Глава 16

Матрица на линейно изображение на крайномерни пространства. Трансформация на матрицата на линейно изображение при смяна на базисите

Лема 16.1. (Матричен запис на линейността на изображение:) *Нека $\varphi : U \to V$ е линейно изображение, $u = (u_1, \dots, u_m)$ е наредена m-торка, съставена от вектори $u_1, \dots, u_m \in U$ на U и*

$$A = (a_{i,j})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n} = \begin{pmatrix} c_1 & \dots & c_j & \dots & c_n \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(F)$$

е матрица със стълбове

$$c_j := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \dots \\ a_{ij} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Тогава

$$uA = u \begin{pmatrix} c_1 & \dots & c_j & \dots & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uc_1 & \dots & uc_j & \dots & uc_n \end{pmatrix}$$

е наредена n-торка вектори, изпълняващи равенството

$$\varphi(uA) = \varphi(u)A$$

за $\varphi(u) := \begin{pmatrix} \varphi(u_1) & \dots & \varphi(u_i) & \dots & \varphi(u_m) \end{pmatrix}$.

Доказателство. Непосредствено пресмятаме, че за всяко $1 \leq j \leq n$ векторът

$$uc_j = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_i & \dots & u_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \dots \\ a_{ij} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i$$

се изобразява в

$$\varphi(uc_j) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i\right) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\varphi(u_i) =$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi(u_1) & \dots & \varphi(u_i) & \dots & \varphi(u_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \dots \\ a_{ij} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = \varphi(u)c_j.$$

Съгласно

$$\varphi(u)A = \varphi(u) \begin{pmatrix} c_1 & \dots & c_j & \dots & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(u)c_1 & \dots & \varphi(u)c_j & \dots & \varphi(u)c_n \end{pmatrix},$$

j-тата компонента $\varphi(uc_j)$ на $\varphi(uA)$ съвпада с j-тата компонента $\varphi(u)c_j$ на $\varphi(u)A$ и $\varphi(uA) = \varphi(u)A$.

$\square$

Определение 16.2. *Нека $\varphi : U \to V$ е линейно изображение на крайномерни пространства над поле F, $e = (e_1, \ldots, e_n)$ е базис на U и $f = (f_1, \ldots, f_m)$ е базис на V. Матрицата*

$$A = (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) \in M_{m \times n}(F),$$

образувана по стълбове от координатите на векторите $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n) \in V$ спрямо базиса $f = (f_1, \ldots, f_m)$ на V се нарича матрица на φ спрямо базисите e и f.
Еквивалентно,

$$\varphi(e) = fA$$

за $\varphi(e) := (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$.

Съгласно Твърдение 15.4, линейното изображение $\varphi : U \to V$ се определя еднозначно от образите $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ на базис $e_1, \ldots, e_n$ на U. Затова матрицата на φ спрямо базис e на U и базис f на V определя еднозначно φ.
Всяка матрица $A \in M_{m \times n}(F)$ се реализира като матрица на линейно изображение $\varphi : U \to V$ от n-мерно пространство U в m-мерно пространство V над F. По-точно, за произволен базис $e = (e_1, \ldots, e_n)$ на U и произволен базис $f = (f_1, \ldots, f_m)$ на V определяме φ като единственото линейно изображение $\varphi : U \to V$ с

$$\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i \quad \text{за всяко} \quad 1 \leq j \leq n.$$

Ако $u \in U$ има координати

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n \times 1}(F)$$

спрямо базиса $e = (e_1, \ldots, e_n)$, то по определението за умножение на матрици

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = (e_1, \ldots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = ex.$$

Действайки с φ върху $u = ex$ получаваме

$$\varphi(u) = \varphi(ex) = \varphi(e)x = (fA)x = f(Ax)$$

съгласно Лема 16.1, Определение 16.2 за матрица на линейно изображение и асоциативността на умножението на матрици. Ако

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_m \end{pmatrix} \in M_{m \times 1}(F)$$

