, a_{n-1})$ с $m-1 > n-1$ са линейно зависими и съществуват $\mu_1, \ldots, \mu_{m-1} \in F$ с поне едно $\mu_i \neq 0$, така че

$$\mu_1 b'_1 + \ldots + \mu_i b'_i + \ldots + \mu_{m-1} b'_{m-1} = \overrightarrow{\mathcal{O}}.$$

Заместваме с $b'_k = b_k - \frac{x_{k,n}}{x_{m,n}} b_m$ за $1 \leq k \leq m-1$ в горното равенство и получаваме

$$\overrightarrow{\mathcal{O}} = \sum_{k=1}^{m-1} \mu_k \left(b_k - \frac{x_{k,n}}{x_{m,n}} b_m \right) = \sum_{k=1}^{m-1} \mu_k b_k - \left(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\mu_k x_{k,n}}{x_{m,n}} \right) b_m$$

с $\mu_i \neq 0$. Това доказва линейната зависимост на $b_1, \ldots, b_m$.

□

Задача 17. *Да се формулира и докаже Лемата за линейна независимост.*

Доказателство. Лемата за линейна независимост гласи, че ако $a_1, \ldots, a_n$ са линейно независими вектори от линейно пространство V и $a_{n+1} \in V \setminus l(a_1, \ldots, a_n)$ е вектор извън тяхната линейна обвивка, то $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ са линейно независими.

Допускаме противното и разглеждаме представяне

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n + \lambda_{n+1} a_{n+1} = \overrightarrow{\mathcal{O}}$$

на $\overrightarrow{\mathcal{O}}$ с $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1} \in F$ и поне едно ненулево $\lambda_i \neq 0$ за някое $1 \leq i \leq n+1$.

Ако $\lambda_{n+1} \neq 0$, то

$$a_{n+1} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}} a_1 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} a_n \in l(a_1, \ldots, a_n)$$

противоречи на предположението $a_{n+1} \notin l(a_1, \ldots, a_n)$.

Следователно $\lambda_{n+1} = 0$ и $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ с поне едно $\lambda_i \neq 0$ за някое $1 \leq i \leq n$. В резултат, $a_1, \ldots, a_n$ са линейно зависими. Противоречието доказва Лемата за линейна независимост,

□

4. Базис, размерност, координати.

Задача 18. *Да се дадат определение и пример за базис на линейно пространство.*

Доказателство. Непразно подмножество B на линейно пространство V е базис, ако B е линейно независима система вектори и $l(B) = V$.

Например, векторите

$$e_i = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-i}) \in F^n, \quad 1 \leq i \leq n$$

с единствена ненулева компонента 1 в i-та позиция образуват базис на пространството F^n на наредените n-торки с елементи от поле F. За да докажем това да забележим, че за произволни $x_1, \ldots, x_n \in F$ е в сила

$$x_1 e_1 + \ldots + x_i e_i + \ldots + x_n e_n = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n).$$

Затова от $x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n = (0, \ldots, 0)$ следва $x_1 = \ldots = x_n = 0$ и векторите $e_1, \ldots, e_n$ са линейно независими. Произволна наредена n-торка $x = (x_1, \ldots, x_n) \in F^n$ е линейна комбинация $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ на $e_1, \ldots, e_n \in F^n$ с коефициенти $x_1, \ldots, x_n \in F$, така че $l(e_1, \ldots, e_n) = F^n$ и $e_1, \ldots, e_n$ е базис на F^n.

□

Задача 19. *Да се дадат:*

(i) определение за крайномерно пространство;

(ii) пример за крайномерно пространство;

(iii) пример за линейно пространство, което не е крайномерно.

Доказателство. (i) Линейно пространство V е крайномерно, ако $V = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$ е нулевото пространство или V има краен базис $b_1, \ldots, b_n$.

(ii) Пространството F^n на наредените n-торки с елементи от поле F е крайномерно, защото има базис

$$e_i = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-i}) \in F^n, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Това е доказано в предишната задача.

(iii) Пространството $F[x]$ на полиномите на x с коефициенти от F не е крайномерно. Съществуването на нетъждествено нулеви полиноми гарантира, че $F[x] \neq \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$. Да допуснем, че $F[x]$ има краен базис $f_1(x), \ldots, f_k(x) \in F[x]$. Ако $f_i(x) = \sum\limits_{j=0}^{d_i} c_{i,j} x^j \in F[x]$ са полиноми от степен $d_i = \deg f_i(x)$ и $d := \max(d_1, \ldots, d_k)$, то за произволни $\alpha_i \in F$ е в сила

$$\alpha_1 f_1(x) + \ldots + \alpha_k f_k(x) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{d_i} \alpha_i c_{i,j} x^j \in l(1, x, \ldots, x^d),$$

откъдето $F[x] = l(f_1(x), \ldots, f_k(x)) \subseteq l(1, x, \ldots, x^d)$. Сега $x^{d+1} \in F[x] \setminus l(1, x, \ldots, x^d) = \emptyset$ е противоречие. Следователно $F[x]$ не е крайномерно пространство.

$\square$

Задача 20. *Дадено е ненулево линейно пространство $V = l(a_1, \ldots, a_n)$, което е линейна обвивка на краен брой свои вектори $a_1, \ldots, a_n$. Да се докаже, че съществува базис на V, който се съдържа в множеството $\{a_1, \ldots, a_n\}$.*

Доказателство. Ако $a_1 \neq \overrightarrow{\mathcal{O}}$, то a_1 е линейно независим и $l(a_1) \subseteq V$.

В случая $l(a_1) \subsetneq V = l(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ съществува вектор $a_i \notin l(a_1)$ за някое естествено $2 \leq i \leq n$, защото ако $a_2, \ldots, a_n \in l(a_1)$, то $V = l(a_1, \ldots, a_n) = l(a_1)$. След преномериране на $a_2, \ldots, a_n$ можем да считаме, че $a_2 \notin l(a_1)$. По Лемата за линейна независимост системата a_1, a_2 е линейно независима. Ясно е, че $l(a_1, a_2) \subseteq l(a_1, \ldots, a_n) = V$.

Ако $l(a_1, a_2) = V$, то a_1, a_2 е базис на V.

Продължавайки по същия начин, да предположим, че $a_1, \ldots, a_m$ за някое $m \leq n$ са линейно независими вектори.

Ако $l(a_1, \ldots, a_m) = V$, то $a_1, \ldots, a_m$ е базис на V.

В противен случай съществува $a_i \notin l(a_1, \ldots, a_m)$ за някое $m + 1 \leq i \leq n$. След преномерация на $a_{m+1}, \ldots, a_n$ можем да считаме, че $a_{m+1} \notin l(a_1, \ldots, a_m)$. По Лемата за линейна независимост $a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}$ са линейно независими вектори.

Ако $l(a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}) = V$, то $a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}$ е базис на V.

В противен случай $a_{m+2} \notin l(a_1, \ldots, a_m, a_{m+1})$ след подходяща преномерация на $a_{m+2}, \ldots, a_n$.

Векторите $a_1, \ldots, a_n$ са краен брой, така че след краен брой стъпки ще намерим линейно независими вектори $a_1, \ldots, a_k$ с $l(a_1, \ldots, a_k) = V$ за някое $k \leq n$. Тогава $a_1, \ldots, a_k$ е базис на V.

$\square$

Задача 21. *Да се докаже, че всеки два базиса на ненулево крайномерно пространство V имат един и същи брой вектори. Да се даде определение за размерност на линейно пространство.*

Доказателство. Нека $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_m$ са базиси на линейно пространство V. Линейната независимост на $b_1, \ldots, b_m \in V = l(a_1, \ldots, a_n)$ изисква $m \leq n$ съгласно Основната лема на линейната алгебра (Лемата за линейна зависимост). Аналогично, от линейната независимост на $a_1, \ldots, a_n \in V = l(b_1, \ldots, m)$ получаваме $n \leq m$ чрез прилагане на Основната лема на линейната алгебра (Лемата за линейна зависимост). Следователно $m = n$ и всеки два базиса на ненулево крайномерно пространство V имат един и същи брой вектори.

Броят на векторите в един, а оттам и всеки един базис на ненулево крайномерно пространство V се нарича размерност на V и се бележи с $\dim V$. Размерността на нулевото пространство $\{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$ е $\dim\{\overrightarrow{\mathcal{O}}\} = 0$. Линейните пространства V, които не са крайномерни имат размерност $\dim V = \infty$.

$\square$

Задача 22. *Нека V е линейно пространство над поле F. Да се докаже, че:*

(i) ако $e_1, \ldots, e_n \in V$ е базис на V, то всеки вектор $v \in V$ има еднозначно определени координати спрямо $e_1, \ldots, e_n$;

(ii) ако всеки вектор $v \in V$ има единствено представяне $v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ като линейна комбинация на вектори $e_1, \ldots, e_n \in V$ с коефициенти $x_1, \ldots, x_n \in F$, то $e_1, \ldots, e_n \in V$ е базис на V.

Доказателство. (i) Ако $e_1, \ldots, e_n$ е базис на V, то $V = l(e_1, \ldots, e_n)$ и произволен вектор $v \in V$ има представяне $v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ като линейна комбинация на $e_1, \ldots, e_n$ с коефициенти $x_1, \ldots, x_n \in F$. Ако

$$x_1e_1 + \ldots + x_ne_n = v = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n$$

са две представяния на v като линейни комбинации на $e_1, \ldots, e_n$, то

$$(x_1 - y_1)e_1 + \ldots + (x_n - y_n)e_n = \overrightarrow{\mathcal{O}}.$$

Съгласно линейната независимост на $e_1, \ldots, e_n$, оттук следва $x_i - y_i = 0$ за всички $1 \leq i \leq n$ и представянето $v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ е единствено.

(ii) Ако всеки вектор $v \in V$ има представяне $v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ като линейна комбинация на $e_1, \ldots, e_n$, то $l(e_1, \ldots, e_n) = V$. Съгласно единствеността на представянето на нулевия вектор като линейна комбинация на $e_1 \ldots, e_n \in V$, от $x_1e_1 + \ldots + x_ne_n = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ следва анулирането на всички коефициенти $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Това доказва, че $e_1, \ldots, e_n$ са линейно независими, а оттам и базис на V.

□

Задача 23. *Нека V е ненулево линейно пространство над поле F. Да се докаже, че:*

(i) $\dim V = n$ *тогава и само тогава, когато съществуват n линейно независими вектора $a_1, \ldots, a_n \in V$ и произволни $n + 1$ вектора $b_1, \ldots, b_{n+1} \in V$ са линейно зависими;*

(ii) $\dim V = \infty$ *тогава и само тогава, когато за всяко естествено число n съществуват n линейно независими вектора $a_1, \ldots, a_n \in V$.*

Доказателство. (i) Нека $\dim V = n$ и $a_1, \ldots, a_n$ е базис на V. Тогава $a_1, \ldots, a_n \in V$ са линейно независими и произволни $n + 1$ вектора $b_1, \ldots, b_{n+1} \in V = l(a_1, \ldots, a_n)$ са линейно зависими съгласно Основната лема на линейната алгебра (Лемата за линейна зависимост).

Обратно, нека $a_1, \ldots, a_n \in V$ са линейно независими и произволни $n + 1$ вектора $b_1, \ldots, b_{n+1} \in V = l(a_1, \ldots, a_n)$ са линейно зависими. Достатъчно е да докажем, че $l(a_1, \ldots, a_n) = V$, за да твърдим, че $a_1, \ldots, a_n$ е базис на V и $\dim V = n$. Линейната обвивка $l(a_1, \ldots, a_n)$ на произволни вектори $a_1, \ldots, a_n$ от линейно пространство V се съдържа във V. Затова допускането $l(a_1, \ldots, a_n) \neq V$ е еквивалентно на $l(a_1, \ldots, a_n) \subsetneq V$. Тогава съществува вектор $a_{n+1} \in V \setminus l(a_1, \ldots, a_n)$ и $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} \in V$ са линейно независими, съгласно Лемата за линейна независимост. Това противоречи на предположението за линейна зависимост на произволни $n+1$ вектора от V и доказва $l(a_1, \ldots, a_n) = V$.

(ii) С допускане на противното, нека $\dim V = \infty$ и съществува естествено число n, така че произволни $n + 1$ вектора $b_1, \ldots, b_{n+1} \in V$ са линейно зависими. Ако n е минималното естествено с това свойство, то съществуват n линейно независими вектора $a_1, \ldots, a_n \in V$ и $\dim V = n$ съгласно (i). Противоречието доказва, че ако $\dim V = \infty$, то за произволно естествено число n съществуват n линейно независими вектора от V.

Да предположим, че за всяко естествено число n съществуват n линейно независими вектора от V и $\dim V \neq \infty$. Съгласно предположението $V \neq \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$ имаме $\dim V = n$ за някое естествено число n. Съгласно (i), това изисква произволни $n+1$ вектора от V да са линейно зависими. Противоречието доказва, че $\dim V = \infty$.

$\square$

Задача 24. *Нека V е n-мерно линейно пространство над поле F. Да се докаже, че следните условия са еквивалентни за векторите $a_1, \ldots, a_n \in V$:*

(i) $a_1, \ldots, a_n$ са линейно независими;

(ii) $l(a_1, \ldots, a_n) = V$;

(iii) $a_1, \ldots, a_n$ е базис на V.

Доказателство. По определението за базис, от (iii) следват (i) и (ii).

(i) $\Rightarrow$ (ii) и (iii) Твърдим, че ако $a_1, \ldots, a_n$ са n линейно независими вектора от n-мерно линейно пространство V, то $l(a_1, \ldots, a_n) = V$ и $a_1, \ldots, a_n$ е базис на V. За произволни $a_1, \ldots, a_n \in V$ е в сила $l(a_1, \ldots, a_n) \subseteq V$. Затова допускането $l(a_1, \ldots, a_n) \neq V$ е еквивалентно на $l(a_1, \ldots, a_n) \subsetneq V$ и води до съществуването на вектор $a_{n+1} \in V \setminus l(a_1, \ldots, a_n)$. По Лемата за линейна независимост, векторите $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} \in V$ са линейно независими. За произволен базис $e_1, \ldots, e_n$ на V имаме $V = l(e_1, \ldots, e_n)$, така че линейната независимост на $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} \in l(e_1, \ldots, e_n)$ противоречи на Основната лема на линейната алгебра (Лемата за линейна зависимост) и доказва, че всяка линейно независима система $a_1, \ldots, a_n$ от n вектора в n-мерно линейно пространство V е базис на V.

(ii) $\Rightarrow$ (i) и (iii) Твърдим, че ако $l(a_1, \ldots, a_n) = V$ за n-мерно линейно пространство V, то $a_1, \ldots, a_n$ са линейно независими, а оттам и базис на V. В противен случай, от линейната зависимост на $a_1, \ldots, a_n$ следва съществуването на $1 \leq i \leq n$ с $a_i \in l(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$. Тогава $V = l(a_1, \ldots, a_n) = l(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$. За произволен базис $e_1, \ldots, e_n$ на V е в сила $e_1, \ldots, e_n \in V = l(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$. По Основната лема на линейната алгебра (Лемата за линейна зависимост), векторите $e_1, \ldots, e_n$ трябва да са линейно зависими. Това противоречи на определението за базис $e_1, \ldots, e_n$ на V и доказва линейната независимост на произволни n вектора $a_1, \ldots, a_n$ от n-мерно линейно пространство V с $l(a_1, \ldots, a_n) = V$.

$\square$

Задача 25. *Нека V е n-мерно линейно пространство над поле F, а W е подпространство на V. Да се докаже, че $\dim W \leq \dim V$ с равенство $\dim W = \dim V$ тогава и само тогава, когато $W = V$ съвпадат.*

Доказателство. Ако допуснем, че подпространството W на линейното пространство V има размерност $\dim(W) > \dim(V) = n$, то $\dim(W) \geq n+1$. Следователно съществуват $n+1$ линейно независими вектора $w_1, \ldots, w_n, w_{n+1} \in W \subseteq V$, което противоречи на $\dim(V) = n$. Следователно $\dim(W) \leq \dim(V)$.

Ако $\dim(W) = \dim(V) = n$, то произволни n линейно независими вектора

$$e_1, \ldots, e_n \in W \subseteq V$$

образуват базис на W и базис на V. Следователно $W = l(e_1, \ldots, e_n) = V$.

$\square$

Задача 26. *Нека $b_1, \ldots, b_k$ са линейно независими вектори от n-мерно линейно пространство V над поле F. Да се докаже, че $k \leq n$ и векторите $b_1, \ldots, b_k$ могат да се допълнят до базис $b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}, \ldots, b_n$ на V.*

Доказателство. Нека $e_1, \ldots, e_n$ е базис на V. Линейната независимост на

$$b_1, \ldots, b_k \in V = l(e_1, \ldots, e_n)$$

изисква $k \leq n$ съгласно Основната лема на линейната алгебра (Лемата за линейна зависимост).

Ако $k = n$, то линейно независимите вектори $b_1, \ldots, b_n$ в n-мерно линейно пространство V образуват базис на V.

За $k < n$ е в сила строго включване $l(b_1, \ldots, b_k) \subsetneq V$, защото от $l(b_1, \ldots, b_k) = V$ за линейно независими вектори $b_1, \ldots, b_k$ следва $\dim(V) = k$. Избираме вектор $b_{k+1} \in V \setminus l(b_1, \ldots, b_k)$. Тогава $b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}$ са линейно независими по Лемата за линейна независимост. Ако $k + 1 = n$, то $l(b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}) = V$. В случая $k + 1 < n$ имаме $l(b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}) \subsetneq V$ и съществува $b_{k+2} \in V \setminus l(b_1, \ldots, b_k, b_{k+1})$. Тогава векторите $b_1, \ldots, b_k b_{k+1}, b_{k+2}$ са линейно независими по Лемата за линейна независимост. Продължавайки по същия начин, след краен брой стъпки получаваме n линейно независими вектора $b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}, \ldots, b_n$ от n-мерното пространство V и твърдим, че $b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}, \ldots, b_n$ е базис на V.

□

5. Сума на подпространства и размерност на сумата. Директна сума на подпространства.

Задача 27. *Нека U и W са подпространства на линейно пространство V над поле F. Да се докаже, че:*

(i) $U \cap W$ е подпространство на V;

(ii) $U \cup W$ е подпространство на V тогава и само тогава, когато $U \subseteq W$ или $W \subseteq U$.

Доказателство. (i) Ако $v_1, v_2 \in U \cap W$ и $\alpha \in F$, то $v_1 + v_2, \alpha v_1 \in U$, защото U е подпространство на V, съдържащо v_1 и v_2. Аналогично, $v_1 + v_2, \alpha v_1 \in W$, защото W е подпространство на V, съдържащо v_1 и v_2. В резултат, $v_1 + v_2, \alpha v_1 \in U \cap W$ и $U \cap W$ е подпространство на V.

(ii) Да допуснем, че $U \cup W$ е подпространство на V, U не се съдържа в W и W не се съдържа в U. Тогава съществуват вектори $u \in U \setminus W$ и $w \in W \setminus U$. Подпространството $U \cup W$ на V съдържа векторите u, w, а оттам и тяхната сума $u + w \in U \cup W$.

Ако $u + w = u_1 \in U$, то $w = u_1 - u \in U$, противно на избора на $w \notin U$.

Аналогично, допускането $u + w = w_1 \in W$ води до $u = w_1 - w \in W$, което противоречи на избора на $u \notin W$.

Следователно обединението $U \cup W$ на подпространства U и W на линейно пространство V е подпространство на V само когато $U \subseteq W$ или $W \subseteq U$.

Ако $U \subseteq W$, то от $U \cup W \subseteq W \subseteq U \cup W$ следва, че $U \cup W = W$ е подпространство на V. Аналогично, за $W \subseteq U$ имаме $U \cup W \subseteq U \subseteq U \cup W$, така че $U \cup W = U$ е подпространство на V.

□

Задача 28. *Нека U и W са подпространства на линейно пространство V над поле F. Да се даде определение за сума $U + W$ на две подпространства и да се докаже, че*

$$U + W = l(U \cup W).$$

Доказателство. Ако U и W са подпространства на линейно пространство V, то множеството

$$U + W := \{u + w \mid u \in U, \quad w \in W\}$$

на всевъзможните суми на вектори $u \in U$ и $w \in W$ се нарича сума на U и W. Всеки вектор на $U + W$ е линейна комбинация $u + w = 1.u + 1.w$ на вектори $u, w \in U \cup W$ и принадлежи на линейната обвивка $l(U \cup W)$ на обединението $U \cup W$ на U и W. Това доказва, че $U + W \subseteq l(U \cup W)$.

За обратното включване да забележим, че произволен вектор от $l(U \cup W)$ е от вида

$$v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k + \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_m w_m$$

за $u_1, \ldots, u_k \in U$, $w_1, \ldots, w_m \in W$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_m \in F$. По предположение, U и W са подпространства на V, така че

$$u := \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k \in U, \quad w := \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_m w_m \in W$$

и $v = u + w \in U + W$. Това доказва $l(U \cup W) \subseteq U + W$ и $l(U \cup W) = U + W$.

$\square$

Задача 29. *Нека U и W са подпространства на линейно пространство V над поле F. Да се даде определение за директна сума $U \oplus W$ на две подпространства и да се докаже, че сумата $U + W$ е директна тогава с само тогава, когато $U \cap W = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$.*

Доказателство. Сумата на подпространства $U \oplus W$ е директна, ако всеки вектор от $U \oplus W$ има единствено представяне като сума $u + w$ на $u \in U$ и $w \in W$.

Ако $U \oplus W$ е директна сума и $u \in U \cap W$, то противоположният вектор $-u \in U \cap W$ остава в подпространството $U \cap W$ на V и $\overrightarrow{\mathcal{O}} = u + (-u)$ е представяне на нулевия вектор като сума на вектори $u \in U$ и $-u \in W$. Единствеността на представянето на $\overrightarrow{\mathcal{O}} \in U \oplus W$ като сума на вектори от U и W изисква $u = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ и доказва, че $U \cap W = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$, ако сумата $U \oplus W$ е директна.

Обратно, ако $U \cap W = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$ и $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$ са две представяния на вектор от $U + W$ като сума на вектори $u_i \in U$, $w_j \in W$, то

$$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\},$$

защото $u_1 - u_2 \in U$ и $w_2 - w_1 \in W$. Следователно $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 = \overrightarrow{\mathcal{O}}$, откъдето $u_1 = u_2$, $w_1 = w_2$ и всеки вектор от $U + W$ има единствено представяне като сума на вектор от U и вектор от W. Това доказва директността на сумата $U \oplus W$.

$\square$

Задача 30. *Нека U и W са крайномерни линейни подпространства на линейно пространство V над поле F. Да се докаже, че $U + W$ и $U \cap W$ са крайномерни подпространства на V и*

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

Доказателство. Подпространството $U \cap W$ на крайномерното пространство U е крайномерно. Ако $U \cap W \neq \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$, то съществува базис $a_1, \ldots, a_k$ на $U \cap W$. Допълваме до базис $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_n$ на U и базис $a_1, \ldots, a_k, c_1, \ldots, c_m$ на W. Достатъчно е да проверим, че $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m$ е базис на $U + W$, защото тогава $U + W$ е крайномерно подпространство на V и

$$\dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = (k + n) + (k + m) - k = k + n + m = \dim(U + W).$$

От $U = l(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_n)$ и $W = l(a_1, \ldots, a_k, c_1, \ldots, c_m)$ следва

$$\begin{aligned} U + W &= l(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_n) + l(a_1, \ldots, a_k, c_1, \ldots, c_m) = \\ &= l(a_1, \ldots, a_k) + l(b_1, \ldots, b_n) + l(a_1, \ldots, a_k) + l(c_1, \ldots, c_m) = \\ = l(a_1, \ldots, a_k) + l(b_1, \ldots, b_n) + l(c_1, \ldots, c_m) &= l(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m), \end{aligned}$$

защото сумата на две линейни комбинации на $a_1, \ldots, a_k$ е линейна комбинация на $a_1, \ldots, a_k$. Нека

$$\sum_{i=1}^{k} x_i a_i + \sum_{j=1}^{n} y_j b_j + \sum_{s=1}^{m} z_s c_s = \overrightarrow{\mathcal{O}} \tag{1}$$

е представяне на нулевия вектор като линейна комбинация на векторите $a_1, \ldots, a_k$, $b_1, \ldots, b_n$, $c_1, \ldots, c_m$ с коефициенти $x_1, \ldots, x_k$, $y_1, \ldots, y_n$, $z_1, \ldots, z_m \in F$. Полагаме

$$a := \sum_{i=1}^{k} x_i a_i, \quad b := \sum_{j=1}^{n} y_j b_j, \quad c := \sum_{s=1}^{m} z_s c_s$$

и забелязваме, че от $a + b + c = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ следва

$$a + b = -c \in U \cap W = l(a_1, \ldots, a_k),$$

защото $a+b \in l(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_n) = U$ и $-c \in l(c_1, \ldots, c_m) \subset l(a_1, \ldots, a_k, c_1, \ldots, c_m) = W$. Следователно съществува вектор

$$a' = \sum_{i=1}^{k} t_i a_i \in l(a_1, \ldots, a_k) = U \cap W,$$

изпълняващ равенството

$$a + b = -c = a'.$$

В резултат получаваме, че

$$\overrightarrow{\mathcal{O}} = a' + c = \sum_{i=1}^{k} t_i a_i + \sum_{s=1}^{m} z_s c_s.$$

Поради линейната независимост на векторите $a_1, \ldots, a_k, c_1, \ldots, c_m$ от базиса на W, оттук следва $t_i = 0$ за всички $1 \leq i \leq k$ и $z_s = 0$ за всички $1 \leq s \leq m$. Сега

$$\sum_{i=1}^{k} x_i a_i + \sum_{j=1}^{n} y_j b_j = a + b = -c = \overrightarrow{\mathcal{O}}$$

изисква $x_i = 0$ за всички $1 \leq i \leq k$ и $y_j = 0$ за всички $1 \leq j \leq n$, защото базисът $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_n$ на U е линейно независима система вектори. С това доказахме, че единствената линейна комбинация (1) на $a_1, \ldots, a_k$, $b_1, \ldots, b_n$, $c_1, \ldots, c_m$, представяща нулевия вектор $\overrightarrow{\mathcal{O}}$ е тази с нулеви коефициенти. Следователно $a_1, \ldots, a_k$, $b_1, \ldots, b_n$, $c_1, \ldots, c_m$ е линейно независима система, а оттам и базис на $U + W$.

Ако $U \cap W = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$, избираме базис $b_1, \ldots, b_n$ на U и базис $c_1, \ldots, c_m$ на W. Достатъчно е да докажем, че $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m$ е базис на $U + W$, защото тогава $U + W$ е крайномерно пространство и

$$\dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = n + m - 0 = n + m = \dim(U + W).$$

От $U = l(b_1, \ldots, b_n)$ и $W = l(c_1, \ldots, c_m)$ следва, че

$$U + W = l(b_1, \ldots, b_n) + l(c_1, \ldots, c_m) = l(b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m).$$

Ако $\sum\limits_{j=1}^{n} y_j b_j + \sum\limits_{s=1}^{m} z_s c_s = \overrightarrow{\mathcal{O}}$, то

$$\sum_{j=1}^{n} y_j b_j = \sum_{s=1}^{m} (-z_s) c_s \in l(b_1, \ldots, b_n) \cap l(c_1, \ldots, c_m) = U \cap W = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}.$$

Следователно
$$\sum_{j=1}^{n} y_j b_j = \overrightarrow{\mathcal{O}} \quad \text{и} \quad \sum_{s=1}^{m} z_s c_s = \overrightarrow{\mathcal{O}}.$$
От линейната независимост на базиса $b_1, \dots, b_n$ на U следва $y_j = 0$ за всички $1 \leq j \leq n$. Аналогично, линейната независимост на базиса $c_1, \dots, c_m$ на W изисква $z_s = 0$ за всички $1 \leq s \leq m$. Следователно единствената линейна комбинация на векторите $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_m$, представяща нулевия вектор $\overrightarrow{\mathcal{O}}$ е тази с нулеви коефициенти, така че $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_m$ е линейно независима система, а оттам и базис на $U + W$.

Ако $U \cap W = U$, то $U \subseteq W$. Следователно $U + W \subseteq W \subseteq U + W$ и $U + W = W$. Сега от $\dim(U \cap W) = \dim(U)$ и $\dim(U + W) = \dim(W)$ получаваме $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$.

□

Задача 31. *Нека V е крайномерно линейно пространство. Да се докаже, че:*

(i) всяко разбиване на базис на V в две непресичащи се подмножества отговаря на разлагане на V в директна сума на две подпространтва;

(ii) ако $V = U \oplus W$ е директна сума на ненулеви подпространства U и W, то обединението на базис на U с базис на W е базис на V.

Доказателство. (i) Ако $e_1, \dots, e_n$ е базис на V, то за всяко $1 \leq k \leq n - 1$ е в сила разлагане
$$V = l(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n) = l(e_1, \dots, e_k) + l(e_{k+1}, \dots, e_n)$$
на V в сума на линейните обвивки на $e_1, \dots, e_k$ и $e_{k+1}, \dots, e_n$. Тази сума е директна, защото ако
$$v = \sum_{i=1}^{k} x_i e_i = \sum_{i=k+1}^{n} x_i e_i \in l(e_1, \dots, e_k) \cap l(e_{k+1}, \dots, e_n),$$
то
$$\sum_{i=1}^{k} x_i e_i + \sum_{i=k+1}^{n} (-x_i) e_i = \overrightarrow{\mathcal{O}}.$$
Линейната независимост на $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ изисква $x_i = 0$ за всички $1 \leq i \leq n$, така че $v = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ и $l(e_1, \dots, e_k) \cap l(e_{k+1}, \dots, e_n) = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$. Следователно всяко разбиване на базис $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ на V в непресичащо се обединение на подмножества $\{e_1, \dots, e_k\}$ и $\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$ отговаря на разлагане $V = l(e_1, \dots, e_k) \oplus l(e_{k+1}, \dots, e_n)$ в директна сума на подпространства.

(ii) Нека $V = U \oplus W$ е разлагане на V в директна сума на ненулеви подпространства U, W. Ако $e_1, \dots, e_k$ е базис на U и $e_{k+1}, \dots, e_n$ е базис на W, то от $U = l(e_1, \dots, e_k)$ и $W = l(e_{k+1}, \dots, e_n)$ следва
$$V = U \oplus W = l(e_1, \dots, e_k) \oplus l(e_{k+1}, \dots, e_n) = l(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n).$$
Ако $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i = \overrightarrow{\mathcal{O}}$, то
$$\sum_{i=1}^{k} x_i e_i = \sum_{i=k+1}^{n} (-x_i) e_i \in l(e_1, \dots, e_k) \cap l(e_{k+1}, \dots, e_n) = U \cap W = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\},$$
откъдето
$$\sum_{i=1}^{k} x_i e_i = \overrightarrow{\mathcal{O}} \quad \text{и} \quad \sum_{i=k+1}^{n} x_i e_i = \overrightarrow{\mathcal{O}}.$$

Линейната независимост на базиса $e_1, \dots, e_k$ на U изисква $x_i = 0$ за всички $1 \leq i \leq k$. Аналогично, линейната независимост на базиса $e_{k+1}, \dots, e_n$ на W води до $x_i = 0$ за всички $k+1 \leq i \leq n$. Това доказва, че векторите $e_1, \dots, e_n$ са линейно независими, а оттам и базис на V.

