Глава 23

Симетрични и ермитови матрици и оператори.

Определение 23.1. *Матрица* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *(съответно* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$*) е симетрична (ермитова), ако* $\overline{A}^t = A$.

Твърдение 23.2. *(i) Множеството*

$$M^{\mathrm{sym}}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \,|\, A^t = A\}$$

на симетричните матрици и множеството

$$M^{\mathrm{Herm}}_{n\times n}(\mathbb{C}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \,|\, \overline{A}^t = A\}$$

на ермитовите матрици са линейни пространства над полето $\mathbb{R}$ *на реалните числа.*
(ii) Ако $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *(съответно* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$*) е обратима симетрична (ермитова) матрица, то обратната матрица* A^{-1} *е симетрична (ермитова).*
(iii) Ако $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *(съответно* $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$*) са симетрични (ермитови) матрици и* $AB = BA$*, то* AB *е симетрична (ермитова) матрица.*

Доказателство. (i) За произволни матрици $M, N \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ твърдим, че $\overline{(M+N)} = \overline{M} + \overline{N}$. По-точно,

$$\overline{(M+N)}_{i,j} = \overline{(M+N)_{i,j}} = \overline{(M_{i,j}+N_{i,j})} =$$
$$= \overline{M_{i,j}} + \overline{N_{i,j}} = \overline{(M)}_{i,j} + \overline{(N)}_{i,j} = (\overline{M}+\overline{N})_{i,j}$$

за всички $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, защото $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ за произволни комплексни числа $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
За произволна матрица $M \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ и произволно комплексно число $z \in \mathbb{C}$ имаме $\overline{(zM)} = \overline{z}\overline{M}$ съгласно

$$\overline{(zM)}_{i,j} = \overline{(zM)_{i,j}} = \overline{(zM_{i,j})} = \overline{z}\overline{(M_{i,j})} = \overline{z}\overline{(M)}_{i,j} = (\overline{z}\overline{M})_{i,j}$$

за всички $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, използвайки $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$ за произволни комплексни числа $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
Ако $\overline{A}^t = A$ и $\overline{B}^t = B$, то

$$\overline{(A+B)}^t = \overline{A}^t + \overline{B}^t = A + B,$$

така че $A + B$ е симетрична (ермитова) матрица. За произволно $\lambda \in \mathbb{R}$ е в сила

$$\overline{(\lambda A)}^t = \overline{\lambda}\ \overline{A}^t = \lambda A$$

и затова λA е симетрична (ермитова) матрица и множеството на симетричните (ермитовите) матрици е линейно пространство над $\mathbb{R}$.

Да забележим, че ако $A \in M_{n\times n}^{\mathrm{Herm}}(\mathbb{C}) \setminus \{\mathbb{O}_{n\times n}\}$ е ненулева ермитова матрица и $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ е комплексно нереално число, то $zA \notin M_{n\times n}^{\mathrm{Herm}}(\mathbb{C})$ не е ермитова, защото

$$\overline{(zA)}^t = (\overline{z}\,\overline{A})^t = \overline{z}\overline{A}^t = \overline{z}A \neq zA.$$

По-точно, за $A_{i,j} \neq 0$ имаме $\overline{z}A_{i,j} = (\overline{z}A)_{i,j} \neq (zA)_{i,j} = zA_{i,j}$ съгласно

$$A_{i,j}(z - \overline{z}) \neq 0.$$

(ii) Чрез комплексно спрягане и транспониране на равенството $AA^{-1} = E_n$ получаваме

$$E_n = \overline{E_n}^t = \overline{(AA^{-1})}^t = (\overline{A}\ \ \overline{A^{-1}})^t = (\overline{A^{-1}})^t\overline{A}^t = (\overline{A^{-1}})^t A$$

съгласно $\overline{XY} = \overline{X}\,\overline{Y}$ за произволни матрици $X, Y \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, което беше проверено в доказателството на Твърдение 21.2. Единственото решение на матричното уравнение $ZA = E_n$ е A^{-1}, откъдето $(\overline{A^{-1}})^t = A^{-1}$ и A^{-1} е симетрична (ермитова) матрица.
(iii) Съгласно

$$\overline{(AB)}^t = (\overline{A}\ \ \overline{B})^t = \overline{B}^t\overline{A}^t = BA = AB,$$

матрицата AB е симетрична (ермитова).

