Izdavač
ŠKOLSKA KNJIGA, d.d.
Zagreb, Masarykova 28

Za izdavača
ANTE ŽUŽUL, prof.

Urednica
JELENA LONČARIĆ

Recenzenti
dr. sc. VJERA LOPAC
dr. sc. DAVOR DUŽEVIĆ
dr. sc. VIŠNJA HENČ-BARTOLIĆ
dr. sc. JADRANKA VULETIN
dr. sc. VLADIMIR PAAR

Recenzenti VIII. izdanja
prof. dr. sc. Vjera Lopac
dr. sc. Vesna Volovšek, izv. prof.
prof. dr. sc. Mile Baće

Povjerenstvo za sveučilišno-nastavnu literaturu
Sveučilišta u Zagrebu odobrilo je objavljivanje ovog
sveučilišnog udžbenika rješenjem klasa 032-01/06-01/5
ur. broj. 380-02/6-06-4 od 12. prosinca 2006.

TISAK
Grafički zavod Hrvatske, d.o.o., Zagreb

dr. sc. Petar Kulišić – doc. dr. sc. Lahorija Bistričić – prof. dr. sc. Dubravko Horvat – doc. dr. sc. Zoran Narančić – prof. dr. sc. Tomislav Petković – prof. dr. sc. Dubravko Pevec

RIJEŠENI ZADACI IZ MEHANIKE I TOPLINE

UDŽBENIK FIZIKE ZA STUDENTE FAKULTETA ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

VIII. promijenjeno izdanje

priredio
prof. dr. sc. Dubravko Pevec

školska knjiga

Zagreb, 2007.

Ministarstvo znanosti i tehnologije Republike Hrvatske
novčano je pomoglo objavljivanje ove knjige.

Sadržaj

Predgovor

Ova zbirka zadataka izlazi kao sastavni dio udžbenika *Mehanika i toplina* autora prof. P. Kulišića. Nastala je zbog potrebe što je prije svega nameće sam taj udžbenik, ali i zbog temeljne potrebe rješavanja zadataka i fizičkih problema kao neminovnog načela studija fizike na Elektrotehničkom fakultetu u Zagrebu. Ne samo eksplikacija fizičkih zakonitosti, već i razumijevanje fizike u najširem značenju te riječi oslanja se na rješavanje zadataka. U svjetlu toga zahtjeva dobila je ova zbirka svoj oblik i opseg.

Podijeljena je na 14 poglavlja i obuhvaća gradivo fizike za prvi semestar ETF-a. Svako poglavlje ima uvodni dio s pregledom definicija i formula koje se u njemu koriste, a zatim slijede potpuno riješeni primjeri i na svršetku zadaci za vježbu uz koje je obvezatno naveden konačan rezultat. Riješeni zadaci, na kojima je pretežno zasnovana ova zbirka, treba da uz pokazanu metodologiju budu i priprema studentu za samostalno rješavanje neriješenih zadataka.

Sasvim ovladati znanjem iz fizike znači njezine zakonitosti znati stvaralački primijeniti u praksi. Predavanja iz fizike mogu biti uspješna samo ako su upotpunjena odgovarajućim vježbama na kojima se izvode mjerenja, odnosno na kojima se rješavaju zadaci. Autori su, gdje god je bilo moguće, nastojali izabrati primjere, koji će studentima koristiti u daljnjem studiju i poslije u inženjerskoj praksi. Ti će primjeri biti korisni i za širi krug stručnjaka jer je fizika osnova mnogim disciplinama.

Pri rješavanju zadataka potrebno je razumjeti njihov smisao, uočiti fizičke pojave koje se u njima obrađuju i razmotriti potrebne aproksimacije za njihovo rješavanje. Zatim je potrebno utvrditi zadane podatke, a konstante i tablične podatke uzeti iz Dodatka. Sve podatke valja izraziti u SI-sustavu. Problemi se moraju rješavati u općem obliku, valja postići radnu formulu, pa tek na svršetku uvrstiti zadane podatke i izračunati numerički rezultat, imajući na umu stupanj točnosti upotrijebljenih podataka. Potrebnim kritičkim razmatranjem dobivenih rezultata zadatak je potpuno obrađen.

Autori su se koristili mnogobrojnom literaturom; bibliografija najviše korištenih djela nalazi se na svršetku knjige. Većina je zadataka rađena na auditornim vježbama, odnosno zadaci su zadavani kao ispitni zadaci na ETF-u posljednjih nekoliko godina.

U Zagrebu, siječanj 1986.

Autori

Predgovor šestom izdanju

Ova se zbirka niz godina koristila kao udžbenik na auditornim vježbama iz kolegija Fizike I na Elektrotehničkom fakultetu (danas Fakultet elektrotehnike i računarstva) u Zagrebu. Tijekom uporabe autori kao i čitatelji uočili su pogreške i nedostatke zbirke. U ovom šestom, prerađenom i dopunjenom izdanju nastojali smo zbirku poboljšati ispravljanjem uočenih pogrešaka i nedostataka.

Da bi se zadacima što bolje obuhvatilo propisano gradivo, zbirka je dopunjena novim riješenim primjerima i zadacima za vježbu.

Dodano je i novo poglavlje koje sadrži ispitne zadatke s Fakulteta elektrotehnike i računarstva u Zagrebu i njihove rezultate.

Tijekom pripreme ovog izdanja prerano nas je i zauvijek napustio redaktor prvog izdanja i glavni autor zbirke prof. dr. sc. Petar Kulišić.

Na kraju, zahvaljujemo recenzentima i čitateljima prijašnjih izdanja ove zbirke za sve primjedbe i sugestije koje su pridonijele poboljšanju u ovom šestom izdanju. Posebno smo zahvalni mr. sc. Branki Prib koja je brižljivo prikupljala i provjeravala uočene pogreške i primjedbe.

U Zagrebu, mjeseca studenog 1995.

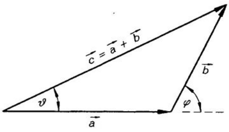
Autori

1. Vektori

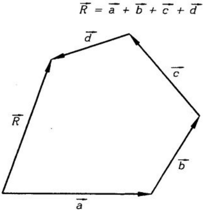
Uvod

Skalarne fizikalne veličine (npr. masa, vrijeme, energija itd.) potpuno su opisane svojom brojčanom vrijednošću i jedinicom. Vektori (npr. sila, brzina itd.), osim iznosa (tj. brojčane vrijednosti izražene u odgovarajućim mjernim jedinicama), imaju i smjer. Vektore označujemo strelicom iznad simbola fizičke veličine, npr. $\vec{F}$, $\vec{v}$, iznos vektora označuje se slovom bez strelice: iznos vektora $\vec{F}$ jest F. Vektor se grafički predočuje usmjerenom dužinom. Vektor se ne mijenja paralelnom translacijom jer mu pritom iznos i smjer ostaju isti.

Zbroj dvaju vektora $\vec{a} + \vec{b}$ može se grafički odrediti tako da se paralelnom translacijom početak vektora $\vec{b}$ dovede na kraj vektora $\vec{a}$; rezultantni vektor $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ jest vektor povučen od početka vektora $\vec{a}$ do kraja vektora $\vec{b}$ (sl. 1.1).



Slika 1.1.



Slika 1.2.

Iznos rezultante može se izračunati uz pomoć kosinusova poučka

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\varphi}, \tag{1}$$

gdje je φ kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Smjer rezultante određuje se kutom ϑ (sl. 1.1):

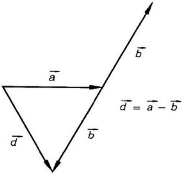
$$\cos\vartheta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}. \tag{2}$$

Slično se mogu zbrojiti i više od dva vektora, nadovezujući vektore u vektorski poligon (sl. 1.2).

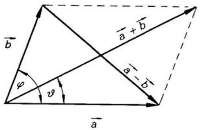
Oduzimanje vektora svodi se na zbrajanje prvog vektora s vektorom koji je suprotan drugom vektoru (sl. 1.3)

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}). \tag{3}$$

Dovede li se početak obaju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ u istu točku, pa se nad njima konstruira paralelogram (sl. 1.4), jedna će od dijagonala biti zbroj $\vec{a} + \vec{b}$, a druga razlika vektora $\vec{a} - \vec{b}$.

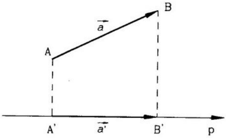


Slika 1.3.



Slika 1.4.

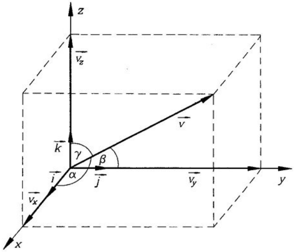
Vektorska komponenta vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ u smjeru orijentiranog pravca **p** jest vektor $\vec{a}' = \overrightarrow{A'B'}$, gdje je A' ortogonalna projekcija točke A, a B' projekcija točke B na pravac **p** (sl. 1.5). Skalarna komponenta (ili jednostavno komponenta) vektora $\vec{a}$ jednaka je iznosu vektorske komponente ako je smjer vektorske komponente u smjeru orijentiranog pravca, odnosno negativnom iznosu ako su vektorska komponenta i pravac **p** antiparalelni. Projekcija vektora na dani smjer u prostoru zapravo je algebarska veličina i može biti pozitivna i negativna.



Slika 1.5.

Rastaviti zadani vektor na komponente znači napisati ga kao zbroj nekoliko vektora koji se nazivaju njegovim vektorskim komponentama.

Svaki se vektor može rastaviti na tri komponente paralelne s bilo kojim trima nekomplanarnim vektorima. Tako se npr. u prostornom Kartezijevu (Descartesovu) pravokutnom koordinatnom sustavu vektor $\vec{v}$ može prikazati uz pomoć njegovih triju komponenata (sl. 1.6)



Slika 1.6.

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \tag{4}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{4.a}$$

Da bi se zbrojilo nekoliko vektora $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \dots$ metodom komponenata, potrebno je svaki vektor rastaviti na komponente u smjeru x, y i z, zbrojiti sve x, odnosno y i z komponente

$$\begin{aligned} R_x &= a_x + b_x + c_x + \dots \\ R_y &= a_y + b_y + c_y + \dots \\ R_z &= a_z + b_z + c_z + \dots \end{aligned} \tag{5}$$

i, iz tako dobivenih komponenata, izračunati rezultantu $\vec{R}$

$$\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k}. \tag{5.a}$$

Vektor $\vec{a}$ množi se pozitivnim skalarom α tako da mu se iznos pomnoži tim skalarom, a smjer ostaje isti. Pri množenju negativnim skalarom ($\alpha < 0$) smjer vektora $\alpha\vec{a}$ suprotan je smjeru vektora $\vec{a}$.

Skalarni produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ($\vec{a} \cdot \vec{b}$) skalarna je veličina i jednak je umnošku iznosa obaju vektora i kosinusa kuta među njima

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a\,b\cos(\vec{a}, \vec{b}) = a\,b\cos\alpha. \tag{6}$$

Za zbrajanje i oduzimanje vektora, za množenje vektora skalarom i za skalarni produkt vektora vrijede zakoni asocijacije, distribucije i komutacije kao i za algebarske brojeve.

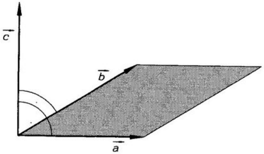
Vektorski produkt $\vec{c}$ vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ opet je vektor

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}. \tag{7}$$

Iznos vektorskog produkta jednak je umnošku iznosa jednog i drugog vektora i sinusa kuta među njima

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = a\, b \sin\alpha. \tag{7.a}$$

Vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ okomit je na oba vektora (sl. 1.7), a smjer mu se određuje pravilom desne ruke. Ide li se prstima desne ruke kraćim putem od prvog do drugog vektora, palac će pokazati smjer vektorskog produkta.



Slika 1.7.

Iznos vektorskog produkta $|\vec{a} \times \vec{b}|$ brojčano je jednak površini paralelograma kojemu su stranice a i b.

Prikažu li se vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ uz pomoć komponenata (projekcija na koordinatne osi x, y i z i jediničnih vektora $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \qquad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}, \tag{8}$$

tada je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{8.a}$$

i

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}, \tag{8.b}$$

a to se može pisati u obliku determinante

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{8.c}$$

Gradijent skalarne veličine φ jest vektor s komponentama u Kartezijevu (Decartesovu) koordinatnom sustavu

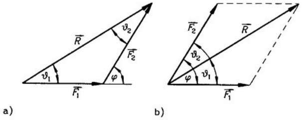
$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} = \nabla\varphi, \tag{9}$$

gdje je ∇ (nabla) diferencijalni operator

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

Primjeri

1.1. Dvije sile F_1 = 1 kN i F_2 = 1,2 kN djeluju na materijalnu točku. Sile međusobno zatvaraju kut φ = 60°. Kolika je rezultanta R i koliki su kutovi ϑ_1 i ϑ_2 koje ona zatvara sa silama $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$?



Slika 1.8.

Rješenje

Primjenom kosinusova, odnosno sinusova poučka, izlazi iz trokuta sila (sl. 1.8):

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\varphi} = 1{,}9\,\mathrm{kN}$$

$$\sin\vartheta_1 = \frac{F_2}{R}\sin\varphi \qquad \vartheta_1 = 33°$$

$$\sin\vartheta_2 = \frac{F_1}{R}\sin\varphi \qquad \vartheta_2 = 27°.$$

Zadane se sile mogu zbrojiti i grafički uz pomoć trokuta sila (sl. 1.8.a), odnosno uz pomoć paralelograma sila (sl. 1.8.b). Crtaju li se sile u odgovarajućem mjerilu, tada se mjerenjem može odrediti iznos rezultante i kutovi ϑ_1 i ϑ_2.

1.2. Položaj materijalne točke u trenutku t_1 jest $\vec{r}_1 = (2\vec{i} + \vec{j})$ m, a u trenutku t_2 on je $\vec{r}_2 = (5\vec{i} + 5\vec{j})$ m (sl. 1.9). Izračunajte $\Delta\vec{r}$, $|\Delta\vec{r}|$ i Δr.

Rješenje

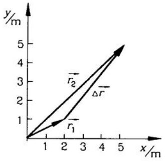
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (5\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{i} - \vec{j})\,\mathrm{m} = (3\vec{i} + 4\vec{j})\,\mathrm{m}.$$

Vektor $\Delta\vec{r}$ jest vektor pomaka materijalne točke. Njegov iznos (modul, apsolutna vrijednost) jest

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{9 + 16}\,\mathrm{m} = 5\,\mathrm{m},$$

Δr je promjena iznosa vektora položaja

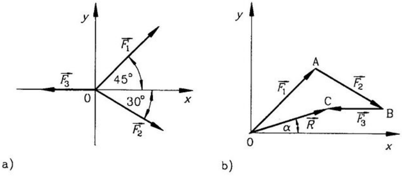
$$\Delta r = |\vec{r}_2| - |\vec{r}_1| = r_2 - r_1 = (\sqrt{50} - \sqrt{5})\mathrm{m} = 4{,}8\,\mathrm{m}.$$



Slika 1.9.

1.3. Na materijalnu točku djeluju u vodoravnoj ravnini tri sile (sl. 1.10). Prva sila $F_1 = 2{,}8$ N zatvara kut od 45° s osi x, druga sila $F_2 = 2{,}3$ N zatvara kut od $-30°$ s osi x i treća sila $F_3 = 2$ N djeluje u smjeru negativne osi x. Odredite iznos i smjer rezultante.

Zadatak riješite: a) grafički i b) računski.



Slika 1.10.

Rješenje

a) Na milimetarskom se papiru nacrtaju zadane sile u odgovarajućem mjerilu (npr. 1 N ≙ 1 cm). Počevši s $\vec{F}_1$ valja nacrtati poligon sila (sl. 1.10.b) tako da se na vrh prve sile paralelnom translacijom dovede početak druge, a na vrh druge početak treće sile.

Rezultanta $\overline{OC}$ (vektorski zbroj sila $\overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BC}$) vektor je koji spaja početak prve sile (točku 0) s vrhom posljednje sile (točkom C). Mjerenjem se dobiva

$$R = 2\text{ N}, \qquad \alpha = 23°.$$

b) Najprije se moraju odrediti x i y komponente zadanih sila. Komponente rezultante određuju se zbrajajući x– i y– komponente pojedinih sila (sl. 1.10.a):

$$\vec{F}_1 = F_1 \cos 45° \vec{i} + F_1 \sin 45° \vec{j} = \left(2{,}8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + 2{,}8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j}\right) \text{N}$$

$$\vec{F}_2 = F_2 \cos(-30°) \vec{i} + F_2 \sin(-30°) \vec{j} = \left(2{,}3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{i} - \frac{2{,}3}{2} \vec{j}\right) \text{N}$$

$$\vec{F}_3 = F_3 \cos(180°) \vec{i} = -2\vec{i}\ \text{N}.$$

Komponente rezultante jesu:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = (1{,}4\sqrt{2} + 1{,}15\sqrt{3} - 2)\,\text{N} = 1{,}97\,\text{N}$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = (1{,}4\sqrt{2} - 1{,}15)\,\text{N} = 0{,}83\,\text{N}$$

$$\vec{R} = (1{,}97\vec{i} + 0{,}83\vec{j})\,\text{N}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 2{,}14\,\text{N}.$$

Kut između rezultante i osi x jest

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Sigma F_{iy}}{\Sigma F_{ix}} = \frac{R_y}{R_x} = 0{,}42 \Rightarrow \alpha = 23°.$$

1.4. Silu $\vec{F}$ rastavite na dvije komponente koje zatvaraju kut φ, tako da između sile i jedne od komponenata bude kut ϑ_1. Riješite zadatak i u posebnom slučaju kad je $F = 50$ N, $\varphi = 90°$ i $\vartheta_1 = 60°$.

Rješenje

Zadatak ćemo riješiti metodom komponenata. Odabire se os x okomito na silu $\vec{F}$, a os y u smjeru sile $\vec{F}$ (sl. 1.11).
Iz slike proizlazi

$$F_1 \sin\vartheta_1 = F_2 \sin(\varphi - \vartheta_1)$$

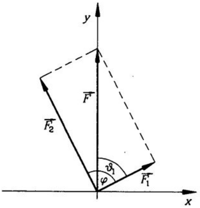
$$F_1 \cos\vartheta_1 + F_2 \cos(\varphi - \vartheta_1) = F.$$

Odatle je

$$F_1 = F\frac{\sin(\varphi - \vartheta_1)}{\sin\varphi}$$

$$F_2 = F\frac{\sin\vartheta_1}{\sin\varphi}.$$

Ako je $F = 50$ N, $\varphi = 90°$ i $\vartheta_1 = 60°$, dobiva se $F_1 = 25$ N, $F_2 = 43{,}3$ N.



Slika 1.11.

1.5. Potrebno je odrediti vektor položaja $\vec{r}$ točke T (7 m, − 4 m, 5 m). Koliki su kutovi α, β i γ koje $\vec{r}$ zatvara s koordinatnim osima x, y, z? Koji uvjet povezuje ta tri kuta? Neka se odredi jedinični vektor $\vec{r}_0$. Kolika je projekcija vektora $\vec{F} = (2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k})$ N u smjeru $\vec{r}_0$? Koliki je kut između $\vec{F}$ i $\vec{r}_0$?

Rješenje

Vektor položaja jest vektor iz ishodišta O do točke T

$$\vec{r} = \overline{\mathrm{OT}} = (7\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k})\ \mathrm{m}.$$

Iznos mu je

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{90}\ \mathrm{m} = 9{,}49\ \mathrm{m},$$

a smjer mu je određen kutovima α, β i γ što ih zatvara s koordinatnim osima x, y, z:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{i}\cdot\vec{r}}{r} = \frac{x}{r} = 0{,}7379, \qquad \alpha = 42{,}5°$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{j}\cdot\vec{r}}{r} = \frac{y}{r} = 0{,}4216, \qquad \beta = 114{,}9°$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{k}\cdot\vec{r}}{r} = \frac{z}{r} = 0{,}527, \qquad \gamma = 58{,}2°.$$

Budući da je $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, onda je $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Jedinični vektor $\vec{r}_0$ u smjeru vektora $\vec{r}$ jest

$$\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{r} = 0{,}74\vec{i} - 0{,}42\vec{j} + 0{,}53\vec{k}.$$

Projekcija vektora $\vec{F}$ u smjeru $\vec{r}_0$ jest

$$F_r = \vec{F}\cdot\vec{r}_0 = 2\cdot 0{,}738 - 4\cdot 0{,}422 + 1\cdot 0{,}527\ \mathrm{N} = 0{,}32\ \mathrm{N}.$$

Kut φ između $\vec{F}$ i $\vec{r}_0$ jest

$$\cos\varphi = \frac{\vec{F}\cdot\vec{r}_0}{F} = 0{,}069, \qquad \varphi = 86°.$$

1.6. Teret težak 981 N obješen je na strop sa dva kabela tako da prvi kabel sa stropom zatvara kut α, a drugi kut β (sl. 1.12.a). Potrebno je izračunati napetosti u svakom kabelu ako je a) $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$ i b) $\alpha = \beta = 60°$.

Rješenje

Vektorski zbroj napetosti u kabelima $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ i težine tereta $\vec{G}$ mora biti jednak nuli:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{G} = 0.$$

Zadatak se može riješiti metodom komponenata tako da se odabere os x u vodoravnom, a os y u vertikalnom smjeru i da se taj uvjet napiše u obliku

$$\sum_i F_{ix} = 0 \qquad \sum_i F_{iy} = G,$$

odnosno

$$F_1\cos\alpha = F_2\cos\beta$$

$$F_1\sin\alpha + F_2\sin\beta - G = 0.$$

Odatle je

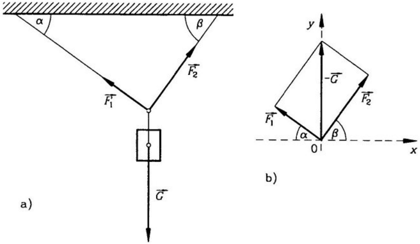
$$F_1 = \frac{G\cos\beta}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta} = \frac{G\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$F_2 = \frac{G\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta} = \frac{G\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Za $\alpha = 30°$ i $\beta = 45°$, dobiva se $F_1 = 718$ N, $F_2 = 879{,}5$ N.

Za $\alpha = \beta = 60°$, dobiva se $F_1 = F_2 = 566{,}4$ N.

Zadatak se može riješiti i grafički tako da se konstruira trokut, odnosno paralelogram sila (sl. 1.12.b).



Slika 1.12.

1.7. Izračunajte projekciju vektora $\vec{v} = -\sqrt{3}\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j} - \sqrt{3}\vec{k}$ na smjer određen pravcem kroz točke A (1, 1, 1) i B (2, 2, 2) u smjeru $\overline{AB}$.

Rješenje

Jedinični je vektor u zadanom smjeru

$$\vec{u} = \frac{(2-1)\vec{i} + (2-1)\vec{j} + (2-1)\vec{k}}{\sqrt{3}} = \frac{\vec{i}}{\sqrt{3}} + \frac{\vec{j}}{\sqrt{3}} + \frac{\vec{k}}{\sqrt{3}}.$$

Projekcija vektora $\vec{v}$ na zadani smjer jest

$$v_u = \vec{v} \cdot \vec{u} = -1 + 1 - 1 = -1.$$

Predznak minus pokazuje da je smjer projekcije suprotan smjeru vektora $\vec{u}$.

1.8. Pokažite da je

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Koliko je $\vec{a} \times \vec{b}$ ako je $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$?

Rješenje

Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ mogu se izraziti uz pomoć pravokutnih Descartesovih koordinata

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \qquad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}.$$

Vektorski je produkt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = a_xb_x\vec{i} \times \vec{i} + a_xb_y\vec{i} \times \vec{j} + a_xb_z\vec{i} \times \vec{k} +$$
$$+ a_yb_x\vec{j} \times \vec{i} + a_yb_y\vec{j} \times \vec{j} + a_yb_z\vec{j} \times \vec{k} + a_zb_x\vec{k} \times \vec{i} + a_zb_y\vec{k} \times \vec{j} + a_zb_z\vec{k} \times \vec{k}.$$

Budući da je $\vec{i} \times \vec{i} = 0$, $\vec{j} \times \vec{j} = 0$, $\vec{k} \times \vec{k} = 0$, $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$,

$$\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j},$$

dobiva se

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{i}(a_yb_z - a_zb_y) + \vec{j}(a_zb_x - a_xb_z) + \vec{k}(a_xb_y - a_yb_x),$$

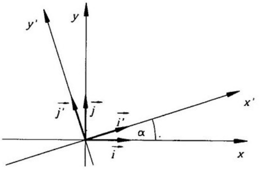
a to se može napisati u obliku determinante

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

ili u posebnom slučaju

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}.$$

1.9. Izvedite vezu između jediničnih vektora $\vec{i}$ i $\vec{j}$ sustava x, y i vektora $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ sustava x', y' koji je zarotiran za kut α prema sustavu x, y (sl. 1.13).



Slika 1.13.

Rješenje

Položaj točke može se opisati vektorom položaja $\vec r$

$$\vec r = x\vec i + y\vec j = (\vec r \cdot \vec i)\vec i + (\vec r \cdot \vec j)\vec j,$$

odnosno

$$\vec r\,' = x'\vec i\,' + y'\vec j\,' = (\vec r \cdot \vec i\,')\vec i\,' + (\vec r \cdot \vec j\,')\vec j\,'.$$

Ako se točka odabere tako da je $\vec r = \vec i\,'$, tada je

$$\vec i\,' = (\vec i\,' \cdot \vec i)\vec i + (\vec i\,' \cdot \vec j)\vec j = a_1\vec i + a_2\vec j.$$

Ako je $\vec r = \vec j\,'$

$$\vec j\,' = (\vec j\,' \cdot \vec i)\vec i + (\vec j\,' \cdot \vec j)\vec j = b_1\vec i + b_2\vec j.$$

Budući da je

$$\begin{aligned} a_1 &= \vec i\,' \cdot \vec i = \cos(\vec i\,'/\vec i) = \cos\alpha, \\ a_2 &= \vec i\,' \cdot \vec j = \cos(\vec i\,'/\vec j) = \cos(90° - \alpha), \\ b_1 &= \vec j\,' \cdot \vec i = \cos(\vec j\,'/\vec i) = \cos(90° + \alpha), \\ b_2 &= \vec j\,' \cdot \vec j = \cos(\vec j\,'/\vec j) = \cos\alpha, \end{aligned}$$

bit će

$$\begin{aligned} \vec i\,' &= \cos\alpha\,\vec i + \sin\alpha\,\vec j \\ \vec j\,' &= -\sin\alpha\,\vec i + \cos\alpha\,\vec j. \end{aligned}$$

Slično se dobiva i obrnuta veza

$$\begin{aligned} \vec i &= (\vec i \cdot \vec i\,')\vec i\,' + (\vec i \cdot \vec j\,')\vec j\,' = a_1\vec i\,' + b_1\vec j\,' = \cos\alpha\,\vec i\,' - \sin\alpha\,\vec j\,' \\ \vec j &= (\vec j \cdot \vec i\,')\vec i\,' + (\vec j \cdot \vec j\,')\vec j\,' = a_2\vec i\,' + b_2\vec j\,' = \sin\alpha\,\vec i\,' + \cos\alpha\,\vec j\,'. \end{aligned}$$

1.10. Zadani su vektori $a = a_x\vec i + a_y\vec j$ i $\vec b = b_x\vec i + b_y\vec j$. Potrebno je pokazati da su skalarni i vektorski produkt $\vec a \cdot \vec b$ i $\vec a \times \vec b$ invarijantni s obzirom na rotaciju koordinatnog sustava.

Rješenje

Ako se umjesto sustava x, y izabere sustav x', y' zarotiran za kut α prema sustavu x, y, tada je $\vec a = a'_x\vec i\,' + a'_y\vec j\,'$ i $\vec b = b'_x\vec i\,' + b'_y\vec j\,'$.

Jedinični vektori jednog i drugog sustava povezani su relacijama (v. prethodni zadatak)

$$\vec{i} = \cos\alpha\vec{i}' - \sin\alpha\vec{j}' \qquad \vec{j} = \sin\alpha\vec{i}' + \cos\alpha\vec{j}'.$$

Slična je i veza među komponentama vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ u jednom i drugom sustavu

$$a_x = \vec{a}\cdot\vec{i} = a_x'\cos\alpha - a_y'\sin\alpha, \qquad a_y = \vec{a}\cdot\vec{j} = a_x'\sin\alpha + a_y'\cos\alpha$$

$$b_x = b_x'\cos\alpha - b_y'\sin\alpha, \qquad b_y = b_x'\sin\alpha + b_y'\cos\alpha.$$

Ako se te relacije uvrste u $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$, odnosno u $\vec{a}\times\vec{b} = (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$, rezultat će biti

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a'_x b'_x + a'_y b'_y \qquad \vec{a}\times\vec{b} = (a'_x b'_y - a'_y b'_x)\vec{k},$$

čime je pokazana invarijantnost.

1.11. Produkt $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ naziva se skalarno-vektorskim ili mješovitim produktom.
a) Pokažite da je $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$.
b) Kakvo je geometrijsko značenje mješovitog produkta?
Koji je uvjet da vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ budu komplanarni?

Rješenje

a) Ako se vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ izraze njihovim komponentama

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}, \quad \text{i} \quad \vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k},$$

tada je

$$\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \vec{i}(b_y c_z - b_z c_y) + \vec{j}(b_z c_x - b_x c_z) + \vec{k}(b_x c_y - b_y c_x),$$

pa je

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = a_x b_y c_z - a_x b_z c_y + a_y b_z c_x - a_y b_x c_z + a_z b_x c_y - a_z b_y c_x = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Slično se dobiva

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \vec{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x),$$

pa je

$$\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = a_y b_z c_x - a_z b_y c_x + a_z b_x c_y - a_x b_z c_y + a_x b_y c_z - a_y b_x c_z,$$

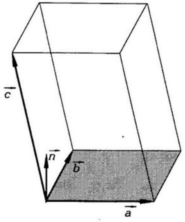
a to je jednako rezultatu dobivenom za $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.
Općenito vrijedi:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}).$$

b) Mješoviti vektorski produkt jednak je volumenu paralelepipeda čije su stranice $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ (sl. 1.14). Ako je osnovica paralelepipeda paralelogram određen stranicama $\vec{a}$ i $\vec{b}$ bit će površina tog pravokutnika $|\vec{a}\times\vec{b}|$. Smjer vektora $\vec{a}\times\vec{b}$ u smjeru je normale na paralelogram i može se označiti jediničnim vektorom $\vec{n}$. Volumen paralelepipeda jest umnožak osnovice i visine. Budući da je visina $\vec{c}\cdot\vec{n}$, volumen je

$$V = |\vec{a}\times\vec{b}|\cdot\vec{c}\cdot\vec{n} = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}.$$



Slika 1.14.

Ako su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni, onda je volumen paralelepipeda nula, pa je uvjet komplanarnosti

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0.$$

1.12. Zadana su tri vektora:

$$\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k},\qquad \vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k},\qquad \vec{c}=4\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}.$$

a) Izračunajte trostruki vektorski produkt $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ i $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$.
b) Pokažite da je $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{c}$.

