Лекция 1: Реални числа – първа част

За да можем да правим математически анализ, се нуждаем от знания за обекта, върху който работим: реалните числа. Това за съжаление е доста трудна задача. Строгото изграждане на тази теория и доказателството на двете теореми, с които ще започне следващата лекция, излизат извън този курс. Ще се задоволим със строга формулировка на основните свойства на реалните числа и интуитивно обяснение на тяхната природа.

1 Основни понятия

множества, означения, квантори – ще ги оставим на курса по Дискретни структури
изображения (графика, инекция, сюрекция, биекция) – оставяме ги на упражненията

2 Множеството от безкрайните десетични дроби

Понятието за число се изгражда постепенно с развитието на човечеството като цяло и на всеки индивид в частност. От училище сте запознати с рационалните числа и можете да смятате с тях. Да фиксираме следните стандартни означения:

- множеството на естествените числа $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.
- множеството на целите числа $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- множеството на рационалните числа $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$.

Също от училище сте свикнали с подреждането на числата, с които се запознавате, върху "числовата права". По този начин се получава съответствие между геометрични обекти (точки върху правата) и числа. Естествено е да очаквате, че трябва да можете да "мерите" дължината на дадена отсечка, тоест да ѝ съпоставите някакво неотрицателно число по един разумен начин, съгласуван с опита. Още в древна Гърция е забелязано, че дължината на диагонала на квадрат "не е съизмерима" с дължината на неговата страна, тоест не е рационално число, умножено по дължината на квадрата. Ако квадратът е със страна едно, от теоремата на Питагор знаем, че дължината на диагонала, повдигната на квадрат, трябва да е две.

Пример 2.1. Числото $\sqrt{2}$ (дължината на диагонала на квадрат със страна 1) не е рационално, т.е. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Доказателство. Допускаме противното, че $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, по-точно $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ за $p, q \in \mathbb{N}$. Без ограничение на общността (б.о.о.) считаме, че НОД$(p, q) = 1$, т.е. числата p, q са взаимно прости. Тогава $\sqrt{2}q = p$ и $\left(\sqrt{2}q\right)^2 = p^2 \Rightarrow 2q^2 = p^2$. Понеже $2 \mid p^2$, то значи $2 \mid p$ или $p = 2r$ за някое $r \in \mathbb{N}$. Заместваме p: $2q^2 = (2r)^2 = 4r^2$, следователно сега $q^2 = 2r^2$. Сега имаме $2 \mid q^2 \Rightarrow 2 \mid q$. Оказва се, че p, q са четни, което е противоречие с нашето допускане. $\square$

Примери като този демонстрират необходимостта от разширяване на понятието за число. Надявам се, че този курс ще покаже, че тази необходимост далеч не се изчерпва с възможността да намираме корени на полиноми с цели коефициенти (например $x^2 - 2 = 0$). Като най-близък до интуцията, която имате от досегашния си опит, е моделът на реалните числа като множеството $\mathbb{R}$ от всички безкрайни десетични дроби. От физическа гледна точка, ако "мерим" някаква физическа величина, това винаги става с някаква (все по-голяма с развитието на технологиите) точност. Нека мерим величината a (дължина, тегло, време или нещо друго):

1. Ако мерим с точност до 1, то съществува $a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, такова че: $a_0 \le a \le a_0 + 1$
2. Ако мерим с точност до 0.1, то съществува $a_1 \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, такова че $a_0.a_1 \le a \le a_0.a_1 + 0.1$
3. Ако мерим с точност до 0.01, то съществува $a_2 \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, такова че $a_0.a_1a_2 \le a \le a_0.a_1a_2 + 0.01$ и т.н.

Тук идва абстракцията: мислим, че можем да продължаваме този процес до безкрайност, и да представим величината a като безкрайната десетична дроб $a_0.a_1a_2 \cdots a_n \cdots$.

И тъй, означаваме множеството от всички бекрайни десетични дроби с

$$\mathbb{R} = \{s\, a_0.a_1a_2 \cdots :\ s \in \{+, -\},\ a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ a_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}, n \in \mathbb{N}\}$$

Горното означение не е съвсем точно: възможно е две различни бекрайни десетични дроби да представят едно и също число (такъв ефект има и при $\mathbb{Q}$: 1/2=3/6). Първият пример е $0.999 \cdots = 1.000 \cdots$. Опитайте се да се убедите в това. Формално, две различни бекрайни десетични дроби $a, b \in \mathbb{R}$ представят едно и също число, ако имаме

Дефиниция 2.2. *Равенство на* $a, b \in \mathbb{R}$

Нека $a = a_0.a_1a_2 \cdots$ и $b = b_0.b_1b_2 \cdots$. Казваме, че a и b са равни като реални числа, ако имат еднакви знаци (знаците могат да са различни само ако и двете дроби са нулеви) и или $a_i = b_i$ за всички $i \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ (тоест десетичните им представяния съвпадат), или съществува $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такова, че $a_i = b_i$ за всички $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, $a_n = b_n + 1$ и $a_j = 0$, $b_j = 9$ за всички $j \in \{n+1, n+2, \ldots\}$ (тоест $a_0.a_1a_2 \cdots a_{n-1}a_n000 \cdots = a_0.a_1a_2 \cdots a_{n-1}(a_n - 1)999 \cdots$).