□

Задача 32. *Нека V е n-мерно линейно пространство, а U е k-мерно подпространство на V за някои естествени числа $k < n$. Да се докаже, че съществува $(n-k)$-мерно подпространство W на V, така че $V = U \oplus W$. Всяко такова подпространство се нарича допълнение на U до V.*

Ако $\dim V = 2019$ и $\dim U = 2018$, да се докаже, че едномерно подпространство W на V е допълнение на U до V тогава и само тогава, когато W не се съдържа в U.

Доказателство. Избираме произволен базис $e_1, \dots, e_k$ на U и го допълваме до базис $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ на V. Тогава

$$V = l(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n) = l(e_1, \dots, e_k) \oplus l(e_{k+1}, \dots, e_n) = U \oplus l(e_{k+1}, \dots, e_n)$$

съгласно Задача 31 (i). Полагаме $W := l(e_{k+1}, \dots, e_n)$ и забелязваме, че W е подпространство на V с размерност $n-k$, защото векторите $e_{k+1}, \dots, e_n$ са линейно независими като част от линейно независимата система $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$. Това доказва съществуването на допълнение W на произволно собствено подпространство U на V.

Ако $\dim(V) = 2019$ и $\dim(U) = 2018$, то произволно допълнение W на U до V има размерност

$$\dim(W) = \dim(V) - \dim(U) = 2019 - 2018 = 1.$$

Ако $V = U \oplus W$, то $U \cap W = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$ и правата W през началото не лежи в U.

Обратно, ако права $W \subset V$ през началото не лежи в U, то $U \cap W \subsetneq W$ и $\dim(U \cap W) < \dim(W) = 1$. Следователно $\dim(U \cap W) = 0$ и $U \cap W = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$ е нулевото подпространство. Това доказва, че сумата $U + W = U \oplus W$ е директна. По твърдението за размерност на сума и сечение

$$\dim(U \oplus W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 2018 + 1 - 0 = 2019.$$

Оттук, подпространството $U \oplus W$ на V с $\dim(U \oplus W) = 2019 = \dim(V)$ съвпада с V и $V = U \oplus W$. Това доказва, че произволна права $W \subset V$ през началото, не лежаща в U е допълнение на U до $V = U \oplus W$.

□

6. Събиране и умножение на матрици. Умножение на матрица с число. Транспониране.

Задача 33. *Да се дадат определения за транспониране на матрица, събиране на матрици и умножение на матрица с число.*

Доказателство. Нека $A \in M_{m \times n}(F)$ е матрица с m реда и n стълба. Разменяйки редовете и стълбовете на A, получаваме транспонираната матрица $A^t \in M_{n \times m}(F)$ с елементи

$$(A^t)_{i,j} := A_{j,i} \quad \text{за всички} \quad 1 \leq i \leq n \quad \text{и } 1 \leq j \leq m.$$

Ако $A, B \in M_{m \times n}(F)$ са матрици с равен брой редове и стълбове, то сумата $A + B \in M_{m \times n}(F)$ е матрицата със същите размери и елементи

$$(A+B)_{i,j} := A_{i,j} + B_{i,j} \quad \text{за всички} \quad 1 \leq i \leq m \quad \text{и} \quad 1 \leq j \leq n.$$

За произволни $A \in M_{m\times n}(F)$ и $\alpha \in F$ произведението $\alpha A \in M_{m\times n}(F)$ е матрицата с елементи

$$(\alpha A)_{i,j} := \alpha A_{i,j} \quad \text{за всички } 1 \leq i \leq m \quad \text{и} \quad 1 \leq j \leq n.$$

□

Задача 34. *Да се формулират и докажат тъждествата, свързващи транспонирането на матрици със събирането на матрици и умножението на матрица с число.*

Доказателство. (i) $(A+B)^t = A^t + B^t$ за $A, B \in M_{m\times n}(F)$.

Вземайки предвид $A + B \in M_{m\times n}(F)$ и $(A+B)^t \in M_{n\times m}(F)$, проверяваме, че за произволни $1 \leq i \leq n$ и $1 \leq j \leq m$ е изпълнено

$$[(A+B)^t]_{i,j} = (A+B)_{j,i} = A_{j,i} + B_{j,i} = (A^t)_{i,j} + (B^t)_{i,j} = (A^t + B^t)_{i,j}.$$

Това доказва $(A+B)^t = A^t + B^t$.

(ii) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$ за $\alpha \in F$, $A \in M_{m\times n}(F)$.

За произволни $1 \leq i \leq n$ и $1 \leq j \leq m$ е в сила

$$[(\alpha A)^t]_{i,j} = (\alpha A)_{j,i} = \alpha A_{j,i} = \alpha (A^t)_{i,j} = (\alpha A^t)_{i,j}.$$

Следователно $(\alpha A)^t = \alpha A^t$.

□

Задача 35. *Да се формулират и докажат свойствата на събирането на матрици, които образуват първите четири аксиоми за линейно пространство.*

Доказателство. (i) асоциативност на събирането на матрици $(A+B)+C = A+(B+C)$ за $A, B, C \in M_{m\times n}(F)$.

За произволни $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq j \leq n$ е изпълнено

$$\begin{aligned} [(A+B)+C]_{i,j} &= (A+B)_{i,j} + C_{i,j} = (A_{i,j} + B_{i,j}) + C_{i,j} = \\ &= A_{i,j} + (B_{i,j} + C_{i,j}) = A_{i,j} + (B+C)_{i,j} = [A + (B+C)]_{i,j}, \end{aligned}$$

откъдето $(A+B)+C = A+(B+C)$. Тук използвахме асоциативността на събирането в F и покомпонентността на операцията събиране на матрици.

(ii) комутативност на събирането на матрици $A + B = B + A$ за $A, B \in M_{m\times n}(F)$.

За произволни $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq j \leq n$ е в сила

$$(A+B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j} = B_{i,j} + A_{i,j} = (B+A)_{i,j},$$

съгласно комутативността на събирането в F и покомпонентността на операцията събиране на матрици. Това доказва $A + B = B + A$.

(iii) съществува нулева матрица $\mathbb{O} \in M_{m\times n}(F)$, чиито всички елементи $\mathbb{O}_{i,j} = 0 \in F$ са равни на нула, така че $A + \mathbb{O} = A$ за всяка матрица $A \in M_{m\times n}(F)$.

За произволни $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq j \leq n$ е изпълнено

$$(A + \mathbb{O})_{i,j} = A_{i,j} + \mathbb{O}_{i,j} = A_{i,j} + 0 = A_{i,j},$$

съгласно дефиниционното свойство на $0 \in F$ и покомпонентността на операцията събиране на матрици.

(iv) всяка матрица $A \in M_{m\times n}(F)$ има противоположна $-A \in M_{m\times n}(F)$ с елементи $(-A)_{i,j} = -A_{i,j}$ за всички $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, така че $A + (-A) = \mathbb{O}$.

Наистина, за произволни $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq j \leq n$ е в сила

$$[A + (-A)]_{i,j} = A_{i,j} + (-A)_{i,j} = A_{i,j} + (-A_{i,j}) = 0 = \mathbb{O}_{i,j},$$

съгласно дефиниционното свойство на противоположния елемент $-A_{i,j} \in F$ на $A_{i,j} \in F$ и покомпонентността на операцията събиране на матрици.

$\square$

Задача 36. *Да се формулират и докажат четирите свойства на събирането на матрици и умножението на матрица с число, които образуват последните четири аксиоми за линейно пространство.*

Доказателство. (i) дистрибутивен закон над скаларен множител $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ за $\alpha, \beta \in F$ и $A \in M_{m \times n}(F)$.

За произволни $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq j \leq n$ е изпълнено

$$[(\alpha + \beta)A]_{i,j} = (\alpha + \beta)A_{i,j} = \alpha A_{i,j} + \beta A_{i,j} = (\alpha A)_{i,j} + (\beta A)_{i,j} = (\alpha A + \beta A)_{i,j},$$

съгласно дистрибутивните закони за събиране и умножение в F и покомпонентността на операциите събиране на матрици и умножение на матрица с число. Това доказва $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

(ii) дистрибутивен закон над векторен множител $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ за $\alpha \in F$ и $A, B \in M_{m \times n}(F)$.

За произволни $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq j \leq n$ е в сила

$$\begin{aligned} [\alpha(A + B)]_{i,j} = \alpha(A + B)_{i,j} = \alpha(A_{i,j} + B_{i,j}) = \alpha A_{i,j} + \alpha B_{i,j} = \\ = (\alpha A)_{i,j} + (\alpha B)_{i,j} = (\alpha A + \alpha B)_{i,j}, \end{aligned}$$

съгласно дистрибутивността на събирането и умножението в F и покомпонентността на операциите събиране на матрици и умножение на матрица с число.

(iii) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$ за $\alpha, \beta \in F$, $A \in M_{m \times n}(F)$.

За произволни $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq j \leq n$ е изпълнено

$$[(\alpha\beta)A]_{i,j} = (\alpha\beta)A_{i,j} = \alpha(\beta A_{i,j}) = \alpha(\beta A)_{i,j} = [\alpha(\beta A)]_{i,j},$$

съгласно асоциативността на умножението в F и покомпонентността на операцията умножение на матрица с число.

(iv) $1.A = A$ за $1 \in F$ и $A \in M_{m \times n}(F)$.

За всички $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq j \leq n$ е в сила

$$(1.A)_{i,j} = 1.A_{i,j} = A_{i,j},$$

съгласно дефиниционното свойство на $1 \in F$ и покомпонентността на операцията умножение на матрица с число.

$\square$

Задача 37. *Да се даде определение за умножение на матрици.*

Да се намери броят на редовете и броят на стълбовете на матрица B, ако произведението ABC е коректно определено за произволни $A \in M_{13 \times 3}(\mathbb{R})$ и $C \in M_{5 \times 15}(\mathbb{R})$.

Доказателство. Нека $A \in M_{m \times n}(F)$ и $B \in M_{n \times k}(F)$ са такива матрици, за които броят на стълбовете на A съвпада с броя на редовете на B. Тогава произведението $AB \in M_{m \times k}(F)$ е матрицата с елементи

$$(AB)_{i,j} := A_{i,1}.B_{1,j} + \ldots + A_{i,n}.B_{n,j} = \sum_{s=1}^{n} A_{i,s}B_{s,j}$$

за произволни $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq j \leq k$.

Нека $B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ има m реда и n стълба. Ако произведението $ABC \in M_{13\times 15}(\mathbb{R})$ е коректно определено, $A \in M_{13\times 3}(\mathbb{R})$ и $C \in M_{5\times 15}(\mathbb{R})$, то броят на стълбовете на A съвпада с броя на редовете на B, откъдето $m = 3$. Броят на стълбовете на B съвпада с броя на редовете на C, така че $n = 5$. Следователно $B \in M_{3\times 5}(\mathbb{R})$ е матрица с три реда и пет стълба.

$\square$

Задача 38. *Да се формулира и докаже асоциативността на умножението на матрици.*

Доказателство. Твърдим, че $(AB)C = A(BC)$ за произволни матрици $A \in M_{m\times n}(F)$, $B \in M_{n\times k}(F)$, $C \in M_{k\times l}(F)$.

За произволни $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq j \leq l$ е изпълнено

$$[(AB)C]_{i,j} = \sum_{p=1}^{k}(AB)_{i,p}C_{p,j} = \sum_{p=1}^{k}\left(\sum_{q=1}^{n} A_{i,q}B_{q,p}\right)C_{p,j} = \sum_{p=1}^{k}\sum_{q=1}^{n} A_{i,q}B_{q,p}C_{p,j}$$

съгласно дистрибутивния закон за събиране и умножение в F и определението на операцията умножение на матрици. Чрез размяна на реда на сумиране и повторно прилагане на дистрибутивността на събирането и умножението в F получаваме

$$[(AB)C]_{i,j} = \sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{k} A_{i,q}B_{q,p}C_{p,j} = \sum_{q=1}^{n} A_{i,q}\left(\sum_{p=1}^{k} B_{q,p}C_{p,j}\right) =$$

$$= \sum_{q=1}^{n} A_{i,q}(BC)_{q,j} = [A(BC)]_{i,j}$$

и доказваме, че $(AB)C = A(BC)$.

$\square$

Задача 39. *Да се формулират и докажат тъждествата, свързващи умножението на матрици с транспонирането на матрици, събирането на матрици и умножението на матрица с число.*

Доказателство. (i) $(AB)^t = B^tA^t$ за $A \in M_{m\times n}(F)$, $B \in M_{n\times k}(F)$.

За произволни $1 \leq i \leq k$ и $1 \leq j \leq m$ е изпълнено

$$[(AB)^t]_{i,j} = (AB)_{j,i} = \sum_{s=1}^{n} A_{j,s}B_{s,i} = \sum_{s=1}^{n}(A^t)_{s,j}(B^t)_{i,s} = \sum_{s=1}^{n}(B^t)_{i,s}(A^t)_{s,j} = (B^tA^t)_{i,j},$$

съгласно комутативността на умножението в F и правилото за умножение на матрици. Това доказва $(AB)^t = B^tA^t$.

(ii) ляв дистрибутивен закон за събиране и умножение на матрици $(A + B)C = AC + BC$ за $A, B \in M_{m\times n}(F)$, $C \in M_{n\times k}(F)$.

За произволни $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq j \leq k$ е в сила

$$[(A+B)C]_{i,j} = \sum_{s=1}^{n}(A+B)_{i,s}C_{s,j} = \sum_{s=1}^{n}(A_{i,s}+B_{i,s})C_{s,j} = \sum_{s=1}^{n} A_{i,s}C_{s,j} + B_{i,s}C_{s,j} =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} A_{i,s}C_{s,j} + \sum_{s=1}^{n} B_{i,s}C_{s,j} = (AC)_{i,j} + (BC)_{i,j} = (AC+BC)_{i,j},$$

съгласно дистрибутивните закони за събиране и умножение в F и правилата за събиране и умножение на матрици. Следователно $(A+B)C = AC + BC$.

(iii) десен дистрибутивен закон за събиране и умножение на матрици $A(B+C) = AB + AC)$ за $A \in M_{m\times n}(F)$, $B, C \in M_{n\times k}(F)$.

Използвайки левия дистрибутивен закон за събиране и умножение на матрици и свойствата на транспонирането на матрици забелязваме, че

$$\begin{aligned}[A(B+C)]^t &= (B+C)^t A^t = (B^t + C^t)A^t = \\ &= B^t A^t + C^t A^t = (AB)^t + (AC)^t = (AB+AC)^t.\end{aligned}$$

Транспонирането на изведеното равенство дава $A(B+C) = AB + AC$.

(iv) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ за $\alpha \in F$, $A \in M_{m\times n}(F)$, $B \in M_{n\times k}(F)$.

За произволни $1 \le i \le m$ и $1 \le j \le k$ е изпълнено

$$[\alpha(AB)]_{i,j} = \alpha(AB)_{i,j} = \alpha\left(\sum_{s=1}^n A_{i,s}B_{s,j}\right) = \sum_{s=1}^n (\alpha A_{i,s})B_{s,j} =$$
$$= \sum_{s=1}^n A_{i,s}(\alpha B_{s,j}) = \sum_{s=1}^n (\alpha A)_{i,s}B_{s,j} = \sum_{s=1}^n A_{i,s}(\alpha B)_{s,j} = [(\alpha A)B]_{i,j} = [A(\alpha B)]_{i,j},$$

съгласно комутативността и асоциативността на умножението в F, дистрибутивните закони за събиране и умножение в F и правилата за умножение на матрици и умножение на матрица с число.

□

7. Полилинейни и антисиметрични функции. Инверсии на пермутации.

Задача 40. *Нека V е линейно пространство над поле F, а $f : V \to F$ е функция на V в F. Да се докаже, че функцията f е линейна тогава и само тогава, когато $f(u+v) = f(u) + f(v)$ и $f(\alpha u) = \alpha f(u)$ за произволни $u, v \in V$ и $\alpha \in F$.*

Доказателство. Ако $f : V \to F$ е линейна функция, то

$$f(u+v) = f(1.u + 1.v) = 1.f(u) + 1.f(v) = f(u) + f(v) \quad \text{и} \quad f(\alpha u) = \alpha f(u)$$

за произволни $u, v \in V$, $\alpha \in F$, защото $u + v = 1.u + 1.v$ и αu са частни случаи на линейни комбинации на вектори от V.

Да предположим, че $f(u+v) = f(u) + f(v)$ и $f(\alpha u) = \alpha f(u)$ за произволни $u, v \in V$, $\alpha \in F$. С индукция по $n \in \mathbb{N}$ ще проверим, че

$$f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_n f(v_n)$$

за произволни $v_i \in V$, $\alpha_i \in F$, за да твърдим, че $f : V \to F$ е линейна функция. За $n = 1$ знаем по предположение, че $f(\alpha_1 v_1) = \alpha_1 f(v_1)$. В общия случай, полагаме $u := \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{n-1}v_{n-1} \in V$, $v := \alpha_n v_n \in V$ и използваме $f(u+v) = f(u) + f(v)$, за да представим

$$\begin{aligned}f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{n-1}v_{n-1} + \alpha_n v_n) &= f(u+v) = \\ = f(u) + f(v) &= f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{n-1}v_{n-1}) + f(\alpha_n v_n).\end{aligned}$$

По индукционно предположение, първото събираемо е равно на

$$f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{n-1}v_{n-1}) = \alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_{n-1} f(v_{n-1}).$$

Комбинирайки с $f(\alpha_n v_n) = \alpha_n f(v_n)$ получаваме, че

$$f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{n-1} v_{n-1} + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_{n-1} f(v_{n-1}) + \alpha_n f(v_n)$$

и завършваме доказателството.

$\square$

Задача 41. *Да се даде определение за:*

(i) линейна функция;

(ii) полилинейна функция;

(iii) анти-симетрична функция.

Нека $e_1, \ldots, e_n$, $n \geq 4$ е базис на линейно пространство V над полето $\mathbb{Q}$ на рационалните числа, а $f : V \times V \to \mathbb{Q}$ действа по правилото

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_{1,i} e_i, \sum_{j=1}^{n} a_{2,j} e_j\right) = a_{1,3}a_{2,4} - a_{1,4}a_{2,3} \quad \text{за произволни} \quad a_{1,i}, a_{2,j} \in \mathbb{Q}.$$

Да се докаже, че f е полилинейна анти-симетрична функция.

Доказателство. Нека V е линейно пространство над поле F.

(i) Изображение $f : V \to F$ е линейна функция, ако за произволни $v_1, \ldots, v_n \in V$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ е в сила

$$f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_i v_i + \ldots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_i f(v_i) + \ldots + \alpha_n f(v_n).$$

(ii) Изображение

$$f : \underbrace{V \times \ldots V}_{n} \to F$$

е полилинейна функция, ако f е линейна функция относно всеки аргумент.

(iii) Изображение

$$f : \underbrace{V \times \ldots V}_{n} \to F$$

е анти-симетрична функция, ако

$$f(v_1, \ldots, v_p, \ldots, v_q, \ldots v_n) = -f(v_1, \ldots, v_q, \ldots, v_p, \ldots, v_n)$$

променя знака си при размяна на аргументите си v_p и v_q за произволни $1 \leq p < q \leq n$.

От

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a'_{1,i} e_i + \sum_{i=1}^{n} a''_{1,i} e_i, \sum_{j=1}^{n} a_{2,j} e_j\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} (a'_{1,i} + a''_{1,i}) e_i, \sum_{j=1}^{n} a_{2,j} e_j\right) =$$

$$= (a'_{1,3} + a''_{1,3})a_{2,4} - (a'_{1,4} + a''_{1,4})a_{2,3} = a'_{1,3}a_{2,4} + a''_{1,3}a_{2,4} - a'_{1,4}a_{2,3} - a''_{1,4}a_{23} =$$

$$= (a'_{1,3}a_{2,4} - a'_{1,4}a_{2,3}) + (a''_{1,3}a_{2,4} - a''_{1,4}a_{2,3}) =$$

$$= f\left(\sum_{i=1}^{n} a'_{1,i} e_i, \sum_{j=1}^{n} a_{2,j} e_j\right) + f\left(\sum_{i=1}^{n} a''_{1,i} e_i, \sum_{j=1}^{n} a_{2,j} e_j\right)$$

и от

$$f\left(\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} a_{1,i} e_i\right), \sum_{j=1}^{n} a_{2,j} e_j\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{1,i}) e_i, \sum_{j=1}^{n} a_{2,j} e_j\right) =$$

$$= (\lambda a_{1,3})a_{2,4} - (\lambda a_{1,4})a_{2,3} = \lambda(a_{1,3}a_{2,4} - a_{1,4}a_{2,3}) = \lambda f\left(\sum_{i=1}^{n} a_{1,i} e_i, \sum_{j=1}^{n} a_{2,j} e_j\right)$$

следва, че функцията f е линейна относно първия си аргумент. Линейността на f относно втория аргумент се дължи на

$$f\left(\sum_{i=1}^n a_{1,i}e_i, \sum_{j=1}^n a'_{2,j}e_j + \sum_{j=1}^n a''_{2,j}e_j\right) = f\left(\sum_{i=1}^n a_{1,i}e_i, \sum_{j=1}^n (a'_{2,j} + a''_{2,j})e_j\right) =$$
$$= a_{1,3}(a'_{2,4} + a''_{2,4}) - a_{1,4}(a'_{2,3} + a''_{2,3}) = a_{1,3}a'_{2,4} + a_{1,3}a''_{2,4} - a_{1,4}a'_{2,3} - a_{1,4}a''_{2,3} =$$
$$= (a_{1,3}a'_{2,4} - a_{1,4}a'_{2,3}) + (a_{1,3}a''_{2,4} - a_{1,4}a''_{2,3}) =$$
$$= f\left(\sum_{i=1}^n a_{1,i}e_i, \sum_{j=1}^n a'_{2,j}e_j\right) + f\left(\sum_{i=1}^n a_{1,i}e_i, \sum_{j=1}^n a''_{2,j}e_j\right)$$

и на

$$f\left(\sum_{i=1}^n a_{1,i}e_i, \lambda\left(\sum_{j=1}^n a_{2,j}e_j\right)\right) = f\left(\sum_{i=1}^n a_{1,i}e_i, \sum_{j=1}^n (\lambda a_{2,j})e_j\right) =$$
$$= a_{1,3}(\lambda a_{2,4}) - a_{1,4}(\lambda a_{2,3}) = \lambda(a_{1,3}a_{2,4} - a_{1,4}a_{2,3}) = \lambda f\left(\sum_{i=1}^n a_{1,i}e_i, \sum_{j=1}^n a_{2,j}e_j\right).$$

Това доказва полилинейността на f.

Анти-симетричността на f може да се провери непосредствено,

$$f\left(\sum_{j=1}^n a_{2,j}e_j, \sum_{i=1}^n a_{1,i}e_i\right) = a_{2,3}a_{1,4} - a_{2,4}a_{1,3} =$$
$$= -(a_{1,3}a_{2,4} - a_{1,4}a_{2,3}) = -f\left(\sum_{i=1}^n a_{1,i}e_i, \sum_{j=1}^n a_{2,j}e_j\right).$$

Ако полилинейна функция се анулира за равни аргументи, то тя е анти-симетрична. Затова е достатъчно да забележим, че

$$f\left(\sum_{i=1}^n a_{1,i}e_i, \sum_{j=1}^n a_{1,j}e_j\right) = a_{1,3}a_{1,4} - a_{1,4}a_{1,3} = 0,$$

за да твърдим, че полилинейната функция f е анти-симетрична.

□

Задача 42. *Нека F е числово поле, V е линейно пространство над F и*

$$f : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n} \longrightarrow F$$

е полилинейна функция. Да се докаже, че f е анти-симетрична функция тогава и само тогава, когато

$$f(a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_p, \ldots, a_n) = 0$$

се анулира при равни аргументи.

Доказателство. Ако

$$f : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n} \longrightarrow F$$

е полилинейна анти-симетрична функция върху линейно пространство V над числово поле F, то за произволни вектори $a_1, \ldots, a_n \in V$ с $a_p = a_q$ за някои $1 \leq p < q \leq n$ следва

$$f(a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_p, \ldots a_n) = -f(a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_p, \ldots, a_n),$$

защото размяната на a_p с $a_q = a_p$ променя знака на анти-симетричната функция f. В резултат, $2f(a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_p, \ldots, a_n) = 0$, откъдето $f(a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_p, \ldots, a_n) = 0$, защото произведение на комплексни числа се анулира само ако единият множител е нулев. В горното разсъждение използваме, че полето F е числово, но не използваме полилинейността на f.

Обратно, ако полилинейна функция

$$f : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n} \longrightarrow F$$

се анулира при равни аргументи, то

$$\begin{aligned} 0 = f(a_1, \ldots, a_p + a_q, \ldots, a_p + a_q, \ldots, a_n) = \\ = f(a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_p + a_q, \ldots, a_n) + f(a_1, \ldots, a_q, \ldots, a_p + a_q, \ldots, a_n) = \\ = f(a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_p, \ldots, a_n) + f(a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_q, \ldots, a_n) + \\ + f(a_1, \ldots, a_q, \ldots, a_p, \ldots, a_n) + f(a_1, \ldots, a_q, \ldots, a_q, \ldots, a_n) = \\ = f(a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_q, \ldots, a_n) + f(a_1, \ldots, a_q, \ldots, a_p, \ldots, a_n). \end{aligned}$$

Следователно

$$f(a_1, \ldots, a_q, \ldots, a_p, \ldots, a_n) = -f(a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_q, \ldots, a_n)$$

за произволни $1 \leq p < q \leq n$ и функцията f е анти-симетрична. В горното разсъждение се използва полилинейността на f, но не и това, че полето F е числово.

□

Задача 43. *Да се докаже, че прилагането на транспозиция променя четността на пермутация.*

Доказателство. Нека $i_1, \ldots, i_n$ е пермутация на числата $1, \ldots, n$. Ако приложим транспозиция (i_p, i_{p+1}) на съседни числа от $i_1, \ldots, i_n$ (т.е. ако разменим помежду си съседните числа i_p и i_{p+1}), то двойките от вида i_r, i_s; i_r, i_p и i_r, i_{p+1} с $r, s \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{p, p+1\}$, $r \neq s$ не променят взаимното си положение. Затова между тях не изчезват и не възникват инверсии. Ако $i_p < i_{p+1}$, то действието на транспозицията (i_p, i_{p+1}) поражда инверсия между i_{p+1}, i_p и променя четността на пермутацията. Ако $i_p > i_{p+1}$, то транспозицията (i_p, i_{p+1}) премахва инверсията между i_p, i_{p+1} и променя четността на пермутацията.

За произволни $1 \leq p < q \leq n$ ще представим транспозицията (i_p, i_q) като последователност от нечетен брой транспозиции на съседни числа. Вече доказахме, че всяка транспозиция на съседни числа променя четността на пермутация. Следователно прилагането на нечетен брой транспозиции на съседни числа променя нечетен брой пъти четността на пермутация и прилагането на (i_p, i_q) променя четността на пермутацията.

Транспозицията (i_p, i_q) премества числото i_p между i_{q-1} и i_{q+1} (на старото място на i_q) и числото i_q между i_{p-1} и i_{p+1} (на старото място на i_p). Последователно разменяме i_p с i_{p+1}, $i_{p+2}, \ldots, i_q$, за да преместим i_p между i_q и i_{q+1}. С други думи, прилагаме транспозициите на съседни числа

$$(i_p, i_q) \ldots (i_p, i_{p+2})(i_p, i_{p+1}),$$

четени отдясно наляво. Това се налага от факта, че транспозициите са изображения на множеството $\{1, \dots, n\}$ в себе си и аргументът на изображение се записва вдясно от изображението. В резултат, първата транспозиция, която действа е най-дясната и тя е последвана от останалите, четени отдясно наляво. Броят на транспозициите, с които изпращаме i_p на мястото на i_q е $q-p$. След като преместим i_p между i_q и i_{q+1}, трабва да разменим i_q с $i_{q-1}, \dots i_{p+1}$, за да изпратим i_q на мястото на i_p между i_{p-1} и i_{p+1}. С други думи, прилагаме транспозициите на съседни числа

$$(i_q, i_{p+1}) \dots (i_q, i_{q-2})(i_q, i_{q-1}),$$

чийто брой е $q-1-p$. Това дава разлагане

$$(i_p, i_q) = (i_q, i_{p+1}) \dots (i_q, i_{q-2})(i_q, i_{q-1})(i_p, i_q) \dots (i_p, i_{p+2})(i_p, i_{p+1})$$

в произведение на $(q-p)+(q-p-1) = 2(q-p)-1$ транспозиции на съседни числа и завършва доказателството.

$\square$

Задача 44. *Нека V е линейно пространство над поле F,*

$$f : \underbrace{V \times \dots \times V}_{n} \longrightarrow F$$

е анти-симетрична функция на n аргумента, $a_1, \dots, a_n \in V$, а $i_1, \dots, i_n$ е пермутация на числата $1, 2, \dots, n$. Да се докаже, че

$$f(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) = (-1)^{[i_1, \dots, i_n]} f(a_1, \dots, a_n)$$

за броя $[i_1, \dots, i_n]$ на инверсиите в $i_1, \dots, i_n$.

Доказателство. Ако пермутацията $j_1, \dots, j_n$ се получава от пермутацията $i_1, \dots, i_n$ чрез прилагане на транспозиция, то $(-1)^{[i_1, \dots, i_n]} = -(-1)^{[j_1, \dots, j_n]}$, защото прилагането на транспозиция променя четността на пермутация и $f(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) = -f(a_{j_1}, \dots, a_{j_n})$ от определението за анти-симетрична функция. Нека $1, \dots, n$ се получава от $i_1, \dots, i_n$ чрез прилагане на m транспозиции. Тогава

$$(-1)^{[i_1, \dots, i_n]} = (-1)^m (-1)^{[1, \dots, n]} = (-1)^m,$$

защото прилагането на m транспоиции сменя m пъти четността на пермутация и

$$f(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) = (-1)^m f(a_1, \dots, a_n),$$

защото прилагането на m транспозиции към аргументите на анти-симетрична функция води до умножение с $(-1)^m$. В резултат,

$$f(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) = (-1)^{[i_1, \dots, i_n]} f(a_1, \dots, a_n).$$

$\square$

Задача 45. *Нека F е числово поле, V е линайно пространство над F с базис $e_1, \dots, e_n$,*

$$f : \underbrace{V \times \dots \times V}_{n} \longrightarrow F$$

е полилинейна анти-симетрична функция на n аргумента, а

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} e_j, \quad 1 \leq i \leq n$$

са n вектора с координати $a_{i,1}, \ldots, a_{i,n}$ спрямо базиса $e_1, \ldots, e_n$. Да се докаже, че

$$f(a_1, \ldots, a_n) = \left(\sum_{i_1, \ldots, i_n} (-1)^{[i_1, \ldots, i_n]} a_{1,i_1} \ldots a_{n,i_n} \right) f(e_1, \ldots, e_n),$$

където сумирането е по всички пермутации $i_1, \ldots, i_n$ на числата $1, \ldots, n$, а $[i_1, \ldots, i_n]$ е броят на инверсиите в пермутацията $i_1, \ldots, i_n$.