Rješenje

a) Vektorski produkt $\vec{b}\times\vec{c}$ iznosi

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & -2\\ 4 & 1 & 1\end{vmatrix}=(-2+2)\vec{i}+(-8-3)\vec{j}+(3+8)\vec{k}=-11\vec{j}+11\vec{k},$$

pa je $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & -11 & 11\end{vmatrix}=33\vec{i}+11\vec{j}+11\vec{k}.$$

Slično se računa i $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 2 & 1\\ 3 & -2 & -2\end{vmatrix}=-2\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k},$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 1 & -4\\ 4 & 1 & 1\end{vmatrix}=5\vec{i}-14\vec{j}-6\vec{k}.$$

Valja uočiti da je općenito $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}\neq\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$, tj. da ne vrijedi zakon asocijacije.

b) Vektor $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ okomit je na vektor $\vec{a}$ i na vektor $\vec{b}\times\vec{c}$. Vektor $\vec{b}\times\vec{c}$ okomit je na vektore $\vec{b}$ i $\vec{c}$. Ako je $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ različito od nule, tada vektor $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ leži u ravnini određenoj vektorima $\vec{b}$ i $\vec{c}$ (tj. komplanaran je sa $\vec{b}$ i $\vec{c}$) i može se napisati kao njihova linearna kombinacija:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \alpha_1\vec{b} + \alpha_2\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}.$$

Ispravnost te formule može se dokazati općenito, no to zahtijeva dosta prostora, pa će biti pokazano na ovom konkretnom primjeru. Potrebno je izračunati lijevu i desnu stranu i utvrditi jednakost. Uvrštavanjem se dobiva rezultat $\vec{a}\cdot\vec{c} = -1$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = -9$, odnosno

$$(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} = 33\vec{i} + 11\vec{j} + 11\vec{k},$$

a toliki je i produkt $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$.
Slično je

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}.$$

Izračunaju li se skalarni produkti, dobit će se $\vec{a}\cdot\vec{c} = -1$, $\vec{b}\cdot\vec{c} = 8$, pa je

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = -(3\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}) - 8(-\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) = 5\vec{i} - 14\vec{j} - 6\vec{k}.$$

1.13. Iz relacije $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ potrebno je izvesti relaciju

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}.$$

Rješenje
Uzevši u obzir da za vektorski produkt vrijedi zakon antikomutacije, dobiva se

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = -\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}).$$

Ako se umjesto $\vec{a}$ piše $\vec{c}$, umjesto $\vec{b}$ piše $\vec{a}$, a umjesto $\vec{c}$ piše $\vec{b}$, dobit će se

$$\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a} - (\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b},$$

pa je

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}.$$

1.14. Zadana su dva vektora $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ i $\vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$. Koliki je vektor $\vec{c}$ ako je $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = 0$?

Rješenje
Vektorski produkt $\vec{a}\times\vec{b}$ jest:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}.$$

Vektor $\vec{c}$ mora biti kolinearan vektoru $\vec{a}\times\vec{b}$ jer je $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = 0$. Dakle,

$$\vec{c} = \alpha(\vec{a}\times\vec{b}) = -\alpha\vec{i} - 4\alpha\vec{j} + 5\alpha\vec{k}.$$

Ovjde je α skalar.

1.15. Ako je $\varphi = r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, koliki je grad φ? Koliko je $\nabla\nabla\varphi$?

Rješenje
Koordinate gradijenta skalarne funkcije φ u Descartesovu sustavu jesu

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k} = 2\vec{r}.$$

Simbolički se grad označava i $\nabla\varphi$ (nabla φ); tu je ∇ diferencijalni operator

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

Operator ∇ primijenjen na vektorsku funkciju $\vec{v} = \vec{v}_x\vec{i} + \vec{v}_y\vec{j} + \vec{v}_z\vec{k}$, može se shvatiti kao skalarni produkt vektora ∇ i vektora $\vec{v}$, pa je

$$\nabla\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Dakle,

$$\nabla\nabla\varphi = \nabla \operatorname{grad}\varphi = 2 + 2 + 2 = 6.$$

Zadaci

1.1. Na materijalnu točku djeluju tri sile u horizontalnoj ravnini: $F_1 = 2$ N prema istoku, $F_2 = 2{,}8$ N prema jugoistoku i $F_3 = 1{,}5$ N prema zapadu. Izračunajte rezultantu tih sila: a) grafički i b) računski.

Rezultat: $\vec{F} = (2{,}47\vec{i} - 1{,}97\vec{j})$ N

1.2. Zadane su sile $\vec{F}_1 = (10\vec{i} + 10\vec{j})$ N, $\vec{F}_2 = -10\vec{j}$ N, $\vec{F}_3 = -4\vec{i}$ N i $\vec{F}_4 = (-10\vec{i} - 5\vec{j})$ N. Potrebno je odrediti iznos i smjer rezultante.

Rezultat: $\vec{R} = (-4\vec{i} - 5\vec{j})$ N, $R = 6{,}4$ N, $\alpha = 231{,}3°$

1.3. Zadana su dva vektora $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ i $\vec{b} = \vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$. Koliki je kut među njima?

Rezultat: $\varphi = 104{,}1°$

1.4. Izrazite kut φ među vektorima $\vec{a}$ i $\vec{a}'$ uz pomoć kutova koje ti vektori zatvaraju s koordinatnim osima x, y i z.

Rezultat: $\cos\varphi = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'$

1.5. Zadana su dva vektora $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ i $\vec{b} = \vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$.
Izračunajte mješovite produkte $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$ i $\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$.

Rezultat: $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$

1.6. Zadana su tri vektora $\vec{a} = 3\vec{i}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ i $\vec{c} = \vec{i} + 3\vec{k}$. Koliki je volumen parelelepipeda kojeg su to stranice?

Rezultat: $V = 18$

1.7. Pokažite da vrijedi jednakost

$$(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}).$$

1.8. Zadana su tri vektora $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ i $\vec{c} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$. Izračunajte $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ i $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.

Rezultat: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = -3\vec{i} - 12\vec{j} + 15\vec{k}$; $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = 0$

1.9. Zadana su tri vektora $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$ i $\vec{c} = \vec{j} + \vec{k}$. Izračunajte mješoviti produkt $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

Rezultat: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 1$

1.10. Izračunajte vremensku derivaciju vektorskog produkta $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

Rezultat: $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

1.11. Zadana su dva vektora $\vec{a} = t\vec{i} + 2\,t\vec{j} + \vec{k}$ i $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + t\vec{k}$. Izračunajte $\dfrac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ i $\dfrac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b})$ na dva načina, izračunavši odgovarajući produkt, odnosno služeći se pravilom za deriviranje produkta.

Rezultat: $\dfrac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 4$; $\dfrac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = 4t\vec{i} - 2t\vec{j} - \vec{k}$

1.12. Električni naboj Q nalazi se u točki $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, a naboj $-Q$ u točki $\mathrm{B}\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. Ako je potencijal dipola u točki $\mathrm{T}(x, y)$

$$\varphi = \frac{kQ}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2}} - \frac{kQ}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2}},$$

odredite vektor $\vec{E}$ u toj točki služeći se vezom $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$.

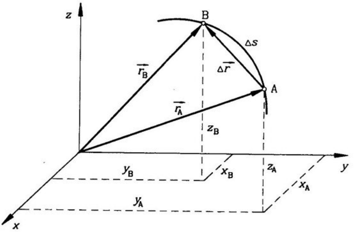
Rezultat: $\vec{E} = \dfrac{kQ\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2\right]^{\frac{3}{2}}}\vec{i} - \dfrac{kQ\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2\right]^{\frac{3}{2}}}\vec{i} + \dfrac{kQy}{\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2\right]^{\frac{3}{2}}}\vec{j} - \dfrac{kQy}{\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2\right]^{\frac{3}{2}}}\vec{j}$

2. Kinematika čestice

Uvod

Položaj materijalne točke (čestice) u prostoru može se odrediti njezinim pravokutnim Kartezijevim koordinatama x, y i z, odnosno vektorom položaja $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ koji spaja ishodište koordinatnog sustava s materijalnom točkom. Pomak materijalne točke (sl. 2.1) jest

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A. \tag{1}$$



Slika 2.1.

Ako tijelo prevali put Δs u vremenu Δt, tada mu je srednja brzina

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{2}$$

Trenutna je brzina

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \tag{3}$$

Vektor brzine može se izračunati i uz pomoć vremenske derivacije vektora položaja

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \tag{4}$$

odnosno

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \tag{5}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \tag{6}$$

Trenutna je brzina određena nagibom i smjerom tangente u pojedinoj točki putanje. Prijeđeni put s u vremenu $\Delta t = t_2 - t_1$ jednak je vremenskom integralu brzine

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt. \tag{7}$$

Slično se definiraju srednja, trenutna akceleracija i vektor akceleracije:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{a} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \tag{8}$$

Jedinica za brzinu jest metar u sekundi (znak: m/s), a za akceleraciju metar u sekundi na kvadrat (m/s^2).

Brzina je vremenski integral akceleracije

$$v = v_0 + \int_0^t a(t)\,dt. \tag{9}$$

Za jednoliko gibanje po pravcu v = konst. ($a = 0$), pa je u vremenu od $t = 0$ do t:

$$s = v\,t. \tag{10}$$

Za pravocrtno gibanje sa stalnom akceleracijom vrijede zakoni:

$$a = \text{konst.}$$

$$v = v_0 + \int_0^t a\,dt = v_0 + a\,t$$

$$s = \int_0^t v\,dt = v_0 t + \frac{a t^2}{2} \tag{11}$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2\,a\,s},$$

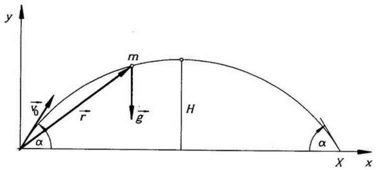
gdje je v_0 početna brzina čestice u trenutku $t = 0$. Za vrijednosti $a > 0$ gibanje je jednoliko ubrzano, a za $a < 0$ jednoliko usporeno.

Pri slobodnom padu, jednom od važnih primjera jednoliko ubrzanog gibanja, $v_0 = 0$ i $a = g = 9{,}81$ m/s^2.

Pri zanemarivom otporu zraka tijelo izbačeno početnom brzinom v_0 pod kutom elevacije α prema horizontali izvodi krivocrtno gibanje (sl. 2.2) opisano jednadžbom parabole:

$$x = v_{0x} t = v_0 t \cos\alpha$$

$$y = v_{0y} t - \frac{g\,t^2}{2} = v_0 t \sin\alpha - \frac{g\,t^2}{2} \tag{12}$$



Slika 2.2.

odnosno

$$y = x\tan\alpha - \frac{g}{2\,v_0^2 \cos^2\alpha}\,x^2. \tag{12.a}$$

Iz jednadžbe putanje (12) možemo odrediti: maksimalnu visinu hica H, vrijeme uspinjanja t_H i horizontalni domet hica X:

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \tag{13}$$

$$t_H = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \tag{13.a}$$

$$X = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \tag{13.b}$$

U posebnom se slučaju za $\alpha = 0$ dobiva horizontalni hitac, za $\alpha = 90°$ hitac uvis i za $\alpha = 270°$ hitac prema dolje.

Pri gibanju po kružnici polumjera r veza između prevaljenog puta (dijela kružnog luka) Δs i prijeđenog kuta (kutnog pomaka) $\Delta\varphi$ jest

$$\Delta s = r\,\Delta\varphi. \tag{14}$$

Kutna brzina materijalne točke koja se giba po kružnici jest

$$\omega = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}, \tag{15}$$

a kutna akceleracija

$$\alpha = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{16}$$

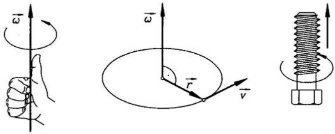
Veza između vektora linearne (obodne) i kutne brzine bit će:

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}, \tag{17}$$

gdje je $\vec{r}$ radijus-vektor od središta kružnice do materijalne točke (sl. 2.3). Smjer vektora $\vec{\omega}$ određuje se pravilom desne ruke (desnog vijka).

Radijalna (centripetalna) je akceleracija

$$\vec{a}_r = -r\,\omega^2\vec{r}_0 = -\frac{v^2}{r}\vec{r}_0 = \vec{\omega}\times\vec{v}, \tag{18}$$



Slika 2.3.

a tangencijalna akceleracija

$$\vec{a}_t = \vec{\alpha}\times\vec{r}. \tag{19}$$

gdje je $\vec{\alpha}$ vektor kutne akceleracije s iznosom danim relacijom (16) na pravcu vektora $\vec{\omega}$.

Ukupna akceleracija jest vektorski zbroj tangencijalne i radijalne akceleracije:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r \qquad a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{r^2}}. \tag{20}$$

Jedinica za kutnu brzinu je radijan u sekundi (znak: rad/s ili s^{-1}), a za kutnu akceleraciju (rad/s^2 ili s^{-2}).

Za jednoliko gibanje po kružnici ($\alpha = 0$) vrijedi:

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f, \qquad v = \frac{2\pi r}{T}, \tag{21}$$

gdje je T ophodno vrijeme, f frekvencija kruženja.
Za kruženje s konstantnom kutnom akceleracijom ($\vec{\alpha}$ = konst.) vrijedi:

$$\alpha = \text{konst.}$$

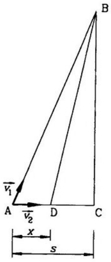
$$\omega = \alpha t + \omega_0$$

$$\varphi = \frac{\alpha t^2}{2} + \omega_0 t, \tag{22}$$

formule analogne izrazima (11) pri gibanju po pravcu.

Primjeri

2.1. Čovjek se nalazi na obali jezera u točki A i u najkraćem vremenu želi stići u točku B na jezeru. Udaljenost $\overline{BC} = d = 50$ m, $\overline{AC} = s = 20$ m. Čovjek može plivati brzinom $v_1 = 5$ km/h i trčati obalom brzinom $v_2 = 20$ km/h. Hoće li čovjek plivati od točke A do točke B, ili će trčati obalom, pa onda skočiti u vodu i plivati?



Slika 2.4.

Rješenje

Pretpostavimo da će čovjek trčati obalom do točke D (sl. 2.4), pritom prevaliti put $x = \overline{AD}$, pa onda skočiti u vodu i preplivati put $\overline{DB}$. Odredit ćemo udaljenost $x = \overline{AD}$ tako da vrijeme potrebno za cjelokupni put $\overline{ADB}$ bude minimalno. Nakon dobivenog rezultata vidjet ćemo hoće li čovjek samo plivati ili plivati i trčati. Potrebno je vrijeme

$$t = \frac{x}{v_2} + \frac{\sqrt{d^2 + (s-x)^2}}{v_1}.$$

Vrijeme t se derivira po x i derivacija izjednači s nulom. Dobije se:

$$v_1 - \frac{(s-x)\,v_2}{\sqrt{d^2 + (s-x)^2}} = 0$$

$$x_{min} = s - \frac{v_1 d}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}} = 7{,}1\,\text{m}.$$

U ovom primjeru čovjek će pretrčati 7,1 m, a nakon toga će plivati.

2.2. Motorkotač prijeđe prvu trećinu puta brzinom $v_1 = 10$ km/h, drugu trećinu puta brzinom $v_2 = 20$ km/h i posljednju trećinu brzinom $v_3 = 60$ km/h. Odredite srednju brzinu motorkotača.

Rješenje

$$\bar{v} = \frac{s}{t_1 + t_2 + t_3}$$

$$t_1 = \frac{s}{3v_1} \qquad t_2 = \frac{s}{3v_2} \qquad t_3 = \frac{s}{3v_3}$$

$$\bar{v} = \frac{3\,v_1 v_2 v_3}{v_1 v_2 + v_1 v_3 + v_2 v_3}$$

$$\bar{v} = 18\,\mathrm{km\,h^{-1}}.$$

2.3. Pomak tijela određen je jednadžbom $s = A + Bt + Ct^2$, u kojoj je $A = 1$ m, $B = 10$ m/s i $C = 5$ m/s^2. Izračunajte srednju brzinu tijela između prve i druge sekunde, između 1 s i 1,1 s i između 1 s i 1,001 s.

Rješenje

Prema definiciji srednje brzine slijedi

a) $$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = 25\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

b) $$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_{1,1} - s_1}{t_3 - t_1} = 20{,}5\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

c) $$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_{1,001} - s_1}{t_4 - t_1} = 20{,}005\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Iz tih se računa vidi da se v približuje vrijednosti 20 m/s, kada se Δt smanjuje. Odatle se može zaključiti da je trenutna brzina tijela nakon 1 s jednaka 20 m/s. Derivirajući pomak po vremenu zaista se dobiva

$$v\,(t = 1\ \mathrm{s}) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = B + 2\,Ct = 20\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

2.4. Motorni čamac plovi od jednog do drugog nepomičnog plovka, koji su udaljeni 1 600 m, najprije nizvodno, a zatim uzvodno. Put nizvodno traje 240 s, a put uzvodno 360 s. Kolika je brzina čamca ako bi on plovio po mirnoj vodi?

Rješenje

Označi li se sa v brzina čamca, a sa V brzina rijeke, tada za nizvodno kretanje vrijedi relacija

$$v + V = \frac{d}{t_1}, \tag{1}$$

a za uzvodno gibanje vrijedi izraz

$$v - V = \frac{d}{t_2}. \tag{2}$$

Zbrajanjem (1) i (2) dobiva se

$$v = \frac{d}{2}\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right). \tag{3}$$

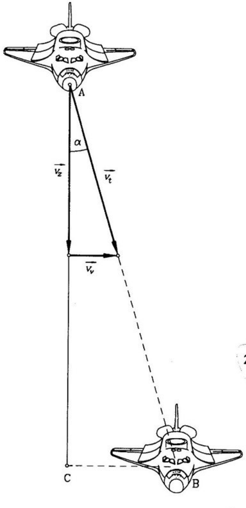
Uvrštavanjem zadanih veličina u (3) dobiva se

$$v = \frac{1{,}6}{2}(15 + 10)\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 20\ \mathrm{km\,h^{-1}}.$$

2.5. Zrakoplov održava smjer ravno prema sjeveru gibajući se brzinom 360 km/h u odnosu prema zraku. Vjetar puše brzinom 72 km/h od istoka prema zapadu.

a) Kolika je rezultantna brzina zrakoplova prema tlu po iznosu i smjeru?

b) Koliko će mu vremena biti potrebno da stigne u grad udaljen 200 km?



Slika 2.5.

Rješenje

a) Brzina zrakoplova prema tlu dobit će se vektorskim zbrajanjem njegove brzine u odnosu prema zraku i brzine vjetra

$$\vec{v}_t = \vec{v}_z + \vec{v}_v.$$

Iznos brzine v_t dobiva se primjenom Pitagorina poučka

$$v_t = \sqrt{v_z^2 + v_v^2} = 367\,\mathrm{km\,h^{-1}} = 102\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Smjer brzine može se odrediti kutom α (sl. 2.5)

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v_v}{v_z} = 0{,}2 \Rightarrow \alpha = 11{,}3^\circ.$$

Zrakoplov će se, dakle, gibati u odnosu prema tlu brzinom 367 km/h u smjeru 11,3° zapadno od sjevera.

b)

$$t = \frac{s}{v_t} = 1\,960\,\mathrm{s} = 33\,\mathrm{min}.$$

2.6. Dvojica biciklista, otac i sin, vozeći paralelno dolaze na netom otvoreno pravokutno križanje. Sin je nastavio u istom smjeru, prema školi, jednolikom brzinom od 10 km/h, a otac je morao skrenuti desno, u smjeru Fizičkog instituta gdje radi. U trenutku skretanja brzina mu je iznosila 6 km/h, pa se odmah počeo ubrzavati akceleracijom 0,9 m/s². Izračunajte relativnu brzinu sina prema ocu, $\vec{v}_S - \vec{v}_O$, 10 sekundi nakon razdvajanja na križanju.

Rješenje

Postavljanjem koordinatnog sustava s ishodištem u središtu pravokutnog križanja, brzine $\vec{v}_S$ i $\vec{v}_O$ mogu se napisati vektorski kao:

$$\vec{v}_S = v_S\vec{i} = 2{,}78\,\vec{i}\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

$$\vec{v}_O = -v_O\vec{j} = -(v_0 + a\,t)\vec{j} = -(1{,}67 + 9)\vec{j}\ \mathrm{m\,s^{-1}},$$

gdje je $\vec{v}_0$ početna brzina oca u trenutku skretanja, $\vec{a}$ njegovo ubrzanje neposredno nakon toga koje traje $t = 10$ s.

Relativna je brzina

$$\vec{v}_S - \vec{v}_O = 2{,}78\vec{i} + 10{,}67\vec{j},$$

odnosno, njezin modul

$$|\vec{v}_S - \vec{v}_O| = \sqrt{2{,}78^2\,(\mathrm{m/s})^2 + 10{,}67^2(\mathrm{m/s})^2} = 11{,}026\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 39{,}7\,\mathrm{km\,h^{-1}}.$$

2.7. Ulazeći u željezničku postaju vlak počinje jednoliko usporavati. Izračunajte akceleraciju vlaka ako prvih 50 m prijeđe za 5 s, a sljedećih 50 m za 7 s. Kolika je brzina vlaka na početku usporavanja?

Rješenje

Iz uvjeta u zadatku dobiva se

$$s_1 = v_0 t_1 + \frac{a}{2} t_1^2$$

$$s_1 + s_2 = v_0 (t_1 + t_2) + \frac{a}{2}(t_1 + t_2)^2.$$

Iz tih se dviju jednadžbi može eliminirati početna brzina v_0 i odrediti akceleracija vlaka

$$a = \frac{2(s_2 t_1 - s_1 t_2)}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)} = -0{,}48\,\mathrm{m/s^2}.$$

Predznak minus kaže da je gibanje usporeno.

Početna je brzina

$$v_0 = \frac{s_1}{t_1} - a\frac{t_1}{2} = 11{,}2\ \mathrm{m/s} = 40\ \mathrm{km/h}.$$

2.8. Krenuvši iz mirovanja materijalna se točka giba po pravcu tako da joj je akceleracija proporcionalna s vremenom. Koliki je prevaljeni put nakon 8 s, ako je nakon 4 s brzina točke 8 m/s?

Rješenje

Brzina je vremenski integral akceleracije. Budući da je $a = k\,t$, onda je

$$v = \int_0^t a\,\mathrm{d}t = \int_0^t k\,t\,\mathrm{d}t = \frac{k\,t^2}{2}.$$

Budući da je početna brzina ($t = 0$) točke jednaka nuli, iz $t = 4$ s, $v = 8$ m/s dobiva se da je $k = 1\ \mathrm{m/s^3}$.

Prijeđeni je put

$$s = \int_0^t v\,\mathrm{d}t = \int_0^t \frac{k\,t^2}{2}\mathrm{d}t = \frac{k\,t^3}{6} = 85{,}3\,\mathrm{m}.$$

2.9. Čestica se giba u x, y ravnini tako da joj vektor položaja ovisi o vremenu po zakonu $\vec{r} = (At^2 - Bt)\vec{i} + Ct^3\vec{j}$, gdje je $A = 3\ \mathrm{m\,s^{-2}}$, $B = 1\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ i $C = 1\ \mathrm{m\,s^{-3}}$.

a) Izračunajte $\vec{r}$, $\vec{v}$ i $\vec{a}$ u $t = 1$ s.

b) Kada x komponenta brzine postaje jednaka nuli? Kolika je tada y komponenta brzine?

Rješenje

a)

$$\vec{r}\,(t = 1\ \mathrm{s}) = (2\vec{i} + \vec{j})\ \mathrm{m}.$$

Brzina je vremenska derivacija radijus-vektora (vektora položaja) čestice koja se giba:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (2At - B)\vec{i} + 3Ct^2\vec{j}$$

$$\vec{v}(t = 1\,\mathrm{s}) = (5\vec{i} + 3\vec{j})\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Akceleracija je prva vremenska derivacija brzine, odnosno druga vremenska derivacija vektora položaja

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2A\vec{i} + 6C\vec{j}$$

odnosno

$$\vec{a}\,(t = 1\,\mathrm{s}) = (6\vec{i} + 6\vec{j})\,\mathrm{m\,s^{-2}}.$$

b) Komponente brzine jesu:

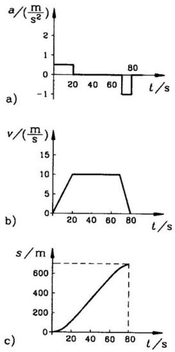
$$v_x = 2At - B \qquad v_y = 3Ct^2.$$

Ako se uvrsti $v_x = 0$, dobiva se

$$2At_1 - B = 0, \qquad t_1 = \frac{1}{6}\mathrm{s} = 0{,}17\,\mathrm{s}$$

$$v_y\,(t_1) = 0{,}08\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

2.10. Tramvaj se počinje gibati iz mirovanja jednoliko ubrzano akceleracijom 0,5 m/s^2 za vrijeme 20 s. Zatim se giba jednoliko i prije semafora počinje usporavati akceleracijom 1 m/s^2, tako da bi se ispred semafora zaustavio. Ukupna je vožnja trajala 80 s. Nacrtajte *a,t, v,t i s,t*-graf.



Slika 2.6.

Rješenje

Za vrijeme jednolikog ubrzavanja akceleracijom od 0,5 m/s^2 brzina se mijenja po zakonu $v = a_1 t = 0{,}5\,t\,\mathrm{m/s^2}$, pa se nakon $t_1 = 20\,\mathrm{s}$ postiže brzina od $v_1 = 10$ m/s, odnosno 36 km/s. Prijeđeni je put

$$s_1 = \frac{a_1}{2}t_1^2 = 100\,\mathrm{m}.$$

Pri kočenju brzina se mijenja od $v = 10$ m/s do nule akceleracijom $a_2 = -1$ m/s^2 i to kočenje traje

$$t_3 = -\frac{v}{a_2} = 10\,\mathrm{s}.$$

Za vrijeme kočenja tramvaj prevali put 50 m.

Budući da ukupna vožnja traje 80 s, jednoliko gibanje traje 50 s i tramvaj pritom prijeđe 500 m. Ovisnost brzine o vremenu dana je, dakle izrazima:

$$v = a_1 t = 0{,}5\,t \qquad \text{za} \qquad 0 < t < 20\mathrm{s}$$

$$v = v_1 = \text{konst.} = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}} \qquad \text{za} \qquad 20\mathrm{s} < t < 70\mathrm{s}$$

$$v = v_1 + a_2(t - 70\mathrm{s}) = (80 - t)\,\mathrm{m\,s^{-1}} \qquad \text{za} \qquad 70\mathrm{s} < t < 80\mathrm{s}.$$

Ovisnost puta o vremenu dana je izrazima:

$$s = \frac{a_1}{2}t^2 \qquad \text{za} \qquad 0 < t < 20\text{s}$$

$$s = 100\,\text{m} + v_1(t - 20\text{s}) \qquad \text{za} \qquad 20\text{s} < t < 70\text{s}$$

$$s = 600\,\text{m} + v_1(t - 70\text{s}) + \frac{a_2}{2}(t - 70\text{s})^2 \qquad \text{za} \qquad 70\text{s} < t < 80\text{s}.$$

Grafikoni *a,t, v,t i s,t* prikazani su na slici 2.6.

2.11. Ovisnost akceleracije o vremenu, za gibanje nekog tijela predstavljena je dijagramom $a = f(t)$ na slici 2.7.a. Izračunajte srednju brzinu tijela za $t = 20$ s, uz uvjet da je početna brzina tijela bila 0. Nacrtajte $v(t)$ dijagram.

Rješenje

Za dva intervala t_1 i t_2 prema slici, akceleracija je po iznosu jednaka, ali ima suprotan predznak i u izrazu za srednju brzinu

$$\overline{v} = \frac{s}{t} = \frac{\sum s_i}{\sum t_i} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2}$$

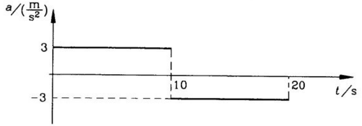
valja izraziti putove s_1 i s_2 jer su intervali određeni ($t_1 = t_2 = 10$ s).

Radi se o jednolikom ubrzanom gibanju, $s = v_0 t + \frac{a}{2}t^2$, a kako je za oba intervala akceleracija po iznosu jednaka $a = 3$ m/s^2, onda je:

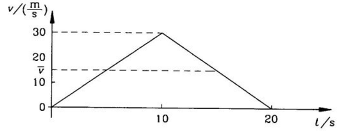
$$s_1 = s_2 = \frac{a}{2}t^2 = \frac{3}{2}10^2\ \text{m} = 150\ \text{m}.$$

Srednja je brzina prema tome $\overline{v} = \dfrac{150\,\text{m} + 150\,\text{m}}{10\,\text{s} + 10\,\text{s}} = 15$ m/s.

Uzevši u obzir da je $v = v_0 + a\,t$, možete nacrtati $v(t)$ dijagram za promatrano gibanje (sl. 2.7.b).

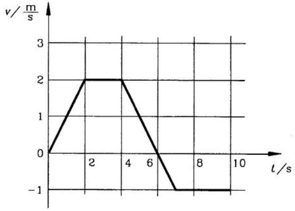


Slika 2.7.a



Slika 2.7.b

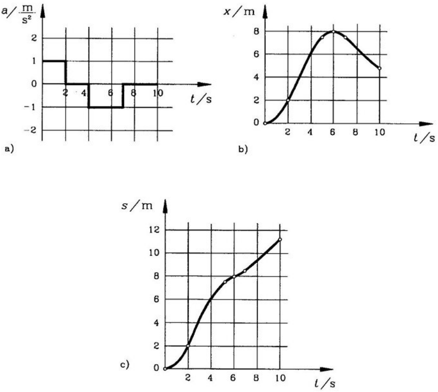
2.12. Na sl. 2.8. prikazan je grafikon brzine materijalne točke koja se giba po osi x. Nacrtajte grafikone ovisnosti o vremenu akceleracije a, koordinate x i puta s.



Rješenje

Iz zadanog je grafikona brzine očito da se u vremenskom intervalu od 0 do 2 s točka gibala jednoliko ubrzano, akceleracijom $a_1 = 1\ \mathrm{m/s^2}$, od 2 s do 4 s jednoliko ($a_2 = 0$), od 4 s do 7 s jednoliko usporeno ($a_3 = -1\ \mathrm{m/s^2}$) i od 7 s do 10 s jednoliko ($a_4 = 0$). Odatle proizlazi grafikon akceleracije prikazan na slici 2.9.a.

Slika 2.8.



Slika 2.9.

Pomak točke od 0 do 2 s jest $x = \frac{a_1}{2} t^2$ i, za $t = 2$ s, $x_2 = 2$ m. Zatim se točka giba jednoliko po zakonu $x = x_2 + v_1 t_1$, gdje je $v_1 = 2$ m/s i $t_1 = (t-2)$ s i za $t = 4$ s, $x_4 = 6$ m. Od 4 s do 7 s točka se giba jednoliko usporeno ($a_3 = -1\ \mathrm{m\,s^{-2}}$), pa je $x = x_4 + \left(v_1 t_2 + \frac{a_3}{2} t_2^2\right)$ gdje je $t_2 = (t-4)$ s. U $t = 5$ s, $x_5 = 7{,}5$ m, u $t = 6$ s, $x_6 = 8$ m, a u $t = 7$ s, $x_7 = 7{,}5$ m. Pomak se povećavao do $t = 6$ s, tada se smjer gibanja promijenio, točka se počela vraćati prema ishodištu, a pomak se počeo smanjivati. Put s točke, naravno i dalje raste i u $t = 7$ s iznosi $s_7 = 8{,}5$ m. Od 7 s do 10 s gibanje je jednoliko ($v_2 = -1$ m/s) i u $t = 10$ s, $x_{10} = 4{,}5$ m, dok je ukupni prijeđeni put $s_{10} = 11{,}5$ m.

Na slici 2.9.b i c prikazane su ovisnosti o vremenu pomaka x, odnosno puta s.

Isti se rezultat dobiva i grafički, računajući površinu ispod $v(t)$ krivulje na sl. 2.8. Pri računanju ukupnog pomaka, smatramo površinu pozitivnom ako je iznad apscise, a negativnom kad je ispod nje. Tako je površina ispod krivulje na sl. 2.8. jednaka 4,5, a to znači da je pomak $x = 4{,}5$ m.

