Глава 14

Представяне на подпространства от наредени n-торки като решения на хомогенни линейни системи. Теорема на Руше. Връзка между решенията на хомогенна и нехомогенна система.

Твърдение 14.1. *Нека $Ax = \mathbb{O}_{m\times 1}$ е хомогенна система линейни уравнения, чиято матрица от коефициенти $A \in M_{m\times n}(F)$ има ранг $\mathrm{rk}(A) = r$. Тогава множеството $U \subseteq M_{n\times 1}(F)$ от решения на $Ax = \mathbb{O}_{m\times 1}$ е подпространство на $M_{n\times 1}(F)$ с размерност $\dim(U) = n - r$.*

Доказателство. Ако $u, v \in U \subseteq M_{n\times 1}(F)$ са решения на $Ax = \mathbb{O}_{m\times 1}$ и $\alpha \in F$, то от

$$A(u+v) = Au + Av = \mathbb{O}_{m\times 1} + \mathbb{O}_{m\times 1} = \mathbb{O}_{m\times 1} \quad \text{и}$$

$$A(\alpha u) = \alpha(Au) = \alpha\mathbb{O}_{m\times 1} = \mathbb{O}_{m\times 1}$$

следва, че $u+v, \alpha u \in U$ са също решения на $Ax = \mathbb{O}_{m\times 1}$ и U е подпространство на $M_{n\times 1}(F)$.
Ако $\mathrm{rk}(A) = 0$ и $A = \mathbb{O}_{m\times n}$ е нулевата матрица, то множеството от решенията на $Ax = \mathbb{O}_{m\times 1}$ е $M_{n\times 1}(F)$ с размерност $\dim M_{n\times 1}(F) = n = n - 0 = n - \mathrm{rk}(A)$.
Ако $\mathrm{rk}(A) = r \in \mathbb{N}$, то съществуват r линейно независими реда $a_1, \dots, a_r$ на A и всички други редове на A принадлежат на $l(a_1, \dots, a_r)$. Изпускаме уравненията, които са линейни комбинации на първите r линейно независими уравнения и считаме, че матрицата $A \in M_{r\times n}(F)$ се състои от r линейно независими реда $a_1, \dots, a_r$. След подходяща пермутация на стълбовете, първите r стълба на A са линейно независими и образуват неособена $(r\times r)$-матрица. Съществуват елементарни преобразувания по редове, които свеждат първите r стълба на A към единичната матрица E_r. Прилагаме споменатите елементарни преобразувания към пълните вектор-редове $a_1, \dots, a_r \in M_{1\times n}(F)$ на A и свеждаме разглежданата хомогенна система линейни уравнения към

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1,r+1} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & a_{2,r+1} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & a_{r-1,r+1} & \dots & a_{r-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{r,r+1} & \dots & a_{r,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbb{O}_{r\times 1}.$$

Уравненията на тази система са

$$x_i = -a_{i,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{i,n}x_n \quad \text{за} \quad 1 \le i \le r \tag{14.1}$$

и за произволни $x_{r+1}, \dots, x_n$. За всяко $r+1 \le j \le n$ разглеждаме решението

$$c^{(j)} = (c_1^{(j)}, \dots, c_r^{(j)}, 0 \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^t =$$
$$= (-a_{1,j}, \dots, -a_{r,j}, 0 \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^t \in U,$$

чиято j-та компонента е равна на 1, компонентите с номера $s \in \{r+1, \ldots, n\} \setminus \{j\}$ са равни на 0, а $c_1^{(j)}, \ldots, c_r^{(j)}$ се пресмятат по формулите (14.1). Достатъчно е да проверим, че $c^{(r+1)}, \ldots, c^{(n)}$ образуват базис на пространството от решения $U \subseteq M_{n\times 1}(F)$, за да установим, че $\dim(U) = n - r$ и да докажем твърдението. За произволни $\lambda_j \in F$, $r+1 \leq j \leq n$ пресмятаме, че

$$\lambda_{r+1}c^{(r+1)} + \ldots + \lambda_j c^{(j)} + \ldots + \lambda_n c^{(n)} = (*, \ldots, *, \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_j, \ldots, \lambda_n)^t.$$

Следователно от $\lambda_{r+1}c^{(r+1)} + \ldots + \lambda_n c^{(n)} = \mathbb{O}_{n\times 1}$ следва $\lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = 0$ и решенията $c^{(r+1)}, \ldots, c^{(n)} \in U$ са линейно независими. За произволно решение $u = (u_1, \ldots, u_n)^t \in U$ забелязваме, че

$$\begin{aligned} u' = u - u_{r+1}c^{(r+1)} - \ldots - u_n c^{(n)} = \\ = (u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n)^t + (*, \ldots, *, -u_{r+1}, \ldots, -u_n)^t = \\ = (u'_1, \ldots, u'_r, 0, \ldots, 0)^t \in U \end{aligned}$$

