Решения на домашна работа 1 по Алгебра 1

Задача 1. *В пространството $\mathbb{C}^4$ на наредените четворки комплексни числа са дадени векторите*

$$a_1 = (1, 3, -1, 2), \quad a_2 = (2, 1, -1, -3), \quad a_3 = (1, 2, -1, -2), \quad a_4 = (p, 4, -1, 3),$$

зависещи от параметър $p \in \mathbb{C}$. Да се намерят стойностите на p, за които векторите a_1, a_2, a_3, a_4 образуват линейно зависима система. За така намерените стойности на p да се напише една нетривиална тяхна линейна комбинация, равна на нулевия вектор.

Решение: Векторите a_1, a_2, a_3, a_4 са линейно зависими, ако съществуват комплексни числа $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$, поне едно от които не е 0, така че

$$\begin{aligned} (0,0,0,0) = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 = \\ x_1(1,3,-1,2) + x_2(2,1,-1,-3) + x_3(1,2,-1,-2) + x_4(p,4,-1,3) = \\ (x_1 + 2x_2 + x_3 + px_4,\, 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4,\, -x_1 - x_2 - x_3 - x_4,\, 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4). \end{aligned}$$

Затова търсим онези стойности на $p \in \mathbb{C}$, за които хомогената система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{rrrrl} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +px_4 & = 0 \\ 3x_1 & +x_2 & +2x_3 & +4x_4 & = 0 \\ -x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 & = 0 \\ 2x_1 & -3x_2 & -2x_3 & +3x_4 & = 0 \end{array} \right.$$

има повече от едно решение, което е в сила тогава и само тогава, когато тази хомогенна система има ненулево решение. Матрицата от коефициенти на тази система е

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & p \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Преместваме първия ред след всички останали, разменяме първи и втори ред и получаваме

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & p \end{pmatrix}.$$

Умножаваме първия ред по 3 и прибавяме към втория ред. Умножаваме първия ред по 2 и прибавяме към третия ред. Прибавяме първия ред към четвъртия и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & p-1 \end{pmatrix}.$$

Умножаваме втория ред по (-2), прибавяме към третия ред и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & p-1 \end{pmatrix}.$$

Разменяме втори и трети ред. Изваждаме така получения втори ред от първия. Умножаваме втория ред по (-2) и прибавяме към третия ред. Прибавяме втория ред към четвъртия и получаваме

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & p-2 \end{pmatrix}.$$

Делим третия ред на 3. Изваждаме така получения трети ред от първия. Удвояваме третия ред и го прибавяме към втория. Удвояваме третия ред, прибавяме към четвъртия и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Ако $p \neq 0$, то последното уравнение на получената хомогенна система уравнения изисква $x_4 = 0$. Замествайки във третото уравнение получаваме $x_3 = 0$, а от второто уравнение следва $x_2 = 0$. Накрая първото уравнение дава $x_1 = 0$. Следователно векторите a_1, a_2, a_3, a_4 са линейно независими за $p \neq 0$.

Ако $p = 0$, то последното уравнение на (1) не налага никакви ограничения върху променливите. Тази система има решение

$$x_1 = -x_4, \quad x_2 = x_4, \quad x_3 = -x_4 \quad \text{за} \quad \forall x_4 \in \mathbb{C}.$$

При избор на $x_4 = -1$ получаваме нетривиалната линейна комбинация

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = (0,0,0,0).$$

Задача 2. *В пространството* $\mathbb{R}[x]^{(\leq 4)} = \left\{ f(x) = \sum_{i=0}^{4} a_i x^i \,\middle|\, a_i \in \mathbb{R} \right\}$ *на полиномите от степен* ≤ 4 *с реални коефициенти е дадено подмножеството*

$$U = \left\{ f(x) \in \mathbb{R}[x]^{(\leq 4)} \,\middle|\, f(2) = f(-2),\ f''(0) = 0 \right\},$$

където $f''(x)$ *е втората производна на полином* $f(x) \in \mathbb{R}[x]^{(\leq 4)}$. *Да се докаже, че* U *е подпространство на* $\mathbb{R}[x]^{(\leq 4)}$ *и да се намери базис на* U.

Решение: Нека $f(x), g(x) \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогава

$$(f+g)(2) = f(2) + g(2) = f(-2) + g(-2) = (f+g)(-2)$$

и

$$(f+g)''(0) = (f'' + g'')(0) = f''(0) + g''(0) = 0 + 0 = 0$$

показват, че $f + g \in U$. Аналогично, от

$$(\lambda f)(2) = \lambda f(2) = \lambda f(-2) = (\lambda f)(-2)$$

и

$$(\lambda f)''(0) = (\lambda f'')(0) = \lambda f''(0) = \lambda .0 = 0$$

следва $\lambda f \in U$. Това доказва, че U е подпространство на $\mathbb{R}[x]^{(\leq 4)}$.

