Лекция 14: Интегриране на някои класове ирационални или трансцендентни функции

1 Интеграл от рационална функция на краен брой корени на фиксирана дробно-линейна функция

Навсякъде по-долу с R означаваме рационална функция на съответните аргументи – отново става въпрос за частно на два полинома (може би на повече от една променлива) или, ако предпочитате, за крайна композиция на съответните аргументи и аритметичните действия.

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \cdots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_s}{q_s}}\right) dx =$$
$$= \int R\left(x, \sqrt[q_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1}}, \cdots, \sqrt[q_s]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_s}}\right) dx$$

При тези означения, $p_1, \ldots, p_s \in \mathbb{Z}$, $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{N}$ и освен това $ad - bc \neq 0$. Да си дадем сметка защо искаме $ad - bc \neq 0$. Ако диференцираме дробно-линейната функция, ще получим

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

Следователно при $ad - bc = 0$ дробно-линейната функция е константа, което обезсмисля задачата.

Интегралите от горния вид могат да се пресметнат (по-точно пресмятането им да се сведе до пресмятане на интеграл от рационална функция), ако извършим следната субституция:

$$t = \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\ , \quad \text{където } k = \text{НОК}(q_1, \ldots, q_s)\ .$$

Наистина, да изразим x чрез новата променлива t:

$$t^k = \frac{ax+b}{cx+d} \implies (cx+d)\,t^k = ax+b \implies \left(ct^k - a\right)x = b - dt^k \implies x = \frac{b-dt^k}{ct^k-a}$$

И тъй, x е рационална функция на t. Разбира се, нейната производна е също рационална функкция, но все пак да пресметнем:

$$dx = \mathrm{d}\left(\frac{b-dt^k}{ct^k-a}\right) = \frac{\left(b-dt^k\right)'\left(ct^k-a\right) - \left(b-dt^k\right)\left(ct^k-a\right)'}{\left(ct^k-a\right)^2}\, dt =$$
$$= \frac{-kd\left(t^{k-1}\right)\left(ct^k-a\right) - ck\left(t^{k-1}\right)\left(b-dt^k\right)}{\left(ct^k-a\right)^2}\, dt$$

След извършване на горната субституция, получаваме интеграл от вида:

$$\int R\left(\frac{b-dt^k}{ct^k-a}, t^{\frac{kp_1}{q_1}}, \dots, t^{\frac{kp_s}{q_s}}\right) \frac{k\left(t^{k-1}\right)(ad-bc)}{\left(ct^k-a\right)^2}\, dt = F(t) + C = F\left(\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) + C$$

Само да отбележим, че подинтегралната функция по-горе е рационална функция на t, защото подбрахме k така, че всички степени $\dfrac{kp_i}{q_i}$, $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ са цели числа.

Пример 1.1. Нека с помощта на горната субституция решим следния интеграл:

$$\int \frac{x + \sqrt{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}}{x - \sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}}\, dx = \int \frac{x + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}}{x - \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{2}{3}}}\, dx$$

$\text{НОК}(2, 3) = 6$ и следователно нашето полагане ще бъде:

$$\begin{cases} t^6 = \dfrac{x+1}{x-1} \Rightarrow t = \sqrt[6]{\dfrac{x+1}{x-1}} \\ x = \dfrac{t^6+1}{t^6-1} = 1 + \dfrac{2}{t^6-1} \\ dx = \dfrac{-12t^5}{\left(t^6-1\right)^2}\, dt \end{cases} \Rightarrow \int \frac{1 + \dfrac{2}{t^6-1} + t^3}{1 + \dfrac{2}{t^6-1} - \left(\dfrac{1}{t}\right)^4} \left(\frac{-12t^5}{\left(t^6-1\right)^2}\right) dt$$

Получаваме интеграл от рационална функция. Друг е въпросът, че пресмятането на последния интеграл би било ужасно.

Ето един по-човешки пример.

