Глава 6

# Сума на подпространства и размерност на сумата. Директна сума.

Твърдение 6.1. *Нека $U$ и $W$ са подпространства на линейно пространство $V$ над поле $F$. Тогава:*
*(i) $U \cap W$ е подпространство на $V$;*
*(ii) $U \cup W$ е подпространство на $V$ тогава и само тогава, когато $U \subseteq W$ или $W \subseteq U$.*

Доказателство. (i) Ако $v_1, v_2 \in U \cap W$ и $\alpha \in F$, то $v_1 + v_2, \alpha v_1 \in U$, защото $U$ е подпространство на $V$, съдържащо $v_1$ и $v_2$. Аналогично, $v_1 + v_2, \alpha v_1 \in W$, защото $W$ е подпространство на $V$, съдържащо $v_1$ и $v_2$. В резултат, $v_1 + v_2, \alpha v_1 \in U \cap W$ и $U \cap W$ е подпространство на $V$.
(ii) Да допуснем, че $U \cup W$ е подпространство на $V$, $U$ не се съдържа в $W$ и $W$ не се съдържа в $U$. Тогава съществуват вектори $u \in U \setminus W$ и $w \in W \setminus U$. Подпространството $U \cup W$ на $V$ съдържа векторите $u, w$, а оттам и тяхната сума $u + w \in U \cup W$. Ако $u + w = u_1 \in U$, то $w = u_1 - u = u_1 + (-u) \in U$, противно на избора на $w \notin U$. Аналогично, допускането $u + w = w_1 \in W$ води до $u = w_1 - w \in W$, което противоречи на избора на $u \notin W$. С това установихме, че ако обединението $U \cup W$ е подпространство на $V$, то $U \subseteq W$ или $W \subseteq U$.
Обратно, ако $U \subseteq W$, то от $U \cup W \subseteq W \subseteq U \cup W$ следва, че $U \cup W = W$. В частност, $U \cup W$ е подпространство на $V$, защото $W$ е подпространство на $V$. Аналогично, за $W \subseteq U$ имаме $U \cup W \subseteq U \subseteq U \cup W$, откъдето $U \cup W = U$. В резултат, $U \cup W$ е подпространство на $V$, защото $U$ е подпространство на $V$.
□

Определение 6.2. *Ако $V_1, \ldots, V_n$ са подпространства на линейно пространство $V$ над поле $F$, то множеството*

$$V_1 + \ldots + V_n = \{v_1 + \ldots + v_n \,|v_i \in V_i\}$$

*на сумите $v_1 + \ldots + v_n$ на вектори $v_i \in V_i$ се нарича сума на $V_1, \ldots, V_n$.*

Твърдение 6.3. *Ако $V_1, \ldots, V_n$ са подпространства на линейно пространство $V$, то сумата*

$$V_1 + \ldots + V_n = l(V_1 \cup \ldots \cup V_n)$$

*съвпада с линейната обвивка на обединението $V_1 \cup \ldots \cup V_n$.*
*В частност, $V_1 + \ldots + V_n$ е подпространство на $V$ и това е минималното подпространство на $V$, съдържащо $V_1 \cup \ldots \cup V_n$.*

Доказателство. Да означим

$$S := V_1 + \ldots + V_n = \sum_{i=1}^{n} V_i \quad \text{и} \quad L := l(V_1 \cup \ldots \cup V_n).$$

Всеки вектор $v \in S$ е от вида

$$v = v_1 + \ldots + v_i + \ldots + v_n = 1.v_1 + \ldots + 1.v_i + \ldots 1.v_n \in l(V_1 \cup \ldots \cup V_n) = L$$

с $v_i \in V_i \subseteq V_1 \cup \ldots \cup V_n$, така че $S \subseteq L$.
Обратно, ако $v \in L = l(V_1 \cup \ldots \cup V_n)$, то за всяко $1 \leq i \leq n$ съществуват $v_{i,1}, \ldots, v_{i,k_i} \in V_i$ и $\lambda_{i,1}, \ldots, \lambda_{i,k_i} \in F$ с

$$v = \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{k_i} \lambda_{i,s} v_{i,s}.$$

Подпространствата $V_i$ съдържат векторите

$$v_i := \sum_{s=1}^{k_i} \lambda_{i,s} v_{i,s}$$

и

$$v = \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{s=1}^{k_i} \lambda_{i,s} v_{i,s} \right) = \sum_{i=1}^{n} v_i = v_1 + \ldots + v_n \in S = V_1 + \ldots + V_n.$$

Това доказва $L \subseteq S$ и $S = L$.

