Глава 7

Полилинейни и анти-симетрични функции. Инверсии на пермутации.

Определение 7.1. *Ако V е линейно пространство над поле F, то изображение $f : V \to F$ е линейна функция, ако*

$$f(\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n) = \lambda_1 f(a_1) + \ldots + \lambda_n f(a_n)$$

за произволни $a_1, \ldots, a_n \in V$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Грубо казано, линейността на функция $f : V \to F$ означава, че "можем да изнасяме суми и скалари извън аргумента," т.е.

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(a_i)$$

Твърдение 7.2. *Нека V е линейно пространство над поле F. Изображение $f : V \to F$ е линейна функция тогава и само тогава, когато $f(u+v) = f(u) + f(v)$ и $f(\alpha u) = \alpha f(u)$ за произволни $u, v \in V$ и $\alpha \in F$.*

Доказателство. Ако $f : V \to F$ е линейна функция, то

$$f(u+v) = f(1.u + 1.v) = 1.f(u) + 1.f(v) = f(u) + f(v) \quad \text{и} \quad f(\alpha u) = \alpha f(u)$$

за произволни $u, v \in V$, $\alpha \in F$, защото $u + v = 1.u + 1.v$ и αu са частни случаи на линейни комбинации на вектори от V.
Да предположим, че $f(u+v) = f(u) + f(v)$ и $f(\alpha u) = \alpha f(u)$ за произволни $u, v \in V$, $\alpha \in F$. С индукция по $n \in \mathbb{N}$ ще проверим, че

$$f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_n f(v_n)$$

за произволни $v_i \in V$, $\alpha_i \in F$, за да твърдим, че $f : V \to F$ е линейна функция. За $n = 1$ знаем по предположение, че $f(\alpha_1 v_1) = \alpha_1 f(v_1)$. В общия случай,

$$f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{n-1} v_{n-1} + \alpha_n v_n) = f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{n-1} v_{n-1}) + f(\alpha_n v_n)$$

по предположението за съгласуваност на f със събирането на вектори. Вземайки предвид $f(\alpha_n v_n) = \alpha_n f(v_n)$ и индукционното предположение

$$f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{n-1} v_{n-1}) = \alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_{n-1} f(v_{n-1}),$$

получаваме, че

$$f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{n-1} v_{n-1} + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_{n-1} f(v_{n-1}) + \alpha_n f(v_n)$$

и завършваме доказателството.

□

Определение 7.3. *Нека V е линейно пространство над поле F. Изображение*

$$f : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n} \to F$$

е полилинейна функция, ако f е линейна функция относно всеки аргумент.

Определение 7.4. *Нека V е линейно пространство над поле F. Изображение*

$$f : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n} \to F$$

е анти-симетрична функция, ако

$$f(v_1, \ldots, v_p, \ldots, v_q, \ldots v_n) = -f(v_1, \ldots, v_q, \ldots, v_p, \ldots, v_n)$$

променя знака си при размяна на аргументите си v_p и v_q за произволни естествени числа $1 \leq p < q \leq n$.

Твърдение 7.5. *Нека F е числово поле, V е линейно пространство над F и*

$$f : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n} \longrightarrow F$$

е полилинейна функция. В такъв случай, f е анти-симетрична функция тогава и само тогава, когато

$$f(a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_p, \ldots, a_n) = 0$$

се анулира при равни аргументи.

Доказателство. Ако

$$f : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n} \longrightarrow F$$

е полилинейна анти-симетрична функция върху линейно пространство V над числово поле F, то за произволни вектори $a_1, \ldots, a_n \in V$ с $a_p = a_q$ за някои $1 \leq p < q \leq n$ следва

$$f(a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_p, \ldots a_n) = -f(a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_p, \ldots, a_n),$$

защото размяната на a_p с $a_q = a_p$ променя знака на анти-симетричната функция f. В резултат, $2f(a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_p, \ldots, a_n) = 0$, откъдето

$$f(a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_p, \ldots, a_n) = 0,$$