□

Определение 23.3. *Линеен оператор $\varphi : V \to V$ в евклидово (унитарно) пространство V е симетричен (съответно, ермитов), ако*

$$\langle \varphi(u), v\rangle = \langle u, \varphi(v)\rangle \quad \text{за произволни вектори} \quad u, v \in V.$$

Твърдение 23.4. *Следните условия са еквивалентни за линеен оператор $\varphi : V \to V$ в n-мерно евклидово (унитарно) пространство V:*
(i) φ е симетричен (ермитов) оператор;
(ii) произволен базис $b_1, \dots, b_n$ на V изпълнява равенствата

$$\langle \varphi(b_i), b_j\rangle = \langle b_i, \varphi(b_j)\rangle \quad \text{за всички} \quad 1 \leq i, j \leq n;$$

(iii) произволен ортонормиран базис $e_1, \dots, e_n$ на V изпълнява равенствата

$$\langle \varphi(e_i), e_j\rangle = \langle e_i, \varphi(e_j)\rangle \quad \text{за всички} \quad 1 \leq i, j \leq n;$$

(iv) матрицата A на φ спрямо ортонормиран базис $e_1, \dots, e_n$ на V е симетрична (ермитова).

Доказателство. Ясно е, че $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$.
$(iii) \Leftrightarrow (iv)$ Нека $e = (e_1, \dots, e_n)$ е ортонормиран базис на V и $A = (A_{ij})_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ или $A = (A_{ij})_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ е матрицата на φ спрямо базиса e. Координатите на $\varphi(e_i)$ спрямо базиса e на V са разположени в i-тия стълб на A, така че

$$\langle \varphi(e_i), e_j\rangle = \langle \sum_{s=1}^n A_{si}e_s, e_j\rangle = \sum_{s=1}^n A_{si}\langle e_s, e_j\rangle = A_{ji}\langle e_j, e_j\rangle = A_{ji}.$$

Аналогично,

$$\langle e_i, \varphi(e_j)\rangle = \langle e_i, \sum_{s=1}^n A_{sj}e_s\rangle = \sum_{s=1}^n \overline{A_{sj}}\langle e_i, e_s\rangle = \overline{A_{ij}}\langle e_i, e_i\rangle = \overline{A_{ij}}.$$

Затова условие (iii) е еквивалентно на

$$A_{ji} = \langle \varphi(e_i), e_j\rangle = \langle e_i, \varphi(e_j)\rangle = \overline{A_{ij}} \quad \text{за всички} \quad 1 \leq i, j \leq n. \tag{23.1}$$

По определение, матрицата A е симетрична (ермитова) ако $\overline{A}^t = A$. Вземайки предвид $(\overline{A}^t)_{ji} = (\overline{A})_{ij} = \overline{A_{ij}}$ за всички $1 \leq i, j \leq n$, стигаме до извода, че (23.1) е еквивалентно на $A_{j,i} = (\overline{A}^t)_{ji}$ за всички $1 \leq i, j \leq n$, което се свежда към $A = \overline{A}^t$, т.е. към условие (iv).
За $(iii) \Rightarrow (i)$ да предположим, че $e_1, \dots, e_n$ е ортонормиран базис на V с $\langle \varphi(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, \varphi(e_j) \rangle$ за всички $1 \leq i, j \leq n$. Тогава произволни вектори $u = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ и $v = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j$ от V изпълняват равенствата

$$\langle \varphi(u), v \rangle = \langle \varphi \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right), \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i), \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y_j} \langle \varphi(e_i), e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y_j} \langle e_i, \varphi(e_j) \rangle =$$

$$= \langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \varphi(e_j) \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \varphi \left(\sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right) \rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle,$$

така че $\varphi : V \to V$ е симетричен (ермитов) оператор.