Пример 1.2.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}} \ , \quad \text{където} \quad a \neq b \ , \quad n \in \mathbb{N} \ .$$

Нека при това действието се развива в интервала $(\max\{a, b\}, +\infty)$. Тогава имаме

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)(x-b)\sqrt[n]{\dfrac{x-a}{x-b}}}$$

Разбира се, правим субституцията

$$t = \sqrt[n]{\frac{x-a}{x-b}} \iff t^n(x-b) = x-a \iff x(t^n-1) = t^n b - a \iff x = \frac{bt^n-a}{t^n-1}$$

Тогава

$$(x-a)(x-b) = \left(\frac{bt^n-a}{t^n-1} - a\right)\left(\frac{bt^n-a}{t^n-1} - b\right) = \frac{bt^n-a-at^n+a}{t^n-1} \cdot \frac{bt^n-a-bt^n+b}{t^n-1} = \frac{(b-a)^2 t^n}{(t^n-1)^2}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{bnt^{n-1}(t^n-1)-(bt^n-a)nt^{n-1}}{(t^n-1)^2}\mathrm{d}t = \frac{(a-b)nt^{n-1}}{(t^n-1)^2}\mathrm{d}t$$

Следователно

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}} = \int \frac{1}{\frac{(b-a)^2t^n}{(t^n-1)^2}\cdot t}\cdot\frac{(a-b)nt^{n-1}}{(t^n-1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{n}{a-b}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2} =$$

$$= -\frac{n}{a-b}\cdot\frac{1}{t}+C = \frac{n}{b-a}\cdot\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}+C$$

2 Диференциален бином

$$\int x^m\left(ax^n+b\right)^p\,dx$$

Тук $m,n,p\in\mathbb{Q}$ и $a,b\neq 0$. Руският математик П. Л. Чебишов е доказал, че горният интеграл е елементарна функция точно в един от трите случая, описани по-долу. В тези случаи е описано и полагането, което свежда пресмятането на съответния интеграл към пресмятането на интеграл от рационална функция.

а) $p\in\mathbb{Z}$. Тази ситуация всъщност попада в предишната рецепта за "интеграли от рационална функция на краен брой корени на фиксирана дробно-линейна функция". Разбира се, извършваме следното полагане:

$$k = \text{НОК(знаменатели на } m \text{ и } n) \Rightarrow x = t^k \text{ и } t = \sqrt[k]{x}$$

Пример 2.1.

$$\int\frac{\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}\,dx$$

Виждаме, че в този пример $m=\frac{1}{2}, n=\frac{1}{3}$ и $p=-2$, т.е. попадаме в първия случай. Извършваме полагане за $k=\text{НОК}(2,3)=6$:

$$\begin{cases} x = t^6 \\ t = \sqrt[6]{x} \\ dx = 6t^5\,dt \end{cases} \Rightarrow \int t^3\left(1+t^2\right)^{-2}\left(6t^5\right)\,dt = 6\int\frac{t^8}{\left(t^2+1\right)^2}\,dt$$

За пресмятането на горния интеграл можете да следвате алгоритъма, а може и веднага да използвате метода за намаляване на степента (24000).

б) $\frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}$. Извършваме следната субституция:

$$k - \text{ знаменател на } p \implies t^k = ax^n+b \text{ или } t=\sqrt[k]{ax+b}$$

Лесно се съобразява, че тогава:

$$x^n = \frac{t^k-b}{a} \Rightarrow x = \sqrt[n]{\frac{t^k-b}{a}} = \left(\frac{t^k-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$dx = \frac{1}{n} \left(\frac{t^k - b}{a} \right)^{\frac{1}{n} - 1} \left(\frac{k}{a} t^{k-1} \right) dt$$

Следователно след полагането получаваме

$$\int x^m \left(ax^n + b \right)^p \, dx = \frac{k}{an} \int \left(\frac{t^k - b}{a} \right)^{\frac{m+1}{n} - 1} t^{kp+k-1} \, dt$$

Подинтегралната функция в последния интеграл е рационална, тъй като както $\frac{m+1}{n} - 1$, така и $kp + k - 1$ са цели числа.