Полином $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathbb{R}[x]^{(\leq 4)}$ има първа производна $f'(x) = 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$ и втора производна $f''(x) = 12a_4x^2 + 6a_3x + 2a_2$. Условието $f(x) \in U$ е в сила тогава и само тогава, когато

$$16a_4 + 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = f(2) = f(-2) = 16a_4 - 8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + a_0$$

и

$$f''(0) = 2a_2 = 0.$$

С други думи, $f(x) = \sum_{i=0}^{4} a_i x^i \in U$ точно когато коефициентите $a_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq 4$ на този полином изпълняват системата линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{c} 16a_3 + 4a_1 = 4(4a_3 + a_1) = 0 \\ a_2 = 0 \end{array} \right. .$$

Нейните решения са

$$a_1 = -4a_3, \quad a_2 = 0 \quad \text{за} \quad \forall a_0, a_3, a_4 \in \mathbb{R}.$$

По този начин получихме, че $f(x) = \sum_{i=0}^{4} a_i x^i \in U$ тогава и само тогава, когато

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 - 4a_3x + a_0 = a_4x^4 + a_3(x^3 - 4x) + a_0$$

за произволни $a_0, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$. Всеки такъв полином $f(x)$ е линейна комбинация на полиномите

$$x^4, \quad x^3 - 4x, \quad 1 \in U$$

и посочените полиноми са линейно независими над $\mathbb{R}$, защото

$$a_4x^4 + a_3(x^3 - 4x) + a_0 = a_4x^4 + a_3x^3 - 4a_3x + a_0 \equiv 0$$

само за $a_4 = a_3 = a_0 = 0$. По този начин доказахме, че x^4, $x^3 - 4x$, 1 е базис на подпространството U на $\mathbb{R}[x]^{(\leq 4)}$.

Задача 3. *В пространството* $\mathbb{Q}^4$ *на наредените четворки рационални числа са дадени векторите*

$$b_1 = (1,2,1,1), \quad b_2 = (2,-1,1,-1), \quad b_3 = (3,-1,-1,0), \quad b_4 = (1,1,0,1).$$

Да се докаже, че b_1, b_2, b_3, b_4 *е базис на* $\mathbb{Q}^4$ *и да се намерят координатите на вектора* $v = (1,2,0,1)$ *спрямо този базис.*

Решение: За да докажем, че b_1, b_2, b_3, b_4 е базис на четиримерното линейно пространство $\mathbb{Q}^4$ над полето $\mathbb{Q}$ на рационалните числа, достатъчно е да установим линейната независимост на тези вектори. Това означава, че единствените рационални числа $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Q}$, изпълняващи равенството

$$\begin{aligned}(0,0,0,0) = x_1b_1 + x_2b_2 + x_3b_3 + x_4b_4 = \\ x_1(1,2,1,1) + x_2(2,-1,1,-1) + x_3(3,-1,-1,0) + x_4(1,1,0,1) = \\ = (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4,\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4,\ x_1 + x_2 - x_3,\ x_1 - x_2 + x_4)\end{aligned}$$

са $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. Еквивалентно, хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{lllll} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +x_4 & = 0 \\ 2x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & & = 0 \\ x_1 & -x_2 & & +x_4 & = 0 \end{array} \right. \tag{2}$$

има само нулевото решение $(0,0,0,0)$.

Ако b_1, b_2, b_3, b_4 е базис на $\mathbb{Q}^4$, то координатите на $v \in \mathbb{Q}^4$ спрямо този базис са еднозначно определените рационални числа y_1, y_2, y_3, y_4, изпълняващи равенството

$$\begin{aligned}(1,2,0,1) = v = y_1b_1 + y_2b_2 + y_3b_3 + y_4b_4 = \\ y_1(1,2,1,1) + y_2(2,-1,1,-1) + y_3(3,-1,-1,0) + y_4(1,1,0,1) = \\ = (y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4,\ 2y_1 - y_2 - y_3 + y_4,\ y_1 + y_2 - y_3,\ y_1 - y_2 + y_4).\end{aligned}$$

С други думи, (y_1, y_2, y_3, y_4) е единственото решение на системата линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{lllll} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +x_4 & = 1 \\ 2x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & = 2 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & & = 0 \\ x_1 & -x_2 & & +x_4 & = 1 \end{array} \right. . \tag{3}$$

Системите линейни уравнения (2) и (3) имат едни и същи матрици от коефициенти. Затова решаваме системата линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{lllll} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +x_4 & = c_1 \\ 2x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & = c_2 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & & = c_3 \\ x_1 & -x_2 & & +x_4 & = c_4 \end{array} \right. . \tag{4}$$