има анулиращи се компоненти с номера между $r+1$ и n. Първите r компоненти на u' изпълняват уравненията (14.1) и също трябва да се анулират. В резултат, $u' = \mathbb{O}_{n\times 1}$ и $u = u_{r+1}c^{(r+1)} + \ldots + u_n c^{(n)}$ е линейна комбинация на $c^{(r+1)}, \ldots, c^{(n)}$. Това доказва, че $l(c^{(r+1)}, \ldots, c^{(n)}) = U$ и $c^{(r+1)}, \ldots, c^{(n)}$ е базис на U.

□

Определение 14.2. *Произволен базис на пространството от решения на хомогенна система линейни уравнения $Ax = \mathbb{O}_{m\times 1}$ се нарича фундаментална система решения на $Ax = \mathbb{O}_{m\times 1}$.*

Твърдение 14.3. *За всяко подпространство $U \subseteq M_{n\times 1}(F)$ от наредени n-торки съществува хомогенна система линейни уравнения с пространство от решения U.*

Доказателство. Ако $U = \{\mathbb{O}_{n\times 1}\}$ е нулевото пространство, то U съвпада с пространството от решения на хомогенната линейна система

$$\left| \begin{array}{ll} x_1 & = 0 \\ \ldots & \ldots \\ x_n & = 0 \end{array} \right. .$$

Отсега нататък $U \neq \{\mathbb{O}_{n\times 1}\}$, $\dim U = k \in \mathbb{N}$ и съществува базис $a_1, \ldots, a_k \in M_{n\times 1}(F)$ на U. Нека

$$\begin{pmatrix} a_1^t \\ \ldots \\ a_i^t \\ \ldots \\ a_k^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbb{O}_{k\times 1} \tag{14.2}$$

е хомогенната система линейни уравнения, чиято матрица от коефициенти е образувана по редове от векторите $a_1^t, \ldots, a_k^t \in M_{1\times n}(F)$. Пространството от решения $U_1 \subseteq M_{n\times 1}(F)$ на (14.2) е с размерност $n - k$. Нека $b_1, \ldots, b_{n-k} \in$

$M_{n\times 1}(F)$ е базис на U_1. Твърдим, че U е пространството от решения на хомогенната система линейни уравнения

$$\begin{pmatrix} b_1^t \\ \dots \\ b_j^t \\ \dots \\ b_{n-k}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbb{O}_{(n-k)\times 1}, \qquad (14.3)$$

чиято матрица от коефициенти е образувана по редове от векторите $b_1^t, \dots, b_{n-k}^t \in M_{n\times 1}(F)$. Пространството от решения $U_2 \subseteq M_{n\times 1}(F)$ на (14.3) е с размерност $\dim(U_2) = n - (n-k) = k$, защото матрицата от коефициенти на (14.3) е от ранг $n-k$. Достатъчно е да докажем, че $U \subseteq U_2$, за да приложим Следствие 5.13 и да получим че $U = U_2$. Векторите $b_j \in M_{n\times 1}(F)$ са решения на (14.2), така че

$$a_i^t b_j = 0 \quad \text{за всички} \quad 1 \leq i \leq k \quad \text{и} \quad 1 \leq j \leq n-k.$$

Транспонирайки това равенство получаваме

$$0 = 0^t = (a_i^t b_j)^t = b_j^t (a_i^t)^t = b_j^t a_i.$$

Следователно $a_i \in M_{n\times 1}(F)$ са решения на (14.3) за всички $1 \leq i \leq k$ и $a_i \in U_2$. Оттук, $U = l(a_1, \dots, a_k) \subseteq U_2$ и $U = U_2$, съгласно Следствие 5.13 и $\dim(U) = k = \dim(U_2)$. Това завършва доказателството на твърдението.

□

За да намерим базис на сечението $U \cap W$ на подпространств U, W на F^n представяме U и W като пространства от решения на хомогенни системи линейни уравнения. Обединявайки уравненията на U и W получаваме хомогенна система линейни уравнения с пространство от решения $U \cap W$. Произволна фундаментална система решения на тази система е базис на $U \cap W$.
Нека

$$Ax = b \qquad (14.4)$$

е система линейни уравнения, чиято матрица от коефициенти

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix}$$

има вектор-стълбове $c_1, \dots, c_n \in M_{m\times 1}(F)$,

$$c_i = \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ a_{2,i} \\ \dots \\ a_{m-1,i} \\ a_{m,i} \end{pmatrix}.$$

В такъв случай,

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \dots \\ s_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}(F)$$