защото произведение на комплексни числа се анулира само ако единият множител е нулев. В горното разсъждение използваме, че полето F е числово, но не използваме полилинейността на f.
Обратно, ако полилинейна функция

$$f : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n} \longrightarrow F$$

се анулира при равни аргументи, то

$$
\begin{aligned}
0 &= f(a_1, \dots, a_p + a_q, \dots, a_p + a_q, \dots, a_n) = \\
&= f(a_1, \dots, a_p, \dots, a_p + a_q, \dots, a_n) + f(a_1, \dots, a_q, \dots, a_p + a_q, \dots, a_n) = \\
&= f(a_1, \dots, a_p, \dots, a_p, \dots, a_n) + f(a_1, \dots, a_p, \dots, a_q, \dots, a_n) + \\
&+ f(a_1, \dots, a_q, \dots, a_p, \dots, a_n) + f(a_1, \dots, a_q, \dots, a_q, \dots, a_n) = \\
&= f(a_1, \dots, a_p, \dots, a_q, \dots, a_n) + f(a_1, \dots, a_q, \dots, a_p, \dots, a_n).
\end{aligned}
$$

Следователно

$$
f(a_1, \dots, a_q, \dots, a_p, \dots, a_n) = -f(a_1, \dots, a_p, \dots, a_q, \dots, a_n)
$$

за произволни $1 \leq p < q \leq n$ и функцията f е анти-симетрична. В горното разсъждение се използва полилинейността на f, но не и това, че полето F е числово.

□

Следващият пример показва, че полилинейна анти-симетрична функция може да не се анулира при равни аргументи, ако основното поле не е числово.

Пример 7.6. *Изображението*

$$
f_0 : \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_2^2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2,
$$

$$
f_0((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1 \quad \text{\textit{за}} \quad (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{Z}_2^2
$$

е полилинейна антисиметрична функция с ненулева стойност

$$
f_0((\overline{1}, \overline{0}), (\overline{1}, \overline{0})) = \overline{1}.\overline{1} + \overline{1}.\overline{0} - \overline{0}.\overline{1} = \overline{1}
$$

за равни аргументи $(\overline{1}, \overline{0}) \in \mathbb{Z}_2^2$.

Доказателство. Линейността на f_0 спрямо първия аргумент следва от

$$
\begin{aligned}
f_0((x_1, x_2) + (z_1, z_2), (y_1, y_2)) &= f_0((x_1 + z_1, x_2 + z_2), (y_1, y_2)) = \\
&= (x_1 + z_1) y_1 + (x_1 + z_1) y_2 - (x_2 + z_2) y_1 = \\
&= x_1 y_1 + z_1 y_1 + x_1 y_2 + z_1 y_2 - x_2 y_1 - z_2 y_1 = \\
&= (x_1 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1) + (z_1 y_1 + z_1 y_2 - z_2 y_1) = \\
&= f_0((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + f_0((z_1, z_2), (y_1, y_2))
\end{aligned}
$$

и от

$$
\begin{aligned}
f_0(\lambda(x_1, x_2), (y_1, y_2)) = f_0((\lambda x_1, \lambda x_2), (y_1, y_2)) &= (\lambda x_1) y_1 + (\lambda x_1) y_2 - (\lambda x_2) y_1 = \\
&= \lambda(x_1 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1) = \lambda f_0((x_1, x_2), (y_1, y_2)).
\end{aligned}
$$

Аналогично получаваме линейността на f относно втория аргумент от

$$
\begin{aligned}
f_0((x_1, x_2), (y_1, y_2) + (z_1, z_2)) &= f_0((x_1, x_2), (y_1 + z_1, y_2 + z_2)) = \\
&= x_1(y_1 + z_1) + x_1(y_2 + z_2) - x_2(y_1 + z_1) = \\
&= x_1 y_1 + x_1 z_1 + x_1 y_2 + x_1 z_2 - x_2 y_1 - x_2 z_1 = \\
&= (x_1 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_1 z_1 + x_1 z_2 - x_2 z_1) = \\
&= f_0((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + f_0((x_1, x_2), (z_1, z_2))
\end{aligned}
$$