□

Твърдение 23.5. *Всички характеристични корени на симетричен (ермитов) оператор $\varphi : V \to V$ в ненулево крайномерно евклидово (унитарно) пространство V са реални числа.*

Доказателство. Първо ще проверим, че произволна собствена стойност λ на ермитов оператор $\varphi : V \to V$ е реално число. За целта забелязваме, че произволен собствен вектор $v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}_V}\}$, отговарящ на собствена стойност $\lambda \in \mathbb{C}$ изпълнява равенствата

$$\overline{\lambda} ||v||^2 = \langle v, \lambda v \rangle = \langle v, \varphi(v) \rangle = \langle \varphi(v), v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda ||v||^2.$$

Следователно $(\overline{\lambda} - \lambda)||v||^2 = \overline{\lambda}||v||^2 - \lambda ||v||^2 = 0$ с $||v||^2 \in \mathbb{R}^{>0}$, откъдето $\overline{\lambda} = \lambda \in \mathbb{R}$ е реално число.
Следващата стъпка в доказателството установява, че всички характеристични корени на ермитов оператор $\varphi : V \to V$ в ненулево крайномерно унитарно пространство V са реални числа. По определение, характеристичният полином $f_\varphi(x) \in \mathbb{C}[x] \setminus \mathbb{C}$ на φ има комплексни коефициенти. Съгласно Основната теорема на алгебрата - Теорема 19.12, всички корени на $f_\varphi(x) = 0$ са комплексни числа. Прилагаме Твърдение 19.5 и получаваме, че всички характеристични корени λ на φ са собствени стойности. По първата стъпка на доказателството получаваме, че $\lambda \in \mathbb{R}$ са реални числа.
Всяка ермитова матрица A се реализира като матрица на ермитов оператор спрямо ортонормиран базис. По-точно, ако $e = (e_1, \dots, e_n)$ е ортонормиран базис на n-мерно унитарно пространство и $\varphi : V \to V$ е линейният оператор с матрица A спрямо e, то φ е ермитов оператор съгласно Твърдение 23.4. Характеристичните корени на φ съвпадат с характеристичните корени на A. Следователно всички характеристични корени на ермитова матрица A са реални числа.
Всяка симетрична матрица $A \in M_{n \times n}^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}) \subset M_{n \times n}^{\mathrm{Herm}}(\mathbb{C})$ е ермитова и затова характеристичните корени на симетрична матрица A са реални числа.

В резултат, всички характеристични корени на симетричен оператор $\varphi : V \to V$ в крайномерно евклидово пространство V са реални числа, защото матрицата на φ спрямо ортонормиран базис е симетрична.

□

Твърдение 23.6. *Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен (ермитов) оператор в евклидово (унитарно) пространство V. Тогава:*
(i) собствени вектори u, v на φ, отговарящи на различни собствени стойности λ, μ са ортогонални помежду си;
(ii) ортогоналното допълнение $U^{\perp}$ на φ-инвариантно подпространство U на V е φ-инвариантно.
В частост, ако $e_1, \dots, e_k$ е ортонормиран базис на U и $e_{k+1}, \dots, e_n$ е ортонормиран базис на $U^{\perp}$, то $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ е ортонормиран базис на V, в който матрицата на $\varphi : U \oplus U^{\perp} \to U \oplus U^{\perp}$ е

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \mathbb{O}_{k\times(n-k)} \\ \mathbb{O}_{(n-k)\times k} & A_2 \end{pmatrix}$$

за матрицата A_1 на $\varphi : U \to U$ спрямо базиса $e_1, \dots, e_k$ на U и матрицата A_2 на $\varphi : U^{\perp} \to U^{\perp}$ спрямо базиса $e_{k+1}, \dots, e_n$ на $U^{\perp}$.

