зад 2

$$p \to (q \to (r \to (s \to (t \to (x \to (y \to (z \to p))))))) \equiv$$

$$\equiv \neg p \vee (q \to (r \to (s \to (t \to (x \to (y \to (z \to p))))))) \equiv$$

$$\equiv \neg p \vee \neg q \vee (r \to (s \to (t \to (x \to (y \to (z \to p)))))) \equiv$$

$$\equiv \neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee (\neg s \vee (\neg t \vee (\neg x \vee (\neg y \vee (\neg z \vee p))))) \equiv$$

$$\equiv \neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee \neg s \vee \neg t \vee \neg x \vee \neg y \vee \neg z \vee p \equiv$$

$$\equiv (\neg p \vee p) \vee \neg q \vee \neg r \vee \neg s \vee \neg t \vee \neg x \vee \neg y \neg z \equiv$$

$$\equiv T \vee \neg q \vee \neg r \vee \neg s \vee \neg t \vee \neg x \vee \neg y \vee \neg z \equiv T$$ ~~тав~~

Изразът е тавтология

Чрез еквивалентни преобразования премахваме импликациите, защото $p \to q \equiv \neg p \vee q$

След това махаме скобите, защото навсякъде има само дизюнкция. Така се получава ~~се~~ изразът $(\neg p \vee p)$, което е тавтология, както се вижда и от таблицата на истинността:

p	$\neg p$	$\neg p \vee p$
F	T	T
T	F	T

След това имаме израз съставен само от дизюнкции, където едно от съжденията е тавтология, което е тавтология

Зад. 1 Ако $x, y \in \mathbb{R}$ и $x<y$, отворения интервал (x, y) е равен на следното множество: $\{a \in \mathbb{R} \mid x < a < y\}$

Дад. са интервалите $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_n, y_n)$, $n \in \mathbb{N}^+ \setminus \{1\}$, като $x_i < y_i$ $1 \le i \le n$

Нека $(x_i, y_i) \cap (x_j, y_j) \neq \emptyset$, за $1 \le i < j \le n$

Да се докаже по индукция, че $\bigcap_{i=1}^{n} (x_i, y_i) \neq \emptyset$

1. База $n = 2$

$(x_1, y_1) \cap (x_2, y_2) \neq \emptyset$ е вярно по условие

2. Индуктивно предположение

$\bigcap_{i=1}^{n} (x_i, y_i) \neq \emptyset$, ~~за $1 \le i \le n$~~ за $n \in \mathbb{N}^+ \setminus \{1\}$

По условие $(x_i, y_i) \cap (x_j, y_j) \neq \emptyset$ за $1 \le i < j \le n$

От това следва, че $x_i \le x_j < y_i$ или $x_i < y_j \le y_i$, или $x_j \le x_i < y_i \le y_j$

~~Защото~~ Понеже интервалите са отворени трябва $x_i < y_j$ и $x_j < y_i$, за $1 \le i < j \le n$. В противен случай $(x_i, y_i) \cap (x_j, y_j) = \emptyset$

3. Индукционна стъпка

$\bigcap_{i=1}^{n+1} (x_i, y_i) = \bigcap_{i=1}^{n} (x_i, y_i) \cap (x_{n+1}, y_{n+1})$

От индукционната стъпка следва, че $\bigcap_{i=1}^{n} (x_i, y_i) = (x_{max}, y_{min})$

където x_{max} е най-голямата стойност на x_i, а y_{min} е най-малката стойност на y_i, за $1 \le i \le n$

Но по условие трябва $(x_i, y_i) \cap (x_{n+1}, y_{n+1}) \neq \emptyset$, $1 \le i \le n$

Ако x_{max} е ~~от~~ долна граница на интервала (x_a, y_a), $1 \le a \le n$

и y_{min} е ~~от~~ горна граница на интервала (x_b, y_b), $1 \le b \le n$

Като е възможно $a = b$

Тогава от условието следва, че

$(x_a, y_a) \cap (x_{n+1}, y_{n+1}) \neq \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow x_a \le x_{n+1} < y_a$ или $x_a < y_{n+1} \le y_a$ или $x_{n+1} \le x_a < y_a \le y_{n+1} \Rightarrow$

