Глава 21

Матрица на Грам. Неравенство на Коши-Буняковски и неравенство на триъгълника. Ортогонално допълнение на подпространство.

Определение 21.1. *Ако $a_1, \ldots, a_n$ са вектори от евклидово (унитарно) пространство V, то матрицата*

$$G(a_1, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \ldots & \langle a_1, a_j \rangle & \ldots & \langle a_1, a_n \rangle \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \langle a_i, a_1 \rangle & \ldots & \langle a_i, a_j \rangle & \ldots & \langle a_i, a_n \rangle \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \langle a_n, a_1 \rangle & \ldots & \langle a_n, a_j \rangle & \ldots & \langle a_n, a_n \rangle \end{pmatrix},$$

съставена от скаларните произведения $\langle a_i, a_j \rangle$, $1 \leq i, j \leq n$ се нарича матрица на Грам на $a_1, \ldots, a_n$.
Детерминантата на матрицата на Грам $G(a_1, \ldots, a_n)$ се нарича детерминанта на Грам и се бележи с $\Gamma(a_1, \ldots, a_n) = \det G(a_1, \ldots, a_n)$.

Твърдение 21.2. *Детерминантата на Грам $\Gamma(a_1, \ldots, a_n)$ на произволни вектори $a_1, \ldots, a_n$ от евклидово (унитарно) пространство V приема неотрицателни стойности $\Gamma(a_1, \ldots, a_n) \geq 0$ с равенство $\Gamma(a_1, \ldots, a_n) = 0$ тогава и само тогава, когато $a_1, \ldots, a_n$ са линейно зависими.*

Доказателство. Ако векторите $a_1, \ldots, a_n \in V$ са линейно зависими, то съществуват $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{R}$ или $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{C}$ с поне едно $s_i \neq 0$, така, че

$$s_1 a_1 + \ldots + s_i a_i + \ldots + s_n a_n = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V.$$

Скаларното умножение на a_j, $1 \leq j \leq n$ с горното равенство дава

$$0 = \langle a_j, \overrightarrow{\mathcal{O}}_V \rangle = \langle a_j, \sum_{k=1}^{n} s_k a_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{s_k} \langle a_j, a_k \rangle$$

за всички $1 \leq j \leq n$. С други думи,

$$0 = (\langle a_j, a_1 \rangle \ldots \langle a_j, a_k \rangle \ldots \langle a_j, a_n \rangle) \begin{pmatrix} \overline{s_1} \\ \ldots \\ \overline{s_k} \\ \ldots \\ \overline{s_n} \end{pmatrix} \quad \text{за всички} \quad 1 \leq j \leq n,$$

откъдето

$$G(a_1, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} \overline{s_1} \\ \ldots \\ \overline{s_k} \\ \ldots \\ \overline{s_n} \end{pmatrix} = \mathbb{O}_{n\times 1}.$$

По този начин,

$$\overline{s} := \begin{pmatrix} \overline{s_1} \\ \ldots \\ \overline{s_k} \\ \ldots \\ \overline{s_n} \end{pmatrix}$$

се оказва ненулево решение на хомогенната система линейни уравнения

$$G(a_1, \ldots, a_n)x = \mathbb{O}_{n\times 1}$$

с квадратна матрица от коефициенти $G(a_1, \ldots, a_n)$ и

$$\Gamma(a_1, \ldots, a_n) := \det G(a_1, \ldots, a_n) = 0.$$

Отсега нататък предполагаме, че векторите $a_1, \ldots, a_n$ са линейно независими и доказваме, че $\Gamma(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{>0}$. Линейната обвивка $V_o := l(a_1, \ldots, a_n)$ е n-мерно пространство и има ортонормиран базис $e = (e_1, \ldots, e_n)$.
Нека $A = (a_{i,j})_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{n} = (c_1 \ldots c_n)$ е матрицата, съставена по стълбове от координатите

$$c_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \ldots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$$

на векторите

$$a_j = (e_1, \ldots, e_n) \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \ldots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} = ec_j, \quad \forall 1 \leq j \leq n$$

