Глава 22

Ортогонални и унитарни матрици и оператори.

Определение 22.1. *Казваме, че матрица $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ (съответно, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$) е ортогонална (съответно унитарна), ако $A\overline{A}^t = E_n$.*

Ако

$$A = \begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix}$$

има вектор-редове

$$r_i = (a_{i1}, \dots a_{in}) \in M_{1\times n}(\mathbb{R}), \quad \text{съответно, } r_i = (a_{i1}, \dots a_{in}) \in M_{1\times n}(\mathbb{C}),$$

то

$$E_n = A\overline{A}^t = \begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_i \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix} \left(\overline{r_1}^t, \dots, \overline{r_j}^t, \dots \overline{r_n}^t\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} r_1\overline{r_1}^t & \dots & r_1\overline{r_j}^t & \dots & r_1\overline{r_n}^t \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_i\overline{r_1}^t & \dots & r_i\overline{r_j}^t & \dots & r_i\overline{r_n}^t \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_n\overline{r_1}^t & \dots & r_n\overline{r_j}^t & \dots & r_n\overline{r_n}^t \end{pmatrix} = E_n$$

точно когато $r_1, \dots, r_n$ са координатите на ортонормирана система вектори спрямо ортонормиран базис. Ясно е, че матрица A е ортогонална (унитарна) тогава и само тогава, когато е обратима и $A^{-1} = \overline{A}^t$. Това е равносилно на $\overline{A}^t A = E_n$. Ако $A = (c_1, \dots, c_n)$ има вектор стълбове

$$c_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \dots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}(\mathbb{R}), \quad \text{съответно, } c_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \dots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}(\mathbb{C}),$$

то произведението

$$E_n = \overline{A}^t A = \begin{pmatrix} \overline{c_1}^t \\ \dots \\ \overline{c_i}^t \\ \dots \\ \overline{c_n}^t \end{pmatrix} (c_1, \dots, c_j, \dots, c_n) =$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{c_1}^t c_1 & \dots & \overline{c_1}^t c_j & \dots & \overline{c_1}^t c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{c_i}^t c_1 & \dots & \overline{c_i}^t c_j & \dots & \overline{c_i}^t c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{c_n}^t c_1 & \dots & \overline{c_n}^t c_j & \dots & \overline{c_n}^t c_n \end{pmatrix}$$

има елементи $\overline{c_i}^t c_j \in \mathbb{R}$ или $\overline{c_i}^t c_j \in \mathbb{C}$, за които

$$\overline{c_i}^t c_j = \left(\overline{c_i}^t c_j\right)^t = c_j^t \overline{c_i}.$$

Следователно, A е ортогонална (унитарна) точно когато вектор-стълбовете на A представляват ортонормирана система вектори спрямо ортонормиран базис. Еквивалентно, матрица A е ортогонална (унитарна) тогава и само тогава, когато е матрица на прехода от ортонормиран базис към ортонормиран базис.

Лема 22.2. *(i) Ако $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ (съответно, $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$) са ортогонални (съответно, унитарни) матрици, то произведението $AB \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ (съответно, $AB \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$) е ортогонална (съответно, унитарна) матрица.*
(ii) Ако $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ (съответно, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$) е ортогонална (съответно, унитарна) матрица, то $|\det(A)| = 1$.

Доказателство. (i) От $A\overline{A}^t = E_n$ и $B\overline{B}^t = E_n$ следва

$$(AB)\overline{(AB)}^t = (AB)(\overline{B}^t\overline{A}^t) = A(B\overline{B}^t)\overline{A}^t = AE_n\overline{A}^t = A\overline{A}^t = E_n.$$

Следователно произведението AB на ортогонални (унитарни) матрици A и B от един и същи ред е ортогонална (унитарна) матрица.
(ii) Детерминантата

$$\det(A) = \sum_{i_1,\dots,i_n} (-1)^{[i_1,\dots,i_n]} a_{1i_1}\dots a_{ni_n}$$

на квадратна матрица $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ е полином на елементите $a_{ij} \in \mathbb{C}$ на A. Съгласно $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ и $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$ за произволни комплексни числа $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ имаме

$$\overline{\det(A)} = \overline{\sum_{i_1,\dots,i_n} (-1)^{[i_1,\dots,i_n]} a_{1i_1}\dots a_{ni_n}} = \sum_{i_1,\dots,i_n} (-1)^{[i_1,\dots,i_n]} \overline{a_{1i_1}\dots a_{ni_n}} =$$
$$= \sum_{i_1,\dots,i_n} (-1)^{[i_1,\dots,i_n]} \overline{a_{1i_1}}\dots\overline{a_{ni_n}} = \det(\overline{A})$$

за комплексно спрегнатата матрица $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$.
Прилагаме Теоремата за умножение на детерминанти към $A\overline{A}^t = E_n$ и получаваме

$$1 = \det(E_n) = \det(A\overline{A}^t) = \det(A)\det(\overline{A}^t) =$$
$$= \det(A)\det(\overline{A}) = \det(A)\overline{\det(A)} = |\det(A)|^2.$$

Оттук $|\det(A)| = 1$.