за произволни $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{Q}$ и после полагаме $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ или $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$, $c_4 = 1$. Разширената матрица на (4) е

$$\left(\begin{array}{rrrr|l} 1 & 2 & 3 & 1 & c_1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & c_2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & c_3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & c_4 \end{array}\right).$$

Умножаваме първия ред по (-2) и прибавяме към втория ред. Изваждаме първия ред от трети и четвърти ред, за да сведем към

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 & c_1 \\ 0 & -5 & -7 & -1 & c_2 - 2c_1 \\ 0 & -1 & -4 & -1 & c_3 - c_1 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & c_4 - c_1 \end{array}\right).$$

Делим четвъртия ред на (-3) и го записваме преди втори и трети ред. Умножаваме така получения втори ред по 5 и прибавяме към третия ред. Прибавяме втория ред към четвъртия и получаваме

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 & c_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{c_1 - c_4}{3} \\ 0 & 0 & -2 & -1 & \frac{-5c_4 + 3c_2 - c_1}{3} \\ 0 & 0 & -3 & -1 & \frac{-c_4 + 3c_3 - 2c_1}{3} \end{array}\right).$$

Изваждаме третия ред от четвъртия и свеждаме към

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 & c_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{c_1 - c_4}{3} \\ 0 & 0 & -2 & -1 & \frac{-5c_4 + 3c_2 - c_1}{3} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{4c_4 + 3c_3 - 3c_2 - c_1}{3} \end{array}\right).$$

Умножаваме четвъртия ред по 3 и прибавяме към първия ред. Прибавяме четвъртия ред към втория. Умножаваме четвъртия ред по (-2), прибавяме към третия ред и получаваме

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 0 & 1 & 4c_4 + 3c_3 - 3c_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & c_4 + c_3 - c_2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{-13c_4 - 6c_3 + 9c_2 + c_1}{3} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{4c_4 + 3c_3 - 3c_2 - c_1}{3} \end{array}\right).$$

Умножаваме втория ред по (-2) и прибавяме към първия ред. Прибавяме третия ред към първия и свеждаме към

$$\left(\begin{array}{cccc|r} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-7c_4-3c_3+6c_2+c_1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & c_4+c_3-c_2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{-13c_4-6c_3+9c_2+c_1}{3} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{4c_4+3c_3-3c_2-c_1}{3} \end{array}\right).$$

С това получаваме, че системата линейни уравнения (4) има единствено решение

$$x_1 = \frac{-7c_4-3c_3+6c_2+c_1}{3}, \quad x_2 = c_4+c_3-c_2,$$

$$x_3 = \frac{-4c_4-3c_3+3c_2+c_1}{3}, \quad x_4 = \frac{13c_4+6c_3-9c_2-c_1}{3}.$$

За $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ единственото решение на (2) е $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, така че векторите b_1, b_2, b_3, b_4 са линейно независими, а оттам и базис на $\mathbb{Q}^4$. За $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$, $c_4 = 1$ получаваме, че единственото решение на (3) е $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = -2$. Следователно

$$v = 2b_1 - b_2 + b_3 - 2b_4.$$

Задача 4. *Нека D е множеството на диференцируемите функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, а*

$$C = \{f \in D \,|\, f(x) = f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}\}$$

е подмножеството на постоянните функции. Да се докаже, че:

(i) D е линейно пространство над полето $\mathbb{R}$ на реалните числа относно поточково определените събиране

$$D \times D \to D, \quad (f, g) \mapsto f + g, \quad (f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall f, g \in D$$

и умножение

$$\mathbb{R} \times D \to D, \quad (\lambda, f) \mapsto \lambda f, \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall f \in D$$

с реални числа;

(ii) C и $U = \{f \in D \,|\, f(0) = 0\}$ са подпространства на D и $D = C \oplus U$ е тяхната директна сума.

Решение: (i) Ако $f, g \in D$ са диференцируеми функции, то $f + g, \lambda f$ са диференцируеми за $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ с производни $(f+g)' = f' + g'$, $(\lambda f)' = \lambda f'$. Съгласно поточково определеното събиране и асоциативността на събирането на реални числа имаме

$$[(f+g)+h](x) = (f+g)(x) + h(x) = [f(x)+g(x)] + h(x) =$$
$$= f(x) + [g(x)+h(x)] = f(x) + (g+h)(x) = [f+(g+h)](x)$$

за $\forall x \in \mathbb{R}$, откъдето $(f+g)+h = f+(g+h)$ за $\forall f, g, h \in D$. Аналогично, поточковото определение на събирането и комутативността на събирането на реални числа дават

