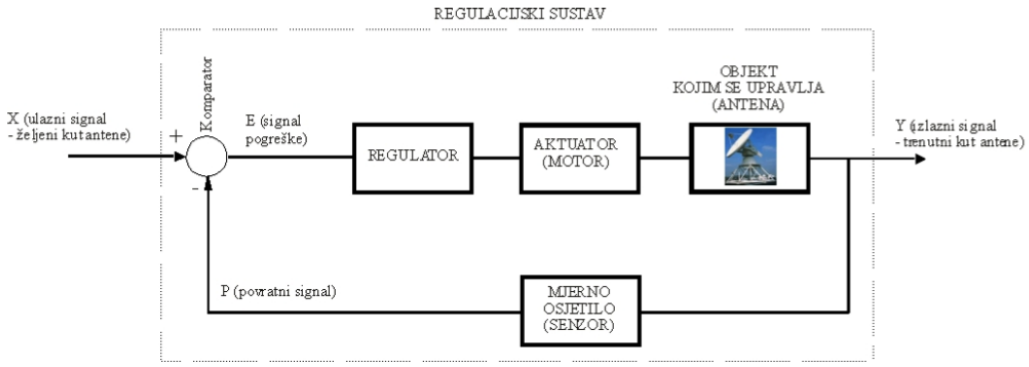
SIGNALI I SUSTAVI [1. kolokvij]

1. Nacrtati blok dijagram regulacijskog sustava za pozicioniranje satelitske antene i opisati princip rada.



Neka je antena namještena tako da prima signal s određenog satelita, tj. zakrenuta je za određeni kut u odnosu na početni (referentni) položaj. Recimo da želimo primati signal s nekog drugog satelita tj. usmjeriti antenu prema njemu (zakrenuti je za određeni kut u odnosu na trenutni položaj). Željeni kut zakreta antene dovest ćemo kao ulazni signal u regulacijski sustav, a trenutni zakret antene bit će izlazni signal iz sustava. Regulacijski sustav ima senzor koji mjeri trenutni zakret antene (izlazni signal) i putem povratne veze ovaj izlazni signal vraća na ulaz sustava, gdje se uspoređuje sa željenim zakretom. Uspoređivanje se obavlja na način da se izlazni signal oduzima od ulaznog i razlika se naziva **signal pogreške**. On kazuje koliko se željeni kut zakreta antene (ulazni signal) razlikuje od stvarnog zakreta antene (izlazni signal). Ukoliko se željeni i stvarni zakret antene međusobno razlikuju (tj. signal pogreške je različit od nule), potrebno je zakretati antenu sve dok se ne izjednače željeni i trenutni zakret tj. dok signal pogreške ne padne na nulu. Jedan od sastavnih dijelova sustava za pozicioniranje biti će i modul koji će fizički zakretati antenu i naziva se aktuator (npr. istosmjerni motor upravljan strujom magnetiziranja).

Dakle, regulacijski proces se odvija na način da se na ulaz sustava dovede željeni zakret antene, senzor očita trenutni zakret koji se pomoću **povratne veze** vrati na ulaz, izračuna se razlika između željenog i trenutnog kuta (signal pogreške), ovaj signal pogreške se najčešće pomoću određenog regulatora još dodatno prilagodi aktuatoru, te da naredbu aktuatoru da pomakne antenu. Potom se, nakon pomaka opet očita trenutni položaj antene, ovaj podatak se opet vraća na ulaz i uspoređuje sa željenim, te ukoliko mu nije jednak, postupak se nastavlja sve do trenutka kad se antena ne pozicionira u željeni položaj. Ovaj proces se naziva **automatsko reguliranje**.

2. Opisati razlike između kontinuiranih i diskretnih signala i sustava (navesti primjere kontinuiranih i diskretnih signala i sustava, korijeni razvoja kontinuiranih i diskretnih signala i sustava i sl.)

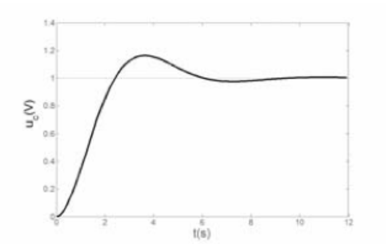
Signale koji se kontinuirano mijenjaju u vremenu nazivamo kontinuirani signali, dok one koji se pojavljuju samo u određenim (diskretnim) vremenskim trenucima nazivamo diskretni signali. Tako razlikujemo kontinuirane i diskretne signale i sustave. Npr., u analizi električnih krugova, ili kod mehaničkih sustava (kao što je automobil), signali (struja, napon, brzina automobila) se mijenjaju kontinuirano (tj. brzina automobila mijenja se postepeno, npr. ako vozimo brzinom od 50km/h, ne možemo trenutno postići brzinu od 70km/s, već trebamo ubrzavati i postepeno podići brzinu do željene vrijednosti). S druge strane, ako promatramo biološki proces diobe stanice, broj novorođenih stanica jest cijeli broj (iz jedne stanice nastanu dvije, iz dvije četiri, itd., tj. ne možemo dobiti 3.25 ili 4.01 stanicu). Dakle, u ovom slučaju govorimo o diskretnim pojavama tj. sustavima.

**Želimo li pratiti trend dionica kroz neki duži vremenski period, npr. mjesec dana, svaki dan u određeno vrijeme (neka to bude trenutak zatvaranja burze) očitavamo vrijednost dionica i na kraju mjeseca određujemo mjesečni prosjek. Stoga prikaz cijena dionica neće biti krivulja koja se kontinuirano (neprekinuto) mijenja u vremenu, već će se sastojati od niza brojeva od kojih svaki odgovara cijeni dionice u jednom određenom danu (diskretnom vremenskom trenutku). Dakle, cijena dionice predstavlja diskretan signal, a burza jedan složeni diskretni sustav čije je ponašanje ponekad vrlo teško predvidljivo.*

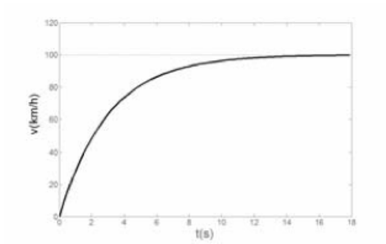
Koncepti i tehnike vezani uz kontinuirane i diskretne sustave međusobno su usko povezani. Međutim, budući da su se kroz povijest primjenjivali za međusobno različite svrhe, tako su se i proučavali i razvijali – svaki zasebno. Kontinuirani signali i sustavi imaju korijene u fizici i, u novije vrijeme, elektrotehnici i komunikacijama. S druge strane, diskretni sustavi razvijali su se iz numeričke analize, statistike i teorije nizova, a primjenjivali su se kod analize ekonomskih i demografskih podataka. Međutim, tijekom nekoliko zadnjih desetljeća područja koja se bave kontinuiranim i diskretnim signalima i sustavima sve se više povezuju i isprepliću. Razlog leži u snažnom razvoju tehnologije, posebno integriranih krugova i digitalnih računala koji su omogućili da digitaliziramo kontinuirane signale (diskretiziramo ih po vremenu i amplitudi tj. uzorkujemo ih pomoću analogno-digitalnih pretvarača). Uzorkovanje kontinuiranih signala i pretvaranje u diskretne vrijednosti omogućuje nam da kontinuirane signale obrađujemo pomoću digitalnih računala.

3. Matematički prikaz vremenski kontinuiranih signala. Navesti 3 primjera vremenski kontinuirana fizikalna signala i prikazati ih odgovarajućim grafovima.

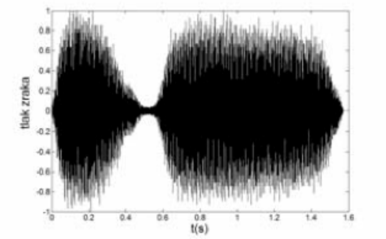
Kontinuirani signal možemo definirati kao funkciju koja opisuje promatranu fizikalnu varijablu ili fizikalni proces kao kontinuiranu veličinu i u sebi nosi informaciju o procesu ili sustavu. Signal je funkcija nezavisnih varijabli kao što su vrijeme, prostor, temperatura, udaljenost, itd.
Kontinuirano vrijeme ćemo označavati s 't' te kod kontinuiranih signala ćemo koristiti zagrade ( ), te kontinuirani signal zapisujemo kao x(t). Zato je t neprekinuti vremenski interval (npr. t=[-10,10])
Ako na ulaz RLC kruga u trenutku t=0s dovedemo konstantni napon Uul(t)=1V, napon na kondenzatoru (Uc(t)) imat će oblik prikazan na slici 2.3.
• Brzina automobila može npr. rasti od vrijednosti 0 do 100km/h na način prikazan na slici 2.4.
• Slike 2.5 i 2.6 prikazuju grafički zapis audio signala. Kada bismo ove signale doveli u audio sustav tj. na zvučnike, čuli bismo žvižduk vlaka (signal sa slike 2.5) i cvrkut ptica (signal sa slike 2.6).



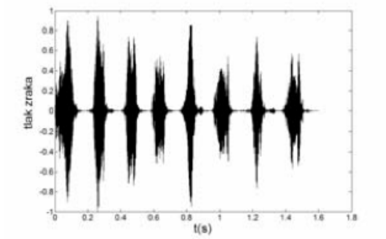
Sl. 2.3: *Valni oblik napona na kondenzatoru*



Sl. 2.4: *Brzina automobila ovisna o vremenu*



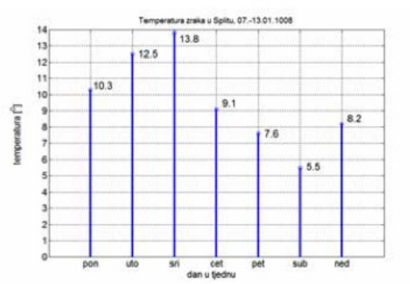
Sl. 2.5: *Zvučni signal, žvižduk vlaka*



Sl. 2.6: *Zvučni signal, cvrkut ptice*

4. Matematički prikaz vremenski diskretnih signala. Navesti 3 primjera vremenski diskretna fizikalna signala i prikazati ih odgovarajućim grafovima.

Kod kontinuiranih signala nezavisna varijabla (najčešće vrijeme) je kontinuinuirana veličina, dok kod diskretnih signala može poprimiti samo određene (diskretne) vrijednosti. Diskretne signale ćemo označavati s 'n' te kod diskretnih signala koristimo uglate zagrade [ ] i signal zapisujemo kao x[n] gdje n poprima isključivo cjelobrojne vrijednosti.