Доказателство. Съгласно полилинейността на f е в сила

$$f(a_1, \ldots, a_n) = f\left(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1,j_1} e_{j_1}, \ldots, \sum_{j_n=1}^{n} a_{n,j_n} e_{j_n} \right) =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{n} \ldots \sum_{j_n=1}^{n} a_{1,j_1} \ldots a_{n,j_n} f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}).$$

Анти-симетричната функция f над числово поле F се анулира при равни аргументи, така че е достатъчно да сумираме

$$f(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i_1, \ldots, i_n} a_{1,i_1} \ldots a_{n,i_n} f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n})$$

по пермутациите $i_1, \ldots, i_n$ на $1, \ldots, n$. Понеже

$$f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) = (-1)^{[i_1, \ldots, i_n]} f(e_1, \ldots, e_n)$$

за броя $[i_1, \ldots, i_n]$ на инверсиите в пермутация $i_1, \ldots, i_n$, получаваме

$$f(a_1, \ldots, a_n) = \left(\sum_{i_1, \ldots, i_n} (-1)^{[i_1, \ldots, i_n]} a_{1,i_1} \ldots a_{n,i_n} \right) f(e_1, \ldots, e_n).$$

□

Задача 46. *Нека V е линейно пространство над числово поле F с базис $e_1, \ldots, e_n$. Тогава съществува единствена полилинейна анти-симетрична функция*

$$f : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n} \longrightarrow F$$

на n аргумента с $f(e_1, \ldots, e_n) = 1$.

Доказателство. Ако

$$f : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n} \longrightarrow F$$

е полилинейна анти-симетрична функция на n аргумента върху n-мерно линейно пространство V над числово поле F и $f(e_1, \ldots, e_n) = 1$, то за произволни вектори $a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} e_j$, $1 \leq i \leq n$ е в сила

$$f(a_1, \ldots, a_n) = f\left(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1,j_1} e_{j_1}, \ldots, \sum_{j_n=1}^{n} a_{n,j_n} e_{j_n} \right) =$$

$$= \left(\sum_{i_1, \ldots, i_n} (-1)^{[i_1, \ldots, i_n]} a_{1,i_1} \ldots a_{n,i_n} \right) f(e_1, \ldots, e_n) = \sum_{i_1, \ldots, i_n} (-1)^{[i_1, \ldots, i_n]} a_{1,i_1} \ldots a_{n,i_n},$$

където сумирането е по всички пермутации $i_1, \dots, i_n$ на $1, \dots, n$, а $[i_1, \dots, i_n]$ е броят на инверсиите в пермутация $i_1, \dots, i_n$. Това доказва единствеността на f.

Да разгледаме функцията

$$f : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n} \longrightarrow F,$$

$$f(a_1, \dots, a_n) = f\left(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1,j_1} e_{j_1}, \dots, \sum_{j_n=1}^{n} a_{n,j_n} e_{j_n}\right) = \sum_{i_1,\dots,i_n} (-1)^{[i_1,\dots,i_n]} a_{1,i_1} \dots a_{n,i_n},$$

където сумирането е по всички пермутации $i_1, \dots, i_n$ на $1, \dots, n$ и $[i_1, \dots, i_n]$ е броят на инверсиите в пермутация $i_1, \dots, i_n$. Достатъчно е да докажем, че f е полилинейна анти-симетрична функция с $f(e_1, \dots, e_n) = 1$, за да установим съществуването на f и да докажем твърдението.

За произволно $1 \leq i \leq n$, ако $a'_i = \sum\limits_{j_i=1}^{n} a'_{i,j_i} e_{j_i}$ и $a''_i = \sum\limits_{j_i=1}^{n} a''_{i,j_i} e_{j_i}$, то

$$f(a_1, \dots, a'_i + a''_i, \dots, a_n) = \sum_{i_1,\dots,i_n} (-1)^{[i_1,\dots,i_n]} a_{1,j_1} \dots (a'_{i,j_i} + a''_{i,j_i}) \dots a_{n,j_n} =$$

$$= \sum_{i_1,\dots,i_n} (-1)^{[i_1,\dots,i_n]} a_{1,j_1} \dots a'_{i,j_i} \dots a_{n,j_n} + \sum_{i_1,\dots,i_n} (-1)^{[i_1,\dots,i_n]} a_{1,j_1} \dots a''_{i,j_i} \dots a_{n,j_n} =$$

$$= f(a_1, \dots, a'_i, \dots, a_n) + f(a_1, \dots, a''_i, \dots, a_n).$$

За произволни $1 \leq i \leq n$ и $\lambda \in F$ е изпълнено

$$f(a_1, \dots, \lambda a_i, \dots, a_n) = \sum_{i_1,\dots,i_n} (-1)^{[i_1,\dots,i_n]} a_{1,i_1} \dots (\lambda a_{i,j_i}) \dots a_{n,j_n} =$$

$$= \lambda \left(\sum_{i_1,\dots,i_n} (-1)^{[i_1,\dots,i_n]} a_{1,i_1} \dots a_{i,j_i} \dots a_{n,j_n}\right) = \lambda f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n).$$

Това доказва линейността на f относно i-тия аргумент, а оттам и полилинейността на функцията f.

Ако $1 \leq p < q \leq n$, $a_q = a_p$, то

$$f(a_1, \dots, a_p, \dots, a_p, \dots, a_n) = \sum_{i_1,\dots,i_n} (-1)^{[i_1,\dots,i_p,i_q,\dots,i_n]} a_{1,i_1} \dots a_{p,i_p} \dots a_{p,i_q} \dots a_{n,i_n} = 0,$$

защото за произволни фиксирани $1 \leq i_p < i_q \leq n$ събираемите

$$\alpha = (-1)^{[i_1,\dots,i_p,\dots,i_q,\dots,i_n]} a_{1,i_1} \dots a_{p,i_p} \dots a_{p,i_q} \dots a_{n,i_n}$$

и

$$\beta = (-1)^{[i_1,\dots,i_q,\dots,i_p,\dots,i_n]} a_{1,i_1} \dots a_{p,i_q} \dots a_{p,i_p} \dots a_{n,i_n}$$

се унищожават. Причина за това е, че прилагането на транспозиция (i_p, i_q) променя четността на пермутация, така че

$$(-1)^{[i_1,\dots,i_q,\dots,i_p,\dots,i_n]} = -(-1)^{[i_1,\dots,i_p,\dots i_q,\dots,i_n]}.$$

Комутативността на умножението в F гарантира

$$a_{1,i_1} \dots a_{p,i_p} \dots a_{p,i_q} \dots a_{n,i_n} = a_{1,i_1} \dots a_{p,i_q} \dots a_{p,i_p} \dots a_{n,i_n}$$

и доказва, че $\beta = -\alpha$. Полилинейната функция f, анулираща се за два равни аргумента е анти-симетрична.

Вземайки предвид, че координатите на базисните вектори e_p спрямо базиса $e_1, \dots, e_n$ са

$$\delta_{p,j} = \begin{cases} 1 & \text{за } 1 \leq p = j \leq n, \\ 0 & \text{за } 1 \leq p \neq j \leq n, \end{cases}$$

пресмятаме, че

$$f(e_1, \dots, e_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} (-1)^{[i_1, \dots, i_n]} \delta_{1,i_1} \dots \delta_{n,i_n} = (-1)^{[1, \dots, n]} \delta_{1,1} \dots \delta_{n,n} = 1$$

и установяваме съществуването на f с необходимите свойства.

□

Задача 47. *Нека e_1, e_2, e_3 е базис на линейно пространство V над полето $\mathbb{Q}$ на рационалните числа, а $f : V \times V \to \mathbb{Q}$ е полилинейна анти-симетрична функция. Да се докаже, че за произволни вектори*

$$a_1 = \sum_{j_1=1}^{3} a_{1,j_1} e_{j_1} \quad \textit{и} \quad a_2 = \sum_{j_2=1}^{3} a_{2,j_2} e_{j_2}$$

от V е в сила

$$f(a_1, a_2) = A_{3,1} f(e_2, e_3) + A_{3,2} f(e_3, e_1) + A_{3,3} f(e_1, e_2),$$

където $A_{3,i}$ са адюнгираните количества на елементите от третия ред на матрицата

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Доказателство. От полилинейността на f следва, че

$$f(a_1, a_2) = f\left(\sum_{j_1=1}^{3} a_{1,j_1} e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{3} a_{2,j_2} e_{j_2} \right) = \sum_{j_1=1}^{3} \sum_{j_2=1}^{3} a_{1,j_1} a_{2,j_2} f(e_{j_1}, e_{j_2}).$$

Анти-симетричността на функцията f над числовото поле $\mathbb{Q}$ води до анулиране на f при равни аргументи, така че

$$f(a_1, a_2) = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq 3} a_{1,j_1} a_{2,j_2} f(e_{j_1}, e_{j_2}) + a_{1,j_2} a_{2,j_1} f(e_{j_2}, e_{j_1}) =$$
$$= \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq 3} (a_{1,j_1} a_{2,j_2} - a_{1,j_2} a_{2,j_1}) f(e_{j_1}, e_{j_2}),$$

вземайки предвид $f(e_{j_2}, e_{j_1}) = -f(e_{j_1}, e_{j_2})$. По-подробно,

$$f(a_1, a_2) =$$
$$= (a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1}) f(e_1, e_2) + (a_{1,2} a_{2,3} - a_{1,3} a_{2,2}) f(e_2, e_3) + (a_{1,1} a_{2,3} - a_{1,3} a_{2,1}) f(e_1, e_3).$$

От друга страна,

$$A_{3,i} = (-1)^{3+i} \Delta_{i,3}$$

за детерминантата $\Delta_{3,i}$ на матрицата, получена от A чрез премахване на третия ред и i-тия стълб. Това дава

$$A_{3,1} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} = a_{1,2}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,2},$$

$$A_{3,2} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{vmatrix} = -(a_{1,1}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,1}),$$

$$A_{3,3} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}.$$

Прилагайки $f(e_1, e_3) = -f(e_3, e_1)$ завършваме решението на задачата.

□

Задача 48. *Нека e_1, e_2 е базис на линейно пространство V над полето $\mathbb{Z}_2$ на остатъците при деление на 2 и $a_i = a_{i,1}e_1 + a_{i,2}e_2 \in V$, $1 \leq i \leq 2$. Да се докаже, че:*

(i) $f : V \times V \to \mathbb{Z}_2$, $f(a_1, a_2) = a_{1,2}a_{2,2}$ е полилинейна анти-симетрична функция;

(ii) $f(a_1, a_2) = \overline{0} \in \mathbb{Z}_2$ тогава и само тогава, когато a_1 или a_2 принадлежи на правата през началото $l(e_1)$.

Доказателство. (i) Ако $a_1' = \sum\limits_{j_1=1}^{2} a_{1,j_1}' e_{j_1}$, $a_1'' = \sum\limits_{j_1=1}^{2} a_{1,j_1}'' e_{j_1}$, то

$$f(a_1' + a_1'', a_2) = f\left(\sum_{j_1=1}^{2}(a_{1,j_1}' + a_{1,j_1}'')e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{2} a_{2,j_2}e_{j_2}\right) = (a_{1,2}' + a_{1,2}'')a_{2,2} =$$

$$= a_{1,2}'a_{2,2} + a_{1,2}''a_{2,2} = f\left(\sum_{j_1=1}^{2} a_{1,j_1}'e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{2} a_{2,j_2}e_{j_2}\right) + f\left(\sum_{j_1=1}^{2} a_{1,j_1}''e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{2} a_{2,j_2}e_{j_2}\right) =$$

$$= f(a_1', a_2) + f(a_1'', a_2).$$

Аналогично, за $a_2' = \sum\limits_{j_2=1}^{2} a_{2,j_2}' e_{j_2}$ и $a_2'' = \sum\limits_{j_2=1}^{2} a_{2,j_2}'' e_{j_2}$ е изпълнено

$$f(a_1, a_2' + a_2'') = f\left(\sum_{j_1=1}^{2} a_{1,j_1}e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{2}(a_{2,j_2}' + a_{2,j_2}'')e_{j_2}\right) = a_{1,2}(a_{2,2}' + a_{2,2}'') =$$

$$= a_{1,2}a_{2,2}' + a_{1,2}a_{2,2}'' = f\left(\sum_{j_1=1}^{2} a_{1,j_1}e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{2} a_{2,j_2}'e_{j_2}\right) + f\left(\sum_{j_1=1}^{2} a_{1,j_1}e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{2} a_{2,j_2}''e_{j_2}\right) =$$

$$= f(a_1, a_2') + f(a_1, a_2'').$$

За $\lambda = \overline{1} \in \mathbb{Z}_2$ е в сила

$$f(\overline{1}a_1, a_2) = f(a_1, a_2) = \overline{1}f(a_1, a_2)$$

и

$$f(a_1, \overline{1}a_2) = f(a_1, a_2) = \overline{1}f(a_1, a_2).$$

Ако $\lambda = \overline{0} \in \mathbb{Z}_2$, то

$$f(\overline{0}a_1, a_2) = f(\overline{0}e_1 + \overline{0}e_2, a_2) = \overline{0}a_{2,2} = \overline{0} = \overline{0}f(a_1, a_2)$$

и

$$f(a_1, \overline{0}a_2) = f(a_1, \overline{0}e_1 + \overline{0}e_2) = a_{1,2}\overline{0} = \overline{0} = \overline{0}f(a_1, a_2).$$

Това доказва полилинейността на f.

За $a_{i,j}$ от полето $\mathbb{Z}_2$ на остатъците при деление с 2 е изпълнено $a_{2,2}a_{1,2} + a_{1,2}a_{2,2} = 2a_{1,2}a_{2,2} = \overline{0}$. (Тук използваме, че $2.\overline{0} = \overline{0} + \overline{0} = \overline{0}$ и $2.\overline{1} = \overline{1} + \overline{1} = \overline{0}$.) Следователно

$$f(a_2, a_1) = a_{2,2}a_{1,2} = -a_{1,2}a_{2,2} = -f(a_1, a_2)$$

и функцията f е анти-симетрична.

(ii) Понеже $\mathbb{Z}_2$ е поле, произведението $f(a_1, a_2) = a_{1,2}a_{2,2} = \overline{0} \in \mathbb{Z}_2$ се анулира само ако единият множител се анулира. Ако $a_{1,2} = \overline{0}$, то $a_1 = a_{1,1}e_1 \in l(e_1)$. За $a_{2,2} = \overline{0}$ е изпълнено $a_2 = a_{2,1}e_1 \in l(e_1)$.

□

8. Детерминанта - определение, основни свойства, транспониране на детерминанта.

Задача 49. *Да се даде определение за детерминанта и за всички понятия, които се използват в това определение.*

Да се пресметне детерминантата

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Доказателство. Всяко подреждане $i_1, i_2, \dots, i_n$ на числата $1, 2, \dots, n$ се нарича пермутация на $1, 2, \dots, n$. Числата i_p и i_q от пермутация $i_1, \dots, i_p, \dots, i_q, \dots, i_n$ образуват инверсия, ако $p < q$ и $i_p > i_q$. Детерминантата на квадратна матрица $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(F)$ е

$$\det(A) = \sum_{i_1,\dots,i_n} (-1)^{[i_1,\dots,i_n]} \; a_{1,i_1}a_{2,i_2}\dots a_{p,i_p}\dots a_{n,i_n},$$

където сумирането е по всички пермутации $i_1, \dots, i_n$ на $1, 2, \dots, n$ и $[i_1, \dots, i_n]$ е броят на инверсиите в $i_1, i_2, \dots, i_n$.

Събираемо $(-1)^{[i_1,\dots,i_n]}a_{1,i_1}\dots a_{p,i_p}\dots a_{n,i_n}$ на Δ се анулира за всички $2 \le i_1 \le n$. Затова

$$\Delta = \sum_{i_2,\dots,i_n} (-1)^{[i_2,\dots,i_n]}a_{1,1}a_{2,i_2}\dots a_{n,i_n},$$

където сумирането е по всички пермутации $i_2, \dots, i_n$ на $2, \dots, n$. Ако $3 \le i_2 \le n$, то $a_{2,i_2} = 0$, така че

$$\Delta = \sum_{i_3,\dots,i_n} (-1)^{[i_3,\dots,i_n]}a_{1,1}a_{2,2}a_{3,i_3}\dots a_{n,i_n}.$$

Продължавайки по същия начин получаваме, че детерминантата

$$\Delta = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}\dots a_{n,n}$$

на диагонална матрица е равна на произведението на елементите от диагонала.

□

Задача 50. *Нека $j_1, \dots, j_n$ и $k_1, \dots, k_n$ са пермутации на числата $1, \dots, n$ с $[j_1, \dots, j_n]$, съответно $[k_1, \dots, k_n]$ инверсии. Да се докаже, че*

$$\alpha = (-1)^{[j_1,\dots,j_n]+[k_1,\dots,k_n]} \; a_{j_1,k_1}a_{j_2,k_2}\dots a_{j_n,k_n}$$

е събираемо на детерминантата $\det(a_{i,j})_{i,j=1}^n$ на матрицата $(a_{i,j})_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(F)$.

Доказателство. За произволни $1 \le p < q \le n$ прилагането на транспозицията (j_p, j_q) към $j_1, \dots, j_n$ и на транпозицията (k_p, k_q) към $k_1, \dots, k_n$ трансформира α в

$$\beta = (-1)^{[j_1,\dots,j_q,\dots,j_p,\dots,j_n]+[k_1,\dots,k_q,\dots,k_p,\dots,k_n]} \ \ a_{j_1,k_1} \dots a_{j_q,k_q} \dots a_{j_p,k_p} \dots a_{j_n,k_n}.$$

Умножението в F е комутативно, така че

$$a_{j_1,k_1} \dots a_{j_p,k_p} \dots a_{j_q,k_q} \dots a_{j_n,k_n} = a_{j_1,k_1} \dots a_{j_q,k_q} \dots a_{j_p,k_p} \dots a_{j_n,k_n}.$$

Прилагането на транспозицията (j_p, j_q) към $j_1, \dots, j_n$ променя четността на тази пермутация и

$$(-1)^{[j_1,\dots,j_q,\dots,j_p,\dots,j_n]} = -(-1)^{[j_1,\dots,j_p,\dots,j_q,\dots,j_n]}.$$

Аналогично, прилагането на транспозицията (k_p, k_q) към $k_1, \dots, k_n$ променя четността на тази пермутация, така че

$$(-1)^{[k_1,\dots,k_q,\dots,k_p,\dots,k_n]} = -(-1)^{[k_1,\dots,k_p,\dots,k_q,\dots,k_n]}$$

Следователно

$$(-1)^{[j_1,\dots,j_q,\dots,j_p,\dots,j_n]+[k_1,\dots,k_q,\dots,k_p,\dots,k_n]} = (-1)^{[j_1,\dots,j_p,\dots,j_q,\dots,j_n]+[k_1,\dots,k_p,\dots,k_q,\dots,k_n]}$$

и $\beta = \alpha$.

С подходяща последователност от транспозиции свеждаме $j_1, \dots, j_n$ към $1, \dots, n$. По-точно, ако $j_s = 1$, то разменяме j_s с j_1, така че получената пермутация да започва с 1. После преместваме числото 2 на втора позиция чрез транспозиция на j_2 с $j_t = 2$ и т.н., докато получим пермутацията $1, \dots, n$. Съответните транспозиции свеждат пермутацията $k_1, \dots, k_n$ на $1, \dots, n$ към пермутация $i_1, \dots, i_n$. Това дава възможност да представим

$$\alpha = (-1)^{[1,\dots,n]+[i_1,\dots,i_n]} \ \ a_{1,i_1} \dots a_{n,i_n} = (-1)^{[i_1,\dots,i_n]} \ \ a_{1,i_1} \dots a_{n,i_n},$$

вземайки предвид, че пермутацията $1, \dots, n$ няма инверсии. Сега е ясно, че

$$\alpha = (-1)^{[i_1,\dots,i_n]} a_{1,i_1} \dots a_{n,i_n}$$

е събираемо на

$$\det(a_{i,j})_{i,j=1}^n = \sum_{i_1,\dots,i_n} (-1)^{[i_1,\dots,i_n]} \ \ a_{1,i_1} \dots a_{n,i_n},$$

където сумирането е по всички пермутации $i_1, \dots, i_n$ на $1, \dots, n$ и $[i_1, \dots, i_n]$ е броят на инверсиите в $i_1, \dots, i_n$.

□

Задача 51. *Да се докаже, че транспонирането на матрица не променя нейната детерминанта.*

Доказателство. Ако $A = (A_{i,j})_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(F)$ е матрица с елементи $A_{i,j} \in F$, то транспонираната матрица $A^t \in M_{n\times n}(F)$ има елементи $(A^t)_{i,j} = A_{j,i}$, $1 \le i, j \le n$. По определение,

$$\det(A^t) = \sum_{i_1,\dots,i_n} (-1)^{[i_1,\dots,i_n]} \ \ (A^t)_{1,i_1} \dots (A^t)_{n,i_n} =$$

$$= \sum_{i_1,\dots,i_n} (-1)^{[i_1,\dots,i_n]} \ \ A_{i_1,1} \dots A_{i_n,n},$$

където сумирането е по всички пермутации $i_1, \ldots, i_n$ на числата $1, \ldots, n$, а $[i_1, \ldots, i_n]$ е броят на инверсиите в пермутация $i_1, \ldots, i_n$. Всяко събираемо

$$(-1)^{[i_1,\ldots,i_n]} A_{i_1,1} \ldots A_{i_n,n} = (-1)^{[i_1,\ldots,i_n]+[1,\ldots,n]} A_{i_1,1} \ldots A_{i_n,n}$$

на $\det(A^t)$ е събираемо на

$$\det(A) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} (-1)^{[i_1,\ldots,i_n]} \ A_{1,i_1} \ldots A_{n,i_n}.$$

Следователно $\det(A^t)$ и $\det(A)$ съвпадат, защото имат един и същи брой събираеми - $n!$.

□

9. Развитие на детерминанта по ред и по стълб.

Задача 52. *Да се даде определение за адюнгирано количество на детерминанта от ред n, да се посочи общия вид на сьбираемо на адюнгирано количество и да се определи броят на сьбираемите на такова адюнгирано количество.*

Да се намери адюнгираното количество $A_{2,3}$ на

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & 0 & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & 0 & a_{3,3} & a_{3,4} & 0 \\ 0 & a_{4,2} & a_{4,3} & 0 & a_{4,5} \\ a_{5,1} & 0 & a_{5,3} & a_{5,4} & 0 \end{vmatrix}.$$

Доказателство. Нека $\det(a_{i,j})_{i,j=1}^n$ е детерминанта от n-ти ред, а $1 \leq p, q \leq n$ са естествени числа. Ако от събираемите на $\det(a_{i,j})_{i,j=1}^n$, които са кратни на $a_{p,q}$ изнесем пред скоби $a_{p.q}$, то това което остава в скобата са нарича адюнгирано количество и се бележи с $A_{p,q}$. Адюнгираното количество $A_{p,q}$ има $(n-1)!$ събираеми от вида

$$(-1)^{[i_1,\ldots,i_{p-1},q,i_{p+1},\ldots,i_n]} a_{1,i_1} \ldots a_{p-1,i_{p-1}} a_{p+1,i_{p+1}} \ldots a_{n,i_n},$$

защото пермутациите $i_1, \ldots i_n$ на $1, \ldots, n$ с $i_p = q$ са $(n-1)!$ на брой.

Развиваме последователно по адюнгирани количества

$$A_{2,3} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} & 0 & a_{1,5} \\ a_{3,1} & 0 & a_{3,4} & 0 \\ 0 & a_{4,2} & 0 & a_{4,5} \\ a_{5,1} & 0 & a_{5,4} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\left[(-1)^{1+2} a_{1,2} \begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,4} & 0 \\ 0 & 0 & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,4} & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} a_{1,5} \begin{vmatrix} a_{3,1} & 0 & a_{3,4} \\ 0 & a_{4,2} & 0 \\ a_{5,1} & 0 & a_{5,4} \end{vmatrix} \right] =$$

$$= a_{1,2}(-1)^{2+3} a_{4,5} \begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,4} \\ a_{5,1} & a_{5,4} \end{vmatrix} + a_{1,5}(-1)^{2+2} a_{4,2} \begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,4} \\ a_{5,1} & a_{5,4} \end{vmatrix} =$$

$$= (-a_{1,2}a_{4,5} + a_{1,5}a_{4,2})(a_{3,1}a_{5,4} - a_{3,4}a_{5,1}).$$

□

Задача 53. *Нека $(a_{i,j})_{i,j=1}^n \in M_{n \times n}(F)$ е квадратна матрица от ред n с елементи от поле F, а $1 \leq p, q \leq n$ са естествени числа. Да се докаже, че:*

(i) $\sum\limits_{s=1}^{n} a_{p,s} A_{p,s} = \det(a_{i,j})_{i,j=1}^n$ *(развитие на детерминанта по ред) ;*

(ii) $\sum\limits_{s=1}^{n} a_{s,q}A_{s,q} = \det(a_{i,j})_{i,j=1}^{n}$ *(развитие на детерминанта по стълб), където* $A_{i,j}$ *е адюнгираното количество на* $a_{i,j}$*.*

Доказателство. (i) Всяко събираемо на $A_{p,s}$ е от вида

$$(-1)^{[i_1,\ldots,i_{p-1},s,i_{p+1},\ldots,i_n]}a_{1,i_1}\ldots a_{p-1,i_{p-1}}a_{p+1,i_{p+1}}\ldots a_{n,i_n}.$$

Следователно всяко събираемо на $a_{p,s}A_{p,s}$ е от вида

$$(-1)^{[i_1,\ldots,i_{p-1},s,i_{p+1},\ldots,i_n]}a_{1,i_1}\ldots a_{p-1,i_{p-1}}a_{p,s}a_{p+1,i_{p+1}}\ldots a_{n,i_n}$$

и е събираемо на

$$\det(a_{i,j})_{i,j=1}^{n} = \sum_{i_1,\ldots,i_n}(-1)^{[i_1,\ldots,i_n]}a_{1,i_1}\ldots a_{p-1,i_{p-1}}a_{p,i_p}a_{p+1,i_{p+1}}\ldots a_{n,i_n}.$$

Всяко адюнгирано количество $A_{p,s}$ има $(n-1)!$ събираеми, защото това е броят на пермутациите $i_1,\ldots,i_{p-1},s,i_{p+1},\ldots,i_n$ на $1,\ldots,n$ с фиксирано $i_p = s$. Сумата $\sum\limits_{s=1}^{n} a_{p,s}A_{p,s}$ и детерминантата $\det(a_{i,j})_{i,j=1}^{n}$ имат един и същи брой събираеми - $n(n-1)! = n!$ и съвпадат.

(ii) Всяко събираемо на $A_{s,q}$ е от вида

$$(-1)^{[i_1,\ldots,i_{s-1},q,i_{s+1},\ldots,i_n]}a_{1,i_1}\ldots a_{s-1,i_{s-1}}a_{s+1,i_{s+1}}\ldots a_{n,i_n}.$$

Следователно всяко събираемо на $a_{s,q}A_{s,q}$ е от вида

$$(-1)^{[i_1,\ldots,i_{s-1},q,i_{s+1},\ldots,i_n]}a_{1,i_1}\ldots a_{s-1,i_{s-1}}a_{s,q}a_{s+1,i_{s+1}}\ldots a_{n,i_n}$$

и е събираемо на $\det(a_{i,j})_{i,j=1}^{n}$. Броят на събираемите на $A_{s,q}$ е равен на броя $(n-1)!$ на пермутациите $i_1,\ldots,i_n$ на $1,\ldots,n$ с фиксирано $i_s = q$. Следователно $\sum\limits_{s=1}^{n} a_{s,q}A_{s,q}$ има $n(n-1)! = n!$ събираеми и съвпада с $\det(a_{i,j})_{i,j=1}^{n}$.

□

Задача 54. *Нека* $(a_{i,j})_{i,j=1}^{n} \in M_{n\times n}(F)$ *е квадратна матрица от ред* n, $1 \leq p,q \leq n$ *са естествени числа, а* $A_{p,q}$ *е адюнгираното количество на* $a_{p,q}$*. Да се докаже, че*

$$A_{p,q} = (-1)^{p+q}\Delta_{p,q}$$

за минора

$$\Delta_{p,q} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,q-1} & a_{1,q+1} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p-1,1} & \ldots & a_{p-1,q-1} & a_{p-1,q+1} & \ldots & a_{p-1,n} \\ a_{p+1,1} & \ldots & a_{p+1,q-1} & a_{p+1,q+1} & \ldots & a_{p+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,q-1} & a_{n,q+1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

от $(n-1)$*-ви ред, който се получава от* $\det(a_{i,j})_{i,j=1}^{n}$ *чрез премахване на реда с номер p и стълба с номер* q*.*

Доказателство. Всяко събираемо на $A_{p,q}$ е от вида

$$\alpha = (-1)^{[i_1,\ldots,i_{p-1},q,i_{p+1},\ldots,i_n]}a_{1,i_1}\ldots a_{p-1,i_{p-1}}a_{p+1,i_{p+1}}\ldots a_{n,i_n}.$$

Прилагайки транспозициите $(i_{p-1},q),(i_{p-2},q),\dots,(i_1,q)$ променяме $p-1$ пъти знака на α и получаваме

$$\alpha=(-1)^{p-1}(-1)^{[q,i_1,\dots,i_{p-1},i_{p+1},\dots,i_n]}a_{1,i_1}\dots a_{p-1,i_{p-1}}a_{p+1,i_{p+1}}\dots a_{n,i_n}.$$

Изпускането на q от пермутацията $q,i_1,\dots,i_{p-1},i_{p+1},\dots,i_n$ премахва инверсиите на q със стоящите след него числа $q-1,\dots,2,1$, по-малки от q, така че

$$\alpha=(-1)^{p-1}(-1)^{q-1}(-1)^{[i_1,\dots,i_{p-1},i_{p+1},\dots,i_n]}a_{1,i_1}\dots a_{p-1,i_{p-1}}a_{p+1,i_{p+1}}\dots a_{n,i_n}.$$

Да забележим, че

$$\beta:=(-1)^{[i_1,\dots,i_{p-1},i_{p+1},\dots,i_n]}a_{1,i_1}\dots a_{p-1,i_{p-1}}a_{p+1,i_{p+1}}\dots a_{n,i_n}$$

е събираемо на $\Delta_{p,q}$. Следователно

$$\alpha=(-1)^{p+q-2}\beta=(-1)^{p+1}\beta$$

е събиремо на $(-1)^{p+q}\Delta_{p,q}$. Броят $(n-1)!$ на събираемите на $A_{p,q}$ съвпада с броя на събираемите на $(-1)^{p+q}\Delta_{p,q}$, така че $A_{p,q}=(-1)^{p+q}\Delta_{p,q}$.