□

Твърдение 6.4. *Нека $U$ и $W$ са крайномерни линейни подпространства на линейно пространство $V$ над поле $F$. Тогава $U + W$ и $U \cap W$ са крайномерни подпространства на $V$ и*

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

Доказателство. Подпространството $U \cap W$ на крайномерното пространство $U$ е крайномерно. Ако $U \cap W \neq \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$, то съществува базис $a_1, \ldots, a_k$ на сечението $U \cap W$. При $U \cap W \subsetneq U$ и $U \cap W \subsetneq W$ допълваме до базис $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_n$ на $U$ и до базис $a_1, \ldots, a_k, c_1, \ldots, c_m$ на $W$. Достатъчно е да проверим, че обединението $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m$ на трите системи вектори е базис на $U+W$, защото тогава $U+W$ е крайномерно подпространство на $V$ и

$$\dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = (k+n) + (k+m) - k = k+n+m = \dim(U+W).$$

От $U = l(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_n)$ и $W = l(a_1, \ldots, a_k, c_1, \ldots, c_m)$ следва

$$\begin{aligned} U + W = l(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_n) + l(a_1, \ldots, a_k, c_1, \ldots, c_m) = \\ = l(a_1, \ldots, a_k) + l(b_1, \ldots, b_n) + l(a_1, \ldots, a_k) + l(c_1, \ldots, c_m) = \\ = l(a_1, \ldots, a_k) + l(b_1, \ldots, b_n) + l(c_1, \ldots, c_m) = l(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m), \end{aligned}$$

защото сумата на две линейни комбинации на $a_1, \ldots, a_k$ е линейна комбинация на $a_1, \ldots, a_k$. Нека

$$\sum_{i=1}^{k} x_i a_i + \sum_{j=1}^{n} y_j b_j + \sum_{s=1}^{m} z_s c_s = \overrightarrow{\mathcal{O}} \tag{6.1}$$

с $x_i, y_j, z_s \in F$ е представяне на нулевия вектор като линейна комбинация на векторите $a_1, \dots, a_k$, $b_1, \dots, b_n$, $c_1, \dots, c_m$. Полагаме

$$a := \sum_{i=1}^{k} x_i a_i, \quad b := \sum_{j=1}^{n} y_j b_j, \quad c := \sum_{s=1}^{m} z_s c_s$$

и забелязваме, че от $a + b + c = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ следва

$$a + b = -c \in U \cap W = l(a_1, \dots, a_k),$$

защото $a+b \in l(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_n) = U$ и $-c \in l(c_1, \dots, c_m) \subset l(a_1, \dots, a_k, c_1, \dots, c_m) = W$. Следователно съществува вектор

$$a' = \sum_{i=1}^{k} t_i a_i \in l(a_1, \dots, a_k) = U \cap W,$$

изпълняващ равенството

$$a + b = -c = a'.$$

В резултат получаваме, че

$$\overrightarrow{\mathcal{O}} = a' + c = \sum_{i=1}^{k} t_i a_i + \sum_{s=1}^{m} z_s c_s.$$

Поради линейната независимост на векторите $a_1, \dots, a_k, c_1, \dots, c_m$ от базиса на $W$, оттук следва $t_i = 0$ за всички $1 \leq i \leq k$ и $z_s = 0$ за всички $1 \leq s \leq m$. Сега

$$\sum_{i=1}^{k} x_i a_i + \sum_{j=1}^{n} y_j b_j = a + b = -c = \overrightarrow{\mathcal{O}}$$

изисква $x_i = 0$ за всички $1 \leq i \leq k$ и $y_j = 0$ за всички $1 \leq j \leq n$, защото базисът $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_n$ на $U$ е линейно независима система вектори. С това доказахме, че единствената линейна комбинация (6.1) на $a_1, \dots, a_k$, $b_1, \dots, b_n$, $c_1, \dots, c_m$, представяща нулевия вектор $\overrightarrow{\mathcal{O}}$ е тази с нулеви коефициенти. Следователно $a_1, \dots, a_k$, $b_1, \dots, b_n$, $c_1, \dots, c_m$ е линейно независима система, а оттам и базис на $U + W$.

