Глава 2

# Определение за линейно пространство, основни свойства и примери. Подпространства и линейна обвивка.

Определение 2.1. *Непразно множество $V$ е линейно пространство над поле $F$, ако в него са определени събиране на вектори*

$$V \times V \longrightarrow V, \quad (u,v) \mapsto u+v$$

*и умножение на вектор със скалар*

$$F \times V \longrightarrow V, \quad (\lambda, u) \mapsto \lambda u,$$

*изпълняващи следните свойства:*
*(i) асоциативност на събирането $(u+v)+w = u+(v+w)$ за всички $u,v,w \in V$;*
*(ii) комутативност на събирането $u+v = v+u$ за всички $u,v \in V$;*
*(iii) съществуване на нулев вектор $\overrightarrow{\mathcal{O}} \in V$, така че $\overrightarrow{\mathcal{O}} + u = u$ за всяко $u \in V$;*
*(iv) съществуване на противоположен вектор $-u \in V$ за всеки вектор $u \in V$, така че $u + (-u) = \overrightarrow{\mathcal{O}}$;*
*(v) дистрибутивен закон над скаларен множител $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$ за произволни $\alpha, \beta \in F$, $u \in V$;*
*(vi) дистрибутивен закон над векторен множител $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$ за произволни $\alpha \in F$, $u, v \in V$;*
*(vii) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$ за произволни $\alpha, \beta \in F$, $u \in V$;*
*(viii) $1.u = u$ за произволен вектор $u \in V$ и единицата $1$ на $F$.*

Пример 2.2. *Множеството $F^n$ на наредените $n$-торки с елементи от поле $F$ е линейно пространство над $F$ относно покомпонентно определените операции събиране на вектори*

$$x+y = (x_1,\dots,x_n) + (y_1,\dots,y_n) = (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n) \quad \text{за} \quad x,y \in F^n$$

*и умножение на вектор със скалар*

$$\alpha x = \alpha(x_1,\dots,x_n) = (\alpha x_1,\dots,\alpha x_n) \quad \text{за} \quad \alpha \in F, \quad x \in F^n.$$

Доказателство. Посочените операции вземат стойности в $F^n$. Асоциативността на събирането

$$[(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)] + (z_1,\dots,z_n) = ((x_1+y_1)+z_1,\dots,(x_n+y_n)+z_n) =$$
$$= (x_1+(y_1+z_1),\dots,x_n+(y_n+z_n)) = (x_1,\dots,x_n) + [(y_1,\dots,y_n)+(z_1,\dots,z_n)]$$

следва от асоциативността на събирането в $F$ и определението за събиране на наредени $n$-торки.

Комутативността на събирането

$$(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)=$$
$$=(y_1+x_1,\dots,y_n+x_n)=(y_1,\dots,y_n)+(x_1,\dots,x_n)$$

в $F^n$ се дължи на комутативността на събирането в $F$ и определението за събиране на наредени $n$-торки.
Векторът $(0,\dots,0)\in F^n$, чиито всички компоненти са равни на $0\in F$ е нулев, защото

$$(0,\dots,0)+(x_1,\dots,x_n)=(0+x_1,\dots,0+x_n)=(x_1,\dots,x_n),\quad \forall(x_1,\dots,x_n)\in F^n$$

поради определението за събиране в $F^n$ и дефиниционното свойство на нулата $0\in F$.
Всеки вектор $(x_1,\dots,x_n)\in F^n$ има противоположен $(-x_1,\dots,-x_n)\in F^n$, така че

$$(x_1,\dots,x_n)+(-x_1,\dots,-x_n)=(x_1+(-x_1),\dots,x_n+(-x_n))=(0,\dots,0).$$

Тук използваме определението за събиране на вектори и дефиниционното свойство на противоположния $-x_i\in F$ на елемент $x_i\in F$ на полето $F$.
За произволни $\alpha,\beta\in F$ и $x=(x_1,\dots,x_n)\in F^n$ е в сила дистрибутивен закон над скаларен множител

$$(\alpha+\beta)(x_1,\dots,x_n)=((\alpha+\beta)x_1,\dots,(\alpha+\beta)x_n)=(\alpha x_1+\beta x_1,\dots,\alpha x_n+\beta x_n)=$$
$$=(\alpha x_1,\dots,\alpha x_n)+(\beta x_1,\dots,\beta x_n)=\alpha(x_1,\dots,x_n)+\beta(x_1,\dots,x_n),$$