$\square$

Задача 55. *Нека $(a_{i,j})_{i,j=1}^n\in M_{n\times n}(F)$ е квадратна матрица от ред n, а $1\leq p,q\leq n$ и $r\in\{1,\dots,n\}\setminus\{p,q\}$ са естествени числа. Да се докаже, че:*

(i) $\sum\limits_{s=1}^n a_{p,s}A_{r,s}=0$ *(фалшиво развитие на детерминанта по ред);*

(ii) $\sum\limits_{s=1}^n a_{s,q}A_{s,r}=0$ *(фалшиво развитие на детерминанта по стълб), където $A_{i,j}$ е адюнгираното количество на $a_{i,j}$.*

Доказателство. (i) Заменяйки r-тия ред на матрицата $(a_{i,j})_{i,j=1}^n\in M_{n\times n}(F)$ с p-тия ред $(a_{p,1},\dots,a_{p,n})$, получаваме детерминанта

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n}\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{p,1} & \dots & a_{p,n}\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{p,1} & \dots & a_{p,n}\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{1,1} & \dots & a_{1,n}\end{vmatrix}$$

с два равни реда. От една страна, $\Delta_1=0$. От друга страна, развитието на Δ_1 по r-тия ред е

$$\Delta_1=\sum_{s=1}^n a_{p,s}A_{r,s}.$$

(ii) Ако заменим r-тия стълб на $(a_{i,j})_{i,j=1}^n\in M_{n\times n}(F)$ с q-тия стълб

$$\begin{pmatrix} a_{1,q}\\ \dots\\ a_{n,q}\end{pmatrix},$$

получаваме детерминанта

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,q} & \dots & a_{1,q} & \dots & a_{1,n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n,1} & \dots & a_{n,q} & \dots & a_{n,q} & \dots & a_{n,n}\end{vmatrix}=0,$$

която има два равни стълба и се анулира. Развитието на Δ_2 по r-тия стълб дава

$$0 = \Delta_2 = \sum_{s=1}^{n} a_{s,q} A_{s,r}.$$

$\square$

10. Умножение на детерминанти. Ранг на система вектори и ранг на матрица.

Задача 56. *Нека*

$$D = \begin{pmatrix} A & \mathbb{O}_{n\times m} \\ C & B \end{pmatrix} \in M_{(n+m)\times(n+m)}(F)$$

за произволни матрици $A \in M_{n\times n}(F)$, $B \in M_{m\times m}(F)$, $C \in M_{m\times n}(F)$ *и нулевата* $\mathbb{O}_{n\times m} \in M_{n\times m}(F)$. *Да се докаже, че*

$$\det(D) = \det(A)\det(B).$$

Доказателство. С индукция по $n \in \mathbb{N}$, при $n = 1$ развитието на $\det(D)$ по първия ред дава $\det(D) = A\det(B)$.

В общия случай, нека $A'_{1,s} \in M_{(n-1)\times(n-1)}(F)$, $1 \leq s \leq n$ са матриците, получени от A чрез премахване на първия ред и s-тия стълб на A. Тогава развитието на $\det(D)$ по първия ред е

$$\det(D) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{1+s} a_{1,s} \det \begin{pmatrix} A'_{1,s} & \mathbb{O}_{(n-1)\times m} \\ C_s & B \end{pmatrix},$$

където $C_s \in M_{m\times(n-1)}(F)$ е матрицата, получена от C чрез премахване на s-тия стълб. По индукционно предположение

$$\det \begin{pmatrix} A'_{1,s} & \mathbb{O}_{(n-1)\times m} \\ C_s & B \end{pmatrix} = \det(A'_{1,s})\det(B).$$

Следователно

$$\det(D) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{1+s} a_{1,s} \det(A'_{1,s})\det(B) =$$

$$= \left[\sum_{s=1}^{n} (-1)^{1+s} a_{1,s} \det(A'_{1,s}) \right] \det(B) = \det(A)\det(B),$$

използвайки развитието на $\det(A)$ по първия ред.

$\square$

Задача 57. *Нека* $A, B \in M_{n\times n}(F)$ *са квадратни матрици от един и същи ред. Да се докаже, че*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Доказателство. Нека

$$D_1 = \begin{pmatrix} A & \mathbb{O}_{n\times n} \\ -E_n & B \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(F).$$

За всяко $1 \leq j \leq n$, умножаваме първите n стълба на D с елементите $b_{1,j}, \ldots, b_{n-1,j}$, съответно, $b_{n,j}$ на j-тия стълб на B и прибавяме към $(n+j)$-тия стълб на D_1. За всяко

$1 \leq i \leq n$, елементът от i-ти ред и $(n+j)$-ти стълб на получената матрица D_2 съвпада с елемента

$$a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \ldots + a_{i,n}b_{n,j} = \sum_{s=1}^{n} a_{i,s}b_{s,j} = (AB)_{i,j}$$

от i-ти ред и j-то стълб на AB. Елементът от $(i+n)$-ти ред и $(n+j)$-ти стълб на D_2 е

$$(-1).b_{i,j} + b_{i,j} = 0.$$

Следователно

$$D_2 = \begin{pmatrix} A & AB \\ -E_n & \mathbb{O}_{n\times n} \end{pmatrix}.$$

Умножението на стълб с елемент на F и прибавянето към друг стълб не променя детерминантата, така че

$$\det(D_2) = \det(D_1).$$

Разменяме първия с $(n+1)$-вия ред на D_2, втория с $(n+2)$-рия и т.н., n-тия с $(2n)$-тия ред. В резултат получаваме матрицата

$$D_3 = \begin{pmatrix} -E_n & \mathbb{O}_{n\times n} \\ A & AB \end{pmatrix}$$

с

$$\det(D_3) = (-1)^n \det(D_2),$$

защото размяната на два реда променя знака на детерминанта. Детерминантата на блочно-триъгълната матрица D_1 е

$$\det(D_1) = \det(A)\det(B),$$

а на блочно-триъгълната матрица D_3 е

$$\det(D_3) = \det(-E_n)\det(AB) = (-1)^n \det(AB).$$

Комбинирайки с $\det(D_3) = (-1)^n \det(D_1)$ получаваме

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

□

Задача 58. *Да се докаже, че следните условия са еквивалентни за вектори $b_1, \ldots, b_m$ от линейно пространство V:*

(i) $b_1, \ldots, b_r$ са линейно независими и за произволни $1 \leq i_1 < \ldots < i_{r+1} \leq m$ векторите $b_{i_1}, \ldots, b_{i_{r+1}}$ са линейно зависими;

(ii) $b_1, \ldots, b_r$ са линейно независими и $b_1, \ldots, b_m \in l(b_1, \ldots, b_r)$;

(iii) $b_1, \ldots, b_r$ са линейно независими и $l(b_1, \ldots, b_m) = l(b_1, \ldots, b_r)$.

Да се провери, че ако е изпълнено едно, а оттам и всяко едно то тези три условия, то $r = \dim l(b_1, \ldots, b_m)$.

Доказателство. $(i) \Rightarrow (ii)$ Ако допуснем, че съществува $1 \leq i \leq m$ с $b_i \notin l(b_1, \ldots, b_r)$, то $i \notin \{1, \ldots, r\}$ и векторите $b_1, \ldots, b_r, b_i$ са линейно независими съгласно Лемата за линейна независимост. Това противоречи на предположението за линейна зависимост на произволни $r+1$ вектора от $b_1, \ldots, b_m$ и доказва, че от (i) следва (ii).

$(ii) \Rightarrow (iii)$ От $\{b_1, \ldots, b_r\} \subseteq \{b_1, \ldots, b_m\}$ следва $l(b_1, \ldots, b_r) \subseteq l(b_1, \ldots, b_m)$. Подпространството $l(b_1, \ldots, b_r)$ на V съдържа векторите $b_1, \ldots, b_m$, а оттам и всички техни линейни комбинации, т.е. $l(b_1, \ldots, b_m) \subseteq l(b_1, \ldots, b_r)$. Това доказва $l(b_1, \ldots, b_m) = l(b_1, \ldots, b_r)$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Съгласно Лемата за линейна зависимост, произволни вектори

$$b_{i_1}, \ldots, b_{i_{r+1}} \in l(b_1, \ldots, b_m) = l(b_1, \ldots, b_r)$$

с $1 \leq i_1 < \ldots < i_{r+1} \leq m$ са линейно зависими.

Ако е в сила (iii) и $b_1, \ldots, b_r$ са линейно независими вектори с линейна обвивка $l(b_1, \ldots, b_r) = l(b_1, \ldots, b_m)$, то $b_1, \ldots, b_r$ е базис на $l(b_1, \ldots, b_m)$ и $\dim l(b_1, \ldots, b_m) = r$.

□

Задача 59. *Да се дадат определения за ранг на система вектори и ранг на матрица. Да се формулира Теоремата за ранга на матрица, ранга на нейните вектор-редове и ранга на нейните вектор-стълбове.*

Доказателство. Рангът на система вектори $b_1, \ldots, b_m$ е максималният брой r на линейно независими вектори, съдържащи се в тази система.

Рангът на нулевата матрица $\mathbb{O}_{m \times n} \in M_{m \times n}(F)$ е $\mathrm{rk}(\mathbb{O}_{m \times n}) = 0$.

Минор от r-ти ред на матрица $\in M_{m \times n}(F) \setminus \{\mathbb{O}_{m \times n}\}$ е детерминантата на матрица, получена от A чрез пресичане на r различни реда с r различни стълба.

Рангът $\mathrm{rk}(A)$ на ненулева матрица $A \in M_{m \times n}(F) \setminus \{\mathbb{O}_{m \times n}\}$ е максималният размер r на ненулев минор на A.

Съгласно формулата за развитие на детерминанта по ред или по стълб, $\mathrm{rk}(A) = r$ ако съществува ненулев минор на A от ред r и всички минори на A от ред $r + 1$ са равни на $0 \in F$.

Теоремата за ранга на матрица $A \in M_{m \times n}(F)$, ранга на нейните вектор-редове

$$a_i = (a_{i,1}, \ldots, a_{i,n}), \quad 1 \leq i \leq m$$

и ранга на нейните вектор-стълбове

$$c_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \ldots \\ a_{m,j} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq j \leq n$$

гласи, че рангът

$$\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(a_1, \ldots, a_m) = \mathrm{rk}(c_1, \ldots, c_n)$$

на матрицата A съвпада с ранга на нейните вектор-редове и ранга на нейните вектор-стълбове.

□

Задача 60. *Нека $A \in M_{m \times n}(F)$ е матрица с вектор-редове*

$$a_i = (a_{i,1}, \ldots, a_{i,n}) \in M_{1 \times n}(F), \quad 1 \leq i \leq m$$

и вектор-стълбове

$$c_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \ldots \\ a_{m,j} \end{pmatrix} \in M_{m \times 1}(F), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Да се докаже, че рангът $\mathrm{rk}(A)$ на матрицата A съвпада с ранга $\mathrm{rk}(a_1, \ldots, a_m)$ на нейните вектор-редове и ранга $\mathrm{rk}(c_1, \ldots, c_n)$ на нейните вектор-стълбове.

Доказателство. Достатъчно е да докажем, че $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(a_1, \ldots, a_m)$, защото тогава

$$\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A^t) = \mathrm{rk}(c_1^t, \ldots, c_n^t) = \mathrm{rk}(c_1, \ldots, c_n).$$

Ако $A = \mathbb{O}_{m\times n}$ е нулевата матрица, то всички вектор-редове $a_i = \mathbb{O}_{1\times n}$ са нулеви и

$$\mathrm{rk}(\mathbb{O}_{m\times n}) = 0 = \mathrm{rk}(\underbrace{\mathbb{O}_{1\times n}, \ldots, \mathbb{O}_{1,\times n}}_{m}).$$

Нека $\mathrm{rk}(A) = r \in \mathbb{N}$ и

$$\Delta = \Delta(i_1, \ldots, i_r; j_1, \ldots, j_r) = \begin{vmatrix} a_{i_1,j_1} & \ldots & a_{i_1,j_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_r,j_1} & \ldots & a_{i_r,j_r} \end{vmatrix} \neq 0$$

е ненулев минор от ред r. Тогава вектор-редовете $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r} \in M_{1\times n}(F)$ са линейно независими. В противен случай, вектор-редовете на матрицата

$$A' = A'(i_1, \ldots, i_r; j_1, \ldots, j_r) = \begin{pmatrix} a_{i_1,j_1} & \ldots & a_{i_1,j_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_r,j_1} & \ldots & a_{i_r,j_r} \end{pmatrix}$$

са линейно зависими и нейната детерминанта Δ трабва да се анулира.

Достатъчно е да проверим, че за всяко $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_1, \ldots, i_r\}$ вектор-редът $a_i \in l(a_{i_1}, \ldots, a_{i_r})$ е в линейната обвивка на вектор-редовете $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$, за да получим, че $\mathrm{rk}(a_1, \ldots, a_m) = r = \mathrm{rk}(A)$.

За произволни $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_1, \ldots, i_r\}$ и $j \in \{1, \ldots, n\}$ разглеждаме детерминантата

$$\Delta_{i,j} = \Delta_{i,j}(i_1, \ldots, i_r; j_1, \ldots, j_r) = \begin{vmatrix} a_{i_1,j_1} & \ldots & a_{i_1,j_r} & a_{i_1,j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_r,j_1} & \ldots & a_{i_r,j_r} & a_{i_r,j} \\ a_{i,j_1} & \ldots & a_{i,j_r} & a_{i,j} \end{vmatrix}$$

на матрицата, получена от A' чрез присъединяване на елементите от i-тия ред, които са в стълбовете с номера $j_1, \ldots, j_r, j$ и елементите от j-тия стълб, които са от редовете с номера $i_1, \ldots, i_r, i$. Ако $j \in \{j_1, \ldots, j_r\}$, то $\Delta_{i,j} = 0$ като детерминанта с два равни стълба. За $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j_1, \ldots, j_r\}$, анулирането на минорите на A от ред $r+1$ дава $\Delta_{i,j} = 0$. Развитието на $\Delta_{i,j}$ по последния стълб е

$$0 = \Delta_{i,j} = \sum_{s=1}^{r} (-1)^{s+r+1} \delta(i,s) a_{i_s,j} + (-1)^{(r+1)+(r+1)} a_{i,j} \Delta = 0 \qquad (2)$$

за минорите

$$\delta(i,s) = \delta(i, i_1, \ldots, i_r; s, j_1, \ldots, j_r) = \begin{vmatrix} a_{i_1,j_1} & \ldots & a_{i_1,j_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_{s-1},j_1} & \ldots & a_{i_{s-1},j_r} \\ a_{i_{s+1},j_1} & \ldots & a_{i_{s+1},j_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_r,j_1} & \ldots & a_{i_r,j_r} \\ a_{i,j_1} & \ldots & a_{i,j_r} \end{vmatrix}$$

от r-ти ред, които не зависят от j. Равенствата (2) са в сила за всички $1 \leq j \leq n$ и дават анулирането

$$\sum_{s=1}^{r} (-1)^{s+r+1} \delta(i,s) a_{i_s} + \Delta a_i = \mathbb{O}_{1\times n}$$

на линейна комбинация на вектор-редовете $a_{i_1}, \dots, a_{i_r}, a_i$. Оттук

$$a_i = \sum_{s=1}^{r} (-1)^{s+r} \frac{\delta(i,s)}{\Delta} a_{i_s} \in l(a_{i_1}, \dots, a_{i_r}),$$

което доказва, че $\mathrm{rk}(A) = r = \mathrm{rk}(a_1, \dots, a_m)$.

□

11. Системи линейни уравнения. Теорема на Руше.

Задача 61. *Нека $A \in M_{m\times n}(F)$ е матрица с вектор-редове*

$$a_i = (a_{i,1}, \dots, a_{i,n}) \in M_{1\times n}(F), \quad 1 \leq i \leq m$$

и вектор-стълбове

$$c_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \dots \\ a_{m,j} \end{pmatrix} \in M_{m\times 1}(F), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Да се докаже, че:

(i) елементарните преобразувания по редове към A запазват линейната обвивка $l(a_1, \dots, a_m)$ на вектор-редовете на A;

(ii) елементарните преобразувания по редове към A запазват ранга $\mathrm{rk}(c_1, \dots, c_n)$ на вектор-стълбовете на A.

Доказателство. (i) Нека $L = l(a_1, \dots, a_m)$ е линейната обвивка на $a_1, \dots, a_m$ на A, а L' е линейната обвивка на вектор-редовете на матрицата, получена от A чрез прилагане на елементарно преобразувание по редове R. Достатъчно е да проверим включването $L' \subseteq L$, защото елементарните преобразувания по редове към матрица се обръщат с елементарни преобразувания по редове и това дава $L \subseteq L'$ и $L = L'$.

Ако $R = R_{i,j}(p)$ е умножение на a_j с $p \in F$ и прибавяне към a_i, то

$$L' = l(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + pa_j, a_{i+1}, \dots, a_m) \subseteq l(a_1, \dots, a_m) = L.$$

За умножението $R = R_i(q)$ на a_i с $q \in F \setminus \{0\}$ имаме

$$L' = l(a_1, \dots, a_{i-1}, qa_i, a_{i+1}, \dots, a_m) \subseteq l(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_m) = L.$$

За размяната $R = R_{i,j}$ на a_i с a_j за $1 \leq i <\subseteq j \leq m$ е в сила

$$L' = l(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots a_m) \subseteq l(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_m) = L.$$

Това доказва $L' \subseteq L$ и $L' = L$.

(ii) По Теоремата за ранга на матрица и ранга на некните вектор-редове и $a_1, \dots, a_m$ и вектор-стълбове $c_1, \dots, c_n$ имаме

$$\mathrm{rk}(c_1, \dots, c_n) = \mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(a_1, \dots, a_m).$$

Рангът $\mathrm{rk}(a_1, \dots, a_m) = \dim l(a_1, \dots, a_m)$ на вектор-редовете съвпада с размерността на линейната им обвивка, която не се променя под действие на елементарно преобразувание по редове към A, съгласно (i). Следователно $\mathrm{rk}(a_1, \dots, a_m) = \mathrm{rk}(c_1, \dots, c_n)$ не се променя под действие на елементарно преобразувание по редове.

□

Задача 62. *Нека $Ax = b$ е система линейни уравнвния с n неизвестни $x_1, \ldots, x_n$, матрица от коефициенти $A \in M_{m\times n}(F)$ и стълб от свободни членове $b \in M_{m\times 1}(F)$. Да се докаже, че:*

(i) системата $Ax = b$ е определена тогава и само тогава, когато

$$\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A|b) = n;$$

(ii) системата $Ax = b$ е неопределена тогава и само тогава, когато

$$\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A|b) < n.$$

Доказателство. Ако

$$c_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \ldots \\ a_{m,j} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq j \leq n$$

са вектор-стълбовете на A, то системата линейни уравнения е еквивалентна на

$$b = Ax = \begin{pmatrix} c_1 & \ldots & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1c_1 + \ldots + x_nc_n.$$

Оттук следва, че

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \ldots \\ s_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}(F)$$

е решение на $Ax = b$ точно когато стълбът

$$b = s_1c_1 + \ldots + s_nc_n$$

на свободните членове е линейна комбинация на вектор-стълбовете $c_1, \ldots, c_n$ на A с коефициенти $s_1, \ldots, s_n \in F$. Винаги $l(c_1, \ldots, c_n) \subseteq l(c_1, \ldots, c_n, b)$. Условието

$$b = s_1c_1 + \ldots + s_nc_n \in l(c_1, \ldots, c_n)$$

е еквивалентно на

$$l(c_1, \ldots, c_n, b) \subseteq l(c_1, \ldots, c_n).$$

Затова съществуването на решение s на $Ax = b$ е равносилно на

$$l(c_1, \ldots, c_n) = l(c_1, \ldots, c_n, b).$$

Понеже $l(c_1, \ldots, c_n)$ е винаги подпространство на $l(c_1, \ldots, c_n, b)$, условието

$$l(c_1, \ldots, c_n) = l(c_1, \ldots, b)$$

е еквивалентно на

$$\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(c_1, \ldots, c_n) = \dim l(c_1, \ldots, c_n) =$$
$$= \dim l(c_1, \ldots, c_n, b) = \mathrm{rk}(c_1, \ldots, c_n, b) = \mathrm{rk}(A|b),$$

вземайки предвид Теоремата за ранга на матрица и ранга на нейните вектор-редове и вектор-стълбове. С това доказахме, че системата лилнейни уравнения $Ax = b$ е съвместима тогава и само тогава, когато $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A|b)$.

Съвместима система $Ax = b$ е определена, ако има единствено решение

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \dots \\ s_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}(F).$$

Това е в сила точно когато стълбът $b = s_1c_1 + \dots + s_nc_n$ на свободните членове има единствено представяне като линейна комбинация на вектор-стълбовете $c_1, \dots, c_n$ на A и $c_1, \dots, c_n$ е базис на $l(c_1, \dots, c_n)$. Това е еквивалентно на линейната независимост на $c_1, \dots, c_n$ и е в сила тогава и само тогава, когато $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(c_1, \dots, c_n) = n$.

Съвместима система $Ax = b$ е неопределена точно когато не е определена. Вземайки предвид $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(c_1, \dots, c_n) \leq n$ и (i), стигаме до извода, че $Ax = b$ е неопределена точно когато

$$\mathrm{rk}(A|b) = \mathrm{rk}(A) < n.$$

□

12. Хомогенни системи, фундаментална система от решения и представяне на подпространства от наредени n-торки като решения на хомогенни линейни системи. Връзка между решенията на хомогенна и нехомогенна система.

Задача 63. *Нека $Ax = \mathbb{O}_{m\times 1}$ е хомогенна система линейни уравнения, чиято матрица от коефициенти $A \in M_{m\times n}(F)$ има ранг $\mathrm{rk}(A) = r$. Да се докаже, че множеството $U \subseteq M_{n\times 1}(F)$ от решения на $Ax = \mathbb{O}_{m\times 1}$ е подпространство на $M_{n\times 1}(F)$ с размерност $\dim(U) = n - r$.*

Доказателство. Ако $u, v \in U \subseteq M_{n\times 1}(F)$ са решения на $Ax = \mathbb{O}_{m\times 1}$ и $\alpha \in F$, то от

$$A(u + v) = Au + Av = \mathbb{O}_{m\times 1} + \mathbb{O}_{m\times 1} = \mathbb{O}_{m\times 1} \quad \text{и}$$

$$A(\alpha u) = \alpha(Au) = \alpha\mathbb{O}_{m\times 1} = \mathbb{O}_{m\times 1}$$

следва, че $u + v, \alpha u \in U$ са също решения на $Ax = \mathbb{O}_{m\times 1}$ и U е подпространство на $M_{n\times 1}(F)$.

Ако $\mathrm{rk}(A) = r$, то съществуват r линейно независими реда $a_1, \dots, a_r$ на A и всички други редове на A принадлежат на $l(a_1, \dots, a_r)$. Без ограничение на общността, можем да изпуснем уравненията, които са линейни комбинации на първите r линейно независими уравнения и да считаме, че матрицата $A \in M_{r\times n}(F)$ се състои от r линейно независими реда $a_1, \dots, a_r$. След подходяща пермутация на стълбовете, първите r стълба на A са линейно независими и образуват неособена $(r \times r)$-матрица. Съществуват елементарни преобразувания по редове, които свеждат първите r стълба на A към единичната матрица E_r. Прилагаме споменатите елементарни преобразувания към пълните вектор-редове $a_1, \dots, a_r \in M_{1\times n}(F)$ на A и свеждаме разглежданата хомогенна система линейни уравнения към

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1,r+1} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & a_{2,r+1} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & a_{r-1,r+1} & \dots & ar-1,n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{r,r+1} & \dots & a_{r,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_r \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbb{O}_{r\times n}.$$

Уравненията на тази система са

$$x_i = -a_{i,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{i,n}x_n \quad \text{за} \quad 1 \leq i \leq r \tag{3}$$

и за произволни $x_{r+1},\dots,x_n$. За всяко $r+1\leq j\leq n$ разглеждаме решението

$$c^{(j)}=(c_1^{(j)},\dots,c_r^{(j)},0\dots,0,1,0,\dots,0)^t,$$

чиято j-та компонента е равна на 1, компонентите с номера $s\in\{r+1,\dots,n\}\setminus\{j\}$ са равни на 0, а $c_1^{(j)},\dots,a_r^{(j)}$ се пресмятат по формулите (3). Достатъчно е да проверим, че $c^{(r+1)},\dots,c^{(n)}$ образуват базис на пространството от решения $U\subseteq M_{n\times 1}(F)$, за да установим, че $\dim(U)=n-r$ и да докажем твърдението. За произволни $\lambda_j\in F$, $r+1\leq j\leq n$ пресмятаме, че

$$\lambda_{r+1}c^{(r+1)}+\dots\lambda_n c^{(n)}=(*,\dots,*,\lambda_{r+1},\dots,\lambda_n)^t.$$

Следователно от $\lambda_{r+1}c^{(r+1)}+\dots\lambda_n c^{(n)}=\mathbb{O}_{n\times 1}$ следва $\lambda_1=\dots=\lambda_n=0$ и решенията $c^{(r+1)},\dots,c^{(n)}\in U$ са линейно независими. За произволно решение $u=(u_1,\dots,u_n)^t\in U$ забелязваме, че

$$u'=u-u_{r+1}c^{(r+1)}-\dots-u_n c^{(n)}=(u_1',\dots,u_r',0,\dots,0)^t$$

има анулиращи се компоненти с номера между $r+1$ и n. Първите r компоненти на u' изпълняват уравненията (3) и също трябва да се анулират. В резултат, $u'=\mathbb{O}_{n\times 1}$ и $u=u_{r+1}c^{(r+1)}+\dots+u_n c^{(n)}$ е линейна комбинация на $c^{(r+1)},\dots,c^{(n)}$. Това доказва, че $l(c^{(r+1)},\dots,c^{(n)})=U$ и $c^{(r+1)},\dots,c^{(n)}$ е базис на U.

□

Задача 64. *Да се докаже, че за всяко подпространство $U\subseteq M_{n\times 1}(F)$ от наредени n-торки съществува хомогенна система линейни уравнения с пространство от решения U.*

Доказателство. Ако $U=\{\mathbb{O}_{n\times 1}\}$ е нулевото пространство, то U съвпада с пространството от решения на хомогенната линейна система

$$\left|\begin{array}{ll} x_1 & =0\\ \dots & \dots\\ x_n & =0\end{array}\right. .$$

Отсега нататък $U\neq\{\mathbb{O}_{n\times 1}\}$ и съществуват такива вектори $a_1,\dots,a_k\in M_{1\times n}(F)$, че $a_1^t,\dots,a_k^t$ е базис на U. Нека

$$\begin{pmatrix} a_1\\ \dots\\ a_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix}=\mathbb{O}_{k\times 1} \tag{4}$$

е хомогенната система линейни уравнения, чиято матрица от коефициенти е образувана по редове от векторите $a_1,\dots,a_k$. Пространството от решения $U_1\subseteq M_{n\times 1}(F)$ на (4) е с размерност $n-k$. Нека $b_1,\dots,b_{n-k}\in M_{1\times n}(F)$ са такива вектори, че $b_1^t,\dots,b_{n-k}^t\in M_{n\times 1}(F)$ е базис на U_1. Твърдим, че U е пространството от решения на хомогенната система линейни уравнения

$$\begin{pmatrix} b_1\\ \dots\\ b_{n-k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix}=\mathbb{O}_{(n-k)\times 1}, \tag{5}$$

чиято матрица от коефициенти е образувана по редове от векторите $b_1,\dots,b_{n-k}$. Пространството от решения $U_2\subseteq M_{n\times 1}(F)$ на (5) е с размерност $\dim(U_2)=n-(n-k)=k$, защото матрицата от коефициенти на (5) е от ранг $n-k$. Достатъчно е да докажем, че $U \subseteq U_2$, за да получим че $U = U_2$ и да докажем твърдението. Векторите $b_j^t \in M_{n\times 1}(F)$ са решения на (4), така че

$$a_i b_j^t = 0 \quad \text{за всички} \quad 1 \leq i \leq k \quad \text{и} \quad 1 \leq j \leq n-k.$$

Транспонирайки това равенство получаваме

$$0 = 0^t = (a_i b_j^t)^t = b_j a_i^t.$$

Следователно $a_i^t \in M_{n\times 1}(F)$ са решения на (5) за всички $1 \leq i \leq k$ и $a_i^t \in U_2$. Следователно $U = l(a_1, \ldots, a_k) \subseteq U_2$ и $U = U_2$, съгласно $\dim(U) = k = \dim(U_2)$.

□

13. Линейни изображения. Изоморфизъм на линейни пространства. Ядро и образ на линейно изображение, теорема за ранга и дефекта.

Задача 65. *Да се дадат определения и примери за линейни изображения и линейни оператори.*

Доказателство. Изображение $f : U \to V$ на линейни пространства е линейно, ако

$$f(x_1u_1 + \ldots + x_nu_n) = x_1 f(u_1) + \ldots + x_n f(u_n) \quad \text{за всички} \quad u_i \in U \quad \text{и} \quad x_i \in F.$$

Линейно изображение $f : U \to U$ на линейно пространство U в себе си се нарича линеен оператор.

Ако $\mathbb{R}[x]^{(n+1)}$ е пространството на полиномите $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ на x от степен $\leq n$ с реални коефициенти, то диференцирането

$$\frac{d}{dx} : \mathbb{R}[x]^{(n+1)} \longrightarrow \mathbb{R}[x]^{(n)}, \quad \frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$$

е линейно изображение в пространството на полиномите на x от степен $\leq n-1$ с реални коефициенти. По-точно,

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{j=0}^{n} b_j x^j\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i\right) = \sum_{i=1}^{n} i(a_i + b_i) x^{i-1} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1} + \sum_{i=1}^{n} i b_i x^{i-1} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) + \frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^{n} b_i x^i\right)$$

и

$$\frac{d}{dx}\left(c\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^{n} c a_i x^i\right) = \sum_{i=1}^{n} i c a_i x^{i-1} =$$
$$= c\left(\sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}\right) = c\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right).$$

Можем да разглеждаме

$$\frac{d}{dx} : \mathbb{R}[x]^{(n+1)} \longrightarrow \mathbb{R}[x]^{(n+1)}$$

като линеен оператор в $\mathbb{R}[x]^{(n+1)}$.

Нулевото изображение

$$\mathbb{O} : U \longrightarrow V, \quad \mathbb{O}(u) = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V \quad \text{за всички} \quad u \in U$$

е линейно, защото

$$x_1\mathbb{O}(u_1) + \ldots + x_n\mathbb{O}(u_n) = x_1\overrightarrow{\mathcal{O}}_V + \ldots + x_n\overrightarrow{\mathcal{O}}_V =$$
$$= \overrightarrow{\mathcal{O}}_V + \ldots + \overrightarrow{\mathcal{O}}_V = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V = \mathbb{O}(x_1u_1 + \ldots + x_nu_n)$$

за произволни $u_i \in U$, $x_i \in F$.

Тъждественото изображение $\mathrm{Id} : U \to U$ на линейно пространство U е линеен оператор, съгласно

$$x_1\mathrm{Id}(u_1) + \ldots + x_n\mathrm{Id}(u_n) = x_1u_1 + \ldots + x_nu_n = \mathrm{Id}(x_1u_1 + \ldots + x_nu_n)$$

за всички $u_i \in U$ и $x_i \in F$.