са координатите на $\varphi(u)$ спрямо базиса $f = (f_1, \ldots, f_m)$ на V, то $\varphi(u) = fy$, откъдето

$$fy = \varphi(u) = f(Ax).$$

Съгласно Лема 16.4 (ii) за линейно независимите вектори $f_1, \ldots, f_m$, оттук следва

$$y = Ax.$$

По този начин, за да пресметнем координатите y на образа $\varphi(u)$ на $u \in U$ относно базиса f на V трябва да умножим матрицата A на φ спрямо e и f с координатния стълб x на u спрямо базиса e на U.
Например, нулевото линейно изображение $\mathbb{O} : U \to V$, $\mathbb{O}(u) = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$, $\forall u \in U$ на n-мерно пространство U в m-мерно пространство V има нулевата матрица $\mathbb{O}_{m\times n} \in M_{m\times n}(F)$ спрямо произволен базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ на U и произволен базис $f = (f_1, \dots, f_m)$ на V. Причина за това е $\mathbb{O}(e_i) = 0f_1 + \dots + 0f_m$ за произволно $1 \leq i \leq n$.
Диференцирането $\frac{d}{dx} : \mathbb{R}[x]^{(\leq n)} \to \mathbb{R}[x]^{(\leq n-1)}$ има матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{n\times(n+1)}(\mathbb{R})$$

спрямо базиса $1, x, \frac{x^2}{2!}, \dots, \frac{x^n}{n!}$ на $\mathbb{R}[x]^{(\leq n)}$ и базиса $1, x, \frac{x^2}{2!}, \dots, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ на $\mathbb{R}[x]^{(\leq n-1)}$.
Тук използваме, че

$$\frac{d}{dx}(1) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{x^i}{i!}\right) = \frac{ix^{i-1}}{i!} = \frac{x^{i-1}}{(i-1)!}, \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

Ако изберем базиса $1, x, \dots x^n \in \mathbb{R}[x]^{(\leq n)}$ на $\mathbb{R}[x]^{(\leq n)}$ и базиса $1, x, \dots, x^{n-1} \in \mathbb{R}[x]^{(\leq n-1)}$ на $\mathbb{R}[x]^{(\leq n-1)}$, то

$$\frac{d}{dx}(1) = 0, \quad \text{и} \quad \frac{d}{dx}(x^i) = ix^{i-1}, \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

Следователно матрицата на $\frac{d}{dx}$ спрямо тези два базиса е

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n \end{pmatrix} \in M_{n\times(n+1)}(\mathbb{R}).$$

Определение 16.3. *Ако $\varphi : U \to U$ е линеен оператор в n-мерно пространство U и $e = (e_1, \dots, e_n)$ е базис на U, то матрицата*

$$A = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) \in M_{n\times n}(F),$$

образувана по стълбове от координатите на $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ спрямо $e_1, \dots, e_n$ се нарича матрица на φ спрямо базиса e.
Еквивалентно, A се определя от равенството

$$\varphi(e) = eA.$$

Матрицата A на $\varphi : U \to U$ спрямо произволен базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ на U определя еднозначно φ.
Всяка квадратна матрица $A \in M_{n\times n}(F)$ се реализира като матрица на линеен оператор в n-мерно линейно пространство.
Ако $u = ex$ е вектор с координати $x \in M_{n\times 1}(F)$ спрямо базиса e на U, то съгласно Лема 16.1, Определение 16.3 и асоциативността на умножението на матрици имаме

$$\varphi(u) = \varphi(ex) = \varphi(e)x = (eA)x = e(Ax).$$

Прилагаме Лема 16.4 (ii) към линейно независимите вектори $e_1, \dots, e_n$ и получаваме, че $\varphi(u)$ има координати Ax спрямо базиса $e = (e_1, \dots, e_n)$.

Например, тъждественият линеен оператор $\mathrm{Id} : U \to U$, $\mathrm{Id}(u) = u$, $\forall u \in U$ има единична матрица E_n спрямо произволен базис $e = (e_1, \ldots, e_n)$ на U, защото

$$\mathrm{Id}(e_i) = 0.e_1 + \ldots + 0.e_{i-1} + 1.e_i + 0.e_{i+1} + \ldots + 0.e_n \quad \text{за всички} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Ако разглеждаме диференцирането $\frac{d}{dx} : \mathbb{R}[x]^{(\leq n)} \to \mathbb{R}[x]^{(\leq n)}$ като линеен оператор в пространството $\mathbb{R}[x]^{(\leq n)}$ на полиномите на x от степен $\leq n$ с реални коефициенти, то матрицата на $\frac{d}{dx}$ спрямо базиса $1, x, \frac{x^2}{2!}, \ldots, \frac{x^n}{n!}$ на $\mathbb{R}[x]^{(\leq n)}$ е