От училище ви е известно, че всяко рационално число може да бъде представено като крайна или безкрайна периодична дроб, значи имаме $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Дефиниция 2.3. *Сравняване на* $a, b \in \mathbb{R}$

1. Ако $a \ge 0, b \ge 0$, то

$$a \le b \iff \begin{cases} a_i = b_i, & \forall\, i \in \{0, 1, 2 \ldots\} \\ \text{или} & \\ \exists\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, & a_i = b_i\ \forall\, i \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \text{ и } a_n < b_n \end{cases}$$

2. Ако $a \le 0, b \ge 0$, то $a \le b$

3. Ако $a \le 0, b \le 0$, то $a \le b \iff |a| \ge |b|$

Ако $a \le b$ и a, b не са равни, то пишем $a < b$. По този начин вече можем да сравняваме бекрайни десетични дроби или, иначе казано, в множеството $\mathbb{R}$ има дефинирана наредба.

За да говорим за безкрайните десетични дроби като за числа, е важно и да можем да извършваме алгебричните операции събиране и умножение с тях (и при това основните закони за събирането и умножението да остават в сила). Да, това може да се направи, и тези, които се интересуват, могат да намерят съответните формални дефиниции и строго проверка на законите в учебника на Садовничий и Сендов. Доста е дълго, защото винаги може да има пренос, който да промени десетичния запис на началото. Неформалната идея обаче е ясна: "отрязваме" безкрайните десетични дроби, които ще събираме (или умножаваме) до n-тия знак след десетичната точка и събираме (или умножаваме) получените крайни десетични дроби. Идеята е, че сумата на крайните десетични дроби е близо (колко близо зависи от n) до сумата на безкрайните десетични дроби.

3 Ограничени множества от реални числа, горна и долна граница, супремум и инфимум

Сега можем да забравим за природата на елементите на $\mathbb{R}$ и да работим само с тяхната наредба. Основните свойства на наредбата са описани в началото на следващата лекция.

Дефинициите от тази секция са първото ново знание, което ще бъде постоянно използвано през целия курс по ДИС1 (също и ДИС2). В тези дефиниции A е подмножество на $\mathbb{R}$ (и е важна само наредбата в $\mathbb{R}$).

Дефиниция 3.1. *Множество, ограничено отгоре. Множество, ограничено отдолу*

Казваме, че A е ограничено отгоре, ако съществува $M \in \mathbb{R}$ такова, че всички елементи a на А са по-малки или равни на M ($\exists\, M \in \mathbb{R}\ \forall a \in A : a \le M$). Ако $M \ge a$ за всяко $a \in A$, то M се нарича горна граница (мажоранта) на A. Друг начин да запишем същото е $A \subset (-\infty, M]$.

Съвсем аналогично се дефинира множество, ограничено отдолу: A е ограничено отдолу, ако съществува $M \in \mathbb{R}$ такова, че всички елементи a на А са по-големи или равни на M ($\exists\, M \in \mathbb{R}\ \forall a \in A : a \ge M$). Всяко $M \in \mathbb{R}$, за което $A \subset [M, +\infty)$, се нарича долна граница (миноранта) на A.

Едно от нещата, на които ще се учим, е умението за отрицание (negation) на формални твърдения. В следващите няколко реда ще упражним именно него.

Пример 3.2. A не е ограничено отгоре точно когато за всяко реално число съществува елемент на A, който е по-голям от числото:

$$\begin{aligned}
&\neg\,(\exists\, M \in \mathbb{R}\ \forall a \in A : a \le M) \equiv \\
\equiv\ &\forall M \in \mathbb{R}\ \neg\,(\forall a \in A : a \le M) \equiv \\
\equiv\ &\forall M \in \mathbb{R}\ \exists a \in A : \neg\,(a \le M) \equiv \\
\equiv\ &\forall M \in \mathbb{R}\ \exists a \in A : a > M.
\end{aligned}$$

Дефиниция 3.3. *Ограничено множество*

A се нарича ограничено, ако A е ограничено отгоре и A е ограничено отдолу.