□

Задача 66. *Да се докаже, че изображение $\varphi : U \to V$ на линейни пространства е линейно тогава и само тогава, когато $\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$ и $\varphi(\lambda u_1) = \lambda\varphi(u_1)$ за произволни $u_1, u_2 \in U$, $\lambda \in F$.*

Доказателство. Ако $\varphi : U \to V$ е линейно изображение, то по определение

$$\varphi(x_1u_1 + \ldots + x_nu_n) = x_1\varphi(u_1) + \ldots + x_n\varphi(u_n) \quad \text{за произволни} \quad u_i \in U, \quad x_i \in F.$$

В частност,

$$\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(1.u_1 + 1.u_2) = 1.\varphi(u_1) + 1.\varphi(u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) \quad \text{и}$$

$$\varphi(\lambda u_1) = \lambda\varphi(u_1) \quad \text{за всички} \quad u_1, u_2 \in U, \quad \lambda \in F.$$

Обратно, ако $\varphi(u_1+u_2) = \varphi(u_1)+\varphi(u_2)$ и $\varphi(\lambda u_1) = \lambda\varphi(u_1)$ за произволни $u_1, u_2 \in U$, $\lambda \in F$, то с индукция по n ще проверим, че

$$\varphi(x_1u_1 + \ldots + x_nu_n) = x_1\varphi(u_1) + \ldots + x_n\varphi(u_n) \quad \text{за произволни} \quad u_i \in U, \quad x_i \in F.$$

В случая $n = 1$ имаме $\varphi(x_1u_1) = x_1\varphi(u_1)$ по предположение. В общия случай,

$$\varphi(x_1u_1 + \ldots + x_{n-1}u_{n-1} + x_nu_n) = \varphi(x_1u_1 + \ldots + x_{n-1}u_{n-1}) + \varphi(x_nu_n)$$

от съгласуваността на φ със събирането на вектори. По индукционно предположение,

$$\varphi(x_1u_1 + \ldots + \varphi x_{n-1}u_{n-1}) = x_1\varphi(u_1) + \ldots + x_{n-1}\varphi(u_{n-1}).$$

По предположение, $\varphi(x_nu_n) = x_n\varphi(u_n)$. Следователно

$$\varphi(x_1u_1 + \ldots + x_{n-1}u_{n-1} + x_nu_n) = x_1\varphi(u_1) + \ldots + x_{n-1}\varphi(u_{n-1}) + x_n\varphi(u_n),$$

което доказва твърдението.

□

Задача 67. *Нека $e_1, \ldots, e_n$ е базис на линейното пространство U, а $v_1, \ldots, v_n$ са произволни вектори от линейното пространство V. Да се докаже, че съществува единствено линейно изображение $\varphi : U \to V$ с $\varphi(e_i) = v_i$ за всички $1 \leq i \leq n$.*

Доказателство. За съществуването на φ достатъчно да проверим, че

$$\varphi : U \longrightarrow V,$$
$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$$

е линейно изображение с $\varphi(e_i) = v_i$ за всички $1 \leq i \leq n$. Преди всичко, φ е коректно определено, защото всеки вектор $u \in U$ има еднозначно определени координати $x_1, \dots, x_n$ спрямо базиса $e_1, \dots, e_n$, които определят еднозначно образа $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i v_i$ на $u = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ под действие на φ. Освен това,

$$\begin{aligned}\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i + \sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) e_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) v_i = \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i v_i + \sum_{i=1}^{n} y_i v_i = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) + \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right)\end{aligned}$$

и

$$\varphi\left(\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i) e_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i) v_i = \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) = \lambda\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)$$

доказват, че изображението φ е линейно. Накрая,

$$\begin{aligned}\varphi(e_i) &= \varphi(0.e_1 + \ldots + 0.e_{i-1} + 1.e_i + 0.e_{i+1} + \ldots + 0.e_n) = \\ &= 0.v_1 + \ldots + 0.v_{i-1} + 1.v_i + 0.v_{i+1} + \ldots + 0.v_n = v_i \quad \text{за всички} \quad 1 \leq i \leq n.\end{aligned}$$

За единствеността на φ да забележим, че ако $\psi : U \to V$ е линейно изображение с $\psi(e_i) = v_i$ за всички $1 \leq i \leq n$, то

$$\psi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \psi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \quad \text{за всички за всички} \quad x_i \in F$$

и $\psi \equiv \varphi$ съвпада с φ.

□

Задача 68. *Да се докаже, че ако $\varphi : U \to V$ е изоморфизъм на линейни пространства, то обратното изображение $\varphi^{-1} : V \to U$ е линейно, а оттам и линеен изоморфизъм.*

Доказателство. Достатъчно е да проверим, че

$$\varphi^{-1}(v_1 + v_2) = \varphi^{-1}(v_1) + \varphi^{-1}(v_2) \quad \text{и} \quad \varphi^{-1}(\alpha v_1) = \alpha\varphi^{-1}(v_1)$$

за произволни $v_1, v_2 \in V$ и $\alpha \in F$. За целта използваме взаимната еднозначност на $\varphi : U \to V$, съгласно която вектори $u_1, u_2 \in U$ са равни точно когато образите им $\varphi(u_1) = \varphi(u_2)$ са равни.

За $u_1 := \varphi^{-1}(v_1) + \varphi^{-1}(v_2)$ и $u_2 := \varphi^{-1}(v_1 + v_2)$ от

$$\varphi(u_1) = \varphi(\varphi^{-1}(v_1) + \varphi^{-1}(v_2)) = \varphi\varphi^{-1}(v_1) + \varphi\varphi^{-1}(v_2) = v_1 + v_2 = \varphi\varphi^{-1}(v_1 + v_2) = \varphi(u_2)$$

следва

$$\varphi^{-1}(v_1) + \varphi^{-1}(v_2) = u_1 = u_2 = \varphi^{-1}(v_1 + v_2).$$

Аналогично, за $u_1 := \alpha\varphi^{-1}(v_1)$ и $u_2 := \varphi^{-1}(\alpha v_2)$ от

$$\varphi(u_1) = \varphi(\alpha\varphi^{-1}(v_1)) = \alpha\varphi\varphi^{-1}(v_1) = \alpha v_1 = \varphi\varphi^{-1}(\alpha v_1) = \varphi(u_2)$$

получаваме

$$\alpha\varphi^{-1}(v_1) = u_1 = u_2 = \varphi^{-1}(\alpha v_2).$$

По друг начин, трябва да докажем, че

$$\varphi^{-1}(x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n) = x_1\varphi^{-1}(v_1) + \ldots + x_n\varphi^{-1}(v_n) \tag{6}$$

за произволни $v_i \in V$ и $x_i \in F$. Ако $\varphi^{-1}(v_i) = u_i \in U$, то $\varphi(u_i) = v_i$ и (6) приема вида

$$\varphi^{-1}(x_1\varphi(u_1) + \ldots + x_n\varphi(u_n)) = x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n. \tag{7}$$

От линейността на $\varphi : U \to V$ имаме

$$\varphi(x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n) = x_1\varphi(u_1) + \ldots + x_n\varphi(u_n).$$

Прилагайки $\varphi^{-1} : V \to U$ към горното равенство получаваме (7) и доказваме твърдението.

□

Задача 69. *Да се докаже, че крайномерни пространства U и V са изоморфни тогава и само тогава, когато имат равни размерности* $\dim(U) = \dim(V)$.

Доказателство. Нека $\varphi : U \to V$ е линеен изоморфизъм на крайномерни пространства и $e_1, \ldots, e_n$ е базис на U. Достатъчно е да проверим, че $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ е базис на V, за да получим, че $\dim(V) = n = \dim(U)$. Всеки вектор на V е от вида $v = \varphi(u)$ за някакъв вектор $u \in U$. Ако $u = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, то

$$v = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i\varphi(e_i) \in l(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)).$$

Това доказва, че $l(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = V$. За линейната независимост на $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ разглеждаме линейна комбинация $x_1\varphi(e_1) + \ldots + x_n\varphi(e_n) = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$, равна на нулевия вектор. Действието на линейния изоморфизъм $\varphi^{-1} : V \to U$ върху тази линейна комбинация дава

$$\begin{gathered}\overrightarrow{\mathcal{O}}_U = \varphi^{-1}(\overrightarrow{\mathcal{O}}_V) = \varphi^{-1}(x_1\varphi(e_1) + \ldots + x_n\varphi(e_n)) = \\ = x_1\varphi^{-1}\varphi(e_1) + \ldots + x_n\varphi^{-1}\varphi(e_n) = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n.\end{gathered}$$

От линейната независимост на базиса $e_1, \ldots, e_n$ на U следва $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Това доказва, че $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ са линейно независими, а оттам и базис на V.

Нека $\dim(U) = \dim(V) = n$, $e_1, \ldots, e_n$ е базис на U и $f_1, \ldots, f_n$ е базис на V. Разглеждаме еднозначно определеното линейно изображение

$$\varphi : U \longrightarrow V, \quad \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

с $\varphi(e_i) = f_i$ за всички $1 \leq i \leq n$ и еднозначно определеното линейно изображение

$$\psi : V \longrightarrow U, \quad \psi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i f_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

с $\psi(f_i) = e_i$ за всички $1 \leq i \leq n$. От

$$\psi\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \psi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i f_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad \text{и}$$

$$\varphi\psi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i f_i\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

следва, че $\psi\varphi = \mathrm{Id}_U$ и $\varphi\psi = \mathrm{Id}_V$, така че $\psi = \varphi^{-1}$ и $\varphi : U \to V$ е линеен изоморфизъм. □

Задача 70. *Да се даде определение за ядро и образ на линйно изображение $\varphi : U \to V$.*

Нека e_1, e_2, e_3 е базис на линейно пространство V над полето $\mathbb{R}$ на реалните числа, а $f : V \to V$ е линейният оператор, действащ по правилото

$$f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = (x_1 - x_2)e_1 + (x_1 + x_2)e_2$$

за произволни $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Да се намерят ядрото $\ker(\varphi)$ и образът $\mathrm{im}(\varphi)$ на φ.

Доказателство. Ядрото на линейно изображение $\varphi : U \to V$ е множеството

$$\ker(\varphi) = \{u \in U \,|\, \varphi(u) = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$$

на векторите от U, които се изобразяват от φ нулевия вектор $\overrightarrow{\mathcal{O}}_V$ на V. Образът на φ е множеството

$$\mathrm{im}(\varphi) = \{\varphi(u) \,|\, u \in U\}$$

на образите на векторите от U.

По определение, ядрото $\ker(f)$ на f се състои от векторите $v = x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3 \in V$, за които $\varphi(v) = (x_1 - x_2)e_1 + (x_1 + x_2)e_2 = \overrightarrow{\mathcal{O}}$. Координатите на тези вектори са решенията на хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{rrl} x_1 & -x_2 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & = 0 \end{array} \right.$$

С други думи,

$$\ker(f) = \{x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \,|\, x_1 = x_2 = 0\} = \{x_3e_3 \,|\, x_3 \in \mathbb{R}\} = l(e_3)$$

е правата, породена от e_3. В частност, дефектът на f е $d(f) = \dim\ker(f) = 1$. Образът

$$\mathrm{im}(f) = \{f(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3) \,|\, x_i \in \mathbb{R}\} = \{(x_1-x_2)e_1+(x_1+x_2)e_2 \,|\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \subseteq l(e_1, e_2)$$

се съдържа в линейната обвивка на e_1 и e_2. По Теоремата за ранга и дефекта на линейно изображение, $\dim\mathrm{im}(f) = \mathrm{rk}(f) = \dim(V) - d(f) = 3 - 1 = 2$, така че $\mathrm{im}(f) = l(e_1, e_2)$. □

Задача 71. *Нека $\varphi : U \to V$ е линейно изображение на n-мерно пространство U в произволно линейно пространство V. Да се докаже, че*

$$\mathrm{rk}(\varphi) + d(\varphi) = n,$$

където $\mathrm{rk}(\varphi)$ е рангът на φ, а $d(\varphi)$ е дефектът на φ.

Доказателство. Нека $e_1, \ldots, e_k$ е базис на ядрото $\ker(\varphi)$ на φ. Продължаваме до базис $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ на U. Достатъчно е да проверим, че $\varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n)$ е базис на образа $\mathrm{im}(\varphi)$ на φ, за да получим, че $\mathrm{rk}(\varphi) := \dim \mathrm{im}(\varphi) = n - k = \dim(U) - d(\varphi)$ и да докажем твърдението.

От една страна, всеки вектор на $\mathrm{im}(\varphi)$ е от вида $\varphi(u)$ за някакъв вектор $u \in U$. Ако $u = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, то

$$\varphi(u) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) = \sum_{i=k+1}^{n} x_i \varphi(e_i) \in l(\varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n)),$$

вземайки предвид $\varphi(e_i) = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$ за векторите $e_i \in \ker(\varphi)$ с $1 \leq i \leq k$. Следователно $\mathrm{im}(\varphi) \subseteq l(\varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n))$. От друга страна, $\varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n)$ принадлежат на подпространството $\mathrm{im}(\varphi)$ на V, така че $l(\varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n)) \subseteq \mathrm{im}(\varphi)$ и

$$\mathrm{im}(\varphi) = l(\varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n)).$$

Ако $\sum\limits_{i=k+1}^{n} x_i \varphi(e_i) = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$, то

$$\varphi\left(\sum_{i=k+1}^{n} x_i e_i\right) = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V.$$

Следователно $\sum\limits_{i=k+1}^{n} x_i e_i \in \ker(\varphi)$ и съществуват $x_1, \ldots, x_k \in F$ с

$$\sum_{i=k+1}^{n} x_i e_i = \sum_{j=1}^{k} x_j e_j.$$

В резултат,

$$\sum_{i=1}^{k} x_i e_i + \sum_{i=k+1}^{n} (-x_i) e_i = \overrightarrow{\mathcal{O}}_U,$$

откъдето $x_i = 0$ за всички $1 \leq i \leq n$, съгласно линейната независимост на базиса $e_1, \ldots, e_n$ на U. Това доказва, че $\varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_n)$ са линейно независими, а оттам и базис на $\mathrm{im}(\varphi)$.

□

14. Матрица на линейно изображение на крайномерни пространства. Действия с линейни изображения.

Задача 72. *Да се даде определение за матрица на линейно изображение $\varphi : U \to V$ на крайномерни пространства и да се изведе формулата за пресмятане на координатите на $\varphi(u)$ чрез координатите на u спрямо произволни базиси на U и V.*

Доказателство. Нека $e = (e_1, \ldots, e_n)$ е базис на U, а $f = (f_1, \ldots, f_m)$ е базис на V. Матрицата

$$A = (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) \in M_{m \times n}(F),$$

образувана по стълбове от координатите на $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n) \in V$ спрямо $f = (f_1, \ldots, f_m)$ се нарича матрица на φ спрямо базиса e на U и базиса f на V. Еквивалентно,

$$\varphi(e) = fA$$

за $\varphi(e) := (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$.

Ако $u \in U$ има координати

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}(F)$$

спрямо базиса $e = (e_1, \ldots, e_n)$, то

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = (e_1, \ldots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = ex.$$

Действайки с φ върху $u = ex$ получаваме

$$\varphi(u) = \varphi(e)x = (fA)x = f(Ax).$$

Ако

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} \in M_{m\times 1}(F)$$

са координатите на $\varphi(u)$ спрямо базиса $f = (f_1, \ldots, f_m)$ на V, то $\varphi(u) = fy$, откъдето

$$fy = \varphi(u) = f(Ax).$$

Оттук, $f(y - Ax) = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ или $\sum\limits_{i=1}^{m}[y_i - (Ax)_i]f_i = \overrightarrow{\mathcal{O}}$. Съгласно линейната независимост на базиса $f_1, \ldots, f_m$ на V, получаваме $y_i - (Ax)_i = 0$ за всички $1 \leq i \leq m$ или

$$y = Ax.$$

□

Задача 73. *Нека $\varphi : U \to V$ е линейно изображение с матрица $A \in M_{m\times n}(F)$ спрямо базис $e = (e_1, \ldots, e_n)$ на U и базис $f = (f_1, \ldots, f_m)$ на V. Да се докаже, че:*

(i) образът $\mathrm{im}(\varphi) = l(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$ на φ съвпада с линейната обвивка на образите $\varphi(e_i)$ на базисните вектори e_i на U;

(ii) рангът $\mathrm{rk}(\varphi) = \mathrm{rk}(A)$ на φ съвпада с ранга на матрицата на φ спрямо базиса e на U и базиса f на V.

Доказателство. (i) Произволен вектор от $\mathrm{im}(\varphi)$ има вида $\varphi(u)$ за някакъв вектор $u \in U$. Изразяваме

$$u = ex = (e_1, \ldots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

като линейна комбинация на базисните вектори $e_1, \ldots, e_n$ на U. Тогава

$$\varphi(u) = \varphi(ex) = \varphi(e)x = (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \in l(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$$

е линейна комбинация на $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ и $\mathrm{im}(\varphi) \subseteq l(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$. Обратното включване $l(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) \subseteq \mathrm{im}(\varphi)$ се дължи на $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n) \in \mathrm{im}(\varphi)$ и на това, че $\mathrm{im}(\varphi)$ е подпространство на V. Това доказва

$$\mathrm{im}(\varphi) = l(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)).$$

(ii) Рангът на φ е

$$\operatorname{rk}(\varphi) = \dim \operatorname{im}(\varphi) = \dim l(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = \operatorname{rk}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$$

По определение, вектор-стълбовете на матрицата A са съставени от координатите на $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ спрямо базиса $f_1, \dots, f_m$, така че

$$\operatorname{rk}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = \operatorname{rk}(A) \quad \text{и} \quad \operatorname{rk}(\varphi) = \operatorname{rk}(A).$$

□

Задача 74. *Нека $\varphi : U \to V$, $\psi : U \to V$ са линейни изображения на линейни пространства над поле F, а $\lambda \in F$. Да се даде определение за $\varphi + \psi : U \to V$ и за $\lambda\varphi : U \to V$. Да се докаже, че $\varphi + \psi$ и $\lambda\varphi$ са линейни изображения.*

Доказателство. Сумата $\varphi + \psi$ на линейни изображения $\varphi : U \to V$ и $\psi : U \to V$ е изображението

$$\varphi + \psi : U \longrightarrow V,$$

действащо по правилото

$$(\varphi + \psi)(u) = \varphi(u) + \psi(u) \quad \text{за всички} \quad u \in U.$$

Произведението $\lambda\varphi$ на $\lambda \in F$ с линейно изображение $\varphi : U \to V$ е изображението

$$\lambda\varphi : U \longrightarrow V,$$

зададено с формулата

$$(\lambda\varphi)(u) = \lambda\varphi(u) \quad \text{за всички} \quad u \in U.$$

От

$$(\varphi + \psi)\left(\sum_{i=1}^n x_i u_i\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i u_i\right) + \psi\left(\sum_{i=1}^n x_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(u_i) + \sum_{i=1}^n x_i \psi(u_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^n x_i[\varphi(u_i) + \psi(u_i)] = \sum_{i=1}^n x_i(\varphi + \psi)(u_i) \quad \text{за произволни} \quad u_i \in U \quad \text{и} \quad x_i \in F$$

следва, че $\varphi + \psi : U \to V$ е линейно изображение.

Съгласно

$$(\lambda\varphi)\left(\sum_{i=1}^n x_i u_i\right) = \lambda\varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i u_i\right) = \lambda\left[\sum_{i=1}^n x_i \varphi(u_i)\right] = \sum_{i=1}^n x_i[\lambda\varphi(u_i)] = \sum_{i=1}^n x_i(\lambda\varphi)(u_i)$$

за произволни $u_i \in U$ и $x_i \in F$, изображението $\lambda\varphi : U \to V$ е линейно.

□

Задача 75. *Нека U и V са линейни пространства над поле F. Да се докаже, че множеството $\operatorname{Hom}(U, V)$ на линейните изображения $U \to V$ е линейно пространство над F.*

Доказателство. Ако $\varphi : U \to V$ и $\psi : U \to V$ са линейни изображения, то

$$\varphi + \psi : U \longrightarrow V, \quad (\varphi + \psi)(u) = \varphi(u) + \psi(u) \quad \text{за} \quad \forall u \in U$$

е линейно изображение. За произволно $\lambda \in F$, изображението

$$\lambda\varphi : U \longrightarrow V, \quad (\lambda\varphi)(u) = \lambda\varphi(u) \quad \text{за} \quad \forall u \in U$$

е линейно.

Аксиомите за линейно пространство в $\mathrm{Hom}(U, V)$ следват от съответните аксиоми във V, след остойностяване в произволен вектор $u \in U$. По-точно, от

$$\begin{aligned}[\theta + (\psi + \varphi)](u) = \theta(u) + (\psi + \varphi)(u) = \theta(u) + [\psi(u) + \varphi(u)] = \\ = [\theta(u) + \psi(u)] + \varphi(u) = (\theta + \psi)(u)(u) + \varphi(u) = [(\theta + \psi) + \varphi](u)\end{aligned}$$

за всяко $u \in U$ следва $\theta + (\psi + \varphi) = (\theta + \psi) + \varphi$.

От

$$(\psi + \varphi)(u) = \psi(u) + \varphi(u) = \varphi(u) + \psi(u) = (\varphi + \psi)(u) \quad \text{за} \quad \forall u \in U$$

следва $\psi + \varphi = \varphi + \psi$.

Нулевото изображение

$$\mathbb{O} : U \longrightarrow V, \quad \mathbb{O}(u) = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V \quad \text{за} \quad \forall u \in U$$

играе ролята на нулев вектор в $\mathrm{Hom}(U, V)$, съгласно

$$(\varphi + \mathbb{O})(u) = \varphi(u) + \mathbb{O}(u) = \varphi(u) + \overrightarrow{\mathcal{O}}_V = \varphi(u) \quad \text{за} \quad \forall u \in U,$$

което дава $\varphi + \mathbb{O} = \varphi$.

Произволно линейно изображение $\varphi : U \to V$ има противоположно $(-\varphi) := (-1)\varphi \in \mathrm{Hom}(U, V)$, така че $\varphi + (-\varphi) = \mathbb{O}$ поради

$$[\varphi + (-\varphi)](u) = \varphi(u) + (-1)\varphi(u) = \varphi(u) + [-\varphi(u)] = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V = \mathbb{O}(u)$$

за всички $u \in U$.

Нека $\varphi : U \to V$, $\psi : U \to V$ са линейни изображения, а $\lambda, \mu \in F$. От

$$\begin{aligned}[\lambda(\varphi + \psi)](u) = \lambda[(\varphi + \psi)](u) = \lambda[\varphi(u) + \psi(u)] = \lambda\varphi(u) + \lambda\psi(u) = \\ = (\lambda\varphi)(u) + (\lambda\psi)(u) = (\lambda\varphi + \lambda\psi)(u) \quad \text{за всички} \quad u \in U\end{aligned}$$

следва дистрибутивния закон $\lambda(\varphi + \psi) = \lambda\varphi + \lambda\psi$ над векторен множител.

За дистрибутивния закон $(\lambda + \mu)\varphi = \lambda\varphi + \mu\varphi$ над скаларен множител е достатъчно да забележим, че

$$\begin{aligned}[(\lambda + \mu)\varphi](u) = (\lambda + \mu)\varphi(u) = \lambda\varphi(u) + \mu\varphi(u) = \\ = (\lambda\varphi)(u) + (\mu\varphi)(u) = (\lambda\varphi + \mu\varphi)(u) \quad \text{за всички} \quad u \in U.\end{aligned}$$

От

$$[(\lambda\mu)\varphi](u) = (\lambda\mu)\varphi(u) = \lambda[\mu\varphi(u)] = \lambda[(\mu\varphi)(u)] = [\lambda(\mu\varphi)](u) \quad \text{за всички} \quad u \in U$$

получаваме $(\lambda\mu)\varphi = \lambda(\mu\varphi)$.

Накрая, за произволно линейно изображение $\varphi : U \to V$ и $1 \in F$ е в сила

$$(1.\varphi)(u) = 1.\varphi(u) = \varphi(u) \quad \text{за всички} \quad u \in U,$$

откъдето $1.\varphi = \varphi$.

□

Задача 76. *Нека $e = (e_1, \dots, e_n)$ е базис на линейно пространство U над поле F, а $f = (f_1, \dots, f_m)$ е базис на линейно пространство V над F.*

(i) Ако $\varphi : U \to V$ и $\psi : U \to V$ са линейни изображения с матрици $A, B \in M_{m\times n}(F)$ спрямо базисите e и f, а $\lambda \in F$, да се докаже, че $\varphi + \psi : U \to V$ има матрица $A + B$ спрямо e и f, а $\lambda\varphi : U \to V$ има матрица λA спрямо e и f.

(ii) Ако $\mathrm{Hom}(U, V)$ е линейното пространство на линейните изображения $U \to V$, а $M_{m\times n}(F)$ е пространството на матриците с m реда и n стълба, да се докаже, че съответствието

$$\mathcal{A} : \mathrm{Hom}(U, V) \longrightarrow M_{m\times n}(F),$$

съпоставящо на линейно изображение $\varphi : U \to V$ матрицата $\mathcal{A}_\varphi$ на φ спрямо базисите e и f е линеен изоморфизъм.

Доказателство. (i) Определението за матрица на линейно изображение дава $\varphi(e) = fA$ и $\psi(e) = fB$. Следователно

$$\begin{aligned}(\varphi+\psi)(e) &= ((\varphi+\psi)(e_1), \dots, (\varphi+\psi)(e_n)) = (\varphi(e_1)+\psi(e_1), \dots, \varphi(e_n)+\psi(e_n)) = \\ &= (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) + (\psi(e_1), \dots, \psi(e_n)) = \varphi(e)+\psi(e) = fA + fB = f(A+B)\end{aligned}$$

и $\varphi + \psi : U \to V$ има матрица $A + B$ спрямо базисите e и f.

Аналогично от

$$\begin{aligned}(\lambda\varphi)(e) &= ((\lambda\varphi)(e_1), \dots, (\lambda\varphi)(e_n)) = (\lambda\varphi(e_1), \dots, \lambda\varphi(e_n)) = \\ &= \lambda(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = \lambda\varphi(e) = \lambda(fA) = f(\lambda A)\end{aligned}$$

получаваме, че λA е матрицата на $\lambda\varphi : U \to V$ спрямо и f.

(ii) Съответствието

$$\mathcal{A} : \mathrm{Hom}(U, V) \longrightarrow M_{m\times n}(F), \tag{8}$$

съпоставящо на линейно изображение $\varphi : U \to V$ неговата матрица $\mathcal{A}_\varphi \in M_{m\times n}(F)$ спрямо базисите e и f е взаимно еднозначно. По-точно, матрицата $\mathcal{A}_\varphi$ се състои по стълбове от координатите на $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ спрямо базиса $f = (f_1, \dots, f_m)$ на V и определя напълно образите $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ на базисните вектори $e_1, \dots, e_n$ на U под действие на φ. Това определя еднозначно $\varphi : U \to V$. Съгласно (i),

$$\mathcal{A}_{\varphi+\psi} = \mathcal{A}_\varphi + \mathcal{A}_\psi \qquad \mathcal{A}_{\lambda\varphi} = \lambda\mathcal{A}_\varphi$$

за произволни линейни изображения $\varphi : U \to V$, $\psi : U \to V$ и $\lambda \in F$. Следователно изображението (8) е линейно, а оттам и линеен исоморфизъм.

$\square$

Задача 77. *Да се даде определение за произведение на линейни изображения и да се докаже, че произведението на линейни изображения е линейно изображние.*

Доказателство. Ако $\varphi : U \to V$ и $\psi : V \to W$ са линейни изображения, то композицията $\psi\varphi : U \to W$ са нарича произведение на φ с ψ. Съгласно

$$(\psi\varphi)\left(\sum_{i=1}^n x_i u_i\right) = \psi\left(\varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i u_i\right)\right) = \psi\left(\sum_{i=1}^n x_i \varphi(u_i)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i \psi(\varphi(u_i)) = \sum_{i=1}^n x_i (\psi\varphi)(u_i) \quad \text{за произволни} \quad u_i \in U \quad \text{и} \quad x_i \in F,$$

произведението $\psi\varphi : U \to W$ на линейни изображения е линейно изображение.

$\square$

Задача 78. *(i) Нека $\varphi : U \to V$ е линейно изображение с матрица $A \in M_{m\times n}(F)$ спрямо базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ на U и базис $f = (f_1, \dots, f_m)$ на V, а $\psi : V \to W$ е линейно изображение с матрица $B \in M_{k\times m}(F)$ спрямо базиса f на V и базис $g = (g_1, \dots, g_k)$ на W. Да се докаже, че линейното изображение $\psi\varphi : U \to W$ има матрица $BA \in M_{k\times n}(F)$ спрямо базисите e и g.*

(ii) Нека $\varphi_1 : U \to V$, $\varphi_2 : U \to V$, $\psi : V \to W$, $\theta : W \to T$ са линейни изображения на крайномерни пространства U, V, W, T над поле F, а $\lambda \in F$. Да се докаже, че:

(а) $\theta(\psi\varphi_1) = (\theta\psi)\varphi_1$;

(б) $\psi(\varphi_1 + \varphi_2) = \psi\varphi_1 + \psi\varphi_2$;

(в) $\lambda(\psi\varphi_1) = (\lambda\psi)\varphi_1 = \psi(\lambda\varphi_1)$.

Доказателство. (i) От определението за матрица на линейно изображение, $\varphi(e) = fA$ и $\psi(f) = gB$. Следователно

$$(\psi\varphi)(e) = \psi(\varphi(e)) = \psi(fA) = \psi(f)A = (gB)A = g(BA),$$

така че $\psi\varphi : U \to W$ има матрица $BA \in M_{k\times n}(F)$ спрямо базиса e на U и базиса g на W.

(ii) Съгласно взаимната еднозначност на съответствието между линейните изображения на крайномерни пространства и техните матрици спрямо фиксирани базиси, достатъчно е да докажем $\mathcal{A}_{\theta(\psi\varphi_1)} = \mathcal{A}_{(\theta\psi)\varphi_1}$ за матриците на $\theta(\psi\varphi_1)$ и $(\theta\psi)\varphi_1$ спрямо базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ на U, базис $f = (f_1, \dots, f_m)$ на V, базис $g = (g_1, \dots, g_k)$ на W и базис $h = (h_1, \dots, h_s)$ на T. Това следва от асоциативността на умножението на матрици. Вземайки предвид, че матрицата на произведение на линейни изображения е произведение на матриците на множителите, получаваме

$$\mathcal{A}_{\theta(\psi\varphi_1)} = \mathcal{A}_\theta \mathcal{A}_{\psi\varphi_1} = \mathcal{A}_\theta(\mathcal{A}_\psi \mathcal{A}_{\varphi_1}) = (\mathcal{A}_\theta \mathcal{A}_\psi)\mathcal{A}_{\varphi_1} = \mathcal{A}_{\theta\psi}\mathcal{A}_{\varphi_1} = \mathcal{A}_{(\theta\psi)\varphi_1}$$

и стигаме до извода, че $\theta(\psi\varphi_1) = (\theta\psi)\varphi_1$. Аналогично, дистрибутивността на събирането и умножението на матрици дава

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\psi(\varphi_1+\varphi_2)} &= \mathcal{A}_\psi \mathcal{A}_{\varphi_1+\varphi_2} = \mathcal{A}_\psi(\mathcal{A}_{\varphi_1} + \mathcal{A}_{\varphi_2}) = \\ &= \mathcal{A}_\psi \mathcal{A}_{\varphi_1} + \mathcal{A}_\psi \mathcal{A}_{\varphi_2} = \mathcal{A}_{\psi\varphi_1} + \mathcal{A}_{\psi\varphi_2} = \mathcal{A}_{\psi\varphi_1+\psi\varphi_2}.\end{aligned}$$

Накрая, от

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\lambda(\psi\varphi_1)} &= \lambda\mathcal{A}_{\psi\varphi_1} = \lambda(\mathcal{A}_\psi \mathcal{A}_{\varphi_1}) = (\lambda\mathcal{A}_\psi)\mathcal{A}_{\varphi_1} = \mathcal{A}_\psi(\lambda\mathcal{A}_{\varphi_1}) = \\ &= \mathcal{A}_{\lambda\psi}\mathcal{A}_{\varphi_1} = \mathcal{A}_\psi \mathcal{A}_{\lambda\varphi_1} = \mathcal{A}_{(\lambda\psi)\varphi_1} = \mathcal{A}_{\psi(\lambda\varphi_1)}\end{aligned}$$

следва $\lambda(\psi\varphi_1) = (\lambda\psi)\varphi_1 = \psi(\lambda\varphi_1)\psi$.

