Глава 13

Ранг на система вектори. Ранг на матрица.

Твърдение 13.1. *Следните условия са еквивалентни за вектори $b_1, \ldots, b_m$ от линейно пространство V:*
(i) $b_1, \ldots, b_r$ са линейно независими и за произволни

$$1 \leq i_1 < \ldots < i_{r+1} \leq m$$

векторите $b_{i_1}, \ldots, b_{i_{r+1}}$ са линейно зависими;
(ii) $b_1, \ldots, b_r$ са линейно независими и $b_1, \ldots, b_m \in l(b_1, \ldots, b_r)$;
(iii) $b_1, \ldots, b_r$ са линейно независими и $l(b_1, \ldots, b_m) = l(b_1, \ldots, b_r)$.
Ако е изпълнено едно, а оттам и всяко едно от тези три условия, то казваме, че системата вектори $b_1, \ldots, b_m$ има ранг $\mathrm{rk}(b_1, \ldots, b_m) = r$. С други думи, рангът на система вектори $b_1, \ldots, b_m$ е максималният брой линейно независими вектори, съдържащи се в $\{b_1, \ldots, b_m\}$. Рангът на система вектори съвпада с размерността

$$\mathrm{rk}(b_1, \ldots, b_m) = \dim l(b_1, \ldots, b_m)$$

на линейната им обвивка.

Доказателство. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* Ако допуснем, че съществува $1 \leq i \leq m$ с $b_i \notin l(b_1, \ldots, b_r)$, то $i \notin \{1, \ldots, r\}$ и векторите $b_1, \ldots, b_r, b_i$ са линейно независими съгласно Лема 3.4 за линейна независимост. Това противоречи на предположението за линейна зависимост на произволни $r+1$ вектора от $b_1, \ldots, b_m$ и доказва, че от (i) следва (ii).
(ii) $\Rightarrow$ *(iii)* От $\{b_1, \ldots, b_r\} \subseteq \{b_1, \ldots, b_m\}$ следва $l(b_1, \ldots, b_r) \subseteq l(b_1, \ldots, b_m)$. Подпространството $l(b_1, \ldots, b_r)$ на V съдържа векторите $b_1, \ldots, b_m$, а оттам и всички техни линейни комбинации, т.е. $l(b_1, \ldots, b_m) \subseteq l(b_1, \ldots, b_r)$. Това доказва $l(b_1, \ldots, b_m) = l(b_1, \ldots, b_r)$.
(iii) $\Rightarrow$ *(i)* Съгласно Лема 3.3 за линейна зависимост, произволни вектори

$$b_{i_1}, \ldots, b_{i_{r+1}} \in l(b_1, \ldots, b_m) = l(b_1, \ldots, b_r)$$

с $1 \leq i_1 < \ldots < i_{r+1} \leq m$ са линейно зависими.
Ако е в сила (iii) и $b_1, \ldots, b_r$ са линейно независими вектори с линейна обвивка $l(b_1, \ldots, b_r) = l(b_1, \ldots, b_m)$, то $b_1, \ldots, b_r$ е базис на $l(b_1, \ldots, b_m)$ и

$$\dim l(b_1, \ldots, b_m) = r = \mathrm{rk}(b_1, \ldots, b_m).$$

$\square$

Определение 13.2. *Рангът на нулевата матрица* $\mathbb{O}_{m\times n} \in M_{m\times n}(F)$ *е*

$$\mathrm{rk}(\mathbb{O}_{m\times n}) = 0.$$

Минор от r*-ти ред на матрица* $A \in M_{m\times n}(F) \setminus \{\mathbb{O}_{m\times n}\}$ *е детерминантата на матрица, получена от* A *чрез пресичане на* r *различни реда с* r *различни стълба.*
Рангът $\mathrm{rk}(A)$ *на ненулева матрица* $A \in M_{m\times n}(F) \setminus \{\mathbb{O}_{m\times n}\}$ *е максималният размер* r *на ненулев минор на* A.

