Глава 19

Собствени вектори и инвариантни подпространства на линеен оператор.

Определение 19.1. *Характеристичният полином на квадратна матрица $A \in M_{n\times n}(F)$ от ред n е*

$$f_A(x) = \det(A - xE_n) = \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-x \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^n x^n + (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})x^{n-1} + \ldots + \det(A).$$

Корените на $f_A(x) = 0$ се наричат характеристични корени на A.

Да забележим, че характеристичното корени на $A \in M_{n\times n}(F)$ не са обезателно от F. Например,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

има характеристичен полином

$$f_A(x) = \det(A - xE_2) = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -1 & -x \end{vmatrix} = x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$$

и характеристични корени $\pm\sqrt{-1} = \pm i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Лема 19.2. *Ако $A \in M_{n\times n}(F)$ и $B = T^{-1}AT \in M_{n\times n}(F)$ са подобни матрици, то характеристичните полиноми $f_A(x) = f_B(x)$ на A и B съвпадат.*

Доказателство. Вземайки предвид $xE_n = x(T^{-1}E_nT) = T^{-1}(xE_n)T$, пресмятаме

$$f_B(x) = \det(B - xE_n) = \det[T^{-1}AT - T^{-1}(xE_n)T] =$$
$$= \det[T^{-1}(A - xE_n)T] = \det(T^{-1})\det(A - xE_n)\det(T) =$$
$$= \det(T^{-1}T)\det(A - xE_n) = \det(E_n)f_A(x) = f_A(x).$$

□

Да напомним, че матриците на линеен оператор $\varphi : V \to V$ в крайномерно пространство V спрямо различни базиси са подобни помежду си. Това дава основание за следното

Определение 19.3. *Нека $\varphi : V \to V$ е линеен оператор в крайномерно пространство V над поле F. Характеристичният полином на матрицата на φ спрямо един, а оттам и всеки един базис на V се нарича характеристичен полином на φ и се бележи с $f_\varphi(x)$.*
Характеристичните корени на φ са корените на $f_\varphi(x)$.

Определение 19.4. *Собствен вектор на линеен оператор $\varphi : V \to V$ е ненулев вектор $v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$ с $\varphi(v) = \lambda v$ за някое $\lambda \in F$. Казваме, че λ е собствена стойност на φ, отговаряща на собствения вектор v.*

С други думи, собствените вектори на $\varphi : V \to V$ са точно онези ненулеви вектори v от V, върху които φ действа като хомотетия с коефициент съответната собствена стойност $\lambda \in F$.

Твърдение 19.5. *Нека $\varphi : V \to V$ е линеен оператор в крайномерно линейно пространство V над поле F. Тогава собствените стойности на φ съвпадат с характеристичните корени на φ от F.*

Доказателство. Да забележим, че хомогенна система линейни уравнения $Mx = \mathbb{O}_{n\times 1}$ с квадратна матрица от коефициенти $M \in M_{n\times n}(F)$ има ненулево решение тогава и само тогава, когато размерността на пространството от решения е $n - \mathrm{rk}(M) > 0$. Последното е равносилно на $\mathrm{rk}(M) < n$ и е изпълнено точно когато $\det(M) = 0$.
Нека $e = (e_1, \ldots, e_n)$ е базис на V и $A \in M_{n\times n}(F)$ е матрицата на φ спрямо базиса e на V. Произволен ненулев вектор $v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$ с координати $x \in M_{n\times 1}(F) \setminus \{\mathbb{O}_{n\times 1}\}$ спрямо базиса e се изобразява във вектора $\varphi(v) = \varphi(ex) = \varphi(e)x = (eA)x = e(Ax)$, съгласно Лема 16.1 - Матрична форма на лиинейността на изображение и определението за A. Следователно v е собствен вектор на φ, отговарящ на собствена стойност $\lambda \in F$ тогава и само тогава

$$e(Ax) = \varphi(v) = \lambda v = \lambda(ex) = e(\lambda x),$$

съгласно свойствата на умножението на две матрици със скалар. По Лема 16.4 (ii) и свойствата на единичната матрица $E_n \in M_{n\times n}(F)$, горното е еквивалентно на $Ax = \lambda x = \lambda(E_n x) = (\lambda E_n)x$ и е в сила точно когато хомогенната система линейни уравнения $(A - \lambda E_n)x = Ax - (\lambda E_n)x = \mathbb{O}_{n\times 1}$ има ненулево решение $x \in M_{n\times 1}(F) \setminus \{\mathbb{O}_{n\times 1}\}$. Последното условие е равносилно на анулирането $0 = \det(A - \lambda E_n) = f_A(\lambda)$ на детерминантата на матрицата от коефициенти $A - \lambda E_n \in M_{n\times n}(F)$, която съвпада със стойността $f_\varphi(\lambda) = f_A(\lambda) = 0$ на характеристичния полином $f_\varphi(x)$ на φ в $\lambda \in F$. По този начин установихме, че $\lambda \in F$ е собствена стойност на φ тогава и само тогава, когато λ е характеристичен корен на φ, който принадлежи на F.