Доказателство. (i) От определението за симетричност (ермитовост) на $\varphi : V \to V$, приложено към собствените вектори $u, v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$ получаваме

$$\mu\langle u, v\rangle = \overline{\mu}\langle u, v\rangle = \langle u, \mu v\rangle = \langle u, \varphi(v)\rangle = \langle \varphi(u), v\rangle = \langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle,$$

вземайки предвид, че собствените стойности на ермитов оператор са реални числа. Следователно $(\lambda - \mu)\langle u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle - \mu\langle u, v\rangle = 0$ с $\lambda \neq \mu$, така че $\langle u, v\rangle = 0$ и векторите u, v са ортогонални помежду си.
(ii) За произволни вектори $u \in U$ и $v \in U^{\perp}$ е в сила

$$\langle u, \varphi(v)\rangle = \langle \varphi(u), v\rangle = 0,$$

съгласно $\varphi(u) \in U$. Следователно $\varphi(v) \in U^{\perp}$ и $U^{\perp}$ е φ-инварианатно подпространство на V.

□

Твърдение 23.7. *За произволен симетричен (ермитов) оператор $\varphi : V \to V$ в n-мерно евклидово (унитарно) пространство V съществува ортонормиран базис $e_1, \dots, e_n$ на V, в който матрицата*

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

на φ е диагонална.

Доказателство. С индукция по $n = \dim V$, за $n = 1$ няма какво да се доказва. В общия случай, $\varphi : V \to V$ има собствен вектор $v_1 \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$. За ермитов оператор $\varphi : V \to V$ в крайномерно унитарно пространство V това е в сила поради наличието на собствен вектор за произволен линеен оператор в крайномерно пространство над полето $\mathbb{C}$ на комплексните числа. За симетричен оператор φ използваме, че всички характеристични корени на φ са реални числа, а оттам и собствени стойности на φ, така че съществува собствен вектор

$v_1 \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$, отговарящ на собствената стойност $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Заменяме v_1 с единичен вектор $e_1 = \frac{1}{||v_1||} v_1 \in l(v_1)$ и забелязваме, че $U := l(e_1) = l(v_1)$ е 1-мерно φ-инвариантно подпространство на V, върху което действието на φ се свежда до умножение със собствената стойност λ_1, отговаряща на v_1. Ортогоналното допълнение $U^\perp$ на U е $(n-1)$-мерно φ-инвариантно подпространство на V. По индукционно предположение съществува ортонормиран базис $e_2, \dots, e_n$ на $U^\perp$, в който матрицата

$$D' = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

на $\varphi : U^\perp \to U^\perp$ е диагонална. Сега $e_1, e_2, \dots, e_n$ е ортонормиран базис на $V = U \oplus U^\perp$, в който матрицата

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbb{O}_{1\times(n-1)} \\ \mathbb{O}_{(n-1)\times 1} & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

на $\varphi : V = U \oplus U^\perp \to U \oplus U^\perp = V$ е диагонална.

□

Следствие 23.8. *За произволна симетрична (ермитова) матрица $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ (съответно, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$) съществува ортогонална (унитарна) матрица $T \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ (съответно, $T \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$), така че*

$$D = T^{-1}AT = \overline{T}^t AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

е диагонална матрица.

Доказателство. Фиксираме ортонормиран базис $f = (f_1, \dots, f_n)$ в n-мерно евклидово (унитарно) пространство V и разглеждаме линейния оператор $\varphi : V \to V$ с матрица A спрямо f. Съгласно Твърдение 23.4 операторът φ е симетричен (ермитов) и съществува ортонормиран базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ на V, в който матрицата D на φ е диагонална. Матрицата на прехода T от ортонормирания базис f на V към ортонормирания базис e на V е ортогонална (унитарна) и $D = T^{-1}AT = \overline{T}^t AT$.