Пример 2.2.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}} \, dx = \int x \left(1 + x^{\frac{2}{3}} \right)^{-\frac{1}{2}} \, dx$$

Тук се вижда, че $m = 1, n = \frac{2}{3}$ и $p = -\frac{1}{2}$, т.е. попадаме във втория случай и ще извършим полагане:

$$t^2 = 1 + x^{\frac{2}{3}} \implies t = \sqrt{1 + x^{\frac{2}{3}}}$$

$$x = \sqrt{\left(t^2 - 1\right)^3}$$

$$dx = 3t\sqrt{t^2 - 1} \, dt$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}} \, dx = \int \sqrt{\left(t^2 - 1\right)^3} \, (t)^{-1} \left(3t\sqrt{t^2 - 1} \right) \, dt = 3 \int \left(t^2 - 1 \right)^2 \, dt =$$

$$= 3 \cdot \frac{t^5}{5} - 6 \cdot \frac{t^3}{3} + 3t + C = \frac{3}{5} \left(1 + x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{5}{2}} - 2 \left(1 + x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} + 3 \left(1 + x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} + C$$

в) $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$. Този случай се свежда към предишния с изнасяне пред скоби:

$$\int x^m \left(ax^n + b \right)^p \, dx = \int x^m \, . \, x^{np} \left(a + bx^{-n} \right)^p \, dx = \int x^{m+np} \left(bx^{-n} + a \right)^p \, dx$$

Наистина, след изнасянето пред скоби се получава отново диференциален бином:

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= m + np \\ n_1 &= -n \\ p_1 &= p \end{aligned} \right\} \Rightarrow \int x^m \left(ax^n + b \right)^p \, dx = \int x^{m_1} \left(bx^{n_1} + a \right)^{p_1} \, dx$$

Тъй като $\frac{m_1+1}{n_1} = \frac{m+np+1}{-n} \in \mathbb{Z}$, за новия диференциален бином е приложим вторият случай. Следователно, за пресмятането на нашия интеграл е достатъчно да извършим субституцията:

$$k \text{ - знаменател на } p \implies t^k = bx^{-n} + a \text{ или } t = \sqrt[k]{bx^{-n} + a}$$

Пример 2.3.
$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = \int x^0 \left(1+x^3\right)^{-\frac{1}{3}}\, dx$$
В този пример имаме $m=0, n=3$ и $p=-\frac{1}{3}$, откъдето $\frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0\in\mathbb{Z}$, т.е. сега сме в третия случай. Извършваме субституция:

$$\begin{cases} t^3 = 1+x^{-3} \implies t=\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^3}} \\ x^{-3}=t^3-1 \implies x=\sqrt[3]{\dfrac{1}{t^3-1}} \\ dx=-t^2\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{t^3-1}\right)^4}\, dt \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = \int x^{-1}\left(1+x^{-3}\right)^{-\frac{1}{3}}\, dx = \int \left(\frac{1}{t^3-1}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{t}\cdot\left(-t^2\right)\left(\frac{1}{t^3-1}\right)^{\frac{4}{3}} dt =$$
$$= -\int \frac{t}{t^3-1}\, dt$$
Пресмятането на последния интеграл не представлява проблем.

3 Субституции на Ойлер

Ойлеровите субституции се използват за привеждане към интеграл от рационална функция на интеграли от вида:
$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\, dx \ \ (a\neq 0)$$
Субституциите на Ойлер са три, в зависимост от определени условия, които се изпълняват или не се изпълняват от коефициентите на квадратния тричлен ax^2+bx+c. Нека ги разгледаме подробно:

а) $ax^2+bx+c=a\left(x-\alpha\right)\left(x-\beta\right)$ за реални корени $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Тогава:
$$\sqrt{ax^2+bx+c}=|x-\alpha|\sqrt{a\left(\frac{x-\beta}{x-\alpha}\right)^2}=|x-\beta|\sqrt{a\left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right)^2}$$
Ако положим $\sqrt{a\left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right)^2}$ или $\sqrt{a\left(\frac{x-\beta}{x-\alpha}\right)^2}$, ще сведем до интегриране на рационални функции. Алтернативен запис на същото полагане е:
$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\left(x-\alpha\right)t \text{ или } \sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\left(x-\beta\right)t$$

Пример 3.1.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-4\right)\left(x-1\right)}}$$

Полагаме например $\sqrt{x^2-5x+4}=(x-1)\,t$ и пресмятаме:

$$\begin{cases} t=\sqrt{\dfrac{x-4}{x-1}} \\ x=\dfrac{t^2-4}{t^2-1} \\ dx=\dfrac{6t}{\left(t^2-1\right)^2}\,dt \end{cases} \Rightarrow \int \frac{6t}{\left(t^2-1\right)^2}\left(t\left[\frac{t^2-4}{t^2-1}-1\right]\right)dt=-18\int\frac{t^2}{\left(t^2-1\right)^3}\,dt$$

Довършете самостоятелно пресмятането на новополучения интеграл.