Следната дефиниция е централната за тази лекция:

Дефиниция 3.4. *Точна горна граница. Точна долна граница*

Нека $A \subset \mathbb{R}$ е непразно множество, ограничено отгоре. Точна горна граница или супремум на A ($\sup A$) наричаме най-малката от всички горни граници на A, т.е.

1. $a \leq \sup A \; \forall \, a \in A$ ($\sup A$ е горна граница на A).
2. $\forall \, c < \sup A \; \exists \, a \in A : a > c$ (няма по-малка горна граница от $\sup A$).

Нека $A \subset \mathbb{R}$ е непразно множество, ограничено отдолу. Точна долна граница или инфимум на A ($\inf A$) наричаме най-голямата от всички долни граници на A.

Пример 3.5. Да видим някои примери за супремуми на множества:

- Супремумът на $[0, 1]$ е $\sup [0, 1] = 1$
- $\sup (0, 1) = 1$
- $\sup \left\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = 1$
- $\sup \left[(-2, 0) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}\right] = \frac{1}{2}$

Пример 3.6. Какво означава, че c не е $\sup A$? Това е вярно точно когато $\exists \, a \in A : a > c$ (c не е горна граница за A) или $\exists \, d < c \; \forall \, a \in A : a \leq d$ (съществува по-малка горна граница). Използвахме

$$\begin{aligned} &\neg \left(\forall \, c < \sup A \; \exists \, a \in A : a > c\right) \equiv \\ &\equiv \exists \, c < \sup A \; \forall \, a \in A : a \leq c. \end{aligned}$$

Упражнение 3.7. Докажете, че $\sup (A + B) = \sup A + \sup B$, където сме дефинирали $A + B \coloneqq \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

Доказателство. Трябва да проверим, че сборът от супремумите на A и B е горна граница на множеството $A + B$, от една страна, а от друга - да видим, че всяко $c < \sup A + \sup B$ не се явява горна граница на $A + B$.

Първо ще се убедим, че $\sup A + \sup B$ е горна граница на $A + B$. Ползваме означенията $a \in A, b \in B$. Нека $x = a + b \in A + B$ е произволен елемент на множеството $A + B$. Понеже

$$\begin{cases} a \in A, \, \sup A \geq a \\ b \in B, \, \sup B \geq b \end{cases} \Longrightarrow x = a + b \leq \sup A + \sup B$$

Следователно $\forall \, x \in A + B : \sup A + \sup B \geq x$ и значи $\sup A + \sup B$ е горна граница за $A + B$.

Сега, взимаме произволно $c < \sup A + \sup B$. Да положим $\varepsilon = \sup A + \sup B - c > 0$. Тогава $\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sup A + \sup B - c}{2} > 0$ и следователно имаме

$$\begin{cases} \sup A - \frac{\varepsilon}{2} < \sup A & \Rightarrow \quad \exists \, a_0 \in A, \; a_0 > \sup A - \frac{\varepsilon}{2} \\ \sup B - \frac{\varepsilon}{2} < \sup B & \Rightarrow \quad \exists \, b_0 \in B, \; b_0 > \sup B - \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Следователно $a_0 + b_0 > \sup A + \sup B - \varepsilon$. Показахме, че $a_0 + b_0 > c$, $x_0 \coloneqq a_0 + b_0 \in A + B$ и следователно c няма как да бъде горна граница на $A + B$. □

Ще докажем, че в множеството от безкрайните десетични дроби е в сила следното изключително важно свойство:

Твърдение 3.8. *(Принцип за непрекъснатост) Всяко ограничено отгоре непразно множество $A \subset \mathbb{R}$ има супремум. Всяко ограничено отдолу непразно множество $A \subset \mathbb{R}$ има инфимум.*

Пример 3.9. Ако $A = \left\{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0, q^2 \leq 2\right\}$, то $\sup A = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Дефиниция 3.10. *Цяла част на $x \in \mathbb{R}$*

Нека $x \in \mathbb{R}$ - произволно. Цяла част на числото x наричаме най-голямото цяло число $z \in \mathbb{Z}$, ненадвишаващо x. Бележим го с $\lfloor x \rfloor$. Формално,

$$\lfloor x \rfloor = \max \{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$$

За тази функция ($\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$) могат да се съставят много примери и лесно да се начертае характерната стъпаловидна графика. Така например, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$; $\lfloor \pi \rfloor = 3$; $\lfloor 0 \rfloor = 0$.