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{R}).$$

Лема 16.4. (Матрична форма на линейната независимост на вектори:) *Нека $u_1, \ldots, u_m$ са линейно независими вектори от линейно пространство U над поле F, $u = (u_1, \ldots, u_m)$ и $A = (a_{i,j})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$, $B = (b_{ij})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n} \in M_{m\times n}(F)$ са матрици с елементи от F. Тогава:*
(i) от $uA = (uc_1, \ldots, uc_j, \ldots, uc_n) = \underbrace{(\overrightarrow{\mathcal{O}}, \ldots, \overrightarrow{\mathcal{O}})}_{n}$ за стълбовете

$$c_j := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \ldots \\ a_{ij} \\ \ldots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq j \leq n$$

на $A = (c_1, \ldots, c_j, \ldots, c_n)$ следва $A = \mathbb{O}_{m\times n}$;
(ii) от $uA = uB$ следва $A = B$.

Доказателство. (i) Достатъчно е да забележим, че за всяко $1 \leq j \leq n$ равенството

$$\overrightarrow{\mathcal{O}} = uc_j = \begin{pmatrix} u_1 & \ldots & u_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \ldots \\ a_{m,j} \end{pmatrix}$$

изисква $a_{ij} = 0$ за всички $1 \leq i \leq m$, съгласно линейната независимост на $u_1, \ldots, u_m$. Това доказва $a_{s,j} = 0$ за всички $1 \leq s \leq m$, $1 \leq j \leq n$ и $A = \mathbb{O}_{m\times n}$.
(ii) Ако $uA = uB$, то от

$$u(A - B) = uA - uB = \underbrace{(\overrightarrow{\mathcal{O}}, \ldots, \overrightarrow{\mathcal{O}})}_{n}$$

следва $A - B = \mathbb{O}_{m\times n}$. Следователно $A = B$.

□

Определение 16.5. *Ако* $e = (e_1, \dots, e_n)$ *и* $f = (f_1, \dots, f_n)$ *са базиси на линейно пространство* V *над поле* F*, то матрицата*

$$T = (f_1 \dots f_j \dots, f_n) = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1j} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2j} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nj} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(F),$$

образувана по стълбове от координатите на

$$f_1 = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ \dots \\ t_{n1} \end{pmatrix}, f_2 = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} t_{12} \\ t_{22} \\ \dots \\ t_{n2} \end{pmatrix},$$

$$\dots, f_j = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} t_{1j} \\ t_{2j} \\ \dots \\ t_{nj} \end{pmatrix}, \dots, f_n = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} t_{1n} \\ t_{2n} \\ \dots \\ t_{nn} \end{pmatrix} \in V$$

спрямо базиса $e_1, \dots, e_n$ *се нарича матрица на прехода от базиса* $e = (e_1, \dots, e_n)$ *към базиса* $f = (f_1, \dots, f_n)$*. Еквивалентно, матрицата на прехода* $T \in M_{n\times n}(F)$ *от базиса* e *към базиса* f *е единствената матрица, изпълняваща равенството*

$$f = (f_1, \dots, f_n) = (e_1, \dots, e_n)T = eT.$$

Твърдение 16.6. *Нека* $e = (e_1, \dots, e_n)$ *е базис на линейно пространство* V *над поле* F*, а* $T \in M_{n\times n}(F)$ *е квадратна матрица. В такъв случай,* T *е матрица на прехода от базиса* e *към базиса* $f = (f_1, \dots, f_n) = eT$ *тогава и само тогава, когато матрицата* T *е неособена.*

