Глава 4

Метод на Гаус-Жордан за решаване на системи линейни уравнения. Матрици. Елементарни преобразувания.

Системи уравнения от вида

$$\left| \begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1}x_1 & +a_{i2}x_2 & +\dots & +a_{in}x_n & = b_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{array} \right. \tag{4.1}$$

се наричат системи линейни уравнения. Казваме,че a_{ij} са коефициентите на системата, x_j са неизвестните, а b_i са свободните членове. Коефициентите a_{ij} и свободните членове принадлежат на поле F. Например,

$$\left| \begin{array}{ccc} 2x_1 & -x_2 & = 1 \\ x_1 & +3x_2 & = 4 \end{array} \right. \tag{4.2}$$

е система с две линейни уравнения и две неизвестни, чиито коефициенти и свободни членове са рационални числа. Понякога записваме уравненията във вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad \forall 1 \le i \le m.$$

Наредената n-торка $s = (s_1, \dots, s_n) \in F^n$ е решение на системата (4.1), ако при заместване $x_j = s_j$ за всички $1 \le j \le n$ уравненията на системата се превръщат във верни равенства

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}s_j = a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \dots + a_{in}s_n = b_i, \quad \forall 1 \le i \le m.$$

Системите, които нямат решение се наричат несъвместими, а тези, които имат поне едно решение са съвместими. Ако система линейни уравнения има единствено решение, тя се нарича определена. Съвместимите системи линейни уравнения с повече от едно решение се наричат неопределени.

Определение 4.1. *Правоъгълна таблица $A = (a_{ij})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$ с елементи a_{ij} от поле F се нарича матрица.*
Елементите a_{ij} на матрица A се индексират с номера на реда i, в който се намират, както и с номера на стълба j, в който са поставени.
Множеството на матриците с m реда, n стълба и елементи от поле F се бележи с $M_{m\times n}(F)$.

Например,

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

е матрица с два реда и три стълба, чиито елементи са рационални числа.

Определение 4.2. *Елементарните преобразувания по редове към матрица $A \in M_{m\times n}(F)$ са следните:*
(i) умножение $R_{i,j}(q)$ на j-ти ред с $q \in F$ и прибавяне към i-ти ред за някакви $1 \le i \ne j \le m$;
(ii) умножение $R_i(p)$ на i-ти ред с ненулев елемент $p \in F \setminus \{0\}$;
(iii) размяна $R_{i,j}$ на i-ти и j-ти ред за $1 \le i < j \le m$.

Например, умножението $R_{1,2}(-2)$ на втори ред на C от (4.3) с -2 и прибавянето му към първи ред дава матрицата

$$C' = \begin{pmatrix} 0 & -7 & -7 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Да забележим, че елементарното преобразувание $R_{1,2}(-2)$ е обратимо и обратното му преобразувание е умножение $R_{1,2}(2)$ на втори ред с 2 и прибавяне към първи ред. Прилагането на $R_{1,2}(2)$ към C' дава C.
Следващата лема доказва, че елементарните преобразувания по редове са винаги обратими чрез елементарни преобразувания по редове.

Лема 4.3. *Елементарните преобразувания по редове към матрица $A \in M_{m\times n}(F)$ се обръщат с елементарни преобразувания по редове.*

Доказателство. Обратното преобразувание на $R_{i,j}(q)$ с $1 \le i \ne j \le m$ и $q \in F$ е

$$R_{i,j}(q)^{-1} = R_{i,j}(-q).$$

По-точно, ако $1 \le i < j \le m$ и матрицата

$$A = \begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_i \\ \dots \\ r_j \\ \dots \\ r_m \end{pmatrix}$$

има редове $r_1, \dots, r_i, \dots, r_j, \dots, r_m \in M_{1\times n}(F)$, то

$$R_{i,j}(q)(A) = \begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_i + qr_j \\ \dots \\ r_j \\ \dots \\ r_m \end{pmatrix} \quad \text{и}$$

$$R_{i,j}(-q)R_{i,j}(q)(A) = R_{i,j}(-q)\begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_i + qr_j \\ \dots \\ r_j \\ \dots \\ r_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_i + qr_j + (-q)r_j \\ \dots \\ r_j \\ \dots \\ r_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_i \\ \dots \\ r_j \\ \dots \\ r_m \end{pmatrix} = A.$$

