Глава 15

# Линейни изображения. Изоморфизъм на линейни пространства

Определение 15.1. *Изображение $\varphi : U \to V$ на линейни пространства $U$ и $V$ над поле $F$ е линейно, ако*

$$\varphi(x_1u_1+\ldots+x_nu_n) = x_1\varphi(u_1)+\ldots+x_n\varphi(u_n) \quad \text{за всички} \quad u_i \in U \quad \text{и} \quad x_i \in F.$$

*Линейно изображение $\varphi : U \to U$ на линейно пространство $U$ в себе си се нарича линеен оператор.*

Всяка линейна функция $f : U \to F$ на линейно пространство $U$ над поле $F$ е линейно изображение.

Ако $\mathbb{R}[x]^{(\leq n)}$ е пространството на полиномите $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ на $x$ от степен $\leq n$ с реални коефициенти, то диференцирането

$$\frac{d}{dx} : \mathbb{R}[x]^{(\leq n)} \longrightarrow \mathbb{R}[x]^{(\leq n-1)}, \quad \frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$$

е линейно изображение в пространството на полиномите на $x$ от степен $\leq n-1$ с реални коефициенти. По-точно, за произволни полиноми $f_i(x) \in \mathbb{R}[x]^{(\leq n)}$, $1 \leq i \leq m$ и произволни константи $\lambda_i \in \mathbb{R}$ е в сила

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{m} \frac{d}{dx}(\lambda_i f_i(x)) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left[\frac{d}{dx}(f_i(x))\right],$$

съгласно $\frac{d}{dx}(g(x)+h(x)) = \frac{d}{dx}(g(x))+\frac{d}{dx}(h(x))$ и $\frac{d}{dx}(rg(x)) = r\frac{d}{dx}g(x)$ за $g(x), h(x) \in \mathbb{R}[x]^{(\leq n)}$, $r \in \mathbb{R}$. Можем да разглеждаме

$$\frac{d}{dx} : \mathbb{R}[x]^{(\leq n)} \longrightarrow \mathbb{R}[x]^{(\leq n)}$$

като линеен оператор в $\mathbb{R}[x]^{(\leq n)}$.

Нулевото изображение

$$\mathbb{O} : U \longrightarrow V, \quad \mathbb{O}(u) = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V \quad \text{за всички} \quad u \in U$$

е линейно, защото

$$x_1\mathbb{O}(u_1) + \ldots + x_n\mathbb{O}(u_n) = x_1\overrightarrow{\mathcal{O}}_V + \ldots + x_n\overrightarrow{\mathcal{O}}_V =$$
$$= \overrightarrow{\mathcal{O}}_V + \ldots + \overrightarrow{\mathcal{O}}_V = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V = \mathbb{O}(x_1u_1 + \ldots + x_nu_n)$$

за произволни $u_i \in U$, $x_i \in F$.

Тъждественото изображение $\mathrm{Id} : U \to U$, $\mathrm{Id}(u) = u$, $\forall u \in U$ на линейно пространство $U$ е линеен оператор, съгласно

$$x_1\mathrm{Id}(u_1) + \ldots + x_n\mathrm{Id}(u_n) = x_1u_1 + \ldots + x_nu_n = \mathrm{Id}(x_1u_1 + \ldots + x_nu_n)$$

за всички $u_i \in U$ и $x_i \in F$.

Твърдение 15.2. *Изображение $\varphi : U \to V$ на линейни пространства над поле $F$ е линейно тогава и само тогава, когато $\varphi(u_1+u_2) = \varphi(u_1)+\varphi(u_2)$ и $\varphi(\lambda u_1) = \lambda\varphi(u_1)$ за произволни $u_1, u_2 \in U$, $\lambda \in F$.*

Доказателство. Ако $\varphi : U \to V$ е линейно изображение, то по определение

$$\varphi(x_1u_1+\ldots+x_nu_n) = x_1\varphi(u_1)+\ldots+x_n\varphi(u_n) \quad \text{за произволни} \quad u_i \in U, \ \ x_i \in F.$$

В частност,

$$\varphi(u_1+u_2) = \varphi(1.u_1+1.u_2) = 1.\varphi(u_1)+1.\varphi(u_2) = \varphi(u_1)+\varphi(u_2) \quad \text{и}$$
$$\varphi(\lambda u_1) = \lambda\varphi(u_1) \quad \text{за всички} \quad u_1, u_2 \in U, \ \ 1, \lambda \in F.$$