□

Определение 22.3. *Линеен оператор $\varphi : V \to V$ в евклидово (унитарно) пространство V е ортогонален (съответно, унитарен), ако*

$$\langle \varphi(u), \varphi(v)\rangle = \langle u, v\rangle \quad \text{за} \quad \forall u, v \in V.$$

Твърдение 22.4. *Линеен оператор $\varphi : V \to V$ в евклидово пространство V е ортогонален тогава и само тогава, когато запазва дължините на векторите $\forall v \in V$ и ъглите между ненулевите вектори, т.е.*

$$||\varphi(v)|| = ||v|| \quad \text{за} \quad \forall v \in V \quad \text{и}$$

$$\cos \measuredangle(\varphi(u), \varphi(v)) = \cos \measuredangle(u, v) \quad \text{за} \quad \forall u, v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}.$$

Доказателство. Нека $\varphi : V \to V$ е ортогонален (унитарен) оператор в евклидово (унитарно) пространство V. Тогава за всеки вектор $v \in V$ е в сила $\langle \varphi(v), \varphi(v) \rangle = \langle v, v \rangle$, откъдето

$$||\varphi(v)|| = \sqrt{\langle \varphi(v), \varphi(v) \rangle}^{\geq 0} = \sqrt{\langle v, v \rangle}^{\geq 0} = ||v||.$$

За произволни ненулеви вектори $u, v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$, да означим с $\theta \in [0, \pi]$ ъгъла между u и v, а с $\psi \in [0, \pi]$ ъгъла между $\varphi(u)$ и $\varphi(v)$. Тогава

$$\cos(\psi) = \frac{\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle}{||\varphi(u)||||\varphi(v)||} = \frac{\langle u, v \rangle}{||u||||v||} = \cos(\theta),$$

откъдето $\psi = \theta$, защото функцията $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ е обратима. Това доказва, че ортогоналните оператори запазват дължините на векторите и ъглите между ненулеви вектори.
За да докажем, че запазването на дължините на векторите и ъглите между ненулеви вектори е достатъчно за ортогоналност на линеен оператор в евклидово пространство V да забележим, че за произволен линеен оператор $\varphi : V \to V$ е в сила

$$\langle \varphi(\overrightarrow{\mathcal{O}}), \varphi(v) \rangle = \langle \overrightarrow{\mathcal{O}}, \varphi(v) \rangle = 0 = \langle \overrightarrow{\mathcal{O}}, v \rangle$$

за всички $v \in V$ и

$$\langle \varphi(u), \varphi(\overrightarrow{\mathcal{O}}) \rangle = \langle \varphi(u), \overrightarrow{\mathcal{O}} \rangle = 0 = \langle u, \overrightarrow{\mathcal{O}} \rangle$$

за всички $u \in V$. Остава да установим, че ако $\varphi : V \to V$ е линеен оператор, запазващ дължините на векторите и ъглите между ненулевите вектори, то $\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ за вскички $u, v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$. Означаваме с $\psi \in [0, \pi]$ ъгъла между u и v, който по предположение е равен на ъгъла между $\varphi(u)$ и $\varphi(v)$. Тогава

$$\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \cos(\psi)||\varphi(u)||||\varphi(v)|| = \cos(\psi)||u||||v|| = \langle u, v \rangle,$$

съгласно $||\varphi(u)|| = ||u||$ и $||\varphi(v)|| = ||v||$. Това доказва, че ако линеен оператор $\varphi : V \to V$ в евклидово (унитарно) пространство V запазва дължините на векторите и ъглите между ненулевите вектори, то φ е ортогонален (унитарен). $\square$

Твърдение 22.5. *Следните условия са еквивалентни за линеен оператор $\varphi : V \to V$ в n-мерно евклидово (унитарно) пространство V:*
(i) операторът φ е ортогонален (унитарен);
(ii) произволен базис $b_1, \dots, b_n$ на V изпълнява равенствата

$$\langle \varphi(b_i), \varphi(b_j) \rangle = \langle b_i, b_j \rangle \quad \text{за всички} \quad 1 \leq i, j \leq n;$$

(iii) произволен ортонормиран базис $e_1, \dots, e_n$ на V изпълнява равенствата

$$\langle \varphi(e_i), \varphi(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{за всички } 1 \leq i = j \leq n, \\ 0 & \text{за всички } 1 \leq i \neq j \leq n, \end{cases}$$

т.е. φ трансформира произволен ортонормиран базис $e_1, \dots, e_n$ на V в ортонормиран базис $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ на V;
(iv) матрицата A на φ спрямо ортонормиран базис $e_1, \dots, e_n$ на V е ортогонална (унитарна).
В частност, всеки ортогонален (унитарен) оператор $\varphi : V \to V$ в крайномерно евклидово (унитарно) пространство V е обратим.

Доказателство. Ясно е, че $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$.
За еквивалентността на (iv) и (iii), нека $e_1, \dots, e_n$ е ортонормиран базис на V и A е матрицата на $\varphi : V \to V$ спрямо този базис. В такъв случай, A е ортогонална (унитарна) тогава и само тогава, когато вектор-стълбовете на A образуват ортонормирана система вектори, зададени с координатите си спрямо ортонормиран базис. По определение, матрицата A на $\varphi : V \to V$ спрямо базиса $e_1, \dots, e_n$ на V е състои по стълбове от координатите на $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ спрямо ортонормирания базис $e_1, \dots, e_n$. Затова A е ортогонална (унитарна) тогава и само тогава, когато φ трансформира ортонормиран базис $e_1, \dots, e_n$ на V в ортонормирана система вектори $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ от n-мерното пространство V. Това е в сила точно когато $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ е ортонормиран базис на V.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Ако линеен оператор $\varphi : V \to V$ трансформира ортонормиран базис $e_1, \dots, e_n$ на V в ортонормиран базис $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ на V, то за произволни вектори $u = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ и $v = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j$ от V с $x_i, y_j \in \mathbb{R}$ или $x_i, y_j \in \mathbb{C}$ е в сила

$$\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle \varphi \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right), \varphi \left(\sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right) \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i), \sum_{j=1}^{n} y_j \varphi(e_j) \rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y_j} \langle \varphi(e_i), \varphi(e_j) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y_j} \langle e_i, e_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \rangle = \langle u, v \rangle,$$

съгласно линейността на φ, Следствие 20.3 (г) и

$$\langle \varphi(e_i), \varphi(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{за } 1 \leq i = j \leq n, \\ 0 & \text{за } 1 \leq i \neq j \leq n. \end{cases}$$

Следователно $\varphi : V \to V$ е ортогонален (унитарен) оператор.
В частност, ако $\varphi : V \to V$ е ортогонален (унитарен) оператор в крайномерно евклидово (унитарно) пространство V, то матрицата A на φ спрямо ортонормиран базис $e_1, \dots, e_n$ е ортогонална (унитарна). Следователно A е обратима, откъдето и операторът $\varphi : V \to V$ е обратим, съгласно Твърдение 18.8.