□

Твърдение 19.6. *Нека* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *са различни собствени стойности на линеен оператор* $\varphi : V \to V$ *в пространство* V *над поле* F. *За всяко* $1 \leq i \leq n$ *да предположим, че* $v_{i,1}, \ldots, v_{i,k_i} \in V$ *са линейно независими собствени вектори на* φ, *отговарящи на собствената стойност* λ_i. *Тогава системата вектори*

$$\{v_{i,j} \,|\, 1 \leq j \leq k_i,\, 1 \leq i \leq n\}$$

е линейно независима.

В частност, ако $v_1, \ldots, v_n$ *са собствени вектори на* φ, *отговарящи на различни собствени стойности* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, *то* $v_1, \ldots, v_n$ *са линейно независими, защото всеки от тези собствени вектори е ненулев, а оттам и линейно независим.*

Доказателство. С индукция по броя n на разглежданите собствени стойности $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ на φ, за $n = 1$ няма какво да се доказва. В общия случай да разгледаме линейна комбинация

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} \mu_{i,j} v_{i,j} = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V \tag{19.1}$$

на дадените вектори, равна на нулевия вектор на V. Действието на φ върху (19.1) дава

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} \mu_{i,j} \lambda_i v_{i,j} = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V \tag{19.2}$$

съгласно $\varphi(v_{i,j}) = \lambda_i v_{i,j}$ и $\varphi(\overrightarrow{\mathcal{O}}_V) = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$. За да елиминираме $v_{n,1}, \ldots, v_{n,k_n}$ от (19.1) и (19.2), умножаваме (19.1) с $-\lambda_n$ и прибавяме към (19.2). Получаваме

$$\overrightarrow{\mathcal{O}}_V = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} \mu_{i,j}(\lambda_i - \lambda_n) v_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{k_i} \mu_{i,j}(\lambda_i - \lambda_n) v_{i,j}.$$

По индукционно предположение, системата $\{v_{i,j} \,|\, 1 \leq i \leq n-1,\, 1 \leq j \leq k_i\}$ е линейно независима, така че

$$\mu_{i,j}(\lambda_i - \lambda_n) = 0 \quad \text{за всички} \quad 1 \leq i \leq n-1 \quad \text{и} \quad 1 \leq j \leq k_i.$$

Съгласно $\lambda_i - \lambda_n \neq 0$ за $1 \leq i \leq n-1$, стигаме до извода, че $\mu_{i,j} = 0$ за всички $1 \leq i \leq n-1$ и $1 \leq j \leq k_i$. Сега (19.1) приема вида

$$\sum_{j=1}^{k_n} \mu_{n,j} v_{n,j} = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V.$$

Съгласно линейната независимост на $v_{n,1}, \ldots, v_{n,k_n}$, коефициентите $\mu_{n,j} = 0$ се анулират за всички $1 \leq j \leq k_n$. Това доказва линейната независимост на

$$\{v_{i,j} \,|\, 1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq k_i\}.$$

$\square$

Определение 19.7. *(i) Спектърът на матрица $A \in M_{n\times n}(F)$ е множеството на характеристичните корени на A от основното поле F. Ако A има n различни характеристични корена от F, то казваме, че A има прост спектър.*
(ii) Спектърът на линеен оператор $\varphi : V \to V$ в n-мерно пространство V над поле F е множеството на характеристичните корени на φ от F или, еквивалентно, множеството на собствените стойности на φ. Ако φ има n различни характеристични корена от F, то казваме, че φ има прост спектър.

Твърдение 19.8. *(i) Нека $\varphi : V \to V$ е линеен оператор с прост спектър в n-мерно пространство V над поле F. Тогава съществува базис $v_1, \ldots, v_n$ на V, в който матрицата*

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

на φ е диагонална. Еквивалентно, съществува базис на V, съставен от собствени вектори за φ.
(ii) Нека $A \in M_{n\times n}(F)$ е матрица с прост спектър. Тогава съществува обратима матрица $T \in M_{n\times n}(F)$, така че $D = T^{-1}AT$ е диагонална.