Обратно, ако $\varphi(u_1+u_2) = \varphi(u_1)+\varphi(u_2)$ и $\varphi(\lambda u_1) = \lambda\varphi(u_1)$ за произволни $u_1, u_2 \in U$, $\lambda \in F$, то с индукция по $n$ ще проверим, че

$$\varphi(x_1u_1+\ldots+x_nu_n) = x_1\varphi(u_1)+\ldots+x_n\varphi(u_n) \quad \text{за произволни} \quad u_i \in U, \ \ x_i \in F.$$

В случая $n = 1$ имаме $\varphi(x_1u_1) = x_1\varphi(u_1)$ по предположение. В общия случай,

$$\varphi(x_1u_1+\ldots+x_{n-1}u_{n-1}+x_nu_n) = \varphi(x_1u_1+\ldots+x_{n-1}u_{n-1})+\varphi(x_nu_n)$$

от съгласуваността на $\varphi$ със събирането на вектори. По индукционно предположение,

$$\varphi(x_1u_1+\ldots+x_{n-1}u_{n-1}) = x_1\varphi(u_1)+\ldots+x_{n-1}\varphi(u_{n-1}).$$

Допуснали сме $\varphi(x_nu_n) = x_n\varphi(u_n)$. Следователно

$$\varphi(x_1u_1+\ldots+x_{n-1}u_{n-1}+x_nu_n) = x_1\varphi(u_1)+\ldots+x_{n-1}\varphi(u_{n-1})+x_n\varphi(u_n),$$

което доказва твърдението.

□

Твърдение 15.3. *Ако $\varphi : U \to V$ е линейно изображение на линейни пространства над поле $F$, то:*
*(i) $\varphi(\overrightarrow{\mathcal{O}}_U) = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$ за нулевите вектори $\overrightarrow{\mathcal{O}}_U$ на $U$ и $\overrightarrow{\mathcal{O}}_V$ на $V$;*
*(ii) $\varphi(-u) = -\varphi(u)$ за произволен вектор $u \in U$;*
*(iii) $\varphi(u-v) = \varphi(u)-\varphi(v)$ за произволни $u, v \in U$;*
*(iv) ако $u_1, \ldots, u_n \in U$ са линейно зависими, то $\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_n) \in V$ са линейно зависими.*

Доказателство. (i) За произволен вектор $u \in U$, $0 \in F$ и $\overrightarrow{\mathcal{O}}_U \in U$ е изпълнено $0u = \overrightarrow{\mathcal{O}}_U$ съгласно Твърдение 2.4 (iii). Оттук,

$$\varphi(\overrightarrow{\mathcal{O}}_U) = \varphi(0u) = 0\varphi(u) = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V,$$

прилагайки още веднъж Твърдение 2.4 (iii), за да получим, че $0\varphi(u) = \overrightarrow{\mathcal{O}}_V$.
(ii) За произволен вектор $u \in U$ и $1, -1 \in F$ е в сила

$$\varphi(-u) = \varphi((-1)u) = (-1)\varphi(u) = -\varphi(u),$$

съгласно $-u = (-1)u$ и $(-1)\varphi(u) = -\varphi(u)$ по Твърдение 2.4 (v).
(iii) По определение, $u-v := u+(-v)$ и $\varphi(u)-\varphi(v) := \varphi(u)+[-\varphi(v)]$. Съгласно съгласуваността на $\varphi$ със събирането на вектори и (ii) имаме

$$\varphi(u-v) = \varphi(u+(-v)) = \varphi(u)+\varphi(-v) = \varphi(u)+[-\varphi(v)] = \varphi(u)-\varphi(v).$$

(iv) Нека

$$\lambda_1u_1+\ldots+\lambda_iu_i+\ldots+\lambda_nu_n = \overrightarrow{\mathcal{O}}_U \quad \text{за} \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F \quad \text{с поне едно} \quad \lambda_i \neq 0. \qquad (15.1)$$

Прилагаме $\varphi$ към двете страни на това равенство и използваме определението за линейност на изображение, както и (i), за да получим, че

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathcal{O}}_V = \varphi(\overrightarrow{\mathcal{O}}_U) = \varphi\left(\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_i u_i + \ldots + \lambda_n u_n\right) = \\ = \lambda_1 \varphi(u_1) + \ldots + \lambda_i \varphi(u_i) + \ldots + \lambda_n \varphi(u_n)\end{aligned}$$

с поне едно $\lambda_i \neq 0$. Следователно $\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_n)$ са линейно зависими. Още повече, ако $u_1, \ldots, u_n \in U$ изпълняват линейна зависимост (15.1) с коефициенти $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F$, то и $\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_n) \in V$ изпълняват линейната зависимост със същите коефициенти.