По-добро решение на (ii), което е в сила без предположението за крайномерност на пространствата:

(а) За произволен вектор $u \in U$ е в сила

$$[\theta(\psi\varphi_1)](u) = \theta((\psi\varphi_1)(u)) = \theta(\psi(\varphi_1(u))) = (\theta\psi)(\varphi_1(u)) = [(\theta\psi)\varphi_1](u),$$

откъдето $\theta(\psi\varphi_1) = (\theta\psi)\varphi_1$.

(б) От

$$\begin{aligned}[\psi(\varphi_1 + \varphi_2)](u) &= \psi((\varphi_1 + \varphi_2)(u)) = \psi(\varphi_1(u) + \varphi_2(u)) = \\ &= \psi(\varphi_1(u)) + \psi(\varphi_2(u)) = (\psi\varphi_1)(u) + (\psi\varphi_2)(u) = (\psi\varphi_1 + \psi\varphi_2)(u)\end{aligned}$$

за произволен вектор $u \in U$ получаваме $\psi(\varphi_1 + \varphi_2) = \psi\varphi_1 + \psi\varphi_2$.

(в) Съгласно

$$[\lambda(\psi\varphi_1)](u) = \lambda((\psi\varphi_1)(u)) = \lambda(\psi(\varphi_1(u))) = (\lambda\psi)(\varphi_1(u)) =$$
$$= \psi(\lambda\varphi_1(u)) = [(\lambda\psi)\varphi_1](u) = [\psi(\lambda\varphi_1)](u)$$

за произволен вектор $u \in U$ следва $\lambda(\psi\varphi_1) = (\lambda\psi)\varphi_1 = \psi(\lambda\varphi_1)$.

□

15. Обратим линеен оператор. Обратима матрица. Формули на Крамер.

Задача 79. *Да се докаже, че следните условия са еквивалентни за линеен оператор $\varphi : U \to U$ в n-мерно пространство U:*

(i) φ е обратим линеен оператор;

(ii) ядрото $\ker(\varphi) = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_U\}$ на φ е нулевото пространство;

(iii) дефектът на φ е $d(\varphi) = 0$;

(iv) рангът на φ е $\mathrm{rk}(\varphi) = n$;

(v) образът $\mathrm{im}(\varphi) = U$ на φ съвпада с цялото пространство U;

(vi) φ трансформира базис $e_1, \ldots, e_n$ на U в базис $\varphi(e_1), \ldots \varphi(e_n)$ на U.

Доказателство. $(i) \Rightarrow (ii)$ Произволен линеен оператор $\varphi : U \to U$ оставя на място нулевия вектор $\varphi(\overrightarrow{\mathcal{O}}_U) = \overrightarrow{\mathcal{O}}_U$, така че $\overrightarrow{\mathcal{O}}_U \in \ker(\varphi)$. Поради взаимната еднозначност на φ, за всеки ненулев вектор $u \in U$, $u \neq \overrightarrow{\mathcal{O}}_U$ е в сила $\varphi(u) \neq \varphi(\overrightarrow{\mathcal{O}}_U) = \overrightarrow{\mathcal{O}}_U$, така че $\ker(\varphi) = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_U\}$ се състои само от нулевия вектор $\overrightarrow{\mathcal{O}}_U$ на U.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Ако ядрото $\ker(\varphi) = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_U\}$, то дефектът $d(\varphi) := \dim\ker(\varphi) = 0$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ По Теоремата за ранга и дефекта на линейно изображение $\varphi : U \to U$ на n-мерно пространство U, $\mathrm{rk}(\varphi) = n - d(\varphi) = n - 0 = n$.

$(iv) \Rightarrow (v)$ Ако подпространството $\mathrm{im}(\varphi)$ на U е с размерност $\dim\mathrm{im}(\varphi) = \mathrm{rk}(\varphi) = n = \dim(U)$, то $\mathrm{im}(\varphi)$ съвпада с U, $\mathrm{im}(\varphi) = U$.

$(v) \Rightarrow (vi)$ Ако $e_1, \ldots, e_n$ е базис на U и $\mathrm{im}(\varphi) = l(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = U$, то $n = \dim(U) = \dim l(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = \mathrm{rk}(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$, така че $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ са линейно независими, а оттам и базис на n-мерното пространство U.

$(vi) \Rightarrow (i)$ Ако линеен оператор $\varphi : U \to U$ изобразява базис $e_1, \ldots, e_n$ на U в базис $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ на U, то еднозначно определения линеен оператор $\psi : U \to U$ с $\psi(\varphi(e_i)) = e_i$ за всички $1 \leq i \leq n$ е обратен на φ съгласно

$$(\psi\varphi)\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \psi\left(\varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right)\right) = \psi\left(\sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i)\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^n x_i \psi(\varphi(e_i)) = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \mathrm{Id}_U\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right)$$

за произволни $x_i \in F$ и

$$(\varphi\psi)\left(\sum_{i=1}^n y_i \varphi(e_i)\right) = \varphi\left(\psi\left(\sum_{i=1}^n y_i \varphi(e_i)\right)\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n y_i \psi(\varphi(e_i))\right) =$$
$$= \varphi\left(\sum_{i=1}^n y_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n y_i \varphi(e_i) = \mathrm{Id}_U\left(\sum_{i=1}^n y_i \varphi(e_i)\right)$$

за всички $y_i \in F$.

□

Задача 80. *Да се даде определение за:*

(i) обратима матрица ;

(ii) неособена матрица.

Да се намери A^{-1}, *ако*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(F), \quad \text{и} \quad \det(A) \neq 0.$$

Решение: (i) Квадратна матрица $A \in M_{n\times n}(F)$ е обратима, ако съществува квадратна матрица $B \in M_{n\times n}(F)$ от същия ред, така че $AB = BA = E_n$.

(ii) Квадратна матрица $A \in M_{n\times n}(F)$ е неособена, ако има ненулева детерминанта $\det(A) \neq 0$.

Нека

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(F)$$

е матрица от втори ред с $\det(A) \neq 0$. Ако $A_{i,j}$ е адюнгираното количество на елемента $a_{i,j}$ на A за $1 \leq i, j \leq 2$, то

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} \end{pmatrix}.$$

При това, $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$ и

$$A_{1,1} = (-1)^{1+1}a_{2,2} = a_{2,2}, \quad A_{2,1} = (-1)^{2+1}a_{1,2} = -a_{1,2},$$

$$A_{1,2} = (-1)^{1+2}a_{2,1} = -a_{2,1}, \quad A_{2,2} = (-1)^{2+2}a_{1,1} = a_{1,1}.$$

Следователно

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}} \begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix}.$$

Задача 81. *Нека* $A, B \in M_{n\times n}(F)$ *е са обратими матрици. Да се докаже, че:*

(i) обратната матрица A^{-1} *на* A *е единствена;*

(ii) A^{-1} *е обратима и обратната и матрица е* A;

(iii) $AB \in M_{n\times n}(F)$ *е обратима и обратната и матрица е* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Решение: (i) Ако A_1 и A_2 са обратни матрици на A, то

$$A_2 = E_nA_2 = (A_1A)A_2 = A_1(AA_2) = A_1E_n = A_1,$$

съгласно определението $A_1A = AA_1 = E_n$, съответно, $AA_2 = A_2A = E_n$ за обратна матрица, асоциативността на умножението на матрици и $E_nA_2 = A_2$, $A_1E_n = A_1$.

(ii) Ако $A \in M_{n\times n}(F)$ е обратима с обратна матрица A^{-1}, то $AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$. По този начин, A изпълнява дефиниционните равенства за обратната на A^{-1} и

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

(iii) Съгласно

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = [A(BB^{-1})]A^{-1} = (AE_n)A^{-1} = AA^{-1} = E_n \quad \text{и}$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = [B^{-1}(A^{-1}A)]B = (B^{-1}E_n)B = B^{-1}B = E_n,$$

матрицата $B^{-1}A^{-1} \in M_{n\times n}(F)$ изпълнява дефиниционните равенства за $(AB)^{-1}$, откъдето съществува обратна на AB и тази обратна е $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Задача 82. *Нека $A \in M_{n\times n}(F)$ е квадратна матрица от ред n. Да се докаже, че A е обратима тогава и само тогава, когато е неособена.*

Решение: Ако $A \in M_{n\times n}(F)$ е обратима и $A^{-1} \in M_{n\times n}(F)$ е нейната обратна матрица, то $AA^{-1} = E_n$. По Теоремата за умножението на детерминанти

$$1 = \det(E_n) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}).$$

Следователно $\det(A) \neq 0$ и всяка обратима матрица $A \in M_{n\times n}(F)$ е неособена.

Нека $A_{i,j}$ е адюнгираното количество на елемента $a_{i,j}$ на A и $A^* \in M_{n\times n}(F)$ е матрицата с елементи $(A^*)_{i,j} = A_{j,i}$ за всички $1 \leq i, j \leq n$. Тогава

$$AA^* = \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \det(A) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det(A) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \det(A) \end{pmatrix},$$

защото за $1 \leq i \neq j \leq n$ е в сила

$$(AA^*)_{i,j} = \sum_{s=1}^{n} a_{i,s}(A^*)_{s,j} = \sum_{s=1}^{n} a_{i,s}A_{j,s} = 0,$$

съгласно фалшивото развитие на детерминанта по ред и

$$(AA^*)_{i,i} = \sum_{s=1}^{n} a_{i,s}(A^*)_{s,i} = \sum_{s=1}^{n} a_{i,s}A_{i,s} = \det(A) \quad \text{за всички} \quad 1 \leq i \leq n,$$

съгласно развитието на $\det(A)$ по i-ти ред. Аналогично,

$$A^*A = \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \det(A) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det(A) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \det(A) \end{pmatrix},$$

защото

$$(A^*A)_{i,j} = \sum_{s=1}^{n} (A^*)_{i,s}a_{s,j} = \sum_{s=1}^{n} A_{s,i}a_{s,j} = \begin{cases} \det(A) & \text{за } 1 \leq i = j \leq n, \\ 0 & \text{за } 1 \leq i \neq j \leq n, \end{cases}$$

съгласно развитието на $\det(A)$ по i-ти стълб и фалшивото развитие на детерминанта по стълб.

Ако $A \in M_{n\times n}(F)$ е неособена матрица, т.е. $\det(A) \neq 0$, то матрицата

$$B := \frac{1}{\det(A)} A^* \in M_{n\times n}(F)$$

изпълнява дефиниционните равенства

$$AB = \frac{1}{\det(A)} AA^* = E_n \quad \text{и} \quad BA = \frac{1}{\det(A)} A^*A = E_n$$

на обратната матрица на A и

$$B = \frac{1}{\det(A)} A^* = A^{-1}.$$

Задача 83. *Нека $\varphi : U \to U$ е линеен оператор в крайномерно пространство U над поле F. Да се докаже, че $\varphi : U \to U$ е обратим тогава и само тогава, когато матрицата $A \in M_{n\times n}(F)$ на φ спрямо произволен базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ на U е обратима.*

Доказателство. Нека $\varphi : U \to U$ е обратим линеен оператор с обратен $\varphi^{-1} : U \to U$. За произволен линеен оператор $\psi : U \to U$ означаваме с $\mathcal{A}_\psi \in M_{n\times n}(F)$ матрицата на ψ спрямо базиса e на U. Тогава

$$\mathcal{A}_\varphi \mathcal{A}_{\varphi^{-1}} = \mathcal{A}_{\varphi\varphi^{-1}} = \mathcal{A}_{\mathrm{Id}} = E_n \quad \text{и} \quad \mathcal{A}_{\varphi^{-1}} \mathcal{A}_\varphi = \mathcal{A}_{\varphi^{-1}\varphi} = \mathcal{A}_{\mathrm{Id}} = E_n,$$

така че матрицата $\mathcal{A}_\varphi \in M_{n\times n}(F)$ на φ прямо базиса e е обратима с обратна

$$(\mathcal{A}_\varphi)^{-1} = \mathcal{A}_{\varphi^{-1}}.$$

Нека $\varphi : U \to U$ е линеен оператор с обратима матрица $\mathcal{A}_\varphi \in M_{n\times n}(F)$ спрямо базиса на U. Ако $\psi : U \to U$ е линейният оператор с матрица $(\mathcal{A}_\varphi)^{-1} \in M_{n\times n}(F)$ спрямо e, то от

$$\mathcal{A}_{\varphi\psi} = \mathcal{A}_\varphi \mathcal{A}_\psi = \mathcal{A}_\varphi (\mathcal{A}_\varphi)^{-1} = E_n = \mathcal{A}_{\mathrm{Id}}$$

следва $\varphi\psi = \mathrm{Id}$ и от

$$\mathcal{A}_{\psi\varphi} = \mathcal{A}_\psi \mathcal{A}_\varphi = (\mathcal{A}_\varphi)^{-1} \mathcal{A}_\varphi = E_n = \mathcal{A}_{\mathrm{Id}}$$

следва $\psi\varphi = \mathrm{Id}$. Това доказва, че φ е обратим линеен оператор с обратен $\varphi^{-1} = \psi$.

□

Задача 84. *Нека*

$$\left| \begin{array}{cccccc} a_{1,1}x_1 & +\dots & +a_{1,j}x_j & +\dots & +a_{1,n}x_n & = b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1}x_1 & +\dots & +a_{ij}x_j & +\dots & +a_{i,n}x_n & = b_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1}x_1 & +\dots & +a_{n,j}x_j & +\dots & +a_{n,n}x_n & = b_n \end{array} \right.$$

е система от n линейни уравнения с n неизвестни, чиято матрица от коефициенти $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(F)$ има ненулева детерминанта $\Delta = \det(a_{i,j})_{i,j=1}^n \in F \setminus \{0\}$. Да се докаже, че тази система има единствено решение

$$\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \dots, \frac{\Delta_i}{\Delta}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta} \right),$$

където Δ_i е детерминантата на матрицата, получена от A чрез замяна на i-тия стълб на A със стълба

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_i \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

на свободните членове.

Доказателство. Нека $A_{i,j}$ са адюнгираните количества на $a_{i,j}$ и $A^* \in M_{n\times n}(F)$ е матрицата с елементи $(A^*)_{i,j} = A_{j,i}$ за всички $1 \leq i, j \leq n$. Дадената система уравнения е еквивалентна на матричното уравнение $Ax = b$. По предположение, $\Delta = \det(A) \neq 0$, така че матрицата A е неособена, откъдето обратима и системата има единствено решение $s = A^{-1}b$. Непосредствено се проверява, че

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^* = \frac{1}{\Delta} A^*,$$

така че

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ \dots \\ s_i \\ \dots \\ s_n \end{pmatrix} = s = \frac{1}{\Delta} A^* b.$$

Оттук следва, че за всяко $1 \le i \le n$ е в сила

$$s_i = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{1,i} & \dots & A_{p,i} & \dots & A_{n,i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_p \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \sum_{p=1}^{n} A_{p,i} b_p = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

съгласно формулата за развитие на Δ_i относно стълба с номер i.

□

16. Смяна на базиса. Подобни матрици.

Задача 85. *Да се даде определение за матрица на прехода от базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ на линейно пространство V към базис $f = (f_1, \dots, f_n)$ на V.*

Да се намери матрицата на прехода от базис e_1, e_2, e_3 на $\mathbb{R}^3$ към базиса

$$f_1 = e_1 + 3e_2 + e_3, \quad f_2 = -e_1 + e_2 + 2e_3, \quad f_3 = 2e_1 - e_2 + 3e_3$$

на $\mathbb{R}^3$.

Доказателство. Ако $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, \dots, f_n)$ са базиси на линейно пространство V, то матрицата $T \in M_{n \times n}(F)$, образувана по стълбове от координатите на $f_1, \dots, f_n$ спрямо базиса $e_1, \dots, e_n$ се нарича матрица на прехода от базиса e към базиса f. Еквивалентно, матрицата на прехода $T \in M_{n \times n}(F)$ от базиса e към базиса f е единствената матрица, изпълняваща равенството

$$f = (f_1, \dots, f_n) = (e_1, \dots, e_n)T = eT.$$

За примера, първият стълб на $T \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ е

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

вторият стълб е

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

е третият стълб е

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

С други думи, матрицата на прехода $T \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ от e_1, e_2, e_3 към f_1, f_2, f_3 е

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

□

Задача 86. *(i) Нека $u_1, \dots, u_m$ са линейно независими вектори от линейно пространство U, $u = (u_1, \dots, u_m)$, $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in M_{m\times n}(F)$ и*

$$uA = \underbrace{(\overrightarrow{\mathcal{O}}, \dots, \overrightarrow{\mathcal{O}})}_{n}.$$

Да се докаже, че $A = \mathbb{O}_{m\times n}$ е нулевата матрица.

(ii) Нека $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, \dots, f_n)$ са базиси на линейно пространство V с матрица на прехода $T \in M_{n\times n}(F)$ от e към f. Да се намери връзката между координатите $x \in M_{n\times 1}(F)$ на вектор $v \in V$ спрямо базиса e и координатите $y \in M_{n\times 1}(F)$ на същия вектор v спрямо базиса f.

Доказателство. (i) За всяко $1 \leq j \leq n$, сравняването на j-тите компоненти на двете страни на

$$uA = \underbrace{(\overrightarrow{\mathcal{O}}, \dots, \overrightarrow{\mathcal{O}})}_{n}$$

дава

$$\begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \dots \\ a_{m,j} \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathcal{O}}.$$

Но равенството

$$\sum_{s=1}^{m} a_{s,j} u_s = \overrightarrow{\mathcal{O}}$$

за линейно независимите вектори $u_1, \dots, u_m$ изисква $a_{s,j} = 0$ за $\forall 1 \leq s \leq m$. Това доказва $a_{s,j} = 0$ за всички $1 \leq s \leq m$, $1 \leq j \leq n$ и $A = \mathbb{O}_{m\times n}$.

(ii) Съгласно $f = eT$ и $ex = v = fy$ имаме $ex = (eT)y = e(Ty)$, откъдето $e(x - Ty) = \overrightarrow{\mathcal{O}}$. Поради линейната независимост на $e_1, \dots, e_n$, оттук следва

$$x = Ty.$$

□

Задача 87. *Нека $e = (e_1, \dots, e_n)$ е базис на линейно пространство V е $T \in M_{n\times n}(F)$ е квадратна матрица. Да се докаже, че T е матрица на прехода от базиса към базиса $f = (f_1, \dots, f_n) = eT$ тогава и само тогава, когато матрицата T е неособена.*

Доказателство. Ако $f = eT$ е базис на V, то $e = fS$ за матрицата на прехода $S \in M_{n\times n}(F)$ от базиса f към базиса e. Тогава

$$eE_n = e = (eT)S = e(TS),$$

откъдето

$$e(TS - E_n) = \underbrace{(\overrightarrow{\mathcal{O}}, \dots, \overrightarrow{\mathcal{O}})}_{n}.$$

Съгласно линейната независимост на $e_1, \dots, e_n$, получаваме $TS - E_n = \mathbb{O}_{n\times n}$ или

$$TS = E_n.$$

Оттук следва, че T е обратима или неособена матрица.

Ако T е неособена матрица и $\det(T) \neq 0$, то вектор-стълбовете на T са линейно независими поради анулирането на детерминанта с линейно зависими стълбове. Следователно векторите $f_1, \dots, f_n$, чиито координати спрямо базиса $e_1, \dots, e_n$ образуват вектор-стълбовете на T са линейно независими и образуват базис на n-мерното линейно пространство V.

□

Задача 88. *(i) Нека $\varphi : U \to V$ е линейно изображение с матрица $A \in M_{m\times n}(F)$ спрямо базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ на U и базис $f = (f_1, \dots, f_m)$ на V. Да се намери матрицата $B \in M_{m\times n}(F)$ на φ спрямо базис e' на U и базис f' на V.*

(ii) Нека $\varphi : U \to V$ е $\mathbb{R}$-линейното изображение с матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

спрямо базис $e = (e_1, e_2, e_3)$ на U и базис $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ на V. Да се намери матрицата $B \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$ на φ спрямо базиса

$$e'_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3, \quad e'_2 = e_2 + 2e_3, \quad e'_3 = e_3$$

на U и базиса

$$f'_1 = f_1, \quad f'_2 = 2f_1 + f_2, \quad f'_3 = 3f_1 + 2f_2 + f_3, \quad f'_4 = 4f_1 + 3f_2 + 2f_3 + f_4$$

на V.

Доказателство. (i) Ако $T \in M_{n\times n}(F)$ е матрицата на прехода от базиса e към базиса $e' = eT$ на U, а $S \in M_{m\times m}(F)$ е матрицата на прехода от базиса f към базиса $f' = fS$ на V, то

$$f(AT) = (fA)T = \varphi(e)T = \varphi(eT) = \varphi(e') = f'B = (fS)B = f(SB).$$

Следователно

$$f(SB - AT) = (\underbrace{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V, \dots, \overrightarrow{\mathcal{O}}_V}_{n}),$$

откъдето $SB - AT = \mathbb{O}_{m\times n} \in M_{m\times n}(F)$. Това доказва, че $SB = AT$ и

$$B = S^{-1}AT.$$

(ii) Матрицата на прехода от базиса $e = (e_1, e_2, e_3)$ към базиса $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ на U е

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}),$$

а матрицата на прехода от базиса $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ към базиса $f' = (f'_1, f'_2, f'_3, f'_4)$ на V е

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

С елементарни преобразувания по редове към $(S|E_4)$ свеждаме S към единичната матрица E_4. Матрицата, получена от E_4 под действие на същите елементарни преобразувания по редове е S^{-1}. По-точно,

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

така че

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

и матрицата на φ спрямо e' и f' е

$$B = S^{-1}AT = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 \\ -5 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

17. Собствени вектори и инвариантни подпространства на линеен оператор.

Задача 89. *Да се даде определение за собствен вектор, собствена стойност, характеристичен полином и характеристичен корен на линеен оператор $\varphi : V \to V$ в крайномерно пространство V. Да се докаже, че определението за характеристичен полином на φ е коректно.*

Доказателство. Ненулев вектор $v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$ е собствен за линеен оператор $\varphi : V \to V$, ако съществува $\lambda \in F$, така че $\varphi(v) = \lambda v$. Казваме, че λ е собствена стойност на φ, отговаряща на собствения вектор v.

Ако $A \in M_{n\times n}(F)$ е квадратна матрица от ред n, то полиномът

$$f_A(x) = \det(A - xE_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - x \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^n x^n + (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})x^{n-1} + \dots + \det(A)$$

от степен n се нарича характеристичен полином на A.

Подобни матрици A и $B = T^{-1}AT$ имат равни характеристични полиноми , защото

$$f_B(x) = \det(B - xE_n) = \det[T^{-1}AT - T^{-1}(xE_n)T] =$$
$$= \det(T^{-1})\det(A - xE_n)\det(T) = \det(T)^{-1} f_A(x)\det(T) = f_A(x).$$

Матриците на линеен оператор $\varphi : V \to V$ в крайномерно пространство V спрямо различни базиси са подобни помежду си. Характеристичният полином на матрицата на φ спрямо един, а оттам и всеки един базис на V се нарича характеристичен полином на φ и се бележи с $f_\varphi(x)$. Корените на $f_\varphi(x)$ са характеристичните корени на φ.

□

Задача 90. *Нека $\varphi : V \to V$ е линеен оператор в крайномерно линейно пространство V над поле F. Да се докаже, че характеристичните корени на φ от F съвпадат със собствените стойности на φ.*

Доказателство. Да напомним, че хомогенна система линейни уравнения $Mx = \mathbb{O}_{n\times 1}$ с квадратна матрица от коефициенти $M \in M_{n\times n}(F)$ има ненулево решение тогава и само тогава, когато размерността на пространството от решения е $n - \mathrm{rk}(M) > 0$. Последното е равносилно на $\mathrm{rk}(M) < n$ и е изпълнено точно когато $\det(M) = 0$.

Нека $e = (e_1, \dots, e_n)$ е базис на V и $A \in M_{n\times n}(F)$ е матрицата на φ спрямо базиса e на V. Вектор $v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$ с координати $x \in M_{n\times 1}(F) \setminus \{\mathbb{O}_{n\times 1}\}$ спрямо базиса e е собствен вектор на φ, отговарящ на собствена стойност $\lambda \in F$ точно когато

$$Ax = \lambda x = \lambda E_n x.$$

Това е изпълнено тогава и само тогава, когато x е ненулево решение на хомогенната система линейни уравнения

$$(A - \lambda E_n)x = \mathbb{O}_{n\times 1}.$$

Последното е еквивалентно на

$$\det(A - \lambda E_n) = 0$$

и е в сила точно когато λ е характеристичен корен на φ от полето F.

□

Задача 91. *Нека $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ са различни собствени стойности на линеен оператор $\varphi : V \to V$ в пространство V над поле F. За всяко $1 \leq i \leq n$ да предположим, че $v_{i,1}, \dots, v_{i,k_i} \in V$ са линейно независими собствени вектори на φ, отговарящи на собствената стойност λ_i. Да се докаже, че системата вектори*

$$\{v_{i,j} \,|\, 1 \leq j \leq k_i,\, 1 \leq i \leq n\}$$

е линейно независима.

Доказателство. С индукция по броя n на собствените стойности $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ на φ, за $n = 1$ няма какво да се доказва. В общия случай да разгледаме линейна комбинация

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i} \mu_{i,j} v_{i,j} = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V \tag{9}$$

на дадените вектори, равна на нулевия вектор на V. Действието на φ върху (9) дава

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i} \mu_{i,j}\lambda_i v_{i,j} = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V. \tag{10}$$

За да елиминираме $v_{n,1}, \dots, v_{n,k_n}$ от (9) и (10), умножаваме (9) с $-\lambda_n$ и прибавяме към (10). Получаваме

$$\overrightarrow{\mathcal{O}}_V = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i} \mu_{i,j}(\lambda_i - \lambda_n) v_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{k_i} \mu_{i,j}(\lambda_i - \lambda_n) v_{i,j}.$$

По индукционно предположение, системата $\{v_{i,j} \,|\, 1 \leq i \leq n-1,\, 1 \leq j \leq k_i\}$ е линейно независима, така че

$$\mu_{i,j}(\lambda_i - \lambda_n) = 0 \quad \text{за всички} \quad 1 \leq i \leq n-1 \quad \text{и} \quad 1 \leq j \leq k_i.$$

Съгласно $\lambda_i - \lambda_n \neq 0$ за $1 \leq i \leq n-1$, стигаме до извода, че $\mu_{i,j} = 0$ за всички $1 \leq i \leq n-1$ и $1 \leq j \leq k_i$. Сега (9) приема вида

$$\sum_{j=1}^{k_n} \mu_{n,j} v_{n,j} = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V.$$

Съгласно линейната независимост на $v_{n,1}, \dots, v_{n,k_n}$, коефициентите $\mu_{n,j} = 0$ се анулират за всички $1 \leq j \leq k_n$. Това доказва линейната независимост на

$$\{v_{i,j} \,|\, 1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq k_i\}.$$

□

Задача 92. *(i) Нека $\varphi : V \to V$ е линеен оператор с прост спектър в n-мерно пространство V над поле F. Да се докаже, че съществува базис $v_1, \dots, v_n$ на V, в който матрицата*

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

е диагонална.

(ii) Нека $A \in M_{n \times n}(F)$ е матрица с прост спектър. Да се докаже, че съществува обратима матрица $T \in M_{n \times n}(F)$, така че $D = T^{-1}AT$ е диагонална.

Доказателство. (i) По определение, φ е оператор с прост спектър, ако има n различни характеристични корена $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ от F. Те са собствени стойности на φ. Ако v_i са собствени вектори на $\varphi : V \to V$, отговарящи на собствените стойности λ_i, то $v_1, \dots, v_n$ са линейно независими. Следователно $v_1, \dots, v_n$ е базис на V, в който матрицата на φ е диагонална,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

и диагоналните елементи са равни на съответните собствени стойности.

(ii) Нека $e = (e_1, \dots, e_n)$ е базис на n-мерно пространство V над F, а $\varphi : V \to V$ е линейният оператор с матрица $A \in M_{n \times n}(F)$ спрямо e. Тогава φ има прост спектър и съгласно (i) съществува базис $v = (v_1, \dots, v_n)$ на V, в който матрицата на φ е диагонална,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Матрицата на прехода $T \in M_{n \times n}(F)$ от базиса e към базиса $v = eT$ е обратима и

$$D = T^{-1}AT.$$

□

Задача 93. *Нека $\varphi : V \to V$ е линеен оператор в пространство V над поле F. Да се даде определение за φ-инвариантно подпространство U на V.*

Да се докаже, че:

(i) за всяко $\lambda \in F$ множеството $U_\lambda = \{v \in V \,|\, \varphi(v) = \lambda v\}$ е φ-инвариантно подпространство на V;

(ii) ненулев вектор $v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$ поражда 1-мерно φ-инвариантно подпространство $l(v)$ на V тогава и само тогава, когато v е собствен вектор на φ.

Доказателство. Подпространство W на линейно пространство V е инвариантно относно линеен оператор $\varphi : V \to V$, ако $\varphi(W) \subseteq W$.

(i) Подмножеството $U_\lambda = \{v \in V \,|\, \varphi(v) = \lambda v\}$ на V е подпространство на V, защото за произволни $u_1, u_2 \in U_\lambda$ и $\mu \in F$ е в сила $u_1 + u_2, \mu u_1 \in U_\lambda$, съгласно

$$\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) = \lambda u_1 + \lambda u_2 = \lambda(u_1 + u_2) \quad \text{и}$$

$$\varphi(\mu u_1) = \mu\varphi(u_1) = \mu(\lambda u_1) = (\mu\lambda)u_1 = (\lambda\mu)u_1 = \lambda(\mu u_1).$$

Подпространството U_λ на V е φ-инвариантно, защото за произволен вектор $u \in U_\lambda$ е изпълнено $\varphi(u) = \lambda u \in U_\lambda$.

(ii) Ако 1-мерното подпространство $l(v)$ на V е φ-инвариантно, то ненулевият вектор $v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$ се изобразява в $\varphi(v) \in l(v)$, така че $\varphi(v) = \lambda v$ за някое $\lambda \in F$ и v е собствен вектор на φ, отговарящ на собствена стойност λ.

Обратно, ако $v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$ е собствен вектор на φ, отговарящ на собствена стойност λ, то произволен вектор $\mu v \in l(v)$ се изобразява в $\varphi(\mu v) = \mu\varphi(v) = \mu(\lambda v) = \mu\lambda v \in l(v)$ и 1-мерното подпространство $l(v)$ на V е φ-инвариантно.

$\square$

Задача 94. *Нека $\varphi : V \to V$ е линеен оператор в крайномерно линейно пространство над полето $\mathbb{R}$ на реалните числа. Да се докаже, че φ има 1-мерно или 2-мерно φ-инвариантно подпространство.*

Доказателство. Избираме базис $e = (e_1, \ldots, e_n)$ на V и разглеждаме матрицата $A \in M_{n\times n}(F)$ на φ спрямо e. Ако A има реален характеристичен корен $\lambda \in \mathbb{R}$, то λ е собствена стойност на φ и произволен собствен вектор $v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$ на φ, отговарящ на собствената стойност λ поражда 1-мерно φ-инвариантно подпространство $l(v)$ на V. Отсега нататък ще предполагаме, че всички характеристични корени на φ и на A са комплексни нереални числа и ще докажем, че тогава φ има 2-мерно φ-инвариантно подпространство.