б) $a>0$ за квадратния тричлен ax^2+bx+c. В този случай се прави полагане:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm x\sqrt{a}$$

Да преобразуваме това равенство, като повдигнем на квадрат двете страни и изразим x чрез t:

$$\begin{gathered} \cancel{ax^2}+bx+c=t^2+\cancel{ax^2}\pm 2tx\sqrt{a}\Rightarrow \\ \Rightarrow\left(b\mp 2t\sqrt{a}\right)x=t^2-c\Rightarrow \\ \Rightarrow x=\frac{t^2-c}{b\mp 2t\sqrt{a}} \end{gathered}$$

Остана само да пресметнем dx:

$$dx=\mathrm{d}\left(\frac{t^2-c}{b\mp 2t\sqrt{a}}\right)=\frac{2t\left(b\mp 2t\sqrt{a}\right)\pm 2\sqrt{a}\left(t^2-c\right)}{\left(b\mp 2t\sqrt{a}\right)^2}\,dt$$

Пример 3.2.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+4}}$$

Очевидно $a=1$ в този пример и можем да направим полагане $t+x\sqrt{1}=\sqrt{x^2-5x+4}$, т.е. последователно изразяваме:

$$\begin{cases} t=\sqrt{x^2-5x+4}-x \\ x=\dfrac{4-t^2}{2t+5} \\ dx=\dfrac{-2\left(t^2+5t+4\right)}{\left(2t+5\right)^2}\,dt \end{cases} \Rightarrow \int\frac{-2\left(t^2+5t+4\right)}{\left(2t+5\right)^2}\left(\frac{1}{t+\frac{4-t^2}{2t+5}}\right)dt$$

След преобразуване на дробта в скобите и изнасяне на (-2) извън интеграла, получаваме:

$$\begin{gathered} -2\int\frac{t^2+5t+4}{\left(2t+5\right)^2}\left(\frac{2t+5}{t^2+5t+4}\right)dt=-2\int\frac{dt}{2t+5}=-\int\frac{\mathrm{d}\left(2t+5\right)}{2t+5}= \\ =-\ln|2t+5|+C=-\ln\left|2\sqrt{x^2-5x+4}-2x+5\right|+C \end{gathered}$$

в) $c > 0$ за квадратния тричлен $ax^2 + bx + c$. Можем да извършим субституция:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$$

След повдигане на квадрат от двете страни на равенството, можем да получим x като израз на t:

$$\begin{gathered} ax^2 + bx + \cancel{c} = x^2t^2 + \cancel{c} \pm 2xt\sqrt{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(a - t^2\right)x^2 + \left(b \mp 2t\sqrt{c}\right)x = 0 \;\big|\; : x \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(a - t^2\right)x = -b \pm 2t\sqrt{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow x = \frac{b \mp 2t\sqrt{c}}{t^2 - a} \end{gathered}$$

Накрая намираме и dx:

$$dx = \mathrm{d}\left(\frac{b \mp 2t\sqrt{c}}{t^2 - a}\right)' = \frac{\mp 2\sqrt{c}\left(t^2 - a\right) - 2t\left(b \mp 2t\sqrt{c}\right)}{\left(t^2 - a\right)^2}\,dt$$

Пример 3.3.

$$\int \frac{\sqrt{3x^2 - 2x + 1} - 1}{\sqrt{3x^2 - 2x + 1} + 1}\,dx$$

Възможно е прилагането на субституцията от б), но освен това $c = 1$ и ще покажем последната разгледана възможност за полагане. Нека $xt - 1 = \sqrt{3x^2 - 2x + 1}$, откъдето имаме:

$$\begin{cases} t = \dfrac{\sqrt{3x^2 - 2x + 1} + 1}{x} \\[2ex] x = \dfrac{2t - 2}{t^2 - 3} \\[2ex] dx = \dfrac{-2t^2 + 4t - 6}{\left(t^2 - 3\right)^2}\,dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3x^2 - 2x + 1} + 1 = xt = t\left(\dfrac{2t - 2}{t^2 - 3}\right) \\[2ex] \sqrt{3x^2 - 2x + 1} - 1 = xt - 2 = t\left(\dfrac{2t - 2}{t^2 - 3}\right) - 2 \end{cases}$$