□

Еднаквостите в евклидово пространство V се определят като изображенията $f : V \to V$, запазващи дължините на векторите и ъглите между ненулеви вектори. Твърдение 22.4 показва, че ортогоналните оператори $\varphi : V \to V$ са точно еднаквостите, които са линейни изображения. От Твърдение 22.5 следва, че линейните еднаквости $\varphi : V \to V$ са взаимно еднозначни изображения.

Твърдение 22.6. *Ако $\varphi : V \to V$ е ортогонален (унитарен) оператор в евклидово (унитарно) пространство V, то:*
(i) собствените стойности $\lambda \in \mathbb{C}$ на φ са с модул $|\lambda| = 1$;
(ii) собствени вектори u, v на φ, отговарящи на различни собствени стойности $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ са ортогонални.

Доказателство. (i) Съгласно определението за ортогонален (унитарен) оператор φ, приложено към собствен вектор $v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$ на φ, отговарящ на собствена стойност λ имаме

$$|\lambda|^2 ||v||^2 = \lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \langle \varphi(v), \varphi(v)\rangle = \langle v, v\rangle = ||v||^2.$$

Следователно $(|\lambda|^2 - 1)||v||^2 = |\lambda|^2||v||^2 - ||v||^2 = 0$ с $||v||^2 \in \mathbb{R}^{>0}$, откъдето $|\lambda|^2 = 1$ и $|\lambda| = 1$.
(ii) Определението за ортогонален (унитарен) оператор φ, приложено към u и v дава

$$\lambda\overline{\mu}\langle u, v\rangle = \langle \lambda u, \mu v\rangle = \langle \varphi(u), \varphi(v)\rangle = \langle u, v\rangle.$$

Следователно $(\lambda\overline{\mu} - 1)\langle u, v\rangle = 0$ с $\lambda\overline{\mu} \neq \mu\overline{\mu} = 1$ изисква $\langle u, v\rangle = 0$ и собствените вектори u, v на φ, отговарящи на различни собствени стойности λ, μ са ортогонални.

□

Твърдение 22.7. *Нека $\varphi : V \to V$ е ортогонален (унитарен) оператор в евклидово (унитарно) пространство V, а U е крайномерно φ-инвариантно подпространство на V. Тогава ортогоналното допълнение $U^\perp$ на U е φ-инвариантно подпространство на V.*
В частност, ако $\dim(V) = n$ и $e_1, \ldots, e_k$ е ортонормиран базис на U, то $\dim(U^\perp) = n-k$. Произволен ортонормиран базис $e_{k+1}, \ldots, e_n$ на $U^\perp$ задава ортонормиран базис $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ на V, в който матрицата на φ е

$$\begin{pmatrix} A_1 & \mathbb{O}_{k\times(n-k)} \\ \mathbb{O}_{(n-k)\times k} & A_2 \end{pmatrix},$$

за матрицата A_1 на $\varphi : U \to U$ спрямо базиса $e_1, \ldots, e_k$ и за матрицата A_2 на $\varphi : U^\perp \to U^\perp$ спрямо базиса $e_{k+1}, \ldots, e_n$ на $U^\perp$.

Доказателство. За произволен вектор $v \in U^\perp$ твърдим, че $\varphi(v) \in U^\perp$. Съгласно Твърдение 22.5, операторът $\varphi : U \to U$ е обратим. Следователно за всеки вектор $u \in U$ съществува еднозначно определен вектор $u_1 := \varphi^{-1}(u) \in U$, така че $\varphi(u_1) = u$. В резултат,

$$\langle u, \varphi(v)\rangle = \langle \varphi(u_1), \varphi(v)\rangle = \langle u_1, v\rangle = 0,$$

поради ортогоналността (унитарността) на $\varphi : V \to V$. Това доказва, че $\varphi(v)$ принадлежи на $U^\perp$ и подпространството $U^\perp$ е φ-инвариантно.
Ако V е с размерност $\dim(V) = n$, то $V = U \oplus U^\perp$ съгласно Твърдение 21.6 (i). В резултат, $\dim(U^\perp) = \dim(V) - \dim(U) = n-k$ и произволен ортонормиран базис

$e_{k+1}, \dots, e_n$ на $U^\perp$ задава базис $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ на V по Твърдение 6.7 (ii). Базисът $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ е ортонормиран, защото по предположение

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{за всички } 1 \leq i = j \leq k \text{ и всички } k+1 \leq i = j \leq n, \\ 0 & \text{за всички } 1 \leq i \neq j \leq k \text{ и всички } k+1 \leq i \neq j \leq n, \end{cases}$$

а от $e_1, \dots, e_k \in U$ и $e_{k+1}, \dots, e_n \in U^\perp$ следва

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0 \quad \text{за всички} \quad 1 \leq i \leq k \quad \text{и} \quad k+1 \leq j \leq n.$$

Инвариантността на U и $U^\perp$ относно φ обяснява вида на матрицата на φ спрямо базиса $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ на V.

