зад. 1

$T_1 = \{\{\emptyset\}, \{-1\}, \{1\}\}$ и $|T_1| = 3$

$T_2 = \{\{\emptyset\}, \{-1\}, \{1\}, \{-2\}, \{2\}, \{-1,2\}, \{-2,-1\}, \{-2,1\}\}$ и $|T_2| = 8$

За $T_n, n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$, правим следните разсъждения:
Очевидно $T_{n-1} \subset T_n$. Числото $-n$ може да принадлежи на всеки елемент на T_{n-1} и да удовлетворява предикатите P и Q.
Числото n може да принадлежи на всеки елемент на T_{n-2} и да удовлетворява P и Q. Но тук не се включват и комбинациите на n и $-n+1$. И двете числа не могат да бъдат в едно множество с $n-1$. Подобно на горното разсъждение $-n+1$ може да е елемент на всяко множество, съдържащо се в T_{n-2}. От тук следва, че всички множества, в които n може да са включени са $2|T_{n-2}|$ на брой.

$$|T_n| = \begin{cases} 3, & \text{за } n = 1 \\ 8, & \text{за } n = 2 \\ 2|T_{n-1}| + 2|T_{n-2}|, & \text{за } n > 2 \end{cases}$$

Характеристичното уравнение е:

$x^n = 2x^{n-1} + 2x^{n-2} \quad |: x^{n-2}$

$x^2 = 2x + 2$

$x^2 - 2x - 2 = 0$

$x_1 = 1+\sqrt{3} \quad x_2 = 1-\sqrt{3}$ Мултимножеството от корени е $\{1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\}_M$

Получаваме:

$|T_n| = A(1-\sqrt{3})^n + B(1+\sqrt{3})^n$

$T_1 = 3 = A(1-\sqrt{3}) + B(1+\sqrt{3}) \rightarrow A = \dfrac{3 - B(1+\sqrt{3})}{1-\sqrt{3}}$

$T_2 = 8 = A(1-\sqrt{3})^2 + B(1+\sqrt{3})^2 \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{(3 - B(1+\sqrt{3}))}{(1-\sqrt{3})} \cdot (1-\sqrt{3})^2 + B(1+\sqrt{3})^2 = 8$

$B(6+2\sqrt{3}) = 8 - 3 + 3\sqrt{3}$

$B = \dfrac{5+3\sqrt{3}}{6+2\sqrt{3}} = \dfrac{3+2\sqrt{3}}{6} \rightarrow A = \dfrac{3 - \frac{(3+2\sqrt{3})}{6} \cdot (1+\sqrt{3})}{1-\sqrt{3}} = \dfrac{3-2\sqrt{3}}{6}$

$$|T_n| = \left(\frac{3-2\sqrt{3}}{6}\right) \cdot (1-\sqrt{3})^n + \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{6}\right) \cdot (1+\sqrt{3})^n$$

зад. 2 Имайки предвид, че $G = \overline{(\overline{G})}$ б.о.о.

ще разгледаме G. Ако G е свързан, очевидно

условието е изпълнено. Нека $G = (V, E)$, $\overline{G} = (V, \overline{E})$

Нека G е несвързан граф. Това значи, че G

има поне 2 свързани компоненти

Нека б.о.о. G има 2 свързани компоненти. Ако са повече прилагаме долните разсъждения за всеки 2 поотделно.

Нека $u_1, u_2, \dots, u_k$ и $v_1, v_2, \dots, v_z$ са свързани

компоненти за $k, z \in \mathbb{N}^+$. От това, че $u_1, u_2, \dots, u_k$ и $v_1, v_2, \dots, v_z$ са 2 свързани компоненти, следва, че

$(u_i, v_j) \notin E$ за $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq z$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow (u_i, v_j) \in \overline{E}$ за $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq z$. От съществуването

на тези ребра е очевидно, че има път м/у

всеки u_i и v_j за $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq z$

Също така има път и м/у всеки 2 върха от една и съща свързана компонента в G.