Сведохме до пресмятането на следния интеграл:

$$\int \frac{2\dfrac{t\left(t - 1\right)}{t^2 - 3} - 2}{2\dfrac{t\left(t - 1\right)}{t^2 - 3}}\left(\frac{-2t^2 + 4t - 6}{\left(t^2 - 3\right)^2}\right)dt = 2\int \frac{t\left(t - 1\right) - \left(t^2 - 3\right)\left(-t^2 + 2t - 3\right)}{t\left(t - 1\right)\left(t^2 - 3\right)^2}\,dt$$

Интегралът от рационална функция може да бъде решен самостоятелно с метода на неопределените коефициенти.

4 Интеграли на трансцедентни функции. Универсална тригонометрична субституция

Преди да разгледаме интеграли от рационални функции с аргументи $\sin x$ и $\cos x$, съвсем накратко ще разпишем обща схема за решаване на интеграли от вида:

$$\int R\left(e^x\right)\,dx$$

При тях използваме, че $\mathrm{d}\left(e^x\right) = e^x\, dx$, откъдето получаваме:

$$\int R\left(e^x\right)\, dx = \int \frac{R\left(e^x\right)}{e^x}\, \mathrm{d}\left(e^x\right) = \left\{ \begin{array}{c} u = e^x \\ du = e^x\, dx \end{array} \right\} \Rightarrow \int \frac{R\left(u\right)}{u}\, du = F\left(u\right) + C = F\left(e^x\right) + C$$

Оттук нататък се съсредоточаваме върху следния тип интеграли:

$$\int R\left(\sin x, \cos x\right)\, dx$$

Такива интеграли винаги могат да бъдат пресметнати (оттам - универсална) в интервала $(-\pi, \pi)$ с помощта на полагането $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ - съобразете, че ако x се мени в интервала $(-\pi, \pi)$, то t се мени в $(-\infty, +\infty)$. Освен това:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \Rightarrow x = 2 \operatorname{arctg} t \text{ и } dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt$$

$$\begin{cases} \sin x = 2 \sin \dfrac{x}{2} \cos \dfrac{x}{2} = 2 \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} \cos^2 \dfrac{x}{2} = 2 \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} \left(\dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \right) = \dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \overset{t = tg\, \frac{x}{2}}{=} \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \cos^2 \dfrac{x}{2} - \sin^2 \dfrac{x}{2} = \cos^2 \dfrac{x}{2} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2} \right) = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \overset{t = tg\, \frac{x}{2}}{=} \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} \end{cases}$$

Получаваме следната връзка:

$$\int R\left(\sin x, \cos x\right)\, dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt$$

Пример 4.1. Ще пресметнем следния интеграл чрез универсална тригонометрична субституция:

$$\int \frac{dx}{2 + \sin x} = \left\{ \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ x = 2 \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt \end{array} \right\} \Rightarrow \int \frac{1}{2 + \frac{2t}{1+t^2}} \left(\frac{2}{1+t^2} \right) dt = \int \frac{dt}{t^2 + t + 1}$$

Новополученият интеграл ще решим с помощта на смяната чрез допълване до точен квадрат. Наистина, нека сега $t = p - \frac{1}{2}$ за нова променлива p (естествено, $dx = dp$):

$$\int \frac{dp}{\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(p - \frac{1}{2}\right) + 1} = \int \frac{dp}{p^2 - \cancel{p} + \frac{1}{4} + \cancel{p} - \frac{1}{2} + 1} = \int \frac{dp}{p^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{4}{3} \int \frac{dp}{1 + \left(\frac{2p}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{2p}{\sqrt{3}}\right)}{1 + \left(\frac{2p}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2p}{\sqrt{3}}\right) + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(t + \frac{1}{2} \right) \right) + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) \right) + C$$

Освен полагането $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ за интервала $(-\pi, \pi)$, понякога е удобно да направим подобни тригонометрични субституции, които водят до по-лесно пресмятане на даден интеграл при определени условия. Нека ги разгледаме накратко (навсякъде по-долу R_1 е рационална функция, получена след субституция от първоначалната R).