□

Твърдение 22.8. *За произволен унитарен оператор $\varphi : V \to V$ в n-мерно унитарно пространство V съществува ортонормиран базис на V, в който матрицата D на φ е диагонална.*

Доказателство. С индукция по $\dim V = n$, за $\dim V = 1$ всяка матрица $A \in \mathbb{C}$ на φ се счита за диагонална. В общия случай, линейният оператор φ в крайномерно пространство V над $\mathbb{C}$ има 1-мерно φ-инвариантно подпространство $U = l(v)$, породено от собствен вектор $v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$ на φ. Ортогоналното допълнение $U^\perp$ на U е $(n-1)$-мерно φ-инвариантно подпространство. По индукционно предположение съществува ортонормиран базис $e_2, \dots, e_n$ на $U^\perp$, в който матрицата

$$D' = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

на $\varphi : U^\perp \to U^\perp$ е диагонална. Ако

$$e_1 := \frac{1}{||v||} v \in U,$$

то $e_1, e_2, \dots, e_n$ е ортонормиран базис на V. Матрицата на $\varphi : V \to V$ спрямо базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ е

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbb{O}_{1\times(n-1)} \\ \mathbb{O}_{(n-1)\times 1} & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

където $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ е собствената стойност на v и на e_1.

□

Следствие 22.9. *За произволна унитарна матрица $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ съществува унитарна матрица $T \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, така че $D = T^{-1}AT = \overline{T}^t AT$ е диагонална.*

Доказателство. Избираме ортонормиран базис $f = (f_1, \dots, f_n)$ на унитарно пространство V и разглеждаме оператора $\varphi : V \to V$ с матрица A спрямо базиса f. Съгласно Твърдение 22.5, φ е унитарен оператор. Прилагаме Твърдение 22.8 и получаваме съществуването на ортонормиран базис

$e = (e_1, \dots, e_n)$ на V, който матрицата D на φ е диагонална. Матрицата на прехода $T \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ от ортонормирания базис $f = (f_1, \dots, f_n)$ на V към ортонормирания базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ е унитарна и $D = T^{-1}AT = \overline{T}^t AT$.

□

Твърдение 22.10. *(i) Всяка ротация $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ на ъгъл $\alpha \in \mathbb{R}$ с център $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ е линеен оператор с матрица*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

спрямо ортонормиран базис e_1, e_2 на $\mathbb{R}^2$, за който ориентираният ъгъл от e_1 до e_2 е $\frac{\pi}{2}$. В частност, всяка ротация ρ на ъгъл α е ортогонален линеен оператор. Операторът ρ няма реален характеристичен корен тогава и само тогава, когато $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

.

(ii) Всеки ортогонален оператор $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ без реален характеристичен корен е ротация на ъгъл $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ в $\mathbb{R}^2$ с матрица

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

спрямо произволен ортонормиран базис e_1, e_2 на $\mathbb{R}^2$.

Доказателство. (i) Да отъждествим $\mathbb{R}^2$ с комплексната равнина $\mathbb{C}$ и да напомним, че всяко ненулево комплексно число може да се представи в тригонометричен вид $x = r(\cos\psi + i\sin\psi)$, където модулът $r \in \mathbb{R}^{>0}$ е разстоянието от началото $0 \in \mathbb{C}$ до края на радиус-вектора на x, а аргументът $\psi \in \mathbb{R}$ е насоченият ъгъл от положителната реална полуос Ox до радиус-вектора на x. Ротацията $\rho : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ с център $0 \in \mathbb{C}$ на ъгъл $\alpha \in \mathbb{R}$ прибавя α към аргумента ψ на x, т.е.

$$\rho(x) = r[\cos(\psi+\alpha) + i\sin(\psi+\alpha)] = (\cos\alpha + i\sin\alpha)[(\cos\psi + i\sin\psi)].$$

Ако $\zeta := \cos\alpha + i\sin\alpha$, то $\rho(x) = \zeta x$ за всяко $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ротацията ρ фиксира началото 0, така че $\rho(0) = 0 = \zeta.0$ и равенството $\rho(x) = \zeta x$ е в сила за всяко $x \in \mathbb{C}$. Непосредствено проверяваме, че

$$\rho(x+y) = \zeta(x+y) = \zeta x + \zeta y = \rho(x) + \rho(y) \quad \text{и} \quad \rho(sx) = \zeta(sx) = s(\zeta x) = s\rho(x)$$

за всички $x, y \in \mathbb{C}$ и $s \in \mathbb{R}$. По Твърдение 15.2, $\rho : \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ е линеен оператор в $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, разгледано като двумерно линейно пространство над полето $\mathbb{R}$ на реалните числа,

Избираме положителната реална полуос по протежение на вектора e_1, така че краят на e_1 да е в точката $1 \in \mathbb{C}$ и $e_1 = 1$. Тогава

$$e_2 = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) e_1 = i \quad \text{и}$$

$$\rho(e_1) = \rho(1) = \zeta.1 = \zeta = \cos\alpha + i\sin\alpha = \cos\alpha e_1 + \sin\alpha e_2,$$

$$\rho(e_2) = \rho(i) = \zeta i = (\cos\alpha + i\sin\alpha)i = -\sin\alpha + i\cos\alpha = -\sin\alpha e_1 + \cos\alpha e_2.$$

Матрицата $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ на $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ спрямо базиса $e_1 = 1, e_2 = i$ на $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ се състои по стълбове от координатите на $\rho(e_1)$ и $\rho(e_2)$ относно e_1, e_2. Затова

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Матрицата $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ е ортогонална, защото

$$AA^t = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

съгласно $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$. По Твърдение 22.5, линейният оператор $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ е ортогонален, щом матрицата му A спрямо ортонормиран базис e_1, e_2 е ортогонална.
Характеристичният полином на ρ е квадратният тричлен

$$f_\rho(x) = f_A(x) = \begin{vmatrix} \cos\alpha - x & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - x \end{vmatrix} = x^2 - 2\cos\alpha x + 1$$