и от

$$
\begin{aligned}
f_0((x_1, x_2), \lambda(y_1, y_2)) = f_0((x_1, x_2), (\lambda y_1, \lambda y_2)) &= x_1(\lambda y_1) + x_1(\lambda y_2) - x_2(\lambda y_1) = \\
&= \lambda(x_1 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1)) = \lambda f_0((x_1, x_2), (y_1, y_2)).
\end{aligned}
$$

За произволни $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{Z}_2^2$ е в сила

$$-f_0((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = -(x_1 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1) =$$
$$= -x_1 y_1 - x_1 y_2 + x_2 y_1 = y_1 x_1 + y_1 x_2 - y_2 x_1 = f_0((y_1, y_2), (x_1, x_2)),$$

защото $y_1 x_1 + x_1 y_1 = 2x_1 y_1 = \overline{0}$. Следователно $f_0 : \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2$ е полилинейна антисиметрична функция, която не се анулира при равни аргументи.

□

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.7. *Всяко подреждане $i_1, i_2, \ldots, i_n$ на числата $1, 2, \ldots, n$ се нарича пермутация на $1, 2, \ldots, n$.*

Например, всички пермутации на 1 и 2 са $1, 2$ и $2, 1$.
Всички пермутации на $1, 2, 3$ са

$$1, 2, 3; \quad 2, 3, 1; \quad 3, 1, 2; \quad 1, 3, 2; \quad 2, 1, 3; \quad 3, 2, 1.$$

Изобщо, пермутациите на $1, 2, \ldots, n$ за $n \geq 2$ са $n! := n(n-1)(n-2)\ldots.2.1$ на брой. По-точно, за първото число i_1 от пермутация $i_1, \ldots, i_n$ на $1, \ldots, n$ има n възможности. След фиксиране на i_1 има $n-1$ възможности за $i_2 \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1\}$. После за $i_3 \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, i_2\}$ има $n-2$ възможности, които са независими от избора на i_1, i_2 и т.н., за $i_{n-1} \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_{n-2}\}$ има две възможности, независими от избора на $i_1, \ldots, i_{n-2}$ и за $i_n \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_{n-1}\}$ има единствена възможност.
Считаме, че растящият ред $1, 2, \ldots, n-1, n$ на числата от 1 до n е естественият и всяко негово нарушение в пермутация $i_1, \ldots, i_n$ наричаме инверсия. По-точно:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.8. *Казваме, че числата i_p и i_q от пермутация $i_1, \ldots, i_p, \ldots, i_q, \ldots, i_n$ образуват инверсия, ако $1 \leq p < q \leq n$ и $i_p > i_q$. Пермутация $i_1, \ldots, i_n$ е четна (нечетна), ако има четен (нечетен) брой инверсии.*

Например, пермутацията $1, 2$ на 1 и 2 е четна, защото има 0 инверсии. Пермутацията $2, 1$ има единствена инверсия и е нечетна.
Четните пермутации на числата 1, 2 и 3 са

$$1, 2, 3; \quad 2, 3, 1; \quad 3, 1, 2,$$

защото $1, 2, 3$ има 0 инверсии, $2, 3, 1$ има 2 инверсии - между 2 и 1, както и между 3 и 1, а $3, 1, 2$ има две инверсии - между 3 и 1, както и между 3 и 2. Нечетните пермутации на $1, 2, 3$ са

$$1, 3, 2; \quad 2, 1, 3; \quad 3, 2, 1.$$

По-точно, $1, 3, 2$ има единствена инверсия, която е между 3 и 2. Пермутацията $2, 1, 3$ има единствена инверсия между 2 и 1, а пермутацията $3, 2, 1$ има 3 инверсии - между 3 и 2, между 3 и 1, както и между 2 и 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.9. *Размяната (i_p, i_q) на две числа i_p и i_q от пермутация $i_1, \ldots, i_p, \ldots, i_q, \ldots, i_n$ се нарича транспозиция.*

Да забележим, че прилагането на транспозицията $(1, 2)$ към нечетната пермутация $1, 3, 2$ на $1, 2, 3$ дава четната пермутация $2, 3, 1$. По-общо, в сила е следната