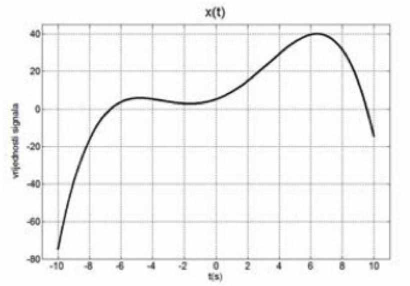


Sl. 2.7: *Primjer diskretnog signala: temperatura zraka izmjerenog u Splitu tijekom tjedna u siječnju, 2008.*

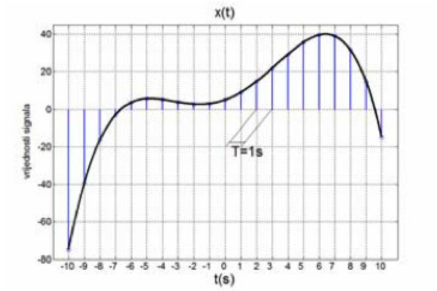
Primjer diskretnog signala dan je na slici 2.7 i predstavlja temperature zraka u Splitu, izmjerene svaki dan u 12h, tijekom jednog tjedna u siječnju. Ovakav prikaz najčešće zovemo peteljkasti graf (*eng. stem plot*), a čine ga uzorci signala.

Slično se mogu dati primjeri za npr. broj stanica ili stanje dionica na burzi gdje se graf prikaže u obliku linije, ali ne kontinuirane vec linije koja spaja poznate točke.

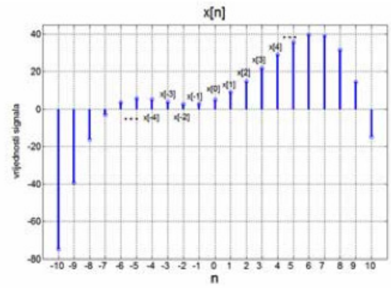
Često se vremenski diskretni signali dobivaju iz kontinuiranih, primjenom postupka **uzorkovanja**, na način da se vremenski interval u kojem je kontinuirani signal definiran podijeli na jednake dijelove (širine T – naziva se period uzorkovanja), te se diskretni signal definira samo za određene vremenske trenutke, međusobno udaljene za T sekundi. Postupak uzorkovanja prikazan je na slikama 2.8a-c. Na slici 2.8 a) vidimo kontinuirani signal x(t) definiran na neprekinutom vremenskom intervalu od -10 do 10s. Uzmimo za period uzorkovanja npr. T=1s i očitavamo vrijednosti signala x(t) svaku sekundu tj. uzorkujemo signal, Sl. 2.8 b). Rezultat uzorkovanja prikazan je na slici 2.8 c) i predstavlja vremenski diskretni signal.



Sl. 2.8 a): *Signal kontinuiran u vremenu, x(t)*



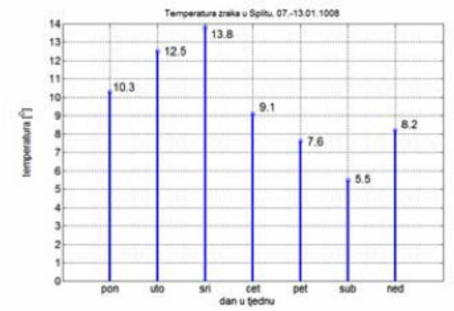
Sl. 2.8 b): *Uzimanje uzoraka kontinuiranog signala (uzorkovanje)*



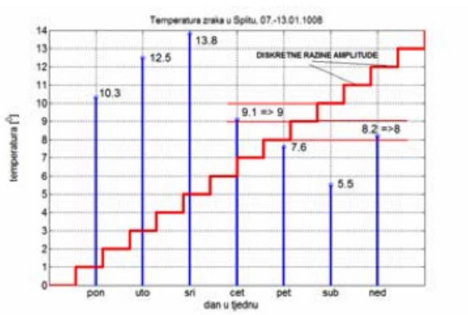
Sl. 2.8 c): *Signal diskretiziran po vremenu (diskretni signal), x[n]*

5. Objasniti kako se digitaliziraju vremenski kontinuirani signali i pokazati digitalizaciju na primjeru proizvoljnog kontinuiranog signala pomoću 4-bitnog AD pretvornika.

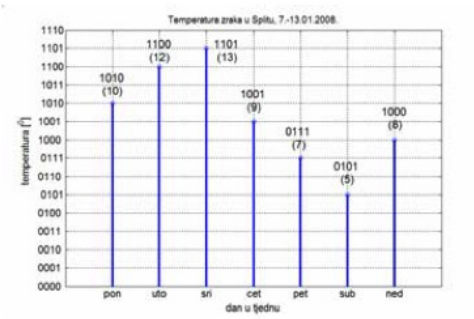
Signal također možemo uzorkovati i po amplitudi, tj. možemo diskretizirati vrijednosti koje signal poprima. Diskretizirajmo npr. po amplitudi signal sa slike 2.7: definirajmo da temperatura može poprimiti samo cjelobrojne vrijednosti tj. svaki uzorak signala zaokružimo npr. na prvu nižu cjelobrojnu vrijednost, Sl. 2.9 a). Cjelobrojne vrijednosti signala možemo kodirati u binarnom brojevnom sustavu (prikazati u binarnom obliku). Signal koji smo dobili nazivamo **digitalni** signal (diskretiziran po vremenu i amplitudi i kodiran), Sl. 2.9 b). Sada signal možemo prikazati sekvencom (nizom) binarnih brojeva: 1010, 1100, 1101, 1001, 0111, 0101, 1000.



Sl. 2.7: *Primjer diskretnog signala: temperatura zraka izmjerenog u Splitu tijekom tjedna u siječnju, 2008.*



Sl. 2.9 a): *Diskretiziranje signala po amplitudi (kvantiziranje)*



Sl. 2.9 b): *Digitalni signal (diskretiziran po vremenu iamplitudi i kodiran u binarnom brojevnom sustavu)*

Digitalno računalo radi s digitalnim podacima (signalima), kodiranim u binarnom brojevnom sustavu. Da bi digitalno računalo moglo primiti i obraditi kontinuirane signale (brzinu vozila, visinu aviona, govorni signal, ...) prvo ih treba digitalizirati pomoću uređaja koji nazivamo analogno-digitalni (A/D) pretvornik (napomenimo da se za kontinuirane signale i sustave često koristi i naziv 'analogni'). A/D pretvornici definirani su brojem bitova koji određuju broj razina na koje svodimo vrijednosti signala. Tako npr. 16-bitni A/D pretvornik ima na raspolaganju 2^{16}=65536 različitih amplitudnih razina.

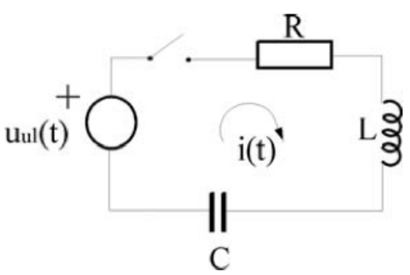
6. Definirati matematičko modeliranje sustava. Matematički modelirati RLC mrežu. Za ulazni signal uzeti napon na ulazu, a za izlazni signal uzeti:

a) napon na kondenzatoru

b) napon na otporniku

c) struju u krugu

Nacrtati pripadajuće blok dijagrame. Koristiti integratore.



Svojstvo sustava jest da prima, pohranjuje, transformira i prenosi signale. Da bismo na neki način kvantitativno opisali i analizirali sustav koji nas zanima, služimo se raznim matematičkim postupcima. Pogodan matematički opis nekog realnog sustava nazivamo **matematički model sustava**, a proces definiranja modela sustava naziva se **matematičko modeliranje**. Prikažimo na jednostavnom primjeru kako se matematički modelira neki sustav. Poslužimo se RLC krugom prikazanim na slici.

c)

Prvo ćemo postaviti naponsku jednadžbu kruga (ulazni napon jednak je sumi svih padova napona u krugu):

$$u_{ul}(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt \qquad (2.1)$$

Derivirajmo jednadžbu 2.1:

$$u_{ul}(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt \quad / \frac{d}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{du_{ul}(t)}{dt} = R\frac{di(t)}{dt} + L\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C}i(t) \qquad (2.2)$$

Izlučimo najveću derivaciju od i(t):

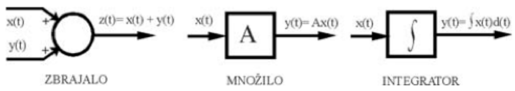
$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} = -\frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt} - \frac{1}{LC}i(t) + \frac{1}{L}\frac{du_{ul}(t)}{dt} \qquad (2.3)$$

Sada ćemo relaciju 2.3 dvaput uzastopno integrirati:

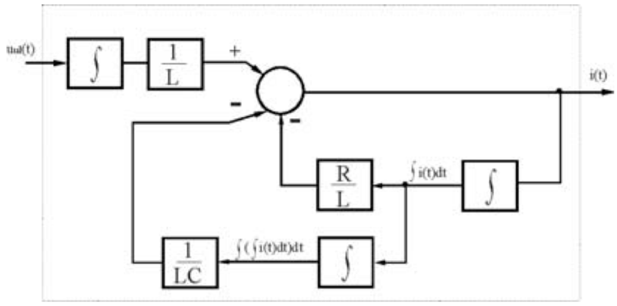
$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} = -\frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt} - \frac{1}{LC}i(t) + \frac{1}{L}\frac{du_{ul}(t)}{dt} \quad / \int \quad \Rightarrow \frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i(t) - \frac{1}{LC}\int i(t)dt + \frac{1}{L}u_{ul}(t) \ / \int \quad \Rightarrow$$

$$i(t) = -\frac{R}{L}\int i(t)dt - \frac{1}{LC}\int\left(\int i(t)dt\right)dt + \frac{1}{L}\int u_{ul}(t)dt \qquad (2.4)$$

Dobili smo jednadžbu u kojoj je struja izražena preko integrala struje i ulaznog napona. Ovakav model moguće je realizirati jer su integratori kao dijelovi sustava vrlo jednostavno fizički izvedivi.