Kad se određuje ukupan put, površina se uvijek uzima pozitivno. Na taj se način dobiva da je put

$$s = 11{,}5\ \mathrm{m}.$$

2.13. Brzina čestice koja se giba u pozitivnom smjeru osi x jest

$$v = A\sqrt{x},$$

gdje je $A = 4\ \mathrm{m^{1/2}\,s^{-1}}$. Ako je u trenutku $t = 0$ čestica u ishodištu, kolika je srednja brzina čestice na putu od 2 m?

Rješenje

Iz definicije brzine kao derivacije pomaka

$$v = \frac{dx}{dt} = A x^{1/2}$$

integriranjem se dobiva pomak:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x}} = A \int_0^t dt$$

$$2\sqrt{x} = At$$

$$x = \frac{A^2}{4} t^2.$$

Srednja brzina je kvocijent prijeđenog puta i za to potrebnog vremena. Za put od 2 m čestici je potrebno vrijeme od $\frac{\sqrt{2}}{2}$ s, pa je

$$\bar{v} = \frac{2\,m}{\frac{\sqrt{2}}{2}\,s} = 2\sqrt{2}\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

2.14. Tijelo slobodno pada u vakuumu s visine $h = 245$ m. Tu visinu valja podijeliti na pet dijelova tako da vrijeme padanja bude jednako u svakom dijelu.

Rješenje

Prevaljeni put pri slobodnom padu jest:

$$h_1 = \frac{1}{2} g t^2$$

$$h_1 + h_2 = \frac{1}{2} g (2t)^2$$

$$h = h_1 + \ldots + h_n = \frac{1}{2} g (n t)^2$$

$$t^2 = \frac{2h}{g n^2}$$

$$h_1 = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{h}{n^2}$$

$$h_2 = \frac{1}{2} g (2t)^2 - h_1 = \frac{3h}{n^2}.$$

Općenito k-ti dio puta (visina) označite sa h_k, gdje se cijeli broj k mijenja od 1 do n, odnosno u našem primjeru od 1 do 5

$$h_k = \frac{1}{2} g (k t)^2 - \frac{1}{2} g [(k-1) t]^2 = \frac{1}{2} g t^2 (2k-1) = \frac{h}{n^2} (2k-1).$$

Za $n = 5$:

$$h_1 = 9{,}8 \text{ m}$$

$$h_2 = 29{,}4 \text{ m}$$

$$h_3 = 49 \text{ m}$$

$$h_4 = 68{,}6 \text{ m}$$

$$h_5 = 88{,}2 \text{ m}.$$

2.15. Pretpostavimo da, iskočivši iz zrakoplova padobranac slobodno pada – bez trenja. Nakon 70 m slobodnog padanja otvara padobran i brzina padanja se počinje smanjivati deceleracijom od 2 m/s^2. Padobranac se prizemljuje brzinom 3 m/s. Izračunajte visinu na kojoj je iskočio.

Rješenje

Ukupnu visinu na kojoj je padobranac iskočio čine visina njegova slobodnog pada h_0 i visina h_a tijekom koje se brzina smanjuje akceleracijom $-a$

$$h = h_0 + h_a.$$

Visinom h_0 određena je brzina v_0 na svršetku tog dijela puta kao

$$v_0 = \sqrt{2 g h_0},$$

a koja je početna brzina za prevaljivanje puta h_a. Padanje s visine h_a opisuju jednadžbe:

$$v = v_0 - a t$$

$$h_a = v_0 t - \frac{a}{2} t^2,$$

gdje je v brzina prizemljenja i a deceleracija padobranca. Uvrštavanjem

$$t = \frac{v_0 - v}{a} \quad \text{i} \quad v_0 = \sqrt{2 g h_0}$$

u drugu jednadžbu i zamjenom zadanih podataka slijedi visina h

$$h = h_0 + v_0\left(\frac{v_0 - v}{a}\right) - \frac{1}{2a}(v_0 - v)^2 = h_0 + \sqrt{2gh_0}\left(\frac{\sqrt{2gh_0} - v}{a}\right) - \frac{1}{2a}\left(\sqrt{2gh_0} - v\right)^2$$

$$h = 70\,\mathrm{m} + 341\,\mathrm{m} = 411\,\mathrm{m}$$

2.16. Tijelo je ispušteno s visine h = 100 m. Izračunajte vrijeme padanja i brzinu tijela pri udaru o tlo, ako je akceleracija tijela

a) $a = g = 9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$,

b) $a = g - kv^2$, gdje je $k = 0{,}001\ \mathrm{m^{-1}}$,

c) $a = g - kv$, gdje je $k = 0{,}1\ \mathrm{s^{-1}}$.

Rješenje

a) U ovom primjeru zanemarujemo otpor zraka. To je slobodni pad, te je brzina

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 100\,\mathrm{m}} = 44{,}29\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Vrijeme padanja je

$$t = \frac{v}{g} = \frac{44{,}29\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 4{,}52\,\mathrm{s}.$$

b) U ovom primjeru uzet je u obzir otpor zraka, zbog kojeg akceleracija tijela ovisi o kvadratu brzine. Iz izraza za akceleraciju

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

dobivamo diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - kv^2, \tag{1}$$

što možemo pisati i kao

$$\frac{\mathrm{d}v}{g - kv^2} = \mathrm{d}t. \tag{2}$$

Integracijom od početnog trenutka $t = 0$ do nekog trenutka t uz pretpostavku da je $v_0 = 0$, dobivamo

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{g - kv^2} = \int_0^t \mathrm{d}t.$$

Uvedemo li zamjenu

$$x = v\sqrt{\frac{k}{g}},$$

dobivamo

$$\frac{1}{\sqrt{gk}} \int_0^{\sqrt{\frac{k}{g}}v} \frac{\mathrm{d}x}{1 - x^2} = t.$$

Integral na lijevoj strani nalazimo u tablici u *Dodatku 2.* na kraju knjige:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1 - x^2} = \mathrm{Arth}\,x = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x},$$

što daje

$$\frac{1}{2\sqrt{g\cdot k}}\ln\frac{1+\sqrt{\frac{k}{g}}v}{1-\sqrt{\frac{k}{g}}v}=t. \tag{3}$$

Odatle je ovisnost brzine o vremenu

$$v=\sqrt{\frac{g}{k}}\frac{1-e^{-2\sqrt{gk}t}}{1+e^{-2\sqrt{gk}t}}. \tag{4}$$

Ovisnost položaja o vremenu mogli bismo dobiti uvrštavanjem (4) u integral

$$s=\int_0^t v\,dt. \tag{5}$$

Mi ćemo doći do rezultata neizravnim putem, tako da u integral (5) uvrstimo izraz (2):

$$s=\int_0^t v\,dt=\int_0^v v\frac{dv}{g-kv^2}.$$

Zamjenom

$$x=1-\frac{k}{g}v^2$$

dobivamo položaj s izražen pomoću brzine v:

$$s=-\frac{1}{2k}\int_1^{1-\frac{k}{g}v^2}\frac{dx}{x}=-\frac{1}{2k}\ln\left(1-\frac{k}{g}v^2\right). \tag{6}$$

Uvrštavanjem izraza (4) u (6) dobivamo eksplicitnu ovisnost položaja o vremenu:

$$s=\sqrt{\frac{g}{k}}t+\frac{1}{k}\ln\frac{1+e^{-2\sqrt{gk}t}}{2}. \tag{7}$$

Izrazi (4) i (7) jasno pokazuju kakav je utjecaj otpora zraka na gibanje. Kad vrijeme $t\to\infty$, dobivamo granične izraze za brzinu i položaj tijela

$$\lim_{t\to\infty}v=\sqrt{\frac{g}{k}} \quad \text{i} \quad \lim_{t\to\infty}s=\sqrt{\frac{g}{k}}t-\frac{\ln 2}{k}.$$

Brzina se asimptotski približava konačnoj stalnoj brzini

$$v_k=\sqrt{\frac{g}{k}},$$

koju smo mogli dobiti i tako da akceleraciju (1) izjednačimo s nulom. Za bilo koji zadani put h, vrijeme t možemo naći uvrštavanjem $s=h$ u izrazu (7). Tu jednadžbu, međutim, nije jednostavno riješiti, pa ćemo najprije iz (4) naći brzinu,

$$v=\sqrt{\frac{g}{k}(1-e^{-2kh})}=\sqrt{\frac{9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}}{0{,}001\,\mathrm{m^{-1}}}(1-e^{-2\cdot 0{,}001\,\mathrm{m^{-1}}\cdot 100\,\mathrm{m}})}$$

$$v=42{,}17\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

a onda iz (3) odgovarajuće vrijeme:

$$t = \frac{1}{2\sqrt{9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 0{,}001\,\mathrm{m^{-1}}}} \ln \frac{1 + \sqrt{\dfrac{0{,}001\,\mathrm{m^{-1}}}{9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}}} \cdot 42{,}17\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{1 - \sqrt{\dfrac{0{,}001\,\mathrm{m^{-1}}}{9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}}} \cdot 42{,}17\,\mathrm{m\,s^{-1}}}$$

$$t = 4{,}59\,\mathrm{s}.$$

c) Iz $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - k\,v$ integriranjem dobivamo

$$\int_0^t \mathrm{d}t = \int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{g - kv}.$$

Zamjenom varijabli $u = g - k\,v$ možemo riješiti integral i dobiti

$$t = \frac{1}{k} \ln \frac{g}{g - k\,v}$$

ili

$$v = \frac{g}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt}).$$

Integriranjem brzine dobivamo put

$$s = \int_0^t v\,\mathrm{d}t = \int_0^t \frac{g}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt})\,\mathrm{d}t = \frac{g}{k}t - \frac{g}{k^2}(1 - \mathrm{e}^{-kt}).$$

U našem je primjeru

$$s = h = 100\,\mathrm{m},\ \frac{g}{k} = \frac{9{,}81}{0{,}1}\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 98{,}1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

te dobivamo jednadžbu za vrijeme

$$98{,}1\mathrm{s^{-1}} \cdot t - 1081 + 981 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1\mathrm{s^{-1}}\,t} = 0.$$

Tu jednadžbu možemo riješiti metodom pokušaja i pogreške, te dobivamo

$$t = 4{,}88\,\mathrm{s}.$$

Brzina pri udaru o tlo je

$$v = \frac{g}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt}) = 37{,}9\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

2.17. Tijelo je bačeno nadolje brzinom $v_0 = 5$ m/s. Koliko traje let ako u posljednjoj sekundi tijelo prijeđe polovicu ukupne visine s koje je bačeno?

Rješenje

Označimo ukupno vrijeme leta sa t, trajanje leta do posljednje sekunde sa t', a posljednju sekundu sa $t_p =$ $= 1$ s. Ukupni prevaljeni put je

$$s(t) = v_0(t' + t_p) + \frac{g}{2}(t' + t_p)^2,$$

a put prevaljen u vremenu t' je

$$s(t') = v_0 t' + \frac{g}{2}t'^2.$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$s(t) - s(t') = \frac{1}{2} s(t),$$

odnosno

$$s(t) = 2\,s(t').$$

Uvrštavanjem i sređivanjem dobivamo:

$$v_0 t_p + v_0 t' + \frac{g}{2}(t_p^2 + 2 t_p t' + t'^2) = 2 v_0 t' + g\, t'^2$$

$$g\, t'^2 + 2(v_0 - g\, t_p) t' - t_p (g\, t_p + 2 v_0) = 0$$

$$t'^2 - 0{,}981 t' - 2{,}02 = 0$$

$$(t')_1 = 1{,}99\,\mathrm{s}.$$

(Drugo negativno rješenje kvadratne jednadžbe nema fizikalni smisao.)
Ukupno vrijeme leta je $t = t' + t_p = 2{,}99$ s.

2.18. S vrha tornja, u istom trenutku, jedno je tijelo bačeno vertikalno uvis, a drugo nadolje istom brzinom $v_0 = 5$ m/s. Poslije koliko će vremena međusobna udaljenost tijela biti jednaka desetini visine tornja ako tijelo bačeno dolje udari o tlo 5 s nakon izbacivanja?

Rješenje
Visina tornja dobiva se iz izraza

$$h = v_0 t_1 + \frac{g}{2} t_1^2.$$

Nakon (nepoznatog) vremena t_2, vrijedi za tijelo bačeno uvis

$$h_1 = v_0 t_2 - \frac{g}{2} t_2^2,$$

odnosno za ono bačeno dolje

$$h_2 = v_0 t_2 + \frac{g}{2} t_2^2.$$

Zbrajanjem tih jednadžbi uz $h_1 + h_2 = \dfrac{h}{10}$ dobit će se

$$t_2 = \frac{h}{20\, v_0} = 1{,}47\,\mathrm{s}.$$

2.19. Na samome rubu tornja visine h nalazi se motritelj koji izbacuje kamen okomito uvis početnom brzinom 6 m/s. Dvije sekunde poslije trenutka izbacivanja, motritelj bilježi da je kamen udario o tlo. Potrebno je izračunati visinu tornja h.

Rješenje
Referentna razina neka bude visina tornja h (motriteljeva razina). Najveću visinu, s obzirom na toranj, kamen postiže u trenutku t_{maks} od trenutka izbacivanja

$$v = v_0 - g\, t; \qquad \text{uvjet} \qquad v = 0 \qquad \text{određuje} \qquad t_{maks.} = \frac{v_0}{g},$$

gdje je v_0 početna brzina izbacivanja.

Dostigavši najveću visinu kamen slobodno pada prema tlu, pa padajući pokraj motritelja (razina h) ima opet brzinu v_0, onu istu kojom je izbačen samo suprotno orijentiranu. Označi li se vrijeme od trenutka izbacivanja do trenutka udarca t_u, vrijeme pada niz visinu tornja t_h bit će

$$t_h = t_u - 2t_{maks.} = t_u - 2\frac{v_0}{g},$$

a visina h, kao visina slobodnog pada s početnim uvjetom v_0

$$h = v_0 t_h + \frac{g}{2}t_h^2 = \left(t_u - 2\frac{v_0}{g}\right)\cdot\left[v_0 + \frac{g}{2}\left(t_u - 2\frac{v_0}{g}\right)\right] = 7{,}62\,\text{m}.$$

2.20. Lopta je bačena vertikalno uvis brzinom 10 m/s s ruba krova zgrade visoke 40 m. Odredite:

a) vrijeme uspinjanja,

b) maksimalnu visinu koju dosegne lopta,

c) vrijeme potrebno da se lopta vrati do ruba zgrade,

d) položaj i brzinu lopte u trenutku $t_1 = 0{,}5$ s i $t_2 = 3$ s i

e) trenutak udarca lopte o tlo ispred zgrade.

Zanemarite otpor zraka. Računajte sa $g = 10\ \text{m/s}^2$.

Rješenje

a) Izabere li se koordinatni sustav tako da os y bude vertikalno prema gore (sl. 2.10), koordinata y označivat će pomak lopte pri vertikalnom hicu, pa će biti

$$y = v_0 t - \frac{g}{2}t^2, \qquad v = \frac{dy}{dt} = v_0 - gt.$$

Kada lopta dosegne najveću visinu H (točka T na sl. 2.10), brzina joj je nula, pa je vrijeme uspinjanja

$$t_H = \frac{v_0}{g} = 1\,\text{s}.$$

b) Maksimalna se visina hica dobiva tako ako se u izraz za pomak uvrsti $t = t_H$ i $y = H$

$$y = H = v_0 t_H - \frac{g}{2}t_H^2 = \frac{v_0^2}{2g} = 5\,\text{m}.$$

c) Vrijeme uspinjanja jednako je vremenu padanja, pa je vrijeme potrebno da lopta ode gore i vrati se natrag $t_u = 2t_H = 2$ s. Isti se rezultat može dobiti i iz jednadžbe hica, tako da se uvrsti $y = 0$

$$y = v_0 t - \frac{g}{2}t^2 = 0.$$

Prvo rješenje ove jednadžbe $t = 0$ odgovara početku hica, a drugo rješenje $t = 2v_0/g$ odgovara trenutku povratka lopte do krova zgrade.

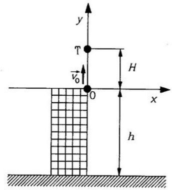
d) U $t_1 = 0{,}5$ s lopta se nalazi udaljena od ruba zgrade za

$$y = v_0 t_1 - \frac{g}{2}t_1^2 = 3{,}75\,\text{m},$$

dok joj je brzina

$$v = v_0 - g\,t_1 = 5\ \text{m/s}.$$

Pozitivni predznak brzine znači de je u $t_1 = 0{,}5$ s brzina lopte usmjerena uvis, tj. da je lopta na uzlaznom dijelu svoje putanje.



Slika 2.10.

Slično možemo izračunati da je u $t_2 = 3$ s

$$y(t_2 = 3\,\mathrm{s}) = -15\,\mathrm{m},$$

$$v(t_2 = 3\,\mathrm{s}) = -20\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Negativni predznak brzine znači da je brzina usmjerena nadolje, a prema negativnom predznaku pomaka lopta je, dosegnuvši maksimalnu visinu i vraćajući se natrag, došla 15 m ispod krova, tj. 25 m iznad tla.

e) Trenutak kada će lopta udariti o tlo ispred zgrade (tj. ukupno trajanje hica) može se odrediti iz jednadžbe $y = v_0\,t - g\,t^2/2$, uvrstivši $y = -h = -40$ m.

Rješenje je $t_3 = 4$ s.

Trajanje hica može se odrediti i tako da se zbroji vrijeme uspinjanja t_H i vrijeme potrebno za slobodni pad s visine $H + h$

$$t_3 = t_H + \sqrt{\frac{2(H+h)}{g}} = \frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2h}{g}} = 4\,\mathrm{s}.$$

2.21. Tijelo se giba pravcem prema zakonu $y = bt - ct^2$, gdje je $b = 10$ m/s i $c = 5$ m/s^2.

a) Izračunajte trenutnu brzinu i akceleraciju tijela kao funkciju vremena.

b) Odredite položaj, put, brzinu i akceleraciju tijela u trenucima 0 s, 0,5 s, 1 s, 2 s, 3 s, i 4 s.

c) Kada tijelo prolazi kroz ishodište?

d) Kolika je srednja brzina i srednja akceleracija u intervalu $0 < t < 1$ s?

e) Nacrtajte grafikone ovisnosti akceleracije, brzine, pomaka (koordinate y) i puta o vremenu u intervalu $0 < t < 3$ s.

f) Je li gibanje ubrzano ili usporeno?

Rješenje

a) Tijelo se giba po osi y. Zadan je pomak tijela kao funkcija vremena. Trenutno je brzina jednaka prvoj derivaciji koordinate položaja

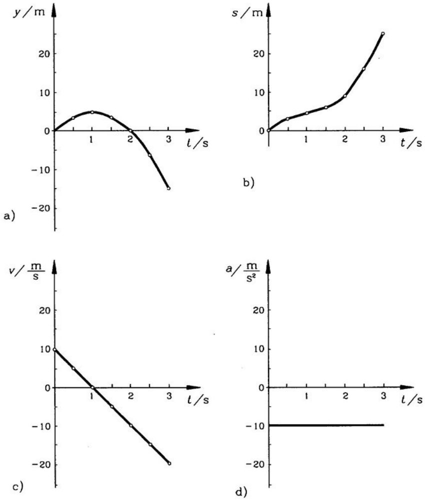
$$v = \frac{dy}{dt} = b - 2ct = 10 - 10t,$$

a trenutna je akceleracija jednaka prvoj derivaciji brzine po vremenu, odnosno drugoj derivaciji koordinate položaja po vremenu

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -2c = -10\,\mathrm{m/s^2}.$$

Predznak minus pokazuje da je smjer akceleracije stalno u smjeru negativne osi y.

b) Uvrštavajući vrijednosti za vrijeme t u izraze za pomak, brzinu i akceleraciju, dobivaju se vrijednosti prikazane u tablici. Budući da se tijelo ne giba stalno u istom smjeru, nego u $t = 1$ s mijenja smjer gibanja, pomak tijela se općenito razlikuje od puta. Put je prijeđena udaljenost po putanji od početne točke (ishodišta) i uvijek je pozitivan, a pomak je na početku pozitivan i raste da bi se u intervalu $1\,\mathrm{s} < t < 2$ s smanjio do nule i za $t > 2$ s bio negativan. Izračunane su vrijednosti:



Slika 2.11.

t/s	0	0,5	1	2	3	4
y/m	0	3,75	5	0	− 15	− 40
s/m	0	3,75	5	10	25	50
v/(m/s)	10	5	0	− 10	− 20	− 30
a/(m/s^2)	− 10	− 10	− 10	− 10	− 10	− 10

c) Kada tijelo prolazi kroz ishodište, pomak (koordinata y) jednak je nuli

$$y = b\,t - c\,t^2 = 0.$$

Rješenja su te jednadžbe $t = 0$ i $t = \dfrac{b}{c} = 2$ s.

d) Srednja je brzina

$$\bar{v} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = 5 \text{ m s}^{-1}$$

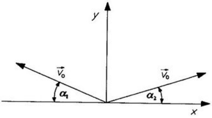
Srednja je akceleracija jednaka trenutnoj jer je to gibanje s konstantnom akceleracijom

$$a = \bar{a} = -10 \text{ m s}^{-2}.$$

e) Grafikoni $a(t)$, $v(t)$, $y(t)$ i $s(t)$ prikazani su na slici 2.11.

f) Promatrano je gibanje zapravo hitac uvis s početnom brzinom $v_0 = 10$ m/s, pa je u intervalu $0 < t < 1$ s gibanje jednoliko usporeno u smjeru osi $+y$, a za $t > 1$ s gibanje je jednoliko ubrzano u smjeru osi $-y$. (Usporedite ovaj zadatak sa zadatkom 2.20)

2.22. Dva su tijela bačena istodobno istom početnom brzinom $v_0 = 10$ m/s iz točke $x = y = 0$ pod različitim kutovima $\alpha_1 = 20°$ i $\alpha_2 = 30°$ prema horizontu (prema slici 2.12). Odredite njihovu relativnu brzinu. Kolika će biti udaljenost između njih nakon pola sekunde?



Slika 2.12.

Rješenje

Označite sa $\vec{r}_1$ vektor položaja prvog tijela, a sa $\vec{r}_2$ vektor položaja drugog tijela, s obzirom na ishodište. Vektor položaja prvog tijela u odnosu prema drugom tijelu je

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2.$$

Relativna brzina prvog tijela u odnosu prema drugom tijelu je

$$\vec{u} = \vec{v}_{12} = \frac{d\vec{r}_{12}}{dt} = \frac{d\vec{r}_1}{dt} - \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2.$$

Komponente brzine tih tijela jesu:

$$v_{1x} = v_0 \cos\alpha_1 \qquad v_{2x} = -v_0 \cos\alpha_2$$
$$v_{1y} = v_0 \sin\alpha_1 - g\,t \qquad v_{2y} = v_0 \sin\alpha_2 - g\,t.$$

Komponente relativne brzine jesu:

$$u_x = v_{1x} - v_{2x} = v_0(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)$$
$$u_y = v_{1y} - v_{2y} = v_0(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2).$$

Iznos relativne brzine je

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = v_0\sqrt{(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)^2 + (\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2)^2}$$

$$u = 2\,v_0 \cos\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$

$$u = 18 \text{m s}^{-1}.$$

Relativna brzina je stalna i ne ovisi o vremenu. Udaljenost među tijelima je iznos njihova relativnog vektora položaja

$$d = |\vec{r}_{12}| = u \cdot t = 9 \text{ m}.$$

2.23. Tijelo pada slobodno s visine $H = 10$ m (sl. 2.13). U trenutku kada je počelo padati, drugo je tijelo bačeno sa zemlje prema prvom tijelu. Na visini $h = 5$ m tijela su se sudarila. Horizontalna udaljenost od mjesta bacanja drugog tijela do mjesta sudara jest $d = 2$ m. Odredite početnu brzinu i kut pod kojim je bačeno drugo tijelo.

Rješenje

Položaji tijela u koordinatnom sustavu (prema slici 2.13):

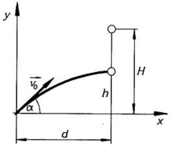
Prvo tijelo:

$$x_1 = d \quad y_1 = H - \frac{1}{2} g\, t^2.$$

Drugo tijelo:

$$x_2 = v_0\, t \cos\alpha \quad y_2 = v_0\, t \sin\alpha - \frac{1}{2} g\, t^2.$$

U času sudara:



Slika 2.13.

$$x_1 = x_2 = d, \qquad y_1 = y_2 = \frac{H}{2}$$

$$d = v_0 t \cos\alpha$$

$$\frac{H}{2} = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\frac{H}{2} = H - \frac{1}{2} g t^2, \qquad t = \sqrt{\frac{H}{g}}.$$

Iz $v_0\, t \cos\alpha = d$ i $v_0\, t \sin\alpha = \frac{H}{2} + \frac{1}{2} g t^2 = H$ dobivamo

$$v_0 = \sqrt{\frac{H^2 + d^2}{t^2}} = \sqrt{\frac{H^2 + d^2}{H} g} = 10{,}1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

$$\cos\alpha = \frac{d}{v_0 t} = \frac{d}{\sqrt{H^2 + d^2}}$$

$$\alpha = 78{,}7°.$$

2.24. Tijelo se nalazi 50 m iznad tla. Pod kojim se kutom prema horizontali mora izbaciti da bi postiglo maksimalni domet (sl. 2.14). Koliko on iznosi? Početna brzina tijela je 10 m/s.

Rješenje

Iz jednadžbe kosog hica

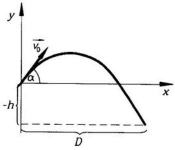
$$y = x \tan\alpha - g \frac{x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha},$$

Zamjenom $y = -h$, $x = D$, $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$, dobivamo

$$\frac{g D^2}{2 v_0^2} \tan^2\alpha - D \tan\alpha + \frac{g D^2}{2 v_0^2} - h = 0.$$

Odatle je

$$(\tan\alpha)_{1/2} = \frac{v_0^2}{g D^2} \left[D \pm \sqrt{D^2 - \frac{2 g D^2}{v_0^2} \left(\frac{g D^2}{2 v_0^2} - h \right)} \right].$$



Slika 2.14.

Da bi $\tan\alpha$ bio realan, treba biti ispunjen uvjet

$$D^2 - \frac{2gD^2}{v_0^2}\left(\frac{gD^2}{2v_0^2} - h\right) \geq 0,$$

odnosno

$$D^2 \leq \frac{v_0^2}{g^2}(v_0^2 + 2gh).$$

Maksimalni je domet

$$D = \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gh} = 33{,}5\,\text{m},$$

i to za kut

$$\tan\alpha = \frac{v_0^2}{gD} = 0{,}304, \qquad \alpha = 16{,}9°.$$

2.25. Tijelo je izbačeno početnom brzinom $v_0 = 10$ m/s pod kutom $\alpha = 40°$ s balkona na visini h i udara u tlo nakon 1,8 s. Izračunajte visinu balkona h i maksimalnu visinu staze tijela prema tlu.

Rješenje

Staza tijela određena je jednadžbama kosog hica izbačenog s visine h s obzirom na tlo. Odaberemo li koordinatni sustav s ishodištem u točki izbačaja, os x vodoravno, a os y vertikalno, iz jednadžbe kosog hica

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha},$$

uvrštavajući $v_0 = 10$ m/s, $\alpha = 40°$, $x = v_0 t\cos\alpha = 13{,}788$ m, dobivamo $y = -4{,}32$ m, dakle visinu balkona $h = -y = 4{,}32$ m.

Maksimalna visina staze tijela prema tlu je

$$Y_{\text{maks.}} = h + H = h + \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g} = 4{,}32\,\text{m} + 2{,}1\,\text{m}$$

$$Y_{\text{maks.}} = 6{,}42\,\text{m}.$$

2.26. Izračunajte doskok skijaša skakača koji polijeće brzinom 20 m/s pod kutom 15° prema horizontalnoj ravnini, uz pretpostavku da se otpor zraka zanemaruje i da se padina na koju skijaš doskače može aproksimirati kosinom koja s horizontalnom ravninom zatvara kut 45°. (Doskok je udaljenost od točke polijetanja do točke u kojoj skijaš dodirne padinu.)

Rješenje

I. način

Dvodimenzionalni pravokutni koordinatni sustav postavlja se tako da ishodište bude u točki polijetanja, a pozitivni se smjer osi apscise podudara s projekcijom početne brzine skijaša na horizontalnu ravninu (sl. 2.15).

Jednadžba putanje skakača u parametarskom obliku glasi (kosi hitac):

$$x = v_0 t \cos\alpha$$

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{g}{2} t^2. \tag{1}$$

Eliminiranjem parametra t dobiva se jednadžba putanje u eksplicitnom obliku

$$y = x \tan\alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} x^2. \tag{2}$$

Jednadžba je ravnine na koju pada skakač

$$y = -x \tan\beta. \tag{3}$$

Točku doskoka valja naći rješavanjem sustava (2) i (3)

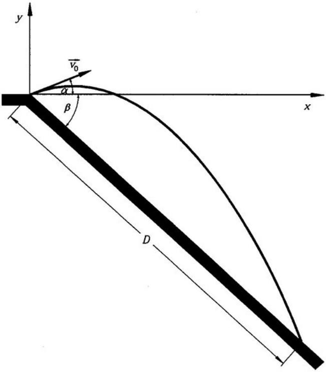
$$x = \frac{(\tan\alpha + \tan\beta)\, 2 v_0^2 \cos^2\alpha}{g}. \tag{4}$$

Budući da je

$$D = \frac{x}{\cos\beta}, \tag{5}$$

uvrštavanjem (4) u (5) dobiva se

$$D = \frac{(\tan\alpha + \tan\beta)\, 2 v_0^2 \cos^2\alpha}{g \cos\beta}, \tag{6}$$



Slika 2.15.

Stavljanjem zadanih veličina u izraz (6) dobiva se

$$D = \frac{(\tan 15^\circ + \tan 45^\circ) \cdot 2 \cdot 20^2 \cdot \cos^2 15}{9{,}81 \cdot \cos 45^\circ} \text{ m} = 136{,}4 \text{ m}.$$

II. n a č i n

Pomak skijaša dan je jednadžbom

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}}{2} t^2$$

ili pisano pomoću komponenata:

$$x = v_0 t \cos\alpha \qquad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{g}{2} t^2.$$

Doskok je jednak iznosu vektora pomaka u trenutku kad vektor pomaka zatvara kut $\beta = 45^\circ$ s horizontalnom ravninom. Tada je $\tan\beta = \frac{-y}{x} = 1$, odnosno $x = -y$ ili

$$v_0 t \cos\alpha = -v_0 t \sin\alpha + \frac{g}{2} t^2,$$

$$t = \frac{2v_0}{g} (\cos\alpha + \sin\alpha) = 4{,}994 \text{ s},$$

$$x = v_0 t \cos\alpha = 96{,}48 \text{ m}, \; y = v_0 t \sin\alpha - \frac{g}{2} t^2 = -96{,}48 \text{ m}.$$

Doskok skijaša je

$$D = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{96{,}48^2 + 96{,}48^2} \text{ m} = 136{,}4 \text{ m}.$$

2.27. Projektil je lansiran sa Zemljine površine pod kutom $\alpha = 60^\circ$ i prolazi kroz točku P na visini 20 m s vektorom brzine koji tvori kut $\theta = 30^\circ$ s horizontalom (sl. 2.16). Nađite početnu brzinu, doseg projektila i udaljenost točke lansiranja od okomite projekcije točke P na Zemljinu površinu.

