Решения на домашна работа 2 по Алгебра 1

Задача 1. *Да се пресметне детерминантата*

$$\Delta_{n+1} =$$

$$= \begin{vmatrix} b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_2 & b_1 & a_0 \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_2 & a_1+b_1 & a_0+c_1 \\ 2b_n & 2b_{n-1} & 2b_{n-2} & \dots & a_2+2b_2 & 2b_1 & 2a_0+c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n-2)b_n & (n-2)b_{n-1} & a_{n-2}+(n-2)b_{n-2} & \dots & (n-2)b_2 & (n-2)b_1 & (n-2)a_0+c_{n-2} \\ (n-1)b_n & a_{n-1}+(n-1)b_{n-1} & (n-1)b_{n-2} & \dots & (n-1)b_2 & (n-1)b_1 & (n-1)a_0+c_{n-1} \\ a_n+nb_n & nb_{n-1} & nb_{n-2} & \dots & nb_2 & nb_1 & na_0+c_n \end{vmatrix}$$

от $(n+1)$*-ви ред с реални елементи* $a_i, b_j, c_k \in \mathbb{R}$.

Решение: За всяко $1 \le i \le n$ умножаваме първия ред по $(-i)$ и прибавяме към $(i+1)$-вия ред, за да получим

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_2 & b_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 & c_{n-2} \\ 0 & a_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & c_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_n \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Ако $a_1 \dots a_n \neq 0$, то умножаваме $(n+1-i)$-ти стълб на получената детерминанта по $-\frac{c_{n+1-i}}{a_{n+1-i}}$ и прибавяме към $(n+1)$-ви стълб, за да сведем към

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_2 & b_1 & S \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

с

$$S = a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_{n+1-i}c_{n+1-i}}{a_{n+1-i}} = a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i c_i}{a_i}.$$

Получената детерминанта е триъгълна относно вторичния диагонал и

$$\Delta_{n+1} = (-1)^{[n+1,n,\dots,2,1]} S.a_1 \dots a_n =$$

$$= (-1)^{n+(n-1)+\dots+1} \left[a_0 a_1 \dots a_n - \sum_{i=1}^{n} a_1 \dots a_{i-1}(b_i c_i) a_{i+1} \dots a_n \right] =$$

$$= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \left[a_0 a_1 \dots a_n - \sum_{i=1}^{n} a_1 \dots a_{i-1}(b_i c_i) a_{i+1} \dots a_n \right].$$

Следователно

$$\Delta_{n+1} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \left[a_0 a_1 \dots a_n - \sum_{i=1}^{n} a_1 \dots a_{i-1}(b_i c_i) a_{i+1} \dots a_n \right] \quad \text{за} \quad a_1 \dots a_n \neq 0. \tag{2}$$

Ако $a_1 \dots a_n = 0$, то съществува $1 \leq i \leq n$ с $a_i = 0$. Елементът a_i на (1) е в $(i+1)$-ви ред и $(n+1-i)$-ти стълб. Затова единственият евентуално ненулев елемент на $(n+1-i)$-ти стълб на (1) е b_i от първи ред и развитието по $(n+1-i)$-ти стълб на Δ_{n+1} е

$$\Delta_{n+1} = (-1)^{1+(n+1-i)} b_i \Delta_n$$

за

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & a_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a_2 & 0 & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & c_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{n-2} & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & c_{n-2} \\ 0 & a_{n-1} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & c_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & c_n \end{vmatrix}.$$

Единственият евентуално ненулев елемент на Δ_n от i-ти ред е c_i от n-ти стълб. Затова развитието на Δ_n по последният стълб е

$$\Delta_n = (-1)^{i+n} c_i \Delta_{n-1}$$

за

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{i-1} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & a_{i+1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Детерминантата Δ_{n-1} от $(n-1)$-ви ред има евентуално ненулеви елементи по вторичния диагонал и

$$\Delta_{n-1} = (-1)^{[n-1,n-2,\dots,2,1]} a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_n =$$

$$= (-1)^{(n-2)+\dots+2+1} a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_n =$$

$$= (-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_n.$$

В резултат,

$$\Delta_{n+1} = (-1)^{n-i} b_i (-1)^{i+n} c_i (-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_n =$$
$$= (-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} a_1 \dots a_{i-1} (b_i c_i) a_{i+1} \dots a_n,$$