Доказателство. Ако $f = eT$ е базис на V, то $e = fS$ за матрицата на прехода $S \in M_{n\times n}(F)$ от базиса f към базиса e. Тогава

$$eE_n = e = fS = (eT)S = e(TS),$$

откъдето $TS = E_n$ по Лема 16.4 (ii) за линейно независимите вектори $e_1, \dots, e_n$. В резултат, T е обратима, а оттам и неособена матрица.
Ако T е неособена матрица и $\det(T) \neq 0$, то вектор-стълбовете на T са линейно независими съгласно Твърдение 13.4. Следователно векторите $f_1, \dots, f_n$, чиито координати спрямо базиса $e_1, \dots, e_n$ образуват вектор-стълбовете на T са линейно независими и образуват базис на n-мерното линейно пространство V по Твърдение 5.12

□

Твърдение 16.7. *Нека* $e = (e_1, \dots, e_n)$ *и* $f = (f_1, \dots, f_n)$ *са базиси на линейно пространство* V *с матрица на прехода* $T \in M_{n\times n}(F)$ *от* e *към* f*. Тогава координатите* $x \in M_{n\times 1}(F)$ *на вектор* $v \in V$ *спрямо базиса* e *и координатите* $y \in M_{n\times 1}(F)$ *на същия вектор* v *спрямо базиса* f *са свързани с равенството*

$$x = Ty.$$

Доказателство. Съгласно $f = eT$ и $ex = v = fy$ имаме

$$ex = fy = (eT)y = e(Ty),$$

откъдето $x = Ty$, съгласно 16.4 (ii) за линейно независимите вектори $e_1, \dots, e_n$.

□

Твърдение 16.8. *Нека $\varphi : U \to V$ е линейно изображение с матрица A спрямо базис $e = (e_1, \dots . e_n)$ на U и базис $f = (f_1, \dots, f_m)$ на V, $e' = eT$ е друг базис на U с матрица на прехода T от e към e' и $f' = fS$ е друг базис на V с матрица на прехода S от f към f'. Тогава матрицата на φ спрямо базиса e' на U и базиса f' на V е*

$$B = S^{-1}AT.$$

Доказателство. По Определение 16.2 за матрица на линейно изображение спрямо фиксирани базиси на U и V имаме $\varphi(e) = fA$ и $\varphi(e') = f'B$. Заместваме $e' = eT$, $f' = fS$ съгласно Определение 16.5 за матрица на прехода между два базиса на линейно пространство. Прилагаме Лема 16.1 и асоциативността на умножението на матрици, за да получим

$$f(AT) = (fA)T = \varphi(e)T = \varphi(eT) = \varphi(e') = f'B = (fS)B = f(SB).$$

По Лема 16.4 (ii) за линейно независимите вектори $f_1, \dots, f_m$, това е достатъчно за $AT = SB$. По Твърдение 16.6, матрицата на прехода S от базиса f на V към базиса f' на V е обратима и $B = S^{-1}AT$.

□

В частност, ако $\varphi : U \to U$ е линеен оператор с матрица $A \in M_{n\times n}(F)$ спрямо базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ на U и $e' = eT$ е базис на U с матрица на прехода $T \in M_{n\times n}(F)$ от e към e', то матрицата на φ спрямо базиса e' е $B = T^{-1}AT$.

Определение 16.9. *Квадратни матрици $A, B \in M_{n\times n}(F)$ с един и същи размер са подобни, ако съществува обратима матрица $T \in M_{n\times n}(F)$, така че $B = T^{-1}AT$.*

Твърдение 16.10. *Квадратни матрици $A, B \in M_{n\times n}(F)$ са подобни тогава и само тогава, когато съществува линеен оператор в n-мерно линейно пространство над F с матрици A и B спрямо подходящи базиси.*

Доказателство. От Твърдение 16.8 следва, че ако $\varphi : U \to U$ е линеен оператор с матрица $A \in M_{n\times n}(F)$ спрямо някакъв базис e на U, то матрицата на φ спрямо базиса $e' = eT$ с матрица на прехода $T \in M_{n\times n}(F)$ от e към e' е подобна на A и равна на $B = T^{-1}AT$.
Нека A и $B = T^{-1}AT$ са подобни матрици. Избираме базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ на n-мерно линейно пространство U над F и разглеждаме линейния оператор $\varphi : U \to U$ с матрица A спрямо базиса e. Матрицата T е неособена, така че $e' = eT$ е базис на U съгласно Твърдение 16.6. По Твърдение 16.8, матрицата на линейния оператор φ спрямо базиса e' на U е $T^{-1}AT = B$.

□