Sl. 2.10: *Osnovni građevni blokovi blok-dijagrama*



Sl. 2.11: *Blok dijagram modela RLC kruga*

b)

zadnju jednadžbu (iz c) pomnožimo s R

$$i(t) = -\frac{R}{L}\int i(t)dt - \frac{1}{LC}\int\left(\int i(t)dt\right)dt + \frac{1}{L}\int u_{ul}(t)dt \quad | \cdot R$$

$$Ri(t) = u_R = R \cdot \left[-\frac{R}{L}\int i(t)dt - \frac{1}{LC}\int\left(\int i(t)dt\right)dt + \frac{1}{L}\int u_{ul}(t)dt\right]$$

slika je jednaka prethodnoj, samo se na sami izlaz (poslije povratne veze, na kraju) postavi još jedan “kvadrat” u kojem piše: R

a)

integrirajmo zadnju jednadžbu (iz c) i pomnožimo s 1/C

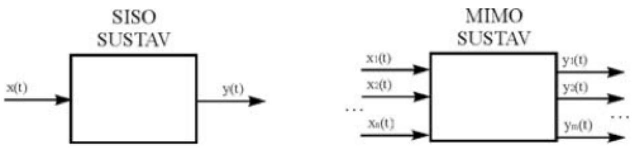
$$i(t) = -\frac{R}{L}\int i(t)dt - \frac{1}{LC}\int\left(\int i(t)dt\right)dt + \frac{1}{L}\int u_{ul}(t)dt \quad | \int$$

$$\int i(t)dt = \int\left(-\frac{R}{L}\int i(t)dt - \frac{1}{LC}\int\left(\int i(t)dt\right)dt + \frac{1}{L}\int u_{ul}(t)dt\right)dt \quad | \cdot \frac{1}{C}$$

$$\frac{1}{C}\int i(t)dt = u_C = \frac{1}{C}\int\left(-\frac{R}{L}\int i(t)dt - \frac{1}{LC}\int\left(\int i(t)dt\right)dt + \frac{1}{L}\int u_{ul}(t)dt\right)dt$$

slika je jednaka prvoj, samo se na sami izlaz (poslije povratne veze, na kraju) postavi još jedan “kvadrat” u kojem je integral, a nakon njega još jedan u kojem piše 1/C

7. Definirati MIMO i SISO sustave, nacrtati blok dijagrame.



Sl. 2.12: *SISO i MIMO sustavi*

*SISO - (**S**ingle **I**nput – **S**ingle **O**utput) sustavi s jednim ulazom i izlazom*
*MIMO – (**M**ultiple **I**nput, **M**ultiple **O**utput) sustavi s više ulaza i izlaza*
Primjer SISO sustava je strujni krug kojemu je ulazni signal napon, a izlazni struja. Osobno računalo jest, primjerice, MIMO sustav jer istovremeno može primati, obrađivati i generirati različite podatke (tekst, sliku, video, glazbu, itd.)

8. Definirati energiju i prosječnu snagu vremenski kontinuiranog signala na određenom vremenskom intervalu. Definirati energiju i prosječnu snagu vremenski kontinuiranog signala na beskonačnom vremenskom intervalu.
a) Navesti primjer signala s konačnom vrijednosti E_∞
b) Navesti primjer signala s beskonačnom vrijednosti E_∞
c) Navesti primjer signala s P_∞ jednakom nuli.

Za kontinuirani vremenski signal x(t) prihvaćena je slijedeća definicija ukupne energije tijekom intervala $t_1 \le t \le t_2$:

$$E = \int_{t1}^{t2} |x(t)|^2 \, dt$$

gdje je |x| modul broja x (koji može biti i kompleksan). Prosječna snaga također se dobije dijeljenjem ukupne energije duljinom vremenskog intervala (t_2-t_1):

$$P_{PROSJECNA} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t1}^{t2} |x(t)|^2 \, dt$$

Bitno je napomenuti da se pojmovi 'snaga' i 'energija' signala koriste u apstraktnom smislu, bez obzira na to da li se uistinu odnose na fizikalnu snagu i energiju koje nalazimo u prirodi.

U mnogim sustavima bit će nam zanimljivo izračunati snagu i energiju signala u beskonačno dugom intervalu tj. za $-\infty < t < \infty$ ili $-\infty < n < \infty$. U tim slučajevima energija će biti:

$$E_\infty = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt$$

Za neke signale integral će divergirati (težit će u ∞). Primjer je signal koji ima konstantnu vrijednost, npr. x(t)=4. Za takve signale kažemo da imaju beskonačnu energiju, dok one za koje vrijedi $E_\infty<\infty$ zovemo signali s konačnom energijom.

Na sličan način definirat ćemo prosječnu snagu signala na beskonačnom intervalu kao:

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt\right)$$

Pomoću ovih definicija možemo definirati 3 vrste signala:

- Prva vrsta signala ima konačnu ukupnu energiju ($E_\infty<\infty$). Prosječna snaga ovakvih signala jest 0, budući da će, npr. u kontinuiranom slučaju, biti:

  $$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{E_\infty}{2T} = 0 \qquad (2.16)$$

  Primjer signala s konačnom energijom jest:

  $$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{inace} \end{cases}$$

  Ovaj signal poprima vrijednosti na konačnom vremenskom intervalu i ima energiju $E_\infty=1$, te prosječnu snagu $P_\infty=0$.

*pod c) u principu ne traži treću vrstu signala (kad je i P i E beskonačno), već traži kad je P=0, a to je opet signal prve vrste kao pod a)

- Druga vrsta signala ima konačnu prosječnu snagu ($P_\infty<\infty$) i slijedom toga, beskonačnu energiju ($E_\infty=\infty$).
  Primjer ovakvog signala jest x(t)=3, za koji će vrijediti:

  $$E_\infty = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |3|^2 \, dt = \lim_{T\to\infty} (9t \Big|_{-T}^{T}) = \lim_{T\to\infty} (18T) = \infty$$

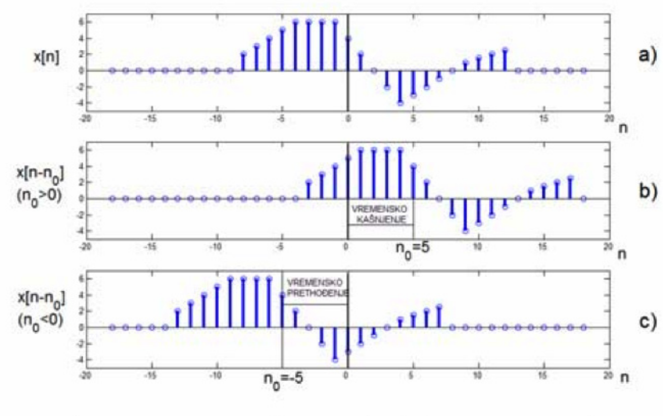
  $$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |3|^2 \, dt\right) = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{2T} 18T\right) = 9$$

- Kod treće vrste signala i energija i snaga imaju beskonačne vrijednosti, primjer je x(t)=t:

  $$E_\infty = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |t|^2 \, dt = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{3} t^3 \Big|_{-T}^{T}\right) = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{2}{3} T^3\right) = \infty$$

  $$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |t|^2 \, dt\right) = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{2T} \frac{2}{3} T^3\right) = \infty$$

9. Opisati transformaciju nezavisne varijable:
a) vremenski pomak, navesti primjer
b) vremensko obrtanje, navesti primjer
c) vremensko skaliranje, navesti primjer



Sl. 2.13: *Vremenski pomak diskretnog signala:*
a) osnovni signal, x[n]
b) vremensko kašnjenje, $x[n-n_0]$, $n_0>0$
c) vremensko prethođenje, $x[n-n_0]$, $n_0<0$

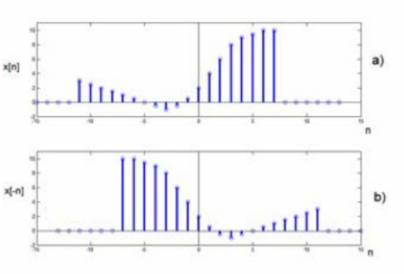
a) vremenski pomak

Pomak je ilustriran na slici koja prikazuje diskretne signale x[n] i $x[n-n_0]$ koji imaju identičan oblik, ali su međusobno pomaknuti za n uzoraka.
Ako je $n_0 > 0$, signal $x[n-n_0]$ bit će na vremenskoj osi pomaknut udesno uodnosu na osnovni signal x[n]. Kažemo da će kasniti za signalom x[n] tj. nastupat će kasnije u vremenu (svaki uzorak od signala x[n] u signalu $x[n-n_0]$ nastupit će kasnije u vremenu.

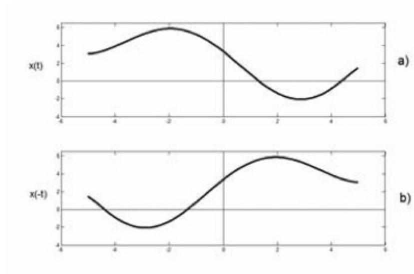
Primjerice, promotrimo uzorak signala x[n] za vremenski trenutak n = -1; x[-1]=6, Taj uzorak će u signalu $x[n-n_0]$ (pri čemu je n_0=5) nastupiti u trenutku n=4, tj. uzorak signala x[n-5] kasni u vremenu za uzorkom signala x[n] za 5 diskretnih vremenskih trenutaka.

Ako je $n_0 < 0$, signal $x[n-n_0]$ bit će na vremenskoj osi pomaknut lijevo u odnosu na osnovni signal x[n]. Prethodit će signalu x[n] tj. nastupat će ranije u vremenu (svaki uzorak signala $x[n-n_0]$ nastupit će ranije u vremenu u odnosu na uzorak od x[n].

b) vremensko obrtanje



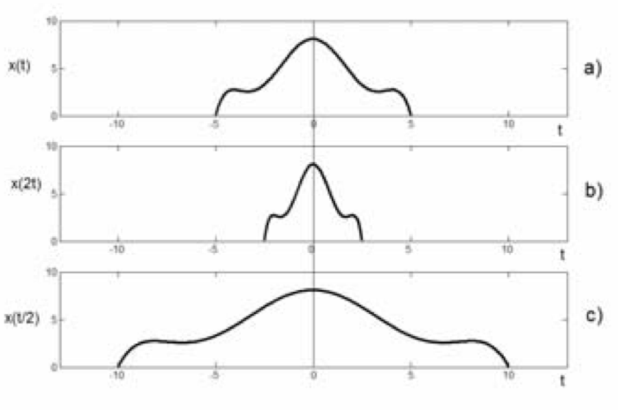
Sl. 2.14: *Vremensko obrtanje diskretnog signala*



Sl. 2.15: *Vremensko obrtanje kontinuiranog signala*

Signal na slici x[-n] dobiven je obrtanjem signala x[n] oko ordinatne osi (n=0). Slično, kontinuirani signal x(-t) dobije se zrcaljenjem signala x(t) oko pravca t=0.
Primjerice, ako signal x(t) predstavlja glazbeni zapis na kompaktnom disku, signal x(-t) bio bi zvuk koji čujemo kad se CD vrti unatrag.

c) vremensko skaliranje



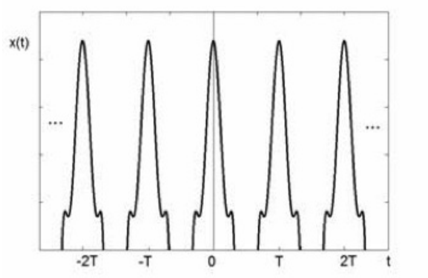
Sl. 2.16: *Vremensko skaliranje kontinuiranog signala*

Kod vremenskog skaliranja signal se sužava ili rasteže pri čemu također zadržava svoj osnovni oblik. Signal x(2t) je dvostruko sužen, a signal x(t/2) dvostruko rastegnut u odnosu na osnovni signal x(t).