съгласно дистрибутивните закони за събиране и умножение в $F$, както и определенията за събиране на вектори и умножение на вектор със скалар.
Аналогично, дистрибутивният закон над векторен множител

$$\alpha((x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n))=\alpha(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)=$$
$$=(\alpha(x_1+y_1),\dots,\alpha(x_n+y_n))=(\alpha x_1+\alpha y_1,\dots,\alpha x_n+\alpha y_n)=$$
$$=(\alpha x_1,\dots,\alpha x_n)+(\alpha y_1,\dots,\alpha y_n)=\alpha(x_1,\dots,x_n)+\alpha(y_1,\dots,y_n)$$

следва от дистрибутивните закони за събиране и умножение в $F$ и определенията за събиране на вектори и умножение на вектор със скалар от $F$.
За произволни $\alpha,\beta\in F$ и $x=(x_1,\dots,x_n)\in F^n$ е в сила

$$(\alpha\beta)(x_1,\dots,x_n)=((\alpha\beta)x_1,\dots,(\alpha\beta)x_n)=(\alpha(\beta x_1),\dots,\alpha(\beta x_n))=$$
$$=\alpha(\beta x_1,\dots,\beta x_n)=\alpha(\beta(x_1,\dots,x_n))$$

съгласно асоциативността на умножението в $F$ и определението за умножение на вектор с елемент на $F$.
Накрая,

$$1(x_1,\dots,x_n)=(1.x_1,\dots,1.x_n)=(x_1,\dots,x_n)$$

се получава от определението за умножение на вектор със скалар и дефиниционното свойство на единицата $1\in F$.

□

В частност, $\mathbb{R}^3$ е линейно пространство над полето $\mathbb{R}$ на реалните числа относно покомпонентно определените операции събиране на вектори

$$x+y=(x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3)\quad \text{за}\quad x,y\in\mathbb{R}^3$$

и умножение на вектор с реално число

$$\alpha x=\alpha(x_1,x_2,x_3)=(\alpha x_1,\ \alpha x_2,\ \alpha x_3)\quad \text{за}\quad \alpha\in\mathbb{R},\quad x\in\mathbb{R}^3.$$

Аналогично, $\mathbb{R}^2$ е линейно пространство над $\mathbb{R}$ относно покомпонентно определените събиране на вектори

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

и умножение на вектор с реално число

$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2).$$

Пример 2.3. *Ако $F$ е поле, то множеството*

$$F[x]^{(\leq n-1)} := \left\{ f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} \,\middle|\, a_i \in F \right\}$$

*на полиномите на $x$ от степен $\leq n-1$ с коефициенти от $F$ е линейно пространство над $F$ относно обичайните операции събиране*

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i := \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i) x^i$$

*на полиноми и умножение*

$$\lambda \left( \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \right) := \sum_{i=0}^{n-1} (\lambda a_i) x^i.$$

*на полином с $\lambda \in F$.*

Доказателство. За да проверим, че $F[x]^{(\leq n-1)}$ е достатъчно да забележим, че съответствието

$$\Phi : F[x]^{(\leq n-1)} \longrightarrow F^n,$$

$$\Phi \left( \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \right) := (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}), \quad \forall \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \in F[x]^{(\leq n-1)}$$

е взаимно еднозначно и съгласувано с операциите събиране на вектори и умножение на вектор с $\lambda \in F$. Последното означава, че за произволни полиноми

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i \in F[x]^{\leq n-1} \quad \text{и} \quad \lambda \in F$$