□

Задача 23.9. *Спрямо ортонормитан базис на евклидово пространство V линейният оператор $\varphi : V \to V$ има матрица*

$$\text{(i)}\quad A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}; \quad \text{(i)}\quad A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{(iii)}\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Да се докаже, че операторът $\varphi : V \to V$ е симетричен. Да се намери ортонормиран базис на V, в който матрицата D на φ е диагонална, както и тази матрица D.

Решение: (i) Непосредствено се проверява, че $A^t = A$ и A е симетрична матрица. Понеже A е матрицата на φ спрямо ортонормиран базис на V, операторът $\varphi : V \to V$ е симетричен.
Започваме пресмятането на характеристичния полином

$$f_\varphi(x) = f_A(x) = \det(A - xE_3) = \begin{vmatrix} -2-x & -2 & -2 \\ -2 & -1-x & 0 \\ -2 & 0 & -3-x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -2 & \frac{x^2+5x+2}{2} \\ 0 & -1-x & 3+x \\ -2 & 0 & -3-x \end{vmatrix}$$

чрез изваждане на третия ред от втория, както и умножение на трети ред по $\left(-\frac{x+2}{2}\right)$ и прибавяне към първия ред след пресмятане на

$$-\frac{x+2}{2}(-x-3) - 2 = \frac{x^2+5x+6-4}{2} = \frac{x^2+5x+2}{2}.$$

Развиваме получената детерминанта от трети ред по нейния първи стълб и получаваме

$$f_\varphi(x) = (-1)^{3+1}.(-2)\begin{vmatrix} -2 & \frac{x^2+5x+2}{2} \\ -1-x & 3+x \end{vmatrix} =$$

$$= (-2)\left[(-2)(x+3) + (x+1)\frac{x^2+5x+2}{2}\right] = 4x + 12 - (x+1)(x^2+5x+2) =$$

$$= 4x + 12 - (x^3 + 5x^2 + 2x + x^2 + 5x + 2) = 4x + 12 - x^3 - 6x^2 - 7x - 2 =$$

$$= -x^3 - 6x^2 - 3x + 10 = -(x^3 + 6x^2 + 3x - 10).$$

Ако $f_\varphi(x) = 0$ има рационален корен ρ, то този корен е цял делител на 10, т.е. $\rho \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$. Непосредствено се пресмята, че $-f_\varphi(1) = 1^3 + 6.1^2 + 3.1 - 10 = 1 + 6 + 3 - 10 = 0$, така че $f_\varphi(x)$ се дели на $x - 1$. Разлагаме

$$-f_\varphi(x) = (x^3 - x^2) + (7x^2 - 7x) + (10x - 10) = x^2(x-1) + 7x(x-1) + 10(x-1) =$$

$$= (x-1)(x^2 + 7x + 10) = (x-1)(x+2)(x+5)$$

и намираме характеристичните корени $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 1$, които са реални числа, а оттам и собствени стойности на φ.
Собствените вектори на φ, отговарящи на собствената стойност $\lambda_1 = -5$ са ненулевите решения на хомогенната система линейни уравнения с матрица от

коефициенти

$$A - \lambda_1 E_3 = A + 5E_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Прибавяме втория ред към първия и го изваждаме от третия, за да сведем към

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Удвояваме първия ред и прибавяме към втория, за да получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Прибавяме третия ред към първия, разделяме третия ред на 2 и изпускаме втория ред поради неговата пропорционалност с третия. Резултатът е хомогенна система линейни уравнения с матрица от коефициенти

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

която има общо решение

$$x_1 = 2x_2, \quad x_3 = 2x_2 \quad \text{за произволни} \quad x_2 \in \mathbb{R}.$$