спрямо базиса $e = (e_1, \ldots, e_n)$. Тогава

$$a := (a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_n) = (ec_1, \ldots, ec_j, \ldots, ec_n) = e(c_1 \ldots c_j \ldots c_n) = eA \quad \text{и}$$

$$A^t\overline{A} = \begin{pmatrix} c_1^t \\ \ldots \\ c_n^t \end{pmatrix} (\overline{c_1}, \ldots, \overline{c_n}) = \begin{pmatrix} c_1^t\overline{c_1} & \ldots & c_1^t\overline{c_j} & \ldots & c_1^t\overline{c_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_i^t\overline{c_1} & \ldots & c_i^t\overline{c_j} & \ldots & c_i^t\overline{c_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n^t\overline{c_1} & \ldots & c_n^t\overline{c_j} & \ldots & c_n^t\overline{c_n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \langle a_1, a_1\rangle & \ldots & \langle a_1, a_j\rangle & \ldots & \langle a_1, a_n\rangle \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \langle a_i, a_1\rangle & \ldots & \langle a_i, a_j\rangle & \ldots & \langle a_i, a_n\rangle \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \langle a_n, a_1\rangle & \ldots & \langle a_n, a_j\rangle & \ldots & \langle a_n, a_n\rangle \end{pmatrix} = G(a_1, \ldots, a_n)$$

е матрицата на Грам на $a_1, \ldots, a_n$, защото $\langle a_i, a_j\rangle = \langle ec_i, ec_j\rangle = c_i^t\overline{c_j}$ за всички $1 \leq i, j \leq n$ съгласно Лема 20.8.
Нека $b_1, \ldots, b_n$ се получават от $a_1, \ldots, a_n$ чрез ортогонализация по метода на Грам-Шмид и $b := (b_1, \ldots, b_n)$. Съгласно Твърдение 20.9, $b_1, \ldots, b_n$ са ненулеви

ортогонални вектори. Тогава $b_1 = a_1$ и $l(b_1, \dots, b_{i-1}) = l(a_1, \dots, a_{i-1})$,

$$b_i = a_i + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{i,j} b_j = a_i + \sum_{j=1}^{i-1} t_{ji} a_j = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, \dots, a_n) \begin{pmatrix} t_{1i} \\ \dots \\ t_{i-1i} \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

за подходящи $t_{ji} \in \mathbb{R}$ или $t_{ji} \in \mathbb{C}$ и всички $2 \leq i \leq n$. По този начин установяваме съществуването на горно триъгълна матрица

$$T = \begin{pmatrix} 1 & t_{12} & \dots & t_{1i} & \dots & t_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & t_{2i} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t_{i-1i} & \dots & t_{i-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & t_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

с единици по диагонала, изпълняваща равенството

$$b = (b_1, \dots, b_{i-1}, b_i, \dots, b_n) =$$

$$= (a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, \dots, a_n) \begin{pmatrix} 1 & t_{12} & \dots & t_{1i} & \dots & t_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & t_{2i} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t_{i-1i} & \dots & t_{i-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & t_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= aT = (eA)T = e(AT).$$

Следователно матрицата $AT \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ е съставена по стълбове от координатите на $b_1, \dots, b_n \in V_o = l(a_1, \dots, a_n)$ спрямо ортонормирания базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ на V_o и матрицата на Грам на $b_1, \dots, b_n$ е

$$G(b_1, \dots, b_n) = (AT)^t \ \overline{(AT)} = (T^t A^t)(\overline{A} \ \ \overline{T}) = T^t (A^t \overline{A}) \overline{T} = T^t G(a_1, \dots, a_n) \overline{T}.$$

Тук използваме, че за произволни матрици $M = (M_{i,j})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n} \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$, $N = (N_{i,j})_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{k} \in M_{n \times k}(\mathbb{C})$ с комплексно спрегнати $\overline{M} = (\overline{M_{i,j}})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n} \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$, $\overline{N} = (\overline{N_{i,j}})_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{k} \in M_{n \times k}(\mathbb{C})$ е в сила $\overline{(MN)} = \overline{M} \ \ \overline{N}$. По-точно, от $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{(z_1 z_2)} = \overline{z_1} \ \ \overline{z_2}$ за произволни комплексни числа $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ следва, че

$$\left[\overline{(MN)} \right]_{i,j} := \overline{[(MN)_{i,j}]} = \overline{\left(\sum_{s=1}^{n} M_{i,s} N_{s,j} \right)} =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \overline{(M_{i,s} N_{s,j})} = \sum_{s=1}^{n} \overline{M_{i,s}} \ \ \overline{N_{s,j}} = (\overline{M} \ \ \overline{N})_{i,j}$$

за всички $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq k$. Долно триъгълната матрица

$$T^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ t_{12} & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{1i} & t_{2i} & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{1n} & t_{2n} & \dots & t_{in} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

има детерминанта $\det(T^t) = 1$, както и комплексно спрегнатата

$$\overline{T} = \begin{pmatrix} 1 & \overline{t_{12}} & \dots & \overline{t_{1i}} & \dots & \overline{t_{1n}} \\ 0 & 1 & \dots & \overline{t_{2i}} & \dots & \overline{t_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \overline{t_{i-1i}} & \dots & \overline{t_{i-1n}} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & \overline{t_{in}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