Изпълнено е също

$$R_{i,j}(q)R_{i,j}(-q)(A) = R_{i,j}(q)\begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_i + (-q)r_j \\ \dots \\ r_j \\ \dots \\ r_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_i + (-q)r_j + qr_j \\ \dots \\ r_j \\ \dots \\ r_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_i \\ \dots \\ r_j \\ \dots \\ r_m \end{pmatrix} = A.$$

С това установихме, че $R_{i,j}(q)^{-1} = R_{i,j}(-q)$. Аналогично се доказва случая на $1 \leq j < i \leq m$.
Непосредствено се вижда, че

$$R_i(p)^{-1} = R_i\left(\frac{1}{p}\right)$$

за произволни $1 \leq i \leq m$ и $p \in F \setminus \{0\}$, съгласно

$$R_i(p)A = \begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ pr_i \\ \dots \\ r_m \end{pmatrix}, \ R_i\left(\frac{1}{p}\right)R_i(p)(A) = R_i\left(\frac{1}{p}\right)\begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ pr_i \\ \dots \\ r_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ \frac{1}{p}(pr_i) \\ \dots \\ r_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_i \\ \dots \\ r_m \end{pmatrix} = A,$$

$$R_i\left(\frac{1}{p}\right)A = \begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ \frac{1}{p}r_i \\ \dots \\ r_m \end{pmatrix} \text{ и } R_i(p)\,R_i\left(\frac{1}{p}\right)(A) = R_i(p)\begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ \frac{1}{p}r_i \\ \dots \\ r_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ p\left(\frac{1}{p}r_i\right) \\ \dots \\ r_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_i \\ \dots \\ r_m \end{pmatrix} = A.$$

Накрая,

$$R_{i,j}^{-1} = R_{i,j}$$

за всички $1 \leq i < j \leq n$, защото

$$R_{i,j}(A) = \begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_j \\ \dots \\ r_i \\ \dots \\ r_m \end{pmatrix} \text{ и } R_{i,j}R_{i,j}(A) = R_{i,j}\begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_j \\ \dots \\ r_i \\ \dots \\ r_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_i \\ \dots \\ r_j \\ \dots \\ r_m = A \end{pmatrix}.$$

□

Определение 4.4. *Разширената матрица на система линейни уравнения (4.1) е*

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Казваме,че

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

е матрицата от коефициенти на (4.1).

Да забележим, че разширената матрица на система линейни уравнения я определя еднозначно и се определя еднозначно от тази система.
Например,

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{array} \right)$$

е разширената матрица на (4.2), а

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

е матрицата от коефициенти на (4.2).
Да забележим, че системата линейни уравнения (4.2) има същите решения като системата с разширена матрица

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -7 & -7 \\ 1 & 3 & 4 \end{array} \right), \tag{4.5}$$

получена от (4.2) чрез умножение на второто уравнение с -2 и прибавяне към първото. По-точно, ако S е множеството от решения на (4.2) и S' е множеството от решения на (4.5), то $S \subseteq S'$, защото ако $s = (s_1, s_2) \in S$, то $2s_1 - s_2 = 1$, $s_1 + 3s_2 = 4$, откъдето

$$-7 = 1 - 2.4 = (2s_1 - s_2) - 2(s_1 + 3s_2) = -7s_2.$$

Системата (4.2) се получава от системата с разширена матрица (4.5) чрез елементарното преобразувание $R_{1,2}(-2)^{-1} = R_{1,2}(2)$. Ако $s' = (s'_1, s'_2) \in S'$, то от $-7s'_2 = -7$ и $s'_1 + 3s'_2 = 4$ следва

$$1 = -7 + 2.4 = (-7s'_2) + 2(s'_1 + 3s'_2) = 2s'_1 - s'_2,$$

така че $S' \subseteq S$ и $S = S'$.
Следващото твърдение доказва, че решенията на система линейни уравнения винаги се запазват под действие на елементарно преобразувание по редове към разширената матрица на тази система.