За $x_2 = 1$ получаваме собствения вектор $v_1 = (2,1,2)$ на φ, отговарящ на собствената стойност $\lambda_1 = -5$. Неговата дължина е $||v_1|| = \sqrt{2^2+1^2+2^2}^{>0} = 3$, така че

$$e_1 := \frac{v_1}{||v_1||} = \frac{1}{3}(2,1,2)$$

е единичен собствен вектор на φ, отговарящ на собствената стойност λ_1.
Собствените вектори на φ, отговарящи на собствената стойност $\lambda_2 = -2$ са ненулевите решения на хомогенната система линейни уравнения с матрица от коефициенти

$$A - \lambda_2 E_3 = A + 2E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Изваждаме третия ред от втория, делим първия ред на (-2) и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

с общо решение

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_3, \quad x_2 = -x_3 \quad \text{за произволни} \quad x_3 \in \mathbb{R}.$$

За $x_3 = 2$ получаваме собствен вектор $v_2 = (-1,-2,2)$ на φ, отговарящ на собствената стойност $\lambda_2 = -2$. Векторът

$$e_2 := \frac{v_2}{||v_2||} = \frac{1}{3}(-1,-2,2)$$

е с дължина 1 и изпълнява равенството $\varphi(e_2) = -2e_2$.

Собствените вектори на φ, отговарящи на собствената стойност $\lambda_3 = 1$ са ненулевите решения на хомогенната состема линейни уравнения с матрица от коефициенти

$$A - \lambda_3 E_3 = A - E_3 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Изваждаме третия ред от втория. Делим третия ред на (-2), умножаваме го по 3, прибавяме към първия ред и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Общото решение на получената хомогенна система линейни уравнения е

$$x_1 = -2x_3, \quad x_2 = 2x_3 \quad \text{за произволни} \quad x_3 \in \mathbb{R}.$$

За $x_3 = 1$ получаваме собствен вектор $v_3 = (-2, 2, 1)$ на φ, отговарящ на собствената стойност $\lambda_3 = 1$. Заменяме вектора v_3 с единичен вектор

$$e_3 := \frac{v_3}{||v_3||} = \frac{1}{3}(-2, 2, 1).$$

Собствените вектори e_1, e_2, e_3 на симетричния оператор $\varphi : V \to V$, отговарящи на различните собствени стойности $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 1$ са ортогонални помежду си и са избрани с единична дължина. Следователно e_1, e_2, e_3 е ортонормиран базис на V, в който матирцата

$$D = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

е диагонална.

(ii) Проверяваме, че $A^t = A$. Доколкото A е матрицата на φ спрямо ортонормиран базис на V, оттук следва, че операторът $\varphi : V \to V$ е симетричен.
Характеристичният полином на φ и на A е

$$f_\varphi(x) = f_A(x) = \det(A - xE_n) = \begin{vmatrix} 4-x & 4 & -2 \\ 4 & -2-x & 4 \\ -2 & 4 & 4-x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 12-2x & \frac{(x-2)(x-6)}{2} \\ 0 & 6-x & 12-2x \\ -2 & 4 & 4-x \end{vmatrix} = (x-6)^2 \begin{vmatrix} 0 & -2 & \frac{x-2}{2} \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & 4-x \end{vmatrix} =$$

$$= (x-6)^2(-1)^{3+1}.(-2) \begin{vmatrix} -2 & \frac{x-2}{2} \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -2(x-6)^2 \left[4 + \frac{x-2}{2}\right] =$$

$$= -(x-6)^2[8 + x - 2] = -(x-6)^2(x+6)$$

след умножание на трети ред по 2 и прибавяне към втори ред, умножение на трети ред по $\frac{4-x}{2}$ и прибавяне към първи ред, последвано от изнасяне на общи множители $x-6$ от първите два реда и развитие по първи стълб. Характеристичните корени $\lambda_1 = -6$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 6 \in \mathbb{R}$ на φ са от полето на реланите числа и съвпадат със собствените стойности на φ.