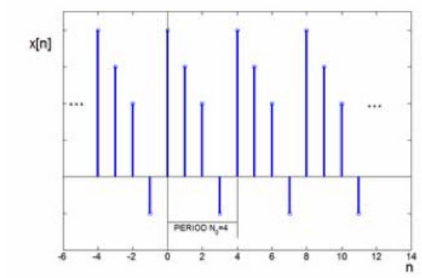
Primjerice, za t=2.5 signal x(2t) će imati vrijednost x(2*2.5)=x(5)=0 Također, za t=10 signal x(t/2) će imati vrijednost x(10/2)=x(5)=0. Na primjeru glazbe snimljene na CD koja predstavlja signal x(t), signal x(2t) predstavljao bi dvostruko ubrzanu glazbu, a x(t/2) dvostruko usporenu glazbu.

10. Definirati periodičnost kontinuiranih i diskretnih signala. Nacrtati primjer periodičnog kontinuiranog i diskretnog signala.

Periodički vremenski kontinuirani signali su oni za koje postoji takva pozitivna vrijednost T za koju će vrijediti:
x(t) = x(t + T), za svaku vrijednost od t.
Drugim riječima, periodički signal ima svojstvo da ostane nepromijenjen ako ga u vremenu pomaknemo za vrijednost T. Za takav signal kažemo da je periodičan s periodom T. Kažemo da je *osnovni period* T_0 signala x(t) najmanja pozitivna vrijednost od T za koju vrijedi relacija. Definicija osnovnog perioda ima smisla za sve periodičke signale, osim ukoliko je signal konstanta.
Na isti način definiramo periodične signale u diskretnom području i kažemo da je vremenski diskretni signal x[n] periodičan s periodom N, pri čemu je N pozitivan cijeli broj, ako vrijedi:
x[n] = x[n + N], za svaku vrijednost od n.



Sl. 2.18: *Vremenski kontinuirani periodički signal s periodom T*



Sl. 2.19: *Vremenski diskretni periodički signal s osnovnim periodom N_0=4*

11. a) Definirati uvjete koje zadovoljavaju parni i neparni signali
b) Definirati parne i neparne dijelove proizvoljnog kontinuiranog i diskretnog signala
c) Nacrtati proizvoljan kontinuirani signal, te njegov parni i neparni dio
d) Nacrtati proizvoljan diskretni signal, te njegov parni i neparni dio

a)
Za signal x(t) ili x[n] kažemo da je ***paran*** ako zrcaljenjem signala s obzirom na ordinatnu os dobijemo identičan signal, tj. ako vrijedi slijedeće:
x(-t) = x(t) (u kontinuiranom vremenu)
odnosno:
x[-n] = x[n] (u diskretnom vremenu)

S druge strane, signal će biti ***neparan*** ako vrijedi:
x(-t) = - x(t) (u kontinuiranom vremenu)
odnosno:
x[-n] = - x[n] (u diskretnom vremenu)

Neparni signal u točki t=0 nužno mora imati vrijednost 0, budući da na temelju spomenutih relacija imamo: x(0) = - x(0) i x[0] = - x[0].

b)
Bitno je naglasiti da se svaki signal može rastaviti na parni i neparni dio, tj. svaki signal možemo zapisati kao:
x(t) = *Par*{x(t)} + *Nepar* {x(t)}
pri čemu su *Par*{x(t)} i *Nepar* {x(t)} parni i neparni dio signala, redom.

Parni dio može se izraziti kao:

$$Par\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$$

a neparni kao:

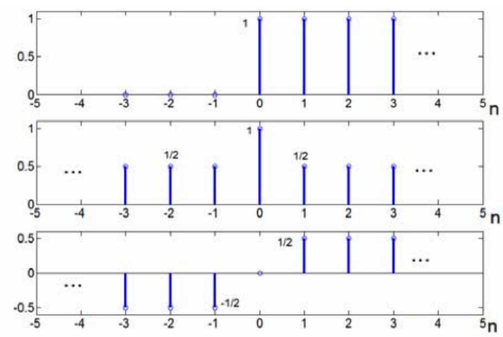
$$Nepar\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$$

d)

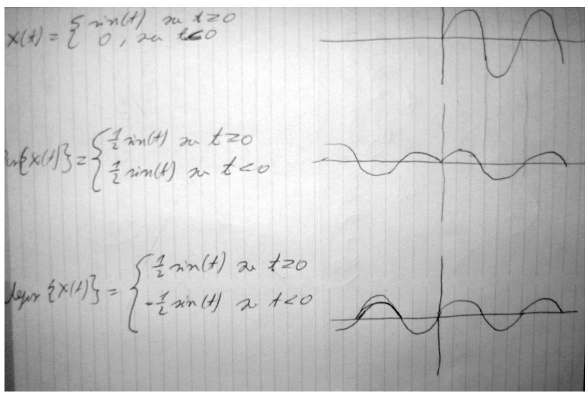
$$x[n] = \begin{cases} 1, & \text{za } n \geq 0 \\ 0, & \text{za } n < 0 \end{cases}$$

$$Par\{x[n]\} = \begin{cases} 1/2, & n < 0 \\ 1, & n = 0 \\ 1/2, & n > 0 \end{cases}$$

$$Nepar\{x[n]\} = \begin{cases} -1/2, & n < 0 \\ 0, & n = 0 \\ 1/2, & n > 0 \end{cases}$$

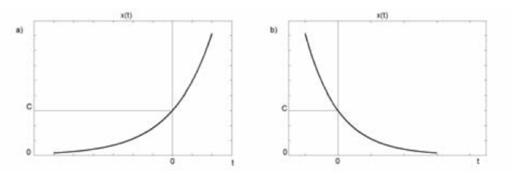


c)



12. Opisati i nacrtati vremenski kontinuirani realni eksponencijalni signal. Dati primjer fizikalnog signala koji se ponaša prema:
a) rastućem eksponencijalnom zakonu
b) padajućem eksponencijalnom zakonu

Vremenski kontinuirani eksponencijalni signal u općenitom obliku može se zapisati kao:
$x(t)=Ce^{at}$
pri čemu parametri 'C' i 'a' mogu biti realni ili kompleksni brojevi.



Sl. 2.27: *Vremenski kontinuirana realna eksponencijalna funkcija, $x(t)=Ce^{at}$: a) $a>0$; b) $a<0$*

Ako su 'C' i 'a' realni brojevi, signal x(t) nazivamo realna eksponencijala. Ako 'a' ima pozitivnu vrijednost, tada x(t) s vremenom raste. Ovakav oblik signala susrećemo u mnogim fizikalnim procesima kao što su lančana reakcija u atomskoj eksploziji, složene kemijske reakcije i dr. Ako je $a<0$, signal x(t) nazivamo padajuća eksponencijala i također ga susrećemo u mnogim procesima kao što je radioaktivno raspadanje, odziv RC krugova ili prigušenih mehaničkih sustava. Ako je $a=0$, x(t) poprima konstantnu vrijednost, C.

13. Opisati vremenski kontinuirani kompleksni eksponencijalni signal kojemu je eksponent čisti imaginarni broj, a parametar C realan broj. Da li je ovaj signal periodičan? Ukoliko jest, izvesti i napisati njegov osnovni period. Što su viši periodi?

Parametar 'C' ima realnu vrijednost (označit ćemo je s A), a parametar 'a' čisto imaginarnu vrijednost (označit ćemo je s $j\omega_0$), tj. biti će:

$$x(t) = Ae^{j\omega_0 t}$$

Svojstvo ovog signala jest **periodičnost**. Odredimo osnovni period.
Prisjetimo se, da bi x(t) bio periodičan, mora vrijediti: $x(t) = x(t+T)$

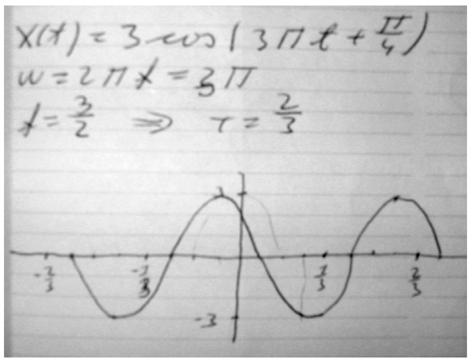
$$Ae^{j\omega_0 t} = Ae^{j\omega_0 (t+T)}$$
odnosno, $Ae^{j\omega_0 t} = Ae^{j\omega_0 t}e^{j\omega_0 T}$
Skratimo li dobiti ćemo: $e^{j\omega_0 T} = 1$

Ako je $\omega_0=0$, tada će x(t) imati konstantnu vrijednost A i bit će periodičan za svaku vrijednost T. Da bismo odredili period za $\omega_0 \neq 0$, predočimo kompleksni broj $e^{j\omega_0 T}$ kao vektor u kompleksnoj ravnini, koji ima modul 1 i kut nagiba prema realnoj osi $\theta=\omega_0 T$.
vidimo da će $e^{j\omega_0 T}$ poprimiti čisto realnu vrijednost 1 (tj. $e^{j\omega_0 T}=1$) kad bude zadovoljeno $\theta=2n\pi$, n = 0, ±1, ±2..., tj: $\omega_0 T=2n\pi$, za n = 0, ±1, ±2 ...

odnosno:
$$T = \frac{2n\pi}{\omega_0} \quad \text{za } n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$
Osnovni period T_0 (definiran kao najmanja pozitivna vrijednost od T) će biti:
$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|},$$
a **viši periodi** će biti
$$\pm\frac{4\pi}{|\omega_0|}, \pm\frac{6\pi}{|\omega_0|}, \pm\frac{8\pi}{|\omega_0|}, \ldots$$

14. Opisati vremenski kontinuirani sinusoidalan signal. Nacrtati kontinuirani kosinusni signal kojemu je amplituda jednaka 3, kružna frekvencija jest 3π, a fazni pomak $\pi/4$. Odrediti period ovog signala.

Kontinuirani sinusoidalan signal zapisujemo kao:
$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \theta)$ (*sinusni signal*) ili $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$ (*kosinusni signal*)
pri čemu parametre 'A', 'ω_0' i 'θ' nazivamo amplituda, kružna frekvencija i faza signala, redom. Uz sekundu kao jedinicu vremena, jedinice od θ i ω_0 bit će radijani, [rad] i radijani po sekundi, [rad/s], redom. Kružnu frekvenciju je uobičajeno pisati i kao $\omega_0 = 2\pi f_0$, pri čemu frekvencija f_0 ima jedinicu 1/s, odnosno Hertz, [Hz].



