Глава 10

Събиране и умножение на матрици. Умножение на матрица с число. Умножение на детерминанти.

Определение 10.1. *Матрици A и B с елементи от поле F са равни, ако $A, B \in M_{m\times n}(F)$ за някакви $m, n \in \mathbb{N}$ и съответните елементи $A_{i,j} = B_{i,j}$ са равни за всички $1 \leq i \leq m$ и всички $1 \leq j \leq n$.*

Определение 10.2. *Ако F е поле, а $A, B \in M_{m\times n}(F)$ са матрици с равен брой редове и стълбове, то сумата $A+B \in M_{m\times n}(F)$ е матрицата със същите размери и елементи*

$$(A+B)_{i,j} := A_{i,j} + B_{i,j} \quad \text{за всички} \quad 1 \leq i \leq m \quad \text{и} \quad 1 \leq j \leq n.$$

Например, сумата на матриците

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{е}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Определение 10.3. *За произволна матрица $A \in M_{m\times n}(F)$ и елемент $\alpha \in F$ на полето F, произведението $\alpha A \in M_{m\times n}(F)$ е матрицата с елементи*

$$(\alpha A)_{i,j} := \alpha A_{i,j} \quad \text{за всички } 1 \leq i \leq m \quad \text{и} \quad 1 \leq j \leq n.$$

Например,

$$2A = 2\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 10 \\ 4 & 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Твърдение 10.4. *Транспонирането на матрици е свързано със събирането и умножението с число чрез следните свойства:*
(i) $(A+B)^t = A^t + B^t$ за $\forall A, B \in M_{m\times n}(F)$;
(ii) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$ за $\forall A \in M_{m\times n}(F, \forall \alpha \in F$.

Доказателство. (i) Вземайки предвид $A + B \in M_{m\times n}(F)$ и $(A+B)^t \in M_{n\times m}(F)$, проверяваме, че за произволни $1 \leq i \leq n$ и $1 \leq j \leq m$ е изпълнено

$$[(A+B)^t]_{i,j} = (A+B)_{j,i} = A_{j,i} + B_{j,i} = (A^t)_{i,j} + (B^t)_{i,j} = (A^t + B^t)_{i,j}.$$

Това доказва $(A+B)^t = A^t + B^t$.

(ii) За произволни $1 \leq i \leq n$ и $1 \leq j \leq m$ е в сила

$$[(\alpha A)^t]_{i,j} = (\alpha A)_{j,i} = \alpha A_{j,i} = \alpha(A^t)_{i,j} = (\alpha A^t)_{i,j}.$$

Следователно $(\alpha A)^t = \alpha A^t$.

□

За произволно поле F и произволни естествени числа m и n, множеството $M_{m\times n}(F)$ на матриците с m реда, n стълба и елементи от F е линейно пространство над F относно събирането на матрици и умножението на матрица с $\alpha \in F$. По същество, $M_{m\times n}(F)$ е линейното пространство F^{mn} на наредените mn-торки с елементи от F.

Определение 10.5. *Нека $A \in M_{m\times n}(F)$ и $B \in M_{n\times k}(F)$ са такива матрици, за които броят n на стълбовете на A съвпада с броя на редовете на B. Тогава произведението $AB \in M_{m\times k}(F)$ е матрицата с елементи*

$$(AB)_{i,j} := A_{i,1}.B_{1,j} + \ldots + A_{i,s}B_{s,j} + \ldots + A_{i,n}.B_{n,j} = \sum_{s=1}^{n} A_{i,s}B_{s,j} \quad (10.1)$$

за произволни $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq j \leq k$.

Да забележим, че в израза (10.1), n-те елемента от i-ти ред на A се умножават със съответните n елемента на j-ти стълб на B и получените произведения се събират, т.е.

$$(AB)_{i,j} = (A_{i,1} \ldots A_{i,s} \ldots A_{i,n}) \begin{pmatrix} B_{1,j} \\ \ldots \\ B_{s,j} \\ \ldots \\ B_{n,j} \end{pmatrix} = A_{i,1}.B_{1,j} + \ldots + A_{i,s}B_{s,j} + \ldots + A_{i,n}.B_{n,j}.$$

Затова казваме, че умножението на матрици е по правилото "ред по стълб".
Да пресметнем произведението на матриците

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

в единия и другия ред на множителите. Получаваме

$$E_{11}E_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 + 0.1 & 1.0 + 0.0 \\ 0.0 + 0.1 & 0.0 + 0.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и}$$

$$E_{21}E_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 + 0.0 & 0.0 + 0.0 \\ 1.1 + 0.0 & 1.0 + 0.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Горният пример показва, че умножението на матрици не е комутативно и съществуват ненулеви матрици с нулево произведение.