За целта разглеждаме кородинатния изоморфизъм $C : V \to M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, съпоставящ на вектор $ex \in V$ координатния му стълб $C(ex) = x$ спрямо e. Изображението

$$\varphi_o : M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{n\times 1}(\mathbb{R}), \quad \varphi_o(x) = Ax$$

е линейно съгласно

$$\varphi_o(x + y) = A(x + y) = Ax + Ay = \varphi_o(x) + \varphi_o(y) \quad \text{и} \quad \varphi_o(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda\varphi_o(x)$$

за произволни $x, y \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. В диаграмата

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "C"] \arrow[d, "\varphi"] & M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \arrow[d, "\varphi_o"] \\
V \arrow[r, "C"] & M_{n\times 1}(\mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

имаме $C\varphi = \varphi_o C$, съгласно

$$C\varphi(ex) = C(\varphi(e)x) = C((eA)x) = C(e(Ax)) = Ax = \varphi_o(x) = \varphi_o C(ex).$$

Влагаме наредените n-торки реални числа $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ в наредените n-торки комплексни числа $M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ като елементите с нулеви имагинерни части на компонентите. Тогава линейният оператор $\varphi_o : M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \to M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, $\varphi_o(x) = Ax$ има $\mathbb{C}$-линейно продължение до линеен оператор

$$\varphi_o^{\mathbb{C}} : M_{n\times 1}(\mathbb{C}) \longrightarrow M_{n\times 1}(\mathbb{C}), \quad \varphi_o^{\mathbb{C}}(w) = Aw$$

с $\varphi_o^{\mathbb{C}}|_{M_{n\times 1}(\mathbb{R})} = \varphi_o$, участващ в диаграмата

$$\begin{tikzcd} M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_o"] & M_{n\times 1}(\mathbb{C}) \arrow[d, "\varphi_o^{\mathbb{C}}"] \\ M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \arrow[r] & M_{n\times 1}(\mathbb{C}) \end{tikzcd} .$$

Линейният оператор $\varphi_o^{\mathbb{C}}$ в n-мерното пространство $M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ над $\mathbb{C}$ има комплексен характеристичен корен $\lambda \in \mathbb{C}$, който е характеристичен корен на A, а оттам и на φ. Следователно $\lambda = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ е комплексно нереално число и съществува собствен вектор $w \in M_{n\times 1}(\mathbb{C}) \setminus \{\mathbb{O}_{n\times 1}\}$ на $\varphi_o^{\mathbb{C}}$, отговарящ на собствената стойност λ. Полагаме $w = u+iv$ за $u, v \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ и сравняваме реалните и имагинерните части в равенствата

$$Au + iAv = A(u + iv) = Aw = \varphi_o^{\mathbb{C}}(w) = \lambda w = (a + bi)(u + iv) = (au - bv) + i(bu + av),$$

за да изведем

$$\begin{aligned} Au &= au - bv, \\ Av &= bu + av. \end{aligned} \tag{11}$$

Оттук, линейната обвивка $l(u, v)$ е φ_o-инвариантно подпространство на $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ и $l(eu, ev)$ е φ-инвариантно подпространство на V. Остава да докажем линейната независимост на u, v, за да получим, че $l(eu, ev)$ е 2-мерно φ-инвариантно подпространство на V и да докажем твърдението.

Да допуснем, че $u, v \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ са линейно зависими и съществуват $p, q \in \mathbb{R}$, $(p, q) \neq (0, 0)$ с

$$pu + qv = \mathbb{O}_{n\times 1}. \tag{12}$$

Действайки с φ_o върху (12) получаваме

$$\mathbb{O}_{n\times 1} = p(Au) + q(Av) = p(au - bv) + q(bu + av) = (pa + qb)u + (qa - pb)v. \tag{13}$$

За да елиминираме v от (12) и (13), умножаваме почленно (12) с $qa - pb \in \mathbb{R}$, (13) с $-q \in \mathbb{R}$ и събираме. Това дава

$$-(p^2 + q^2)bu = \mathbb{O}_{n\times 1}. \tag{14}$$

От $p, q \in \mathbb{R}$, $(p, q) \neq (0, 0)$ следва, че $p^2 + q^2 \in \mathbb{R}^{>0}$ е строго положително реално число. По предположение, $\lambda = a+bi \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ е комплексно нереално число, така че $b \neq 0$. Затова $-(p^2 + q^2)b \neq 0$ е ненулево реално число и (14) изисква $u = \mathbb{O}_{n\times 1}$. Сега от действието на φ_o върху u получаваме, че

$$\mathbb{O}_{n\times 1} = \varphi_o(\mathbb{O}_{n\times 1}) = \varphi_o(u) = Au = au - bv = -bv,$$

използвайки (11). Поради $-b \neq 0$, оттук получаваме $v = \mathbb{O}_{n\times 1}$ и стигаме до извода, че собственият вектор $w = u + iv = \mathbb{O}_{n\times 1} \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ на $\varphi_o^{\mathbb{C}}$ е нулев. Противоречието установява линейната независимост на $u, v \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ и доказва твърдението.

□

18. Евклидови и унитарни пространства. Ортогонализация по метода на Грам-Шмид.

Задача 95. *Да се даде определение за евклидово (унитарно) пространство и да се изведат някои следствия от аксиомите.*

Доказателство. Линейно пространство V над полето $\mathbb{R}$ на реалните числа (съответно, над полето $\mathbb{C}$ на комплексните числа) е евклидово (съответно, унитарно), ако в него е определено скаларно произведение $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ (съответно, $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$).

Скаларно произведение
$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow F,$$
в линейно пространство V над $F = \mathbb{R}$ или $F = \mathbb{C}$ е изображение със свойствата:

(i) $\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$ за $\forall u, v \in V$;

(ii) $\langle u_1 + u_2, v\rangle = \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle$ за $\forall u_1, u_2, v \in V$;

(iii) $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$ за $\forall u, v \in V$, $\forall \lambda \in F$;

(iv) $\langle v, v\rangle \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ за $\forall v \in V$ с $\langle v, v\rangle = 0 \in F$ точно когато $v = \mathcal{O}_V \in V$.

Следствия от аксиомите:

(а) $\langle u, v_1 + v_2\rangle = \langle u, v_1\rangle + \langle u, v_2\rangle$ за $\forall u, v_1, v_2 \in V$.

По-точно,
$$\langle u, v_1 + v_2\rangle = \overline{\langle v_1 + v_2, u\rangle} = \overline{\langle v_1, u\rangle + \langle v_2, u\rangle} = \overline{\langle v_1, u\rangle} + \overline{\langle v_2, u\rangle} = \langle u, v_1\rangle + \langle u, v_2\rangle.$$

(б) $\langle u, \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\langle u, v\rangle$ за $\forall u, v \in V$, $\forall \lambda \in F$.

Това следва от
$$\langle u, \lambda v\rangle = \overline{\langle \lambda v, u\rangle} = \overline{\lambda\langle v, u\rangle} = \overline{\lambda}\ \ \overline{\langle v, u\rangle} = \overline{\lambda}\ \ \langle u, v\rangle.$$

(в) $\langle \overrightarrow{\mathcal{O}_V}, v\rangle = \langle v, \overrightarrow{\mathcal{O}_V}\rangle = 0$ за $\forall v \in V$ и нулевия вектор $\overrightarrow{\mathcal{O}}_V \in V$.

За произволен вектор $u \in V$ е в сила $0u = \mathcal{O}_V$, така че
$$\langle \mathcal{O}_V, v\rangle = \langle 0u, v\rangle = 0\langle u, \mathcal{O}_V\rangle = 0 \quad \text{и}$$
$$\langle v, \mathcal{O}_V\rangle = \langle v, 0u\rangle = \overline{0}\ \ \langle v, u\rangle = 0\ \ \langle v, u\rangle = 0.$$

(г) За произволни $u_i, v_j \in V$ и $\lambda_i, \mu_j \in F$ е в сила
$$\langle \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda i\overline{\mu_j}\langle u_i, v_j\rangle.$$

Последното свойство се получава от аксиоми (ii), (iii) за скаларно произведение и следствия (а), (б) от аксиомите за скаларно произведение.

□

Задача 96. *Нека V е евклидово (унитарно) пространство.*

(i) Да се докаже, че произволни ненулеви ортогонални вектори $v_1, \ldots, v_n \in V$ са линейно независими.

(ii) Да се докаже, че базис $e = (e_1, \ldots, e_n)$ на V е ортонормиран тогава и само тогава, когато
$$\langle ex, ey\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i} = x^t\overline{y}$$
за произволни вектори $ex, ey \in V$ с координати $x, y \in M_{n\times 1}(F)$, $F = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ спрямо базиса e.

Доказателство. (i) Нека

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_i v_i + \ldots + \lambda_n v_n = \mathcal{O}_V$$

е линейна комбинация на $v_1, \ldots, v_n$, равна на нулевия вектор $\mathcal{O}_V \in V$. Скаларното произведение на тази линейна комбинация с v_i е равно на

$$0 = \langle \mathcal{O}_V, v_i \rangle = \langle \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_i v_i + \ldots + \lambda_n v_n, v_i \rangle = \lambda_i \langle v_i, v_i \rangle,$$

съгласно $\langle v_j, v_i \rangle = 0$ за $1 \leq i \neq j \leq n$. Поради $v_i \neq \mathcal{O}_V$ имаме $\langle v_i, v_i \rangle = ||v_i||^2 > 0$, откъдето $\lambda_i = 0$ за всички $1 \leq i \leq n$ и векторите $v_1 \ldots, v_n$ са линейно независими.

(ii) Ако $e = (e_1, \ldots, e_n)$ е ортонормиран базис на V, то

$$\langle ex, ey \rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \overline{y_j} \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} = (x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \ldots \\ \overline{y_i} \\ \ldots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix},$$

съгласно

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{за } 1 \leq i \neq j \leq n, \\ 1 & \text{за } 1 \leq i = j \leq n. \end{cases}$$

Обратно, ако $\langle ex, ey \rangle = x^t \overline{y}$ за произволни вектори $ex, ey \in V$, то

$$\langle e_i, e_i \rangle = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

и

$$\langle e_i, e_j \rangle = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq i \neq j \leq n.$$

□

Задача 97. *Да се опише алгоритъма за ортогонализация по метода на Грам-Шмид, който по зададени линейно независими вектори $a_1, \ldots, a_n$ от евклидово (унитарно) пространство V построява ненулеви ортогонални вектори $b_1, \ldots, b_n$ с*

$$l(a_1, \ldots, a_i) = l(b_1, \ldots, b_i) \quad \textit{за} \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

Ако $a_1, \ldots, a_l$ са ортогонални за някое $l \leq n$, то $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2, \ldots, b_l = a_l$.

Доказателство. С индукция по i, за произволни линейно независими $a_1, \dots, a_i \in V$ ще докажем, че съществуват ненулеви ортогонални вектори $b_1, \dots, b_i \in V$ с $l(a_1, \dots, a_i) = l(b_1, \dots, b_i)$. Още повече, ако $a_1, \dots, a_i$ а ортогонални, то $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2, \dots, b_i = a_i$.

За $n = 1$ избираме $b_1 = a_1$.

Ако $a_1, \dots, a_i \in V$ са линейно независими вектори, то $a_1, \dots, a_{i-1}$ са линейно независими и по индукционно предположение съществуват ненулеви ортогонални вектори $b_1, \dots, b_{i-1} \in V$ с $l(a_1, \dots, a_{i-1}) = l(b_1, \dots, b_{i-1})$. Търсим

$$b_i = a_i + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{i,j} b_j \tag{15}$$

с такива $\lambda_{i,j} \in F = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, че

$$0 = \langle b_i, b_j \rangle = \langle a_i, b_j \rangle + \langle \lambda_{i,j} b_j, b_j \rangle = \langle a_i, b_j \rangle + \lambda_{i,j} \langle b_j, b_j \rangle \quad \text{за всички} \quad 1 \leq j \leq i-1.$$

С други думи, избираме

$$\lambda_{i,j} = -\frac{\langle a_i, b_j \rangle}{\langle b_j, b_j \rangle} \quad \text{за} \quad 1 \leq j \leq i-1.$$

Тогава $b_1, \dots, b_{i-1}, b_i$ образуват ортогонална система вектори. Ако допуснем, че $b_i = \mathcal{O}_V$, то

$$a_i = \sum_{j=1}^{i-1} (-\lambda_{i,j}) b_j \in l(b_1, \dots, b_{i-1}) = l(a_1, \dots, a_{i-1})$$

противоречи на линейната независимост на $a_1, \dots, a_{i-1}, a_i$. Това доказва, че векторите $b_1, \dots, b_{i-1}, b_i$ са ненулеви. За да проверим, че $l(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i) = l(b_1, \dots, b_{i-1}, b_i)$ използваме, че $l(a_1, \dots, a_{i-1}) = l(b_1, \dots, b_{i-1})$, откъдето

$$l(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i) = l(a_1, \dots, a_{i-1}) + l(a_i) = l(b_1, \dots, b_{i-1}) + l(a_i) = l(b_1, \dots, b_{i-1}, a_i).$$

За

$$l(b_1, \dots, b_{i-1}, a_i) = l(b_1, \dots, b_{i-1}, b_i)$$

е достатъчно да забележим, че от (15) следва

$$b_i \in l(b_1, \dots, b_{i-1}, a_i) \quad \text{и} \quad a_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{i,j} b_j \in l(b_1, \dots, b_{i-1}, b_i).$$

Ако $a_1, \dots, a_i \in V$ са ортогонални, то $a_1, \dots, a_{i-1} \in V$ са ортогонални и $b_1 = a_1$, $\dots$, $b_{i-1} = a_{i-1}$ по индукционно предположение. Тогава при търсене на b_i по правилото (15) получаваме

$$\lambda_{i,j} = -\frac{\langle a_i, b_j \rangle}{\langle b_j, b_j \rangle} = -\frac{\langle a_i, a_j \rangle}{\langle a_j, a_j \rangle} = 0$$

за всички $1 \leq j \leq i-1$, откъдето $b_i = a_i$.

□

Задача 98. *(i) Нека $a_1, \dots, a_n$ са линейно независими вектори от евклидово (унитарно) пространство V и $a_{n+1} \in l(a_1, \dots, a_n)$. Да се докаже, че ортогонализацията по метода на Грам-Шмид дава $b_{n+1} = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$.*

(ii) Нека V е n-мерно евклидово (унитарно) пространство, а $e_1, \dots, e_k \in V$ е ортонормирана система вектори. Да се докаже, че $k \leq n$ и $e_1, \dots, e_k$ се продължава до ортонормиран базис $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ на V.

В частност, V има ортонормиран базис $e_1, \dots, e_n$.

Доказателство. (i) Чрез ортогонализация по метода на Грам-Шмид, от линейно независимите вектори $a_1, \dots, a_n \in V$ получаваме ненулеви ортогонални $b_1, \dots, b_n \in V$ с $l(a_1, \dots, a_n) = l(b_1, \dots, b_n)$. Търсим

$$b_{n+1} = a_{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{n+1,j} b_j.$$

Съгласно $a_{n+1} \in l(a_1, \dots, a_n) = l(b_1, \dots, b_n)$ съществуват $\mu_j \in F$ с $a_{n+1} = \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j b_j$. В резултат,

$$b_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j b_j + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{n+1,j} b_j = \sum_{j=1}^{n} (\mu_j + \lambda_{n+1,j}) b_j$$

и от условията

$$0 = \langle b_{n+1}, b_j \rangle = (\mu_j + \lambda_{n+1,j}) \langle b_j, b_j \rangle$$

следва $\mu_j + \lambda_{n+1,j} = 0$ за всички $1 \leq j \leq n$ и $b_{n+1} = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$.

(ii) Ненулевите ортогонални вектори $e_1, \dots, e_k$ са линейно независими. Ако $a_1, \dots, a_n$ е базис на V, то $e_1, \dots, e_k \in V = l(a_1, \dots, a_n)$ изисква $k \leq n$ по Основната лема на линейната алгебра (Лемата за линейна зависимост). Продължаваме $e_1, \dots, e_k$ до базис $e_1, \dots, e_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ на V или избираме базис $v_1, \dots, v_n$ на V. Към линейно независимите вектори $e_1, \dots, e_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ или $v_1, \dots, v_n$ прилагаме ортогонализация по метода на Грам-Шмид и получаваме ненулеви ортогонални вектори $b_1, \dots, b_n \in V$. При това, $b_1 = e_1, \dots, b_k = e_k$, ако $v_1 = e_1, \dots, v_k = e_k$. Векторите $b_1, \dots, b_n$ са линейно независими и образуват базис на V. Полагаме

$$e_i := \frac{b_i}{||b_i||}, \quad ||b_i|| := \sqrt{\langle b_i, b_i \rangle}^{\geq 0} \quad \text{за всички} \quad 1 \leq i \leq n$$

и получаваме ортонормиран базис $e_1, \dots, e_n$ на V, който съдържа ортонормираните вектори $e_1, \dots, e_k$, ако $v_1 = e_1, \dots, v_k = e_k$.

□

19. Матрица на Грам. Неравенство на Коши-Буняковски и неравенство на триъгълника. Ортогонално допълнение на подпространство.

Задача 99. *Нека $a_1, \dots, a_n$ са вектори от крайномерно евклидово (унитарно) пространство V с матрица на Грам*

$$G(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \dots & \langle a_1, a_j \rangle & \dots & \langle a_1, a_n \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle a_i, a_1 \rangle & \dots & \langle a_i, a_j \rangle & \dots & \langle a_i, a_n \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle a_n, a_1 \rangle & \dots & \langle a_n, a_j \rangle & \dots & \langle a_n, a_n \rangle \end{pmatrix}$$

Да се докаже, че детерминантата на Грам $\det G(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ е неотрицателно реално число и $\det G(a_1, \dots, a_n) = 0$ тогава и само тогава, когато векторите $a_1, \dots, a_n$ са линейно зависими.

Доказателство. Нека $A = (a_{i,j})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$ е матрицата, съставена по стълбове от координатите

$$\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \dots \\ a_{m,j} \end{pmatrix}$$

на a_j спрямо ортонормиран базис $e = (e_1, \dots, e_m)$, т.е.

$$a_j = (e_1, \dots, e_m) \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \dots \\ a_{m,j} \end{pmatrix}.$$

Тогава

$$A^t \overline{A} = \begin{pmatrix} a_1^t \\ \dots \\ a_n^t \end{pmatrix} (\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}) = \begin{pmatrix} a_1^t \overline{a_1} & \dots & a_1^t \overline{a_j} & \dots & a_1^t \overline{a_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_i^t \overline{a_1} & \dots & a_i^t \overline{a_j} & \dots & a_i^t \overline{a_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^t \overline{a_1} & \dots & a_n^t \overline{a_j} & \dots & a_n^t \overline{a_n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \dots & \langle a_1, a_j \rangle & \dots & \langle a_1, a_n \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle a_i, a_1 \rangle & \dots & \langle a_i, a_j \rangle & \dots & \langle a_i, a_n \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle a_n, a_1 \rangle & \dots & \langle a_n, a_j \rangle & \dots & \langle a_n, a_n \rangle \end{pmatrix} = G(a_1, \dots, a_n)$$

е матрицата на Грам, съгласно $a_i^t \overline{a_j} = \langle a_i, a_j \rangle$ за всички $1 \leq i, j \leq n$.

Нека $b_1, \dots, b_n$ се получават от $a_1, \dots, a_n$ чрез ортогонализация по метода на Грам-Шмид. Тогава съществува триъгълна матрица $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$ с $t_{i,j} = 0$ за $\forall i > j$ и $t_{i,i} = 1$ за $\forall 1 \leq i \leq n$, така че

$$(b_1, \dots, b_n) = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} 1 & t_{1,2} & \dots & t_{1,n-1} & t_{1,n} \\ 0 & 1 & \dots & t_{2,n-1} & t_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = AT.$$

Ако $B \in M_{m \times n}(F)$ е матрицата, образувана по стълбове от координатите на

$$b_j = (e_1, \dots, e_m) \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ \dots \\ b_{m,j} \end{pmatrix}$$

спрямо ортонормирания базис $e = (e_1, \dots, e_m)$, то $B = AT$. Следователно матрицата на Грам на $b_1, \dots, b_n$ е

$$G(b_1, \dots, b_n) = B^t \overline{B} = (AT)^t \overline{(AT)} = T^t (A^t \overline{A}) \overline{T} = T^t G(a_1, \dots, a_n) \overline{T}.$$

За $\overline{(AT)} = \overline{A}\overline{T}$ използваме правилото за умножение на матрици, както и $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$ са произволни комплексни числа $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Детерминантите на Грам

$$\det G(b_1, \dots, b_n) = \det(T^t) G(a_1, \dots, a_n) \det(\overline{T}) = \det G(a_1, \dots, a_n)$$

съвпадат, защото $\det(T^t) = \det(T) = \det(\overline{T}) = 1$. Пресмятаме в явен вид

$$G(b_1, \dots, b_n) = \begin{pmatrix} ||b_1||^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & ||b_2||^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & ||b_{n-1}||^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & ||b_n||^2 \end{pmatrix},$$

и забелязваме, че

$$\det G(b_1, \dots, b_n) = ||b_1||^2 ||b_2||^2 \dots ||b_{n-1}||^2 ||b_n||^2 \geq 0$$

с равенство $\det G(b_1,\dots,b_n)=0$ точно когато $b_i=\overrightarrow{\mathcal{O}}_V$ за някое $1\le i\le n$. От свойствата на ортогонализацията по метода на Грам-Шмид знаем, че ако $i\in\mathbb{N}$ е минималното естествено, за което $b_i=\overrightarrow{\mathcal{O}}_V$, то $a_1,\dots,a_{i-1}$ са линейно независими и $a_i\in l(a_1,\dots,a_{i-1})$. Затова $b_i=\overrightarrow{\mathcal{O}}_V$ за някое $1\le i\le n$ тогава и само тогава, когато векторите $a_1,\dots,a_n$ са линейно зависими.

□

Задача 100. (Неравенство на Коши-Буняковски:) *Да се докаже, че за произволни вектори a и b от крайномерно евклидово или унитарно пространство V е в сила*

$$|\langle a,b\rangle|\le||a||\,||b||$$

с равенство $|\langle a,b\rangle|=||a||\,||b||$ точно когато a,b са линейно зависими.

Доказателство. Детерминантата на Грам

$$\det G(a,b)=\begin{vmatrix}\langle a,a\rangle & \langle a,b\rangle\\ \langle b,a\rangle & \langle b,b\rangle\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}||a||^2 & \langle a,b\rangle\\ \overline{\langle a,b\rangle} & ||b||^2\end{vmatrix}=$$
$$=||a||^2||b||^2-\langle a,b\rangle\overline{\langle a,b\rangle}=||a||^2||b||^2-|\langle a,b\rangle|^2\ge0$$

е неотрицателна и $||a||^2||b||^2-|\langle a,b\rangle|^2=0$ тогава и само тогава, когато a,b са линейно зависими.

За произволни $X,Y\in\mathbb{R}^{\ge0}$ условието $X^2\ge Y^2$ е еквивалентно на $X\ge Y$ с равенство $X^2=Y^2$ точно когато $X=Y$. За целта е достатъчно да разложим

$$X^2-Y^2=(X+Y)(X-Y)$$

и да забележим, че ако $X+Y=0$, то $Y=-X\in\mathbb{R}^{\ge0}\cap\mathbb{R}^{\le0}=\{0\}$, така че от $X^2=Y^2$ следва $X=Y$.

В случая, $||a||^2||b||^2\ge|\langle a,b\rangle|^2$ е еквивалентно на $||a||||b||\ge|\langle a,b\rangle|$ с равенство $||a||||b||=|\langle a,b\rangle|$ точно когато a,b са линейно зависими.

□

Задача 101. (Неравенство на триъгълника:) *Нека a,b са вектори от крайномерно евклидово или унитарно пространство V. Да се докаже, че $||a+b||\le||a||+||b||$ с равенство $||a+b||=||a||+||b||$ точно когато $a=\lambda b$ за $\lambda\in\mathbb{R}^{\ge0}$ или $b=\overrightarrow{\mathcal{O}}_V$.*

Доказателство. За произволно комплексно число $z=r+is\in\mathbb{C}$ с $r,s\in\mathbb{R}$ е в сила

$$r\le|z|=\sqrt{r^2+s^2}^{\ge0}$$

с равенство $r=\sqrt{r^2+s^2}^{\ge0}$ точно когато $s=0$ и $r\in\mathbb{R}^{\ge0}$. Последното е еквивалентно на $z\in\mathbb{R}^{\ge0}$. Затова

$$||a+b||^2=\langle a+b,a+b\rangle=\langle a,a\rangle+\langle a,b\rangle+\langle b,a\rangle+\langle b,b\rangle=||a||^2+\langle a,b\rangle+\overline{\langle a,b\rangle}+||b||^2=$$
$$=||a||^2+2Re(\langle a,b\rangle)+||b||^2\le||a||^2+2|\langle a,b\rangle|+||b||^2$$

с равенство $||a+b||^2=||a||^2+2|\langle a,b\rangle|+||b||^2$ тогава и само тогава, когато $\langle a,b\rangle\in\mathbb{R}^{\ge0}$. Прилагайки неравенството на Коши-Буняковски $|\langle a,b\rangle|\le||a||||b||$ получаваме

$$||a+b||^2\le||a||^2+2||a||||b||+||b||^2=(||a||+||b||)^2$$

с равенство $||a+b||^2=(||a|+||b||)^2$ точно когато a,b са линейно зависими и $\alpha a+\beta b=\overrightarrow{\mathcal{O}}_V$ за $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $(\alpha,\beta)\ne(0,0)$. Ако $\alpha\ne0$, това е еквивалентно на $a=\lambda b$ за някое $\lambda\in\mathbb{R}$, а от

$\alpha = 0$ следва $\beta \neq 0$ и $b = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$. При $b = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$ е в сила $\langle a, b\rangle \in \mathbb{R}^{\geq 0}$, а за $a = \lambda b$ условието $\langle a, b\rangle = \langle \lambda b, b\rangle = \lambda ||b||^2 \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ е изпълнено точно когато $\lambda \in \mathbb{R}^{\geq 0}$. За $X, Y \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ условието $X^2 \geq Y^2$ е еквивалентно на $X \geq Y$ с равенство $X^2 = Y^2$ тогава и само тогава, когато $X = Y$. Затова $||a+b|| \leq ||a|| + ||b||$ с равенство $||a+b|| = ||a|| + ||b||$ точно когато $a = \lambda b$ или $b = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$.

□

Задача 102. *Да се даде определение за ортогонално допълнение $U^{\perp}$ на подпространство U на евклидово (унитарно) пространство V и да се докаже, че $U^{\perp}$ е подпространство на V.*

Доказателство. Ортогоналното допълнение

$$U^{\perp} = \{v \in V \mid \langle u, v\rangle = 0, \quad \forall u \in U\}$$

на подпространство $U \subseteq V$ се състои от векторите $v \in V$, които са ортогонални на всички вектори $u \in U$. За произволни $v_1, v_2 \in U^{\perp}$, $u \in U$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ или $\lambda \in \mathbb{C}$ е в сила

$$\langle u, v_1 + v_2\rangle = \langle u, v_1\rangle + \langle u, v_2\rangle = 0 + 0 = 0 \quad \text{и}$$

$$\langle u, \lambda v_1\rangle = \overline{\lambda}\langle u, v_1\rangle = \overline{\lambda}0 = 0.$$

Затова $v_1 + v_2, \lambda v_1 \in U^{\perp}$ и $U^{\perp}$ е подпространство на V.

□

Задача 103. *Нека V е n-мерно евклидово (унитарно) пространство, U е подпространство на V, а $U^{\perp}$ е ортогоналното допълнение на U. Да се докаже, че:*
(i) $U \oplus U^{\perp} = V$;
(ii) $(U^{\perp})^{\perp} = U$.

Доказателство. (i) Избираме ортонормиран базис $e_1, \dots, e_k$ на U и допълваме до ортонормиран базис $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ на V. Тогава

$$V = l(e_1, \dots, e_k) \oplus l(e_{k+1}, \dots, e_n) = U \oplus l(e_{k+1}, \dots, e_n).$$

Достатъчно е да докажем, че $l(e_{k+1}, \dots, e_n) = U^{\perp}$, за да получим (i). За произволни $v = \sum\limits_{j=k+1}^{n} y_j e_j$ и $u = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i e_i \in U$ е в сила

$$\langle u, v\rangle = \langle \sum_{i=1}^{k} x_i e_i, \sum_{j=k+1}^{n} y_j e_j\rangle = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} x_i \overline{y_j} \langle e_i, e_j\rangle = 0,$$

така че $l(e_{k+1}, \dots, e_n) \subseteq U^{\perp}$. Обратно, ако $v = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j \in U^{\perp}$, то за всяко $1 \leq i \leq k$ векторът e_i принадлежи на U, откъдето

$$0 = \langle e_i, v\rangle = \langle e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{y_j} \langle e_i, e_j\rangle = \overline{y_i}.$$

Следователно $v = \sum\limits_{j=k+1}^{n} y_j e_j \in l(e_{k+1}, \dots, e_n)$ и $U^{\perp} \subseteq l(e_{k+1}, \dots, e_n)$. Това доказва

$$U^{\perp} = l(e_{k+1}, \dots, e_n).$$

(ii) От една страна, $U \subseteq (U^\perp)^\perp$, защото за произволни вектори $u \in U$ и $v \in U^\perp$ е изпълнено

$$\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle} = \overline{0} = 0.$$

Съгласно (i) имаме разлагания

$$U \oplus U^\perp = V = U^\perp \oplus (U^\perp)^\perp.$$

Оттук, $\dim(U^\perp)^\perp = \dim V - \dim(U^\perp) = \dim(U)$ и подпространството U съвпада с пространството $(U^\perp)^\perp$.

□

Задача 104. *(i) Нека V е крайномерно евклидово (унитарно) пространство, U е подпространство на V, а $v \in V$ е вектор с ортогонална проекция $u \in U$ върху U и перпендикуляр $h \in U^\perp$ от v към U. Да се докаже, че h е единственият вектор с минимална дължина, за който $v - h \in U$.*

(ii) Нека $Ax = b$ е несъвместима система линейни уравнения, чиято матрица от коефициенти $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ е с ранг $\mathrm{rk}(A) = n$. Да се изведе формулата за решаване на $Ax = b$ по метода на най-малките квадрати.

Доказателство. (i) Ако $v = u_1 + w$ за $u_1 \in U$, $w \in V$, то от $u_1 + w = v = u + h$ следва

$$w = (u - u_1) + h \quad \text{с} \quad u - u_1 \in U, \quad h \in U^\perp.$$

Следователно

$$\begin{gathered}||w||^2 = \langle w, w\rangle = \langle (u-u_1) + h, (u-u_1) + h\rangle = \\ = \langle u - u_1, u - u_1\rangle + \langle h, h\rangle = ||u-u_1||^2 + ||h||^2 \geq ||h||^2,\end{gathered}$$

съгласно $\langle u - u_1, h\rangle = 0 = \langle h, u - u_1\rangle$. Равенството $||w||^2 = ||h||^2$ е в сила точно когато $||u - u_1||^2 = 0$. Това е изпълнено само за $u = u_1$ и е еквивалентно на $w = h$.