на T има детерминанта $\det(\overline{T}) = 1$. По Теорема за умножение на детерминанти - Твърдение 10.8, детерминантите на Грам

$$\Gamma(b_1, \dots, b_n) = \det G(b_1, \dots, b_n) = \det(T^t G(a_1, \dots, a_n)\overline{T}) =$$
$$= \det(T^t) \det G(a_1, \dots, a_n) \det(\overline{T}) = \det G(a_1, \dots, a_n) = \Gamma(a_1, \dots, a_n)$$

на $b_1, \dots, b_n$ и $a_1, \dots, a_n$ съвпадат. Матрицата на Грам

$$G(b_1, \dots, b_n) = \begin{pmatrix} \langle b_1, b_1 \rangle & \dots & \langle b_1, b_j \rangle & \dots & \langle b_1, b_n \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle b_i, b_1 \rangle & \dots & \langle b_i, b_j \rangle & \dots & \langle b_i, b_n \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle b_n, b_1 \rangle & \dots & \langle b_n, b_j \rangle & \dots & \langle b_n, b_n \rangle \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} ||b_1||^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & ||b_2||^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & ||b_{n-1}||^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & ||b_n||^2 \end{pmatrix}$$

на ортогоналната система $b_1, \dots, b_n \in V \setminus \{\mathcal{O}_V\}$ от ненулеви вектори е диагонална и има строго положителни реални диагонални елементи, а оттам и строго положителна реална детерминанта

$$\Gamma(b_1, \dots, b_n) = \det G(b_1, \dots, b_n) = ||b_1||^2 \dots ||b_n||^2 \in \mathbb{R}^{>0}.$$

Следователно $\Gamma(a_1, \dots, a_n) = \Gamma(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{>0}$ е положително реално число за произволни линейно независими вектори $a_1, \dots, a_n \in V$.

□

Твърдение 21.3. (Неравенство на Коши-Буняковски:) *За произволни вектори a и b от евклидово или унитарно пространство V е в сила*

$$|\langle a, b \rangle| \leq ||a|| \, ||b||$$

с равенство $|\langle a, b \rangle| = ||a|| \, ||b||$ точно когато a, b са линейно зависими.

Доказателство. За произволни $X, Y \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ условието $X^2 \geq Y^2$ е еквивалентно на $X \geq Y$ с равенство $X^2 = Y^2$ точно когато $X = Y$. За целта забелязваме, че $X + Y \geq 0$ с равенство $X + Y = 0$ точно когато $X = -Y \in \mathbb{R}^{\geq 0} \cap \mathbb{R}^{\leq 0} = \{0\}$ и $X = Y = 0$. Благодарение на разлагането

$$X^2 - Y^2 = (X + Y)(X - Y),$$

от $X - Y \geq 0$ следва $X^2 - Y^2 \geq 0$. Ако допуснем, че $X^2 - Y^2 \geq 0$ и $X - Y < 0$, то $X + Y \geq 0$ е изпълнено с равенство $X + Y = 0$, откъдето $X = Y = 0$ и $X - Y = 0$, противно на предположението $X - Y < 0$. Следователно $X^2 - Y^2 \geq 0$ е еквивалентно на $X - Y \geq 0$. Ясно е, че от $X - Y = 0$ следва $X^2 - Y^2 = 0$. Ако $X^2 - Y^2 = 0$ и $X - Y \neq 0$, то $X + Y = 0$, откъдето $X = Y = 0$ и $X - Y = 0$,

противно на допускането. По този начин доказахме, че $X^2 - Y^2 = 0$ тогава и само тогава, когато $X - Y = 0$.
Детерминантата на Грам

$$\Gamma(a,b) = \det G(a,b) = \begin{vmatrix} \langle a,a\rangle & \langle a,b\rangle \\ \langle b,a\rangle & \langle b,b\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ||a||^2 & \langle a,b\rangle \\ \overline{\langle a,b\rangle} & ||b||^2 \end{vmatrix} =$$
$$= ||a||^2||b||^2 - \langle a,b\rangle\overline{\langle a,b\rangle} = ||a||^2||b||^2 - |\langle a,b\rangle|^2 \in \mathbb{R}^{\geq 0}$$

е неотрицателно реално число и $||a||^2||b||^2 - |\langle a,b\rangle|^2 = 0$ тогава и само тогава, когато a, b са линейно зависими. Вземайки предвид, че $|\langle a,b\rangle|, ||a||||b|| \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ са неотрицателни реални числа, забелязваме, че $|\langle a,b\rangle|^2 \leq (||a||||b||)^2$ е еквивалентно на $|\langle a,b\rangle| \leq ||a||||b||$ с равенство $|\langle a,b\rangle|^2 = (||a||||b||)^2$ точно когато $|\langle a,b\rangle| \leq ||a||||b||$.