15. Odrediti E_{PERIOD}, P_{PERIOD}, E_∞ i P_∞:
a) kompleksnog eksponencijalnog vremenski kontinuiranog signala (s eksponentom čistim imaginarnim brojem, te parametrom C realnim brojem)
b) sinusnog vremenski kontinuiranog signala

Svi periodički signali, uključujući sinusoidalne i kompleksno eksponencijalne, imaju beskonačnu ukupnu energiju i konačnu prosječnu snagu. Odredimo npr. energiju i snagu signala iz relacije

$x(t) = Ae^{j\omega_0 t}$

tijekom jednog perioda:

$$E_{period} = \int_0^{T_0} \left|Ae^{j\omega_0 t}\right|^2 dt = A^2 \int_0^{T_0} \left|e^{j\omega_0 t}\right|^2 dt = A^2 \int_0^{T_0} 1 * dt = A^2 T_0$$

$$P_{period} = \frac{1}{T_0} E_{period} = A^2$$

Budući da signal ima beskonačno mnogo perioda, ukupna energija E∞ koju dobijemo kad integriranje provedemo na intervalu t=<-∞,∞> poprima beskonačnu vrijednost. Međutim, svi periodi signala imaju isti oblik. Budući da prosječna snaga signala za svaki period ima vrijednost A^2, prosječna snaga za n perioda opet će imati istu vrijednost, tj:

$$P_{n\_perioda} = \frac{1}{nT_0} E_{n\_perioda} = \frac{1}{nT_0} \int_0^{nT_0} \left|Ae^{j\omega_0 t}\right|^2 dt = \frac{1}{nT_0} A^2 \int_0^{nT_0} \left|e^{j\omega_0 t}\right|^2 dt = \frac{1}{nT_0} A^2 n T_0 = A^2$$

Stoga će i prosječna snaga signala na beskonačnom vremenskom intervalu imati istu vrijednost, tj:

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left|Ae^{j\omega_0 t}\right|^2 dt\right) = A^2$$

16. Opisati vremenski kontinuirani općeniti kompleksni eksponencijalni signal te odrediti i nacrtati njegov modul.

Najopćenitiji oblik eksponencijalne funkcije dane izrazom $x(t)=Ce^{at}$ jest kad su oba parametra, 'C' i 'a' kompleksni brojevi. Izrazimo parametar 'C' u polarnom obliku, a parametar 'a' pomoću Kartezijevih koordinata, odnosno:

$C = |C|e^{j\theta}$

$a = \sigma + j\omega_0$

Tada će signal biti:

$$x(t) = Ce^{at} = |C|e^{j\theta}e^{(\sigma + j\omega_0)t} = |C|e^{\sigma t}e^{j(\omega_0 t + \theta)}$$

Primjenom Eulerove relacije, biti će:

$$x(t) = Ce^{at} = |C|e^{\sigma t}\cos(\omega_0 t + \theta) + j|C|e^{\sigma t}\sin(\omega_0 t + \theta)$$

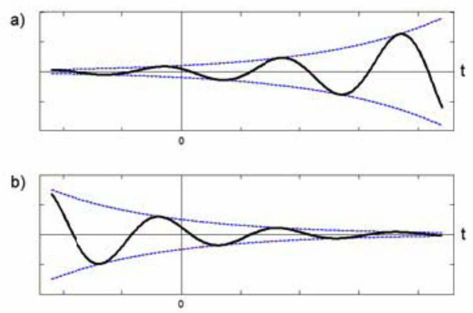
Primjenom Eulerove relacije, biti će:

$$x(t) = Ce^{at} = |C|e^{\sigma t}\cos(\omega_0 t + \theta) + j|C|e^{\sigma t}\sin(\omega_0 t + \theta)$$

pri čemu su realni i imaginarni dio signala x(t):

$$Re(x(t)) = |C|e^{\sigma t}\cos(\omega_0 t + \theta)$$
$$Im(x(t)) = |C|e^{\sigma t}\sin(\omega_0 t + \theta)$$

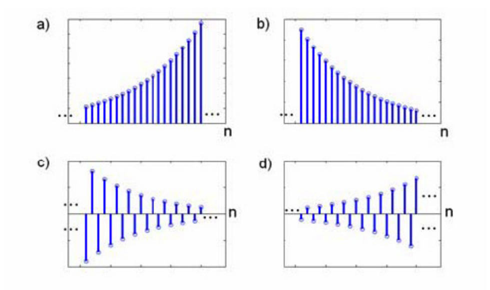
Za σ = 0, realni i imaginarni dio signala imaju čisti sinusoidalan oblik. Kad je σ > 0, Re(x(t)) i Im(x(t)) predstavljaju sinusoidalne funkcije pomnožene s rastućom realnom eksponencijalom dok su za σ <0, Re(x(t)) i Im(x(t)) sinusoidalne funkcije pomnožene s padajućom realnom eksponencijalom. Isprekidane linije na slici prikazuju funkcije ± $Ce^{\sigma t}$ koje predstavljaju amplitudu (tj. **modul**) signala x(t) iz relacije. Stoga iscrtane linije predstavljaju ovojnicu (anvelopu) oscilirajuće krivulje na način da vrhovi oscilacija dodiruju ovojnice; prikaz anvelopa na zgodan način vizualizira trend amplitude oscilacija.



Sl. 2.32: *a) Eksponencijalno rastući sinusoidalni signal,*
$|C|e^{\sigma t}\cos(\omega_0 t + \theta)$, σ > 0
b) Eksponencijalno padajući sinusoidalni signal,
$|C|e^{\sigma t}\cos(\omega_0 t + \theta)$, σ < 0

17. Opisati i nacrtati vremenski diskretni realni eksponencijalni signal.

Vremenski diskretni eksponencijalni signal u općenitom obliku prikazujemo kao:
$x[n] = C\alpha^n$
pri čemu 'C' i 'α' mogu biti realni ili kompleksni brojevi.



Sl. 2.33: *Realni eksponencijalni diskretni signal, $x[n] = C\alpha^n$*
a) $\alpha > 1$, b) $0 < \alpha < 1$, c) $-1 < \alpha < 0$, d) $\alpha < -1$

Realni eksponencijalni diskretni signali su oni kojima su 'C' i 'α' realni brojevi, signal $C\alpha^n$ može imati dva oblika. Ako je $|\alpha|>1$, amplituda signala eksponencijalno raste s porastom diskretnog vremena n. Za $|\alpha| < 1$, amplituda signala eksponencijalno pada. Nadalje, ako je α pozitivan sve vrijednosti signala $C\alpha^n$ imaju isti predznak, dok za negativan α vrijednosti signala alterniraju u predznaku (susjedne vrijednosti signala imaju različit predznak.

18. Opisati vremenski diskretni kompleksni eksponencijalni signal kojemu je eksponent čisti imaginarni broj, a parametar C realan broj. Da li je ovaj signal periodičan? Izvesti uvjet periodičnosti. Odrediti osnovni period.

Ako je 'C' realan (označit ćemo ga s A), a parametar 'a' čisto imaginaran (označit ćemo ga s $j\omega_0$), signal x[n] će biti:
$x[n] = Ae^{j\omega_0 n}$ ($\alpha = e^a$)
Kao i u kontinuiranom slučaju, ovaj signal je usko povezan sa sinusoidalnim signalom:
$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \theta)$
Ako za n uzmeno da je bezdimenzionalan, onda ω_0 i θ za jedinicu imaju radijane, rad.

Ovaj signal jest periodičan, ali ne za svaku vrijednost ω_0. Da bi signal e (analogno i $\cos(\omega_0 n)$) bio periodičan s periodom N>0, treba vrijediti:
$e^{j\omega_0(n+N)}=e^{j\omega_0 n}$

analogno: $\cos(\omega_0(n+N)) = \cos(\omega_0 n)$. Tj, treba biti zadovoljeno:
$e^{j\omega_0 N}=1$
analogno: $\cos(\omega_0 N)=1$.

Da bi jednakost bila zadovoljena, $\omega_0 N$ mora biti višekratnik od 2π, tj. mora postojati takav cjelobrojni m da vrijedi:
$\omega_0 N = m2\pi$ ili, ekvivalentno: $\omega_0/(2\pi) = m/N$. Dakle signali su periodički ako je $\omega_0/2\pi$ racionalan broj (tj. razlomak s cjelobrojnim brojnikom i nazivnikom), u suprotnom nisu periodički.

Ako je x[n] periodičan s osnovnim periodom N_0, osnovna frekvencija će biti $2\pi/N_0$. Razmotrimo periodičku eksponencijalu $x[n]=e^{j\omega_0 n}$ uz $\omega_0 \neq 0$. Kako smo upravo vidjeli, ω_0 mora zadovoljavati relaciju za cjelobrojne vrijednosti m i N, pri čemu je N>0.

Stoga signal $e^{j\omega_0 n}$ možemo zapisati kao:
$e^{j(\frac{m}{N}2\pi)n}$

Osnovni period N_0 ćemo definirati kao najmanju cjelobrojnu vrijednost za koju će vrijediti:

$$e^{j(\frac{m}{N}2\pi)(n+N_0)} = e^{j(\frac{m}{N}2\pi)n} \qquad (2.61)$$

tj. mora vrijediti:

$$e^{j(\frac{m}{N}2\pi)N_0} = 1 \qquad (2.62)$$

Relacija 2.62 će vrijediti kad je zadovoljeno:
$\frac{m}{N}2\pi N_0 = k2\pi$, pri čemu je k pozitivan cijeli broj.
Tj., osnovni period N_0 će biti:

$$N_0 = k\frac{N}{m} \qquad (2.63)$$

Moramo odabrati takav minimalan k da kN/M ima cjelobrojnu vrijednost. N i m mogu imati neki najveći zajednički djelitelj kojeg ćemo označiti s nzd(N,m) koji definiramo kao najveći cjelobrojni broj kojim su djeljivi N i m. Primjerice, nzd(2,3)=1; nzd(2,4)=2; nzd(8,12)=4. Podijelimo brojnik i nazivnik u relaciji 2.63 s nzd(N,m):

$$N_0 = k\frac{\frac{N}{nzd(N,m)}}{\frac{m}{nzd(N,m)}} \qquad (2.64)$$

Budući da su brojnik i nazivnik u relaciji 2.64 cjelobrojni, te budući da tražimo minimalnu cjelobrojnu vrijednost za N_0, minimalan k će iznositi:

$$k = \frac{m}{nzd(N,m)}, \qquad (2.65)$$

Osnovni period N_0 će biti:

$$N_0 = \frac{N}{nzd(N,m)}, \qquad (2.66)$$

a osnovna frekvencija:

$$\omega_{osnovna\_fr} = \frac{2\pi}{N_0} = \frac{2\pi}{N} nzd(N,m) \qquad (2.67)$$

BITNO:

Tablica 2.1: *Usporedba signala* $e^{j\omega_0 t}$ *i* $e^{j\omega_0 n}$

$e^{j\omega_0 t}$	$e^{j\omega_0 n}$
Različiti signali za različite vrijednosti ω_0	Identični signali za vrijednosti ω_0 i $\omega_0 \pm N2\pi$ (N cijeli broj)
Periodički za bilo koju vrijednost ω_0	Periodički samo ako vrijedi: $\omega_0 = 2\pi m/N$, za neke cjelobrojne vrijednosti N>0 i m
Osnovna frekvencija ω_0	Osnovna frekvencija* ω_0/m
Osnovni period: za $\omega_0=0$, period je nedefiniran za $\omega_0 \neq 0$, period je $2\pi/\omega_0$	Osnovni period*: za $\omega_0=0$, period je nedefiniran za $\omega_0 \neq 0$, period je $m(2\pi/\omega_0)$