е в сила

$$\Phi(f(x) + g(x)) = \Phi \left( \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i) x^i \right) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots, a_{n-1} + b_{n-1}) =$$
$$= (a_0, \ldots, a_{n-1}) + (b_0, \ldots, b_{n-1}) = \Phi(f(x)) + \Phi(g(x)) \quad \text{и}$$

$$\Phi(\lambda f(x)) = \Phi \left( \sum_{i=0}^{n-1} (\lambda a_i) x^i \right) = (\lambda a_0, \ldots, \lambda a_{n-1}) = \lambda(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \lambda \Phi(f(x)).$$

По този начин, аксиомите за линейно пространство в $F[x]^{(\leq n-1)}$ следват от съответните аксиоми в $F^n$.
Сега ще проверим директно аксиомите за линейно пространство в $F[x]^{(\leq n-1)}$. Сумата на $f(x), g(x) \in F[x]^{(\leq n-1)}$ е полином $f(x) + g(x) \in F[x]^{(\leq n-1)}$ на $x$ от степен $\leq n-1$ с коефициенти от $F$, както и произведението $\lambda f(x) \in F[x]^{(\leq n-1)}$ на $\lambda \in F$ и $f(x) \in F[x]^{(\leq n-1)}$. За произволни полиноми

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i, \quad h(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i \in F[x]^{(\leq n-1)}$$

е в сила асоциативният закон за събиране

$$[f(x)+g(x)]+h(x)=\left[\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i+\sum_{i=0}^{n-1}b_ix^i\right]+\sum_{i=0}^{n-1}c_ix^i=\left[\sum_{i=0}^{n-1}(a_i+b_i)x^i\right]+\sum_{i=0}^{n-1}c_ix^i=$$
$$=\sum_{i=0}^{n-1}[(a_i+b_i)+c_i]x^i=\sum_{i=0}^{n-1}[a_i+(b_i+c_i)]x^i=\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i+\left[\sum_{i=0}^{n-1}(b_i+c_i)x^i\right]=$$
$$=\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i+\left[\sum_{i=0}^{n-1}b_ix^i+\sum_{i=0}^{n-1}c_ix^i\right]=f(x)+[g(x)+h(x)],$$

съгласно асоциативността на събирането в $F$ и правилото за събиране на полиноми.
Комутативният закон за събиране

$$f(x)+g(x)=\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i+\sum_{i=0}^{n-1}b_ix^i=\sum_{i=0}^{n-1}(a_i+b_i)x^i=$$
$$=\sum_{i=0}^{n-1}(b_i+a_i)x^i=\sum_{i=0}^{n-1}b_ix^i+\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i=g(x)+f(x)$$

е изпълнен благодарение на комутативността на събирането в $F$ и правилото за събиране на полиноми.
Тъждествено нулевият полином $0\in F[x]^{(\leq n-1)}$ изпълнява равенството

$$f(x)+0=\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i+0=\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i=f(x)$$

за произволен полином $f(x)\in F[x]^{(\leq n-1)}$ съгласно правилото за събиране на полиноми и дефиниционното свойство на $0\in F$, което дава $a_0+0=a_0$.
Всеки полином $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_ix^i\in F[x]^{(\leq n-1)}$ има противоположен

$$-f(x)=\sum_{i=0}^{n-1}(-a_i)x^i\in F[x]^{(\leq n-1)},$$

така че

$$f(x)+(-f(x))=\left(\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i\right)+\left(\sum_{i=0}^{n-1}(-a_i)x^i\right)=\sum_{i=0}^{n-1}[a_i+(-a_i)]x^i=0,$$

възоснова на правилото за събиране на полиноми и дефиниционното свойство на противоположния $-a_i\in F$ на $a_i\in F$ елемент.
За произволни $\lambda,\mu\in F$ и $f(x),g(x)\in F[x]^{(\leq n-1)}$ е в сила дистрибутивният закон

$$(\lambda+\mu)f(x)=(\lambda+\mu)\left(\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i\right)=\sum_{i=0}^{n-1}[(\lambda+\mu)a_i]x^i=\sum_{i=0}^{n-1}[\lambda a_i+\mu a_i]x^i=$$
$$=\sum_{i=0}^{n-1}(\lambda a_i)x^i+\sum_{i=0}^{n-1}(\mu a_i)x^i=\lambda\left(\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i\right)+\mu\left(\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i\right)=\lambda f(x)+\mu f(x)$$