$\square$

Ако $a, b \in V \setminus \{\overline{\mathcal{O}}\}$ са ненулеви вектори от евклидово пространство, то $\langle a,b\rangle \in \mathbb{R}$ и $||a||, ||b|| \in \mathbb{R}^{>0}$. Следователно

$$\left|\frac{\langle a,b\rangle}{||a||b||}\right| = \frac{|\langle a,b\rangle|}{||a||||b||} \leq 1 \quad \text{и} \quad -1 \leq \frac{\langle a,b\rangle}{||a||||b||} \leq 1,$$

съгласно неравенството на Кощи-Буняковски - Твърдение 21.3. В резултат, съществува еднозначно определен ъгъл $\varphi \in [0, \pi]$ с

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle a,b\rangle}{||a||||b||},$$

който наричаме ъгъл между a и b. Това дава възможност да изразим

$$\langle a,b\rangle = ||a||||b|| \cos(\varphi).$$

Твърдение 21.4. (Неравенство на триъгълника:) *За произволни вектори a, b от евклидово или унитарно пространство V изпълняват неравенството $||a+b|| \leq ||a|| + ||b||$ с равенство $||a+b|| = ||a|| + ||b||$ точно когато $a = \lambda b$ за някое $\lambda \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ или $b = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$.*

Доказателство. За произволно комплексно число $z = r + is \in \mathbb{C}$ с $r, s \in \mathbb{R}$ е в сила

$$Re(z) = r \leq |z| = \sqrt{r^2 + s^2}^{\geq 0}$$

с равенство $r = \sqrt{r^2 + s^2}^{\geq 0}$ точно когато $s = 0$ и $r \in \mathbb{R}^{\geq 0}$. Последното е еквивалентно на $z \in \mathbb{R}^{\geq 0}$. Затова

$$||a+b||^2 = \langle a+b, a+b\rangle =$$
$$= \langle a,a\rangle + \langle a,b\rangle + \langle b,a\rangle + \langle b,b\rangle = ||a||^2 + \langle a,b\rangle + \overline{\langle a,b\rangle} + ||b||^2 =$$
$$= ||a||^2 + 2Re(\langle a,b\rangle) + ||b||^2 \leq ||a||^2 + 2|\langle a,b\rangle| + ||b||^2$$

с равенство $||a+b||^2 = ||a||^2 + 2|\langle a,b\rangle| + ||b||^2$ тогава и само тогава, когато $\langle a,b\rangle \in \mathbb{R}^{\geq 0}$. Прилагайки неравенството на Коши-Буняковски $|\langle a,b\rangle| \leq ||a||||b||$ получаваме

$$||a+b||^2 \leq ||a||^2 + 2||a||||b|| + ||b||^2 = (||a|| + ||b||)^2$$

с равенство $||a+b||^2 = (||a| + ||b||)^2$ точно когато a, b са линейно зависими и $\langle a,b\rangle \in \mathbb{R}^{\geq 0}$. За $X, Y \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ условието $X^2 \geq Y^2$ е еквивалентно на $X \geq Y$ с равенство $X^2 = Y^2$ тогава и само тогава, когато $X = Y$. Затова

$$||a+b|| \leq ||a|| + ||b||$$

с равенство $||a+b|| = ||a||+||b||$ точно когато a, b са линейно зависими и $\langle a, b\rangle \in \mathbb{R}^{\geq 0}$.
Но $a, b \in V$ са линейно зависими тогава и само тогава, кпгато съществуват $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ или $\mu, \nu \in \mathbb{C}$, $(\mu, \nu) \neq (0, 0)$ с $\mu a + \nu b = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$. Последното е в сила за $\mu \neq 0$ и $a = -\frac{\nu}{\mu} b = \lambda b$ с $\lambda := -\frac{\nu}{\mu} \in \mathbb{R}$, съответно, $\lambda := -\frac{\nu}{\mu} \in \mathbb{C}$ или за $\mu = 0$, $\nu \neq 0$ и $b = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$. С други думи, $a, b \in V$ са линейно зависими точно когато $a = \lambda b$ и $b \neq \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$ или $b = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$. Да забележим, че ако $b = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$ е нулевият вектор, то винаги скаларното произведение $\langle a, b\rangle = \langle a, \overrightarrow{\mathcal{O}}_V\rangle = 0 \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ е неотрицателно реално число. Ако $b \neq \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$ е ненулев вектор и $a = \lambda b$, то скаларното произведение

$$\langle a, b\rangle = \langle \lambda b, b\rangle = \lambda \langle b, b\rangle \in \mathbb{R}^{\geq 0}$$

с $\langle b, b\rangle \in \mathbb{R}^{>0}$ е неотрицателно реално число точно когато $\lambda \in \mathbb{R}^{\geq 0}$. Следователно, линейно зависими вектори $a, b \in V$ имат скаларно произведение $\langle a, b\rangle \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ тогава и само тогава, когато $a = \lambda b$, $b \neq \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$, $\lambda \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ или $b = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$.