Доказателство. (i) По определение, φ е оператор с прост спектър, ако има n различни характеристични корена $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ от F. Съгласно Твърдение 19.5, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ са собствени стойности на φ. Ако v_i са собствени вектори на $\varphi : V \to V$, отговарящи на собствените стойности λ_i, то $v_1, \ldots, v_n$ са линейно независими по Твърдение 19.6. Прилагаме Твърдение 5.12 към линийно независимите вектори $v_1, \ldots, v_n$ от n-мерното пространство V и получаваме, че $v_1, \ldots, v_n$ е базис на V. Съгласно

$$\varphi(v_i) = \lambda_i v_i = 0.v_1 + \ldots + 0.v_{i-1} + \lambda_i.v_i + 0.v_{i+1} + \ldots + 0.v_n) \quad \text{за всяко} \quad 1 \leq i \leq n,$$

матрицата на φ в базиса $v_1, \ldots, v_n$ е диагонална и диагоналните и елементи са равни на съответните собствени стойности,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{19.3}$$

и диагоналните елементи са равни на съответните собствени стойности.
Да забележим, че ако операторът φ има диагонална матрица (19.3) спрямо базис $v_1, \ldots, v_n$ на V, то $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$ за всяко $1 \leq i \leq n$ и $v_1, \ldots, v_n$ са собствени вектори на φ, отговарящи на собствени стойности $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
(ii) Нека $e = (e_1, \ldots, e_n)$ е базис на n-мерно пространство V над F, а $\varphi : V \to V$ е линейният оператор с матрица $A \in M_{n\times n}(F)$ спрямо базиса e. Тогава φ има прост спектър и съгласно (i) съществува базис $v = (v_1, \ldots, v_n)$ на V, в който матрицата на φ е диагонална,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Матрицата на прехода $T \in M_{n\times n}(F)$ от базиса e към базиса $v = eT$ е обратима и

$$D = T^{-1}AT.$$

□

За някои линейни оператори в крайномерно пространство не съществува базис от собствени вектори. Например, операторът $\varphi_o : V \to V$ в 2-мерно пространство V над поле F с матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

спрямо някакъв базис $e = (e_1, e_2)$ на V не може да се представи чрез диагонална матрица спрямо базис $f = (f_1, f_2)$ на V. В противен случай, съществува обратима матрица

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{с обратна } T^{-1} = \frac{1}{\det(T)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

така че

$$D = T^{-1}AT = \frac{1}{\det(T)} \begin{pmatrix} \det(T) + cd & d^2 \\ -c^2 & \det(T) - cd \end{pmatrix}$$

е диагонална. Следователно $c = d = 0$ и $\det(T) = ad - bc = 0$. Това противоречи на обратимостта на T и доказва несъществуването на базис $f = (f_1, f_2)$ на V, в който матрицата на $\varphi_o : V \to V$ е диагонална. Еквивалентно, матрицата $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ не е подобна на диагонална.

Определение 19.9. *Подпространство W на линейно пространство V е инвариантно относно линеен оператор $\varphi : V \to V$, ако $\varphi(W) \subseteq W$.*

Пример 19.10. *Ако $\varphi : V \to V$ е линеен оператор в пространство V над поле F, то ядрото $\ker\varphi$ и образът $\mathrm{im}(\varphi)$ са φ-инвариантни подпространства на V.*

Доказателство. За произволен вектори $u \in \ker(\varphi)$ е в сила $\varphi(u) = \mathcal{O}_V \in \ker(\varphi)$, защото подпространството $\ker\varphi$ на V съдържа нулевия вектор $\mathcal{O}_V$. Това доказва φ-инвариантността на ядрото $\ker(\varphi)$.
Ако $\varphi(v) \in \mathrm{im}(\varphi)$ за някой вектор $v \in V$, то $\varphi(\varphi(v)) \in \mathrm{im}(\varphi)$, така че подпространството $\mathrm{im}(\varphi)$ е φ-инвариантно.

□

Лема 19.11. *Нека $\varphi : V \to V$ е линеен оператор в линейно пространство V над поле F.*
(i) За всяко $\lambda \in F$ множеството $U_\lambda = \{v \in V \,|\, \varphi(v) = \lambda v\}$ е φ-инвариантно подпространство на V. Ако λ е собствена стойност на φ, то U_λ е обединението на собствените вектори на φ, отговарящи на собствената стойност λ и нулевия вектор на V. Ако λ не е собствена стойност на φ, то $U_\lambda = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$ е нулевото подпространство.
(ii) Ненулев вектор $v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$ поражда 1-мерно φ-инвариантно подпространство $l(v)$ на V тогава и само тогава, когато v е собствен вектор на оператора φ.