над скаларен множител, както и дистрибутивният закон

$$\lambda[f(x)+g(x)] = \lambda\left[\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i\right] = \lambda\left[\sum_{i=0}^{n-1}(a_i+b_i)x^i\right] =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1}[\lambda(a_i+b_i)]x^i = \sum_{i=0}^{n-1}[\lambda a_i + \lambda b_i]x^i = \sum_{i=0}^{n-1}(\lambda a_i)x^i + \sum_{i=0}^{n-1}(\lambda b_i)x^i =$$
$$= \lambda\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i\right) + \lambda\left(\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i\right) = \lambda f(x) + \lambda g(x)$$

над векторен множител, съгласно дистрибутивните закони за събиране и умножение в $F$ и правилата за събиране на полиноми и умножение на полином с елемент на $F$.
Освен това,

$$(\lambda\mu)f(x) = (\lambda\mu)\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n-1}[(\lambda\mu)a_i]x^i = \sum_{i=0}^{n-1}[\lambda(\mu a_i)]x^i =$$
$$= \lambda\left[\sum_{i=0}^{n-1}(\mu a_i)x^i\right] = \lambda\left[\mu\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i\right)\right] = \lambda(\mu f(x))$$

благодарение на асоциативността на умножението в $F$ и правилото за умножение на полином с елемент на $F$. Накрая,

$$1.f(x) = 1.\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n-1}(1.a_i)x^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = f(x)$$

възоснова на правилото за умножение на полином с елемент на $F$ и дефиниционното равенство на единицата $1 \in F$ на $F$.

$\square$

Множеството $F[x]$ на всички полиноми $f(x)$ на $x$ с коефициенти от $F$ е линейно пространство над $F$ относно обичайните операции събиране на полиноми и умножение на полином с коефициенти от $F$ с $\lambda \in F$. Преди всичко, множеството $F[x]$ е затворено относно споменатите операции. Аксиомите за линейно пространство в $F[x]$ следват от съответните аксиоми в $F[x]^{(\leq n-1)}$ за достатъчно голямо $n \in \mathbb{N}$, защото в тези аксиоми участват краен брой полиноми и съществува естествено число $n$, което е по-голямо от степените на всички тези полиноми. Нулевият вектор на $F[x]$ е тъждествено нулевият полином $0 \in F[x]$. Противоположният на полином $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i x^i \in F[x]$ е $-f(x) = \sum\limits_{i=0}^{k}(-a_i)x^i$.
Следващото твърдение извежда някои следствия от аксиомите за линейно пространство.

Твърдение 2.4. *Нека $V$ е линейно пространство над поле $F$. Тогава:*
*(i) нулевият вектор $\overrightarrow{\mathcal{O}}$ на $V$ е единствен;*
*(ii) всеки вектор $u \in V$ има единствен противоположен $-u \in V$ ;*
*(iii) $0u = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ за $0 \in F$, всеки вектор $u \in V$ и нулевия вектор $\overrightarrow{\mathcal{O}} \in V$;*
*(iv) $\alpha\overrightarrow{\mathcal{O}} = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ за всяко $\alpha \in F$ и нулевия вектор $\overrightarrow{\mathcal{O}} \in V$;*
*(v) $(-1)u = -u$ за противоположния $-1 \in F$ на единицата $1 \in F$, произволен вектор $u \in V$ и неговия противоположен $-u \in V$;*
*(vi) за произволни вектори $u, v \in V$ уравнението $u + x = v$ има единствено решение $(-u) + v = v + (-u) \in V$, което бележим с $v - u$;*
*(vii) ако $\alpha u = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ за $\alpha \in F$ и $u \in V$, то $\alpha = 0 \in F$ или $u = \overrightarrow{\mathcal{O}} \in V$;*