с дискриминанта

$$D(f_\rho(x)) = 4\cos^2(\alpha) - 4 = -4\sin^2(\alpha).$$

Оттук, $f_\rho(x) = 0$ няма реален корен тогава и само тогава, когато дискриминантата му $D(f_\rho(x)) = -4\sin^2(\alpha) < 0$ е отрицателна. Това е в сила точно когато $\sin(\alpha) \neq 0$, което е еквивалентно на $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.
(ii) Нека $e = (e_1, e_2)$ е ортонормиран базис на $\mathbb{R}^2$ и

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

е матрицата на ортогонален оператор $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ спрямо e. Тогава A е ортогонална матрица, чийто характеристичен полином

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} a - x & b \\ c & d - x \end{vmatrix} = (a - x)(d - x) - bc = x^2 - (a + d)x + \det(A) \in \mathbb{R}[x]$$

няма реален корен. Ортогоналната матрица A изпълнява равенството $AA^t = E_2$, така че $1 = \det(E_2) = (\det(A))^2$, откъдето $\det(A) = \pm 1$. Отрицателността на дискриминантата

$$D(f_A(x)) = (a + d)^2 - 4\det(A) < 0$$

изисква $\det(A) > 0$ и уточнява, че $\det(A) = 1$. Условието за ортогоналност $AA^t = E_2$ е еквивалентно на $A^{-1} = A^t$. Следователно

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = A^{-1} = A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

откъдето $d = a$ и $b = -c$. Матрицата

$$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$$

е ортогонална точно когато стълбовете на A задават ортонормирана система вектори спрямо ортонормиран базис на $\mathbb{R}^2$. В частност, първият стълб е съставен от координатите на единичен вектор спрямо ортонормиран базис, така че $a^2 + c^2 = 1$. Следователно $(a, c) \in \mathbb{R}^2$ са координати на точка от единичната окръжност

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}.$$

Ако радиус-векторът на (a, c) образува ъгъл α с $Ox^{\rightarrow}$, то $a = \cos(\alpha)$, $c = \sin(\alpha)$ и

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

□

Твърдение 22.11. *За произволен ортогонален оператор $\varphi : V \to V$ в n-мерно евклидово пространство V съществува ортонормиран базис на V, в който матрицата на φ е блочно-диагонална*

$$D = \left(\begin{array}{ccccc} D_1 & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & D_2 & \dots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & D_{k-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & D_k \end{array} \right) \quad \text{с}$$

$$D_i = \pm 1 \quad \text{или} \quad D_i = \left(\begin{array}{cc} \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) \\ \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) \end{array} \right) \quad \text{за} \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}.$$

Доказателство. С индукция по $n = \dim V$, за $\dim V = 1$ няма какво да се доказва. В общия случай, линейният оператор $\varphi : V \to V$ в n-мерно пространство V над $\mathbb{R}$ има 1-мерно или 2-мерно φ-инвариантно подпространство $U \subset V$ съгласно Твърдение 19.13. По-точно, ако $\varphi : V \to V$ има реален характеристичен корен $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, то $\lambda_1 = \pm 1$ е собствена стойност на φ и съществува единичен собствен вектор e_1 на φ, отговарящ на собствената стойност λ_1, който поражда 1-мерно φ-инвариантно подпространство $U = l(e_1)$. Ако всички характеристични корени на $\varphi : V \to V$ са комплексни нереални числа, то φ има 2-мерно φ-инвариантно подпространство U. Операторът $\varphi : U \to U$ няма реален характеристичен корен и матрицата на $\varphi : U \to U$ спрямо произволен ортонормиран базис e_1, e_2 на U е

$$\left(\begin{array}{cc} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{array} \right) \quad \text{за някое} \quad \alpha_1 \in [0, 2\pi)$$

съгласно Твърдение 22.10 (ii). Горните разсъждения показват, че ако с $k := \dim(U) \in \{1, 2\}$ сме означили размерността на φ-инвариантното подпространство U, то матрицата $D_1 \in M_{k\times k}(\mathbb{R})$ на $\varphi : U \to U$ спрямо ортонормиран базис $e_1, \dots, e_k$ на U е блок. Ортогоналното допълнение $U^\perp$ на U е φ-инвариантно подпространство на V с размерност $\dim U^\perp = \dim V - \dim U = n - k < n$. По индукционно предположение съществува ортонормиран базис $e_{k+1}, \dots, e_n$ на V, в който матрицата на $\varphi : U^\perp \to U^\perp$ е блочно-диагонална

$$D' = \left(\begin{array}{cccc} D_2 & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & D_3 & \dots & \mathbb{O} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & D_k \end{array} \right).$$

Обединението на ортонормиран базис $e_1, \dots, e_k$ на U с ортонормиран базис $e_{k+1}, \dots, e_n$ на $U^\perp$ е ортонормиран базис на V, в който матрицата

$$D = \left(\begin{array}{cc} D_1 & \mathbb{O}_{k\times(n-k)} \\ \mathbb{O}_{(n-k)\times k} & D' \end{array} \right)$$

на φ е блочно-диагонална.

$\square$

Нека ортогоналният оператор $\varphi : V \to V$ има блочно-диагонална матрица

$$D = \left(\begin{array}{ccccc} D_1 & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & D_2 & \dots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & D_{k-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & D_k \end{array} \right)$$

спрямо ортонормиран базис $e_1, \dots, e_n$ на V. Съгласно разлагането

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & E_{r_2} & \dots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & E_{r_{k-1}} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & E_{r_k} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} E_{r_1} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & E_{r_2} & \dots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & E_{r_{k-1}} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & D_k \end{pmatrix}$$

в произведение на блочно-диагонални матрици с единствени нетривиални блокове, операторът $\varphi = \varphi_k \dots \varphi_1$ е композиция на отражения φ_i относно $(n-1)$-мерни подпространства $U = l(e_1, \dots, e_{s-1}, e_{s+1}, \dots, e_n)$ с матрици

$$\begin{pmatrix} E_{s-1} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & E_{n-s} \end{pmatrix}$$

спрямо базиса $e_1, \dots, e_n$ или на ротации φ_i на ъгли $\alpha_i \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ в 2-мерни подпространства $l(e_{s-1}, e_s)$ с $(n-2)$-мерни оси $U' = l(e_1, \dots, e_{s-2}, e_{s+1}, \dots, e_n)$ с матрици

$$\begin{pmatrix} E_{s-1} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & E_{n-s-1} \end{pmatrix}$$

спрямо базиса $e_1, \dots, e_n$.