Ако $U \cap W = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$, избираме базис $b_1, \dots, b_n$ на $U$ и базис $c_1, \dots, c_m$ на $W$. Достатъчно е да докажем, че $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_m$ е базис на $U + W$, защото тогава $U + W$ е крайномерно пространство и

$$\dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = n + m - 0 = n + m = \dim(U + W).$$

От $U = l(b_1, \dots, b_n)$ и $W = l(c_1, \dots, c_m)$ следва, че

$$U + W = l(b_1, \dots, b_n) + l(c_1, \dots, c_m) = l(b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_m).$$

Ако $\sum\limits_{j=1}^{n} y_j b_j + \sum\limits_{s=1}^{m} z_s c_s = \overrightarrow{\mathcal{O}}$, то

$$\sum_{j=1}^{n} y_j b_j = \sum_{s=1}^{m} (-z_s) c_s \in l(b_1, \dots, b_n) \cap l(c_1, \dots, c_m) = U \cap W = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}.$$

Следователно

$$\sum_{j=1}^{n} y_j b_j = \overrightarrow{\mathcal{O}} \quad \text{и} \quad \sum_{s=1}^{m} z_s c_s = \overrightarrow{\mathcal{O}}.$$

От линейната независимост на базиса $b_1, \dots, b_n$ на $U$ следва $y_j = 0$ за всички $1 \leq j \leq n$. Аналогично, линейната независимост на базиса $c_1, \dots, c_m$ на $W$ изисква $z_s = 0$ за всички $1 \leq s \leq m$. Следователно единствената линейна комбинация на векторите $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_m$, представяща нулевия вектор $\overrightarrow{\mathcal{O}}$

е тази с нулеви коефициенти, така че $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m$ е линейно независима система, а оттам и базис на $U + W$.
Ако $U \cap W = U$, то $U \subseteq W$. Следователно $U + W \subseteq W \subseteq U + W$ и $U + W = W$. Сега от $\dim(U \cap W) = \dim(U)$ и $\dim(U + W) = \dim(W)$ получаваме

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

Аналогично, за $U \cap W = W$ имаме $W \subseteq U$, откъдето $U + W = U$. В резултат, $\dim(U \cap W) = \dim(W)$, $\dim(U + W) = \dim(U)$ и отново

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

□

Определение 6.5. *Сума на подпространства $V_1 + \ldots + V_n$ е директна, ако всеки вектор $v \in V_1 + \ldots + V_n$ има единствено представяне $v = v_1 + \ldots + v_n$ като сума на вектори $v_i \in V_i$.*
*Бележим с $V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$ директната сума на подпространства.*

Твърдение 6.6. *Сума на подпространства $V_1 + \ldots + V_n$ е директна тогава и само тогава, когато за всяко $1 \leq i \leq n$ е в сила*

$$V_i \cap \left( \sum_{\forall j \neq i} V_j \right) = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}.$$

Доказателство. Ако сумата $V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$ е директна и

$$v_i = \sum_{\forall j \neq i} v_j \in V_i \cap \left( \sum_{\forall j \neq i} V_j \right), \quad \text{то}$$

$$\sum_{\forall j \neq i} v_j + (-v_i) = \overrightarrow{\mathcal{O}}$$

с $-v_i \in V_i$. От единствеността на представянето на $\overrightarrow{\mathcal{O}}$ като вектор от $V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$ получаваме $v_i = \overrightarrow{\mathcal{O}}$, откъдето

$$V_i \cap \left( \sum_{\forall j \neq i} V_j \right) = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}.$$

Обратно, нека $V_i \cap \left( \sum_{\forall j \neq i} V_j \right) = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$ за всички $1 \leq i \leq n$ и

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n} v_i'$$

са две представяния на вектор $v \in V_1 + \ldots + V_n$ като сума на вектори $v_i, v_i' \in V_i$. Тогава за всяко $1 \leq i \leq n$ имаме

$$V_i \ni v_i - v_i' = \sum_{\forall j \neq i} (v_j' - v_j) \in V_i \cap \left( \sum_{\forall j \neq i} V_j \right) = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\},$$

откъдето $v_i = v_i'$ и двете представяния съвпадат. Това доказва директността на сумата $V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$.