Собствените вектори на φ, отговарящи на собствената стойност $\lambda_1 = -6$ са ненулевите решения на хомогенната система линейни уравнения с матрица от коефициенти

$$A - \lambda_1 E_3 = A + 6E_3 = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Делим втория ред на 4 и записваме като първо ред. Умножаваме така получения първи ред по (-10), прибавяме към първия ред и записваме като втори ред. Удвояваме първия ред, прибавяме към третия и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Изпускаме третия ред поради неговата пропроционалност с втория. Делим втория ред на 6, прибавяме към първия и получаваме

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Общото решение на получената хомогенна система линейни уравнения е

$$x_1 = x_3, \quad x_2 = -2x_3 \quad \text{за произволно} \quad x_3 \in \mathbb{R}.$$

За $x_3 = 1$ получаваме собствен вектор $v_1 = (1, -2, 1)$, отговарящ на собствената стойност $\lambda_1 = -6$. Дължината на v_1 е $||v_1|| = \sqrt{\langle v_1, v_2 \rangle}^{>0} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}^{>0} = \sqrt{6}$ и

$$e_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$$

е единичен собствен вектор на φ, отговарящ на собствената стойност $\lambda_1 = -6$. Собствените вектори на φ, отговарящи на собствената стойност $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$ са ненулевоте решения на хомогенната система линейни уравнения с матрица от коефициенти

$$A - \lambda_2 E_3 = A - 6E_3 = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 4 & -8 & 4 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Всички уравнения на тази хомогенна система са пропорционални помежду си и налагат единствено ограничение $x_1 = 2x_2 - x_3$ върху координатите на собствените вектори, отговарящи на $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$. Полагаме $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ и получаваме ненулево решение $v_2 = (2, 1, 0)$. Сега търсим ненулево решение на $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$, което е ортогонално на v_1. С други думи, решаваме хомогенната система лкинейни уравнения с матрица от коефициенти

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Умножаваме първия ред по (-2), прибавяме към втория ред и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Делим втория ред на 2, прибавяме към първия и получаваме

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Общото решение на получената хомогенна система линейни уравнения е

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2, \quad x_3 = \frac{5}{2}x_2 \quad \text{за произволни} \quad x_2 \in \mathbb{R}.$$

Избираме $x_2 = 2$ и получаваме собствен вектор $v_3 = (-1, 2, 5)$ на φ, отговарящ на собствената стойност $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$, който е перпендикулярен на v_2. След пресмятане на дължините

$$||v_2|| = \sqrt{\langle v_2, v_2\rangle}^{>0} = \sqrt{2^2 + 1^2}^{>0} = \sqrt{5},$$

$$||v_3|| = \sqrt{\langle v_3, v_3\rangle}^{>0} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 5^2}^{>0} = \sqrt{30},$$

намираме ортонормиран базис

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1, 0), \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{30}}(-1, 2, 5)$$

на собственото подпространство на φ, отговарящо на собствената стойност $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$. Единичният собствен вектор e_1, отговарящ на собствената стойност $\lambda_1 = -6 \neq 6$ е перпендикулярен на e_2, e_3 и e_1, e_2, e_3 е ротонормиран базис на V, в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

(iii) Съгласно $A^t = A$, матрицата A на φ спрямо дадения ортонормиран базис е симетрична. Следователно и операторът $\varphi : V \to V$ е симетрияен
Характеристичният полином на φ и на A е

$$f_\varphi(x) = f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1-x^2 \\ 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{4+1}.1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1-x^2 \\ -x & 1 & 0 \\ 1 & -x & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1-x^2 \\ 0 & 1-x^2 & 0 \\ 1 & -x & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-1)^{3+1}.1 \begin{vmatrix} 0 & 1-x^2 \\ 1-x^2 & 0 \end{vmatrix} = -[-(1-x^2)^2] = (x^2-1)^2 = (x+1)^2(x-1)^2$$