Твърдение 10.6. *Умножението на матрици и останалите операции изпълняват следните свойства:*
(i) асоциативност на умножението: $(AB)C = A(BC)$ *за произволни матрици* $A \in M_{m\times n}(F)$, $B \in M_{n\times k}(F)$, $C \in M_{k\times l}(F)$;
(ii) $(AB)^t = B^t A^t$ *за* $A \in M_{m\times n}(F)$, $B \in M_{n\times k}(F)$;
(iii) дистрибутивни закони за събиране и умножение на матрици:

$$(A+B)C = AC + BC \quad \text{за} \quad A, B \in M_{m\times n}(F), \quad C \in M_{n\times k}(F) \quad \text{и}$$

$$A(B+C) = AB + AC \quad \text{за} \quad A \in M_{m\times n}(F), \quad B, C \in M_{n\times k}(F);$$

(iv) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ *за* $\alpha \in F$, $A \in M_{m\times n}(F)$, $B \in M_{n\times k}(F)$.

Доказателство. (i) За произволни $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq j \leq l$ е изпълнено

$$[(AB)C]_{i,j} = \sum_{p=1}^{k} (AB)_{i,p} C_{p,j} = \sum_{p=1}^{k} \left(\sum_{q=1}^{n} A_{i,q} B_{q,p} \right) C_{p,j} = \sum_{p=1}^{k} \sum_{q=1}^{n} A_{i,q} B_{q,p} C_{p,j}$$

съгласно определението за умножение на матрици и дистрибутивния закон за събиране и умножение в F. Чрез размяна на реда на сумиране, повторно прилагане на дистрибутивността на събирането и умножението в F, както и определението за умножение на матрици получаваме

$$[(AB)C]_{i,j} = \sum_{q=1}^{n} \sum_{p=1}^{k} A_{i,q} B_{q,p} C_{p,j} = \sum_{q=1}^{n} A_{i,q} \left(\sum_{p=1}^{k} B_{q,p} C_{p,j} \right) =$$

$$= \sum_{q=1}^{n} A_{i,q} (BC)_{q,j} = [A(BC)]_{i,j}$$

и доказваме, че $(AB)C = A(BC)$.
(ii) За произволни $1 \leq i \leq k$ и $1 \leq j \leq m$ е изпълнено

$$[(AB)^t]_{i,j} = (AB)_{j,i} = \sum_{s=1}^{n} A_{j,s} B_{s,i} =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} (A^t)_{s,j} (B^t)_{i,s} = \sum_{s=1}^{n} (B^t)_{i,s} (A^t)_{s,j} = (B^t A^t)_{i,j},$$

съгласно определенията за транспониране и умножение на матрици, както и комутативността на умножението в F. Това доказва $(AB)^t = B^t A^t$.
(iii) За произволни $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq j \leq k$ е в сила

$$[(A+B)C]_{i,j} = \sum_{s=1}^{n} (A+B)_{i,s} C_{s,j} = \sum_{s=1}^{n} (A_{i,s} + B_{i,s}) C_{s,j} = \sum_{s=1}^{n} A_{i,s} C_{s,j} + B_{i,s} C_{s,j} =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} A_{i,s} C_{s,j} + \sum_{s=1}^{n} B_{i,s} C_{s,j} = (AC)_{i,j} + (BC)_{i,j} = (AC + BC)_{i,j},$$