* S pretpostavkom da m i N nemaju zajedničkih faktora

19. Opisati vremenski diskretni općeniti kompleksni eksponencijalni signal.

Najopćenitiji oblik diskretne eksponencijalne funkcije dane izrazom $x[n] = Ce^{an}$ jest kad su oba parametra, 'C' i 'a' kompleksni brojevi. Izrazimo li parametar 'C' u polarnom obliku kao $C = |C|e^{j\theta}$, a parametar 'a' pomoću Kartezijevih koordinata kao $a = \sigma + j\omega_0$, signal će imati oblik:

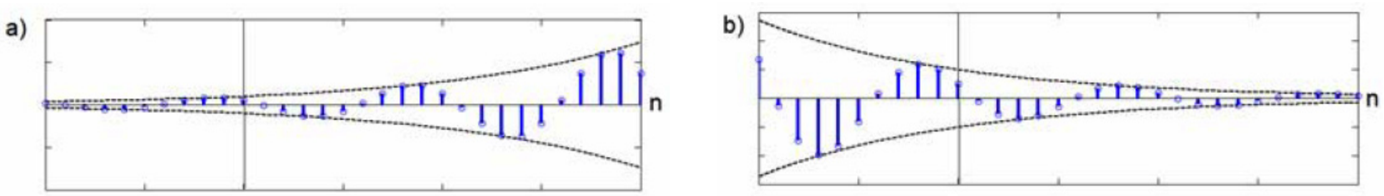
$$x[n] = Ce^{an} = |C|e^{j\theta}e^{(\sigma + j\omega_0)n} = |C|e^{\sigma t}e^{j(\omega_0 n + \theta)}$$

*ovdje umjesto t treba doci n, ali to je fulala prefesorica u skripti, a ja od skripte copy/paste pa…

Primjenom Eulerove relacije, biti će:

$$x[n] = Ce^{an} = |C|e^{\sigma t}\cos(\omega_0 n + \theta) + j|C|e^{\sigma t}\sin(\omega_0 n + \theta)$$

Za σ = 0, realni i imaginarni dio signala imaju čisti sinusoidalan oblik. Kad je σ > 0, Re(x(t)) i Im(x(t)) predstavljaju sinusoidalne funkcije pomnožene s rastućom realnom eksponencijalom, dok su za σ < 0, Re(x(t)) i Im(x(t)) sinusoidalne funkcije pomnožene s padajućom realnom eksponencijalom.



Sl. 2.35: *a) Eksponencijalno rastući diskretni sinusoidalni signal,*
$|C|e^{\sigma n}\cos(\omega_0 n + \theta)$, σ > 0
b) Eksponencijalno padajući diskretni sinusoidalni signal,
$|C|e^{\sigma n}\cos(\omega_0 n + \theta)$, σ < 0

20. Opisati vremenski diskretni sinusoidalni signal. Nacrtati diskretne sinusne signale kojima je amplituda jednaka 2, fazni pomak 0, a kružna frekvencija:

a) p/6 b) 11p/6

Kakav je međusoban odnos ovih signala? Zašto? Koliko je osnovni period ovih signala?

Diskretni sinusoidalan signal zapisujemo kao:

$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \theta)$ (*kosinusni signal*)

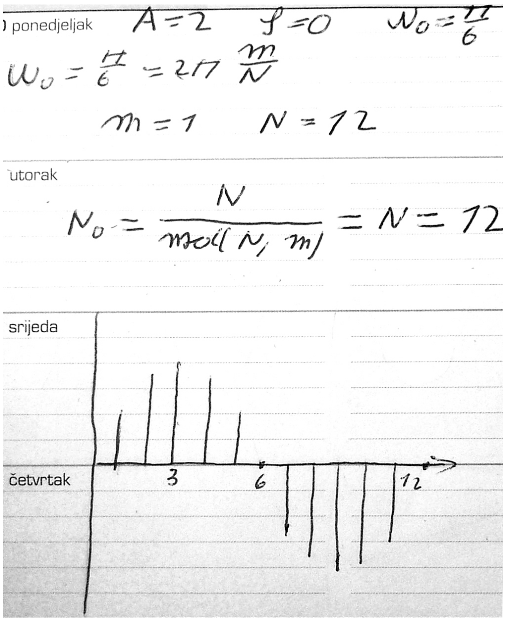
pri čemu parametre 'A', 'ω_0' i 'θ' nazivamo amplituda, kružna frekvencija i faza signala, redom. Ako za n uzmemo da je bezdimenzionalan , onda ω_0 i θ za jedinicu imaju radijane. Primijeniti ćemo Eulorovu relaciju da bismo povezali kompleksnu eksponencijalu i sinusoidalne signale:

$$Ae^{j\omega_0 n} = A\cos(\omega_0 n) + jA\sin(\omega_0 n)$$

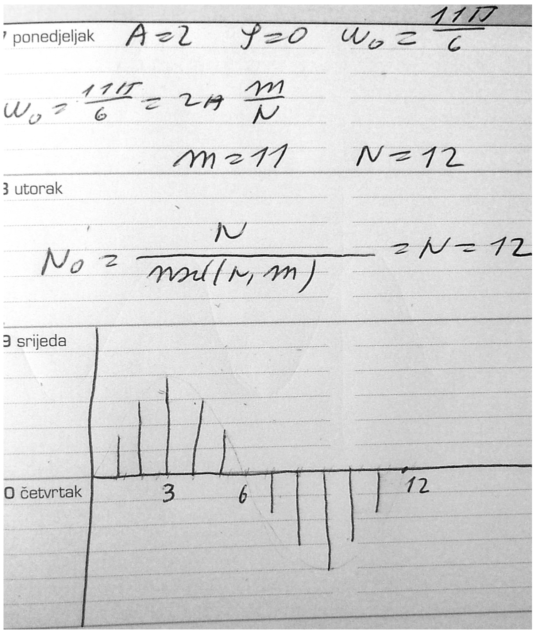
i,

$$A\cos(\omega_0 n + \theta) = \frac{A}{2}e^{j\theta}e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2}e^{-j\theta}e^{-j\omega_0 n}$$

a)

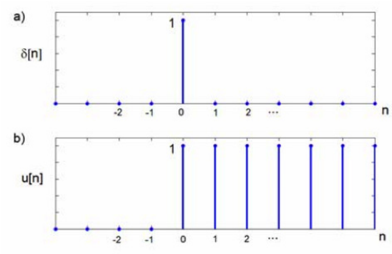


b)



Osnovni period ovih signala je 12. Signali su jednaki, a razlog tome je što im je period jednak, amplituda je jednaka i što imaju jednak fazni pomak (0). Za razliku od kontinuiranih signala gdje se period izražava u sekundama, a kružna frekvencija u radijanima po sekundi, diskretni signali su neovisni o vremenu i sam period je bezdimenzionalan, dok se kružna frekvencija izražava u radijanima.

21. Definirati i nacrtati diskretni Dirac-ov impuls i diskretni jedinični odskočni signal. Izvesti i definirati vezu između ova dva signala (tj. odrediti d[n] = f(u[n]) i u[n] = f(d[n]). Izvod ilustrirati slikama.



Sl. 2.38: *a) Diskretni jedinični impuls (Dirac-ov impuls); b) Diskretni jedinični odskočni signal (step signal)*

Jedan od najjednostavnijih diskretnih signala jest jedinični impuls (često ga nazivamo i jedinični uzorak te **Dirac-ov** ili delta impuls), kojeg definiramo kao:

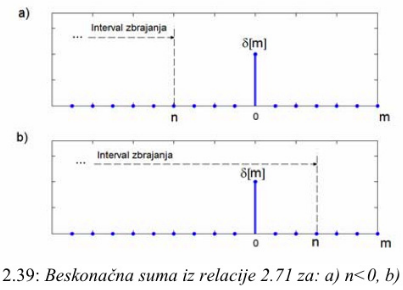
$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

Jedinični odskočni signal (često ga zovemo i step signal) definiramo kao:

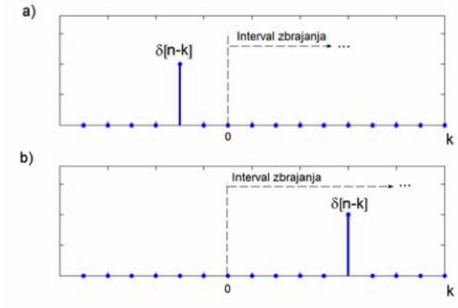
$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$

Jedinični impuls možemo prikazati kao prvu diferenciju step signala, odnosno kao razliku step signala i vremenski pomaknutog step signala (udesno za jedan uzorak), tj: **δ[n] = u[n] - u[n-1]**. Obrnuto, diskretni jedinični step može se prikazati kao beskonačna suma jediničnih uzoraka:

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m]$$



Sl. 2.39: *Beskonačna suma iz relacije 2.71 za: a) n<0, b) n>0*



Sl. 2.40: *Suma iz relacije 2.72 za: a) n<0, b) n>0*

Budući da jedinični impuls ima vrijednost različitu od nule samo u točki u kojoj je argument impulsa nula (tj. za m=0), sa slike vidimo da za n < 0 beskonačna suma iz relacije ima vrijednost 0, a za n ≥ 0 ima vrijednost 1. Nadalje, ako promijenimo varijablu 'm' (po kojoj zbrajamo) u 'k = n – m' i uvrstimo supstituciju u relaciju, diskretni jedinični odskočni signal moći ćemo pisati kao:

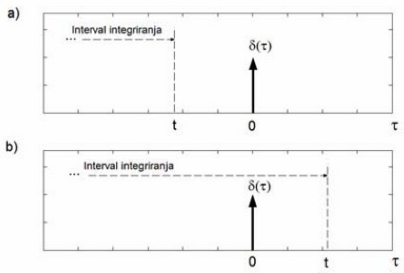
$$u[n]=\sum_{k=\infty}^{0}\delta[n-k]$$

ili, ekvivalentno:

$$u[n]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]$$

U ovom slučaju δ[n-k] imat će vrijednost 1 kad je k = n, stoga opet vidimo da će suma iz relacije biti 0 za n < 0, odnosno 1 za n ≥ 0. Relaciju možemo promatrati kao superpoziciju zakašnjelih jediničnih impulsa, odnosno jedinični step signal možemo prikazati kao sumu jediničnog impulsa δ[n] za n=0, udesno pomaknutog impulsa za jedan uzorak tj. δ[n-1] za n=1, zatim pomaknutog impulsa za dva uzorka tj. δ[n-2] za n=2, itd.

22. Definirati i nacrtati vremenski kontinuirani Dirac-ov impuls i kontinuirani jedinični odskočni signal. Izvesti i definirati vezu između ova dva signala (tj. odrediti d(t) = f(u(t)) i u(t) = f(d(t)). Izvod ilustrirati slikama.