Нека б.о.о. да разгледаме път м/у u_1 и u_2

Съществуването на пътя $u_1, (u_1, v_1), v_1, (v_1, u_2), u_2$ в

$\overline{G}$ е почти тривиално, с което доказваме, че ако

G не е свързан, то $\overline{G}$ е свързан $\square$

зад. 3 Имаме $G = (V, E)$

Нека $V = \{u, v_2, v_3, v_4, \dots v_n\}$ за някое $n \in \mathbb{N}^+ \setminus \{0, 1\}$, тъй който ще вадим и от G, а според изученото в лекции, за да е G граф, трябва $V \neq \emptyset$

$\overline{G-u}$ и $\overline{G}-u$ имат едни и същи върхове, а именно $\{v_2, v_3, \dots, v_n\}$. Остава само да покажем, че имат и еднакви ребра, за да док., че са равни

Очевидно премахването на u не влияе на съществуването на ребрата м/у другите върхове.

Ако м/у б.о.о. v_2 и v_3 е нямало ребро ($(v_2, v_3) \notin E$), то $(v_2, v_3) \in E_1$ и $(v_2, v_3) \in E_2$, за $\overline{G-u} = (V \setminus \{u\}, E_1)$ и $\overline{G} - u = (V \setminus \{u\}, E_2)$

Ако б.о.о. $(v_2, v_3) \in E$, то $(v_2, v_3) \notin E_1$ и $(v_2, v_3) \notin E_2$

Тъй като и в двата графа $\overline{G-u}$ и $\overline{G}-u$ не фигурира върха u, следователно и няма ребра, в които той да участва и вече установихме, че премахването му не влияе останалите ребра, можем да заключим, че $\overline{G-u} = \overline{G} - u$

Зад. 4 Нека $G = (V, E)$ и $\overline{G} = (V, E')$ са изоморфни

От задача 2 следва, че G трябва да е свързан граф.

Също така броя на ~~върхове~~ ребрата $|E| = |E'|$, понеже знаем, че $|E| + |E'| = \binom{n}{2}$, следва че $|E| = |E'| = \frac{n(n-1)}{4}$

Също така от изоморфизъм м/у графите ще следва, че степенните редици ще са еднакви.

И ако редицата на G е $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, то трябва

$$x_i = n - 1 - x_{n+1-i}$$

($\Leftarrow$) В тази посока доказателството е тривиално. Очевидно, ако има връх от степен едно неговият съсед е свързващ връх

($\Rightarrow$) Нека свързващ връх е $u \in V$. Допускаме, че $\nexists w \in V$ $d(w) = 1$

Ако $d(u) = 2$, то съз. v, такъв че $d(v) = n-3$

Нека u е съсед на v. Тогава в свързаната компонента на u има поне още $n-4$ върха, тоест броя на върховете в тази свързана компонента е $\geq n-3$. Това значи, че върховете в другата свързващи компонента са ~~най~~ $\leq n-(n-3)-1 = 2$

Но няма как да има един връх, защото противоречи на допускането, тоест върховете са 2. ~~като и двата имат общо~~

Но няма как и двата върха да имат общо ребро с u, защото то $d(u) = 2$, тоест един от тях е висящ - противоречие

Така доказахме, че ако свързващ връх е от степен 2, то трябва G има връх от 1-ва степен зад. 5

а) Нека $G_x = (V_x, E_x)$ е граф без нечетни цикли. Приемаме, че означението G_x значи, че $|E_x| = x$ (G_x има x на брой ребра)
Ще докажем с индукция по x, че $\forall x \in \mathbb{N}$ G_x е двуделен.
От изучаваното на лекции знаем, че един граф да е двуделен е същото като той да е двуоцветим така, че приемаме, че ще оцветяваме върховете на G_x в бял и черен цвят.

Решението на задачата не се влияе от броя на върховете, затова може да приемем, че $|V_x| = \infty$

База $x = 0$ - Очевидно граф без ребра няма нечетни цикли и е двуоцветим

Индукционно предположение: Допускаме, че за $x = k$ G_k е двуделен
Индукционна стъпка: Ще докажем, че за $x = k+1$ G_{k+1} е двуделен
Нека $e \in E_{k+1}$ е $k+1$-вото ребро и $e = (u, v)$ $u, v \in V_{k+1}$

1) Ако u и v са от 2 различни свързани компоненти в G_k и б.о.о. u е оцветено в бяло. То тогава, ако v е черно графът е двуделен.
Ако v също е бяло прилагаме следния алгоритъм върху всеки връх от свързаната компонента на v в G_k (тоест свързаната компонента преди да добавим реброто e):
Ако v' от свързаната компонента на v е
- бял -> оцветяваме го в черно
- черен -> оцветяваме го в бяло