Лема 7.10. *Прилагането на транспозиция променя четността на пермутация.*

Доказателство. Нека $i_1, \dots, i_n$ е пермутация на числата $1, \dots, n$. Ако приложим транспозиция (i_p, i_{p+1}) на съседни числа от $i_1, \dots, i_n$ (т.е. ако разменим помежду си съседните числа i_p и i_{p+1}), то двойките от вида i_r, i_s; i_r, i_p и i_r, i_{p+1} с $r, s \in \{1, \dots, n\} \setminus \{p, p+1\}$, $r \neq s$ не променят взаимното си положение. Затова между тях не изчезват и не възникват инверсии. Ако $i_p < i_{p+1}$, то действието на транспозицията (i_p, i_{p+1}) поражда инверсия между i_{p+1}, i_p и променя четността на пермутацията. Ако $i_p > i_{p+1}$, то транспозицията (i_p, i_{p+1}) премахва инверсията между i_p, i_{p+1} и променя четността на пермутацията.
За произволни $1 \leq p < q \leq n$ ще представим транспозицията (i_p, i_q) като последователност от нечетен брой транспозиции на съседни числа. Вече доказахме, че всяка транспозиция на съседни числа променя четността на пермутация. Следователно прилагането на нечетен брой транспозиции на съседни числа променя нечетен брой пъти четността на пермутация и прилагането на (i_p, i_q) променя четността на пермутацията.
Разглеждаме пермутацията

$$i_1, \dots, i_{p-1}, i_p, i_{p+1}, i_{p+2}, \dots, i_{q-2}, i_{q-1}, i_q, i_{q+1}, \dots, i_n.$$

Транспозицията (i_p, i_q) премества числото i_p между i_{q-1} и i_{q+1} (на старото място на i_q) и числото i_q между i_{p-1} и i_{p+1} (на старото място на i_p). Последователно разменяме i_p с $i_{p+1}, i_{p+2}, \dots, i_q$, за да преместим i_p между i_q и i_{q+1}. С други думи, прилагаме транспозициите на съседни числа

$$(i_p, i_q) \dots (i_p, i_{p+2})(i_p, i_{p+1}),$$

четени отдясно наляво. Този запис се налага от факта, че транспозициите са изображения на множеството $\{1, \dots, n\}$ в себе си и аргументът на изображение се записва вдясно от изображението. В резултат, първата транспозиция, която действа е най-дясната и тя е последвана от останалите, четени отдясно наляво. Броят на транспозициите, с които изпращаме i_p на мястото на i_q е $q-p$, защото това е броят на числата от $p+1$ до q. След като преместим i_p между i_q и i_{q+1}, трабва да разменим i_q с $i_{q-1}, \dots i_{p+1}$, за да изпратим i_q на мястото на i_p между i_{p-1} и i_{p+1}. С други думи, прилагаме транспозициите на съседни числа

$$(i_q, i_{p+1}) \dots (i_q, i_{q-2})(i_q, i_{q-1}),$$

чийто брой е равен на броя на естествените числа от $p+1$ до $q-1$, т.е. на $q-1-p$. Това дава разлагане

$$(i_p, i_q) = (i_q, i_{p+1}) \dots (i_q, i_{q-2})(i_q, i_{q-1})(i_p, i_q) \dots (i_p, i_{p+2})(i_p, i_{p+1})$$

в произведение на $(q-p) + (q-p-1) = 2(q-p) - 1$ транспозиции на съседни числа и завършва доказателството.

□

Следствие 7.11. *Произволна транспозиция (i, j), $1 \leq i < j \leq n$ е биективно изображение на множеството на четните пермутации на $1, \dots, n$ в множеството на нечетните пермутации на $1, \dots, n$.*

Доказателство. Ако P_n^{even} е множеството на четните пермутации на числата $1, \dots, n$, а P_n^{odd} е множеството на нечетните пермутации на $1, \dots, n$, то съгласно Лема 7.10 произволна транспозиция (i, j) задава изображение

$$(i, j) : P_n^{\mathrm{even}} \longrightarrow P_n^{\mathrm{odd}}. \tag{7.1}$$

Двукратното прилагане на транспозицията (i,j) е тъждественото изображение на $\{1,\ldots,n\}$, което по определение оставя на място всяко от числата на това множество. Следователно

$$(i,j) : P_n^{\mathrm{odd}} \longrightarrow P_n^{\mathrm{even}}$$

е обратното изображение на (7.1) и (7.1) е взаимно еднозначно изображение на множества.