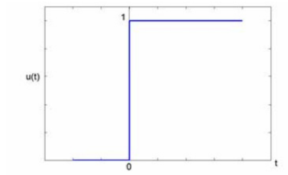
Sl. 2.44: *Integral dan u relaciji 2.76 za: a) t<0, b) t>0*

Vremenski kontinuirani jedinični odskočni signal (**Dirac-ov** ili step signal) definira se na sličan način kao i u diskretnom vremenu, odnosno:

$$u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\geq 0\end{cases}$$

Kontinuirani step signal definiramo kao beskonačni integral jediničnog impulsa:

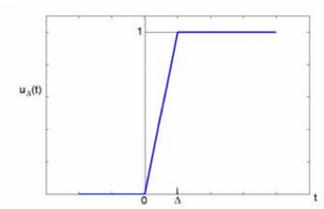
$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau$$



Sl. 2.41: *Vremenski kontinuirani step signal, u(t)*

slijedi da je Dirac-ov impuls prva derivacija kontinuirane jedinične odskočne funkcije:

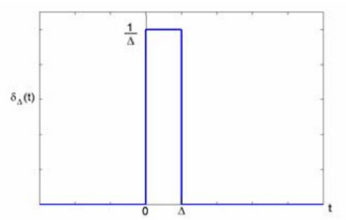
$$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}$$



Sl. 2.42 *a): Aproksimacija kontinuirane step funkcije, $u_\Delta(t)$*

Za razliku od diskretnog vremenskog područja, kod deriviranja jedinične odskočne funkcije postoje određene poteškoće s obzirom da u(t) ima diskontinuitet u t=0 te stoga nije derivabilna. Međutim, relaciju interpretirat ćemo na način da funkciju u(t) aproksimiramo funkcijom $u_\Delta(t)$, prikazanom na slici, koja raste iz vrijednosti 0 i 1 u kratkom vremenskom intervalu Δ. Stoga signal u(t) možemo smatrati idealizacijom od $u_\Delta(t)$, kad interval Δ teži u nulu, tj. možemo pisati:

$u(t)=u_\Delta(t)\big|_{\Delta\to 0}$



Sl. 2.42 *b): Derivacija funkcije $u_\Delta(t)$,$\delta_\Delta(t)$*

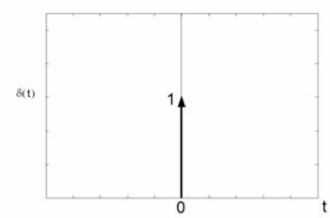
Definirajmo sad derivaciju funkcije $u_\Delta(t)$ kao:

$$\delta_\Delta(t)=\frac{du_\Delta(t)}{dt}$$

Primijetimo da je $\delta_\Delta(t)$ predstavlja impuls trajanja Δ koji uvijek ima jediničnu površinu, bez obzira na vrijednost Δ. Kad Δ teži u nulu, impuls $\delta_\Delta(t)$ postaje sve uži i viši, pri čemu zadržava vrijednost površine 1. Sad jedinični impuls δ(t) možemo defirati kao:

$$\delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t)$$

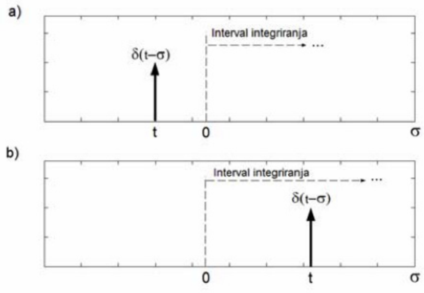
i smatrati ga idealizacijom impulsa $\delta_\Delta(t)$, kad trajanje impulsa Δ postaje zanemarivo malo.



Sl. 2.43 *a): Vremenski kontinuiran jedinični impuls, δ(t)*

Budući da δ(t) nema trajanja, ali ima jediničnu površinu, grafički ga prikazujemo na način prikazan slikom, pri čemu strelica predstavlja puls beskonačno kratkog trajanja, koncentriranog u trenutku t=0, dok visina strelice i '1' pored strelice označavaju površinu impulsa.

Ako uvedemo supstituciju varijable po kojoj integriramo na način: σ = t - τ. biti će:

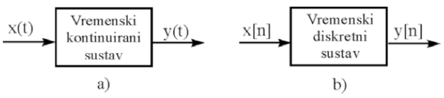


Sl. 2.45: *Grafički prikaz relacije 2.81: veza između jediničnog impulsa i step funkcije;*

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \int_{\infty}^{0} \delta(t-\sigma)(-d\sigma) \rightarrow \qquad u(t) = \int_{0}^{\infty} \delta(t-\sigma)d\sigma$$

Budući da je u ovom slučaju površina pomaknutog impulsa koncentrirana u vremenskom trenutku σ = t, opet vidimo da je integral u relaciji 2.81 0 za t < 0 i 1 za t ≥ 0. Ovakav grafička ilustracija bit će nam izuzetno korisna u narednom poglavlju.

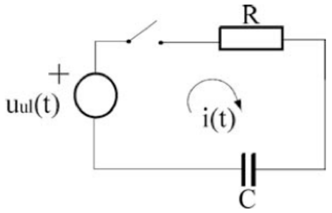
23. Definirati kontinuirani i diskretni sustav (bacrtati blok dijagrame).
a) Navesti primjer kontinuiranog sustava i izvesti ulazno – izlaznu vezu sustava.
b) Navesti primjer diskretnog sustava i izvesti ulazno – izlaznu vezu sustava.



Sl. 2.48: *a) Kontinuirani sustav b) Diskretni sustav*

Kontinuirani sustav jest onaj koji prima i na izlazu daje vremenski kontinuirane signale. Ulazno – izlaznu vezu kontinuiranog sustava prikazivamo: x(t) → y(t)

Slično, diskretni sustav jest onaj koji prima i generira vremenski diskretne signale. Ulazno – izlaznu vezu diskretnog sustava prikazivamo kao: x[n] → y[n]



Sl. 2.49: *RC krug*

a)
Promotrimo jednostavan RC krug na slici. Ako za ulazni signal uzmemo ulazni napon, $u_{ul}(t)$, a za izlazni signal napon na kondenzatoru, $u_c(t)$, zadatak nam je dobiti matematičku jednadžbu koja će povezivati ulaz i izlaz, tj. predstavljati ulazno-izlaznu vezu sustava. Napišimo naponsku jednadžbu kruga:

$$u_{ul}(t) = Ri(t) + u_c(t)$$

Također, znamo da napon na kondenzatoru ovisi o struji koja protječe kroz njega na način:

$$u_c(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt \;\Rightarrow\; i(t) = C\frac{du_c(t)}{dt}$$

Uvrstimo izraz za struju u naponsku jednadžbu kruga:

$$u_{ul}(t) = RC\frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}u_c(t) = \frac{1}{RC}u_{ul}(t)$$

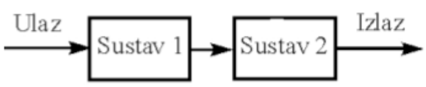
b)
Prikažimo sad jednostavan primjer diskretnog sustava koji opisuje stanje na bankovnom računu iz mjeseca u mjesec. Označimo s y[n] stanje na kraju n-tog mjeseca, i pretpostavimo da se stanje iz mjeseca u mjesec mijenja po slijedećoj jednadžbi:
y[n] = 1.01y[n - 1] + x[n]

ili, ekvivalentno:

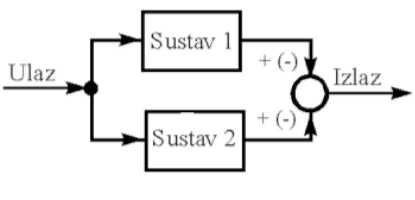
y[n] - 1.01y[n - 1] = x[n]

pri čemu x[n] predstavlja neto uplatu na račun (uplata minus isplata), a član 1.01y[n - 1] predstavlja činjenicu da se suma na računu iz prethodnog mjeseca uvećava za iznos kamate od 1%.

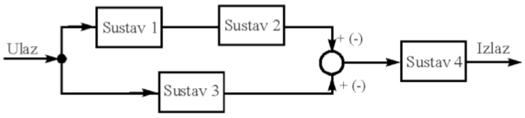
24. Navesti, opisati i prikazati blok dijagramima osnovne načine međusobnog povezivanja sustava.



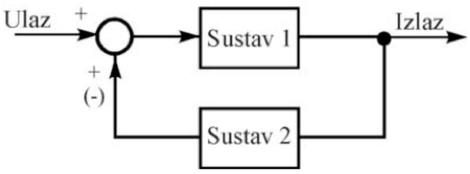
Serijska ili kaskadna veza. Ovakve prikaze sustava nazivamo blok dijagramima. Kod serijske veze izlazni signal iz Sustava 1 ulazi u Sustav 2, te ukupni sustav transformira ulaz tako da ga prvo obrađuje Sustavom 1, te potom Sustavom 2. Primjer serijske veze jest radio prijemnik nakon kojeg slijedi pojačalo. Slično, u serijsku vezu možemo spojiti tri i više sustava.



Paralelna veza. Ovdje ulazni signal ulazi u oba sustava, 1 i 2. Simboli '+' i '-' označavaju zbrajanje odnosno oduzimanje što znači da se ukupni izlaz sustava dobije zbrajanjem ili oduzimanjem izlaza iz sustava 1 i 2. Primjer paralelne veze jest jednostavan audio sustav s nekoliko mikrofona s kojih se signali vode u zajedničko pojačalo i zvučnik.



Složeni sustav koji se dobije kombinacijom serijskih i paralelnih veza.



Još jedan bitan način povezivanja sustava jest povratna veza, koja može biti pozitivna ili negativna, što ovisi o predznaku povratnog signala. U blok dijagramu na slici izlaz iz Sustava 1 jest ulaz u Sustav 2, dok se izlaz iz Sustava 2 vraća na zbrajalo gdje se dodaje (ili oduzima) vanjskom ulaznom signalu. Zbroj (ili razlika) ulaznog i povratnog signala predstavlja ulaz u Sustav 1.

25. Navesti osnovna svojstva sustava.

Sa i bez memorije, invertibilnost, kauzalnost, stabilnost, vremenska nepromjenjivost, linearnost.

26. Opisati memoriju sustava. Navesti primjer sustava:
a) s memorijom
b) bez memorije

Za sustav kažemo da nema memoriju ako njegov izlaz za svaki vremenski trenutak ovisi samo o ulazu u tom promatranom vremenskom trenutku (a ne i o ulazu u nekim prethodnim vremenskim trenucima). Da bi sustav imao memoriju, treba imati neki mehanizam koji pohranjuje informacije o ulaznim vrijednostima u vremenskim trenucima različitim od trenutnog vremena.

Otpornik možemo smatrati sustavom bez memorije: ako za ulaz x(t) promatramo struju koja protječe kroz otpornik, te za izlaz y(t) uzmemo napon na otporniku, veza između ulaza i izlaza će biti:
y(t) = Ri(t)
pri čemu je R otpor.