откъдето

$$\Delta_{n+1} = (-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} a_1 \dots a_{i-1} (b_i c_i) a_{i+1} \dots a_n \quad \text{за} \quad a_i = 0. \tag{3}$$

Понеже

$$\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-2)(n-1)}{2} = \frac{(n^2+n) - (n^2-3n+2)}{2} = \frac{4n-2}{2} = 2n-1$$

е нечетно число, (3) се получава от (2) при полагане на $a_i = 0$.

Задача 2. *Да се намерят стойностите на параметъра $p \in \mathbb{C}$, за които произведението AB на матриците*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & p & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & p & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

е обратима относно умножението матрица.

Решение: Матрицата AB е обратима тогава и само тогава, когато е неособена, т.е. когато $\det(AB) \neq 0$. По теоремата за умножение на детерминанти,

$$\det(AB) = \det(A)\det(B),$$

така че $\det(AB) \neq 0$ точно когато $\det(A) \neq 0$ и $\det(B) \neq 0$.

За да пресметнем $\det(A)$, изваждаме първия ред от втория. Умножаваме първия ред по (-2), прибавяме към трети и четвърти ред и свеждаме към

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & p & -4 & -3 \end{vmatrix}.$$

Изваждаме втория ред от третия. Умножаваме втория ред по $(-p)$, прибавяме към четвъртия ред и получаваме

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -4-p & -3 \end{vmatrix}.$$

Изваждането на третия ред от четвъртия дава

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -p & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{4+3}(-p) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3p$$

след развитие по четвърти ред. Следователно $\det(A) = -3p \neq 0$ тогава и само тогава, когато $p \neq 0$.

Аналогично, пресмятаме $\det(B)$ чрез изваждане на първия от третия ред. Умножаваме първия ред по (-2), прибавяме към втори и четвърти ред и свеждаме към

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & p-2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Умножаваме третия ред по 2 и прибавяме към втори ред. Умножаваме третия ред по 3, прибавяме към четвъртия ред и получаваме

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p-2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Размяната на втори и трети ред дава

$$\det(B) = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & p-2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Изваждането на четвъртия ред от третия свежда детерминантата на B към

$$\det(B) = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & p+1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Развитието по трети ред на горната детерминанта е

$$\det(B) = -(-1)^{3+3}(p+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4(p+1).$$

В резултат, $\det(B) = -4(p+1) \neq 0$ тогава и само тогава, когато $p \neq -1$.

Ококчателно, матрицата AB е обратима точно когато $p \neq 0$ и $p \neq -1$.

Задача 3. *Да се реши матричното уравнение*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

над полето $\mathbb{Q}$ на рационалните числа.

Решение: С елементарни преобразувания по редове към

$$\left(\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & -1 & 2 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & -2 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & -3 & -2 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

се опитваме да сведем лявата половина към единичната матрица E_3 от трети ред. За целта, умножаваме първия ред по (-2) и шприбавяме към втория ред. Умножаваме първия ред по (-3), прибавяме към трети ред и получаваме

$$\left(\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & -1 & 2 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -8 & 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -8 & 0 & 4 & 0 & -4 \end{array}\right).$$

Изпускаме третия ред поради неговото съвпадение с втория ред. Делим втория ред на 4,, прибавяме към първия ред и свеждаме към

$$\left(\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Получената разширена матрица отговаря на матричното уравнение

$$\left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rrrr} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Умножаваме двете матрици отляво и получаваме, че

$$\left(\begin{array}{cccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21}-2x_{31} & x_{22}-2x_{32} & x_{23}-2x_{33} & x_{24}-2x_{34} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rrrr} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