Доказателство. (i) Ако $\overrightarrow{\mathcal{O}}_1 \in V$ и $\overrightarrow{\mathcal{O}}_2 \in V$ са нулеви вектори на $V$, то $\overrightarrow{\mathcal{O}}_1 + \overrightarrow{\mathcal{O}}_2 = \overrightarrow{\mathcal{O}}_2$, защото $\overrightarrow{\mathcal{O}}_1 \in V$ е нулев вектор и $\overrightarrow{\mathcal{O}}_1 = \overrightarrow{\mathcal{O}}_1 + \overrightarrow{\mathcal{O}}_2$, защото $\overrightarrow{\mathcal{O}}_2 \in V$ е нулев вектор. Следователно

$$\overrightarrow{\mathcal{O}}_1 = \overrightarrow{\mathcal{O}}_1 + \overrightarrow{\mathcal{O}}_2 = \overrightarrow{\mathcal{O}}_2.$$

(ii) Ако $u \in V$ има противоположни вектори $u_1, u_2 \in V$, то

$$u_2 = \overrightarrow{\mathcal{O}} + u_2 = (u_1 + u) + u_2 = u_1 + (u + u_2) = u_1 + \overrightarrow{\mathcal{O}} = u_1.$$

Горните равенства използват асоциативността на събирането на вектори и определенията за противоположен и нулев вектор.
(iii) Забелязваме, че

$$0.u + u = 0.u + 1.u = (0 + 1)u = 1.u = u,$$

съгласно $1.u = u$, дистрибутивния закон над скаларен множител и дефиниционното свойство на нулата $0 \in F$. Прибавянето на $-u \in V$ към най-лявата и най-дясната страна на горното равенство дава

$$0.u = 0.u + \overrightarrow{\mathcal{O}} = 0.u + [u + (-u)] = (0.u + u) + (-u) = u + (-u) = \overrightarrow{\mathcal{O}}$$

чрез прилагане на асоциативността на събирането на вектори и определенията за противоположен и нулев вектор.
(iv) Една от аксиомите за линейно пространство гласи, че $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$ за произволни $\alpha, \beta \in F$ и $u \in V$. Полагаме $\beta = 0 \in F$ и прилагаме (iii), за да получим

$$\overrightarrow{\mathcal{O}} = 0.u = (\alpha.0)u = \alpha(0.u) = \alpha\overrightarrow{\mathcal{O}}.$$

(v) Пресмятаме, че

$$u + (-1)u = 1.u + (-1).u = [1 + (-1)].u = 0.u = \overrightarrow{\mathcal{O}},$$

съгласно $1.u = u$, дистрибутивния закон над скаларен множител, определението за противоположен $-1 \in F$ на $1 \in F$ и $0.u = \overrightarrow{\mathcal{O}}$. Следователно $(-1)u \in V$ изпълнява дефиниционното равенство $u + (-u) = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ на противоположния вектор $-u \in V$ и $(-1)u = -u$ поради единствеността на противоположния вектор на $u$.
(vi) Векторът $(-u) + v \in V$ е корен на уравнението $u + x = v$, защото

$$u + [(-u) + v] = [u + (-u)] + v = \overrightarrow{\mathcal{O}} + v = v,$$

съгласно асоциативния закон за събиране и определенията за противоположен и нулев вектор. Ако $w \in V$ е корен на $u + x = v$, то почленното прибавяне на $-u \in V$ към $u + w = v$ дава

$$w = \overrightarrow{\mathcal{O}} + w = [(-u) + u] + w = (-u) + (u + w) = (-u) + v$$

след използване на на асоциативността на събирането на вектори и определенията за противоположен и нулев вектор.
(vii) Ако $\alpha u = \overrightarrow{\mathcal{O}}$ и $\alpha \neq 0 \in F$, то от почленното умножение на това равенство с $\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha} \in F$ следва

$$u = 1.u = (\alpha^{-1}\alpha)u = \alpha^{-1}(\alpha u) = \alpha^{-1}\overrightarrow{\mathcal{O}} = \overrightarrow{\mathcal{O}}.$$

Тук прилагаме (iv), аксиомата $(\beta\gamma)u = \beta(\gamma u)$ за произволни $\beta, \gamma \in F$, $u \in V$, дефиниционното равенство за обратния $\alpha^{-1}$ на $\alpha \in F \setminus \{0\}$ в $F$ и $1.u = u$.