$\square$

Нека $\varphi : U \to V$ е линейно изображение. Свойство (iv) от Твърдение 15.3 налага ограничения върху образите $\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_n) \in V$ на линейно зависима система вектори $u_1, \ldots, u_n \in U$. Следващото твърдение показва, че линейно независими вектори $w_1, \ldots, w_n \in U$ могат да имат произволни образи $\varphi(w_1), \ldots, \varphi(w_n) \in V$.

Твърдение 15.4. (Еднозначно задаване на линейно изображение чрез образите на базис:) *Нека $e_1, \ldots, e_n$ е базис на линейно пространство $U$ над поле $F$, а $v_1, \ldots, v_n$ е произволна система вектори от линейно пространство $V$ над същото поле $F$. Тогава съществува единствено линейно изображение $\varphi : U \to V$ с $\varphi(e_i) = v_i$ за всички $1 \leq i \leq n$.*

Доказателство. Произволен вектор $u \in U$ има еднозначно определени координати $x_1, \ldots, x_n \in F$ спрямо базиса $e_1, \ldots, e_n$, така че $u = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$. От определението за линейност на изображение $f : U \to V$ следва, че

$$f(u) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i).$$

Това ни подсказва да разгледаме изображението

$$\varphi : U \longrightarrow V,$$

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i,$$

което е коректно зададено, защото всеки вектор от $U$ има еднозначно определени координати $x_1, \ldots, x_n \in F$ спрямо базиса $e_1, \ldots, e_n$ на $U$, а оттам и еднозначно определен образ $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i v_i$.

За произволни $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i \in U$ и $\lambda \in F$ е в сила

$$\begin{aligned}\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i + \sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) v_i = \\ = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i + y_i v_i = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i + \sum_{i=1}^{n} y_i v_i = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) + \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right)\end{aligned}$$

и

$$\varphi\left(\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i) e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i) v_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda(x_i v_i) = \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) = \lambda\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right).$$

Следователно $\varphi$ е линейно изображение. Освен това, за всяко $1 \leq i \leq n$ е изпълнено

$$\varphi(e_i) = \varphi(0.e_1 + \ldots + 0.e_{i-1} + 1.e_i + 0.e_{i+1} + \ldots + 0.e_n) =$$
$$= 0.v_1 + \ldots + 0.v_{i-1} + 1.v_i + 0.v_{i+1} + \ldots + 0.v_n = v_i,$$

така че $\varphi : U \to V$ е линейно изображение с $\varphi(e_i) = v_i$ за всички $1 \leq i \leq n$. Произволно линейно изображение $\psi : U \to V$ с $\psi(e_i) = v_i$ за всички $1 \leq i \leq n$ изпълнява равенствата

$$\psi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \psi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)$$

за всички $x_1, \ldots, x_n \in F$. Следователно $\psi$ и $\varphi$ действат по един и същи начин върху всеки вектор $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \in U$ и $\psi \equiv \varphi$ съвпадат. Това доказва единствеността на линейното изображение $\varphi$.

□

Определение 15.5. *Взаимно еднозначните линейни изображения $\varphi : U \to V$ се наричат линейни изоморфизми.*
*Линейни пространства $U$ и $V$ са изоморфни, ако съществува линеен изоморфизъм $\varphi : U \to V$.*

Твърдение 15.6. *Ако $\varphi : U \to V$ е изоморфизъм на линейни пространства, то обратното изображение $\varphi^{-1} : V \to U$ е линейно, а оттам и линеен изоморфизъм.*

Доказателство. Достатъчно е да проверим, че

$$\varphi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi^{-1}(v_i) \tag{15.2}$$