В частност, за линейните еднаквости в $\mathbb{R}^2$ или за ортогоналните оператори $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ с блочно-диагонална матрица $D \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ спрямо подходящ ортонормиран базис $e = (e_1, e_2)$ на $\mathbb{R}^2$ има следните възможности:

(I) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ има реален характеристичен корен, откъдето характеристичният полином на φ от степен 2 има два реални характеристични и D е диагонална матрица.

$$(\mathrm{I}.1) \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

и $\varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ е тъждественият линеен оператор.

$$(\mathrm{I}.2) \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ е осева симетрия относно $l(e_1)$.

$$(\mathrm{I}.3) \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ е централна симетрия относно началото $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

(II) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ няма реален характеристичен корен,

$$D = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

за $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ и $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ е ротация на ъгъл α с център $(0,0)$.

За линейните еднаквости в $\mathbb{R}^3$ или за ортогоналните оператори $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ с блочно-диагонална матрица $D \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ спрямо подходящ ортонормиран базис $e = (e_1, e_2, e_3)$ на $\mathbb{R}^3$ има следните възможности:

(I) D е диагонална:

$$(\mathrm{I}.1) \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$$

и $\varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ е тъждественият линеен оператор.

$$\text{(I.2)}\quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ е симетрия относно равнината $l(e_1, e_2)$.

$$\text{(I.3)}\quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ е симетрия относно правата $l(e_1)$.

$$\text{(I.4)}\quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ е централна симетрия относно началото $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$.
(II) D не е диагонална, т.е. D има блок с размер 2 :

$$\text{(II.1)}\quad D = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ е ротация на ъгъл $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ с ос $l(e_3)$.

$$\text{(II.2)}\quad D = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ е композиция на симетрия относно равнината $l(e_1, e_2)$ и ротация на ъгъл $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ с ос $l(e_3)$.

Следствие 22.12. *За произволна ортогонална матрица $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ съществува ортогонална матрица $T \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, така че*

$$D = T^{-1}AT = \overline{T}^t AT = \begin{pmatrix} D_1 & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & D_2 & \dots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & D_{k-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & D_k \end{pmatrix}$$

е блочно-диагонална с

$$D_i = \pm 1 \quad \text{или} \quad D_i = \begin{pmatrix} \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i \\ \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{pmatrix} \quad \text{за} \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}.$$

Доказателство. Избираме ортонормиран базис $f = (f_1, \dots, f_n)$ на n-мерно евклидово пространство V и разглеждаме оператора $\varphi : V \to V$ с матрица A спрямо e. Тогава φ е ортогонален оператор съгласно Твърдение 22.5. По Твърдение 22.11 съществува ортонормиран базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ на V, в който матрицата на $\varphi : V \to V$ е блочно-диагонална

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & D_2 & \dots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & D_{k-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & D_k \end{pmatrix}.$$

Матрицата на прехода $T \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ от ортонормирания базис $f = (f_1, \dots, f_n)$ към ортонормирания базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ е ортогонална и $D = T^{-1}AT = \overline{T}^t AT$.

$\square$

Задача 22.13. *Спрямо ортонормиран базис на евклидово пространство V линейният оператор $\varphi : V \to V$ има матрица*

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Да се докаже, че φ е ортогонален оператор. Да се намери ортонормиран базис на V, в който матрицата D на φ е блочно-диагонална, както и тази матрица D.

Решение: Операторът $\varphi : V \to V$ е ортогонален тогава и само тогава, когато матрицата му A спрямо ортонормиран базис е ортогонална. Съгласно

$$AA^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = E_3,$$

матрицата A е ортогонална. Това доказва ортогоналността на оператора φ. За да намерим базис на V, в който матрицата D на φ е блочно-диагонална, започваме с пресмятане на характеристичния полином

$$f_\varphi(x) = \det(A - xE_3) = \det\left(\frac{1}{3}(3A - 3xE_3)\right) = \frac{1}{3^3}\begin{vmatrix} 2-3x & -1 & 2 \\ 2 & 2-3x & -1 \\ -1 & 2 & 2-3x \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 2-3x & -1 & 2 \\ 9x^2-12x+6 & 0 & 3-6x \\ 3-6x & 0 & 6-3x \end{vmatrix} = \frac{1}{27}(-1)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix} 9x^2-12x+6 & 3-6x \\ 3-6x & 6-3x \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{27}\left[(9x^2-12x+6)(6-3x) - (3-6x)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{27}[54x^2 - 72x + 36 - 27x^3 + 36x^2 - 18x - 9 + 36x - 36x^2] =$$

$$= \frac{1}{27}(-27x^3 + 54x^2 - 54x + 27) = -x^3 + 2x^2 - 2x + 1 =$$

$$= -(x^3-1) - (-2x)(x-1) = -(x-1)(x^2+x+1-2x) =$$

$$= -(x-1)(x^2-x+1)$$

чрез умножение на първия ред по $2-3x$ и прибавяне към втория ред, прибавяне на удвоения първи ред към втория и развитие по втори стълб. Оттук получаваме, че $\lambda_1 = 1$ е характеристичен корен на φ. Другите два характеристични корена на корените на квадратното уравнение $x^2 - x + 1 = 0$, т.е.