□

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. *Ако $a_1, \ldots, a_n$ са вектори от линейно пространство $V$ над поле $F$ и $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in F$, то векторът $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n \in V$ се нарича линейна комбинация на $a_1, \ldots, a_n$ с коефициенти $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. *Непразно подмножество $W$ на линейно пространство $V$ над поле $F$ е подпространство, ако заедно с произволни свои вектори $w_1, \ldots, w_n \in W$ съдържа всички техни линейни комбинации $\alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_n w_n \in W$ с коефициенти $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$.*

ТВЪРДЕНИЕ 2.7. *Непразно подмножество $W$ на линейно пространство $V$ над поле $F$ е подпространство тогава и само тогава, когато за произволни $w_1, w_2 \in W$ и $\alpha \in F$ е в сила $w_1 + w_2 \in W$ и $\alpha w_1 \in W$.*

ДОКАЗАТЕЛСТВО. По определение, $W$ е подпространство на $V$, ако заедно с произволни свои вектори $w_1, \ldots, w_n \in W$ съдържа всички техни линейни комбинации

$$\alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_n w_n \in W$$

с коефициенти $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$. Векторите $w_1 + w_2 = 1.w_1 + 1.w_2$ и $\alpha w_1$ са частни случаи на линейни комбинации на $w_1, w_2 \in W$, така че ако $W$ е подпространство на $V$ и $w_1, w_2 \in W$, то $w_1 + w_2 \in W$ и $\alpha w_1 \in W$.
Да допуснем, че непразно подмножество $W$ на линейно пространство $V$ над поле $F$ е затворено относно събиране на вектори и умножение на вектор с $\alpha \in F$. С индукция по $n \in \mathbb{N}$ ще проверим, че $\alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_n w_n \in W$ за произволни $w_1, \ldots, w_n \in W$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$. В случая $n = 1$ имаме $\alpha_1 w_1 \in W$ по предположение. Да допуснем, че

$$w' := \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_{n-1} w_{n-1} \in W$$

за произволни $w_1, \ldots, w_{n-1} \in W$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in F$. По предположение, $\alpha_n w_n \in W$ за произволни $w_n \in W$ и $\alpha_n \in F$. Следователно $W$ съдържа

$$w' + \alpha_n w_n = \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_{n-1} w_{n-1} + \alpha_n w_n$$

и $W$ е подпространство на $V$.

□

СЛЕДСТВИЕ 2.8. *Ако $W$ е подпространство на линейно пространство $V$ над поле $F$, то:*
*(i) нулевият вектор $\overrightarrow{\mathcal{O}} \in W$ принадлежи на $W$;*
*(ii) произволен вектор $w \in W$ има противоположен $-w \in W$ от $W$.*

Доказателство. (i) За произволен вектор $w \in W$ и $0 \in F$ е в сила

$$\overrightarrow{\mathcal{O}} = 0w \in W,$$

съгласно Твърдение 2.4 (iii) и Твърдение 2.7.
(ii) За произволен вектор $w \in W$ и $-1 \in F$ е изпълнено

$$-w = (-1)w \in W,$$

възоснова на Твърдение 2.4 (v) и Твърдение 2.7.