за произволни $v_i \in V$ и $x_i \in F$. За целта използваме взаимната еднозначност на $\varphi : U \to V$, съгласно която за произволен вектор $v_i \in V$ съществува еднозначно определен вектор $u_i = \varphi^{-1}(v_i) \in U$ с $\varphi(u_i) = v_i$ и доказваме, че

$$\varphi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(u_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i \tag{15.3}$$

за произволни $u_i \in U$ и $x_i \in F$. От линейността на $\varphi$ имаме

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(u_i).$$

Действаме с $\varphi^{-1}$ върху горното равенство, за да получим

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \varphi^{-1}(v_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i = \varphi^{-1}\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i\right) =$$
$$= \varphi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(u_i)\right) = \varphi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right),$$

което съвпада с (15.3) и да докажем твърдението.

□

Твърдение 15.7. *Крайномерни пространства $U$ и $V$ над поле $F$ са изоморфни тогава и само тогава, когато имат равни размерности* $\dim(U) = \dim(V)$.

Доказателство. Нека $\varphi : U \to V$ е линеен изоморфизъм на крайномерни пространства и $e_1, \ldots, e_n$ е базис на $U$. Достатъчно е да проверим, че $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ е базис на $V$, за да получим, че $\dim(V) = n = \dim(U)$. Всеки вектор на $V$ е от вида $v = \varphi(u)$ за някакъв вектор $u \in U$. Ако $u = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, то

$$v = \varphi(u) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) \in l(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)).$$

Това доказва, че $l(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = V$. Ако допуснем, че $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ са линейно зависими, то след прилагане на линейния изоморфизъм

$$\varphi^{-1} : V \to U$$

получаваме линейно зависими вектори $\varphi^{-1}\varphi(e_1) = e_1, \ldots, \varphi^{-1}\varphi(e_n) = e_n$. Това противоречи на линейната независимост на базисните вектори $e_1, \ldots, e_n$ на $U$ и доказва линейната независимост на $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$. По този начин установихме, че $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ е базис на $V$ и $\dim U = \dim V$.

Нека $\dim(U) = \dim(V) = n$, $e_1, \ldots, e_n$ е базис на $U$ и $f_1, \ldots, f_n$ е базис на $V$. Съгласно Твърдение 15.4, съществува еднозначно определено линейно изображение

$$\varphi : U \longrightarrow V, \quad \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

с $\varphi(e_i) = f_i$ за всички $1 \leq i \leq n$. Аналогично, съществува еднозначно определеното линейно изображение

$$\psi : V \longrightarrow U, \quad \psi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i f_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

с $\psi(f_i) = e_i$ за всички $1 \leq i \leq n$. От

$$\psi\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \psi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i f_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad \text{и}$$
$$\varphi\psi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i f_i\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

следва, че $\psi\varphi = \mathrm{Id}_U$ и $\varphi\psi = \mathrm{Id}_V$, така че $\varphi$ е взаимно еднозначно, $\psi = \varphi^{-1}$ и $\varphi : U \to V$ е линеен изоморфизъм.

□

Следствие 15.8. *За всяко поле $F$ и всяко естествено число $n \in \mathbb{N}$ съществува единствено с точност до изоморфизъм $n$-мерно линейно пространство над $F$. По-точно, за произволен базис $v_1, \ldots, v_n$ на $n$-мерно линейно пространство $V$ над $F$, изображението*

$$\varphi : V \to F^n, \quad \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) = (x_1, \ldots, x_n), \tag{15.4}$$

*съпоставящо на вектор $v = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$ наредената $n$-торка $(x_1, \ldots, x_n) \in F^n$ от координатите му спрямо $v_1, \ldots, v_n$ е линеен изоморфизъм. По тази причина, можем да разглеждаме $F^n$ като модел за $n$-мерно линейно пространство над $F$.*

Доказателство. Нека $v_1, \ldots, v_n$ е базис на линейно пространство $V$ над $F$ и

$$e_i = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-i}), \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

е стандартният базис на $F^n$. Съгласно втората част на доказателството на Твърдение 15.7, еднозначно определеното линейно изображение $\varphi : V \to F^n$ с $\varphi(v_i) = e_i$ за всички $1 \leq i \leq n$ е линеен изоморфизъм. Съгласно

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) = x_1 e_1 + \ldots + x_i e_i + \ldots + x_n e_n = (x_1, \ldots, x_n),$$

изображението $\varphi$ съвпада с (15.4).

□