I. За подинтегралната функция $R(\sin x, \cos x)$ и допустимите стойности на $\sin x$ и $\cos x$ е изпълнено:

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

Тогава подходяща субституция е:

$$\left\{ \begin{array}{c} t = \cos x \\ x = \arccos t \\ dt = -\sin x \, dx \end{array} \right\} \Rightarrow \int R(\sin x, \cos x) \ dx = -\int R_1(\cos x) \sin x \, dx$$

Внасянето на $\sin x$ под знака на диференциала води до получаването на интеграл от рационална функция, който е по-удобен за пресмятане:

$$-\int R_1(\cos x) \sin x \, dx = \int R_1(\cos x) \ \mathrm{d}(\cos x) = \int R_1(t) \ dt$$

II. За подинтегралната функция $R(\sin x, \cos x)$ и допустимите стойности на $\sin x$ и $\cos x$ е изпълнено:

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

Подходяща в този случай е субституцията:

$$\left\{ \begin{array}{c} t = \sin x \\ x = \arcsin t \\ dt = \cos x \, dx \end{array} \right\} \Rightarrow \int R(\sin x, \cos x) \ dx = \int R_1(\sin x) \cos x \, dx$$

Отново, внасяме $\cos x$ под знака на диференциала и получаваме по-удобен интеграл:

$$\int R_1(\sin x) \cos x \, dx = \int R_1(\sin x) \ \mathrm{d}(\sin x) = \int R_1(t) \ dt$$

III. За подинтегралната функция $R(\sin x, \cos x)$ и допустимите стойности на $\sin x$ и $\cos x$ е изпълнено:

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$$

Следната смяна на променливата е подходяща:

$$\left\{ \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} x \\ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{1}{1+t^2} \, dt \end{array} \right\} \Rightarrow \int R(\sin x, \cos x) \ dx = \int R_1 \left(\sqrt{\frac{t^2}{1+t^2}}, \sqrt{\frac{1}{1+t^2}} \right) \frac{1}{1+t^2} \, dt$$

Тази субституция е удобна за пресмятане на интеграли в интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и отново води до получаването на интеграл от рационална функция. Ще илюстрираме нейната приложимост с пример.

Пример 4.2.

$$\int \frac{\sin^3 x + \cos x}{2 \sin x + \cos x} \, dx$$

Проверяваме дали подинтегралната функция удовлетворява някой от трите случая. За удобство означаваме $u \coloneqq \sin x$ и $v \coloneqq \cos x$.

$$1)\ R(-u,v) = \frac{-u^3+v}{-2u+v} \neq -R(u,v)$$

$$2)\ R(u,-v) = \frac{u^3-v}{2u-v} \neq -R(u,v)$$

$$3)\ R(-u,-v) = \frac{-u^3-v}{-2u-v} = \frac{u^3+v}{2u+v} = R(u,v)$$

Ще направим третата смяна, по-точно:

$$\left\{ \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} x \\ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{1}{1+t^2}\, dt \end{array} \right\} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} \text{ и } \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$$

Ще преобразуваме интеграла като разделим числителя и знаменателя на $\cos x$, който приема положителни стойности в интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, след което изразяваме чрез $\operatorname{tg} x$:

$$\int \frac{\sin^3 x + \cos x}{2\sin x + \cos x}\, dx = \int \frac{\operatorname{tg} x \sin^2 x + 1}{2\operatorname{tg} x + 1}\, dx = \int \frac{\operatorname{tg} x \left(\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right) + 1}{2\operatorname{tg} x + 1}\, dx =$$

$$= \int \frac{\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x + 1}{(2\operatorname{tg} x + 1)(1+\operatorname{tg}^2 x)}\, dx = \int \frac{\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x + 1}{2\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x + 1}\, dx$$

От полагането $\operatorname{tg} x = t$, откъдето получаваме:

$$\int \frac{\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x + 1}{(2\operatorname{tg} x + 1)(1+\operatorname{tg}^2 x)}\, dx \overset{t=tg\,x}{=} \int \frac{t^3+t^2+1}{(2t+1)(1+t^2)} \left(\frac{1}{1+t^2}\right) dt = \int \frac{t^3+t^2+1}{(2t+1)(1+t^2)^2}\, dt$$

Сведохме до интеграл от рационална функция, за който можем да приложим метода на неопределните коефициенти.