Primjer sustava s memorijom bio bi akumulator ili zbrajalo:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

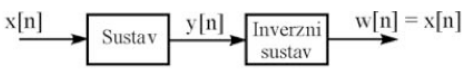
Akumulator računa sumu svih prethodnih ulaza, od početnog do trenutnog vremena, i stoga u svakom vremenskom trenutku akumulator mora dodati trenutni ulaz prethodnoj ukupnoj sumi. Tj, veza između ulaza i izlaza može se opisati kao:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] + x[n]$$

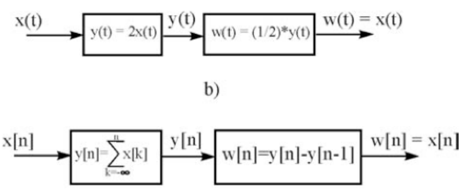
ili ekvivalentno tome: y[n] = y[n - 1] + x[n].

27. Opisati invertibilnost sustava. Navesti primjer:
a) invertibilnog sustava
b) neinvertibilnog sustava

Za sustav kažemo da je invertibilan ako za različite ulaze daje različite izlaze, tj. ako ne postoje takva dva ulazna signala za koje bi sustav dao identičan izlaz.



Ako je sustav invertibilan, tada postoji njemu inverzan sustav koji kad se kaskadno spoji s osnovnim sustavom, na izlazu daje signal w[n] jednak ulazu x[n] u osnovni sustav.



Primjer invertibilnog sustava u kontinuiranom vremenu jest: y(t) = 2x(t), a njemu inverzni sustav će biti: w(t) = (1/2)*y(t).
Još jedan primjer invertibilnog sustava je akumulator dan relacijom:
y[n] = y[n - 1] + x[n], a njegov inverzni sustav će biti:
w[n] = y[n] – y[n - 1].

Primjer neinvertibilnog sustava jest y[n] = 0, koji za bilo koji ulaz daje nulu na izlazu. Također, i sustav: $y(t) = x^2(t)$
budući da na temelju poznatog izlaza ne možemo točno odrediti ulaz (tj. ne možemo znati predznak ulaznog signala).

28. Opisati kauzalnost sustava. Navesti primjer:
a) kauzalnog sustava
b) nekauzalnog sustava

Za sustav kažemo da je kauzalan ako izlaz u nekom vremenskom trenutku ovisi samo o ulazu u tom trenutku i ulazu u prethodnim vremenskim trenucima. S druge strane, sustav čiji trenutni izlaz ovisi i o budućim vrijednostima ulaza smatramo nekauzalnim.

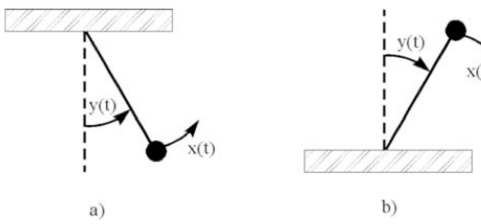
primjer kauzalnog sustava:
RC krug

$$i(t) = -\frac{R}{L}\int i(t)dt - \frac{1}{LC}\int\left(\int i(t)dt\right)dt + \frac{1}{L}\int u_{ul}(t)dt$$

ili y(t) = x(t)cos(t + 1)

primjer nekauzalnog sustava:
y[n] = x[-n] (za n<0)
ili filtar s pomičnim prosjekom

29. Opisati stabilnost sustava. Navesti primjer:
a) stabilnog sustava
b) nestabilnog sustava



Sl. 2.53: *a) Stabilno njihalo*
b) Nestabilno, obrnuto njihalo

Stabilan sustav jest onaj koji na ograničenu pobudu (tj. pobudu koja ne raste van određenih granica) daje također ograničeni odziv (tj. i izlaz ne divergira tj. ostaje unutar određenih granica.
Primjerice, promotrimo njihalo na slici 2.53 a) kod kojega je ulaz narinuta sila x(t), a izlaz kutni pomak
kuglice, y(t). U ovom slučaju, gravitacija i napetost konopa su sile koje će imati suprotno djelovanje od narinute sile i nastojat će vratiti kuglicu u početan položaj. Stoga, ako narinemo silu x(t), vrlo malog intenziteta, rezultirajući pomak kuglice u odnosu na početni vertikalni položaj također će biti malen i sustav će biti stabilan. S druge strane, kod obrnutog njihala na slici 2.53 b) koji predstavlja nestabilan sustav, gravitacija djeluje tako da podupire ulaznu silu te uslijed i vrlo male sile x(t) nastaje veliki pomak kuglice tj. njihalo se obrće.
Naime, ako na račun stavimo neki početni polog (tj. x[0] = pozitivan iznos) i ako nema potrošnje, odnosno isplate sredstava, tada će zbog kamata suma na računu neograničeno rasti. Znaći to je nestabilan sustav. stabilan sustav bi bio bankovni račun bez kamata, kao i automobil. Narinimo npr. na automobil u mirovanju vremenski konstantnu silu f(t) = F. Automobil će se početi kretati i brzina će rasti, ali ne neograničeno, budući da i sila trenja također raste s porastom brzine. U stvari, brzina će rasti sve do trenutka dok se sila trenja ne izjednači s vanjskom silom.

30. Opisati vremensku nepromjenjivost sustava. Navesti primjer:
a) vremenski promjenjivog sustava
b) vremenski nepromjenjivog sustava

Općenito govoreći, sustav je vremenski nepromjenjiv ili invarijantan ako se njegova svojstva i ponašanje ne mijenjaju tijekom vremena. Za sustav kažemo da je vremenski nepromjenjiv ako vremenski pomak ulaznog signala uzrokuje identični vremenski pomak izlaznog signala. Drugim riječima, ako diskretni vremenski nepromjenjiv sustav na ulaz x[n] odgovori odzivom y[n], onda će na vremenski pomaknuti ulaz x[n – n0] odgovoriti odzivom y[n – n0]. U kontinuiranom slučaju, za vremenski nepromjenjiv sustav S: x(t) → y(t) vrijedit će S: x(t – t) → y(t– t).

Nepromjenjivi sustav:
y1(t) = sin[x1(t)]
Uzmimo sada drugi ulazni signal dobiven pomakom signala x1(t): x2(t) = x1(t – t_0)
Odziv na pobudu x2(t) će biti: y2(t) = sin[x2(t)] = sin[x1(t – t_0)]
Također, na temelju prve relacije će vrijediti: y1(t – t_0) = sin[x1(t – t_0)]

Promjenjivi sustav:
y[n] = nx[n]
Primjerice, uzmimo za ulazni signal x1[n] = δ[n] koji na izlazu daje nulu, budući da je nδ[n] = 0. Uzmemo li sad za ulaz pomaknuti delta impuls, tj. x2[n] = δ[n - 1], izlaz će biti y2[n] = nδ[n - 1] = δ[n - 1]. Vidimo da iako je x2[n] pomaknuta verzija od x1[n], izlaz y2[n] nije pomaknuta verzija od y1[n] te zaključujemo da sustav nije vremenski nepromjenjiv.

31. Opisati linearnost sustava. Navesti primjer:
a) linearnog sustava
b) nelinearnog sustava

Linearan sustav, u kontinuiranom i diskretnom vremenu, jest onaj koji zadovoljava svojstvo superpozicije koje kaže slijedeće: Ako na ulaz sustava dovedemo pobudu koja se sastoji od sume signala pomonoženih konstantama, i odziv će biti suma odziva na pojedinačne signale, pomnoženih konstantama. Formulirajmo ovu definiciju preciznije: Neka je y1(t) odziv sustava na pobudu x1(t) i y2(t) odziv na pobudu x2(t). Sustav je linearan ako vrijedi:

1. Odziv na x1(t) + x2(t) jest y1(t) + y2(t)
2. Odziv na ax1(t) jest ay1(t), pri čemu je a proizvoljna realna ili kompleksna konstanta.

Prvo od navedenih svojstava nazivamo svojstvo aditivnosti, a drugo svojstvo homogenosti.

Svojstva aditivnosti i homogenosti koja definiraju linearan sustav mogu se objediniti u jednu relaciju:
za koninuirano vrijeme: ax1(t) + bx2(t) → ay1(t) + by2(t)
za diskretno vrijeme: ax1[n] + bx2[n] → ay1[n] + by2[n]
pri čemu su a i b proizvoljne realne ili kompleksne konstante.

Nadalje, svojstvo linearnosti može se iskazati i na slijedeći način: ako je xk[n], k=1, 2, 3, ..., skup ulaza u linearan diskretni sustav, te yk[n], k=1, 2, 3, ..., skup odgovarajućih izlaza, tada će odziv na linearnu kombinaciju ulaza danu kao:

$$x[n] = \sum_k a_x x_k[n] = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] + a_3 x_3[n] + \ldots$$

biti:

$$y[n] = \sum_k a_x y_k[n] = a_1 y_1[n] + a_2 y_2[n] + a_3 y_3[n] + \ldots$$

Direktna posljedica superpozicije jest da odziv sustava na ulaz koji ima vrijednost 0 za sve vremenske trenutke također ima vrijednost nula, tj. ako je x[n]→y[n], biti će:
0 = 0*x[n] → 0*y[n] = 0

Primjer 2.19
Ispitati linearnost sustava S zadanog ulazno - izlaznom relacijom:

$y(t) = tx(t)$

Promotrimo 2 proizvoljna ulaza $x_1(t)$ i $x_2(t)$ za koja će biti:

$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = tx_1(t)$
$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = tx_2(t)$

Neka je $x_3(t)$ linearna kombinacija od $x_1(t)$ i $x_2(t)$, tj. neka je:

$x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$

pri čemu su a i b proizvoljne konstante. Ako je $x_3(t)$ ulaz u sustav S, odgovarajući izlaz može se izraziti kao:

$y_3(t) = t\,x_3(t) = t\,(ax_1(t) + bx_2(t)) = atx_1(t) + btx_2(t) = ay_1(t) + by_2(t)$, tj:

$y_3(t) = ay_1(t) + by_2(t)$,
te zaključujemo da je sustav linearan.

Primjer 2.20
Primijenimo metodu iz prethodnog primjera da bismo provjerili linearnost na slijedeći sustav:

$y(t) = x^2(t)$

Ako definiramo $x_1(t)$, $x_2(t)$ i $x_3(t)$ na način kao u prethodnom primjeru, biti će:
$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1^2(t)$
$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = x_2^2(t)$

i

$$\begin{aligned} x_3(t) \rightarrow y_3(t) &= x_3^2(t) \\ &= (ax_1(t) + bx_2(t))^2 \\ &= a^2x_1^2(t) + 2abx_1(t)x_2(t) + b^2x_2^2(t) \\ &= a^2y_1(t) + 2abx_1(t)x_2(t) + b^2y_2(t) \quad \neq \quad ay_1(t) + by_2(t) \end{aligned}$$

Budući da je $y_3(t) \neq ay_1(t) + by_2(t)$, zaključujemo da je sustav nelinearan.