□

Прилагайки неравенството на триъгълника към векторите $a - b$ и b от евклидово или унитарно пространство V получаваме

$$||a|| = ||(a - b) + b|| \leq ||a - b|| + ||b||,$$

откъдето $||a - b|| \geq ||a|| - ||b||$. Равенството $||a - b|| = ||a|| - ||b||$ е в сила точно когато $a - b = \lambda b$ за $\lambda \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ или $b = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$. Това е изпълнено за $a = \mu b$ с $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \geq 1$ или $b = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$.

Определение 21.5. *Ортогоналното допълнение на подпространство U на евклидово или унитарно пространство V е множеството*

$$U^{\perp} = \{v \in V \mid \langle u, v\rangle = 0, \quad \forall u \in U\}$$

на векторите $v \in V$, които са ортогонални на всички вектори $u \in U$.

Ортогоналното допълнение $U^{\perp}$ на подпространство $U \subset V$ е подпространство на V. По-точно, за произволни $v_1, v_2 \in U^{\perp}$, $u \in U$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ или $\lambda \in \mathbb{C}$ е в сила

$$\langle u, v_1 + v_2\rangle = \langle u, v_1\rangle + \langle u, v_2\rangle = 0 + 0 = 0 \quad \text{и}$$

$$\langle u, \lambda v_1\rangle = \overline{\lambda}\langle u, v_1\rangle = \overline{\lambda} 0 = 0.$$

Следователно $v_1 + v_2, \lambda v_1 \in U^{\perp}$ и $U^{\perp}$ е подпространство на V.

Твърдение 21.6. *Нека V е n-мерно евклидово (унитарно) пространство, U е подпространство на V, а $U^{\perp}$ е ортогоналното допълнение на U. Тогава*
(i) $U \oplus U^{\perp} = V$ и
(ii) $(U^{\perp})^{\perp} = U$.
От равенството (i) следва, че произволен вектор $v \in V$ има единствено представяне като сума $v = u_o + h$ на $u_o \in U$ и $h \in U^{\perp}$. Векторът u_o се нарича ортогонална проекция на v върху U, а h е перпендикулярът от v към U.

Доказателство. (i) Избираме ортонормиран базис $e_1, \dots, e_k$ на U и допълваме до ортонормиран базис $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ на V, използвайки Следствие 20.11. Тогава

$$V = l(e_1, \dots, e_k) \oplus l(e_{k+1}, \dots, e_n) = U \oplus l(e_{k+1}, \dots, e_n)$$

по Твърдение 6.7 (i). Достатъчно е да докажем, че

$$l(e_{k+1}, \dots, e_n) = U^{\perp},$$

за да получим (i). За произволни вектори $v = \sum\limits_{j=k+1}^{n} y_j e_j \in l(e_{k+1}, \dots, e_n)$ и $u = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i e_i \in l(e_1, \dots, e_k) = U$ е в сила

$$\langle u, v \rangle = \langle \sum_{i=1}^{k} x_i e_i, \sum_{j=k+1}^{n} y_j e_j \rangle = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} x_i \overline{y_j} \langle e_i, e_j \rangle = 0,$$

така че $l(e_{k+1}, \dots, e_n) \subseteq U^{\perp}$. Обратно, ако $v = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j \in U^{\perp} \subset V$, то за всяко $1 \leq i \leq k$ векторът e_i принадлежи на U, откъдето

$$0 = \langle e_i, v \rangle = \langle e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{y_j} \langle e_i, e_j \rangle = \overline{y_i}.$$

Следователно $y_i = 0$ за всички $1 \leq i \leq k$ и $v = \sum\limits_{j=k+1}^{n} y_j e_j \in l(e_{k+1}, \dots, e_n)$. Това доказва $U^{\perp} \subseteq l(e_{k+1}, \dots, e_n)$ и

$$U^{\perp} = l(e_{k+1}, \dots, e_n).$$

(ii) От една страна, $U \subseteq (U^{\perp})^{\perp}$, защото за произволни вектори $u \in U$ и $v \in U^{\perp}$ е изпълнено

$$\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle} = \overline{0} = 0.$$

Съгласно (i) имаме разлагания

$$U \oplus U^{\perp} = V = U^{\perp} \oplus (U^{\perp})^{\perp}.$$

Оттук, $\dim(U^{\perp})^{\perp} = \dim V - \dim(U^{\perp}) = \dim(U)$ и подпространството U съвпада с пространството $(U^{\perp})^{\perp}$ съгласно Следствие 5.13.