Доказателство. Първо да разгледаме случая, когато $B := A \cap [0, +\infty)$ не е празно. Ясно е, че супремумите на A и B, ако съществуват, трябва да съвпадат. Ясно е също, че B е ограничено отгоре. Тогава $\{\lfloor a \rfloor : a \in B\}$ е ограничено отгоре подмножество на $\{0\} \cup \mathbb{N}$, следователно е крайно.

1. Избираме $\overline{a_0} = \max\{\lfloor a \rfloor : a \in B\}$ - най-голямата цяла част на число, което е елемент на B.
   Нека сега означим $B_1 = \{a \in B : a = \overline{a_0} \cdot a_1 a_2 \cdots\} \neq \emptyset$ - реалните числа от B с цяла част точно $\overline{a_0}$.

2. Избираме $\overline{a_1} = \max\{a_1 \in \{0, 1, \ldots, 9\} : \exists\, a \in B_1, a = \overline{a_0} \cdot a_1 a_2 \cdots\}$ - това е максималното такова число измежду $0, 1, \cdots, 9$, за което има елемент от B от горния вид. В някакъв смисъл - най-голям елемент на множеството, ако сравняваме елементите само по a_0 и a_1 (всички елементи са от вида $a = a_0 \cdot a_1 a_2 \cdots$, като в записа участва десетична точка).
   Аналогично строим $B_2 = \{a \in B_1 : a = \overline{a_0} \cdot \overline{a_1} a_2 \cdots\} \neq \emptyset$.

3. Продължаваме с $\overline{a_2} = \max\{a_2 \in \{0, 1, \ldots, 9\} : \exists\, a \in B_2, a = \overline{a_0} \cdot \overline{a_1} a_2 \cdots\}$ и т.н.

Така можем да построим $\overline{a} = \overline{a_0} \cdot \overline{a_1}\, \overline{a_2} \cdots \in \mathbb{R}$. Твърдим, че $\overline{a} = \sup B$.

Първо да проверим, че $\overline{a} \geq a$ за всяко $a \in B$. Фиксираме произволно $a \in B$. Ако $\overline{a}_i = a_i$ за всяко $i \in \{0, 1, 2 \ldots\}$, то $\overline{a} = a$. В противен случай съществува $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такова, че $a_i = \overline{a}_i$ за всички $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ и $a_n \neq \overline{a}_n$. Случаят $a_n > \overline{a}_n$ е невъзможен от начина на постоение на $\overline{a}_n$. Следователно $a_n < \overline{a}_n$, откъдето имаме $\overline{a} \geq a$. С това проверихме, че $\overline{a}$ е горна граница за B. Нека сега $d < \overline{a}$ - произволно. Необходимо е да покажем, че $d < a$ за някое $a \in B$, позовавайки се на **Дефиниция 1.4**.

Тъй като $d < \overline{a}$, съществува $n \in \mathbb{N}$ такова, че $\begin{cases} d_0 &= \overline{a_0} \\ d_1 &= \overline{a_1} \\ \ldots & \\ d_n &= \overline{a_n} \\ d_{n+1} &< \overline{a_{n+1}}. \end{cases}$

Но $\overline{a_{n+1}} = \max\{a_{n+1} \in \{0, 1, \ldots, 9\} : \exists\, a \in B_n, a = \overline{a_0} \cdot \overline{a_1}\, \overline{a_2} \cdots \overline{a_n}\, a_{n+1} \cdots\}$ Следователно съществува $a \in B$, за което $a = \overline{a_0} \cdot \overline{a_1}\, \overline{a_2} \cdots \overline{a_n}\, \overline{a_{n+1}} a_{n+2} \cdots$ и значи $a > d$. Следователно d не е горна граница за B.

Ако $A \subset (-\infty, 0)$, прилагаме подобна конструкция към $\{|a|\colon a \in A\}$, но вместо максимални вземаме минимални елементи и полученото число вземаме със знак минус. $\square$

ЗАДАЧИ ЗА ОБМИСЛЯНЕ ВКЪЩИ (до следващата седмица):

Упражнение 3.11. Да се докаже, че A е ограничено точно тогава, когато съществува $M \geq 0$ такова, че $|a| \leq M$ за всяко $a \in A$.

Упражнение 3.12. (Принцип на трансфинитната индукция) Нека $a \in \mathbb{R}$ и нека $M \subset [a, +\infty)$ е непразно множество от реални числа. Нека за всяко $b \geq a$ знаем, че ако $[a, b) \subset M$, то съществува $\varepsilon > 0$ такова, че $[a, b + \varepsilon) \subset M$. Да се докаже, че $M = [a, +\infty)$.

Забележка: В горното при $b = a$ формално получаваме $[a, a) = \emptyset \subset M$ влече $[a, a + \varepsilon) \subset M$ за някое положително ε.