Твърдение 4.5. *Елементарните преобразувания по редове към разширената матрица на система линейни уравнения (4.1) не променят множеството от решения на (4.1).*

Доказателство. Да означим с S множеството от решения на дадената система линейни уравнения, а с S'-множеството от решения на системата, получена от дадената чрез прилагане на елементарно преобразувание по редове

R. Достатъчно е да докажем, че $S \subseteq S'$, защото прилагането на елементарното преобразувание по редове R^{-1} към новата система дава първоначалната система, откъдето $S' \subseteq S$ съгласно доказаното и $S = S'$.
Ако $R = R_{i,j}(q)$ е умножение на j-ти ред с $q \in F$ и прибавяне към i-ти ред за някои $1 \leq i \neq j \leq m$, то за всяко $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S$ имаме

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}s_k = b_i, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{j,k}s_k = b_j.$$

Заместването в i-тото уравнение на новата система дава

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{i,k} + qa_{j,k})s_k = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}s_k + q\left(\sum_{k=1}^{n} a_{j,k}s_k\right) = b_i + qb_j.$$

Следователно $s \in S'$ е решение на системата линейни уравнения, получена от дадената чрез прилагане на елементарното преобразувание $R_{i,j}(q)$ и $S \subseteq S'$.
В случая $R = R_i(p)$ с $p \in F \setminus \{0\}$, от

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}s_k = b_i$$

за $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S$ следва

$$\sum_{k=1}^{n}(pa_{i,k})s_k = p\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}s_k\right) = pb_i$$

и $s \in S'$, откъдето $S \subseteq S'$.
Ясно е, че размяната $R = R_{i,j}$ на i-то и j-то уравнение не променя решенията на система линейни уравнения.

□

Ако разделим първия ред на (4.5) на -7, получаваме системата линейни уравнения с разширена матрица

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

и същото множество от решения като (4.5) и (4.2). Умножаваме първия ред с -3 и прибавяме към втория ред, за да сведем разгледания пример към системата линейни уравнения с разширена матрица

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Разменяйки двете уравнения на получената система получаваме системата с разширена матрица

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right). \tag{4.6}$$

Уравненията на (4.6) гласят, че $x_1 = 1$ и $x_2 = 1$. Следователно тази система е определена и единственото и решение е $s = (1, 1)$.
В общия случай, ако разширената матрица на система линейни уравнения има ред от вида

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \ldots & 0 & b_i \end{array}\right), \tag{4.7}$$

с $b_i \neq 0$, то системата е несъвместима, защото споменатото уравнение гласи $0x_1 + \ldots + 0x_n = b_i$ и няма решение.
Ако разширената матрица на система линейни уравнения има ред от вида

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array}\right), \tag{4.8}$$

то можем да изпуснем това уравнение, защото то гласи $0x_1 + \ldots + 0x_n = 0$ и е изпълнено за всички стойности на $x_1, \ldots, x_n$.

Определение 4.6. *Съвместима система линейни уравнения е в Гаусов вид, ако разширената матрица на тази система изпълнява следните условия:*
(i) няма редове от вида (4.7) или (4.8);
(ii) първият ненулев елемент във всеки ред е единица, която се нарича водеща единица на този ред;
(iii) водещата единица на всеки следващ ред е надясно от водещата единица на предшестващия ред.

Да забележим, че в разширената матрица на система линейни уравнения в Гаус вид, стълбовете на водещите единици съдържат нули под тези водещи единици.

Определение 4.7. *Съвместима система линейни уравнения е в Гаус-Жорданов вид, ако:*
(i) тя е в Гаусов вид и
(ii) в стълбовете на водещите единици от разширената матрица на тази система има нули и над водещите единици.

Например, системата линейни уравнения с разширена матрица (4.6) е в Гаус-Жорданов вид. Друг пример система линейни уравнения в Гаус-Жорданов вид е

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & a_{13} & 0 & a_{15} & a_{16} & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{25} & a_{26} & b_2 \end{array}\right).$$

Тази система гласи, че

$$\left|\begin{array}{lllllll} 0.x_1 & +1.x_2 & +a_{13}x_3 & +0.x_4 & +a_{15}x_5 & +a_{16}x_6 & = b_1, \\ 0.x_1 & +0.x_2 & +0.x_3 & +1.x_4 & +a_{25}x_5 & +a_{26}x_6 & = b_2 \end{array}\right.$$

и е равносилна на равенствата

$$x_2 = -a_{13}x_3 - a_{15}x_5 - a_{16}x_6 + b_1, \quad x_4 = -a_{25}x_5 - a_{26}x_6 + b_2$$

за произволни стойности на x_1, x_3, x_5 и x_6.