□

Следствие 21.7. *Нека V е крайномерно евклидово (унитарно) пространство, а U е подпространство на V. Перпендикулярът $h \in U^{\perp}$ от вектор $v \in V$ към U е единственият вектор с минимална дължина, за който съществува $u_o \in U$ с $v = h + u_o$.*

Доказателство. Ако $v = u + w$ за $u \in U$, $w \in V$, то от $u + w = v = u_o + h$ следва

$$w = (u_o - u) + h \quad \text{с} \quad u_o - u \in U, \quad h \in U^{\perp}.$$

Следователно

$$||w||^2 = \langle w, w \rangle = \langle (u_o - u) + h, (u_o - u) + h \rangle =$$
$$= \langle u_o - u, u_o - u \rangle + \langle h, h \rangle = ||u_o - u||^2 + ||h||^2 \geq ||h||^2,$$

съгласно $\langle u_o - u, h \rangle = 0 = \langle h, u_o - u \rangle$ за $u_o - u \in U$, $h \in U^{\perp}$ и $||u_o - u||^2 \in \mathbb{R}^{\geq 0}$. Равенството $||w||^2 = ||h||^2$ е в сила точно когато $||u_o - u||^2 = 0$ и $u_o - u = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$.

Вземайки предвид $||w||, ||h|| \in \mathbb{R}^{\geq 0}$, стигаме до извода, че $||w|| \geq ||h||$ и $||w|| = ||h||$ тогава и само тогава, когато $u_o = u$ и $w = h$.

□

Следствие 21.8. *Нека $a_1, \ldots, a_n$ са линейно независими вектори от евклидово или унитарно пространство V, а $b_1, \ldots, b_n \in V$ се получават от $a_1, \ldots, a_n$ чрез ортогонализация по метода на Грам-Шмид. Тогава за всяко $2 \leq i \leq n$ векторът*

$$b_i = a_i + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{i,j} b_j \quad \text{с} \quad \lambda_{i,j} \in \mathbb{R} \quad \text{или} \quad \lambda_{i,j} \in \mathbb{C}$$

е перпендикулярът от a_i към $l(a_1, \ldots, a_{i-1})$, а $\sum\limits_{j=1}^{i-1}(-\lambda_{i,j})b_j$ е ортогоналната проекция на a_i върху $l(b_1, \ldots, b_{i-1}) = l(a_1, \ldots, a_{i-1})$.

Доказателство. За произволни $x_1, \ldots, x_{i-1} \in \mathbb{R}$ или $x_1, \ldots, x_{i-1} \in \mathbb{C}$ имаме

$$\langle x_1 b_1 + \ldots + x_{i-1} b_{i-1}, b_i \rangle = x_1 \langle b_1, b_i \rangle + \ldots + x_{i-1} \langle b_{i-1}, b_i \rangle = 0,$$

защото $b_1, \ldots, b_{i-1}, b_i$ е ортогонална система вектори. Следователно векторът $b_i \in l(b_1, \ldots, b_{i-1})^\perp$ е от ортогоналното допълнение на $l(b_1, \ldots, b_{i-1})$. Съгласно Твърдение 20.9, $l(b_1, \ldots, b_{i-1}) = l(a_1, \ldots, a_{i-1})$, откъдето $l(b_1, \ldots, b_{i-1})^\perp = l(a_1, \ldots, a_{i-1})^\perp$ и $b_i \in l(a_1, \ldots, a_{i-1})^\perp$. Представянето

$$a_i = b_i + \sum_{j=1}^{i-1}(-\lambda_{i,j}) b_j \in l(a_1, \ldots, a_{i-1})^\perp \oplus l(a_1, \ldots, a_{i-1})$$

със събираемо

$$\sum_{j=1}^{i-1}(-\lambda_{i,j}) b_j \in l(b_1, \ldots, b_{i-1}) = l(a_1, \ldots, a_{i-1})$$

е точно разлагането на a_i в сума на перпендикуляра b_i от a_i към $l(a_1, \ldots, a_{i-1})$ и ортогоналната проекция $\sum\limits_{j=1}^{i-1}(-\lambda_{i,j})b_j$ на a_i върху $l(a_1, \ldots, a_{i-1})$.