Rješenje

Brzina projektila $\vec{v}$ u točki P ima komponente

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha \quad \text{ili} \quad v \cos\theta = v_0 \cos\alpha$$

$$v_y = v \sin\theta = v_{0y} - g\,t = v_0 \sin\alpha - g\,t.$$

Koordinate točke P (x, h) jesu:

$$x = v_{0x}\, t$$

$$y = h = v_{0y}\, t - \frac{g}{2} t^2.$$

Izlučite li v_y i uvrstite u y, dobivate

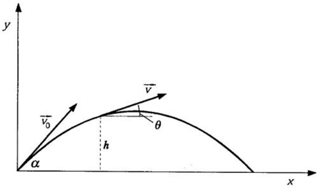
$$y = h = \frac{v_{0y}^2 - v_y^2}{2g}$$

$$v_{0y}^2 - v_y^2 = 2 g h.$$

To je poznata veza među brzinama pri gibanju stalnom akceleracijom, a takvo gibanje je i kosi hitac. Doda li se lijevoj strani te jednadžbe $0 = v_{0x}^2 - v_x^2$ dobije se veza između v_0 i v

$$v_0^2 = v^2 + 2 g h.$$

Iz $v \cos\theta = v_0 \cos\alpha$ dobivate $v = v_0 \frac{\cos\alpha}{\cos\theta}$, pa je



Slika 2.16.

$$v_0^2 = v_0^2 \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\theta} + 2gh,$$

odnosno

$$v_0 = \sqrt{2gh\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta - \cos^2\alpha}} = 24{,}26\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Doseg projektila

$$X = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{2h\sin 2\alpha\cos^2\theta}{\cos^2\theta - \cos^2\alpha} = 30\sqrt{3}\ \mathrm{m} = 52\ \mathrm{m}.$$

Iz jednadžbe kosog hica

$$y = x\tan\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2,$$

uvrštavajući $y = h = 20$ m i $v_0 = 24{,}26$ m/s, dobivate udaljenost točke P od točke lansiranja

$$x_1 = 17{,}3\ \mathrm{m}, \quad x_2 = 34{,}6\ \mathrm{m}.$$

2.28. Automobil se kreće zavojem polumjera zakrivljenosti 500 m ubrzavajući se u tangencijalnom smjeru akceleracijom 0,5 m/s^2. Izračunajte centripetalnu i ukupnu akceleraciju automobila u trenutku kada mu je brzina 72 km/h.
Koliko je vremena potrebno da automobil ubrza od 54 km/h do 72 km/h?

Rješenje

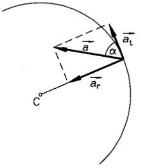
Centripetalna je akceleracija automobila pri tom kružnom gibanju

$$a_r = \frac{v^2}{r} = 0{,}8\ \mathrm{m/s^2}$$

i usmjerena je prema centru zakrivljenosti.

Ukupna je akceleracija vektorski zbroj tangencijalne i radijalne akceleracije. Njezin je iznos

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = 0{,}94\ \mathrm{m/s^2}.$$



Slika 2.17.

Smjer ukupne akceleracije može se odrediti npr. kutom α (sl. 2.17) koji ona zatvara sa smjerom tangente:

$$\tan\alpha = \frac{a_r}{a_t} = 1{,}6 \Rightarrow \alpha = 58°.$$

Vrijeme potrebno za ubrzanje jest

$$t = \frac{v_2 - v_1}{a_t} = 10 \text{ s}.$$

2.29. Nakon isključenja motora, ventilator, čiji je broj okretaja iznosio 1 800 u minuti, počinje se jednoliko usporavati. Ventilator se zaustavi nakon 20 s. Izračunajte kutnu akceleraciju α. Kolika je kutna brzina ventilatora 10 s nakon početka usporene vrtnje? Koliki je ukupni broj okretaja ventilatora od trenutka isključenja motora do zaustavljanja?

Rješenje

U trenutku isključenja motora kutna brzina ventilatora iznosila je

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 60\pi \text{ s}^{-1}.$$

Nakon 20 s (t = 20 s) ventilator se zaustavio jednoliko usporenim gibanjem. Kutnu akceleraciju (tj. deceleraciju) α dobivamo iz formule $\omega = \omega_0 + \alpha t$.. Uvrštavajući $\omega_0 = 60\pi \text{ s}^{-1}$, $\omega = 0$ i t = 20 s dobivamo

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = -3\pi \text{ s}^{-2} = -9{,}42 \text{ s}^{-2}.$$

Negativni predznak akceleracije znači jednoliko usporenu vrtnju.
Kutna brzina ventilatora 10 s nakon početka usporene vrtnje je

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = (60\pi - 3\pi \cdot 10) \text{ s}^{-1} = 30\pi \text{ s}^{-1}.$$

Vektor položaja bilo koje materijalne točke ventilatora opisuje kut φ dan izrazom

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2,$$

koji nakon 20 s iznosi

$$\varphi = (60\pi \cdot 20 - \frac{1}{2} \cdot 3\pi \cdot 400) \text{ rad} = 600\pi \text{ rad} = 1\ 884 \text{ rad}.$$

Budući da je jedan okretaj jednak 2π rad, ukupni je broj okretaja

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = 300.$$

2.30. Kotač polumjera 10 cm rotira tako da mu se kutni pomak mijenja prema zakonu $\varphi = a + b\,t + c\,t^2$, gdje je a = 1,57 rad, b = 3,14 rad/s i c = 0,78 rad/s^2. Potrebno je izračunati:

a) kutni pomak,

b) kutnu brzinu i

c) kutnu akceleraciju u t = 1 s

d) Kolika je tangencijalna akceleracija točke na rubu kotača?

Rješenje

a) U t = 1 s kutni pomak iznosi

$$\varphi = a + b\,t + c\,t^2 = 5{,}49 \text{ rad}.$$

b) Kutna je brzina vremenska derivacija kutnog pomaka

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = b + 2\,c\,t = 4{,}7 \text{ rad s}^{-1}.$$

c) Kutna je akceleracija druga vremenska derivacija kutnog pomaka

$$\alpha = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 2\,c = 1{,}56 \text{ rad s}^{-2}.$$

d) Tangencijalna je akceleracija

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \alpha\,r = 2\,c\,r = 0{,}156 \text{ m s}^{-2}.$$

2.31. Izračunajte kutnu i obodnu brzinu te centripetalnu akceleraciju za gibanje

a) Zemlje oko Sunca

b) Mjeseca oko Zemlje.

c) Kolika je kutna brzina rotacije Zemlje oko svoje osi?

d) Koliku obodnu brzinu ima pritom točka Zemljine površine na ekvatoru, odnosno na zemljopisnoj širini Zagreba ($\varphi = 45{,}82°$)

Rješenje

Pretpostavlja se da se Zemlja oko Sunca, odnosno Mjesec oko Zemlje gibaju jednoliko po kružnici. Srednja udaljenost središta Zemlje i Sunca jest $1{,}49 \cdot 10^{11}$ m, a Zemlje i Mjeseca $3{,}84 \cdot 10^{8}$ m. Ophodno vrijeme Zemlje oko Sunca jest 365,25 dana, a Mjeseca oko Zemlje 27,32 dana. Pomoću tih se podataka mogu izračunati kutna i obodna brzina, a i centripetalna akceleracija.

a) Kutna se brzina računa iz poznatoga ophodnog vremena

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ rad s}^{-1}.$$

Iz $v = \omega\,r$ dobiva se obodna brzina

$$v = 30 \text{ km s}^{-1}.$$

Centripetalna je akceleracija

$$a_r = r\,\omega^2 = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-2}.$$

b) Slično se dobiva za gibanje Mjeseca oko Zemlje:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2{,}66 \cdot 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}$$

$$v = \omega\,r = \frac{2\,\pi\,r}{T} = 1\,022 \text{ m s}^{-1} \approx 1 \text{ km s}^{-1}$$

$$a_r = r\,\omega^2 = \frac{4\,\pi^2\,r}{T^2} = 2{,}7 \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-2}.$$

Uočite da je centripetalna akceleracija Mjeseca 3 600 puta manja od akceleracije sile teže g.

c) Kutna brzina rotacije Zemlje oko svoje osi jest

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 7{,}27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}.$$

d) Obodna brzina točke Zemljine površine na ekvatoru jest

$$v = \omega\,R_Z = 0{,}47 \text{ km s}^{-1}$$

a na zemljopisnoj širini $\varphi = 45{,}82°$

$$v = \omega\,R_Z \cos\varphi = 0{,}33 \text{ km s}^{-1}.$$

2.32. Na kraju štapa dugog 0,3 m koji može rotirati oko drugog kraja u vertikalnoj ravnini zalijepljena je mala kuglica. Štap s kuglicom leži u horizontalnoj ravnini xy i počinje se kružno gibati u smjeru kazaljke na satu s kutnim ubrzanjem od $\frac{14\pi}{3}$ rad/s^2. Potrebno je odrediti udaljenost od središta rotacije štapa do točke u kojoj kuglica pada na ravninu xy, ako se kuglica otkinula 1,5 s nakon početka kružnoga gibanja.

Rješenje

Štap će opisati kut

$$\varphi = \frac{\alpha t^2}{2}, \tag{1}$$

što znači da će za 1,5 s opisati kut od $21\frac{\pi}{4}$ rad. Kuglica će se otkinuti tangencijalno pod kutom od $\frac{\pi}{4}$ rad u odnosu prema horizontalnoj ravnini. Brzina kuglice dobiva se relacijom

$$v = r\,\omega = r\,\alpha\,t. \tag{2}$$

Uvrštavanjem zadanih veličina dobiva se $v = 6{,}597$ m/s. Točka u kojoj će se kuglica otkinuti imat će koordinate $z = 0{,}3 \cdot \sin\frac{\pi}{4} = 0{,}212$ m, $x = -0{,}3\cos\frac{\pi}{4} = -0{,}212$ m. Jednadžba putanje kuglice u slučaju kada je ishodište koordinatnog sustava u točki izbacivanja glasi

$$z_1 = x_1 \tan\frac{\pi}{4} - \frac{g x_1^2}{2 v^2 \cos^2\frac{\pi}{4}}. \tag{3}$$

Da bi se našla točka u kojoj kuglica pada na ravninu xy, stavlja se $z_1 = -z$, pa se uvrštavanjem u relaciju (3) dobiva kvadratna jednadžba

$$\frac{g x_1^2}{v^2} - x_1 - z = 0. \tag{4}$$

Uvrštavanjem zadanih veličina u (4) dobiva se

$$x_1^2 - 4{,}44\,x_1 - 0{,}94 = 0. \tag{5}$$

Rješavanjem (5) dobiva se $x_1 = 4{,}64$ m. Udaljenost točke pada od središta rotacije štapa d jednaka je

$$d = x_1 - |\,x\,| = 4{,}43 \text{ m}.$$

Zadaci

2.1. Iz mjesta A na riječnoj obali čovjek želi čamcem stići u mjesto B na suprotnoj obali udaljeno za $d = \sqrt{5}$ km od točke A. Širina rijeke $a = 1$ km, brzina čamca u odnosu prema vodi $v_1 = 5$ km/h, a brzina rijeke $v_2 = 2$ km/h. Može li čovjek udaljenost d prijeći za $t = 30$ minuta gibajući se uzvodno?

Rezultat: $t = 43$ min

2.2. Kojom brzinom i u kojem smjeru α u odnosu prema podnevniku (meridijanu) mora letjeti zrakoplov da bi za $t = 2$ h preletio $d = 300$ km na sjever ako za vrijeme leta puše vjetar od sjevera prema zapadu pod kutom $\theta = 30°$ prema podnevniku brzinom $v_1 = 27$ km/h?

Rezultat: $v = 48{,}4$ m s^{-1}, $\alpha = 4{,}45°$

2.3. Brzina plivača u rijeci je v, a brzina rijeke je u. Ako je započeo preplivavanje s jedne obale brzinom v pod kutom α s obzirom na okomicu između dviju obala, koliki je kut β koji cijela njegova staza do druge obale zatvara prema okomici? Izračunajte kut β ako je v = 1 m/s, u = 1,5 m/s, α = 15°.

Rezultat: β = 61,22°

2.4. Vozeći se uzvodno, kormilar u brzom čamcu pri prolazu ispod mosta izbacuje u rijeku plovak. Nakon 30 min vožnje okreće gliser (trenutačno) i ploveći nizvodno stiže plovak 2 000 m ispod mosta. Odredite brzinu rijeke ako motor glisera ima samo jednu brzinu.

Rezultat: v_r = 0,56 ms^{-1}

2.5. Gibajući se stalnom brzinom v_0 = 40 km/h vozač automobila počinje kočiti i, nakon 4,6 s kočenja, prijeđe upravo dvostruki put od onog koji je prešao u prvih 1,5 s kočenja. Kolika je akceleracija kočenja?

Rezultat: a = – 2,13 m s^{-2}

2.6. Automobil krene iz mirovanja jednoliko ubrzano akceleracijom a_1=1,5 m/s^2, postigne brzinu 72 km/h, giba se jednoliko tom brzinom i zatim uspori stalnom akceleracijom od 3 m/s^2 do brzine 36 km/h. Koliki je prijeđeni put ako je vožnja do tog trenutka trajala 20 s.

Rezultat: s = 250 m

2.7. Materijalna se točka giba prema zakonu:

$$x = 2a \operatorname{ch}(kt)$$
$$y = 2a \operatorname{sh}(kt).$$

Odredite iznos brzine i ubrzanja kao funkciju apsolutne vrijednosti vektora položaja materijalne točke.

Rezultat: $|\vec{v}| = kr$, $|\vec{a}| = k^2r$

2.8. Tijelo se nalazi na vrhu elipsoida velike poluosi a i male poluosi b. Koliki mora biti kvadrat početne brzine kojim je izbačeno tijelo u vodoravnom smjeru da ono ne dodirne elipsoid?

Rezultat: $v_0^2 > \frac{g\,a^2}{b}$

2.9. Sa zgrade visoke 15 m bačeno je vertikalno prema tlu tijelo početnom brzinom 10 m/s. Koliko je vrijeme padanja? Kolika je brzina tijela pri udaru o tlo? Kako dugo bi tijelo slobodno padalo? Otpor zraka valja zanemariti.

Rezultat: t = 1 s; v = 19,8 m s^{-1}; t' = 1,7 s

2.10. U podnožju zgrade tijelo je bačeno vertikalno uvis početnom brzinom v_0 = 10 m/s. U istom trenutku s vrha zgrade visoke h = 21 m bačeno je drugo tijelo prema dolje početnom brzinom $v_0/2$. Na kojoj će se visini tijela susresti? Kolika je minimalna brzina v_0 potrebna da bi se tijela susrela?

Rezultat: h = 4,39 m; v_0 > 8,29 m/s

2.11. Projektil je ispaljen vertikalno uvis brzinom $v_0 = 100$ m/s. Ako je akceleracija tijela $\pm(9{,}8\ \mathrm{m/s^2} - kv^2)$, gdje je $k = 0{,}001\ \mathrm{m^{-1}}$, kojom će se brzinom i nakon koliko vremena projektil vratiti na tlo?

Rezultat: $v_1 = 70{,}3$ m/s, $t = 16{,}9$ s

2.12. Na visini 200 m padobranac otvori padobran i nakon 38 s prizemlji brzinom 4,8 m/s. Pod pretpostavkom da je akceleracija padobranca $g - kv$, izračunajte konstantu proporcionalnosti i brzinu padobranca pri otvaranju padobrana.

Rezultat: $k = 2{,}04\ \mathrm{s^{-1}}$; $v_0 = 41\ \mathrm{m\ s^{-1}}$

2.13. Tijelo je izbačeno početnom brzinom $v_0 = 10$ m/s pod kutom $\alpha = 65°$ s balkona visokog 16 m. Koliko daleko od podnožja zgrade će udariti o tlo. Kolika je maksimalna visina hica s obzirom na tlo?

Rezultat: $X = 12{,}48$ m; $H = 20{,}19$ m

2.14. Projektil je lansiran s površine Zemlje na udaljenosti 100 m od zgrade. Prozor zgrade nalazi se 50 m od tla. Pod kojim se kutom i kojom se početnom brzinom mora ispaliti projektil ako se želi da prilikom prolaza kroz prozor bude usporedan s površinom zemlje.

Rezultat: $\alpha = 45°$; $v_0 = 44{,}3$ m/s

2.15. Raketa je lansirana pod kutom 53° u odnosu prema vodoravnoj ravnini. Početna brzina iznosi 100 m/s, ubrzanje uzduž pravca lansiranja 30 m/s^2. Tri sekunde nakon lansiranja kvare se motori i raketa se počinje gibati kao slobodno tijelo. Koliki je domet rakete?

Rezultat: $X = 4\,044$ m

2.16. Kojom se brzinom kreće automobil koji je u prvoj brzini sa 3 000 okr./min? Prijenos u mjenjaču iznosi 1:3,583, a omjer prijenosa u diferencijalu jest 13:53. Opseg kotača iznosi 1,7 m.

Rezultat: $v = 21\ \mathrm{km\ h^{-1}}$

2.17. Sitna kuglica vrti se kružnicom polumjera r stalnim tangencijanim ubrzanjem a_t. Potrebno je izraziti funkciju $a_r = f(t)$. U kojem će trenu motreći od početka gibanja, radijalna akceleracija biti dvostruko veća od tangencijalne ako je $r = 30$ cm, $a_t = 0{,}06$ m/s^2?

Rezultat: $a_r = \dfrac{a_t^2}{r}t^2$; $t = 3{,}16$ s

2.18. Materijalna se točka giba u ravnini prema zakonu $x = a \sin bt$ i $y = a\,(1 - \cos bt)$, gdje su a i b pozitivne konstante. Kolika je udaljenost koju prijeđe tijelo za t_0 vremena? Koliki je kut između akceleracije i brzine u tom trenutku?

Rezultat: $l = abt_0$; $\vartheta_a - \vartheta_v = \dfrac{\pi}{2}$

3. Dinamika čestice

Uvod

Količina gibanja tijela mase m i brzine $\vec{v}$ jest

$$\vec{p} = m\,\vec{v}. \tag{1}$$

Jedinica za količinu gibanja je kilogram-metar u sekundi (znak: kg m/s).
Brzina promjene količine gibanja proporcionalna je sili i zbiva se u smjeru te sile (drugi Newtonov zakon)

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}(m\,\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}. \tag{2}$$

Kada je masa konstantna, jednadžba (2) prelazi u

$$\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\,\vec{a}, \tag{3}$$

gdje je $\vec{F}$ rezultantna sila koja djeluje na tijelo mase m i daje mu akceleraciju $\vec{a}$. Za silu je jedinica njutn (newton); (N = kg m/s^2).
Ako tijelo A djeluje na drugo tijelo B silom $\vec{F}_{\mathrm{AB}}$, tada i tijelo B djeluje na tijelo A jednako velikom silom po iznosu, ali suprotnog smjera $\vec{F}_{\mathrm{BA}}$ (treći Newtonov zakon)

$$\vec{F}_{\mathrm{AB}} = -\,\vec{F}_{\mathrm{BA}}. \tag{4}$$

Težina je tijela sila kojom tijelo djeluje na vodoravnu podlogu ili na objesište (u slučaju da je obješeno) i iznosi

$$\vec{G} = m\,\vec{g}, \tag{5}$$

gdje je $\vec{g}$ akceleracija sile teže.
Granična je sila statičkog trenja

$$F_{\mathrm{tr\,s}} \le \mu_{\mathrm{s}}\,F_{\mathrm{N}}, \tag{6}$$

gdje je μ_{s} statički faktor trenja, a F_{N} normalna komponenta sile kojom tijelo djeluje na podlogu. Sila trenja klizanja jest

$$F_{\mathrm{tr}} = \mu_{\mathrm{k}}\,F_{\mathrm{N}}, \tag{7}$$

gdje je μ_{k} faktor trenja klizanja.

Impuls sile je integral sile po vremenu

$$\vec{I} = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i} \vec{F}_i \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t. \tag{8}$$

Jedinica za impuls sile je njutn sekunda (znak: N s). Impuls sile jednak je promjeni količine gibanja tijela na koje ta sila djeluje

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1), \tag{9}$$

gdje je $\vec{p}_1$ količina gibanja tijela u trenutku t_1, a $\vec{p}_2$ u trenutku t_2.

Sustav tijela na koje ne djeluju nikakve vanjske sile (ili je zbroj svih vanjskih sila jednak nuli) zove se zatvoreni (izolirani) sustav. U zatvorenom se sustavu ukupna količina gibanja ne mijenja (zakon održanja količine gibanja):

$$\vec{p}_u = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \text{konst.} \tag{10}$$

Za sustav od dva tijela taj zakon glasi

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'.$$

Radijus-vektor središta mase sustava čestica definiran je izrazom

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}. \tag{11}$$

Centripetalna (radijalna) sila koja djeluje na tijelo, koje se giba krivocrtno, računa se izrazom

$$\vec{F}_{cp} = -\frac{m v^2}{r}\vec{r}_0 = -m\omega^2 \vec{r}, \tag{12}$$

gdje je m masa, v brzina tijela, a r polumjer zakrivljenosti putanje. U slučaju jednolikog kruženja, centripetalna sila može se pisati i u obliku

$$F_{cp} = m\omega^2 r = \frac{4\pi m r}{T^2} = 4\pi^2 f^2 m r, \tag{13}$$

gdje je ω kutna brzina, T period (ophodno vrijeme), a f frekvencija kruženja.

Primjeri

3.1. Tijelo mase m = 5 kg vuče se uzicom po podlozi stalnom brzinom. Ako je faktor trenja klizanja μ_k = 0,3, za koji je kut napetost niti najmanja? Kolika je tada napetost niti?

Rješenje
Budući da je brzina stalna (a = 0), jednadžba gibanja jest

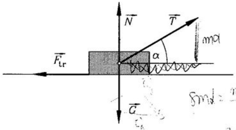
$$\vec{N} + \vec{G} + \vec{T} + \vec{F}_{tr} = 0.$$

Uz

$$F_{tr} = \mu_k \,(m\,g - T \sin\alpha)$$

dobiva se

$$T = \frac{\mu_k\, m\, g}{\mu_k \sin\alpha + \cos\alpha} = T(\alpha).$$



Slika 3.1.

Iz uvjeta za ekstrem funkcije $T(\alpha)$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\alpha} = 0$$

dobiva se

$$\tan\alpha_0 = \mu_k\,,$$

odnosno

$$\alpha_0 = \text{arc}\tan\mu_k = 16{,}7°.$$

Također je

$$T(\alpha_0) = \frac{\mu_k\, m\, g}{\sqrt{1+\mu_k^2}} = 14{,}1\,\text{N}.$$

3.2. Na stolu leži daska mase m_1 = 2 kg, a na dasci uteg mase m_2 = 3 kg. Koja se sila mora upotrijebiti da bi se izvukla daska ispod utega, ako je zadan faktor trenja između daske i utega μ_1 = 0,3 i faktor trenja između daske i stola μ_2 = 0,4?

Rješenje
Jednadžba gibanja za dasku glasi

$$F - \mu_2\,(m_1 + m_2)\,g - F_{tr} = m_1\,a, \tag{1}$$

gdje je F – sila kojom se djeluje na dasku, F_{tr} – sila trenja između daske i utega, $\mu_2\,(m_1 + m_2)\,g$ – sila trenja između stola i daske.
Ako je F_{tr} veća od $m_2\,a$, uteg ostaje na dasci, a ako je

$$F_{tr} \le m_2\,a, \tag{2}$$

daska se izvlači ispod utega.
Budući da vrijedi

$$F_{tr} = m_2\,\mu_1\,g, \tag{3}$$

uvrštavanjem (3) u (2) dobiva se

$$a \ge \mu_1\,g. \tag{4}$$

Iz izraza (1), (3) i (4) dobiva se

$$F \ge (\mu_1 + \mu_2)\,(m_1 + m_2)\,g. \tag{5}$$

Uvrštavanjem zadanih veličina u (5) dobiva se

$$F \ge (0{,}3 + 0{,}4)\,(2+3)\cdot 9{,}81\ \text{N} = 34{,}3\ \text{N}.$$

Dakle,

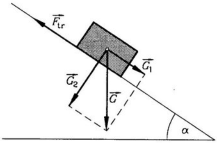
$$F \ge 34{,}3\ \text{N}.$$

3.3. Tijelo mase 100 kg klizi niz kosinu koja zatvara kut od 30° s horizontalom.

a) Izračunajte akceleraciju tijela ako je trenje zanemarivo.

b) Kolika je sila trenja i akceleracija tijela, ako je koeficijent trenja klizanja 0,3?

c) Koliki bi morao biti granični nagib kosine da bi tijelo na njoj mirovalo ako je statički koeficijent trenja 0,5?



Slika 3.2.

Rješenje

a) Sila teža mg rastavlja se na dvije komponente, na jednu usporednu s kosinom i na drugu okomitu na kosinu (sl. 3.2):

$$G_1 = mg\sin\alpha$$
$$G_2 = mg\cos\alpha.$$

Gibanje tijela niz kosinu uzrokovano je usporednom komponentom; prema drugom Newtonovom zakonu, $F = ma$, dobiva se

$$a = \frac{G_1}{m} = g\sin\alpha = 4{,}9\ \mathrm{m\,s^{-2}}.$$

b) Sila trenja jednaka je

$$F_{tr} = \mu_k G_2 = \mu_k mg\cos\alpha = 254{,}9\ \mathrm{N}.$$

U slučaju trenja jednadžba gibanja glasi

$$ma = G_1 - F_{tr} = mg(\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha),$$

pa je

$$a = g(\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha) = 2{,}35\ \mathrm{m\,s^{-2}}.$$

c) Da bi tijelo mirovalo na kosini, usporedna komponenta sile teže mora biti manja od granične sile statičkog trenja, tj.

$$mg\sin\alpha < \mu_s mg\cos\alpha,$$

odnosno

$$\tan\alpha < \mu_s.$$

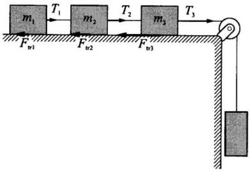
Odatle se dobiva granični kut za koji tijelo upravo počinje kliziti

$$\alpha_g = \mathrm{arc}\tan\mu_s = 26{,}6°.$$

3.4. Na vodoravnoj podlozi leže tri tijela mase $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg i $m_3 = 3$ kg međusobno povezana laganom nerastegljivom niti (sl. 3.3). Ta su tijela preko kolotura zanemarive mase u kutu podloge spojena s tijelom mase $m = 10$ kg. Faktori su trenja za prvo tijelo $\mu_1 = 0{,}1$, za drugo $\mu_2 = 0{,}2$ i za treće $\mu_3 = 0{,}3$.

a) Izračunajte akceleraciju sustava.

b) Kolike su napetosti T_1, T_2 i T_3 u nitima koje povezuju tijela?



Slika 3.3.

Rješenje

a) Da biste odredili akceleraciju sustava, primijenite drugi Newtonov zakon na cijeli sustav kao cjelinu:

$$(m_1 + m_2 + m_3 + m)\,a = m\,g - (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2 + \mu_3 m_3)\,g$$

$$a = \frac{m\,g - (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2 + \mu_3 m_3)\,g}{m_1 + m_2 + m_3 + m} = 5{,}27\,\mathrm{m\,s^{-2}}.$$

b) Napišite drugi Newtonov zakon za svaku napetost niti:

$$m_1 a = T_1 - \mu_1 m_1 g$$

$$(m_1 + m_2)\,a = T_2 - (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)\,g$$

$$(m_1 + m_2 + m_3)\,a = T_3 - (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2 + \mu_3 m_3)\,g.$$

Odatle je

$$T_1 = m_1(a + \mu_1 g) = 6{,}25\,\mathrm{N}$$

$$T_2 = (m_1 + m_2)\,a + (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)\,g = 20{,}7\,\mathrm{N}$$

$$T_3 = (m_1 + m_2 + m_3)\,a + (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2 + \mu_3 m_3)\,g = 45{,}4\,\mathrm{N}.$$

Napetost T_3 možete odrediti i tako da napišete drugi Newtonov zakon za tijelo mase m:

$$m\,a = m\,g - T_3$$

$$T_3 = m\,g - m\,a = 45{,}4\,\mathrm{N}.$$

3.5. Za sustav utega s koloturom, prikazan na slici, poznate su ove veličine: $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 1{,}2$ kg i prikloni kut kosine $\alpha = 50°$. Izračunajte vrijednost faktora trenja μ takvu da omogućuje gibanje utega jednolikom brzinom. (Trenje između koloture i konca valja zanemariti.) Neka se provede fizikalna analiza rezultata.

Rješenje

Jednadžbe gibanja, postavljene za oba utega, jesu

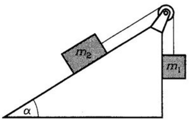
$$m_1 g - T = m_1 a$$

$$-m_2 g \sin\alpha - \mu\, m_2 g \cos\alpha + T = m_2 a,$$

u kojima je T sila napetosti niti, a ubrzanje utega; u drugoj su jednadžbi uračunate karakteristične sile (komponenta uz kosinu i sila trenja) za tijelo m_2 na kosini.

Zbrajanjem jednadžbi dobiva se ubrzanje tijela masa m_1 i m_2

$$a = g \cdot \frac{m_1 - m_2(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2}.$$



Slika 3.4.

Jednoliko gibanje pretpostavlja iščezavanje ubrzanja $a = 0$ koje daje jednadžbu

$$m_1 - m_2(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = 0.$$

Sređivanjem gornje jednadžbe dobiva se vrijednost μ koja omogućuje jednoliko gibanje utega

$$\mu = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{1}{\cos\alpha} - \tan\alpha = 1{,}40.$$

Analiza rezultata provodi se analizom izraza za a ($a \gtrless 0$) i s obzirom na vrijednost μ.

3.6. Tijelo je gurnuto uz kosinu čiji je nagib $\alpha = 30°$ početnom brzinom v_0. Koliku će brzinu imati kad se vrati na početni položaj? Tijelo bi se gibalo jednoliko niz kosinu ako bi nagib kosine bio 11°.

Rješenje

Gibanje uz kosinu jednoliko je usporeno. Napišemo li drugi Newtonov zakon za to gibanje

$$m a_1 = -(m g \sin\alpha + \mu m g \cos\alpha) = -m g (\sin\alpha + \tan\alpha_{tr} \cos\alpha),$$

dobivamo akceleraciju

$$a_1 = -g (\sin\alpha + \tan\alpha_{tr} \cos\alpha) = -g \frac{\sin(\alpha + \alpha_{tr})}{\cos\alpha_{tr}}.$$

Tijelo će se zaustaviti kad je:

$$v = v_0 + a_1 t_1 = v_0 - g \frac{\sin(\alpha + \alpha_{tr})}{\cos\alpha_{tr}} t_1 = 0$$

$$t_1 = -\frac{v_0}{a_1} = \frac{v_0 \cos\alpha_{tr}}{\sin(\alpha + \alpha_{tr}) g}.$$

Prevaljeni je put

$$s_1 = v_0 t_1 + \frac{a_1}{2} t_1^2 = -\frac{v_0^2}{2a_1} = \frac{v_0^2 \cos\alpha_{tr}}{2g \sin(\alpha + \alpha_{tr})}.$$

Tijelo će se vratiti niz kosinu jednoliko ubrzanim gibanjem opisanim jednadžbom

$$m a_2 = m g (\sin\alpha - \mu \cos\alpha) = m g \frac{\sin(\alpha - \alpha_{tr})}{\cos\alpha_{tr}}.$$

Pritom je akceleracija

$$a_2 = g \frac{\sin(\alpha - \alpha_{tr})}{\cos\alpha_{tr}}.$$

Prevaljeni put je $s_2 = s_1$, pa je konačna brzina

$$v = \sqrt{2 a_2 s_1} = \sqrt{2g \frac{\sin(\alpha - \alpha_{tr})}{\cos\alpha_{tr}} \cdot \frac{v_0^2 \cos\alpha_{tr}}{2g \sin(\alpha + \alpha_{tr})}} = v_0 \sqrt{\frac{\sin(\alpha - \alpha_{tr})}{\sin(\alpha + \alpha_{tr})}}.$$

Uvrštavajući $\alpha = 30°$, $\alpha_{tr} = 11°$ dobivamo

$$v = 0{,}7\, v_0.$$

3.7. Koliko se dugo spušta tijelo niz kosinu visine $h = 2$ m i nagiba $\alpha = 45°$ ako je maksimalni kut pri kojem tijelo može mirovati na kosini $\beta = 30°$? Pretpostavite da je kinetički faktor trenja za 10% manji od statičkog.