Знаем, че прилагането на този алгоритъм е възможно, защото G_k е двуделен граф и u и v са от различни свързани компоненти.
След прилагането на алгоритъма u и v са в различни цветове =>
=> G_{k+1} е двуделен

2) u и v са от една и съща свързана компонента.
Ако u и v са оцветени с различен цвят, то G_{k+1} е двуделен
Ако u и v са с еднакъв цвят. Нека б.о.о. този цвят да е бял.
Тъй като u и v са от една и съща свързана компонента съществува път между тях. Нека p е някой най-къс път. Представен само чрез върхове $p = u, w_1, w_2, \dots, w_{2L+1}, v$ за $L \in \mathbb{N}$ и $w_i \in V_{k+1}$ $1 \leq i \leq 2L+1$
Понеже G_k е двуделен следва, че всеки връх w_{2L} за $L \in \mathbb{N}$ е с бял цвят, а всеки връх w_{2L+1} за $L \in \mathbb{N}$ е с черен цвят. С добавянето на реброто e в G_{k+1} се получава цикъл, но $|p| = 2L+2$, от където следва, че цикълът (записан само с върхове) $c = u, w_1, w_2, \dots, w_{2L+1}, v, u$ има дължина $|c| = 2L+3$, което е нечетно число $\forall L \in \mathbb{N}$. Противоречие

б) Нека $G_n = (V_n, E_n)$ е граф без нечетни цикли. Приемаме, че узначението G_n значи, че $|V_n| = n$. Както в а) ще оцветяваме върховете на G_n в бял и черен цвят. Ще докажем с индукция по n, че G_n е двуделен за $\forall n \in \mathbb{N}^+$

База: $n=1$ – тривиално е, че тривиалния граф е двуделен

Индукционно предположение: Допускаме, че за $n=k$ G_k е двуделен, $k \in \mathbb{N}^+$

Индукционна стъпка: Ще докажем, че за $n=k+1$, $k \in \mathbb{N}^+$, G_{k+1} е двуделен

Нека $u \in V_{k+1}$ е $k+1$-вия връх

1) Ако $d(u)=0$ очевидно G_{k+1} е двуделен, защото G_k е такъв

2) Ако $d(u)=1$ G_{k+1} ще е двуделен, като ако б.о.о. цвета на съседа на u е бял, то цветът на u ще е черен

3) Ако $d(u) \in \{2, 3, \dots, k\}$

За да улесним работата си първо ще изпълним следния алгоритъм:

Нека $S = \{v \in V_{k+1};\ v$ е съсед на $u\}$ и $S' = \emptyset$

Взимаме произволен $v \in S$ и $S = S \setminus \{v\}$ $S' = \{v\}$

б.о.о. v е оцветен в бяло

0. Ако $S = \emptyset$ приключи, иначе иди на 1.
1. Взимаме $w \in S$
2. $S = S \setminus \{w\}$
3. $S' = S' \cup \{w\}$
4. Ако $\exists s \in S'$ такова, че съществува път м/у w и s в G_k, върни се в 0.
5. Ако w е черен. Отиди на 6., иначе отиди на 0.
6. За всеки връх от свързаните компоненти на w. Ако той е оцветен в:
   - черно → оцвети го в бяло
   - бяло → оцвети го в черно

След приключването на алгоритъма, ако има връх, който е съсед на u и е черен на цвят, то значи той е в една и съща свързана компонента с друг съсед на u, който задължително е бял.

Нека v' е черния съсед, а v'' белия. От това следва, че съществува цикълът (записан само с върховете) $C = u, v', x_1, x_2, \dots, x_{2L}, v'', u$ за v', v'' - съседи на u и $L \in \mathbb{N}$

Понеже v' и v'' са с различни цветове и G_k е двуделен, то във всеки път м/у v' и v'' има четен брой върхове. Цикълът C има дължина $|C| = 2L + 3$, което е нечетно за $\forall L \in \mathbb{N}$. Съществува нечетен цикъл - Абсурд!

Ако всички съседи на u са бели след прилагането на алгоритъма, то u ще бъде оцветен в черно и G_{k+1} е двуделен