$$\lambda_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}.$$

Собствените вектори, отговарящи на собствената стойност $\lambda_1 = 1$ са ненулевите решения на хомогенната система линейни уравнения с матрица от коефициенти $A - \lambda_1 E_3 = A - E_3$ или

$$3(A - E_3) = 3A - 3E_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Удвояваме първия ред и го прибавяме към втория. Изваждаме първия ред от третия и свеждаме към

$$\left(\begin{array}{rrr} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right).$$

Изпускаме третия поради неговата пропорционалност с втория. Делим втория ред на 3, изваждаме така получения втори ред от първия и получаваме

$$\left(\begin{array}{rrr} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Решаваната хомогенна система линейни уравнения има общо решение

$$x_1 = x_3, \quad x_2 = x_3 \quad \text{за произволно} \quad x_3 \in \mathbb{R}.$$

Векторът

$$v_1 = (1,1,1)^t$$

е базис на нейното пространство от решения, а оттам и собствен вектор на φ, отговарящ на собствената стойност $\lambda_1 = 1$. Оттук,

$$e_1 := \frac{v_1}{||v||} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^t$$

е единичен собствен вектор, отговарящ на собствената стойност $\lambda_1 = 1$.
Да напомним, че матрицата A на φ спрямо първоначално дадения ортонормиран базис $f = (f_1, f_2, f_3)$ моделира действието на $\varphi : V \to V$ чрез ляво умножение на координатните стълбове $x \in M_{3\times 1}(\mathbb{R})$ на векторите $v = fx \in V$. Разглеждаме оператора

$$\varphi_o^{\mathbb{C}} : M_{3\times 1}(\mathbb{C}) \longrightarrow M_{3\times 1}(\mathbb{C}),$$

$$\varphi_o^{\mathbb{C}}(w) = Aw. \ \ \forall w \in M_{3\times 1}(\mathbb{C})$$

с матрица A спрямо стандартния базис

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right), \ \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right), \ \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right)$$

на $M_{3\times 1}(\mathbb{C})$. Той има характеристични корени $\lambda_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \in \mathbb{C}$ от полето на комплексните числа, а оттам и собствени стойности $\lambda_{2,3}$. Собствените вектори на $\varphi_o^{\mathbb{C}}$, отговарящи на собствената стойност $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ са ненулевите решения на хомогенната система линейни уравнения с матрица от коефициенти $A - \lambda_2 E_3$ или

$$6(A - \lambda_2 E_3) = 2(3A) - (3 + 3\sqrt{3}i)E_3 =$$

$$= \left(\begin{array}{rrr} 4 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \end{array}\right) - (3+3\sqrt{3}i)E_3 = \left(\begin{array}{rrr} 1-3\sqrt{3}i & -2 & 4 \\ 4 & 1-3\sqrt{3}i & -2 \\ -2 & 4 & 1-3\sqrt{3}i \end{array}\right).$$

Удвояваме третия ред и прибавяме към втория. Умножаваме третия ред по $\frac{1-3\sqrt{3}i}{2}$, прибавяме към първия и свеждаме към

$$\left(\begin{array}{rrr} 0 & -6\sqrt{3}i & -9-3\sqrt{3}i \\ 0 & 9-3\sqrt{3}i & -6\sqrt{3}i \\ -2 & 4 & 1-3\sqrt{3}i \end{array}\right),$$

съгласно

$$\frac{(1-3\sqrt{3}i)^2}{2} = \frac{1-27-6\sqrt{3}i}{2} = -13 - 3\sqrt{3}i.$$

Заместваме $\frac{1}{(-i)} = i$, умножаваме числителя и знаменателя по $\sqrt{3}$ и пресмятаме, че

$$\frac{-9-3\sqrt{3}i}{-6\sqrt{3}i} = i\left(\frac{-9\sqrt{3}-9i}{18}\right) = i\left(\frac{-\sqrt{3}-i}{2}\right) = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}.$$

Съкращаваме числителя и знаменателя на $\sqrt{3}$, умножаваме по $\left(\frac{3+\sqrt{3}i}{3+\sqrt{3}i}\right)$ и получаваме

$$\frac{-6\sqrt{3}i}{9-3\sqrt{3}i} = \left(\frac{-2\sqrt{3}i}{3-\sqrt{3}i}\right).\left(\frac{3+\sqrt{3}i}{3+\sqrt{3}i}\right) = \frac{6-6\sqrt{3}i}{3^2+3} = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}.$$

Делим първия ред на $-6\sqrt{3}i \neq 0$, делим втория ред на $9-3\sqrt{3}i \neq 0$ и свеждаме към

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \\ -2 & 4 & 1-3\sqrt{3}i \end{array}\right).$$

Изпускаме втория ред, защото съвпада с първия. Умножаваме първия ред по (-4), прибавяме към третия и получаваме

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \\ -2 & 0 & -1-\sqrt{3}i \end{array}\right).$$

Общото решение на тази хомогенна система линейни уравнения е

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}x_3, \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}x_3 \quad \text{за произволно} \quad x_3 \in \mathbb{C}.$$

За $x_3 = 2$ получаваме ненулевото решение

$$w = (-1-\sqrt{3}i, -1+\sqrt{3}i, 2)^t,$$

което е собствен вектор на $\varphi_o^{\mathbb{C}}$, отговарящ на собствената стойност $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$. В общия случай, ако $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ е комплексен нереален характеристичен корен на ортогонален оператор φ, то и $\overline{\lambda} \neq \lambda$ е комплексен нереален характеристичен корен на φ, защото характеристичният полином $f_\varphi(x) = f_A(x) \in \mathbb{R}[x]$ е с реални коефициенти и от

$$0 = f_\varphi(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

следва

$$0 = \overline{0} = \overline{f_\varphi(\lambda)} = \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i} = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i}\,\overline{\lambda}^i = \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{\lambda}^i = f_\varphi(\overline{\lambda}),$$