Твърдим, че $\mathrm{rk}(A) = r$ ако съществува ненулев минор на A от ред r и всички минори на A от ред $r+1$ са равни на $0 \in F$. С индукция по $i \geq r+1$, ако всички минори на A от ред i са равни на 0, то и всички минори на A от ред $i+1$ се анулират по формулата за развитие на детерминанта по ред или по стълб.

Твърдение 13.3. *Нека* $A \in M_{m\times n}(F)$ *е матрица с вектор-редове*

$$r_i = (a_{i,1}, \ldots, a_{i,n}) \in M_{1\times n}(F), \quad 1 \leq i \leq m, \quad A = \begin{pmatrix} r_1 \\ \ldots \\ r_i \\ \ldots \\ r_m \end{pmatrix}$$

и вектор-стълбове

$$c_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \ldots \\ a_{m,j} \end{pmatrix} \in M_{m\times 1}(F), \quad 1 \leq j \leq n, \quad A = (c_1 \ldots c_j \ldots c_n).$$

Тогава рангът

$$\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(r_1, \ldots, r_m) = \mathrm{rk}(c_1, \ldots, c_n)$$

на матрицата A *съвпада с ранга на нейните вектор-редове* $r_1, \ldots, r_m$ *и ранга на нейните вектор-стълбове* $c_1, \ldots, c_n$.

Доказателство. Достатъчно е да докажем, че $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(r_1, \ldots, r_m)$, защото тогава от

$$A^t = (c_1 \ldots c_n)^t = \begin{pmatrix} c_1^t \\ \ldots \\ c_n^t \end{pmatrix}$$

следва

$$\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A^t) = \mathrm{rk}(c_1^t, \ldots, c_n^t) = \mathrm{rk}(c_1, \ldots, c_n).$$

За равенството $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A^t)$ използваме, че за произволно естествено число $1 \leq s \leq \min(m,n)$ матрицата

$$M^{A^t}(i_1, \ldots, i_s; j_1, \ldots, j_s) = M^A(j_1, \ldots, j_s; i_1, \ldots, i_s) \in M_{s\times s}(F),$$

образувана при пресичане на редовете на A^t с номера $i_1, \ldots, i_s$ и стълбовете на A^t с номера $j_1, \ldots, j_s$ съвпада с матрицата, получена при пресичане на редовете на A с номера $j_1, \ldots, j_s$ и стълбовете на A с номера $i_1, \ldots, i_s$.
Ако $A = \mathbb{O}_{m\times n}$ е нулевата матрица, то всички вектор-редове $r_i = \mathbb{O}_{1\times n}$ са нулеви и

$$\mathrm{rk}(\mathbb{O}_{m\times n}) = 0 = \mathrm{rk}(\underbrace{\mathbb{O}_{1\times n}, \ldots, \mathbb{O}_{1,\times n}}_{m}).$$

Нека $\mathrm{rk}(A) = t \in \mathbb{N}$ и

$$\Delta = \Delta(i_1, \ldots, i_t; j_1, \ldots, j_t) = \begin{vmatrix} a_{i_1,j_1} & \ldots & a_{i_1,j_t} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_s,j_1} & \ldots & a_{i_s,j_t} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_t,j_1} & \ldots & a_{i_t,j_t} \end{vmatrix} \neq 0$$

е ненулев минор от ред t. Тогава вектор-редовете $r_{i_1}, \ldots, r_{i_t} \in M_{1\times n}(F)$ са линейно независими. В противен случай, вектор-редовете на матрицата

$$A' = A'(i_1, \ldots, i_t; j_1, \ldots, j_t) = \begin{pmatrix} a_{i_1,j_1} & \ldots & a_{i_1,j_t} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_s,j_1} & \ldots & a_{i_s,j_t} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_t,j_1} & \ldots & a_{i_t,j_t} \end{pmatrix}$$