Rješenje

Prema slici 3.5.a je

$$G_2 = G \cos\beta$$

i

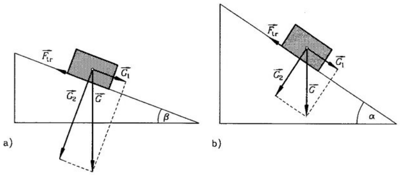
$$F_{tr} = \mu_s G \cos\beta = G \sin\beta,$$

pa je

$$\mu_s = \tan\beta.$$

Isto tako (sl. 3.5.b)

$$G_1 - F_{tr} = m a,$$



Slika 3.5.

odnosno

$$a = g\sin\alpha - \mu_k g\cos\alpha = g\sin\alpha - 0{,}9\, g\tan\beta\cos\alpha$$

i uz

$$s = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{a}{2}t^2,$$

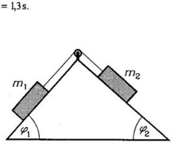
dobiva se

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g\sin\alpha(\sin\alpha - 0{,}9\tan\beta\cos\alpha)}} = 1{,}3\,\mathrm{s}.$$

3.8. Po kosinama s kutovima nagiba prema horizontu $\varphi_1 = 50°$ i $\varphi_2 = 40°$ gibaju se dva tijela mase $m_1 = 8$ kg i $m_2 = 5$ kg vezana niti prebačenom preko kolotura (sl. 3.6). Faktori trenja tijela na kosini jesu $\mu_1 = 0{,}12$, $\mu_2 = 0{,}2$. Potrebno je odrediti:

a) ubrzanje tijela,

b) napetost niti.



Slika 3.6.

Rješenje

Jednadžbe gibanja tijela jesu:

$$m_1 g\sin\varphi_1 - T - \mu_1 m_1 g\cos\varphi_1 = m_1 a$$

$$-m_2 g\sin\varphi_2 + T - \mu_2 m_2 g\cos\varphi_2 = m_2 a.$$

Rješenja su tog sustava:

$$a = g\frac{(m_1\sin\varphi_1 - m_2\sin\varphi_2) - (\mu_1 m_1\cos\varphi_1 + \mu_2 m_2\cos\varphi_2)}{m_1 + m_2}$$

$$a = 1{,}16\,\mathrm{m/s^2}$$

$$T = g\frac{(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2) - (\mu_1\cos\varphi_1 - \mu_2\cos\varphi_2)}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}}$$

$$T = 44{,}82\ \mathrm{N}.$$

3.9. Izračunajte akceleraciju utega mase m_1 i napetosti niti u sustavima kolotura na slici 3.7.a) i b). Mase utega su $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 1$ kg i $m_3 = 0,5$ kg. Zanemarite trenje i masu kolotura.

Rješenje

a) Koordinatni se sustav odabire tako da je os y vertikalno prema dolje. Zbog nerastegljivosti užeta vrijedi:

$$y_1 + 2y_2 = \text{konst.}$$

odnosno

$$\dot{y}_1 + 2\dot{y}_2 = 0, \quad \ddot{y}_1 + 2\ddot{y}_2 = 0.$$

Budući da je $\ddot{y} = a$, onda je

$$a_1 = -2a_2.$$

Drugi Newtonov zakon primijenjen na pojedine utege daje:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1$$

$$m_2 g - 2T_1 = m_2 a_2 = -\frac{m_2 a_1}{2}.$$

Rješavanjem tih dviju jednadžbi dobiva se:

$$a_1 = \frac{2(2m_1 - m_2)}{4m_1 + m_2} g = \frac{2}{3} g,$$

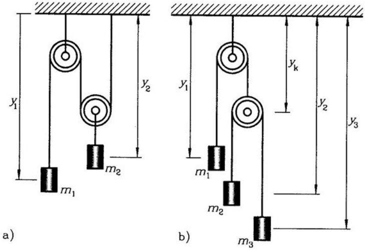
$$T_1 = \frac{3 m_1 m_2 g}{4m_1 + m_2} = 6,5\,\text{N}.$$

b) Veza između pomaka utega jest

$$y_2 - y_k + y_3 - y_k = \text{konst.}, \qquad y_1 + y_k = \text{konst.},$$

odnosno

$$2y_1 + y_2 + y_3 = \text{konst.}$$



Slika 3.7.

Odatle se dobiva veza među akceleracijama (drugim derivacijama pomaka):

$$2a_1 + a_2 + a_3 = 0.$$

Primjenom drugoga Newtonova zakona dobiva se:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1, \qquad m_2 g - T_2 = m_2 a_2, \qquad m_3 g - T_3 = m_3 a_3.$$

Rješavanjem tih jednadžbi, uzevši u obzir da je $T_1 = 2T_2$, dobiva se:

$$a_1 = \frac{m_1(m_2+m_3) - 4m_2 m_3}{4m_2 m_3 + m_1(m_2+m_3)} g = \frac{g}{5} \qquad T_1 = \frac{8m_1 m_2 m_3 g}{4m_2 m_3 + m_1(m_2+m_3)} = 15{,}7\,\mathrm{N}.$$

3.10. Tijelo se počinje spuštati s vrha kosine, čiji je nagib α, tako da faktor trenja ovisi o brzini

$$\mu = \mu_0\,(1 + A\,v).$$

Odredite iz jednadžbe gibanja kako se s vremenom mijenjaju udaljenost od vrha kosine (prijeđeni put) i brzina.

Rješenje

Jednadžba je gibanja

$$m\,a = m\,g \sin\alpha - \mu_0 m\,g\,(1 + A\,v)\cos\alpha$$

$$a = -A\,g\,\mu_0\,v\cos\alpha + g\sin\alpha - \mu_0 g\cos\alpha.$$

Označimo li

$$B = -A\,g\,\mu_0\cos\alpha, \;\; C = g\sin\alpha - \mu_0 g\cos\alpha,$$

jednadžba poprima ovaj oblik

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = B\,v + C.$$

Integriranjem te jednadžbe se dobije

$$\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{\mathrm{d}v}{B\,v + C} = \int_0^t \mathrm{d}t.$$

Zamjenom varijabli $B\,v + C = u$, $\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}u}{B}$, integral prelazi u

$$\int_{u(0)}^{u(t)} \frac{\mathrm{d}u}{B\,u} = \int_0^t \mathrm{d}t.$$

Riješimo li taj integral i vratimo li se na početnu varijablu pa uvažimo početni uvjet $v(0) = 0$, dobit ćemo

$$v(t) = \frac{C}{B}\,(\mathrm{e}^{Bt} - 1),$$

odnosno

$$v(t) = \frac{1}{A\,\mu_0}(\mu_0 - \tan\alpha)(\mathrm{e}^{-Ag\mu_0 t\cos\alpha} - 1).$$

Integriranjem brzine $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ dobivamo put

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \mathrm{d}x = \frac{C}{B}\int_0^t (\mathrm{e}^{Bt} - 1)\,\mathrm{d}t$$

$$x(t) = \frac{1}{A\mu_0}(\mu_0 - \tan\alpha)\left(\frac{1 - \mathrm{e}^{-Ag\mu_0 t\cos\alpha}}{Ag\mu_0\cos\alpha} - t\right).$$

3.11. Potrebno je izračunati brzinu i put tijela koje pada u fluidu. Pretpostavlja se da je sila trenja (otpor sredstva) proporcionalna brzini $F_{tr} = -b\,v$. Kolika je konačna brzina kojom će tijelo, kada je postigne, padati jednoliko? Potrebno je nacrtati $s(t)$ i $v(t)$ dijagram i usporediti to gibanje sa slobodnim padom. (Zanemarite uzgon.)
U posebnom slučaju računajte sa $\frac{b}{m} = 0{,}7\ \mathrm{s}^{-1}$.

Rješenje

Jednadžba gibanja tijela jest

$$m\,a = m\,g - b\,v,$$

odnosno

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{b}{m}v = g\left(1 - \frac{v}{m\,g/b}\right).$$

Pod pretpostavkom da tijelo krene iz mirovanja, integriranjem se dobiva

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{g - \frac{b}{m}v} = \int_0^t \mathrm{d}t, \qquad \ln\frac{m\,g}{m\,g - b\,v} = \frac{b\,t}{m},$$

odnosno

$$v = \frac{m\,g}{b}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{bt}{m}}).$$

Pri padanju u fluidu zbog otpora sredstva ubrzanje se smanjuje i konačno postaje nula, tijelo postiže konačnu (graničnu) brzinu i dalje se giba jednoliko. Graničnu brzinu određujemo uz uvjet da je sila teža jednaka sili trenja

$$m\,g = b\,v_g\,.$$

$$v_g = \frac{m\,g}{b} = 14\ \mathrm{m\,s^{-1}},$$

pa se brzina i akceleracija može pisati i ovako:

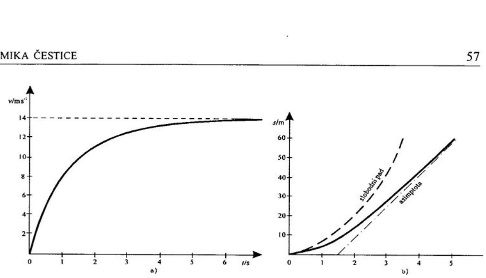
$$v = v_g(1 - \mathrm{e}^{-\frac{bt}{m}}); \qquad a = g\left(1 - \frac{v}{v_g}\right).$$

Put se dobiva integriranjem brzine:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v = v_g\,(1 - \mathrm{e}^{-\frac{bt}{m}})$$

$$s = \int_0^t (v_g - v_g\,\mathrm{e}^{-\frac{bt}{m}})\,\mathrm{d}t = v_g\,t + \frac{v_g^2}{g}(\mathrm{e}^{-\frac{bt}{m}} - 1)$$

$$s = v_g\left[t - \frac{v_g}{g}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{bt}{m}})\right] = v_g\left(t - \frac{v}{g}\right).$$



Slika 3.8.

Na slici 3.8. prikazani su $v(t)$ i $s(t)$ dijagram za promatrano gibanje. Brzina se asimptotski približava brzini v_g, a put asimptoti

$$s = v_g\left(t - \frac{v_g}{g}\right).$$

3.12. Kocka udara o potpuno elastičnu ogradu tako da je jedna strana kocke usporedna s ogradom (sl. 3.9). Smjer brzine kocke čini kut ϑ s okomicom na ogradu. Faktor trenja između kocke i ograde je $\sqrt{3}/6$. Kocka se odbija od ograde pod kutom φ. Nađite ovisnost kuta odbijanja φ o kutu upada ϑ.

Rješenje

Označimo količinu gibanja kocke sa $\vec{p}$ prije sudara i sa $\vec{p}\,'$ nakon sudara. Ako paralelnu komponentu količine gibanja označimo sa $p_{\parallel}$, a okomitu sa $p_{\perp}$, tada je

$$\tan\vartheta = \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \qquad \text{i} \qquad \tan\varphi = \frac{p'_{\parallel}}{p'_{\perp}}.$$

Pri udaru o ogradu komponenta količine gibanja paralelna s ogradom se promijeni zbog djelovanja sile trenja

$$\frac{\Delta p_{\parallel}}{\Delta t} = F_{tr}.$$

Sila trenja jednaka je faktoru trenja pomnoženom sa silom pritiska stranice kocke na ogradu. Ta je sila okomita na stranicu i jednaka

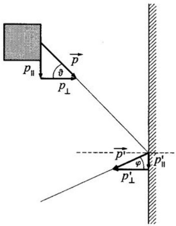
$$F_N = \frac{\Delta p_{\perp}}{\Delta t}.$$

Pri sudaru okomita komponenta ne mijenja iznos, ali mijenja smjer za 180°, pa je

$$\Delta p_{\perp} = 2p_{\perp},$$

odnosno sila trenja

$$F_{tr} = \mu F_N = \mu\frac{\Delta p_{\perp}}{\Delta t} = \mu\frac{2p_{\perp}}{\Delta t}.$$



Slika 3.9.

Odatle je promjena paralelne komponente količine gibanja

$$\Delta p_{\parallel} = F_{tr} \Delta t = 2\mu p_{\perp}.$$

Nakon sudara komponente količine gibanja jesu:

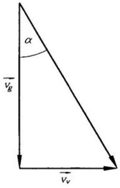
$$p'_{\perp} = p_{\perp} \qquad p'_{\parallel} = p_{\parallel} - 2\mu p_{\perp},$$

pa je

$$\tan\varphi = \frac{p'_{\parallel}}{p'_{\perp}} = \frac{p_{\parallel} - 2\mu p_{\perp}}{p_{\perp}} = \tan\vartheta - 2\mu = \tan\vartheta - \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\vartheta - \tan 30^\circ .$$

Najmanja vrijednost za $\tan\varphi$ je nula i tada je $\varphi = 0$. Sila trenja može usporiti gibanje kocke, smanjiti količinu gibanja, ali ne može promijeniti smjer paralelne komponente količine gibanja, pa je kut φ uvijek pozitivan ili nula. Ako je $\vartheta \leq 30^\circ$, tada je $\tan\varphi = 0$, odnosno $\varphi = 0$.

3.13. Kapljica vode pada s velike visine tako da joj je brzina jednaka $v_1 = 20$ m/s u trenutku kad joj je akceleracija jednaka $a_1 = 7{,}5$ m/s^2. Blizu Zemljine površine kapljica pada jednoliko. Kojom brzinom puše vjetar (blizu Zemljine površine) ako kapljica pada pod kutom $\alpha = 10°$? Pretpostavite da je sila otpora proporcionalna s kvadratom brzine.



Slika 3.10.

Rješenje

Jednadžba gibanja na početku padanja jest

$$mg - F_{ot} = m\,a(t),$$

gdje je

$$F_{ot} = k\,v^2.$$

U trenutku t_1 brzina kapljice je v_1 i akceleracija a_1. Uvrštavajući te vrijednosti u jednadžbu gibanja, dobivamo koeficijent proporcionalnosti k

$$mg - k\,v_1^2 = m\,a_1$$

$$k = \frac{m(g - a_1)}{v_1^2}.$$

Pri površini je

$$mg = k\,v_g^2.$$

Odatle dobivamo

$$v_g = v_1\sqrt{\frac{g}{g - a_1}} = 41{,}2\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Iz dijagrama brzina (sl. 3.10.) dobiva se

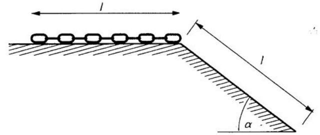
$$\tan\alpha = \frac{v_v}{v_g},$$

odnosno

$$v_v = \frac{v_1 \tan\alpha}{\sqrt{1 - \frac{a_1}{g}}}$$

$$v_v = 7{,}3\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

3.14. Nerastegljiv, homogen i savitljiv lanac duljine l počne kliziti s vrha kosine (sl. 3.11). Kolika je brzina pri dnu kosine čija je duljina l i nagib α? Zanemarite trenje.



Slika 3.11.

Rješenje

Pošto je lanac homogen linearna gustoća lanca μ je konstantna i iznosi

$$\mu = \frac{m}{l} .$$

Neka je ishodište koordinatnog sustava na vrhu kosine, a os x usmjerena niz kosinu. U trenutku t brzina lanca je v, koordinata početka lanca je x, masa dijela lanca koji je na kosini je μx, a sila koja djeluje na lanac je $\mu x g \sin\alpha$.

Jednadžba gibanja je

$$m \frac{dv}{dt} = \mu g x \sin\alpha .$$

Pomnožimo li jednadžbu sa dt, i uvrstimo $dt = \frac{dx}{v}$ dobivamo

$$m\, dv = \mu g x \sin\alpha \frac{dx}{v} .$$

Množenjem gornje jednadžbe sa v i integriranjem

$$\int_0^v m v\, dv = \int_0^l \mu g \sin\alpha\, x\, dx,$$

dobivamo

$$\frac{m v^2}{2} = \mu g \sin\alpha \frac{l^2}{2},$$

odnosno uvrštavanjem $m = \mu \cdot l$

$$v = \sqrt{g \sin\alpha \cdot l} .$$

3.15. Raketa čija je početna masa 2 700 t lansirana je sa Zemljine površine okomito uvis. Iz rakete svake sekunda izlazi 1 300 kg plina brzinom 55 km/s. Koliki je potisak rakete?

Izračunajte masu i brzinu rakete 10 s nakon lansiranja. Nacrtajte $v(t)$ dijagram i iz njega procijenite visinu rakete nakon 10 s. (Uzmimo da je početna brzina rakete $v_0 = 0$, pretpostavimo da je sila teža koja djeluje na raketu za vrijeme promatranog gibanja konstantna i zanemarimo otpor zraka.)

Rješenje

U vremenu dt raketa mase m promijeni brzinu za dv jer iziđu plinovi mase dm i brzine v_p. Promjena količine gibanja rakete je $m\,dv$, promjena količine gibanja plinova je $v_p dm$, a promjena količine gibanja sustava je $m\,dv - v_p\,dm$. (Predznak minus označava da se masa rakete smanjuje.)

Prema drugom Newtonovu zakonu

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}_p\frac{dm}{dt} = \vec{F}$$

te je jednadžba gibanja rakete

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}_p\frac{dm}{dt} + \vec{F}_v, \tag{1}$$

gdje je m masa rakete, v_p brzina izbacivanja čestica plina, a F_v vanjska sila (npr. gravitacija). Potisak je rakete

$$F_p = v_p\frac{dm}{dt} = 7\cdot 10^7\ \text{N}.$$

Brzina i put rakete mogu se dobiti integracijom jednadžbe gibanja (1)

$$\int_0^v dv = -v_p\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m} - g\int_0^t dt$$

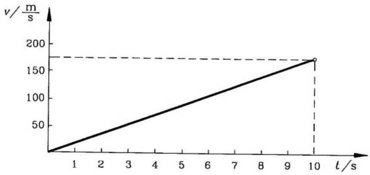
$$v = v_p \ln\frac{m_0}{m} - g\,t.$$

Masa rakete nakon 10 s iznosi

$$m = m_0 - \frac{dm}{dt}t = 2{,}687\cdot 10^6\ \text{kg}.$$

Brzina rakete je

$$v = v_p\ln\frac{m_0}{m} - g\,t = 167\ \text{m/s}.$$



Slika 3.12.

Izračunavanjem brzine za razne vremenske trenutke može se nacrtati $v(t)$ dijagram (sl. 3.12). Grafičkom integracijom iz $v(t)$ dijagrama dobiva se visina (put) rakete u $t = 10$ s, $h = 835$ m. Ovisnost brzine o vremenu u ovom vremenskom intervalu praktično je linearna funkcija vremena, a to se vidi ako se logaritam razvije u red i ako se zanemare članovi višeg reda koji su veoma mali:

$$\ln\frac{m_0}{m} = -\ln\left(1 - \frac{1}{m_0}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}t\right) = \frac{1}{m_0}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}t,$$

$$v = v_p\frac{1}{m_0}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}t - g\,t = 16{,}6\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]\cdot t.$$

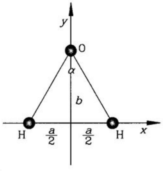
3.16. Odredite položaj centra mase molekule H_2O ako je kut između spojnica atoma kisika i atoma vodika 106°, a razmak vodikovih atoma 144 pm.

Rješenje

Odabere li se koordinatni sustav tako da os x prolazi spojnicom vodikovih atoma, a os y kroz kisikov atom (atomi se smatraju materijalnim točkama), tada je (sl. 3.13):

$$x_{CM} = \frac{-m_H\cdot\frac{a}{2} + m_H\cdot\frac{a}{2} + m_O\cdot 0}{2m_H + m_O} = 0$$

$$y_{CM} = \frac{m_H\cdot 0 + m_H\cdot 0 + m_O\cdot b}{2m_H + m_O} = \frac{16}{18}\frac{a}{2}\mathrm{ctan}\frac{\alpha}{2} = 48\,\mathrm{pm}.$$



Slika 3.13.

3.17. Čestica mase m_1 giba se brzinom $\vec{v}_1$, a čestica mase m_2 brzinom $\vec{v}_2$. Kolike su brzine centra mase tog sustava te brzina i količina gibanja svake čestice s obzirom na sustav vezan za njihov centar mase?

Rješenje

Brzina centra mase dana je izrazom

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{CM}}{\mathrm{d}t} = \frac{m\,\vec{v}_1 + m\,\vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Ako se brzine čestica s obzirom na sustav vezan za centar mase označe sa $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$, tada je:

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_{CM} = \frac{m_2(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_{CM} = \frac{m_1(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{m_1 + m_2}.$$

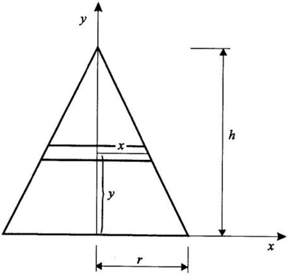
Količine gibanja čestica u sustavu vezanom za centar mase jesu:

$$m_1\vec{u}_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

$$m_2\vec{u}_2 = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2).$$

One su jednake po iznosu, a suprotnog su smjera. Ukupna količina gibanja sustava s obzirom na sustav vezan za centar mase jednaka je nuli.

3.18. Odredite centar mase homogenog stošca čija je visina h = 1 m.



Slika 3.14.

Rješenje
Stožac valja postaviti u koordinatni sustav (sl. 3.14).
Koordinate centra mase jesu

$$x_{CM} = 0$$

$$dm = \rho\, dV = \rho\, x^2 \pi\, dy$$

$$h : r = (h - y) : x$$

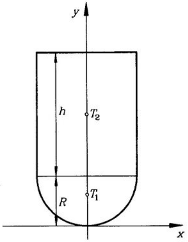
$$x = \frac{r}{h}(h - y)$$

$$dm = \rho\, \pi \frac{r^2}{h^2}(h^2 - 2\,h\,y + y^2)\,dy$$

$$y_{CM} = \frac{\rho\, \pi\, r^2}{h^2 m}\int_0^h (h^2 y - 2\,h\,y^2 + y^3)\,dy = \frac{h}{4}.$$

3.19. Tijelo se sastoji od polukugle polumjera R i valjka jednakog polumjera i gustoće čija je visina h. Ako je težište polukugle udaljeno od njezine osnovice za $\frac{3R}{8}$, a težište valjka u središtu valjka (homogeni valjak), gdje je težište (centar mase) tijela? Gdje je težište (centar mase) ako je $h = \frac{R}{\sqrt{2}}$?

Rješenje
Koordinatni se sustav odabire kao na slici 3.15.
Koordinate centra mase, odnosno težišta jesu:



Slika 3.15.

$$x_{CM} = 0$$

$$y_{CM} = \frac{m_p \cdot \frac{5R}{8} + m_v \cdot \left(R + \frac{h}{2}\right)}{m_p + m_v} = \frac{\frac{4}{6} R^3 \pi \rho \cdot \frac{5}{8} R + R^2 \pi h \rho \left(R + \frac{h}{2}\right)}{\frac{2}{3} R^3 \pi \rho + R^2 \pi h \rho} = \frac{\frac{5R^2}{12} + R h + \frac{h^2}{2}}{\frac{2R}{3} + h}.$$

Ako je $h = \frac{R}{\sqrt{2}}$, tada su koordinate centra mase

$$x_{CM} = 0, \qquad y_{CM} = \frac{\frac{5R^2}{12} + \frac{R^2}{\sqrt{2}} + \frac{R^2}{4}}{\frac{2R}{3} + \frac{R}{\sqrt{2}}} = R.$$

3.20. Kuglica (m = 1 g) obješena o nit (l = 1 m) giba se jednoliko po kružnici tako da nit zatvara kut φ = 60° s vertikalom (sl. 3.16). Odredite period kruženja i napetost niti tog tzv. stožastog njihala.

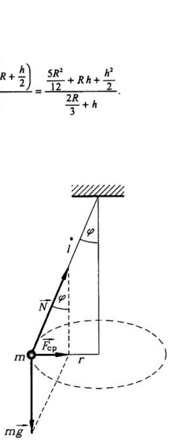
Rješenje

Na kuglicu djeluje sila teža $m\vec{g}$ i napetost niti $\vec{N}$. Te dvije sile vektorski zbrojene daju potrebnu centripetalnu silu. Iz slika izlazi:

$$F_{cp} = m g \tan\varphi$$

$$\frac{m v^2}{r} = m g \tan\varphi$$

$$v = \sqrt{r g \tan\varphi} = \sqrt{l g \sin\varphi \tan\varphi}.$$



Slika 3.16.

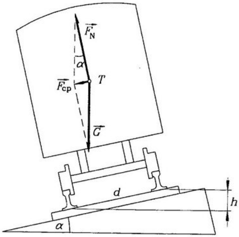
Period kruženja je

$$T = \frac{2r\pi}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\varphi}{g}} = 1{,}4\,\mathrm{s}.$$

Napetost je niti

$$N = \frac{G}{\cos\varphi} = \frac{mg}{\cos\varphi} = 0{,}02\,\mathrm{N}.$$

3.21. Izračunajte nagib tračnica na zavoju čiji je polumjer zakrivljenosti $R = 300$ m tako da pri brzini od $v = 72$ km/h nikakve bočne sile ne djeluju na vlak tj. da pritisak na obje tračnice bude jednak. Kolika je visinska razlika tračnica ako je to normalni kolosijek ($d = 1{,}435$ m)?



Slika 3.17.

Rješenje

Vanjska tračnica je nadvišena prema unutrašnjoj za visinu h (sl. 3.17). Da bi pritisak na obje tračnice bio jednak, rezultanta centripetalne sile i sile pritiska (koja djeluje okomito na podlogu) mora biti jednaka težini. Ako umjesto pritiska razmatramo reakciju podloge $\vec{F}_N$ (sl. 3.17), tada je

$$\vec{F}_{cp} = \vec{G} + \vec{F}_N$$

ili

$$F_{cp} = \frac{mv^2}{R} = F_N \sin\alpha$$

$$G = mg = F_N\cos\alpha$$

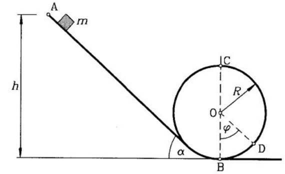
$$\tan\alpha = \frac{mv^2}{mgR} = \frac{v^2}{Rg}$$

$$\alpha = 7{,}7^\circ$$

$$\frac{h}{d} = \sin\alpha$$

$$h = d\sin\alpha = 0{,}19\,\mathrm{m}.$$

3.22. Predmet mase 1 kg klizi niz petlju na sl. 3.18. S koje minimalne visine predmet mora krenuti bez početne brzine da bi uspješno napravio petlju polumjera 0,5 m? Kojom silom predmet pritišće podlogu? Zanemarite trenje.



Slika 3.18.

Rješenje

Tijelo počinje kliziti bez početne brzine iz točke A (sl. 3.18). U svakoj točki putanje na tijelo djeluju sila teža $m\vec{g}$ i sila reakcije podloge $\vec{F}_N$. (Trenje se zanemaruje). Za gibanje po kosini prema drugom Newtonovu zakonu vrijedi

$$m\,g\sin\alpha = m\,a \qquad (1)$$

$$F_N - m\,g\cos\alpha = 0, \qquad F_N = m\,g\cos\alpha. \qquad (2)$$

Integriranjem jednadžbe (1) dobiva se brzina na dnu kosine:

$$v_B^2 = 2\,g\,s\sin\alpha = 2\,gh.$$

Nema li trenja brzina tijela neovisna je o nagibu kosine i jednaka je brzini koju bi tijelo imalo kada bi slobodno padalo s visine h. Slično vrijedi i za gibanje (bez trenja) po bilo kojoj drugoj putanji pa tako i po kružnoj petlji BDCB. Prema tome, brzina u točki C jest

$$v_C^2 = 2g(h-2R)\,v_B^2 - 4\,g\,R = 2\,g\,h - 4\,g\,R, \qquad (3)$$

a u točki D

$$v_D^2 = v_B^2 - 2\,g\,R(1-\cos\varphi) = 2\,g\,h - 2\,g\,R + 2\,g\,R\cos\varphi = v_C^2 + 2\,g\,R(1-\cos\varphi).$$

Minimalna brzina koju predmet smije imati u točki C dobiva se iz uvjeta da je pri toj brzini reakcija podloge jednaka nuli i da potrebnu centripetalnu silu za kružno gibanje daje sila teža:

$$\frac{m\,v^2}{R} = m\,g \qquad v = \sqrt{g\,R}. \qquad (4)$$

Nakon izjednačenja (3) i (4), dobiva se

$$h = \frac{5R}{2} = 1{,}25\,\mathrm{m}.$$

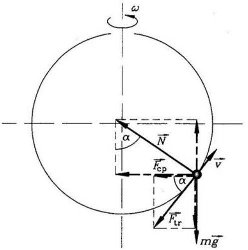
Predmet u točki D pritišće na podlogu silom

$$F_N = m\,g\cos\varphi + \frac{m\,v^2}{R} = m\,g\left(\frac{2h}{R} + 3\cos\varphi - 2\right).$$

3.23. Sferna posuda polumjera R može se vrtjeti oko vlastitog vertikalnog promjera. Kroz otvor na gornjem polu umetnuto je sitno tijelo čiji radijus-vektor zatvara kut α s vertikalnom osi rotacije. Tijelo djeluje na unutrašnju stijenku posude, a to se iskazuje faktorom statičkog trenja μ_{st}.

a) Odredite najveću frekvenciju vrtnje potrebnu da sitno tijelo ne bi započelo kliziti prema gore.

b) Izračunajte istu frekvenciju u slučaju kad je $\mu_{st} = 0$, $R = 20$ cm i $\alpha = 40°$.



Slika 3.19.

Rješenje

a) Vrtnjom posude određenom frekvencijom postiže se ravnoteža sitnog tijela – ono ne klizi ni nadolje, ni uvis, tako da je smjer sile trenja neodređen. Pretpostavlja se zato da se frekvencija nešto uveća i da zbog vrtnje sitno tijelo počinje kliziti prema gore uz stijenku posude. Smjer sile trenja $\vec{F}_{tr}$ postaje definiran, pa prema ostalim silama uzima položaj prikazan na slici. Jednadžbe gibanja pridružene uspinjanju sitnog tijela glase:

$$N \sin\alpha + F_{tr} \cos\alpha = m\omega^2 R \sin\alpha$$

$$N \cos\alpha - F_{tr} \sin\alpha = m g$$

$$F_{tr} = \mu_{st} N.$$

Sređivanjem – dijeljenjem prve i druge jednadžbe i primjenom jednostavnih trigonometrijskih transformacija, a također i korištenjem definicije $\mu_{st} = \tan\varphi$, gdje je φ kut statičkog trenja, dobiva se kutna brzina ω:

$$\frac{\tan\alpha + \tan\varphi}{1 - \tan\alpha \tan\varphi} = \omega^2 \frac{R \sin\alpha}{g}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g \tan(\alpha + \varphi)}{R \sin\alpha}}$$

i iz nje frekvencija

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g \tan(\alpha + \varphi)}{R \sin\alpha}}.$$

Dobivena je frekvencija izvedena uz pretpostavku da sitno tijelo upravo započinje kliziti uvis. Očito je da će zadanom uvjetu odgovarati frekvencije

$$f \le \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g \tan(\alpha + \varphi)}{R \sin\alpha}}.$$

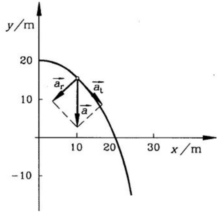
b) Iz $\mu_{st} = 0$, izlazi $\varphi = 0$, pa je

$$f \le \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g \tan\alpha}{R \sin\alpha}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{R \cos\alpha}} = 1{,}27\,\mathrm{s}^{-1}.$$

3.24. Tijelo mase 1 kg giba se u ravnini tako da su mu koordinate određene jednadžbama:

$$x = 10\,t, \qquad y = 20 - 5t^2,$$

gdje su pomaci izraženi u metrima, a vrijeme u sekundama.
a) Potrebno je odrediti tangencijalnu i radijalnu silu u $t = 1$ s.
b) Koliki je tada radijus zakrivljenosti putanje?