□

Следствие 7.12. *За произволно естествено число $n \geq 2$, множеството P_n^{even} на четните пермутации на $1,\ldots,n$ и множежжството P_n^{odd} на нечетните пермутации на $1,\ldots,n$ имат един и същи брой елементи*

$$|P_n^{\mathrm{even}}| = |P_n^{\mathrm{odd}}| = \frac{|P_n|}{2} = \frac{n!}{2}.$$

Доказателство. Да забележим, че множеството $P_n = P_n^{\mathrm{even}} \cup P_n^{\mathrm{odd}}$ на всички пермутации на числата $1,\ldots,n$ е непресичащо се обединение на четните и нечетните пермутации на $1,\ldots,n$. Следователно $|P_n| = |P_n^{\mathrm{even}}| + |P_n^{\mathrm{odd}}|$. Съгласно Следствие 7.11 имаме $|P_n^{\mathrm{even}}| = |P_n^{\mathrm{odd}}|$. Вземайки предвид $|P_n| = n!$, завършваме доказателството на следствието.

□

Твърдение 7.13. *Нека V е линейно пространство над поле F,*

$$f : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n} \longrightarrow F$$

е анти-симетрична функция на n аргумента, $a_1,\ldots,a_n \in V$ са вектори от V, а $i_1,\ldots,i_n$ е пермутация на числата $1,2,\ldots,n$ с $[i_1,\ldots,i_n]$ инверсии. Тогава

$$f(a_{i_1},\ldots,a_{i_n}) = (-1)^{[i_1,\ldots,i_n]} f(a_1,\ldots,a_n).$$

Доказателство. Ако пермутацията $j_1,\ldots,j_n$ се получава от пермутацията $i_1,\ldots,i_n$ чрез прилагане на транспозиция, то

$$(-1)^{[i_1,\ldots,i_n]} = -(-1)^{[j_1,\ldots,j_n]},$$

защото прилагането на транспозиция променя четността на пермутация и

$$f(a_{i_1},\ldots,a_{i_n}) = -f(a_{j_1},\ldots,a_{j_n})$$

от определението за анти-симетрична функция.
Съществуват краен брой транспозиции, свеждащи пермутацията $i_1,\ldots,i_n$ към растящия ред на числата $1,2,\ldots,n$. По-точно, ако $i_r = 1$ за някакво $1 \leq r \leq n$, то разменяме i_1 с i_r и получаваме пермутация $k_1,\ldots,k_n$, започваща с $k_1 = 1$. Ако $k_s = 2$, то прилагаме транспозицията (k_2,k_s) и получаваме пермутация $l_1,\ldots,l_n$ с $l_1 = 1$ и $l_2 = 2$. Продължаваме по същия начин с прилагане на транспозиции, преместващи 3 в трета позиция, 4 в четвърта позиция и т.н. $n-1$ в $(n-1)$-ва позиция. Тогава последното число е n и сме получили растящия ред на числата $1,\ldots,n$.
Нека $1,\ldots,n$ се получава от $i_1,\ldots,i_n$ чрез прилагане на m транспозиции. Тогава

$$(-1)^{[i_1,\ldots,i_n]} = (-1)^m (-1)^{[1,\ldots,n]} = (-1)^m,$$

защото прилагането на m транспозиции сменя m пъти четността на пермутация и

$$f(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) = (-1)^m f(a_1, \ldots, a_n)$$

защото прилагането на m транспозиции към аргументите на анти-симетрична функция води до умножение с $(-1)^m$. В резултат,

$$f(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) = (-1)^{[i_1, \ldots, i_n]} f(a_1, \ldots, a_n),$$

което трябваше да се докаже.

$\square$