равнявайки съответните елементи получаваме, че

$$x_{11}=-1, \quad x_{12}=-1, \quad x_{13}=1, \quad x_{14}=0,$$

$$x_{21}=2x_{31}, \quad x_{22}=2x_{32}+1, \quad x_{23}=2x_{33}, \quad x_{24}=2x_{34}-1$$

за произволни $x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34} \in \mathbb{Q}$. Следователно матричното уравнение има решение

$$X = \left(\begin{array}{cccc} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2x_{31} & 2x_{32}+1 & 2x_{33} & 2x_{34}-1 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{array}\right) \quad \text{за произволни} \quad x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34} \in \mathbb{Q}.$$

Задача 4. *В пространството $\mathbb{C}^4$ на наредените четворки комплексни числа са дадени линейните обвивки $U = l(a_1, a_2, a_3)$ и $W = l(b_1, b_2, b_3)$ на векторите*

$$a_1 = (1,1,0,-1), \quad a_2 = (2,-1,3,-2), \quad a_3 = (4,1,3,-4),$$

$$b_1 = (1,-1,1,0), \quad b_2 = (1,-2,3,-1), \quad b_3 = (2,-3,4,-1).$$

Да се намерят базиси на сумата $U + W$ и на сечението $U \cap W$ на U и W.

Решение: Непосредствено пресмятаме, че

$$a_2 - 2a_1 = (0, -3, 3, 0), \quad a_3 - 4a_1 = (0, -3, 3, 0),$$

откъдето $a_3 - 4a_1 = a_2 - 2a_1$ и

$$a_3 = 2a_1 + a_2.$$

Това показва, че непропорционалните вектори a_1, a_2 образуват базис на $U = l(a_1, a_2, a_3) = l(a_1, a_2)$. Аналогично, от

$$b_2 - b_1 = (0, -1, 2, -1), \quad b_3 - 2b_1 = (0, -1, 2, -1)$$

следва $b_2 - b_1 = b_3 - 2b_1$ и

$$b_3 = b_1 + b_2.$$

Затова непропорционалните вектори b_1, b_2 образуват базис на $W = l(b_1, b_2, b_3) = l(b_1, b_2)$.

За да намерим базис на сечението $U \cap W$ трябва да представим U и W като пространства от решения на хомогенни системи линейни уравнения. Започваме с решаване на хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & & -x_4 & = 0 \\ 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & -2x_4 & = 0 \end{array} \right. ,$$

чиято матрица от коефициенти е образувана по редове от координатите на векторите a_1, a_2. Сътветната матрица от коефициенти е

$$\left(\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \end{array} \right).$$

Умножаваме първия ред по (-2), прибавяме към втория ред и свеждаме към

$$\left(\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right).$$

Делим втория ред на 3, прибавяме го към първия ред и получаваме

$$\left(\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Съответната хомогенна система линейни уравнения има решение

$$x_1 = -x_3 + x_4, \quad x_2 = x_3 \quad \text{за всички} \quad x_3, x_4 \in \mathbb{C}.$$

За да намерим базис v_1, v_2 на пространството от решения, полагаме $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ и получаваме $v_1 = (-1, 1, 1, 0)$. Изборът на $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ дава $v_2 = (1, 0, 0, 1)$. Следователно $U = l(a_1, a_2)$ е пространството от решения на хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{lllll} -x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 0 \\ x_1 & & & +x_4 & = 0 \end{array} \right. . \qquad (4)$$

Аналогично, за да представим W като пространство от решения на хомогенна система линейни уравнения, търсим базис на пространството от решения на хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{lllll} x_1 & -x_2 & +x_3 & & = 0 \\ x_1 & -2x_2 & +3x_3 & -x_4 & = 0 \end{array} \right. ,$$

чиято матрица от коефициенти е съставена по редове от координатите на векторите b_1, b_2. Матрицата от коефициенти на тази система е

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Изваждаме първия ред от втория и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Изваждаме втория ред от първия и получаваме

