Домашна работа - теория

ДИС1, специалност "Компютърни науки"
19 декември 2024г.

1. Формулирайте съответните дефиниции, както и техните логически отрицания.
(а) граница на функция (реално число) при аргумент, клонящ към безкрайност без знак, във формата на Коши;
(б) граница на функция (реално число) при аргумент, клонящ към безкрайност без знак, във формата на Хайне;
(в) необходимото и достатъчно условие на Коши за съществуване на такава граница.

2. Да се докаже, че от $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ следва

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a \ .$$

3. Нека дадена редица $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ от реални числа е ограничена.
(а) Числото λ се нарича *съществена мажоранта* на $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ако множеството $\{n \in \mathbb{N} : a_n \leq \lambda\}$ е кофинитно. Докажете, че множеството от съществените мажоранти на $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е ограничено отдолу и точната му долна граница е най-дясната точка на сгъстяване на дадената редица. Най-дясната точка на сгъстяване на редицата $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ се нарича *limes superior* на редицата и се означава с $\limsup\ a_n$.
(б) Нека $c_n := \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$ за всяко естествено n. Докажете, че $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ е намаляваща и ограничена и

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \limsup a_n \ .$$

(в) Проверете, че за всяко положително ε почти всички членове на редицата са в интервала $(-\infty, \limsup a_n + \varepsilon)$.
(г) Докажете, че $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$.

4. Нека $f : (a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ е диференцируема функция, която е ограничена. Докажете, че съществува редица от стойности на аргумента $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset (a, +\infty)$, която дивергира към $+\infty$ и за която е в сила $f'(x_n) \longrightarrow_{n\to\infty} 0$.