□

Следствие 2.9. *Непразно подмножество $W$ на линейно пространство $V$ над поле $F$ е подпространство тогава и само тогава, когато $W$ е линейно пространство относно наследените от $V$ операции събиране на вектори и умножение на вектор със скалар.*

Доказателство. Подпространството $W$ е затворено относно събиране на вектори и умножение с $\lambda \in F$ съгласно Твърдение 2.7. От предишното следствие знаем, че нулевият вектор $\overrightarrow{\mathcal{O}} \in W$ и противоположния $-w$ на произволен вектор $w \in W$ е от $W$. Останалите аксиоми за линейно пространство в $W$ следват от съответните аксиоми във $V$. Затова всяко подпространство $W$ на линейно пространство $V$ над поле $F$ е линейно пространство относно наследените от $V$ операции събиране на вектори и умножение на вектор с елемент на $F$.
Ако непразно подмножество $W$ на линейно пространство $V$ над поле $F$ е линейно пространство относно наследените от $F$ опрации събиране на вектори и умножение на вектор с елемент на $F$, то $W$ е затворено относно тези две операции и $W$ е подпространство на $V$, съгласно Твърдение 2.7.

□

Ако $V$ е линейно пространство над поле $F$, то множеството $\{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$, съставено от нулевия вектор $\overrightarrow{\mathcal{O}} \in V$ и самото подпространство $V$ са подпространства на $V$, защото тези подмножества са затворени относно операциите събиране на вектори и умножение на вектор със скалар от $F$.
За произволни естествени числа $k < n$ и произволно поле $F$, подмножеството

$$F^{k,n} := \{(x = (x_1, \ldots, x_n) \in F^n \,|\, x_{k+1} = \ldots = x_n = 0\}$$

на $F^n$ е линейно подпространство. Наистина, ако $x, y \in F^{k,n}$ и $\alpha \in F$, то

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_k + y_k, x_{k+1} + y_{k+1}, \ldots, x_n + y_n) \in F^{k,n} \quad \text{и}$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_k, \alpha x_{k+1}, \ldots, \alpha x_n) \in F^{k,n},$$

защото $x_i + y_i = 0 + 0 = 0$ и $\alpha x_i = \alpha.0 = 0$ за всички $k + 1 \leq i \leq n$.
Пространството $F[x]^{(\leq n-1)}$ на полиномите на $x$ от степен $\leq n-1$ с коефициенти от $F$ е подпространство на пространството $F[x]$ на всички полиноми на $x$ с коефициенти от $F$. (Обяснете защо е вярно последното изречение. )

Определение 2.10. *Линейната обвивка $l(S)$ на непразно подмножество $S$ на линейно пространство $V$ над поле $F$ е множеството*

$$l(S) = \{\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n \,|\, \alpha_i \in F,\, u_i \in S\}$$

*на линейните комбинации на краен брой вектори $u_i$ от $S$ с коефициенти $\alpha_i \in F$.*

Нека $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ е ненулев вектор от пространството $\mathbb{R}^3$ над полето $\mathbb{R}$ на реалните числа. Тогава правата

$$L((0,0,0), u) := \{tu = (tu_1, tu_2, tu_3) \mid t \in \mathbb{R}\} = l(u)$$

през началото $(0,0,0)$ и $u$ е линейната обвивка на $u$. В частност, тази права е успоредна на $u$.
Ако $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ са ненулеви вектори, които не лежат върху една и съща права, то равнината

$$P((0,0,0), u, v) := \{su + tv = (su_1 + tv_1, su_2 + tv_2, su_3 + tv_3) \mid s, t \in \mathbb{R}\} = l(u, v)$$

през $(0,0,0)$, $u$ и $v$ е линейната обвивка на $u$ и $v$. В частност, $u$ и $v$ са успоредни на равнината $P((0,0,0), u, v)$.
Да забележим, че линейната обвивка $l(\overrightarrow{\mathcal{O}}) = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$ на нулевия вектор $\overrightarrow{\mathcal{O}} \in V$ на пространство $V$ над поле $F$ е нулевото пространство, защото

$$\alpha_1 \overrightarrow{\mathcal{O}} + \ldots + \alpha_k \overrightarrow{\mathcal{O}} = \overrightarrow{\mathcal{O}}$$

за произволни $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in F$.