В общия случай, нека съвместима система линейни уравнения е в Гаус-Жорданов вид и водещите единици на разширената матрица на тази система са в стълбовете с номера $j_1, \ldots, j_r$ за някакво естествено число r. Тогава

$$1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_r \leq n$$

и тази система има вида

$$x_{j_s} + \sum_{k \in \{j_s+1, j_s+2, \ldots, n\} \setminus \{j_{s+1}, \ldots, j_r\}} a_{sk}x_k = b_s, \quad \forall 1 \leq s \leq r.$$

За произволни стойности на x_k, $k \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j_1, \ldots, j_r\}$ системата има решение, в което

$$x_{j_s} = \sum_{k \in \{j_s+1, j_s+2, \ldots, n\} \setminus \{j_{s+1}, \ldots, j_r\}} (-a_{sk})x_k + b_s, \quad \forall 1 \leq s \leq r.$$

По този начин, решенията на система линейни уравнения могат да се прочетат направо от произволен неин Гаус-Жорданов вид.

Твърдение 4.8. *Всяка съвместима система линейни уравнения може да се приведе в Гаус-Жорданов вид.*

Доказателство. Ако матрицата на коефициентите на съвместима система линейни уравнения е нулева, то и стълбът на свободните членове е нулев и всяка наредена n-торка с елементи от F е решение на тази система.
Ако матрицата на коефициентите на съвместима система линейни уравнения е ненулева, нека j_1 е минималният номер на ненулев стълб от тази матрица. Чрез разместване на редове можем да постигнем $a_{1,j_1} \neq 0$. Умножавайки първото уравнение с a_{1,j_1}^{-1}, получаваме $a_{1,j_1} = 1$. Ако системата има m уравнения, то за всяко $2 \leq i \leq m$ умножаваме първото уравнение с $-a_{i,j_1}$ и прибавяме към i-тото уравнение, за да елиминираме x_{j_1} от всички уравнения освен първото. По този начин получаваме система линейни уравнения с разширена матрица от вида

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & \dots & 0 & 1 & * & b_1 \\ \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} & \mathbb{O} & A' & b' \end{array}\right). \tag{4.9}$$

Продължаваме по същия начин със системата линейни уравнения с разширена матрица

$$(A'|b').$$

Елементарните преобразувания на редовете на (4.9) след първия не променят нулите в тези редове в стълбовете с номера от 1 до j_1. В резултат получаваме система линейни уравнения с разширена матрица от вида

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccccc|c} 0 & \dots & 0 & 1 & a_{1,j_1+1} & \dots & a_{1,j_2-1} & a_{1,j_2} & a_{1,j_2+1} & \dots & a_{1,j_{r-1}-1} & a_{1,j_{r-1}} & a_{1,j_{r-1}+1} & \dots & a_{1,j_r-1} & a_{1,j_r} & \dots & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{2,j_2+1} & \dots & a_{2,j_{r-1}-1} & a_{2,j_{r-1}} & a_{2,j_{r-1}+1} & \dots & a_{2,j_r-1} & a_{2,j_r} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{r-1,j_{r-1}+1} & \dots & a_{r-1,j_r-1} & a_{r-1,j_r} & \dots & b_{r-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & b_r \end{array}\right)$$

и водещи единици в стълбовете с номера $1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq n$, която е в Гаусов вид.
Остава да анулираме онези елементи от стъбовете на водещите единици, които се намират над тези водещи единици. За целта умножаваме последния ред с $-a_{i,j_r}$ и прибавяме към i-ти ред за всички $1 \leq i \leq r-1$. Продължаваме по същия начин с първите $r-1$ реда и анулираме елементите над водещите единици в стълбовете с номера $j_{r-1}, j_{r-2}, \ldots, j_1$. За анулиране на елементите в стълба с номер j_s над s-тия ред прилагаме елементарни преобразувания само върху първите s реда и не променяме получените вече нули в стълбовете с номера $j_{s+1}, \ldots, j_r$ над съответните водещи единици. В резултат получаваме система линейни уравнения с разширена матрица

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccccc|c} 0 & \dots & 0 & 1 & a_{1,j_1+1} & \dots & a_{1,j_2-1} & 0 & a_{1,j_2+1} & \dots & a_{1,j_{r-1}-1} & 0 & a_{1,j_{r-1}+1} & \dots & a_{1,j_r-1} & 0 & \dots & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{2,j_2+1} & \dots & a_{2,j_{r-1}-1} & 0 & a_{2,j_{r-1}+1} & \dots & a_{2,j_r-1} & 0 & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{r-1,j_{r-1}+1} & \dots & a_{r-1,j_r-1} & 0 & \dots & b_{r-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & b_r \end{array}\right),$$

която е в Гаус-Жорданов вид.

□