след умножение на четвърти ред по x и прибавяне към първи ред, последвано от развитие по първи стълб, умножение на третия ред по x и прибавяне към втори ред и отново развитие по първи стълб. Собствените стойности на φ са $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$.
Собствените вектори, отговарящи на собствената стойност $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ са ненулевите решения на хомогенната система линейни уравнения с матрица от коефициенти

$$A - \lambda_1 E_4 = A + E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Четвъртият ред съвпада с първия, а третия ред съвпада с втория. Следователно решаваната хомогенна система линейни уравнения има общо решение

$$x_1 = -x_4, \quad x_2 = -x_3 \quad \text{за произволни} \quad x_3, x_4 \in \mathbb{R}.$$

За $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ получаваме ненулево решение $v_1 = (0, -1, 1, 0)$. Сега търсим онези решения на

$$\left| \begin{array}{lllll} x_1 & & & +x_4 & = 0 \\ & x_2 & +x_3 & & = 0 \end{array} \right. ,$$

които са ортогонални на v_1. С други думи, решаваме хомогенната система линейни уравнения с матрица от коефициенти

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Прибавяме втория ред към третия и делим получения ред на 2. Изваждаме така получения трети ред от втория и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Общото решение на получената хомогенна система линейни уравнения е

$$x_1 = -x_4, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0 \quad \text{за произволни} \quad x_4 \in \mathbb{R}.$$

За $x_4 = 1$ получаваме собствения вектор $v_2 = (-1, 0, 0, 1)$ на φ, отоговарящ на собствената стойност $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, които е ортогонален на v_1. След пресмятане на дължините

$$||v_1|| = \sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle}^{>0} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2}^{>0} = \sqrt{2},$$
$$||v_2|| = \sqrt{\langle v_2, v_2 \rangle}^{>0} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2}^{>0} = \sqrt{2},$$

намираме ортонормиран базис

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1, 0), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 0, 1)$$

на собственото подпространство на φ, отговарящ на собствената стойност $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

Собствените вектори на φ, отговарящи на собствената стойност $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$ са ненулевите решения на хомогенната система линейни уравнения с матрица от коефициенти

$$A - \lambda_3 E_4 = A - E_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Четвърти ред е пропорционален на първи, а трети ред е пропорционален на втори. Общото решение на тази хомогенна система линейни уравнения е

$$x_1 = x_4, \quad x_2 = x_3 \quad \text{за произволни} \quad x_3, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Избираме $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ и получаваме ненулево решение $v_3 = (0, 1, 1, 0)$. Търсим онези решения, които са перпендикулярни на v_3 и изпълняват хомогенната система линейни уравнения с матрица от коефициенти

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Прибавяме втория ред към третия и делим на 2. Изваждаме така получения трети ред от втория и свеждаме към

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Общото решение на получената хомогенна система линейни уравнения е

$$x_1 = x_4, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0 \quad \text{за произволни} \quad x_4 \in \mathbb{R}.$$

За $x_4 = 1$ получаваме собствения вектор $v_4 = (1,0,0,1)$ на φ, отговарящ на собствената стойност $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$, който е ортогонален на v_3. Пресмятаме дължините

$$||v_3|| = \sqrt{\langle v_3, v_3\rangle}^{>0} = \sqrt{1^2+1^2}^{>0} = \sqrt{2},$$
$$||v_4|| = \sqrt{\langle v_4, v_4\rangle}^{>0} = \sqrt{1^2+1^2}^{>0} = \sqrt{2}$$

и получаваме ортонормиран базис

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0), \quad e_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1)$$

на собственото подпространство на φ, отговарящо на собствената стойност $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$. По този начин намираме ортонормиран базис e_1, e_2, e_3, e_4 на V, в който матрицата на φ е

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$