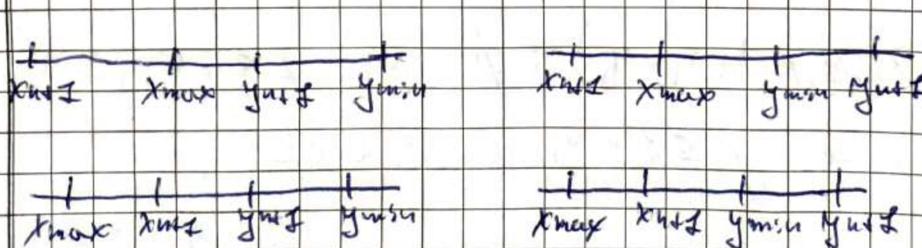
$\Rightarrow x_a < y_n$

и $(x_b, y_b) \cap (x_{n+1}, y_{n+1}) \neq \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow x_b \le x_{n+1} < y_b$ или $x_b < y_{n+1} \le y_b$ или $x_{n+1} \le x_b < y_b \le y_{n+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{x_b}\ x_{n+1} < y_b$

Всички възможности са следните:



Като $x_{n+1} = x_{max}$ и $y_{n+1} = y_{min}$

$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n+1} (x_i, y_i) \neq \emptyset$, за $n \in \mathbb{N}^+ \setminus \{1\}$

Зад. 3 | S е крайно непразно множество

$\Pi(S) = \{X \in 2^{2^S} \mid X$ е разбиване на $S\}$

Релацията $\sqsubseteq_S \subseteq \Pi(S) \times \Pi(S)$ се дефинира така:

$\forall X, Y \in \Pi(S) : X \sqsubseteq_S Y \iff \forall A \in X \ \exists B \in Y : A \subseteq B$

За да е релацията частична наредба, трябва да бъде рефлексивна, транзитивна и антисиметрична

$\forall A \in X \ \exists B \in X : A \subseteq B$ $\quad A = B$ - очевидно релацията е рефлексивна

$\Rightarrow X \sqsubseteq_S X$

$X, Y, Z \in \Pi(S)$ и $X \sqsubseteq_S Y$ и $Y \sqsubseteq_S Z$

$\forall A \in X \ \exists B \in Y : A \subseteq B \wedge \forall B \in Y \ \exists C \in Z : B \subseteq Z$

От това следва: $\forall A \in X \ \exists B \in Y \ \exists C \in Z : A \subseteq B \subseteq C \to A \subseteq C \Rightarrow$

$\Rightarrow$ релацията е транзитивна

Да допуснем, че $X \sqsubseteq_S Y$ и $Y \sqsubseteq_S X$, $X \neq Y$, получаваме:

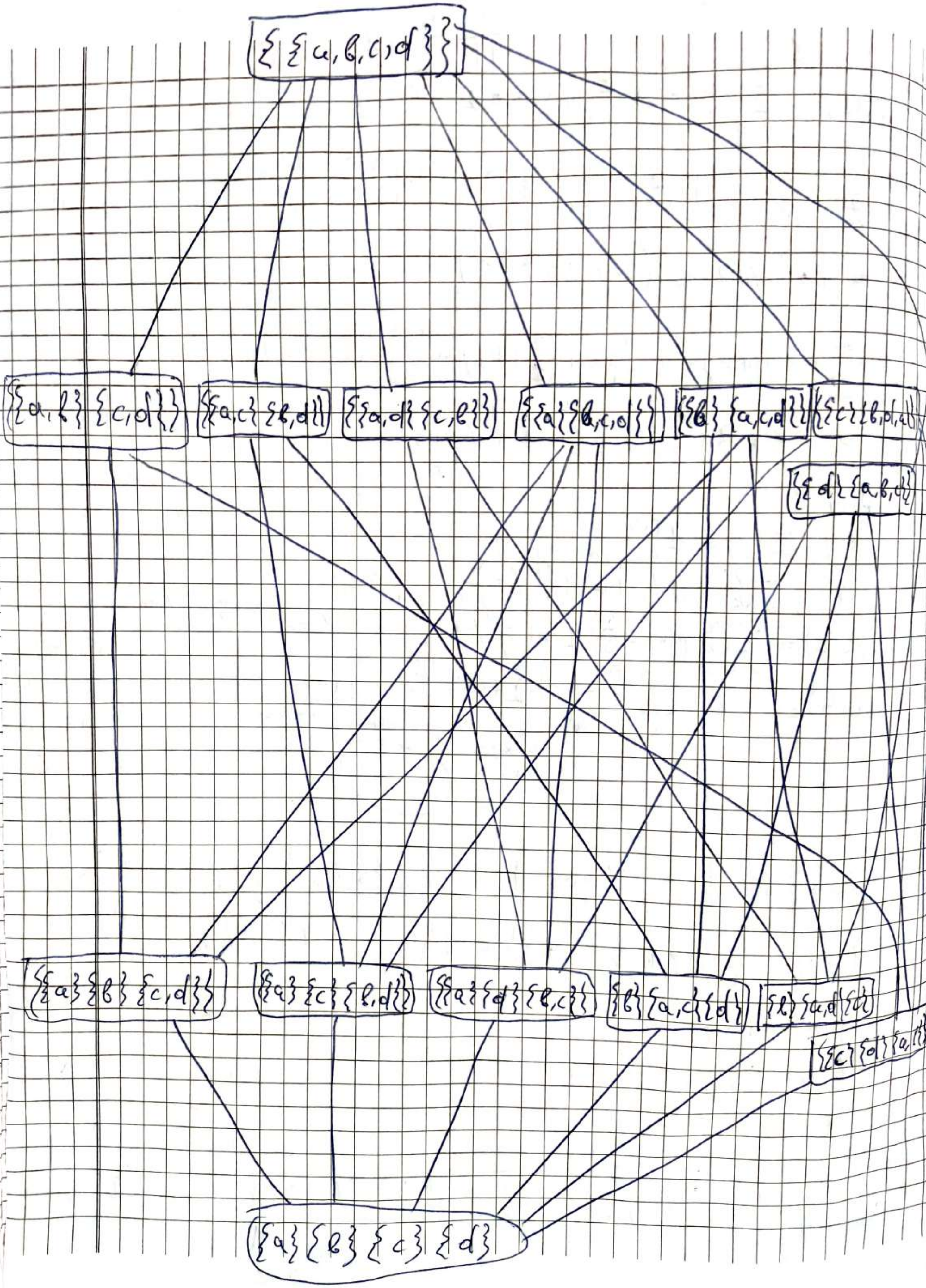
$\forall A \in X \ \exists B \in Y : A \subseteq B \wedge \forall B \in Y \ \exists C \in X : B \subseteq C \Rightarrow$

$\forall A \in X \ \exists B \in Y \ \exists C \in X : A \subseteq B \subseteq C$, но понеже X и Y са разбиване на S и $A \subseteq C$, следва, че $A = C \Rightarrow$

$\Rightarrow A \subseteq B \subseteq A \Rightarrow A = B$ и $X = Y$ - противоречие $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ релацията е антисиметрична $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Релацията $\sqsubseteq_S$ е релация на частична наредба


{{a,b,c,d}}
{{a,b} {c,d}}
{{a,c} {b,d}}
{{a,d} {c,b}}
{{a} {b,c,d}}
{{b} {a,c,d}}
{{c} {b,d,a}}
{{d} {a,b,c}}
{{a} {b} {c,d}}
{{a} {c} {b,d}}
{{a} {d} {b,c}}
{b} {a,c} {d}
{b} {a,d} {c}
{{c} {d} {a,b}}
{a} {b} {c} {d}

зад. 4 S е крайно множество. $p(n)$ е броят на разбиванията на S

Док. - с комбинаторни разсъждения

$p(0) = 1$

$p(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p(k)$, за $n \geq 0$

При $|S| = 0$, $S = \emptyset$ -> има едно разбиване $S' = \emptyset$

Ако $|S| = n+1$

Взимаме последния елемент и още k ел. от множеството, за $1 \leq k \leq n$ и така правим първото подмножество от разбиването. След това повтаряме стъпките за $n-k$ ел. =>

$\Rightarrow p(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p(n-k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p(k)$, защото $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$