Slika 3.20.

Rješenje

a)
$$v_x = \frac{dx}{dt} = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = -10t, \qquad v_y(t = 1\mathrm{s}) = -10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

$$v(t = 1\mathrm{s}) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 10\sqrt{2}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

$$a_x = 0, \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} = -1 \Rightarrow \alpha = -45°.$$

Kut između brzine i akceleracije u $t = 1$ s jest 45°. U tom je trenutku ukupna sila

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}_y = -10\,\mathrm{N}\,\vec{j}.$$

Nju ćemo rastaviti u tangencijalnu i radijalnu komponentu:

$$F_t = F\cos\alpha = 7\,\mathrm{N}$$

$$F_r = F\sin\alpha = 7\,\mathrm{N}.$$

b) Iz izraza za centripetalnu silu

$$F_r = \frac{m v^2}{r}$$

dobiva se radijus zakrivljenosti $r = 28$ m. Putanja tijela prikazana je na slici 3.20.

Zadaci

3.1. Zdrobljena željezna ruda pada na vodoravnu dugačku transportnu traku, i to 300 kg/s. Stalna brzina trake je 2 m/s. Nađite silu koja mora djelovati na traku da bi se ona kretala stalnom brzinom, a da pritom zanemarite trenje.

Rezultat: $F = 600$ N

3.2. Dva su tijela, čije mase iznose $m_1 = 4$ kg i $m_2 = 8$ kg, vezana s niti i nalaze se na kosini čiji je kut $\alpha = 30°$. Faktori trenja su $\mu_1 = 0{,}1$, i $\mu_2 = 0{,}2$. Koja sila nateže nit, ako se tijelo m_1 giba ispred m_2?

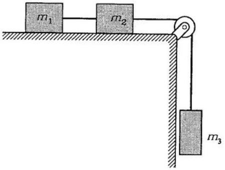
Rezultat: $T = 2{,}3$ N

3.3. Tijelo se počinje spuštati niz kosinu čiji je nagib $\alpha = 30°$, početnom brzinom jednakom 0. Zbog trenja za koje je faktor $\mu = 0{,}1\ \mathrm{m}^{-1}\,x$ (x je udaljenost od početne točke), tijelo se zaustavlja prije svršetka kosine. Potrebno je izračunati vrijeme od početka gibanja do zaustavljanja.

Rezultat: $t = 3{,}41$ s

3.4. Na vodoravnoj podlozi leže dva tijela mase $m_1 = 0{,}2$ kg i $m_2 = 0{,}3$ kg međusobno povezana laganom niti (sl. 3.21). Predmeti su također preko kolotura na rubu podloge spojeni s tijelom mase $m_3 = 0{,}6$ kg (sl. 3.21). Izračunajte akceleraciju sustava: **a)** zanemarivši trenje i **b)** imajući na umu da je faktor trenja klizanja između prva dva tijela i podloge jednak 0,4. **c)** Kolike su napetosti niti T_1 i T_2 u slučaju kad je trenje zanemarivo? Zanemarite masu žice i koloture.

Rezultat: a) $a = 5{,}35\ \mathrm{m\,s^{-2}}$, b) $a = 3{,}57\ \mathrm{m\,s^{-2}}$, c) $T_1 = 1{,}07$ N, $T_2 = 2{,}68$ N



Slika 3.21.

3.5. Automobil težine $G = 8\,000$ N, penje se uz brijeg nagnut 35° prema horizontu. Na putu $s = 40$ m brzina mu se povećava od $v_0 = 20$ km/h do $v = 40$ km/h. Kolika je sila potrebna za gibanje automobila, ako je faktor trenja $\mu = 0{,}15$?

Rezultat: $F = 6\,516$ N

3.6. Čovjek užetom vuče po podlozi tijelo mase m silom F. Za tijelo je privezano (istovrsnim užetom) drugo tijelo mase $m/2$, a za njega tijelo mase $m/4$ itd. ($m/8$,...). Koliko tijela najviše može vući čovjek, a da uže ne pukne, ako ih želi vući tako da ih ubrzava akceleracijom a, a uže može izdržati napetost N? Faktor trenja je μ.

Rezultat: $n = \dfrac{\ln \dfrac{2m(a+\mu g)}{2m(a+\mu g) - N}}{\ln 2}$

3.7. Na česticu mase m djeluje sila $F = F_0 \left[1 - \left(\dfrac{2t - T}{T}\right)^2\right]$ u vremenskom intervalu $0 \leq t \leq T$. F_0 je konstanta. Potrebno je odrediti brzinu čestice na svršetku vremenskog intervala ako čestica na početku miruje.

Rezultat: $v = \dfrac{2F_0 T}{3m}$

3.8. Projektil je ispaljen vertikalno uvis brzinom $v_0 = 100$ m/s. Ako je otpor zraka $F_{ot} = k\,m\,v^2$, gdje je m masa projektila, a $k = 0{,}001\ \mathrm{m^{-1}}$, kojom brzinom i nakon koliko vremena će se projektil vratiti na tlo? Koliki bi bio rezultat uz zanemariv otpor zraka? (Usporedite sa zadatkom 2.11).

Rezultat: $v = 70{,}3\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, $t = 16{,}9$ s; $v = 100\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, $t = 20{,}4$ s

3.9. Početna brzina rakete mase M iznosi v_0. Na svršetku svake sekunde raketa izbacuje plin određene mase m. Brzina izlaznog plina u je konstantna. Odredite brzinu rakete nakon n sekundi, zanemarujući silu gravitacije.

Rezultat: $v_n = v_0 + u\left(\dfrac{m}{M-m} + \dfrac{m}{M-2m} + \cdots + \dfrac{m}{M-nm}\right)$

3.10. Raketa mase 10^7 kg ima brzinu $5 \cdot 10^3$ m/s. Iz mlaznice rakete plinovi istječu brzinom od 500 m/s. Kolika će biti brzina rakete kada bude imala masu 10^5 kg?

Rezultat: $v = 7{,}3 \cdot 10^3\ \mathrm{m\,s^{-1}}$

3.11. Na krajevima kolica duljine $l = 10$ m nalaze se dva čovjeka mase $m_1 = 100$ kg i $m_2 = 80$ kg. Krenu li njih dvojica istodobno jedan prema drugome nakon koliko se metara mora zaustaviti čovjek mase m_1, kada čovjek mase m_2 dođe do kraja kolica, uz uvjet da se položaj kolica u odnosu prema tlu ne promijeni? Zanemarite trenje.

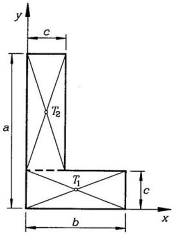
Rezultat: $\Delta x_1 = 8$ m

3.12. Sustav se sastoji od tri točkaste mase $m_1 = 0{,}05$ kg, $m_2 = 0{,}01$ kg i $m_3 = 0{,}015$ kg. U času $t = 0$ one u točkama A_1 (3, 4, 5), A_2 (– 2, 4, – 6) i A_3 (0, 0, 0) miruju (koordinate točaka izražene su centimetrima). Pod djelovanjem vanjske sile $F = 0{,}5$ mN u smjeru osi x sustav se počinje gibati. Odredite položaj centra mase sustava dvije sekunde nakon početka gibanja.

Rezultat: $x_{CM} = 3{,}06$ cm, $y_{CM} = 3{,}2$ cm, $z_{CM} = 2{,}53$ cm

3.13. Izračunajte položaj centra mase kutnika, tj. ravne homogene ploče u obliku slova L prikazane na sl. 3.22. ako je duljina jedne stranice a = 6 cm, druge stranice b = 4 cm, a širina stranica c = 2 cm.

Rezultat: x_{CM} = 1,5 cm, y_{CM} = 2,5 cm



Slika 3.22.

3.14. Homogeni valjak visine 0,2 m i polumjera 0,1 m ima šupljinu oblika kocke čiji brid iznosi 0,05 m, a koja ide od osnovice prema unutrašnjosti tako da je vrh kocke u centru osnovice valjka, a jedna ploha kocke leži u ravnini osnovice valjka. Potrebno je odrediti centar mase toga tijela.

Rezultat: $\vec{r}_{CM} = (-0{,}0005\,\vec{i} - 0{,}0005\,\vec{j} + 0{,}1015\,\vec{k})$ m

3.15. Odredite udaljenost centra mase (težišta) kugle polumjera R = 20 cm od njezina središta ako gustoća jedne polovice kugle iznosi ρ_1 = = 8 600 kg/m^3, a gustoća druge polovice ρ_2 = = 7 200 kg/m^3.

Rezultat: z = 6,6 mm

3.16. Cesta je na zavoju najčešće nagnuta prema unutrašnjoj strani zavoja, tako da bi za određenu brzinu horizontalna komponenta reakcijske sile ceste na automobil bila jednaka potrebnoj centripetalnoj sili.

a) Koliki mora biti nagib ceste na zavoju čiji je polumjer zakrivljenosti 100 m, da bi automobil mogao voziti 60 km/h neovisno o trenju?

b) Kada cesta ne bi bila nagnuta, koliki bi morao biti minimalni faktor trenja pri toj brzini?

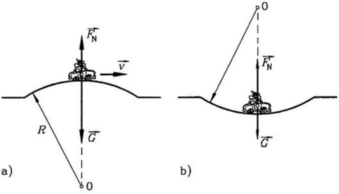
Rezultat: α = 15,8°; μ = 0,28

3.17. Automobil mase 2 000 kg vozi stalnom brzinom od 36 km/h preko mosta koji ima oblik a) izbočenog luka (sl. 3.23.a) i b) udubljenog luka (sl. 3.23.b) polumjera zakrivljenosti 100 m. Kolika je u oba slučaja pritisna sila automobila na podlogu u sredini mosta? Kolika bi morala biti brzina automobila da pritom sila u primjeru a) iščezne?

Rezultat: a) F_a = 17,6 kN; F_b = 21,6 kN; v_1 = 113 km/h

3.18. Uteg mase 4 kg stavljen je na vodoravnu kružnu ploču koja može rotirati. Uteg je vezan s centrom ploče jednom niti duljine 0,3 m koja može izdržati težinu utega mase 10 kg prije nego što pukne. Faktor statičkog trenja jest 0,6. Ako maksimalna sila trenja djeluje na uteg kad se ploča okreće, kolika je kutna brzina ploče u trenutku kada nit pukne?

Rezultat: ω = 10,1 s^{-1}



Slika 3.23.

3.19. Automobil se giba stalnom tangencijalnom akceleracijom od 0,62 m/s^2 po horizontalnoj površini duž kružnice polumjera 40 m. Faktor trenja klizanja iznosi 0,2. Koju će udaljenost prijeći automobil bez klizanja ako je na početku brzina bila jednaka nuli?

Rezultat: $s = 60$ m

4. Rad i energija. Sudari

Uvod

Djeluje li stalna sila F na putu s, rad je jednak

$$W = F\,s\cos\theta = \vec{F}\cdot\vec{s}, \tag{1}$$

gdje je θ kut između smjera sile i smjera puta. Ako je sila promjenljiva, rad se računa integralom

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F\cos\theta\,\mathrm{d}s = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s}. \tag{2}$$

Rad se može odrediti grafički u $F_s - s$ dijagramu iz površine ispod $F_s(s)$ krivulje, gdje je $F_s = F\cos\theta$ projekcija sile na smjer gibanja. Jedinica za rad je džul (J).
Ako se rad W obavi u vremenu t, srednja je snaga

$$\overline{P} = \frac{W}{t}. \tag{3}$$

Trenutna je snaga

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = F v\cos\theta = \vec{F}\cdot\vec{v}, \tag{4}$$

gdje je $F\cos\theta$ projekcija sile na smjer gibanja, a v brzina tijela. Jedinica za snagu je vat (W).
Kinetička energija tijela mase m i brzine v jest

$$E_\mathrm{k} = \frac{m v^2}{2}. \tag{5}$$

Gravitacijska potencijalna energija tijela mase m na visini h iznad Zemljine površine ($h \ll R_Z$) jest

$$E_\mathrm{p} = m\,g\,h, \tag{6}$$

gdje je g akceleracija sile teže, a R_z polumjer Zemlje. Potencijalna energija opruge je

$$E_p = \frac{1}{2} k s^2, \tag{7}$$

gdje je k konstanta opruge, a s pomak iz položaja ravnoteže (elongacija).

Rad konzervativne sile između dva položaja tijela jednak je razlici potencijalne energije početnog i krajnjeg položaja

$$W_{AB} = E_p(\vec{r}_A) - E_p(\vec{r}_B) = -\Delta E_p.$$

U zatvorenom (izoliranom) je sustavu ukupna mehanička energija konstantna:

$$E = E_k + E_p = \text{konst.} \tag{8}$$

To je zakon o očuvanju mehaničke energije.

Nije li sustav zatvoren, promjena ukupne mehaničke energije jednaka je radu vanjskih sila koje djeluju na sustav

$$E_2 - E_1 = \Delta E_p + \Delta E_k = W. \tag{9}$$

Korisnost nekog stroja η jest omjer između korisnog rada W_k i uloženog rada W_u:

$$\eta = \frac{W_k}{W_u} \tag{10}$$

(η se obično izražava u postocima).

Iz zakona o očuvanju mehaničke energije i količine gibanja primijenjenih na savršeno elastičan sudar tijela mase m_1 i m_2 i brzina $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ proizlaze brzine tijela nakon sudara:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1' &= \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{v}_2' &= \frac{(m_2 - m_1)\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \tag{11}$$

Nakon savršeno neelastičnog sudara tijela se gibaju zajedno brzinom

$$\vec{v}' = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}, \tag{12}$$

a kinetička se energija pritom smanjuje i troši na deformaciju i zagrijavanje. Razlika kinetičkih energija tzv. Q vrijednost sudara jest

$$Q = E_k' - E_k = -\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2, \tag{13}$$

i to je gubitak mehaničke energije.

Ako zajednička normala na ravninu dodira tijela prolazi kroz njihove centre masa, sudar je centralni. Ako su i brzine centara masa na pravcu te zajedničke normale, sudar je izravan centralni.

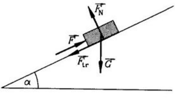
Faktor restitucije pri izravnome centralnome sudaru dvaju tijela (npr. kugli) jednak je omjeru relativnih brzina poslije i prije sudara

$$k = -\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}, \tag{14}$$

Za savršeno elastičan sudar $k = 1$, za savršeno neelastičan $k = 0$, a za djelomično elastičan sudar $0 < k < 1$.

Primjeri

4.1. Čovjek gura teret mase 10 kg stalnom brzinom uz kosinu nagiba 30° i prijeđe 3 m puta. Sila kojom djeluje čovjek ima smjer kosine. Koeficijent trenja između površine tereta i kosine jest 0,2. Izračunajte rad svake pojedine sile i ukupan rad svih sila.



Slika 4.1.

Rješenje

Na predmet djeluje sila teža $\vec{G} = m\,\vec{g}$, normalna reakcija podloge $\vec{F}_N$, sila $\vec{F}$ kojom djeluje čovjek i sila trenja $\vec{F}_{tr}$ (sl. 4.1). Te sile valja rastaviti na komponente uzduž osi x i y, tj s obzirom na smjer paralelan, odnosno okomit na kosinu. Komponenta sile teže G_y i sila $\vec{F}_N$ okomite su na kosinu, tj. na pomak tijela, pa je njihov rad jednak nuli. Nadalje, budući da je tijelo u ravnoteži, bit će

$$\Sigma F_y = F_N - m\,g \cos\alpha = 0,$$

odnosno

$$F_N = 85 \text{ N}.$$

Paralelno s kosinom djeluju sila $\vec{F}$, komponenta sile teže G_x i sila trenja F_{tr}. Budući da se tijelo giba jednoliko po pravcu, i te su sile uravnotežene:

$$\Sigma F_x = F - m\,g \sin\alpha - \mu F_N = 0.$$

Odatle je

$$F = 66 \text{ N}.$$

Rad sile kojom čovjek gura predmet jest

$$W_1 = F\,s = 198 \text{ J}.$$

Rad sile teže jest

$$W_2 = -G_x s = -G\,s \sin\alpha = -147 \text{ J}.$$

(Sila G_x suprotnog je smjera od pomaka, pa se zato pojavljuje predznak minus.)
Rad sile trenja jest

$$W_3 = -F_{tr}\,s = -\mu\,F_N\,s = -51 \text{ J}.$$

Ukupan je rad

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = 0.$$

Taj smo rezultat mogli i očekivati jer se tijelo giba jednoliko po pravcu: ukupna je sila nula, pa je i ukupan rad nula.

4.2. S vrha kosine, visine 1 m i duljine 10 m, klizi tijelo mase 2 kg. Odredite kinetičku energiju koju tijelo postiže pri dnu kosine ako je faktor trenja klizanja 0,06.

Rješenje

Kinetička energija tijela pri dnu kosine jest

$$E_k = m\,g\,h - \vec{F}_\mu \cdot \vec{l},$$

gdje je l duljina kosine, a F_μ sila trenja koja na kosini iznosi (μ faktor trenja): $F_\mu = \mu\, m\, g \cdot \cos\alpha$. Faktor $\cos\alpha$ određuje se iz geometrije kosine

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{h^2}{l^2}}$$

uz h kao visinu kosine. Uvrštenjem u jednadžbu

$$E_k = m\,g\,h - \mu\, m\, g\, l \cos\alpha = m\,g\,l(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

i zamjenom podataka dobiva se $E_k = 7{,}91$ J.

4.3. Pumpa za beton ispumpa u 10 minuta na visinu od 6 metara masu betona potrebnu za betonsku deku dimenzija 6 m · 10 m · 0,2 m. Kolika je snaga pumpe ako je stupanj korisnog djelovanja pumpe 60%? (Gustoća betona je $2{,}3 \cdot 10^3$ kg/m^3.)

Rješenje

Rad obavljen dizanjem mase betona m na visinu h jest

$$W = m\,g\,h. \tag{1}$$

Budući da je $m = \rho \cdot V$, a $V = a\,b\,c$, vrijedi

$$W = \rho\, a\, b\, c\, g\, h. \tag{2}$$

Iz definicija snage i stupnja djelovanja slijedi

$$\eta \cdot P = \frac{W}{t}. \tag{3}$$

Iz (2) i (3) slijedi

$$P = \frac{\rho\, a\, b\, c\, g\, h}{\eta \cdot t}. \tag{4}$$

Uvrštavanjem zadanih veličina dobiva se $P = 4{,}5$ kW.

4.4. Tijelo je izbačeno početnom brzinom v_0 pod kutom α prema horizontali. Odredite maksimalnu visinu koju će doseći uz pretpostavku da na njega djeluje samo konstantna sila teža. Zadatak se mora riješiti:

a) primjenom Newtonova zakona,

b) primjenom zakona o očuvanju energije.

Rješenje

a) Primijenit će se drugi Newtonov zakon

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{g}$$

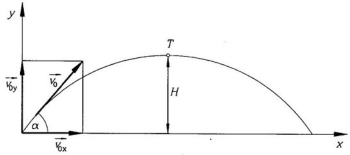
uz početne uvjete

$$t = 0, \qquad \vec{v} = \vec{v}_0, \qquad \vec{r} = 0.$$

Odatle je nakon integriranja

$$\vec{v} = \vec{g}\,t + \vec{v}_0$$

$$\vec{r} = \frac{\vec{g}}{2}t^2 + \vec{v}_0 t.$$



Slika 4.2.

Gibanje se odvija u ravnini (x, y) (v. sl. 4.2). Tijelo će postići maksimalnu visinu $y = H$ kada vertikalna komponenta brzine v_y postane jednaka nuli, odnosno kada brzina $\vec{v}$ postane jednaka $v_{0x}\,\vec{i}$. Tada je

$$v_{0x}\,\vec{i} = -g\,\vec{j}\,t_H + v_{0x}\,\vec{i} + v_{0y}\,\vec{j}.$$

Odatle je vrijeme uspinjanja

$$t_H = \frac{v_{0y}}{g}.$$

Vektor položaja tijela u tom trenutku jest

$$\vec{r} = -\frac{g}{2}\,\vec{j}\,\frac{v_{0y}^2}{g^2} + v_{0x}\,\vec{i}\,\frac{v_{0y}}{g} + v_{0y}\,\vec{j}\,\frac{v_{0y}}{g},$$

odnosno njegova y komponenta (maksimalna visina)

$$y = H = -\frac{g}{2}\frac{v_{0y}^2}{g^2} + \frac{v_{0y}^2}{g} = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

b) Na početku (u točki 0) tijelo je imalo kinetičku energiju $m\,v_0^2/2$ i potencijalnu energiju jednaku nuli. Pri gibanju horizontalna komponenta brzine v_{0x} ostaje ista jer nema horizontalne akceleracije (sila teža djeluje prema dolje), dok se na uzlaznom dijelu krivulje vertikalna komponenta brzine smanjuje od v_{0y} do nule. Kada tijelo dosegne visinu H, potencijalna mu se energija povećala za $m\,g\,H$, a kinetička smanjila od $\frac{1}{2}m\,v_0^2$ na $\frac{1}{2}m\,v_{0x}^2$. Prema zakonu o očuvanju mehaničke energije napisanom za ishodište O i točku T proizlazi:

$$\frac{m}{2}(v_{0x}^2 + v_{0y}^2) = \frac{m}{2}v_{0x}^2 + m\,g\,H. \qquad (1)$$

Iz (1) dobiva se visina hica:

$$H = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Rješavajući taj zadatak uz primjenu zakona o očuvanju mehaničke energije, nije bilo potrebno odrediti stazu po kojoj se tijelo giba, kao što se to radi pri primjeni Newtonovih zakona, već je zadatak riješen povezujući veličine u jednoj točki (O) s veličinama u drugoj točki (T), ne obazirući se na gibanje u točkama između njih. Naravno, kada je potrebno odrediti stazu, ipak se moraju primijeniti Newtonovi zakoni.

4.5. Čovjek je udaljen $d = 3$ m od vertikalnog zida i može baciti kamen mase $m = 50$ g početnom brzinom $v_0 = 10$ m/s. Izabere li kut izbačaja pri kojem kamen pogađa zid na najvišem mogućem mjestu, koliki je taj kut, visina gdje će kamen pogoditi i vrijeme kad će pogoditi. Kolika će biti kinetička energija kamena u trenutku udara o zid i maksimalna visina koju će kamen postići?

Rješenje

Iz Kartezijevih komponenti putanje kamena (u parametarskom obliku gdje je t parametar)

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t$$

i

$$y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{g}{2}t^2$$

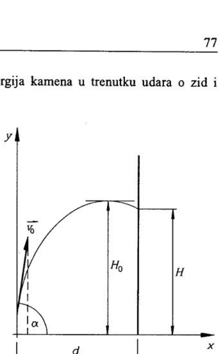
eliminacijom parametra dobiva se putanja u eksplicitnom obliku (parabola)

$$y = x\tan\alpha - x^2\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha} = \mathrm{f}(\alpha).$$

Iz uvjeta da y bude maksimalan za x = d, dobiva se

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0} = \frac{d}{\cos^2\alpha_0} - \frac{g\,d^2\sin\alpha_0}{v_0^2\cos^3\alpha_0} = 0,$$

odnosno



Slika 4.3.

$$\tan\alpha_0 = \frac{v_0^2}{g\,d}, \qquad \alpha_0 = 73{,}6°.$$

Odavde je

$$y(\alpha_0) = \mathrm{d}\tan\alpha_0 - \frac{g\,d^2}{2v_0^2\cos^2\alpha_0}.$$

Budući da je $\cos^2\alpha_0 = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha_0} = \dfrac{1}{1+\dfrac{v_0^4}{g^2d^2}}$, to je

$$y(\alpha_0) = H = \frac{v_0^4 - g^2d^2}{2v_0^2 g} = 4{,}655\,\mathrm{m}.$$

Budući da je

$$E_k = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$$

i vrijedi

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y = \vec{i}\,v_0\cos\alpha_0 + \vec{j}(v_0\sin\alpha_0 - g\,t_0) \quad \text{i} \quad t_0 = \frac{d}{v_0\cos\alpha_0} = 1{,}063\,\mathrm{s},$$

dobiva se

$$E_k = 0{,}2165\ \mathrm{J}.$$

Maksimalna visina hica H_0 dobiva se iz uvjeta

$$\frac{dy}{dx} = \tan\alpha_0 - \frac{g\,x_0}{v_0^2\cos^2\alpha_0} = 0$$

i

$$x_0 = \frac{v_0^2\sin\alpha_0\cos\alpha_0}{g} = 2{,}76\,\mathrm{m}$$

dobiva se

$$y(x_0) = H_0 = \frac{v_0^2}{2g}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{g^2d^2}{v_0^4}} = 4{,}691\,\mathrm{m},$$

tj.

$$x_0 < d, \qquad H < H_0.$$

4.6. Dizalo mase 500 kg ubrza se akceleracijom 1 m/s^2 iz mirovanja do brzine 4 m/s, a zatim se nastavlja dizati jednoliko po pravcu. Za cijelo vrijeme gibanja djeluje stalna sila trenja 1 000 N. Kolika je:

a) prosječna snaga

b) maksimalna snaga potrebna motoru da ubrza dizalo iz mirovanja do 4 m/s?

c) Koliku snagu razvija motor pri jednolikom dizanju?

d) Koliki je rad motora za vrijeme 7 s od početka dizanja?

Rješenje

a) Sila koju mora proizvesti motor dizala jest

$$F_1 = mg + ma + F_{tr},$$

jer motor mora svladati silu težu, silu trenja i dizalo ubrzavati stalnom akceleracijom. Pritom je obavljeni rad motora

$$W_1 = F_1 s = F_1\frac{v_0^2}{2a} = (mg + ma + F_{tr})\frac{v_0^2}{2a} = 51{,}2\,\mathrm{kJ}.$$

Budući da je taj rad obavljen u vremenu $t_1 = v_0/a = 4$ s, potrebna je prosječna snaga

$$\overline{P}_1 = \frac{W_1}{t_1} = 12{,}8\,\mathrm{kW}.$$

b) Trenutna snaga $P = F\,v$ mijenja se za vrijeme jednolikog ubrzanja od nule do maksimalne vrijednosti P_m

$$P_m = F_1 v_0 = 25{,}6\,\mathrm{kW}.$$

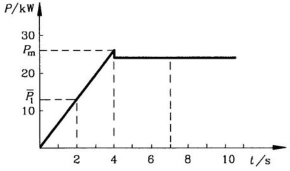
Uočava se da je srednja snaga $\overline{P}$ jednaka polovici maksimalne snage:

$$\overline{P} = F_1\overline{v} = F_1\frac{0+v_0}{2} = F_1\frac{v_0}{2} = \frac{P_m}{2} = 12{,}8\,\mathrm{kW}.$$

c) Pri jednolikom dizanju snaga je

$$P_2 = F_2 v_0 = (mg + F_{tr})v_0 = 23{,}6\,\mathrm{kW}.$$

d) Rad za vrijeme ubrzavanja već je izračunan. Rad za vrijeme jednolikog gibanja jest



Slika 4.4.

$$W_2 = F_2 s = (mg + F_{tr})v_0 t_2 = 70{,}9\,\text{kJ}.$$

Rad je jednak površini ispod krivulje na sl. 4.4. Provjerite!

4.7. Automobil na vodoravnoj cesti razvija brzinu v_0 i zatim nastavlja vožnju isključenim motorom. Nakon koliko vremena mu se brzina smanjuje na $v_0/2$ ako je otpor gibanju proporcionalan kvadratu brzine. Izračunajte rad sila otpora za to vrijeme.

Rješenje

Jednadžba gibanja automobila glasi

$$m\frac{dv}{dt} = -k\,v^2.$$

Ovisnost brzine o vremenu dobiva se integracijom:

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt \Rightarrow t = \frac{m}{k}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\right), \qquad v = \frac{m\,v_0}{m + k\,v_0 t}.$$

Ako je $v = \frac{v_0}{2}$, vrijeme je $t = \frac{m}{k\,v_0}$.

Rad sila otpora jest

$$W_{ot} = \int \vec{F}_{ot}\cdot d\vec{s} = -k\int v^2\cdot v\,dt = -k\,m^3\int_0^{\frac{m}{kv_0}}\frac{v_0^3}{(m + k\,v_0 t)^3}dt = -\frac{3\,m\,v_0^2}{8}.$$

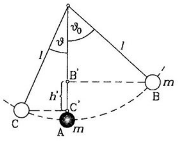
Taj se rad može izračunati i iz činjenice da je jednak promjeni kinetičke energije automobila

$$W_{ot} = \Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} = \frac{1}{2}m\frac{v_0^2}{4} - \frac{1}{2}m\,v_0^2 = -\frac{3\,m\,v_0^2}{8}.$$

4.8. Primjenom zakona održanja energije izračunajte brzinu matematičkog njihala amplitude ϑ_0 kada prolazi kroz ravnotežni položaj.

Rješenje

U amplitudnom položaju (točka B) kinetička je energija nula, a potencijalna je maksimalna i iznosi (v. sl. 4.5)



Slika 4.5.

$$E_{pB} = m g h_0 = m g l (1 - \cos\vartheta_0),$$

gdje je h_0 = B'A.

Kada tijelo prolazi kroz položaj ravnoteže (točka A), kinetička je energija maksimalna i iznosi $\frac{m v_A^2}{2}$, a potencijalna je energija nula. Ako se zanemare gubici (otpor zraka), zakon očuvanja mehaničke energije zahtijeva:

$$\frac{m v_A^2}{2} = m g l (1 - \cos\vartheta_0)$$

$$v_A = \sqrt{2 g l (1 - \cos\vartheta_0)}.$$

Kuglica ima istu brzinu kao da je slobodno pala s visine

$$h_0 = \mathrm{B'A} = l(1 - \cos\vartheta_0).$$

U nekom drugom položaju C, visinska je razlika B'C' = $h' = l(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)$, pa je brzina

$$v_C = \sqrt{2 g h'} = \sqrt{2 g l (\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)}.$$

4.9. Na niti duljine 1 m obješeno je tijelo mase 3 kg. Na koju je visinu potrebno podići to tijelo iz položaja ravnoteže da bi pri prolazu kroz taj položaj napetost niti iznosila 50 N?