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x),$$

откъдето $f+g = g+f$ за $\forall f, g \in D$. Ако $\mathcal{O} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{O}(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ е тъждествено нулевата функция, то $f + \mathcal{O} = f$ за $\forall f \in D$ съгласно

$$(f+\mathcal{O})(x) = f(x) + \mathcal{O}(x) = f(x) + 0 = f(x) \quad \text{за} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Всяка диференцируема функция $f \in D$ има противоположна $(-f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, действаща по правилото $(-f)(x) = -f(x)$ за $\forall x \in \mathbb{R}$, така че

$$[f + (-f)](x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) + [-f(x)] = 0 = \mathcal{O}(x) \quad \text{за} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

За произволни $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и $f \in D$ е в сила

$$[(\lambda+\mu)f](x) = (\lambda+\mu)f(x) = \lambda f(x) + \mu f(x) = (\lambda f)(x) + (\mu f)(x) = (\lambda f + \mu f)(x)$$

за $\forall x \in \mathbb{R}$ съгласно поточковите определения на събирането на диференцируеми функции и умножението на диференцируема функция с реално число, както и дистрибутивния закон за събиране и умножение на реални числа. В резултат получаваме дистрибутивния закон $(\lambda+\mu)f = \lambda f + \mu f$ над скаларен множител. За $\forall f, g \in D$ и $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ е изпълнено

$$\begin{aligned}[\lambda(f+g)](x) = \lambda[(f+g)(x)] = \lambda[f(x) + g(x)] = \\ = \lambda f(x) + \lambda g(x) = (\lambda f)(x) + (\lambda g)(x) = (\lambda f + \lambda g)(x)\end{aligned}$$

за $\forall x \in \mathbb{R}$. Това доказва дистрибутивния закон $\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$ над векторен множител. За да проверим аксиомата за умножение на два скалара с вектор забелязваме, че

$$[(\lambda\mu)f](x) = (\lambda\mu)f(x) = \lambda[\mu f(x)] = \lambda[(\mu f)(x)] = [\lambda(\mu f)](x)$$

за $\forall x \in \mathbb{R}$, съгласно поточковото определение на умножението на диференцируема функция с реално число и асоциативността на умножението на реални числа. Накрая константата $1 \in C$ изпълнява равенството $1.f = f$ за $\forall f \in D$, съгласно

$$(1f)(x) = 1.f(x) = f(x) \quad \text{за} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Това доказва, че множеството D на диференцируемите функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е линейно пространство относно поточково определените събиране и умножение с реално число.

(ii) За произволно реално число $r \in \mathbb{R}$ да означим с $\zeta_r \in C$ постоянната функция $\zeta_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с $\zeta_r(x) = r$ за всяко $x \in \mathbb{R}$. Тогава за произволни $a, b \in \mathbb{R}$ и $\zeta_a, \zeta_b \in C$ е в сила

$$(\zeta_a + \zeta_b)(x) = \zeta_a(x) + \zeta_b(x) = a + b = \zeta_{a+b}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

така че $\zeta_a + \zeta_b = \zeta_{a+b} \in C$. Аналогично, за произволни $\zeta_a \in C$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ е изпълнено

$$(\lambda\zeta_a)(x) = \lambda\zeta_a(x) = \lambda a = \zeta_{\lambda a}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

откъдето $\lambda\zeta_a = \zeta_{\lambda a} \in C$ и C е подпространство на D.

За произволни $f, g \in U = \{f \in D \,|\, f(0) = 0\}$ е в сила

$$(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0,$$

откъдето $f + g \in U$. По аналогичен начин, за произволни $f \in U$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ е изпълнено

$$(\lambda f)(0) = \lambda f(0) = \lambda.0 = 0,$$

така че $\lambda f \in U$ и U е подпространство на D.

Произволна диференцируема функция $f \in D$ може да се представи като сума

$$f(x) = \zeta_{f(0)}(x) + [f - \zeta_{f(0)}](x)$$

на постоянната функция $\zeta_{f(0)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с $\zeta_{f(0)}(x) = f(0)$ за всяко $x \in \mathbb{R}$ и функция $f - \zeta_{f(0)} \in U$, съгласно

$$[f - \zeta_{f(0)}](0) = f(0) - \zeta_{f(0)}(0) = f(0) - f(0) = 0.$$

Това доказва, че $D \subseteq C + U$. Комбинирайки с включването $C + U \subseteq D$, получаваме равенството $C + U = D$. Ако $\zeta_r \in C \cap U$, то $r = \zeta_r(0) = 0$, откъдето $C \cap U = \{\zeta_0\} = \{\mathcal{O}\}$ и сумата $D = C \oplus U$ е директна.