Доказателство. (i) Подмножеството $U_\lambda = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$ на V е подпространство на V, защото за произволни $u_1, u_2 \in U_\lambda$ и $\mu \in F$ е в сила $u_1 + u_2, \mu u_1 \in U_\lambda$, съгласно

$$\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) = \lambda u_1 + \lambda u_2 = \lambda(u_1 + u_2) \quad \text{и}$$

$$\varphi(\mu u_1) = \mu\varphi(u_1) = \mu(\lambda u_1) = (\mu\lambda)u_1 = (\lambda\mu)u_1 = \lambda(\mu u_1).$$

Подпространството U_λ на V е φ-инвариантно, защото за произволен вектор $u \in U_\lambda$ е изпълнено $\varphi(u) = \lambda u \in U_\lambda$.
(ii) Ако 1-мерното подпространство $l(v)$ на V е φ-инвариантно, то ненулевият вектор $v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$ се изобразява в $\varphi(v) \in l(v)$, така че $\varphi(v) = \lambda v$ за някое $\lambda \in F$ и v е собствен вектор на φ, отговарящ на собствена стойност λ.
Обратно, ако $v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$ е собствен вектор на φ, отговарящ на собствена стойност λ, то произволен вектор $\mu v \in l(v)$ се изобразява в $\varphi(\mu v) = \mu\varphi(v) = \mu(\lambda v) = (\mu\lambda)v \in l(v)$ и 1-мерното подпространство $l(v)$ на V е φ-инвариантно.
□

Приемаме без доказателство следната

Теорема 19.12. (Основна Теорема на алгебрата:) *Всички корени на непостоянен полином $f(x) \in \mathbb{C}[x] \setminus \mathbb{C}$ с комплексни коефициенти са комплексни числа $\alpha \in \mathbb{C}$.*

В частност, всеки линеен оператор $\varphi : V \to V$ в крайномерно пространство V над $\mathbb{C}$ има комплексен характеристичен корен $\lambda \in \mathbb{C}$. Съгласно Твърдение 19.5, λ е собствена стойност на φ и съществува собствен вектор $v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$ на φ, отговарящ на собствената стойност λ. В резултат, $l(v)$ е 1-мерно φ-инвариантно подпространство на V. Това доказва следното

Твърдение 19.13. *Всеки линеен оператор $\varphi : V \to V$ в крайномерно линейно пространство V над полето $\mathbb{C}$ на комплексните числа има 1-мерно φ-инвариантно подпространство.*

Твърдение 19.14. *Всеки линеен оператор $\varphi : V \to V$ в крайномерно пространство V над полето на реалните числа $\mathbb{R}$ има 1-мерно или 2-мерно φ-инвариантно подпространство.*

Доказателство. Избираме базис $f = (f_1, \ldots, f_n)$ на V и разглеждаме матрицата $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ на φ спрямо f.
Ако A има реален характеристичен корен $\lambda \in \mathbb{R}$, то λ е собствена стойност на φ и произволен собствен вектор $v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$ на φ, отговарящ на собствената стойност λ поражда 1-мерно φ-инвариантно подпространство $l(v)$ на V.
Отсега нататък ще предполагаме, че всички характеристични корени на φ и на A са комплексни нереални числа и ще докажем, че тогава φ има 2-мерно φ-инвариантно подпространство.
За целта разглеждаме координатния изоморфизъм $C : V \to M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, съпоставящ на вектор $fx \in V$ координатния му стълб $C(fx) = x$ спрямо f. Това е линейният изоморфизъм, трансформиращ векторите f_i от избрания базис на V във вкторите

$$e_i = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-i})$$

от стандартния базис на $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Нека $\varphi_o : M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \to M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ е линейният оператор с матрица A спрямо стандартния базис $e = (e_1, \dots, e_n)$. Тогава φ_o действа по правилото $\varphi_o(x) = Ax$ за всяко $x \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. В диаграмата

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "C"] \arrow[d, "\varphi"] & M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \arrow[d, "\varphi_o"] \\ V \arrow[r, "C"] & M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \end{tikzcd}$$

имаме $C\varphi = \varphi_o C$, съгласно

$$C\varphi(fx) = C(\varphi(f)x) = C((fA)x) = C(f(Ax)) = Ax = \varphi_o(x) = \varphi_o C(fx).$$

Влагаме наредените n-торки реални числа $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ в наредените n-торки комплексни числа $M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ като елементите с нулеви имагинерни части на компонентите. Линейният оператор $\varphi_o^{\mathbb{C}} : M_{n\times 1}(\mathbb{C}) \to M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ с матрица A спрямо стандартния базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ на $M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ се ограничава до $\varphi_o^{\mathbb{C}}|_{M_{n\times 1}(\mathbb{R})} = \varphi_o$ и двата пътя от горния ляв ъгъл до долния десен ъгъл в диаграмата

$$\begin{tikzcd} M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_o"] & M_{n\times 1}(\mathbb{C}) \arrow[d, "\varphi_o^{\mathbb{C}}"] \\ M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \arrow[r] & M_{n\times 1}(\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

действат по един и същи начин.