Rješenje

Napetost niti jednaka je zbroju težine i centripetalne sile

$$F_N = m g + \frac{m v^2}{l}. \tag{1}$$

Primjena zakona očuvanja energije na tijelo daje sljedeću relaciju

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g h. \tag{2}$$

Iz (1) i (2) dobiva se

$$h = \frac{l(F_N - m g)}{2 m g}. \tag{3}$$

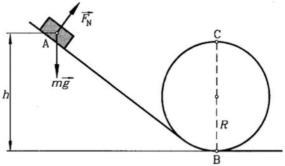
Uvrštavanjem zadanih veličina u (3) dobiva se

$$h = 0{,}35 \text{ m}.$$

4.10. Predmet klizi niz petlju sastavljenu od kosine na koju se nadovezuje kružna staza polumjera 50 cm (sl. 4.6). S koje minimalne visine predmet mora krenuti bez početne brzine da bi uspješno napravio petlju? Riješite zadatak primjenom zakona očuvanja energije. (Usporedite s primjerom 3.22, str. 65)

Rješenje

U točki *A* tijelo počinje kliziti bez početne brzine (sl. 4.6). U svakoj točki putanje na tijelo djeluju sila teža $m\vec{g}$ i sila reakcije podloge $\vec{F}_N$. Minimalna brzina, koju predmet smije imati u točki *C*, dobiva se iz uvjeta da je reakcija podloge u toj točki jednaka nuli, pa da sila teža daje potrebnu centripetalnu silu



Slika 4.6.

$$\frac{m v_C^2}{R} = m g.$$

Odatle je

$$v_C = \sqrt{g R}.$$

Ako je $v < \sqrt{g R}$, sila teža je veća nego potrebna centripetalna sila i predmet će pasti prije nego što dođe do točke C. Ako je $v \geq \sqrt{g R}$, potrebnu centripetalnu silu dat će sila teža i reakcija podloge koje u toj točki imaju isti smjer.

Da bi se odredila visina s koje predmet mora krenuti, primijenit će se zakon o očuvanju mehaničke energije. U točki A ukupna energija jest

$$E_A = (E_k + E_p)_A = E_{pA} = m g h,$$

jer je u toj točki $E_k = 0$. U točki C je

$$E_C = (E_k + E_p)_C = \frac{1}{2} m v_C^2 + m g (2R) = \frac{5}{2} m g R.$$

Budući da smo pretpostavili kako nema gubitaka i kako je mehanička energija očuvana, bit će $E_A = E_C$, odnosno

$$h = \frac{5}{2} R = 1{,}25\,\mathrm{m}.$$

Sličan zadatak rješavali smo primjenom Newtonovih zakona u 3. poglavlju (v. primjer 3.22).

4.11. Vojnik na skijama opali iz puške pod kutom od 60° prema horizontu iz mirujućeg položaja na ravnom terenu. Nakon kolikog će se puta vojnik zaustaviti ako je faktor trenja između površine skija i snijega 0,01, masa metka 0,01 kg, početna brzina ispaljenog metka 900 m/s, a masa vojnika, puške i skija je 60 kg?

Rješenje

Označimo masu vojnika sa skijama i puškom sa m_1 a metka sa m. Za izolirani sustav vojnik na skijama, puška i metak vrijedi zakon održanja količine gibanja

$$\vec{p}_m + \vec{p}_{m_1} = 0. \tag{1}$$

Komponenta od (1) u horizontalnom smjeru glasi

$$m v_m \cos\alpha - m_1 v_0 = 0. \tag{2}$$

Iz relacije (2) dobiva se za početnu brzinu vojnika sljedeći izraz:

$$v_0 = \frac{m\, v_m \cos\alpha}{m_1}. \tag{3}$$

Vojnik će se zaustaviti kada njegova početna kinetička energija bude jednaka radu sile trenja:

$$\frac{m_1 v_0^2}{2} = F_{tr}\, s. \tag{4}$$

Za silu trenja vrijedi sljedeći izraz

$$F_{tr} = \mu G = \mu\, m_1 g. \tag{5}$$

Uvrštavanjem (5) u (4) dobiva se za prijeđeni put

$$s = \frac{v_0^2}{2\mu g}. \tag{6}$$

Iz (3) i (6) slijedi

$$s = \frac{m^2 v_m^2 \cos^2\alpha}{2\mu g\, m_1^2} = 0{,}029\ \text{m}.$$

4.12. Kakvoća čeličnih kuglica ispituje se puštanjem kuglica da slobodno padaju s visine H na ravnu čeličnu ploču postavljenu pod kutom α prema horizontali. Kuglice se od ploče odbijaju brzinom za faktor restitucije k manjom od brzine kojom udaraju o ploču. Da bi zadovoljile zahtjevu kakvoće, odbijene kuglice moraju preletjeti prepreku u točki A (vidi sl. 4.7). Ako je zadano: $H = 0{,}9$ m, $\alpha = 10°$ i ako k ne smije biti manji od 0,7, izračunajte visinu prepreke h i koordinatu s.

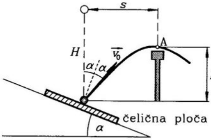
Rješenje

Slobodno padajući s visine H, kuglice udaraju o čeličnu ploču brzinom

$$v = \sqrt{2gH},$$

od koje se odbijaju brzinom umanjenom za faktor restitucije k

$$v_0 = k\, v = k\sqrt{2gH},$$



Slika 4.7.

pod kutom od $(90 - 2\alpha)$, a to se uočava iz geometrijskih relacija na slici. Staza odbijenih kuglica određena je kinematikom kosog hica. Visina h je prema tome, najveća visina kosog hica

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2(90° - 2\alpha)}{2g} = \frac{2\, g\, H\, k^2 \sin^2(90° - 2\alpha)}{2g} = 0{,}389\ \mathrm{m}.$$

Koordinatu s određuje vrijeme u kojem hitac doseže svoju najveću visinu

$$s = v_{0x} \cdot t_{\mathrm{maks}} = v_0 \cos(90° - 2\alpha) \cdot \frac{v_0 \sin(90° - 2\alpha)}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2(90° - 2\alpha)}{2g}.$$

Supstitucijom početne brzine v_0 dobiva se koordinata s

$$s = H\, k^2 \sin 2(90° - 2\alpha) = 0{,}283\ \mathrm{m}.$$

4.13. Metak mase $4 \cdot 10^{-3}$ kg okomito udari brzinom 600 m/s uteg balističkog njihala oblika kvadra, debljine 0,25 m, mase 1 kg. Metak prolazi kroz uteg i izlazi brzinom 200 m/s. Izračunajte konstantnu silu koja usporava metak pri prolazu kroz uteg.

Rješenje

Zakon očuvanja količine gibanja primijenjen na sustav koji se sastoji od metka i balističkog njihala glasi

$$m\, v_1 = m\, v_2 + M\, v_3, \tag{1}$$

gdje je v_3 brzina kojom se nakon prolaza metka giba balističko njihalo.

Zakon očuvanja energije glasi

$$\frac{1}{2} m\, v_1^2 = \frac{1}{2} M\, v_3^2 + \frac{1}{2} m\, v_2^2 + Q, \tag{2}$$

gdje je Q energija utrošena na deformaciju balističkog njihala i metka.

Stalna sila koja usporava metak pri prolazu kroz uteg dobiva se izjednačivanjem rada te sile po cijeloj debljini utega s energijom Q, tj.

$$Q = F\, d. \tag{3}$$

Iz (2) i (3) izlazi

$$F = \frac{m\, v_1^2 - m\, v_2^2 - M\, v_3^2}{2d}. \tag{4}$$

Iz (1) izlazi

$$v_3 = \frac{m\,(v_1 - v_2)}{M}. \tag{5}$$

Uvrštavanjem (5) u (4) dobiva se

$$F = \frac{m\, M\,(v_1^2 - v_2^2) - m^2 (v_1 - v_2)^2}{2\, M\, d}. \tag{6}$$

Stavljanjem zadanih veličina u (6) dobiva se

$$F = 2\,555\ \mathrm{N}.$$

4.14. Kugla mase m_1 i brzine v_1 centralno se sudari s kuglom mase m_2 i brzine v_2. Izračunajte brzine kugli nakon sudara i Q vrijednost sudara. Pretpostavite da je sudar djelomično elastičan s faktorom restitucije k. Koliki je rezultat u posebnom slučaju $v_2 = 0$, $m_2 \gg m_1$, $k = 0{,}7$?

Rješenje

Za sudar vrijedi zakon održanja količine gibanja

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'$$

ili, drukčije napisano

$$m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_1') = m_2(\vec{v}_2' - \vec{v}_2).$$

Iz definicije faktora restitucije dobiva se

$$\vec{v}_1' - \vec{v}_2' = k(\vec{v}_2 - \vec{v}_1).$$

Rješavanjem tih dviju jednadžbi dobivaju se brzine nakon sudara:

$$\vec{v}_1' = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 - k\, m_2(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 - k\, m_2)\,\vec{v}_1 + m_2(1+k)\,\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v}_2' = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + k\, m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{m_1 + m_2} = \frac{m_1(1+k)\,\vec{v}_1 + (m_2 - k\, m_1)\,\vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Razlika kinetičkih energija poslije i prije sudara zove se Q-vrijednost sudara i iznosi

$$Q = E_k' - E_k = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1}{2}(\vec{v}_1' - \vec{v}_1)(\vec{v}_1' + \vec{v}_1) + \frac{m_2}{2}(\vec{v}_2' - \vec{v}_2)(\vec{v}_2' + \vec{v}_2) =$$

$$= \frac{m_1}{2}(\vec{v}_1' - \vec{v}_1)(\vec{v}_1 + v_1') - \frac{m_1}{2}(\vec{v}_1' - \vec{v}_1)(\vec{v}_2' + \vec{v}_2) = \frac{m_1}{2}(\vec{v}_1' - \vec{v}_1)(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)(1-k).$$

Budući da je

$$\vec{v}_1' - \vec{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)(1+k),$$

bit će

$$Q = -\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2(1-k^2).$$

Ako je $v_2 = 0$, $m_2 \gg m_1$, tada je $\vec{v}_1' = -k\,\vec{v}_1$, $v_2' = 0$, $Q = -\frac{m_1 v_1^2}{2}(1-k^2) = -0{,}51\,E_{k1}$.

Za savršeno elastičan sudar kuglice i zida ($k = 1$), $Q = 0$, te se kinetička energija kuglice za vrijeme sudara ne mijenja. Ako je, naprotiv, sudar savršeno neelastičan ($k = 0$), $Q = -\frac{m_1 v_1^2}{2}$, cijela će se kinetička energija kuglice pretvoriti u unutrašnju energiju.

4.15. Čestica mase m i brzine v elastično se sudari s česticom jednake mase koja miruje. Kako se gibaju čestice nakon sudara?

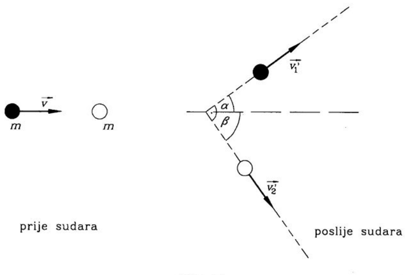
Rješenje

Iz zakona održanja količine gibanja slijedi

$$\vec{p} = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

ili

$$m\,\vec{v} = m\,\vec{v}_1' + m\,\vec{v}_2'. \tag{1}$$



Slika 4.8.

Budući da je sudar savršeno elastičan, vrijedi i zakon održanja kinetičke energije

$$E_{\text{k prije}} = E_{\text{k poslije}}$$

ili

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{p_1'^2}{2m} + \frac{p_2'^2}{2m}. \tag{2}$$

Ako se jednadžba (1) kvadrira, dobiva se

$$\vec{p}^2 = \vec{p}_1'^2 + 2\vec{p}_1' \cdot \vec{p}_2' + \vec{p}_2'^2. \tag{3}$$

Usporede li se (3) i (2), može se zaključiti

$$\vec{p}_1' \cdot \vec{p}_2' = 0.$$

To je ispunjeno ako je:

a) $\vec{p}_1' = 0$, nakon sudara čestice izmjene brzine: prva miruje, a druga se giba brzinom $\vec{v}$. ($\vec{p}_2' = 0$ ne dolazi u obzir jer tada ne bi ni došlo do sudara).

b) $\vec{p}_1' \perp \vec{p}_2'$, nakon sudara brzine čestice zatvaraju kut od 90°, pa se čestice gibaju okomito jedna prema drugoj.

Ako se (1) napiše uz pomoć komponenata:

$$v = v_1' \cos\alpha + v_2' \cos\beta = v_1' \cos\alpha + v_2' \sin\alpha$$

$$v_1' \sin\alpha = v_2' \sin\beta = v_2' \cos\alpha,$$

dobit će se brzine nakon sudara:

$$v_1' = v\cos\alpha$$

$$v_2' = v\sin\alpha.$$

4.16. Potrebno je razmotriti elastičan sudar deuterona brzine v_1 i protona koji miruje. Pod kojim se maksimalnim kutom može otkloniti deuteron? Koliki je pritom kut otklona protona?

Rješenje

Iz zakona održanja energije i količine gibanja dobiva se (sl. 4.9):

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}$$

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' \cos\alpha + m_2 v_2' \cos\beta; \qquad m_1 v_1' \sin\alpha = m_2 v_2' \sin\beta.$$

Deuteron se pritom otklanja za kut α od prvobitnog smjera gibanja, a proton ode brzinom v_2' pod kutom β. Iz tih će se jednadžbi izračunati brzina deuterona nakon sudara tako da se eliminiraju brzina v_2' i kut β:

$$(m_1 + m_2)\, v_1'^2 - 2 m_1 v_1 v_1' \cos\alpha + (m_1 - m_2)\, v_1^2 = 0$$

$$v_1' = \frac{m_1 \cos\alpha \pm \sqrt{m_1^2 \cos^2\alpha - (m_1^2 - m_2^2)}}{m_1 + m_2} v_1.$$

Da bi ta jednadžba imala fizičko rješenje, mora biti ispunjeno

$$m_1^2 \cos^2\alpha - (m_1^2 - m_2^2) \geq 0$$

$$m_1^2 (\cos^2\alpha - 1) \geq -m_2^2$$

$$\sin^2\alpha \leq \frac{m_2^2}{m_1^2} = \frac{1}{4}$$

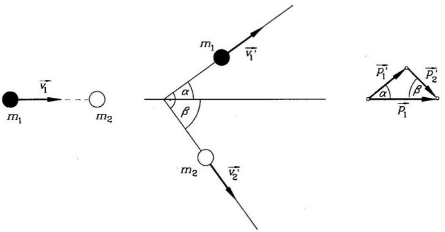
$$\alpha \leq 30°.$$

Deuteron se može otkloniti pod kutom koji je manji ili je jednak 30°.

Ako je taj kut maksimalan $\alpha = 30°$, bit će brzina deuterona

$$v_1' = \frac{2v_1}{3} \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} v_1.$$

Tada je brzina protona



Slika 4.9.

$$v_2' = \sqrt{\frac{m_1(v_1^2 - v_1'^2)}{m_2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} v_1,$$

odnosno kut otklona protona

$$\sin\beta = \frac{m_1 v_1' \sin\alpha}{m_2 v_2'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 30°.$$

4.17. Hokejska pločica (pak) B miruje na glatkoj, ledenoj, vodoravnoj površini. Druga pločica A, upućena početnom brzinom 5 m/s s udaljenosti 10 m od pločice B, sudara se s pločicom B i odbija pod kutom 30° u odnosu prema početnom pravcu kretanja. Pločica B otklanja se pod kutom od 45° u odnosu prema početnom smjeru gibanja pločice A. Izračunajte put koji će prijeći pločica B ako je faktor trenja između pločice i leda 0,05.

Rješenje

Za izolirani sustav koji se sastoji od pločica A i B vrijedi zakon održanja količine gibanja, pa je ukupna količina gibanja neposredno prije sudara jednaka ukupnoj količini gibanja neposredno poslije sudara

$$m_A \vec{v}_A = m_A \vec{v}_A' + m_B \vec{v}_B'. \tag{1}$$

Budući da je $m_A = m_B$, iz (1) izlazi

$$\vec{v}_A = \vec{v}_A' + \vec{v}_B'. \tag{2}$$

Relacija (2) napisana po komponentama u pravokutnom koordinatnom sustavu kojem se pozitivni smjer osi apscisa podudara s početnim smjerom kretanja pločice A poprima ovaj oblik:

$$\begin{aligned} v_A &= v_A' \cos\alpha + v_B' \cos\beta \\ v_A' \sin\alpha &= v_B' \sin\beta. \end{aligned} \tag{3}$$

Iz (3) dobiva se

$$v_B' = \frac{v_A}{\cos\beta + \sin\beta \operatorname{ctan}\alpha}. \tag{4}$$

Zbog trenja $v_A < v_{A0}$ i izračunat ćemo ga primjenom zakona o očuvanju energije na pločicu A

$$F_{tr} s_A + \frac{1}{2} m_A v_A^2 = \frac{1}{2} m_A v_{A0}^2. \tag{5}$$

Uzimajući u obzir da vrijedi $F_{tr} = \mu\, m_A\, g$, iz (5), slijedi

$$v_A^2 = v_{A0}^2 - 2\mu g s_A. \tag{6}$$

Put pločice B do zaustavljanja dan je izrazom

$$s_B = \frac{v_B'^2}{2\mu g}. \tag{7}$$

Uvrštavanjem (4) i (6) u (7) dobiva se:

$$s_B = \frac{v_{A0}^2 - 2\mu g s_A}{2\mu g (\cos\beta + \sin\beta \operatorname{ctan}\alpha)^2} = \frac{(25 - 2\cdot 0{,}05\cdot 9.81\cdot 10)\,\mathrm{m^2\,s^{-2}}}{2\cdot 0{,}05\cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}(\cos 45° + \sin 45° \operatorname{ctan} 30°)^2} = 4{,}15\,\mathrm{m}.$$

4.18. Kugla mase $2m$ baci se okomito uvis brzinom $v_0 = 15$ m/s. Tankom niti dužine $l = 5$ m s tom je kuglom povezana kugla mase m. U kojem će trenutku i na kojoj će se udaljenosti od mjesta bacanja kugle sudariti? Nit je potpuno nerastegljiva.

Rješenje

U trenutku kada se nit napne kugla mase $2m$ ima brzinu v. Prema zakonu očuvanja energije, dobivamo

$$E_{k0} = E_k + E_p$$

$$\frac{2mv_0^2}{2} - \frac{2mv^2}{2} = 2mgl$$

$$v = (v_0^2 - 2gl)^{\frac{1}{2}} = 11{,}26\,\text{m/s}.$$

Vrijeme t_1 proteklo do natezanja niti, tj. da bi kugla prevalila put l iznosi

$$\frac{g}{2}t_1^2 - v_0 t_1 + l = 0$$

$$t_1 = \frac{v_0 - (v_0^2 - 2gl)^{\frac{1}{2}}}{g} = 0{,}38\text{s}.$$

U tom trenutku kugle uzajamno djeluju preko niti. Pretpostavit ćemo da je to vrijeme uzajamnog djelovanja veoma malo. Iz zakona očuvanja količine gibanja i energije dobit ćemo brzine:

$$2mv = 2mu_1 + mu_2$$

$$\frac{2mv^2}{2} = \frac{2mu_1^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2}$$

$$u_1 = \frac{1}{3}v \qquad u_2 = \frac{4}{3}v.$$

Nakon toga jednadžbe za put kugli glase:

$$y_1 = l + u_1 t - \frac{gt^2}{2}$$

$$y_2 = u_2 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Kugle će se sudariti nakon vremena t_2.

U trenutku sudara t_2, $y_1 = y_2$.

$$l + u_1 t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = u_2 t_2 - \frac{gt_2^2}{2}$$

$$t_2 = \frac{l}{u_2 - u_1} = \frac{l}{v} = \frac{l}{(v_0^2 - 2gl)^{\frac{1}{2}}} = 0{,}444\,\text{s}.$$

Ukupno vrijeme do sudara

$$T = t_1 + t_2 = 0{,}82\text{ s}.$$

Mjesto sudara

$$y_2(t_2) = u_2 t_2 - \frac{g}{2}t_2^2 = \frac{4}{3}vt_2 - \frac{g}{2}t_2^2 = \frac{4}{3}l - \frac{g}{2}t_2^2 = 5{,}7\,\text{m}.$$

4.19. Čestica mase m_1 elastično se sudara s mirnom česticom mase m_2. Odredite omjer njihovih masa kod kojeg je prijenos energije na drugu česticu maksimalan u slučaju centralnog sudara.

Rješenje

Označimo sa E kinetičku energiju prije sudara, a sa E_1 i E_2 kinetičke energije nakon sudara.

Iz zakona očuvanja količine gibanja

$$m_1 v = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$m_1 v = \sqrt{2 m_1 E}$$

$$\sqrt{2 m_1 E} = \sqrt{2 m_1 E_1} + \sqrt{2 m_2 E_2}$$

$$\sqrt{E} = \sqrt{E_1} + \sqrt{x E_2} \qquad x = \frac{m_2}{m_1}.$$

Kvadriramo li taj izraz, dobivamo

$$E = E_1 + x E_2 + 2\sqrt{x E_1 E_2}.$$

Iz zakona očuvanja energije slijedi

$$E = E_1 + E_2,$$

$$E_1 + E_2 = E_1 + x E_2 + 2\sqrt{x E_1 E_2}$$

$$(1 - x)E_2 = 2\sqrt{x E_1 E_2}$$

$$(1 - x)^2 E_2 = 4x E_1 = 4x(E - E_2)$$

$$\frac{E_2}{E} = \frac{4x}{(1+x)^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{E_2}{E}\right) = \frac{4(1+x) - 8x}{(1+x)^3} = 0$$

$$4(1+x) - 8x = 0.$$

$$x = 1,$$

$$m_1 = m_2.$$

4.20. Dvije se glinene kugle mase $m_1 = 1$ kg i $m_2 = 2$ kg gibaju brzinama $v_1 = 10$ m/s i $v_2 = 15$ m/s i neelastično se sudaraju. Kut između smjerova brzina iznosi $\varphi = 60°$. Potrebno je odrediti kolika se energija gubi na deformaciju i zagrijavanje.

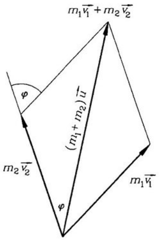
Rješenje

Zakoni očuvanja količine gibanja i energije:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} + Q,$$

gdje je u brzina slijepljenih kugli nakon sudara.



Slika 4.10.

Veličina u^2 određuje se po kosinusovu poučku (sl. 4.10):

$$(m_1 + m_2)^2 u^2 = m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 - 2\, m_1 v_1 m_2 v_2 \cos(180° - \varphi)$$

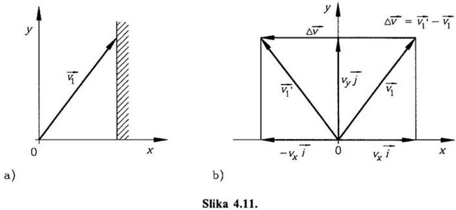
$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - 2\, m_1 v_1 m_2 v_2 \cos(180° - \varphi)}{2(m_1 + m_2)} + Q$$

$$Q = \frac{m_1 m_2 \left[v_1^2 + v_2^2 + 2\, v_1 v_2 \cos(180° - \varphi) \right]}{2(m_1 + m_2)} = 58{,}3\ \text{J}.$$

4.21. Kuglica mase 10^{-3} kg i brzine $\vec{v}_1 = (52\vec{i} + 66\vec{j})$ m/s udara o ravnu ploču okomito položenu prema osi x (slika 4.11.a). Pretpostavivši savršeno elastičan sraz, izračunajte količinu gibanja što je kuglica zadobiva nakon sraza s pločom.

Rješenje

Sraz kuglice s pločom opisan je prema drugom Newtonovu zakonu jednadžbom $F\Delta t = m\Delta v$, gdje je Δv promjena brzine kuglice koja se događa prilikom sraza. Vektorski dijagram brzina prikazan je slikom 4.11.b.



Slika 4.11.

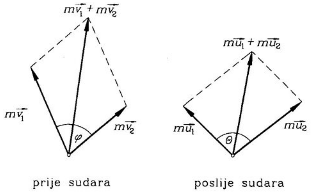
Savršeno elastičan sraz u ovom primjeru karakterizira očuvanje iznosa brzine, $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_1'|$, odnosno prema gornjoj je slici $\vec{v}_1 = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$ dok je $\vec{v}_1' = -v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$. Promjena je brzine, dakle $\Delta\vec{v} = -2v_x\vec{i}$. Odgovarajuća promjena količine gibanja jest $\Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v}$:

$$\Delta\vec{p} = -2\,m\,v_x\,\vec{i} = -0{,}104\,\vec{i}\ \text{kg m/s},$$

a količina gibanja nakon sraza iznosi

$$\vec{p}_1 = (-0{,}052\,\vec{i} + 0{,}066\,\vec{j})\ \text{kg m/s}.$$

4.22. Dvije se kuglice jednakih masa, gibajući se brzinama $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ elastično sudaraju. Kut između vektora brzina je φ. Brzina kuglica nakon sudara je $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$. Odredite kut između brzina nakon sudara.



Slika 4.12.

Rješenje

Prema zakonima očuvanja:

$$m\,\vec{v}_1 + m\,\vec{v}_2 = m\,\vec{u}_1 + m\,\vec{u}_2$$

$$\frac{m\,v_1^2}{2} + \frac{m\,v_2^2}{2} = \frac{m\,u_1^2}{2} + \frac{m\,u_2^2}{2}.$$

Budući da je $m\,(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = m\,(\vec{u}_1 + \vec{u}_2)$ iz paralelograma prema kosinusovu poučku izlazi:

$$m^2(v_1^2 + v_2^2 - 2\,v_1 v_2 \cos(180^\circ - \varphi)) = m^2(u_1^2 + u_2^2 - 2\,u_1 u_2 \cos(180^\circ - \theta))$$

$$v_1 v_2 \cos\varphi = u_1 u_2 \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{v_1 v_2 \cos\varphi}{u_1 u_2}.$$

4.23. Klizeći ledenom horizontalnom površinom hokejska pločica (pak) mase m i brzine $v_1 = 5$ m/s sudara se s drugom pločicom iste mase koja miruje. U trenutku dodira spojnica je centra masa okomita na ravninu dodira i s pravcem brzine $\vec{v}_1$ zatvara kut od 30° (sl. 4.13). Odredite brzine nakon sudara. Pod kojim se kutovima odbijaju pločice u odnosu prema početnom smjeru gibanja prve pločice? (Zanemarite trenje.)

Rješenje

To je centralni sudar dvaju tijela jer zajednička normala na ravninu dodira prolazi kroz njihove centre masa. Pretpostavit ćemo da su pločice savršeno glatke (da nema trenja) i da je okomita reakcija podloge F_N jedina sila koja djeluje. Ona će promijeniti x-komponente brzine u okomitom smjeru, dok će y-komponente brzine u ravnini dodira ostati pri sudaru nepromijenjene.

Brzine pločica prije sudara iznose:

$$v_{1x} = v_1 \cos\beta = 4{,}33\ \mathrm{m\,s^{-1}} \qquad v_{1y} = -v_1 \sin\beta = -2{,}5\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

$$v_{2x} = 0 \qquad v_{2y} = 0.$$

Pri sudaru y-komponente brzina se neće promijeniti, pa je

$$v'_{1y} = v_{1y} = -2{,}5\ \mathrm{m\,s^{-1}} \qquad v'_{2y} = v_{2y} = 0.$$

Prema definiciji omjer konačne i početne komponente relativne brzine okomite na ravninu dodira je faktor restitucije s negativnim predznakom

$$k = -\frac{v'_{2x} - v'_{1x}}{v_{2x} - v_{1x}}.$$

Za sudar vrijedi i zakon očuvanja količine gibanja

$$m\,v_{1x} + m\,v_{2x} = m\,v'_{1x} + m\,v'_{2x}\,.$$

Iz te dvije jednadžbe dobivamo komponente x brzina nakon sudara:

$$v'_{1x} = \frac{v_{1x}}{2}(1-k) + \frac{v_{2x}}{2}(1+k) = 2{,}165\,(1-k)\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

$$v'_{2x} = \frac{v_{1x}}{2}(1+k) + \frac{v_{2x}}{2}(1-k) = 2{,}165\,(1+k)\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

a) $k = 1$ (savršeno elastičan sudar)

$$v'_{1x} = 0 \qquad v'_{2x} = 4{,}33\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

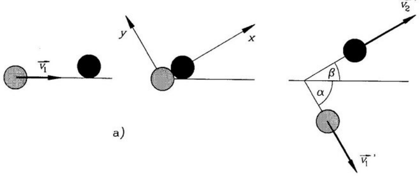
$$v'_{1y} = -2{,}5\ \mathrm{m\,s^{-1}} \qquad v'_{2y} = 0.$$

Prva pločica otklanja se pod kutom $\alpha = 60°$, a druga pod kutom $\beta = 30°$ prema početnom smjeru gibanja prve pločice.

b) $k = 0{,}8$ (djelomično elastični sudar)

$$v'_{1x} = 0{,}433\ \mathrm{m\,s^{-1}} \qquad v'_{2x} = 3{,}9\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

$$v'_{1y} = -2{,}5\ \mathrm{m\,s^{-1}} \qquad v'_{2y} = 0.$$



Slika 4.13.

Prva pločica otklanja se pod kutom $\alpha = 50°$, a druga pod kutom $\beta = 30°$ prema početnom smjeru prve pločice.

c) $k = 0$ (savršeno plastičan sudar)

$$v'_{1x} = 2{,}165 \text{ m s}^{-1} \quad v'_{2x} = 2{,}165 \text{ m s}^{-1}$$

$$v'_{1y} = -2{,}5 \text{ m s}^{-1} \quad v'_{2y} = 0.$$

Prva se pločica otklanja pod kutom $\alpha = 19{,}1°$, a druga pod kutom $\beta = 30°$ prema početnom smjeru prve pločice.

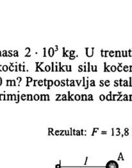
Zadaci

4.1. Cestom nagiba 30° spušta se automobil čija je ukupna masa $2 \cdot 10^3$ kg. U trenutku kada brzina automobila iznosi 20 m/s vozač je započeo kočiti. Koliku silu kočenja valja primijeniti da bi se automobil zaustavio na putu od 100 m? Pretpostavlja se stalna sila kočenja paralelna s nagibom. (Zadatak valja riješiti primjenom zakona održanja energije.)

Rezultat: $F = 13{,}8$ kN

4.2. Na šipku (zanemarive mase) na postolju (sl. 4.14) privezana je nit duljine $l = 30$ cm s kuglicom mase m (matematičko njihalo). Ako se postolje mase 2 m po podlozi može gibati bez trenja, kolika će biti njegova brzina kada masa ispuštena iz točke A prolazi kroz položaj ravnoteže?

Rezultat: $v = 0{,}99$ m/s



Slika 4.14.

4.3. Automobil mase 1 000 kg giba se stalnom brzinom 72 km/h uz brijeg uspona 10%. Faktor trenja (otpora vuče) iznosi 0,05. Koliku snagu razvija motor automobila?

Kolika bi prosječna snaga bila potrebna da se automobil jednoliko ubrza, akceleracijom 1 m/s^2 do brzine od 108 km/h?

Rezultat: $P = 29{,}4$ kW; $P = 61{,}73$ kW

4.4. Plastična loptica pada s visine 2 m na pod i odbija se nekoliko puta uzastopce. Koliki je faktor restitucije ako je od ispuštanja do drugog sraza loptice s podom prošlo 1,8 sekundi?

Rezultat: $k = 0{,}91$

4.5. Kamen je bačen okomito uvis početnom brzinom v. Potrebno je pokazati da je visina h do koje se kamen popne, ako se zanemari otpor zraka, veća od visine h_0 na koju se kamen popne, ako je zadana sila otpora zraka F. Kakav je odnos između vremena t (da se popne na visinu h) i vremena t_0 (da se popne na visinu h_0)?