□

Следствие 21.9. *Нека $a_1,\dots,a_n$ са линейно независими вектори от евклидово пространство V, $e=(e_1,\dots,e_n)$ е ортонормиран базис на $l(a_1,\dots,a_n)$, $A=(a_{i,j})_{i=1}^n{}_{j=1}^n=(c_1\dots c_n)$ е матрицата, съставена по стълбове от координатите*

$$c_j=\begin{pmatrix} a_{1j}\\ \dots\\ a_{nj}\end{pmatrix} \quad \text{на} \quad a_j=(e_1,\dots,e_n)\begin{pmatrix} a_{1j}\\ \dots\\ a_{nj}\end{pmatrix}=ec_j$$

спрямо e, а

$$P(a_1,\dots,a_n):=\left\{\sum_{i=1}^n x_ia_i \,\middle|\, x_i\in\mathbb{R},\, 0\le x_i\le 1\right\}$$

е паралелепипедът, породен от $a_1,\dots,a_n$. Тогава обемът на $P(a_1,\dots,a_n)$ е равен на модула

$$\mathrm{Vol}P(a_1,\dots,a_n)=|\det(A)|$$

на детерминантата на A.

Доказателство. В доказателството на Твърдение 21.2 установихме, че матрицата на Грам

$$G(a_1,\dots,a_n)=\begin{pmatrix} \langle a_1,a_1\rangle & \dots & \langle a_1,a_j\rangle & \dots & \langle a_1,a_n\rangle\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \langle a_i,a_1\rangle & \dots & \langle a_i,a_j\rangle & \dots & \langle a_i,a_n\rangle\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \langle a_n,a_1\rangle & \dots & \langle a_n,a_j\rangle & \dots & \langle a_n,a_n\rangle \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} c_1^tc_1 & \dots & c_1^tc_j & \dots & c_1^tc_n\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ c_i^tc_1 & \dots & c_i^tc_j & \dots & c_i^tc_n\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ c_n^tc_1 & \dots & c_n^tc_j & \dots & c_n^tc_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1^t\\ \dots\\ c_n^t\end{pmatrix}(c_1\dots c_n)=A^tA$$

за произволни линейно независими вектори $a_1,\dots,a_n$ от евклидово пространство V. Следователно детерминантата на Грам е

$$\Gamma(a_1,\dots,a_n)=\det G(a_1,\dots,a_n)=$$
$$=\det(A^tA)=\det(A^t)\det(A)=[\det(A)]^2=|\det(A)|^2.$$

Нека $b_1,\dots,b_n$ се получават от $a_1,\dots,a_n$ чрез прилагане на ортогонализация по метода на Грам-Шмид. Съгласно Твърдение 20.9, $b_1,\dots,b_n$ са ненулеви ортогонални вектори. В доказателството на Твърдение 21.2 установихме, че детерминантите на Грам

$$|\det(A)|^2=\Gamma(a_1,\dots,a_n)=\Gamma(b_1,\dots,b_n)=||b_1||^2\dots||b_n||^2$$

съвпадат. Следователно абсолютната стойност

$$|\det(A)|=||b_1||\dots||b_n||$$

на $\det(A)$ е равна на произведението на дължините на $b_1,\dots,b_n$.
Достатъчно е да проверим, че обемът

$$\mathrm{vol}P(a_1,\dots,a_n)=||b_1||\dots||b_n||,$$

на $P(a_1,\dots,a_n)$ е произведението на дължините на $b_1,\dots,b_n$, за да завършим доказателството на следствието.
С индукция по $n\ge 2$, $b_1=a_1$ и b_2 е перпендикулярът от a_2 към $l(a_1)$, така че

$$\mathrm{Vol}P(a_1,a_2)=||a_1||||b_2||=||b_1||||b_2||\in\mathbb{R}^{>0}.$$

В общия случай,

$$\mathrm{Vol}P(a_1, \dots, a_i) = \mathrm{Vol}P(a_1, \dots, a_{i-1})||b_i||$$

за произволно естествено $3 \leq i \leq n$, защото b_i е перпендикулярът от a_i към $l(a_1, \dots, a_{i-1})$. По индукционно предположение

$$\mathrm{Vol}P(a_1, \dots, a_{i-1}) = ||b_1|| \dots ||b_{i-1}||,$$

откъдето

$$\mathrm{Vol}P(a_1, \dots, a_i) = \mathrm{Vol}P(a_1, \dots, a_{i-1})||b_i|| = ||b_1|| \dots ||b_{i-1}||||b_i||.$$