е решение на (14.4) тогава и само тогава, когато

$$As = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \dots \\ s_n \end{pmatrix} = s_1 c_1 + \dots + s_n c_n = b.$$

Следователно, системата (14.4) е съвместима точно когато $b \in l(c_1, \dots, c_n)$. Съгласно $l(c_1, \dots, c_n) \subseteq l(c_1, \dots, c_n, b)$, условието $b \in l(c_1, \dots, c_n)$ е еквивалентно на $l(c_1, \dots, c_n, b) \subseteq l(c_1, \dots, c_n)$, а оттам и на

$$l(c_1, \dots, c_n) = l(c_1, \dots, c_n, b).$$

Пак поради $l(c_1, \dots, c_n) \subseteq l(c_1, \dots, c_n, b)$, условието $l(c_1, \dots, c_n) = l(c_1, \dots, c_n, b)$ е еквивалентно на $\dim l(c_1, \dots, c_n) = \dim l(c_1, \dots, c_n, b)$, съгласно Следствие 5.13. Съгласно Твърдение 13.1 и Твърдение 13.3 имаме

$$\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(c_1, \dots, c_n) = \dim l(c_1, \dots, c_n) \quad \text{и}$$

$$\mathrm{rk}(A|b) = \mathrm{rk}(c_1, \dots, c_n, b) = \dim l(c_1, \dots, c_n, b).$$

С това доказваме следното

Твърдение 14.4. (Теорема на Руше:) *Система линейни уравнения $Ax = b$ е съвместима тогава и само тогава, когато* $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A|b)$.

Твърдение 14.5. (Алтернатива на Фредхолм:) *Нека $v \in M_{n\times 1}(F)$ е едно решение на система линейни уравнения $Ax = b$, а $U \subseteq M_{n\times 1}(F)$ е пространството от решения на хомогенната система линейни уравнения $Ax = \mathbb{O}_{m\times 1}$ със същата матрица от коефициенти $A \in M_{m\times n}(F)$. Тогава множеството от решения на $Ax = b$ е*

$$v + U = \{v + u \,|\, \forall u \in U\}.$$

Доказателство. Нека $S \subseteq M_{n\times 1}(F)$ е множеството от решения на системата линейни уравнения $Ax = b$. Тогава за всяко $w \in S$ е в сила

$$A(w - v) = Aw - Av = b - b = \mathbb{O}_{m\times 1}$$

и $w - v = u \in U$ е решение на хомогенната система линейни уравнения $Ax = \mathbb{O}_{m\times 1}$. Оттук, $w = v + u \in v + U$ и $S \subseteq v + U$.
Обратно, ако $w = v + u \in v + U$, то

$$Aw = A(v + u) = Av + Au = b + \mathbb{O}_{m\times 1} = b,$$

откъдето $w \in S$ и $v + U \subseteq S$. От включванията $S \subseteq v + U$ и $v + U \subseteq S$ следва $S = v + U$.

□

Следствие 14.6. *(i) Система линейни уравнения $Ax = b$ с n неизвестни е определена тогава и само тогава, когато* $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A|b) = n$.
(ii) Система линейни уравнения $Ax = b$ с n неизвестни е неопределена тогава и само тогава, когато $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A|b) < n$.

Доказателство. (i) Съгласно Твърдение 14.5, съвместима система линейни уравнения $Ax = b$ има единствено решение тогава и само тогава, когато нейното множество от решения $S = v + U$ се състои от единствена точка. Това е в сила точно когато пространството $U \subset M_{n\times 1}(F)$ от решенията на $Ax = \mathbb{O}_{m\times 1}$ се състои от нулевия вектор и $\dim U = n - \mathrm{rk}(A) = 0$, вземайки предвид Твърдение 14.1. Комбинирайки с Теоремата на Руше - Твърдение 14.4 получаваме, че системата $Ax = b$ е определена тогава и само тогава, когато $\mathrm{rk}(A|b) = \mathrm{rk}(A) = n$.
(ii) От Твърдение 14.5 следва, че съвместима система линейни уравнения $Ax = b$ е неопределена тогава и само тогава, когато множеството $S = v+U$ на нейните

решения съдържа повече от една точка. Това е в сила точно когато пространството $U \subset M_{n\times 1}(F)$ от решенията на $Ax = \mathbb{O}_{m\times 1}$ съдържа ненулев вектор и $\dim U = n - \mathrm{rk}(A) > 0$, съгласно Твърдение 14.1. Вземайки предвид Теоремата на Руше - Твърдение 14.4, стигаме до извода, че $Ax = b$ е неопределена точно тогава, когато $\mathrm{rk}(A|b) = \mathrm{rk}(A) < n$.

$\square$