Твърдение 2.11. *Нека $S$ е непразно подмножество на линейно пространство $V$ над поле $F$. Тогава линейната обвивка $l(S)$ на $S$ е подпространство на $V$ и*

$$l(S) = \cap_{W \supseteq S} W$$

*съвпада със сечението на всички подпространства $W$ на $V$, съдържащи $S$. Затова $l(S)$ е минималното подпространство на $V$, съдържащо $S$. В частност, $S = l(S)$ тогава и само тогава, когато $S$ е подпространство на линейното пространство $V$ над $F$.*

Доказателство. Линейната обвивка $l(S)$ на $S$ е подпространство на $V$, защото заедно с произволни свои вектори

$$u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m \quad \text{и} \quad v = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n$$

с $u_i, v_j \in S$, $\alpha_i, \beta_j \in F$ съдържа тяхната сума

$$u + v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m + \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n \in l(S) \quad \text{и}$$

$$\gamma u = \gamma(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m) = (\gamma\alpha_1) u_1 + \ldots + (\gamma\alpha_m) u_m \in l(S)$$

за произволно $\gamma \in F$.
Твърдим, че

$$l(S) = \cap_{W \supseteq S} W$$

е сечението на подпространствата $W$ на $V$, съдържащи $S$. В резултат, $l(S)$ се съдържа във всяко подпространство на $V$, съдържащо $S$ и $l(S)$ е минималното подпространство на $V$, съдържащо $S$. От определението за подпространство $W$ на $V$, за произволни $w_1, \ldots, w_n \in S$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$, предположението $S \subseteq W$ води до $\alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_n w_n \in W$. Това доказва включването $l(S) \subseteq \cap_{W \supseteq S} W$. От друга страна, $S \subseteq l(S)$, защото за произволен вектор $u \in S$ е в сила $u = 1.u \in l(S)$. Следователно $l(S)$ е подпространство на $V$, съдържащо $S$, така че $l(S)$ участва в сечението $\cap_{W \supseteq S} W$ на подпространствата $W$ на $V$, съдържащи $S$ и $l(S) \supseteq \cap_{W \supseteq S} W$. Това доказва

$$l(S) = \cap_{W \supseteq S} W.$$

Ако $S = l(S)$, то $S$ е подпространство на $V$, защото $l(S)$ е подпространство на $V$. Всяко множество $S$ се съдържа в линейната си обвивка $l(S)$. Ако $S$ е подпространство на $V$ и $u_1, \ldots, u_k \in S$, то $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k \in S$ за произволни $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in F$. Това доказва $l(S) \subseteq S$ и $S = l(S)$.

□

В частност, линейната обвивка $l(V) = V$ на пространство $V$ съвпада с $V$, защото $V$ е свое подпространство.

Задача 2.12. *Нека $V$ е линейно пространство над поле $F$ и*

$$a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_m \in V.$$

*Да се докаже, че $a_{n+1}, \ldots, a_m \notin l(a_1, \ldots, a_n)$ тогава и само тогава, когато съществува подпространство $W$ на $V$ с $a_1, \ldots, a_n \in W$ и $a_{n+1}, \ldots, a_m \notin W$.*

Доказателство. Ако $a_{n+1}, \ldots, a_m \notin l(a_1, \ldots, a_n)$, то $W := l(a_1, \ldots, a_n)$ е подпространство, съдържащо $a_1, \ldots, a_n$ и не съдържащо $a_{n+1}, \ldots, a_m$.
Да предположим, че съществува подпространство $W$, съдържащо $a_1, \ldots, a_n$ и не съдържащо $a_{n+1}, \ldots, a_m$. Тогава линейната обвивка $l(a_1, \ldots, a_n)$ на $a_1, \ldots, a_n$ се съдържа в $W$, съгласно Определение 2.6. Сега от $a_j \notin W$ за всяко естествено число $n+1 \leq j \leq m$ следва $a_j \notin l(a_1, \ldots, a_n)$ за всяко $n+1 \leq j \leq m$. Това завършва доказателството.

□