(ii) Ако $a_1, \ldots, a_n \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ са вектор-стълбовете на A, то

$$A^t A = \begin{pmatrix} a_1^t \\ \ldots \\ a_n^t \end{pmatrix} (a_1, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1^t\overline{a_1} & \ldots & a_1^t\overline{a_j} & \ldots & a_1^t\overline{a_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_i^t\overline{a_1} & \ldots & a_i^t\overline{a_j} & \ldots & a_i^t\overline{a_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^t\overline{a_1} & \ldots & a_n^t\overline{a_j} & \ldots & a_n^t\overline{a_n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \langle a_1, a_1\rangle & \ldots & \langle a_1, a_j\rangle & \ldots & \langle a_1, a_n\rangle \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \langle a_i, a_1\rangle & \ldots & \langle a_i, a_j\rangle & \ldots & \langle a_i, a_n\rangle \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \langle a_n, a_1\rangle & \ldots & \langle a_n, a_j\rangle & \ldots & \langle a_n, a_n\rangle \end{pmatrix} = G(a_1, \ldots, a_n)$$

е матрицата на Грам на $a_1, \ldots, a_n$. Умножавайки отляво $Ax = b$ с A^t получаваме системата линейни уравнения

$$G(a_1, \ldots, a_n)x = A^t A x = A^t b.$$

Съгласно $\mathrm{rk}(a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{rk}(A) = n$, векторите $a_1, \ldots, a_n$ са линейно независими и $\det G(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{>0}$. Затова съществува единствено решение $s \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ на $A^t A x = A^t b$, за което

$$\begin{pmatrix} a_1^t \\ \ldots \\ a_n^t \end{pmatrix} (b - As) = \mathbb{O}_{n\times 1}.$$

Следователно векторът $b - As \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ е ортогонален на $a_1, \ldots, a_n \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ и принадлежи на ортогоналното допълнение

$$b - As \in l(a_1, \ldots, a_n)^{\perp}$$

на $l(a_1, \ldots, a_n)$. От друга страна,

$$As = (a_1, \ldots, a_n) \left(\begin{array}{c} s_1 \\ \ldots \\ s_n \end{array} \right) = \sum_{i=1}^{n} s_i a_i \in l(a_1, \ldots, a_n)$$

принадлежи на линейната обвивка на $a_1, \ldots, a_n$. Затова

$$b = (b - As) + As \in l(a_1, \ldots, a_n)^{\perp} \oplus l(a_1, \ldots, a_n)$$

е разлагането на $b \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ в сума ортоналната проекция As върху $l(a_1, \ldots, a_n)$ и перпендикуляра $b - As$ от b към $l(a_1, \ldots, a_n)$. Съгласно (i), $b - As \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ е единственият вектор с минимална дължина, за който $b - (b - As) = As \in l(a_1, \ldots, a_n)$. По този начин, щом не съществува $s \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ с $b - As = \mathbb{O}_{m\times 1}$, то решението $s \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, за което векторът $b - As \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ е с минимална дължина се нарича приближено решение на несъвместимата система $Ax = b$ по метода на най-малките квадрати.

□

20. Ортогонални и унитарни матрици и оператори.

Задача 105. *Да се даде определение за ортогонална (унитарна) матрица A.*

Да се докаже, че:

(i) матрица A е ортогонална (унитарна) тогава и само тогава, когато A е матрица на прехода от ортонормиран базис към ортонормиран базис;

(ii) ако A и B са ортогонални (унитарни) матрици, то AB е ортогонална (унитарна) матрица.

Доказателство. Матрица $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ (съответно, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$) е ортогонална (съответно унитарна), ако $A\overline{A}^t = E_n$.

(i) По определение, матрица A е ортогонална (унитарна), ако е обратима и $A^{-1} = \overline{A}^t$. Това е равносилно на $\overline{A}^t A = E_n$. Ако $A = (c_1, \ldots, c_n)$ има вектор стълбове $c_i \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ (съответно, $c_i \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$), то

$$E_n = \left(\begin{array}{c} \overline{c_1}^t \\ \ldots \\ \overline{c_n}^t \end{array} \right) (c_1, \ldots, c_n) = \left(\begin{array}{ccc} \overline{c_1}^t c_1 & \ldots & \overline{c_1}^t c_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \overline{c_n}^t c_1 & \ldots & \overline{c_n}^t c_n \end{array} \right)$$

се свежда до

$$\overline{c_i}^t c_j = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{за } 1 \leq i \neq j \leq n, \\ 1 & \text{за } 1 \leq i = j \leq n \end{cases} \tag{16}$$

и е еквивалентно на $c_i^t \overline{c_j} = \delta_{i,j}$ след комплексно спрягане на (16). Друг начин за доказване на (i) е чрез транспониране на (16), което дава $c_j^t \overline{c_i} = \delta_{i,j}$ за всички $1 \leq i, j \leq n$. Затова матрица A е ортогонална (унитарна) тогава и само тогава, когато вектор-стълбовете на A образуват ортонормирана система вектори, зададени с координатите си спрямо ортонормиран базис. Това е в сила точно когато е матрица на прехода от ортонормиран базис към ортонормиран базис.

(ii) От $A\overline{A}^t = E_n$ и $B\overline{B}^t = E_n$ следва

$$(AB)(\overline{B}^t\overline{A}^t) = A(B\overline{B}^t)\overline{A}^t = AE_n\overline{A}^t = A\overline{A}^t = E_n.$$

Следователно произведението AB на ортогонални (унитарни) матрици A и B ортогонална (унитарна) матрица.

□

Задача 106. *Да се даде определение за ортогонален (унитарен) оператор $\varphi : V \to V$ в евклидово (унитарно) пространство V. Да се докаже, че произволен ортогонален оператор $\varphi : V \to V$ в евклидово пространство запазва дължините на векторите и ъглите между ненулевите вектори от V.*

Доказателство. Линеен оператор $\varphi : V \to V$ в евклидово (унитарно) пространство V е ортогонален (унитарен), ако

$$\langle \varphi(u), \varphi(v)\rangle = \langle u, v\rangle \quad \text{за} \quad \forall u, v \in V.$$

Ако $\varphi : V \to V$ е ортогонален оператор в евклидово пространство V, то

$$||\varphi(v)||^2 = \langle \varphi(v), \varphi(v)\rangle = \langle v, v\rangle = ||v||^2,$$

откъдето $||\varphi(v)|| = ||v||$ за $\forall v \in V$.

За произволни ненулеви вектори $u, v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$ от евклидово пространство V съществува еднозначно определен ъгъл $\theta_1 \in [0, \pi]$, така че $\langle u, v\rangle = ||u||||v|| \cos(\theta_1)$. Ако $\varphi : V \to V$ е ортогонален оператор, то $||\varphi(u)|| = ||u|| > 0$, $||\varphi(v)|| = ||v|| > 0$, така че $\varphi(u), \varphi(v) \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$ и съществува еднозначно определен ъгъл $\theta_2 \in [0, \pi]$, за който $\langle \varphi(u), \varphi(v)\rangle = ||\varphi(u)||||\varphi(v)|| \cos(\theta_2)$. От

$$||u||||v|| \cos(\theta_2) = \langle \varphi(u), \varphi(v)\rangle = \langle u, v\rangle = ||u||||v|| \cos(\theta_1)$$

с $||u||||v|| > 0$ следва $\cos(\theta_2) = \cos(\theta_1)$. Функцията $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ е взаимно еднозначна, така че $\theta_1 = \theta_2$.

□

Задача 107. *Да се докаже, че следните условия са еквивалентни за линеен оператор $\varphi : V \to V$ в крайномерно евклидово (унитарно) пространство V:*

(i) операторът φ е ортогонален (унитарен);

(ii) $\langle \varphi(b_i), \varphi(b_j)\rangle = \langle b_i, b_j\rangle$ за произволни вектори b_i, b_j от базис $b_1, \ldots, b_n$ на V;

$$\text{(iii)} \langle \varphi(e_i), \varphi(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{за } 1 \le i = j \le n, \\ 0 & \text{за } 1 \le i \ne j \le n \end{cases}$$

за произволни вектори e_i, e_j от ортонормиран базис $e_1, \ldots, e_n$ на V, т.е. φ трансформира ортонормиран базис $e_1, \ldots, e_n$ на V в ортонормиран базис $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ на V;

(iv) матрицата A на φ спрямо ортонормиран базис $e_1, \ldots, e_n$ на V е ортогонална (унитарна).

В частност, всеки ортогонален (унитарен) оператор $\varphi : V \to V$ в крайномерно евклидово (унитарно) пространство V е обратим.

Доказателство. Ясно е, че $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$.

За еквивалентността на (iii) и (iv), нека $e_1, \ldots, e_n$ е ортонормиран базис на V и A е матрицата на $\varphi : V \to V$ спрямо този базис. В такъв случай, A е ортогонална (унитарна) тогава и само тогава, когато вектор-стълбовете на A образуват ортонормирана система вектори, зададени с координатите си спрямо ортонормиран базис. По определение, матрицата A на $\varphi : V \to V$ спрямо ортонормирания базис $e_1, \ldots, e_n$ на V е състои по стълбове от кородинатите на $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ спрямо $e_1, \ldots, e_n$. Затова A е ортогонална (унитарна) точно когато φ трансформира ортонормиран базис $e_1, \ldots, e_n$ на V в ортонормиран базис $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ на V.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Ако линеен оператор $\varphi : V \to V$ трансформира ортонормиран базис $e_1, \ldots, e_n$ на V в ортонормиран базис $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ на V, то за произволни вектори $u = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ и $v = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j$ от V е в сила

$$\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle \varphi \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right), \varphi \left(\sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right) \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i), \sum_{j=1}^{n} y_j \varphi(e_j) \rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y_j} \langle \varphi(e_i), \varphi(e_j) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y_j} \langle e_i, e_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \rangle = \langle u, v \rangle,$$

съгласно

$$\langle \varphi(e_i), \varphi(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{за } 1 \leq i = j \leq n, \\ 0 & \text{за } 1 \leq i \neq j \leq n. \end{cases}$$

В частност, ако $\varphi : V \to V$ е ортогонален (унитарен) оператор в крайномерно евклидово (унитарно) пространство V, то матрицата A на φ спрямо ортонормиран базис $e_1, \ldots, e_n$ е ортогонална (унитарна) и $A\overline{A}^t = E_n$. Следователно

$$1 = \det(E_n) = \det(A) \det(\overline{A}^t) = \det(A) \det(\overline{A}) = \det(A) \overline{\det(A)} = |\det(A)|^2,$$

защото $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$ за произволни комплексни числа $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ и детерминантата на матрица е полиномиална функция на елементите на тази матрица. Следователно матрицата A на φ е обратима, откъдето и операторът φ е обратим.

□

Задача 108. *Нека $\varphi : V \to V$ е ортогонален (унитарен) оператор в евклидово (унитарно) пространство V. Да се докаже, че:*

(i) собствените стойности $\lambda \in \mathbb{C}$ на φ са с модул $|\lambda| = 1$;

(ii) собствени вектори u, v на φ, отговарящи на различни собствени стойности $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ са ортогонални;

(iii) ако V е крайномерно и U е инвариантно подпространство на V, то ортогоналното допълнение $U^\perp$ на U е φ-инвариантно.

В частност, ако $e_1, \ldots, e_k$ е ортонормиран базис на U, а $e_{k+1}, \ldots, e_n$ е ортонормиран базис на $U^\perp$, то $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ е ортонормиран базис на V, в който матрицата на φ е от вида

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \mathbb{O}_{k \times (n-k)} \\ \mathbb{O}_{(n-k) \times k} & A_2 \end{pmatrix},$$

където A_1 е матрицата на $\varphi : U \to U$ спрямо базиса $e_1, \ldots, e_k$, а A_2 е матрицата на $\varphi : U^\perp \to U^\perp$ спрямо базиса $e_{k+1}, \ldots, e_n$.

Доказателство. (i) Прилагането на определението за ортогонален (унитарен) оператор φ към произволен собствен вектор $v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$ на φ, отговарящ на собствена стойност λ дава

$$|\lambda|^2 ||v||^2 = \lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \langle \varphi(v), \varphi(v)\rangle = \langle v, v\rangle = ||v||^2.$$

Следователно $(|\lambda|^2 - 1)||v||^2 = 0$ с $||v||^2 \in \mathbb{R}^{>0}$, откъдето $|\lambda|^2 = 1$ и $|\lambda| = 1$.

(ii) Прилагането на определението за ортогонален оператор φ към u и v дава

$$\lambda\overline{\mu}\langle u, v\rangle = \langle \lambda u, \mu v\rangle = \langle \varphi(u), \varphi(v)\rangle = \langle u, v\rangle.$$

Следователно $(\lambda\overline{\mu} - 1)\langle u, v\rangle = 0$ с $\lambda\overline{\mu} \neq \mu\overline{\mu} = 1$ изисква $\langle u, v\rangle = 0$ и собствените вектори u, v на φ, отговарящи на различни собствени стойности λ, μ са ортогонални.

(iii) За произволен вектор $v \in U^{\perp}$ твърдим, че $\varphi(v) \in U^{\perp}$. Съгласно обратимостта на $\varphi : U \to U$, за всеки вектор $u \in U$ съществува еднозначно определен вектор $u_1 := \varphi^{-1}(u) \in U$, така че $\varphi(u_1) = u$ и

$$\langle u, \varphi(v)\rangle = \langle \varphi(u_1), \varphi(v)\rangle = \langle u_1, v\rangle = 0,$$

съгласно ортогоналността на $\varphi :\to V$.

□

Задача 109. *(i) Нека $\varphi : V \to V$ е унитарен оператор в n-мерно унитарно пространство V. Да се докаже, че съществува ортонормиран базис на V, в който матрицата D на φ е диагонална.*

(ii) Да се докаже, че за произволна унитарна матрица $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ съществува унитарна матрица $T \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, така че $D = T^{-1}AT = \overline{T}^t AT$ е диагонална.

Доказателство. (i) С индукция по $\dim V = n$, за $\dim V = 1$ всяка матрица $A \in \mathbb{C}$ на φ се счита за диагонална. В общия случай, φ има 1-мерно φ-инвариантво подпространство $U = l(v)$, породено от собствен вектор $v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$ на φ. Тогава ортогоналното допълнение $U^{\perp}$ на U е $(n-1)$-мерно φ-инвариантно подпространство. По индукционно предположение съществува ортонормиран базис $e_2, \ldots, e_n$ на $U^{\perp}$, в който матрицата

$$D' = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

на $\varphi : U^{\perp} \to U^{\perp}$ е диагонална. Ако

$$e_1 := \frac{1}{||v||} v \in U,$$

то $e_1, e_2, \ldots, e_n$ е ортонормиран базис на V, съгласно $\langle e_1, e_i\rangle = 0$ за всички $e_i \in U^{\perp}$, $2 \leq i \leq n$. Матрицата на $\varphi : V \to V$ спрямо базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ е

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbb{O}_{1\times(n-1)} \\ \mathbb{O}_{(n-1)\times 1} & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

където $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ е собствената стойност на v и e_1.

(ii) Избираме ортонормиран базис $f = (f_1, \dots, f_n)$ на унитарно пространство V и разглеждаме оператора $\varphi : V \to V$ с матрица A спрямо базиса f. Тогава φ е унитарен оператор и съществува ортонормиран базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ на V, който матрицата D на φ е диагонална. Матрицата на прехода $T \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ от ортонормирания базис f на V към ортонормирания базис e е унитарна и $D = T^{-1}AT = \overline{T}^t AT$.

□

Задача 110. *(i) Да се докаже, че матрицата на ротация ρ на ъгъл α в $\mathbb{R}^2$ с център $(0,0)$ спрямо положително ориентиран ортонормиран базис e_1, e_2 е*

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

В частност, произволна ротация е ортогонално линейно изображение.

(ii) Нека $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ е ортогонален оператор без реален характеристичен корен. Да се докаже, че матрицата на φ спрямо произволен ортонормиран базис e_1, e_2 на $\mathbb{R}^2$ е от вида

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

за някакъв ъгъл $\alpha \neq k\pi$.

Доказателство. (i) Матрицата $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ на ρ спрямо положително ориентиран ортонормиран базис $e = (e_1, e_2)$ се състои по стълбове от координатите на $\rho(e_1)$ и $\rho(e_2)$ спрямо e. Векторът $\rho(e_1)$ с дължина 1 сключва ъгъл α с $Ox^{\to}$, така че

$$\rho(e_1) = \cos(\alpha)e_1 + \sin(\alpha)e_2.$$

Векторът $\rho(e_2)$ с дължина 1 сключва ъгъл $\alpha + \frac{\pi}{2}$ с $Ox^{\to}$. Следователно

$$\rho(e_2) = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)e_1 + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\alpha)e_1 + \cos(\alpha)e_2 \quad \text{и}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Матрицата A спрямо ортонормирания базис e_1, e_2 е ортогонална, защото

$$AA^t = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2,$$

съгласно $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$. Следователно операторът $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ е ортогонален, щом матрицата му A спрямо ортонормиран базис e_1, e_2 е ортогонална.

(ii) Нека $e = (e_1, e_2)$ е ортонормиран базис на $\mathbb{R}^2$ и

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

е матрицата на $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ спрямо e. Тогава A е ортогонална матрица, чийто характеристичен полином

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} a - x & b \\ c & d - x \end{vmatrix} = (a-x)(d-x) - bc = x^2 - (a+d)x + \det(A) \in \mathbb{R}[x]$$

няма реален корен. Ортогоналната матрица A изпълнява равенството $AA^t = E_2$, така че $1 = \det(E_2) = (\det(A))^2$, откъдето $\det(A) = \pm 1$. Понеже доискриминантата

$$D(f_A(x)) = (a+d)^2 - 4\det(A) < 0$$

е отрицателна, имаме $\det(A) > 0$, откъдето $\det(A) = 1$. Условието за ортогоналност $AA^t = E_2$ е еквивалентно на $A^{-1} = A^t$. Следователно

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = A^{-1} = A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

откъдето $d = a$ и $b = -c$. Матрицата

$$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$$

е ортогонална точно когато стълбовете на A задават ортонормирана система вектори спрямо ортонормиран базис на $\mathbb{R}^2$. В частност, първият стълб е съставен от координатите на единичен вектор спрямо ортонормиран базис, така че $a^2+c^2 = 1$. Следователно $(a,c) \in \mathbb{R}^2$ са координати на точка от единичната окръжност

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}.$$

Ако радиус-векторът на (a,c) образува ъгъл α с $Ox^{\rightarrow}$, то $a = \cos(\alpha)$, $c = \sin(\alpha)$ и

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

$\square$

Задача 111. *(i) Да се докаже, че за произволен ортогонален оператор $\varphi : V \to V$ в n-мерно евклидово пространство V съществува ортонормиран базис на V, в който матрицата на φ е блочно-диагонална*

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & D_2 & \dots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & D_{k-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & D_k \end{pmatrix} \quad \text{с}$$

$$D_i = \pm 1 \quad \textit{или} \quad D_i = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) \\ \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) \end{pmatrix} \quad \textit{за} \quad \alpha_i \in [0, 2\pi).$$

(ii) Да се докаже, че за произволна ортогонална матрица $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ съществува ортогонална матрица $T \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, така че

$$D = T^{-1}AT = \overline{T}^t AT = \begin{pmatrix} D_1 & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & D_2 & \dots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & D_{k-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & D_k \end{pmatrix}$$

е блочно-диагонална с

$$D_i = \pm 1 \quad \textit{или} \quad D_i = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) \\ \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) \end{pmatrix} \quad \textit{за} \quad \alpha_i \in [0, 2\pi).$$

Доказателство. (i) С индукция по $n = \dim V$, за $\dim V = 1$ няма какво да се доказва. В общия случай, линейният оператор $\varphi : V \to V$ в n-мерно пространство V над $\mathbb{R}$ има 1-мерно или 2-мерно φ-инвариантно подпространство $U \subset V$. По-точно, ако $\varphi : V \to V$ има реален характеристичен корен $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, то $\lambda_1 = \pm 1$ е собствена стойност на φ и съществува единичен собствен вектор e_1 на φ, отговарящ на собствената стойност λ_1, който поражда 1-мерно φ-инвариантно подпространство $U = l(e_1)$. Ако всички характеристични корени на $\varphi : V \to V$ са комплексни нереални числа, то φ има 2-мерно φ-инвариантно подпространство U. Операторът $\varphi : U \to U$ няма реален характеристичен корен и матрицата на $\varphi : U \to U$ спрямо произволен ортонормиран базис e_1, e_2 на U е

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha_1) & -\sin(\alpha_1) \\ \sin(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) \end{pmatrix} \quad \text{за някое} \quad \alpha_1 \in [0, 2\pi).$$

Ако $k := \dim(U)$, то матрицата $D_1 \in M_{k\times k}(\mathbb{R})$ на $\varphi : U \to U$ спрямо ортонормиран базис $e_1, \ldots, e_k$ на U е блок. Ортогоналното допълнение $U^\perp$ на U е φ-инвариантно подпространство на V с размерност $\dim U^\perp = \dim V - \dim U = n - k < n$. По индукционно предположение съществува ортонормиран базис $e_{k+1}, \ldots, e_n$ на V, в който матрицата на $\varphi : U^\perp \to U^\perp$ е блочно-диагонална

$$D' = \begin{pmatrix} D_2 & \mathbb{O} & \ldots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & D_3 & \ldots & \mathbb{O} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \ldots & D_k \end{pmatrix}.$$

Обединението на ортонормиран базис $e_1, \ldots, e_k$ на U с ортонормиран базис $e_{k+1}, \ldots, e_n$ на $U^\perp$ е ортонормиран базис на V, в който матрицата

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & \mathbb{O}_{k\times(n-k)} \\ \mathbb{O}_{(n-k)\times k} & D' \end{pmatrix}$$

на φ е блочно-диагонална.

(ii) Избираме ортонормиран базис $f = (f_1, \ldots, f_n)$ на n-мерно евклидово пространство V и разглеждаме оператора $\varphi : V \to V$ с матрица A спрямо e. Тогава φ е ортогонален оператор и съществува ортонормиран базис $e = (e_1, \ldots, e_n)$ на V, в който матрицата на $\varphi : V \to V$ е блочно-диагонална

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & \mathbb{O} & \ldots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & D_2 & \ldots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \ldots & D_{k-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \ldots & \mathbb{O} & D_k \end{pmatrix}.$$

Матрицата на прехода $T \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ от ортонормирания базис f към ортонормирания базис e е ортогонална и $D = T^{-1}AT = \overline{T}^t AT$.

□

21. Симетрични и ермитови матрици и оператори.

Задача 112. *Да се даде определение за симетрична (ермитова) матрица. Да се докаже, че множеството на симетричните (ермитовите) матрици от ред n е линейно пространство над полето $\mathbb{R}$ на реалните числа.*

Доказателство. Матрица $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ (съответно $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$) е симетрична (ермитова), ако $\overline{A}^t = A$.

Ако $\overline{A}^t = A$ и $\overline{B}^t = B$, то

$$\overline{(A+B)}^t = \overline{A}^t + \overline{B}^t = A + B,$$

така че $A+B$ е симетрична (ермитова) матрица. За произволно $\lambda \in \mathbb{R}$ е в сила

$$\overline{(\lambda A)}^t = \overline{\lambda}\ \ \overline{A}^t = \lambda A$$

и затова λA е симетрична (ермитова) матрица и множеството на симетричните (ермитовите) матрици е линейно пространство над $\mathbb{R}$.

$\square$

Задача 113. *Следните условия са еквивалентни за линеен оператор $\varphi : V \to V$ в n-мерно евклидово (унитарно) пространство V:*

(i) φ е симетричен (ермитов) оператор;

(ii) $\langle b_i, \varphi(b_j)\rangle = \langle \varphi(b_i), b_j\rangle$ за произволни вектори b_i, b_j от базис $b_1, \ldots, b_n$ на V;

(iii) $\langle e_i, \varphi(e_j)\rangle = \langle \varphi(e_i), e_j\rangle$ за произволни вектори от ортонормиран базис $e_1, \ldots, e_n$ на V;

(iv) матрицата A на φ спрямо ортонормиран базис $e_1, \ldots, e_n$ на V е симетрична (ермитова).

Доказателство. Ясно е, че $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$.

Нека $e = (e_1, \ldots, e_n)$ е ортонормиран базис на V и A е матрицата на φ спрямо базиса e. Условието (iii) е в сила точно когато

$$\overline{a_{i,j}} = \sum_{s=1}^{n} \overline{a_{s,j}} \langle e_i, e_s\rangle = \langle e_i, \sum_{s=1}^{n} a_{s,j} e_s\rangle = \langle e_i, \varphi(e_j)\rangle =$$

$$= \langle \varphi(e_i), e_j\rangle = \langle \sum_{s=1}^{n} a_{s,i} e_s, e_j\rangle = \sum_{s=1}^{n} a_{s,i} \langle e_s, e_j\rangle = a_{j,i}$$

за всички $1 \leq i, j \leq n$. Това е еквивалентно на симетричността (ермитовостта) на матрицата A, така че $(iii) \Leftrightarrow (iv)$.

За $(iii) \Rightarrow (i)$ да предположим, че $e_1, \ldots, e_n$ е ортонормиран базис на V с $\langle e_i, \varphi(e_j)\rangle = \langle \varphi(e_i), e_j\rangle$ за всички $1 \leq i, j \leq n$. Тогава произволни вектори $u = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ и $v = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j$ изпълняват равенствата

$$\langle u, \varphi(v)\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right)\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \varphi(e_j)\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y_j} \langle e_i, \varphi(e_j)\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y_j} \langle \varphi(e_i), e_j\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i), \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\rangle = \langle \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right), \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\rangle = \langle \varphi(u), v\rangle,$$

така че $\varphi : V \to V$ е симетричен (ермитов) оператор.

$\square$

Задача 114. *Да се докаже, че всички характеристични корени на симетричен (ермитов) оператор в крайномерно пространство V са реални числа.*

Доказателство. Собствените стойности λ на ермитов оператор $\varphi : V \to V$ са реални числа, защото съответните им собствени вектори $v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$ изпълняват равенствата

$$\overline{\lambda} ||v||^2 = \langle v, \lambda v\rangle = \langle v, \varphi(v)\rangle = \langle \varphi(v), v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda ||v||^2,$$

откъдето $(\overline{\lambda} - \lambda)||v||^2 = 0$ с $||v||^2 \in \mathbb{R}^{>0}$ и $\overline{\lambda} = \lambda \in \mathbb{R}$.

Характеристичните корени на линеен оператор φ в крайномерно пространство V над $\mathbb{C}$ съвпадат със собствените стойности на φ, така че характеристичните корени на ермитов оператор $\varphi : V \to V$ в крайномерно унитарно пространство V са реални числа.

Всяка ермитова матрица A се реализира като матрица на ермитов оператор спрямо ортонормиран базис. По-точно, ако $e = (e_1, \dots, e_n)$ е ортонормиран базис на n-мерно унитарно пространство и $\varphi : V \to V$ е линейният оператор с матрица A спрямо e, то φ е унитарен оператор и всички характеристични корени на φ са реални числа. Оттук, характеристичните корени на A съвпадат с характеристичните корени на φ и са реалани числа.

Всяка симетрична матрица е ермитова и затова всичките и характеристични корени са реални числа.

В резултат, всички характеристични корени на симетричен оператор $\varphi : V \to V$ в крайномерно евклидово пространство V са реални числа, защото матрицата на φ спрямо ортонормиран базис е симетрична.

$\square$

Задача 115. *Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен (ермитов) оператор в евклидово (унитарно) пространство V. Да се докаже, че:*

(i) собствени вектори u, v, отговарящи на различни собствени стойности λ, μ са ортогонални помежду си;

(ii) ортогоналното допълнение $U^{\perp}$ на φ-инвариантно подпространство U на V е φ-инвариантно.

Доказателство. (i) От определението за симетричност (ермитовост) на $\varphi : V \to V$, приложено към собствените вектори $u, v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$ получаваме

$$\mu\langle u, v\rangle = \overline{\mu}\langle u, v\rangle = \langle u, \mu v\rangle = \langle u, \varphi(v)\rangle = \langle \varphi(u), v\rangle = \langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle,$$

вземайки предвид, че собствените стойности на ермитов оператор са реални числа. Следователно $(\lambda - \mu)\langle u, v\rangle = 0$ с $\lambda \neq \mu$, така че $\langle u, v\rangle = 0$ и векторите u, v са ортогонални помежду си.

(ii) За произволен вектор $v \in U^{\perp}$ трябва да проверим, че $\varphi(v) \in U^{\perp}$. С други думи, за произволен вектор $u \in U$ е в сила

$$\langle u, \varphi(v)\rangle = \langle \varphi(u), v\rangle = 0,$$

съгласно $\varphi(u) \in U$.

$\square$

Задача 116. *(i) Да се докаже, че за произволен симетричен (ермитов) оператор $\varphi : V \to V$ в крайномерно евклидово (унитарно) пространство V съществува ортонормиран базис $e_1, \dots, e_n$ на V, в който матрицата*

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

е диагонална.

(ii) Да се докаже, че за произволна симетрична (ермитова) матрица съществува ортогонална (унитарна) матрица T, така че $D = T^{-1}AT = \overline{T}^t AT$ е диагонална матрица.

Доказателство. (i) С индукция по $n = \dim V$, за $n = 1$ няма какво да се доказва. В общия случай, $\varphi : V \to V$ има собствен вектор $v_1 \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$. За унитарен оператор φ това е в сила поради наличието на собствен вектор за произволен линеен оператор в крайномерно пространство над полето $\mathbb{C}$ на комплексните числа. За симетричен оператор φ използваме, че всички характеристични корени на φ са реални числа, а оттам и собствени стойности на φ, така че съществува собствен вектор $v_1 \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$, отговарящ на собствената стойност λ_1. Заменяме v_1 с единичен вектор $e_1 = \frac{1}{||v_1||} v_1 \in l(v_1)$ и забелязваме, че $U := l(e_1) = l(v_1)$ е 1-мерно φ-инвариантно подпространство на V, върху което действието на φ се свежда до умножение със собствената стойност λ_1, отговаряща на v_1. Ортогоналното допълнение $U^\perp$ на U е $(n-1)$-мерно φ-инвариантно подпространство на V. По индукционно предположение съществува ортонормиран базис $e_2, \ldots, e_n$ на $U^\perp$, в който матрицата

$$D' = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

на $\varphi : U^\perp \to U^\perp$ е диагонална. Сега $e_1, e_2, \ldots, e_n$ е ортонормиран базис на $V = U \oplus U^\perp$, в който матрицата

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbb{O}_{1\times(n-1)} \\ \mathbb{O}_{(n-1)\times 1} & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

на $\varphi : V \to V$ е диагонална.

(ii) Фиксираме ортонормиран базис $f = (f_1, \ldots, f_n)$ на евклидово (унитарно) пространство V и разглеждаме линейния оператор $\varphi : V \to V$ с матрица A спрямо f. Тогава φ е симетричен (ермитов) оператор и съществува ортонормиран базис $e = (e_1, \ldots, e_n)$ на V, в който матрицата D на φ е диагонална. Матрицата на прехода T от ортонормирания базис f на V към ортонормирания базис e на V е ортогонална (унитарна) и $D = T^{-1}AT = \overline{T}^t AT$.

$\square$