съгласно $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ и $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$ за произволни $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Ако $w = (w_1, \dots, w_n)^t \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ изпълнява равенството $Aw = (\cos\psi + i\sin\psi)w$ за ортогонална матрица $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ и ъгъл $\psi \in \mathbb{R}$ със $\sin\psi \neq 0$, то реалната част $u = \mathrm{Re}(w) := (\mathrm{Re}(w_1), \dots, \mathrm{Re}(w_n))^t \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ и имагинерната част $v = \mathrm{Im}(w) := (\mathrm{Im}(w_1), \dots, \mathrm{Im}(w_n))^t \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ на w са координати на ортогонални вектори с една и съща дължина спрямо дадения ортонормиран базис. По-точно, сравнявайки реалните и имагинерните части в равенството

$$Au + iAv = A(u+iv) = Aw = [\cos(\psi) + i\sin(\psi)]w = [\cos(\psi) + i\sin(\psi)](u+iv) =$$
$$= [\cos(\psi)u - \sin(\psi)v] + i[cos(\psi)v + \sin(\psi)u]$$

получаваме, че

$$Au = \cos(\psi)u - \sin(\psi)v, \quad Av = cos(\psi)v + \sin(\psi)u. \tag{22.1}$$

Вземайки предвид ортогоналността на оператора φ, пресмятаме че

$$\begin{aligned} ||u||^2 = \langle u, u\rangle = \langle Au, Au\rangle = \langle \cos(\psi)u - \sin(\psi)v, \cos(\psi)u - \sin(\psi)v\rangle = \\ = \cos^2(\psi)||u||^2 - 2\sin(\psi)\cos(\psi)\langle u, v\rangle + \sin^2(\psi)||v||^2 \end{aligned} \tag{22.2}$$

и

$$\begin{aligned} \langle u, v\rangle = \langle Au, Av\rangle = \langle \cos(\psi)u - \sin(\psi)v, \cos(\psi)v + \sin(\psi)u\rangle = \\ = \sin(\psi)\cos(\psi)||u||^2 + [\cos^2(\psi) - \sin^2(\psi)]\langle u, v\rangle - \sin(\psi)\cos(\psi)||v||^2. \end{aligned} \tag{22.3}$$

От (22.2) получаваме

$$\begin{aligned} 0 = [\cos^2(\psi) - 1]||u||^2 - 2\sin(\psi)\cos(\psi)\langle u, v\rangle + \sin^2(\psi)||v||^2 = \\ = -\sin^2(\psi)||u||^2 - 2\sin(\psi)\cos(\psi)\langle u, v\rangle + \sin^2(\psi)||v||^2 \end{aligned}$$

и след деление на $\sin^2(\psi) \neq 0$ извеждаме, че

$$||u||^2 - ||v||^2 = -2\mathrm{cotg}(\psi)\langle u, v\rangle. \tag{22.4}$$

Равенството (22.3) дава

$$\begin{aligned} 0 = \sin(\psi)\cos(\psi)(||u||^2 - ||v||^2) + [\cos^2(\psi) - \sin^2(\psi) - 1]\langle u, v\rangle = \\ = \sin(\psi)\cos(\psi)(||u||^2 - ||v||^2) - 2\sin^2(\psi)\langle u, v\rangle, \end{aligned}$$

откъдето

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{cotg}(\psi)(||u||^2 - ||v||^2) = -\mathrm{cotg}^2(\psi)\langle u, v\rangle$$

след деление на $2\sin^2(\psi) \neq 0$. В резултат,

$$0 = \left[1 + \mathrm{cotg}^2(\psi)\right]\langle u, v\rangle = \frac{1}{\sin^2(\psi)}\langle u, v\rangle$$

изисква $\langle u, v\rangle = 0$ и води до $||u|| = ||v||$, съгласно (22.4).
В решаваната задача, векторът $w \in M_{3\times 1}(\mathbb{C})$ има реална част

$$u = \mathrm{Re}(w) = (-1, -1, 2)^t$$

и имагинерна част

$$v = \mathrm{Im}(w) = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}, 0)^t,$$

които са ортогонални помежду си и имат една и съща дължина

$$||u|| = \sqrt{\overbrace{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2}^{>0}} = \sqrt{6} = \sqrt{\overbrace{(-\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2}^{>0}} = ||v||.$$

Векторите

$$e_2 := \frac{u}{||u||} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2)^t \quad \text{и} \quad e_3 := \frac{v}{||v||} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)^t$$

образуват ортонормиран базис на $l(u, v) \subset M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, в който матрицата на φ е

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\lambda_2) & \mathrm{Im}(\lambda_2) \\ -\mathrm{Im}(\lambda_2) & \mathrm{Re}(\lambda_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

съгласно (22.1). С това намерихме ортонормиран базис

$$e_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1)^t, \quad e_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}(-1, -1, 2)^t, \quad e_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1, 1, 0)^t$$

на V, в който матрицата

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

на φ е блочно-диагонална.

Проверяваме, че φ има матрица D спрямо e_1, e_2, e_3. За целта трябва да докажем,че

$$\varphi(e_1) = e_1, \quad \varphi(e_2) = \frac{1}{2}e_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}e_3, \quad \varphi(e_3) = \frac{\sqrt{3}}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3,$$

използвайки координатите спрямо първоначалния ортонормиран базис и матрицата A на φ спрямо този базис. Наистина,

$$Ae_1 = \frac{\sqrt{3}}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{9}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1.$$

Освен това,

$$Ae_2 = \frac{\sqrt{6}}{18}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{6}}{18}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

е равно на

$$\frac{1}{2}e_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}e_3 = \frac{\sqrt{6}}{12}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{6}}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{6}}{12}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и

$$Ae_3 = \frac{\sqrt{2}}{6}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{6}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

е равно на

$$\frac{\sqrt{3}}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3 = \frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$