□

Нека $Ax = b$ е несъвместима система линейни уравнения с n неизвестни, чиято матрица от коефициенти $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ е с ранг $\mathrm{rk}(A) = n$. Да означим с $a_1, \dots, a_n \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ вектор-стълбовете на A и да ги интерпретираме като координати на вектори $v_1, \dots, v_n$ от m-мерно евклидово пространство V спрямо ортонормиран базис $e = (e_1, \dots, e_m)$ на V. В доказателството на Твърдение 21.2 установихме, че произведението

$$A^tA = \begin{pmatrix} a_1^t \\ \dots \\ a_n^t \end{pmatrix} (a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1^ta_1 & \dots & a_1^ta_j & \dots & a_1^ta_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_i^ta_1 & \dots & a_i^ta_j & \dots & a_i^ta_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^ta_1 & \dots & a_n^ta_j & \dots & a_n^ta_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \dots & \langle v_1, v_j\rangle & \dots & \langle v_1, v_n\rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle v_i, v_1\rangle & \dots & \langle v_i, v_j\rangle & \dots & \langle v_i, v_n\rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle v_n, v_1\rangle & \dots & \langle v_n, v_j\rangle & \dots & \langle v_n, v_n\rangle \end{pmatrix} = G(v_1, \dots, v_n)$$

е матрицата на Грам на $v_1, \dots, v_n$. Умножавайки отляво дадената система линейни уравнения $Ax = b$ с матрицата $A^t \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ получаваме системата линейни уравнения

$$G(v_1, \dots, v_n)x = A^tAx = A^tb.$$

Съгласно $\mathrm{rk}(v_1, \dots, v_n) = \mathrm{rk}(ea_1, \dots, ea_n) = \mathrm{rk}(a_1, \dots, a_n) = \mathrm{rk}(A) = n$, векторите $v_1, \dots, v_n \in V$ са линейно независими и тяхната детерминанта на Грам $\Gamma(v_1, \dots, v_n) = \det G(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{>0}$ е строго положително реално число. В частност, $G(v_1, \dots, v_n) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ е неособена, а оттам и обратима матрица. Следователно съществува единствено решение $s \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ на $A^tAx = A^tb$. Това решение изпълнява равенството

$$\begin{pmatrix} a_1^t \\ \dots \\ a_n^t \end{pmatrix} (b - As) = A^t(b - As) = A^tb - A^tAs = \mathbb{O}_{n\times 1}.$$

Съгласно Лема 20.8, оттук следва

$$\begin{pmatrix} \langle ea_1, e(b - As)\rangle \\ \dots \\ \langle ea_n, e(b - As)\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^t(b - As) \\ \dots \\ a_n^t(b - As) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^t \\ \dots \\ a_n^t \end{pmatrix} (b - As) = \mathbb{O}_{n\times 1}$$

и векторът $h := e(b - As) \in V$ с координати $b - As \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ е ортогонален на векторите $v_1 = ea_1, \dots, v_n = ea_n \in V$. Поради линейността на скаларното произведение спрямо първия аргумент имаме

$$\langle \lambda_1v_1 + \dots + \lambda_nv_n, h\rangle = \lambda_1\langle v_1, h\rangle + \dots + \lambda_n\langle v_n, h\rangle = 0$$

за произволни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ и векторът $h = e(b - As) \in l(v_1, \ldots, v_n)^\perp$ принадлежи на ортогоналното допълнение на линейната обвивка $l(v_1, \ldots, v_n)$ на $v_1, \ldots, v_n$. От друга страна,

$$u_o := e(As) = (eA)s = [e(a_1, \ldots, a_n)]s = (ea_1, \ldots, ea_n) \left(\begin{array}{c} s_1 \\ \ldots \\ s_n \end{array} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} s_i(ea_i) = \sum_{i=1}^{n} s_i v_i \in l(v_1, \ldots, v_n)$$

принадлежи на линейната обвивка на $v_1, \ldots, v_n$. Затова

$$eb = e[(b - As) + As] = e(b - As) + e(As) = h + u_o \in l(v_1, \ldots, v_n)^\perp \oplus l(v_1, \ldots, v_n)$$

е разлагането на вектора $v := eb \in V$ в сума на перпендикуляра $h = e(b-As)$ от v към $l(v_1, \ldots, v_n)$ и ортоналната проекция $u_o = e(As)$ на v върху $l(v_1, \ldots, v_n)$. Съгласно Следствие 21.7, $h = e(b-As) \in V$ е единственият вектор с минимална дължина, за който разликата $v - h = eb - e(b - As) = e(As) = u_o \in l(v_1, \ldots, v_n)$ принадлежи на линейната обвивка на $v_1, \ldots, v_n$. По предположение, не съществува $q \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ с $b - Aq = \mathbb{O}_{m\times 1}$ или $e(b - Aq) = \overrightarrow{\mathcal{O}_V}$. Затова разглеждаме наредената n-торка $s \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, за която $h = e(b - As) \in V$ има минимална дължина и $v - h = eb - e(b - As) = e(As) \in l(v_1, \ldots, v_n)$ като приближено решение на $Ax = b$. Казваме, че $s \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ е приближено решение на несъвместимата система $Ax = b$ с $\mathrm{rk}(A) = n$ по метода на най-малките квадрати.