Линейният оператор $\varphi_o^{\mathbb{C}}$ в n-мерното пространство $M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ над $\mathbb{C}$ има комплексен характеристичен корен $\lambda \in \mathbb{C}$, който е характеристичен корен на A, а оттам и на φ. Следователно $\lambda = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ с $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ е комплексно нереално число и съществува собствен вектор $w \in M_{n\times 1}(\mathbb{C}) \setminus \{\mathbb{O}_{n\times 1}\}$ на $\varphi_o^{\mathbb{C}}$, отговарящ на собствената стойност λ. Полагаме $w = u + iv$ за $u, v \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ и сравняваме реалните и имагинерните части в равенствата

$$Au + iAv = A(u + iv) = Aw = \varphi_o^{\mathbb{C}}(w) = \lambda w = (a + bi)(u + iv) = (au - bv) + i(bu + av),$$

за да изведем

$$\begin{aligned} \varphi_o(u) &= Au = au - bv, \\ \varphi_o(v) &= Av = bu + av. \end{aligned} \tag{19.4}$$

Оттук, линейната обвивка $l(u, v)$ е φ_o-инвариантно подпространство на $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ и $l(fu, fv)$ е φ-инвариантно подпространство на V, съгласно

$$\varphi(fu) = \varphi(f)u = (fA)u = f(Au) = f(au - bv) = a(fu) - b(fv) \in l(fu, fv),$$

$$\varphi(fv) = \varphi(f)v = (fA)v = f(Av) = f(bu + av) = b(fu) + a(fv) \in l(fu, fv),$$

откъдето $\varphi(\alpha(fu) + \beta(fv)) = \alpha\varphi(fu) + \beta\varphi(fv) \in l(fu, fv)$ за $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Остава да докажем линейната независимост на u, v, за да получим, че $l(fu, fv)$ е 2-мерно φ-инвариантно подпространство на V и да докажем твърдението. Да допуснем, че $u, v \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ са линейно зависими и съществуват реални числа $p, q \in \mathbb{R}$, $(p, q) \neq (0, 0)$ с

$$\mathbb{O}_{n\times 1} = pu + qv. \tag{19.5}$$

Действайки с φ_o върху (19.5) получаваме

$$\begin{aligned} \mathbb{O}_{n\times 1} = \varphi_o(\mathbb{O}_{n\times 1}) = \varphi_o(pu + qv) = \\ = p\varphi_o(u) + q\varphi_o(v) = p(au - bv) + q(bu + av) = (pa + qb)u + (qa - pb)v. \end{aligned} \tag{19.6}$$

За да елиминираме v от (19.5) и (19.6), умножаваме почленно (19.5) с $qa-pb \in \mathbb{R}$, (19.6) с $-q \in \mathbb{R}$ и събираме. Това дава

$$\mathbb{O}_{n\times 1} = [p(qa-pb) - q(pa+qb)]u = (-p^2b - q^2b)u = -(p^2+q^2)bu. \qquad (19.7)$$

От $p, q \in \mathbb{R}$, $(p,q) \neq (0,0)$ следва, че $p^2+q^2 \in \mathbb{R}^{>0}$ е строго положително реално число. По предположение, $\lambda = a+bi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ е комплексно нереално число, така че $b \neq 0$. Затова $-(p^2+q^2)b \neq 0$ е ненулево реално число и (19.7) изисква $u = \mathbb{O}_{n\times 1}$. Сега от действието на φ_o върху u получаваме, че

$$\mathbb{O}_{n\times 1} = \varphi_o(\mathbb{O}_{n\times 1}) = \varphi_o(u) = Au = au - bv = -bv,$$

използвайки (19.4). Поради $-b \neq 0$, оттук следва $v = \mathbb{O}_{n\times 1}$ и стигаме до извода, че собственият вектор $w = u+iv = \mathbb{O}_{n\times 1} \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ на $\varphi_o^{\mathbb{C}}$ е нулев. Противоречието установява линейната независимост на $u, v \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ и доказва твърдението.

$\square$