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Съответната хомогенна система линейни уравнения има решение

$$x_1 = x_3 - x_4, \quad x_2 = 2x_3 - x_4 \quad \text{за произволни} \quad x_3, x_4 \in \mathbb{C}.$$

За да построим базис w_1, w_2 на пространството от решения избираме $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ и получаваме $w_1 = (1, 2, 1, 0)$. Аналогично, за $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ пресмятаме $w_2 = (-1, -1, 0, 1)$. Следователно $W = l(b_1, b_2)$ е пространството от решения на хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{lllll} x_1 & +2x_2 & +x_3 & & = 0 \\ -x_1 & -x_2 & & +x_4 & = 0 \end{array} \right. . \tag{5}$$

Сечението $U \cap W$ е пространството от решения на хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{lllll} -x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 0 \\ x_1 & & & +x_4 & = 0 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & & = 0 \\ -x_1 & -x_2 & & +x_4 & = 0 \end{array} \right. ,$$

получена чрез обединяване на уравненията (4) на U с уравненията (5) на W. Матрицата от коефициенти на тази хомогенна система линейни уравнения е

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Записваме втория ред на първо място. Заменяме втория ред със сумата на така получения първи ред. Изваждаме първия ред от третия. Прибавяме първия ред към четвъртия и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Умножаваме втория ред по (-2) и прибавяме към третия ред. Прибавяме втория ред към четвъртия и получаваме

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Изваждаме четвъртия ред от втория. Изпускаме третия ред поради неговата пропорционалност с четвъртия и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решението на получената хомогенна система линейни уравнения е

$$x_1 = -x_4, \quad x_2 = 2x_4, \quad x_3 = -3x_4 \quad \text{за произволни} \quad x_4 \in \mathbb{C}.$$

За $x_4 = 1$ получаваме вектора $c = (-1, 2, -3, 1)$ на пространството от решения $U \cap W$.

По теоремата за размерност на сума и сечение,

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

От $U = l(a_1, a_2)$ и $W = l(b_1, b_2)$ получаваме $U + W = l(a_1, a_2, b_1, b_2)$. Търсим нетривиална линейна зависимост на a_1, a_2, b_1, b_2, равна на нулевия вектор, за да можем да изберем базис на $U + W$, съдържащ се в множеството $\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$. Ако

$$\begin{aligned} (0,0,0,0) &= x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 b_1 + x_4 b_2 = \\ &= x_1(1,1,0,-1) + x_2(2,-1,3,-2) + x_3(1,-1,1,0) + x_4(1,-2,3,-1) = \\ &(x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4,\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4,\ 3x_2 + x_3 + 3x_4,\ -x_1 - 2x_2 - x_4), \end{aligned}$$

то $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4$ е решение на хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{ccccc} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & -2x_4 & = 0 \\ & 3x_2 & +x_3 & +3x_4 & = 0 \\ -x_1 & -2x_2 & & -x_4 & = 0 \end{array} \right.$$

с матрица от коефициенти

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Изваждаме първия ред от втория. Прибавяме първия ред към четвъртия и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Изваждаме четвъртия ред от първия и третия. Умножаваме четвъртия ред по 2, прибавяме към втория ред и получаваме

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Делим втория ред на (-3). Умножаваме втория ред по (-2) и прибавяме към първия ред. Изпускаме третия ред поради неговата пропорционалност на втория и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получената хомогенна система линейни уравнения има решение

$$x_1 = x_4, \quad x_2 = -x_4, \quad x_3 = 0 \quad \text{за произволни} \quad x_4 \in \mathbb{C}.$$

За $x_4 = 1$ получаваме базис $(1, -1, 0, 1)$ на пространството от решения. Следователно

$$a_1 - a_2 + b_2 = (0, 0, 0, 0)$$

и всяка тройка вектори от $\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$, съдържаща b_1 е базис на $U + W$. Например, a_1, a_2, b_1 е базис на $U + W$.