съгласно дистрибутивните закони за събиране и умножение в F и правилата за събиране и умножение на матрици. Това доказва левия дистрибутивен закон $(A+B)C = AC + BC$ за събиране и умножение на матрици.
Използвайки (ii), Твърдение 10.4 (i) и левия дистрибутивен закон за събиране и умножение на матрици забелязваме, че

$$[A(B+C)]^t = (B+C)^t A^t = (B^t + C^t) A^t =$$

$$= B^t A^t + C^t A^t = (AB)^t + (AC)^t = (AB + AC)^t.$$

Транспонирането на изведеното равенство дава десния дистрибутивен закон $A(B+C) = AB + AC$ за събиране и умножение на матрици.
(iv) За произволни $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq j \leq k$ е изпълнено

$$[\alpha(AB)]_{i,j} = \alpha(AB)_{i,j} = \alpha\left(\sum_{s=1}^{n} A_{i,s}B_{s,j}\right) =$$
$$= \sum_{s=1}^{n} (\alpha A_{i,s})B_{s,j} = \sum_{s=1}^{n} (\alpha A)_{i,s}B_{s,j} = [(\alpha A)B]_{i,j},$$

съгласно правилата за умножение на матрици и умножение на матрица с число, както дистрибутивните закони за събиране и умножение в F. Това доказва $\alpha(AB) = (\alpha A)B$.
Използвайки вече доказаното равенство

$$[\alpha(AB)]_{i,j} = \sum_{s=1}^{n} (\alpha A_{i,s})B_{s,j},$$

комутативността и асоциативността на умножението в F, както и правилата за умножение на матрици и умножение на матрица с число, получаваме, че

$$[\alpha(AB)]_{i,j} = \sum_{s=1}^{n} (\alpha A_{i,s})B_{s,j} = \sum_{s=1}^{n} (A_{i,s}\alpha)B_{s,j} =$$
$$= \sum_{s=1}^{n} A_{i,s}(\alpha B_{s,j}) = \sum_{s=1}^{n} A_{i,s}(\alpha B)_{s,j} = [A(\alpha B)]_{i,j}$$

за произвони $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq j \leq k$. Следователно $\alpha(AB) = A(\alpha B)$ за произволни $\alpha \in F$, $A \in M_{m\times n}(F)$, $B \in M_{n\times k}(F)$.

□

За поле F и произволно естествено число n матрицата

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(F)$$

се нарича единична. Елементите на E_n са равни на символите на Кронекер

$$(E_n)_{i,j} = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{за } 1 \leq i \neq j \leq n, \\ 1 & \text{за } 1 \leq i = j \leq n. \end{cases}$$

Твърдим, че за произволна матрица $A \in M_{m\times n}(F)$ са изпълнени равенствата $AE_n = A$ и $E_mA = A$. Наистина,

$$(AE_n)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}(E_n)_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}\delta_{k,j} = A_{i,j}\delta_{j,j} = A_{i,j}.1 = A_{i,j}$$

за всички $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Аналогично,

$$(E_mA)_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} (E_m)_{i,k}A_{k,j} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{i,k}A_{k,j} = \delta_{i,i}A_{i,j} = 1.A_{i,j} = A_{i,j}$$

за всички $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Лема 10.7. *Детерминантата на блочно-триъгълнална матрица*

$$D = \begin{pmatrix} A & \mathbb{O}_{n\times m} \\ C & B \end{pmatrix} \in M_{(n+m)\times(n+m)}(F)$$

с $A \in M_{n\times n}(F)$, $B \in M_{m\times m}(F)$, $C \in M_{m\times n}(F)$ *и нулева матрица* $\mathbb{O}_{n\times m} \in M_{n\times m}(F)$ *е*

$$\det(D) = \det(A)\det(B).$$

Доказателство. С индукция по $n \in \mathbb{N}$, за $n = 1$ имаме $A \in F$ и развитието на $\det(D)$ по първия ред дава $\det(D) = A\det(B)$.
В общия случай, нека

$$A'_{1,s} := \begin{pmatrix} a_{2,1} & \dots & a_{2,s-1} & a_{2,s+1} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,s-1} & a_{n,s+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in M_{(n-1)\times(n-1)}(F), \ \ 1 \leq s \leq n$$

са матриците, получени от A чрез премахване на първия ред и s-тия стълб на A, а

$$C'_s = \begin{pmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{1,s-1} & c_{1,s+1} & \dots & c_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m,1} & \dots & c_{m,s-1} & c_{m,s+1} & \dots & c_{m,n} \end{pmatrix} \in M_{m\times(n-1)}(F), \ \ 1 \leq s \leq n$$