са линейно зависими и нейната детерминанта Δ трябва да се анулира.
Достатъчно е да проверим, че за всяко $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_1, \ldots, i_t\}$ вектор-редът $r_i \in l(r_{i_1}, \ldots, r_{i_t})$ е в линейната обвивка на вектор-редовете $r_{i_1}, \ldots, r_{i_t}$, за да получим, че $\mathrm{rk}(r_1, \ldots, r_m) = t = \mathrm{rk}(A)$.
За произволни $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_1, \ldots, i_t\}$ и $j \in \{1, \ldots, n\}$ разглеждаме детерминантата

$$\Delta_{i,j} = \Delta_{i,j}(i_1, \ldots, i_t; j_1, \ldots, j_t) = \begin{vmatrix} a_{i_1,j_1} & \ldots & a_{i_1,j_t} & a_{i_1,j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_s,j_1} & \ldots & a_{i_s,j_t} & a_{i_s,j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_t,j_1} & \ldots & a_{i_t,j_t} & a_{i_t,j} \\ a_{i,j_1} & \ldots & a_{i,j_t} & a_{i,j} \end{vmatrix}$$

на матрицата, получена от A' чрез присъединяване на елементите от i-тия ред на A, които са в стълбовете с номера $j_1, \ldots, j_t, j$ и елементите от j-тия стълб на A, които са от редовете с номера $i_1, \ldots, i_t, i$. Ако $j \in \{j_1, \ldots, j_t\}$, то $\Delta_{i,j} = 0$ като детерминанта с два равни стълба. За $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j_1, \ldots, j_t\}$, анулирането на минорите на A от ред $t+1$ дава $\Delta_{i,j} = 0$. Развитието на $\Delta_{i,j}$ по последния стълб е

$$0 = \Delta_{i,j} = \sum_{s=1}^{t} (-1)^{s+t+1} a_{i_s,j} \delta(i,s) + (-1)^{(t+1)+(t+1)} a_{i,j} \Delta = 0 \tag{13.1}$$

за минорите

$$\delta(i,s) = \delta(i, i_1, \ldots, i_t; s, j_1, \ldots, j_t) = \begin{vmatrix} a_{i_1,j_1} & \ldots & a_{i_1,j_t} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_{s-1},j_1} & \ldots & a_{i_{s-1},j_t} \\ a_{i_{s+1},j_1} & \ldots & a_{i_{s+1},j_t} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_t,j_1} & \ldots & a_{i_t,j_t} \\ a_{i,j_1} & \ldots & a_{i,j_t} \end{vmatrix}$$

от t-ти ред, които не зависят от j. Равенствата (13.1) са в сила за всички $1 \leq j \leq n$ и дават анулирането

$$\sum_{s=1}^{t} (-1)^{s+t+1} \delta(i,s) r_{i_s} + \Delta r_i = \mathbb{O}_{1\times n}$$

на линейна комбинация на вектор-редовете $r_{i_1}, \dots, r_{i_t}, r_i$. Оттук

$$r_i = \sum_{s=1}^{t} (-1)^{s+t} \frac{\delta(i,s)}{\Delta} r_{i_s} \in l(r_{i_1}, \dots, r_{i_t}),$$

което доказва, че $\mathrm{rk}(A) = t = \mathrm{rk}(r_1, \dots, r_m)$.

$\square$

Следствие 13.4. *Следните условия са еквивалентни за матрица $A \in M_{n\times n}(F)$:*
(i) $\det(A) \neq 0$*;*
(ii) вектор-редовете $r_1, \dots, r_n$ на A са линейно независими;
(iii) вектор-стълбовете $c_1, \dots, c_n$ на A са линейно независими.

Доказателство. Условието (i) е еквивалентно на $\mathrm{rk}(A) = n$, защото квадратната матрица A от ред n има единствен минор от ред n, който е нейната детерминанта.
Условието (ii) е в сила точно когато $\mathrm{rk}(r_1, \dots, r_n) = n$, а (iii) е изпълнено точно когато $\mathrm{rk}(c_1, \dots, c_n) = n$.
По Теоремата на ранга на матрица и ранга на нейните вектор-редове и вектор-стълбове,

$$\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(r_1, \dots, r_n) = \mathrm{rk}(c_1, \dots, c_n)$$

и това доказва еквивалентността на условията (i), (ii) и (iii).

$\square$