□

Твърдение 6.7. (Съответствие между разбиванията на базис и разлаганията в директна сума: ) *Нека $V$ е ненулево крайномерно линейно пространство над поле $F$.*
*(i) Ако $e_1, \dots, e_n$ е базис на $V$, то за всяко $1 \leq k \leq n-1$ е в сила разлагане $V = l(e_1, \dots, e_k) \oplus l(e_{k+1}, \dots, e_n)$ в директна сума на подпространства.*
*(ii) Ако $V = U \oplus W$ е директна сума на ненулеви подпространства $U$ и $W$, $e_1, \dots, e_k$ е базис на $U$ и $e_{k+1}, \dots, e_n$ е базис на $W$, то $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ е базис на $V$.*

Доказателство. (i) Ако $e_1, \dots, e_n$ е базис на $V$, то

$$V = l(e_1, \dots, e_n) = l(e_1, \dots, e_k) + l(e_{k+1}, \dots, e_n).$$

Произволен вектор

$$v = \sum_{i=1}^{k} x_i e_i = \sum_{j=k+1}^{n} x_j e_j \in l(e_1, \dots, e_k) \cap l(e_{k+1}, \dots, e_n)$$

с $x_i \in F$ от сечението на двете линейни обвивки дава линейна комбинация

$$\sum_{i=1}^{k} x_i e_i + \sum_{j=k+1}^{n} (-x_j) e_j = \overrightarrow{\mathcal{O}}$$

на базисните вектори $e_1, \dots, e_n$, представяща нулевия вектор $\overrightarrow{\mathcal{O}}$. Съгласно линейната независимост на $e_1, \dots, e_n$, оттук следва $x_i = 0$ за всички $1 \leq i \leq n$. Това доказва, че $v = \overrightarrow{\mathcal{O}}$, $l(e_1, \dots, e_k) \cap l(e_{k+1}, \dots, e_n) = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$ и сумата

$$V = l(e_1, \dots, e_k) \oplus l(e_{k+1}, \dots, e_n)$$

е директна.
(ii) Ако $V = U \oplus W$ е разлагане на $V$ в директна сума на ненулеви подпространства $U, W$, $e_1, \dots, e_k$ е базис на $U$ и $e_{k+1}, \dots, e_n$ е базис на $W$, то от $U = l(e_1, \dots, e_k)$ и $W = l(e_{k+1}, \dots, e_n)$ следва

$$V = U \oplus W = l(e_1, \dots, e_k) \oplus l(e_{k+1}, \dots, e_n) = l(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n).$$

Произволна линейна комбинация $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ дава вектор

$$\sum_{i=1}^{k} x_i e_i = \sum_{i=k+1}^{n} (-x_i) e_i \in l(e_1, \dots, e_k) \cap l(e_{k+1}, \dots, e_n) = U \cap W = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$$

от сечението на $U$ и $W$, откъдето

$$\sum_{i=1}^{k} x_i e_i = \overrightarrow{\mathcal{O}} \quad \text{и} \quad \sum_{i=k+1}^{n} x_i e_i = \overrightarrow{\mathcal{O}}.$$

Линейната независимост на базиса $e_1, \dots, e_k$ на $U$ изисква $x_i = 0$ за всички $1 \leq i \leq k$. Аналогично, линейната независимост на базиса $e_{k+1}, \dots, e_n$ на $W$ води до $x_i = 0$ за всички $k+1 \leq i \leq n$. Това доказва, че векторите $e_1, \dots, e_n$ са линейно независими, а оттам и базис на $V$.

□

Твърдение 6.8. *Нека $V$ е $n$-мерно линейно пространство, а $U$ е $k$-мерно подпространство на $V$ за някои естествени числа $k < n$. Тогава съществува $(n-k)$-мерно подпространство $W$ на $V$, така че*

$$V = U \oplus W.$$

*Всяко такова подпространство $W$ се нарича допълнение на $U$ до $V$.*

Доказателство. Избираме произволен базис $e_1, \ldots, e_k$ на $U$ и го допълваме до базис $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ на $V$. Тогава

$$V = l(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n) = l(e_1, \ldots, e_k) \oplus l(e_{k+1}, \ldots, e_n) = U \oplus l(e_{k+1}, \ldots, e_n)$$

съгласно Твърдение 6.7 (i). Полагаме $W := l(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ и забелязваме, че $W$ е подпространство на $V$ с размерност $n-k$, защото векторите $e_{k+1}, \ldots, e_n$ са линейно независими като част от линейно независимата система вектори $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$. Това доказва съществуването на допълнение $W$ на произволно собствено подпространство $U$ на $V$.

□

Допълнението $W$ на подпространство $U$ не е единствено. Например, ако $V = \mathbb{R}^3$ и $U$ е права през началото в $\mathbb{R}^3$, то произволна равнина $W$ през началото, не съдържаща $U$ е допълнение на $U$ до $\mathbb{R}^3$, т.е. $U \oplus W = \mathbb{R}^3$. Ако $V = \mathbb{R}^3$ и $U$ е равнина през началото, то произволна права $W$ през началото, нележаща в $U$ е допълнение на $U$ до $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.