са матриците, получени от $C \in M_{m\times n}(F)$, чрез премахване на s-тия стълб. Тогава развитието на

$$\det(D) = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,s-1} & a_{1,s} & a_{1,s+1} & \dots & a_{1,n} & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,s-1} & a_{2,s} & a_{2,s+1} & \dots & a_{2,n} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,s-1} & a_{n,s} & a_{n,s+1} & \dots & a_{n,n} & 0 & \dots & 0 \\ c_{1,1} & \dots & c_{1,s-1} & c_{1,s} & c_{1,s+1} & \dots & c_{1,n} & b_{1,1} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m,1} & \dots & c_{m,s-1} & c_{m,s} & c_{ms+1} & \dots & c_{m,n} & b_{m,1} & \dots & b_{m,m} \end{pmatrix}$$

по първия ред е

$$\det(D) =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} (-1)^{1+s} a_{1,s} \det \begin{pmatrix} a_{2,1} & \dots & a_{2,s-1} & a_{2,s+1} & \dots & a_{2,n} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,s-1} & a_{n,s+1} & \dots & a_{n,n} & 0 & \dots & 0 \\ c_{1,1} & \dots & c_{1,s-1} & c_{1,s+1} & \dots & c_{1,n} & b_{1,1} & \dots & b_{1,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m,1} & \dots & c_{m,s-1} & c_{m,s+1} & \dots & c_{m,n} & b_{m,1} & \dots & b_{m,m} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} (-1)^{1+s} a_{1,s} \det \begin{pmatrix} A'_{1,s} & \mathbb{O}_{(n-1)\times m} \\ C'_s & B \end{pmatrix}.$$

По индукционно предположение

$$\det \begin{pmatrix} A'_{1,s} & \mathbb{O}_{(n-1)\times m} \\ C'_s & B \end{pmatrix} = \det(A'_{1,s})\det(B).$$

Следователно

$$\det(D) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{1+s} a_{1,s} \det(A'_{1,s})\det(B) =$$

$$= \left[\sum_{s=1}^{n} (-1)^{1+s} a_{1,s} \det(A'_{1,s}) \right] \det(B) = \det(A)\det(B),$$

използвайки развитието на $\det(A)$ по първия ред.

□

Твърдение 10.8. *Ако $A, B \in M_{n\times n}(F)$ са квадратни матрици от един и същи ред, то*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Доказателство. Нека

$$D_1 = \begin{pmatrix} A & \mathbb{O}_{n\times n} \\ -E_n & B \end{pmatrix} \in M_{(2n)\times(2n)}(F).$$

За всяко $1 \leq j \leq n$, умножаваме първите n стълба на D_1 с елементите $b_{1,j}, \dots, b_{n,j}$ на j-тия стълб на B и прибавяме към $(n+j)$-тия стълб на D_1. За всяко $1 \leq i \leq n$, елементът от i-ти ред и $(n+j)$-ти стълб на получената матрица D_2 съвпада с елемента

$$a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \ldots + a_{i,n}b_{n,j} = \sum_{s=1}^{n} a_{i,s}b_{s,j} = (AB)_{i,j}$$

от i-ти ред и j-то стълб на AB. Елементът от $(i+n)$-ти ред и $(n+j)$-ти стълб на D_2 е

$$(-1).b_{i,j} + b_{i,j} = 0.$$

Следователно

$$D_2 = \begin{pmatrix} A & AB \\ -E_n & \mathbb{O}_{n\times n} \end{pmatrix}.$$

Умножението на стълб с елемент на F и прибавянето към друг стълб не променя детерминантата, така че

$$\det(D_2) = \det(D_1).$$

Разменяме първия с $(n+1)$-вия ред на D_2, втория с $(n+2)$-рия и т.н., n-тия с $(2n)$-тия ред. В резултат получаваме матрицата

$$D_3 = \begin{pmatrix} -E_n & \mathbb{O}_{n\times n} \\ A & AB \end{pmatrix}$$

с

$$\det(D_3) = (-1)^n \det(D_2),$$

защото размяната на два реда променя знака на детерминанта. Съгласно Лема 10.7, детерминантите на блочно-триъгълните матрици D_1 и D_3 са

$$\det(D_1) = \det(A)\det(B) \quad \text{и} \quad \det(D_3) = \det(-E_n)\det(AB) = (-1)^n \det(AB).$$

Вземайки предвид с $\det(D_3) = (-1)^n \det(D_2) = (-1)^n \det(D_1)$, получаваме

$$\det(AB) = (-1)^n \det(D_3) = \det(D_1) = \det(A)\det(B).$$

□