Rezultat: $h_0 < h$; $t_0 < t$

4.6. Kuglica mase m giba se brzinom v i udari u mirnu kuglicu mase $m/2$. Kolike su brzine kuglica nakon sudara ako su kuglice a) od bjelokosti ($k = 1$) i b) od čelika ($k = 0{,}6$),

c) od gline ($k = 0$)? Sudar je izravni centralni. Koliki je gubitak kinetičke energije zbog deformacije i zagrijavanja.

Rezultat: a) $v_1' = v/3$; $v_2' = 4/3\,v$, $Q = 0$; b) $v_1' = 0{,}47\,v$; $v^2 = 1{,}07\,v$, $Q = 0{,}11\,m v^2$; c) $v_1' = v_2' = 0{,}67\,v$, $Q = 0{,}17\,m\,v^2$

4.7. Dvije male kuglice, masa m_1 i m_2, imaju isti naboj Q. Kada su se kuglice nalazile na vrlo velikoj udaljenosti jedna od druge, prva je dobila brzinu $\bar{v}$ u smjeru druge kuglice, koja je u tom trenutku mirovala. Potrebno je naći minimalnu udaljenost na koju će se približiti kuglice, ako se pretpostavi da one međusobno uzajamno djeluju samo električnom silom, i to uz uvjete:

a) $Q = 10^{-6}\,\mathrm{C}$ $\quad v = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ $\quad m_1 = 1\,\mathrm{g}$ $\quad m_2 = 9\,\mathrm{g}$
b) $Q = 10^{-6}\,\mathrm{C}$ $\quad v = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ $\quad m_1 = 9\,\mathrm{g}$ $\quad m_2 = 1\,\mathrm{g}$.

Rezultat: $d = 20$ cm u oba slučaja

4.8. N blokova mase m poredani su na malim međusobnim udaljenostima uzduž pravca na vodoravnoj površini po kojoj mogu kliziti bez trenja. Blok mase $M > m$ približava se slijeva tom linearnom nizu blokova početnom brzinom v_0. Kakav je izraz za brzine svih blokova na kraju svih sudara?

Potrebno je pokazati da su količina gibanja i kinetička energija očuvane. Pretpostavite da su svi sudari savršeno elastični.

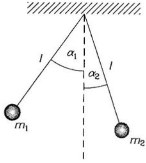
Rezultat: brzina bloka mase M u smjeru početne brzine iznosi $v = [(M-m)/(M+m)]^N v_0$. Brzine blokova mase m su također u smjeru početne brzine i iznose $v_i = [2M/(M+m)]\,[(M-m)/(M+m)]^{i-1} v_0$. gdje je i redni broj m-bloka počevši s prvim zdesna.

4.9. Glatka okomita stijena giba se brzinom $u = 4$ m/s. O stijenu udara mala kuglica koja se giba brzinom $v = 6$ m/s (s obzirom na mirnog promatrača). Kut između vektora brzina iznosi $\alpha = 15°$. Ako je sudar savršeno elastičan, koliki je vektor brzine kuglice nakon sudara?

Rezultat: $|\bar{v}| = 2{,}7$ m/s, $\alpha' = 35{,}2°$

4.10. Dvije glinene kugle masa $m_1 = 0{,}3$ kg i $m_2 = 0{,}2$ kg obješene su na nitima jednake duljine (sl. 4.15). Kugle su otklonjene tako da niti s vertikalnim smjerom zatvaraju kutove $\alpha_1 = 40°$ i $\alpha_2 = 20°$. Nakon puštanja kugle će se savršeno neelastično sraziti u najnižoj točki putanje. Odredite kut otklona kugli nakon sraza.

Rezultat: $\alpha = 15{,}6°$



Slika 4.15.

4.11. Dvije se glinene kugle masa $m_1 = 0{,}4$ kg i $m_2 = 0{,}2$ kg gibajući se brzinama $v_1 = 10$ m/s i $v_2 = 8$ m/s neelastično sudaraju. Kut između brzina iznosi $\alpha = 60°$. Odredite kolika je oslobođena toplina.

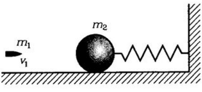
Rezultat: $Q = 5{,}6$ J

4.12. Lopta od blata izbačena je s tla pod kutom od 60° prema vodoravnoj ravnini početnom brzinom od 6 m/s. Iz iste je točke nakon nekog vremena izbačena druga lopta od blata, jednake mase pod kutom od 45°, početnom brzinom od 10 m/s. Lopte se totalno neelastično sudaraju i gibaju se zajedno. Odredite udaljenost od točke izbacivanja do točke pada zalijepljenih lopti.

Rezultat: $X = 5{,}74$ m

4.13. Na glatkoj vodoravnoj podlozi leži kugla mase $m_2 = 4{,}5$ kg spojena preko opruge konstante 500 N/m s čvrstim zidom (sl. 4.16). Metak mase $m_1 = 10$ g i brzine $v_1 = 600$ m/s zabija se u kuglu i ostaje u njoj. Koliko će se sabiti opruga?

Rezultat: $s = 0{,}126$ m



Slika 4.16.

4.14. Lopta mase $m = 0{,}7$ kg, promjera 0,3 m ispuštena je na ulicu s vrha zgrade visoke 30 m. Sila otpora zraka koja djeluje na loptu dana je sa $F_0 = c\,S\rho\,v^2/2$, gdje je $c =$ $= 0{,}5$ za loptu, S je površina najvećega poprečnog presjeka okomitog na smjer gibanja, $\rho = 1{,}29$ kg/m^3 je gustoća zraka, a v trenutna brzina. Koliko će visoko lopta odskočiti ako se pretpostavi da je sudar bio elastičan?

Rezultat: $h = 9{,}15$ m

4.15. Kuglica mase 10^{-3} kg i brzine $\vec{v}_1 = (52\vec{i} + 66\vec{j})$ m s^{-1} udara o ravnu ploču okomito položenu prema osi x. Pretpostavivši djelomično elastičan sraz (faktor restitucije $k = 0{,}8$) izračunajte brzinu i količinu gibanja kuglice nakon sraza. Zanemarite trenje. (Usporedite s primjerom 4.21.)

Rezultat: $\vec{v}_1' = (-42\vec{i} + 66\vec{j})$ m s^{-1}, $\vec{p}_1' = (-0{,}042\vec{i} + 0{,}066\vec{j})$ kg m s^{-1}

4.16. Prolazeći kroz materijal (moderator) neutroni se usporavaju elastičnim sudarima s jezgrama. Izračunajte kinetičku energiju neutrona nakon sudara. Kada je gubitak ΔE kinetičke energije neutrona najveći i koliko tada iznosi, a koliko iznosi ako se neutron sudara s jezgrama vodika, helija odnosno ugljika?

Rezultat: $(\Delta E)_{\text{maks.}} = \dfrac{4\,m_1\,m_2}{(m_1 + m_2)^2}\,E_{k1}$, $\Delta E(\text{H}) = E_{k1}$, $\Delta E(\text{He}) = 0{,}64\,E_{k1}$, $\Delta E(\text{C}) = 0{,}284\,E_{k1}$

5. Statika

Uvod

Statika je dio mehanike koji proučava ravnotežu tijela pod utjecajem sila. Vanjske sile koje djeluju na kruta tijela jesu klizeći vektori jer se njihovo hvatište smije pomicati uzduž pravca djelovanja, a da se time djelovanje sile na tijelo ne promijeni. Sustav sila kojih se pravci djelovanja sijeku u jednoj točki naziva se sustavom konkurentnih sila. Konkurentne sile mogu se vektorski zbrojiti u rezultantnu silu $\vec{R}$

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots = \sum_i \vec{F}_i. \qquad (1)$$

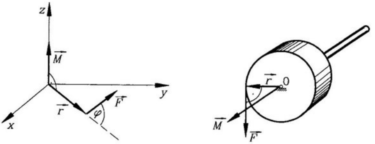
Najjednostavniji je slučaj ravnoteža materijalne točke (čestice) kada je vektorski zbroj svih sila koje na nju djeluju jednaka nuli. Ako su sve sile u jednoj ravnini, tada je vektorski poligon sila koje na nju djeluju u slučaju ravnoteže zatvoren.

Djelovanje konkurentnih sila na kruto tijelo svodi se na djelovanje sila na materijalnu točku.

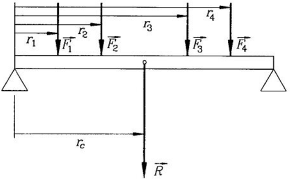
Utjecaj sile na rotaciju tijela opisuje se njezinim momentom. Moment sile $\vec{F}$ s obzirom na neku točku 0 definira se vektorskim umnoškom

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \qquad (2)$$

gdje je $\vec{r}$ vektor položaja bilo koje točke na pravcu djelovanja sile $\vec{F}$, s obzirom na točku 0.



Slika 5.1.



Slika 5.2.

Djeluje li na kruto tijelo više paralelnih sila, tada je iznos njihove rezultante jednak iznosu algebarskog zbroja pojedinih sila sustava. Ako je ta rezultanta različita od nule, tada je ona paralelna sa zadanim silama, a pravac djelovanja prolazi joj kroz točku određenu vektorom položaja

$$\vec{r}_c = \frac{\Sigma \vec{r}_i F_i}{\Sigma F_i}. \tag{3}$$

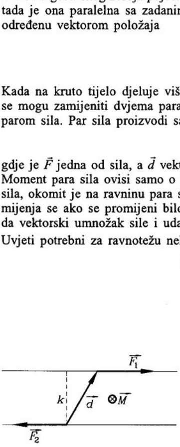
Kada na kruto tijelo djeluje više paralelnih sila čija je rezultanta jednaka nuli, one se mogu zamijeniti dvjema paralelnim silama istog iznosa, a suprotnog smjera, tzv. parom sila. Par sila proizvodi samo rotaciju. Moment para sila glasi

$$\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F}, \tag{4}$$

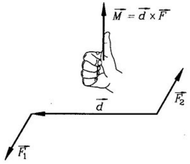
gdje je $\vec{F}$ jedna od sila, a $\vec{d}$ vektor koji ide od hvatišta druge sile do hvatišta te sile. Moment para sila ovisi samo o iznosu sile i o udaljenosti pravaca nosilaca tih dviju sila, okomit je na ravninu para sila i nije vezan za neku točku (slobodni vektor). Ne mijenja se ako se promijeni bilo sila, bilo udaljenost pravaca nosilaca sila, uz uvjet da vektorski umnožak sile i udaljenosti pravaca djelovanja bude stalan.

Uvjeti potrebni za ravnotežu nekoga krutog tijela jesu:

$$\Sigma \vec{F} = 0, \quad \Sigma \vec{M} = 0. \tag{5}$$



Slika 5.3.



Slika 5.4.

Ravnoteža krutog tijela, odnosno sustava krutih tijela može se rješavati i uz pomoć načela virtualnog rada. Ako je pri bilo kakvom virtualnom pomaku nekog sustava rad koji obave aktivne sile i sila trenja jednak nuli, sustav je u ravnoteži. Virtualni je pomak $\delta\vec{s}$ proizvoljan mali pomak iz položaja ravnoteže, zamišljen radi usporedbe raznih mogućih položaja ravnoteže i izabiranja pravog od njih a $\delta\vec{\vartheta}$ je korespondentni mali zakret.

$$\delta W = 0$$

ili

$$\Sigma \vec{F}\,\delta\vec{s} + \Sigma \vec{M}\,\delta\vec{\vartheta} = 0. \tag{6}$$

Primjeri

5.1. Na glavu vijka postavi se cjevasti ključ dug 10 cm. Kroz rupice na njegovu kraju provuče se željezna šipka dugačka 20 cm i na njezinu se kraju djeluje silom od 250 N okomito na šipku i na cijev (sl. 5.5). Izračunajte moment sile kojim se odvija vijak.

Rješenje

Vektor položaja hvatišta sile je

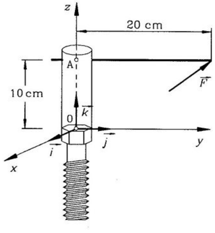
$$\frac{\vec{r}}{m} = 0{,}2\vec{j} + 0{,}1\vec{k},$$

a sila je

$$\frac{\vec{F}}{N} = -250\vec{i}.$$

Moment sile je

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = (0{,}2\vec{j} + 0{,}1\vec{k}) \times (-250\vec{i}) = (50\vec{k} - 25\vec{j})\ \mathrm{N\,m}.$$



Slika 5.5.

Na vijak djeluje moment sile $50\vec{k}$ N m i on uvija cijev i odvija (desni) vijak. Moment sile od $-25\vec{j}$ N m nastoji saviti cijev.

Riješite zadatak i tako da silu $\vec{F}$ rastavite na paralelnu silu kroz točku A i na par sila.

5.2. Na krajevima niti prebačene preko dvaju kolotura, kao na slici 5.6, obješena su dva utega težina $G_1 = 40$ N i $G_2 = 60$ N. Kolika je težina trećeg utega koji se mora objesiti u točki C da bi sustav bio u ravnoteži. Kut $\varphi = 90°$.

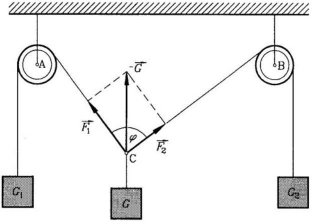
Rješenje

Za parcijalne sustave u ravnoteži vektorski je zbroj sila nula:

kolotur A $\qquad \vec{G}_1 + \vec{F}_1 = 0$

kolotur B $\qquad \vec{G}_2 + \vec{F}_2 = 0$

U točki C



Slika 5.6.

$$\vec{G} + \vec{F_1} + \vec{F_2} = 0$$
$$\vec{G} = \vec{G_1} + \vec{G_2}$$
$$G = \sqrt{G_1^2 + G_2^2}$$
$$G = 72\,\mathrm{N}.$$

5.3. Kružnica polumjera $r = 0{,}5$ m nalazi se u okomitoj ravnini i kruži oko svoga okomitog promjera stalnom kutnom brzinom $\omega = 6{,}26\ \mathrm{s}^{-1}$. Materijalna točka mase m može se kretati duž kružnice bez trenja. Njezin je položaj na kružnici dan kutom θ (sl. 5.7). Za koje se kutove θ ona nalazi u ravnotežnom položaju i uz koje uvjete?

Rješenje

Tangencijalna sila na materijalnu točku mase m u sustavu koji kruži zajedno sa kružnicom jest

$$F = -m\,g\sin\theta + m\,\omega^2 r_1\cos\theta,$$

gdje je

$$r_1 = r\sin\theta.$$

Odatle je

$$\sin\theta\,(\omega^2 r\cos\theta - g) = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe glase:

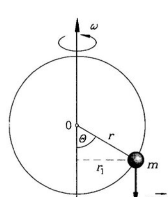
$$\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 \quad \text{i} \quad \theta = \pi$$

$$\omega^2 r\cos\theta - g = 0, \qquad \cos\theta = \frac{g}{\omega^2 r}.$$

Budući da je $\cos\theta \leq 1$, mora biti ispunjen uvjet

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{r}},$$

što je u zadatku i ispunjeno.



Slika 5.7.

Dakle,

$$\cos\theta = \frac{g}{r\,\omega^2}$$

$$\theta = \pm\frac{\pi}{3}.$$

5.4. Željezna kugla mase 1 kg visi na užetu duljine 0,2 m koje je pričvršćeno na glatki vertikalni zid (sl. 5.8). Odredite kut između užeta i zida, silu pritiska kugle na zid i napetost užeta. Gustoća željeza je 7800 kg/m^3.

Rješenje

Pri rješavanju problema iz statike potrebno je najprije nacrtati tzv. dijagram slobodnog tijela sa silama koje na njega djeluju. Kuglu valja zamisliti kao da je slobodna tako da se uklone u mislima zid i uže i da se zamijene silama reakcije kojima djeluju na kuglu (sl. 5.8.b). Na kuglu djeluju tri sile: sila teža u težištu (središtu) kugle, reakcija zida u vodoravnom smjeru i sila T kojom uže djeluje na kuglu. (Zid je savršeno gladak tako da je sila kojom kugla djeluje na zid okomita na zid.) Iz uvjeta ravnoteže krutog tijela dobiva se:

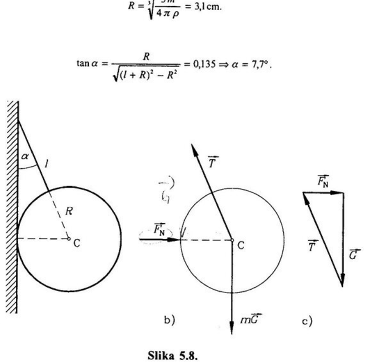
$$\sum \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} F_N - T\sin\alpha = 0 \\ G - T\cos\alpha = 0. \end{array}$$

Iz uvjeta $\Sigma\,\vec{M}_i = 0$, računajući momente sile s obzirom na točku C, zaključuje se da moment sile $\vec{T}$ mora biti jednak nuli jer su momenti sila $\vec{F}_N$ i $\vec{G}$ jednaki nuli. Pravac nosilac sile $\vec{T}$ prolazi, dakle, kroz središte kugle. Sile $\vec{G}$, $\vec{F}_N$ i $\vec{T}$ zapravo su konkurentne sile u jednoj ravnini i mogu se zbrojiti uz pomoć trokuta sila (sl. 5.8.c). Zbog toga je potrebno odrediti kut α između užeta i zida. Polumjer kugle izračunava se iz mase kugle i gustoće željeza (ρ = 7 800 kg/m^3)

$$R = \sqrt[3]{\frac{3\,m}{4\,\pi\,\rho}} = 3{,}1\,\text{cm}.$$

Kut α iznosi

$$\tan\alpha = \frac{R}{\sqrt{(l+R)^2 - R^2}} = 0{,}135 \Rightarrow \alpha = 7{,}7°.$$



Slika 5.8.

Sila pritiska kugle na zid jednaka je po iznosu sili reakcije zida na kuglu

$$F_N = m\,g \tan\alpha = 1{,}3\ \text{N}.$$

Napetost niti je

$$T = \frac{m\,g}{\cos\alpha} = 9{,}9\ \text{N}.$$

5.5. Kotač, polumjera R i težine G, na vodoravnoj podlozi nailazi na pravokutnu prepreku visine h. Izračunajte vodoravnu silu kojom valja djelovati na os kotača da bi se svladala postavljena prepreka. Masa kotača iznosi 8 kg, $R = 0{,}5$ m i $h = 0{,}20$ m.

Rješenje

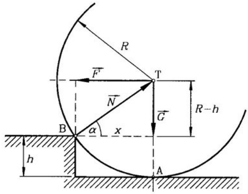
Kada je vodoravna sila $\vec{F}$ upravo dovoljna da bi se svladala postavljena prepreka, kotač više ne pritišće na vodoravnu podlogu (A) već samo na vrh prepreke (B). Na kotač, dakle, djeluju samo tri sile, vodoravna sila $\vec{F}$, sila teža $\vec{G}$ i reakcija podloge $\vec{N}$, koje su u ravnoteži. Zbog toga one moraju ležati u istoj ravnini, pravci nosioci moraju se sjeći u jednoj točki (T), a vektori $\vec{F}$, $\vec{G}$ i $\vec{N}$ zatvarati trokut.

Jednadžbama statike mogu se povezati težina kotača i tražena vodoravna sila $\vec{F}$:

$$\sum_i F_{xi} = 0 \Rightarrow N\cos\alpha - F = 0$$

$$\sum_i F_{yi} = 0 \Rightarrow \underline{N\sin\alpha - G = 0}$$

$$F = G \operatorname{ctan}\alpha.$$



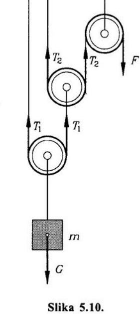
Slika 5.9.

Iz slike se vidi relacija za $\operatorname{ctan}\alpha$:

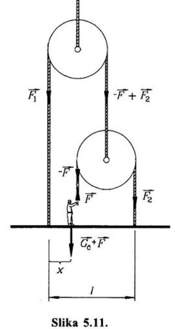
$$x = \sqrt{R^2 - (R-h)^2} \qquad \operatorname{ctan}\alpha = \frac{x}{R-h}.$$

Tražena je horizontalna sila F prema tome:

$$F = G \operatorname{ctan}\alpha = G\,\frac{\sqrt{R^2 - (R-h)^2}}{R-h} = 104{,}64\ \text{N}.$$



Slika 5.10.



Slika 5.11.

5.6. Potrebno je odrediti silu F koja uravnotežuje težinu tijela mase 100 kg na sustavu kolotura na sl. 5.10, zanemarivši masu kolotura i trenje.

Rješenje

Iz uvjeta ravnoteže za prvi kolotur

$$T_1 + T_1 - G = 0$$

dobiva se

$$T_1 = \frac{G}{2}.$$

Na drugi kolotur djeluje prema dolje napetost T_1, a prema gore djeluju na svakoj grani užeta sile T_2, pa je uvjet ravnoteže

$$2\,T_2 - T_1 = 0,$$

odnosno

$$T_2 = \frac{T_1}{2} = \frac{G}{4}.$$

Sila F koja uravnotežuje težinu tereta $100 \cdot 9{,}81\ \mathrm{N} = 981\ \mathrm{N}$ jednaka je sili T_2, odnosno $\frac{G}{4}$ ili 245 N.

5.7. Čovjek mase 60 kg stoji na podlozi mase 30 kg povezanoj užadima s koloturima – kao što je pokazano na slici 5.11. Duljina je podloge l. Kojom silom čovjek mora djelovati na kraj užeta i na kojem mjestu stajati da bi sustav bio u ravnoteži? Trenje u koloturima valja zanemariti.

Rješenje

Neka se čovjek nalazi na udaljenosti x od lijevoga kraja podloge. Sila kojom čovjek vuče uže je F. Sila kojom čovjek djeluje na podlogu je $G_č - F$ ($G_č$ – težina čovjeka):

$$F_1 + F_2 = G_č - F + G_p$$

$$F_2\,(l - x) - F_1\,x = G_p\,(0{,}5\,l - x)$$

$$G_p = \text{težina podloge}$$

U ravnoteži momenti sila na koloture moraju biti jednaki nuli:

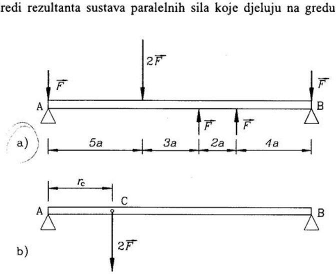
$$F_2 = F$$

$$F_1 = F + F_2 = 2\,F$$

$$F = 0{,}25(G_č + G_p) = 220{,}73\,\mathrm{N}$$

$$\frac{x}{l} = \frac{G_p - G_č}{G_p - 3\,G_č} = \frac{30 - 60}{30 - 180} = \frac{1}{5}.$$

5.8. Neka se odredi rezultanta sustava paralelnih sila koje djeluju na gredu (sl. 5.12.a)



Slika 5.12.

Rješenje

Vektorski zbroj zadanih sila je:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{F}_5 = \vec{j}(-F - 2F + F + F - F) = -2F\vec{j},$$

gdje je $\vec{j}$ jedinični vektor usmjeren prema gore.

Pravac djelovanja rezultante paralelan je s pravcima djelovanja komponenata. Njegov se položaj dobiva izrazom

$$\vec{r}_c = \frac{\Sigma \vec{r}_i F_i}{\Sigma F_i},$$

odnosno tako da se vektorski zbroje momenti komponenata s obzirom na točku O i da se to izjednači s momentom rezultante s obzirom na istu točku. Zbroj momenata komponenata s obzirom na točku O (npr. početak grede A) jest:

$$M = -10\,aF + 8\,aF + 10\,aF - 14\,aF = -6\,aF,$$

gdje se pozitivnim smatra moment koji izlazi iz ravnine crteža.

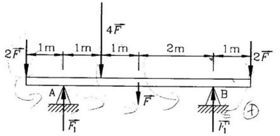
Izjednači li se to s momentom rezultante

$$-6\,aF = -2\,F\,r_c,$$

dobiva se položaj pravca djelovanja rezultante $r_c = 3a$. Rezultanta iznosa $-2F$ djelovat će na gredu u točki koja je za $3a$ udaljena od početka grede (sl. 5.12.b).

Isti se rezultat dobiva ako se točka O odabere negdje drugdje. Izračunajte r_c, ako je točka O na drugom kraju (točka B) ili u sredini grede. Ako se kao točka O odabere točka C, kroz koju prolazi pravac djelovanja rezultante, vektorski je zbroj momenata svih sila jednak nuli i tako se može kontrolirati ispravnost dobivenog rezultata.

5.9. Na gredu djeluju sile kao što je naznačeno na sl. 5.13. Ako je greda u ravnoteži, kolike su sile kojima oslonci djeluju na gredu u točkama A i B?



Slika 5.13.

Rješenje

Iz uvjeta za translacijsku ravnotežu $\Sigma \vec{F}_i = 0$ dobiva se

$$-2F + F_1 - 4F - F + F_1' - 2F = 0 \Rightarrow F_1 + F_1' = 9F. \quad (1)$$

Uvjet za rotacijsku ravnotežu $\Sigma \vec{M}_i = 0$ može se primijeniti tako da se izračunaju momenti sile s obzirom na bilo koju točku. No najlakše je izračunati momente oko točke A ili B, npr. točke B

$$10F - 4F_1 + 12F + 2F - 2F = 0 \Rightarrow F_1 = 5{,}5F. \quad (2)$$

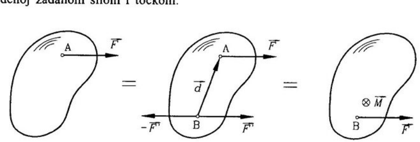
Iz (1) i (2) mogu se odrediti sile F_1 i F_1':

$$F_1 = 5{,}5F; \qquad F_1' = 3{,}5F.$$

Radi provjere rezultata valja naći $\Sigma \vec{M}_i = 0$ s obzirom na točku A

$$2F - 4F - 2F + 4F_1' - 10F = 0 \Rightarrow F_1' = 3{,}5F.$$

5.10. Pokažite da se sila koja djeluje na kruto tijelo može zamijeniti po iznosu jednakom i paralelnom silom koja djeluje u nekoj drugoj točki i parom sila koji leži u ravnini određenoj zadanom silom i točkom.



Slika 5.14.

Rješenje

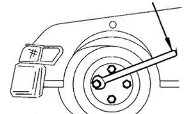
Sila $\vec{F}$ djeluje na kruto tijelo u točki A. U nekoj drugoj točki B valja zamisliti silu $\vec{F}'$ paralelnu sa silom $\vec{F}$ i silu $-\vec{F}'$. Budući da je $\vec{F}' + (-\vec{F})' = 0$, dodavanjem tih dviju sila ništa se nije promijenilo. Sila $\vec{F}$ koja djeluje u točki A i sila $-\vec{F}'$ u točki B jednake su po iznosu i antiparalelne, pa čine par sila s momentom $\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F}$ koji je okomit na ravninu određenu silom $\vec{F}$ i točkom B. Tako je jedna sila $\vec{F}$ koja djeluje u točki A zamijenjena istom takvom silom u točki B i momentom para sila $\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F}$, gdje je $\vec{d}$ vektor iz točke B u točku A.

Rastavljanje sila u drugu silu i par sila često se primjenjuje pri rješavanju zadataka iz statike.

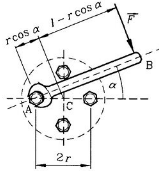
5.11. Sila od 300 N djeluje na kraju ključa dugačkog $l = 30$ cm nataknutog na glavu vijka kotača automobila (sl. 5.15). Ako je razmak vijaka $2r = 10$ cm, koliki je moment te sile s obzirom na vijak i s obzirom na središte kotača:

a) kad je položaj ključa vodoravan i

b) kada ključ zatvara kut 30° s horizontalom. Sila u oba slučaja djeluje okomito na ključ.



Slika 5.15.



Slika 5.16.

Rješenje

a) Kada je položaj ključa vodoravan ključ djeluje na vijak momentom sile

$$M = F\,l = 90\ \mathrm{N\,m}.$$

To je moment sile s obzirom na vijak (točku A). Da bismo odredili moment sile s obzirom na središte kotača (točku C), silu $F = 300$ N rastavit ćemo na paralelnu silu $F' = 300$ N kroz točku A i par sila momenta 90 N m (v. primjer 5.10). Moment sile F' s obzirom na središte kotača je $F'r = 300 \cdot 0{,}05$ N m = 15 N m, a suprotnog je smjera. Ukupan je moment 75 N m.

Do istog se rezultata dolazi i ovako:

$$\vec{M} = \overline{\mathrm{CB}} \times \vec{F}.$$

Budući da je $CB = 0{,}25$ m, $F = 300$ N, a kut između tih dvaju vektora 90°, bit će $M = 75$ N m.

b) Ako je $\alpha = 30°$, tada je moment sile s obzirom na točku C

$$\vec{M} = \overline{\mathrm{CB}} \times \vec{F}$$

$$M = d\,F,$$

gdje je d udaljenost točke C od pravca djelovanja sile F. budući da je $d = l - r\cos\alpha = 25{,}7$ cm, bit će $M = 77$ N m.

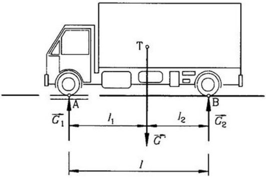
Moment sile s obzirom na vijak isti je kao u a).

5.12. Položaj težišta može se odrediti vaganjem. Neka je razmak osovina kotača automobila 3 m, a masa 3 200 kg. Ako se samo prednji kotači dovedu na platformu vage (sl. 5.17.a), vaga pokazuje da je pritisna sila kotača 21 kN.

a) Koliko je težište udaljeno od pravca djelovanja pritiska prednjih kotača?

b) Ako je visina težišta iznad tla $h = 0{,}5$ m, kolike su sile normalnog opterećenja kotača kad se automobil nalazi zakočen na strmini nagiba 15° (sl. 5.17.b)?

c) Koliku bi silu pritiska prednjih kotača pokazala vaga za primjer u b)?



Slika 5.17.a

Rješenje

a) Na automobil djeluju paralelne sile sila teža $\vec{G} = m\,\vec{g}$ u težištu T i reakcije podloge $\vec{G}_1$ i $\vec{G}_2$. Iz uvjeta rotacijske ravnoteže $\Sigma\,\vec{M}_B = 0$, dobiva se:

$$G_1\,l - G\,(l - l_1) = 0.$$

gdje smo momente računali s obzirom na točku B.

Odatle je $l_1 = 0{,}99$ m.

b) $\Sigma\,\vec{M}_B = 0$

Sile normalnog opterećenja kojima kotači djeluju na tlo po iznosu su jednake reakcijama podloge G_1 i G_2 a po smjeru suprotne.

$$\overline{BA} \times \vec{G}_1 + 0 \cdot \vec{G}_2 + \overline{BD} \times \vec{G} = 0$$

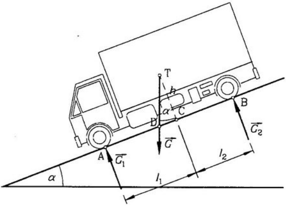
$$l \cdot G_1 = (l_2 + h\tan\alpha) \cdot G \cdot \sin(90^\circ + \alpha) = 0$$

$$G_1 = \frac{G}{l}(l_2\cos\alpha + h\sin\alpha) = 21{,}7\,\mathrm{kN}$$

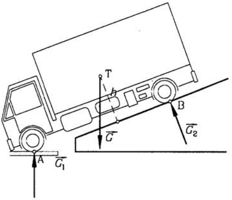
$$\Sigma\,\vec{M}_A = 0$$

$$l\,G_2 - (l_1 - h\tan\alpha)\,G\sin(90^\circ - \alpha) = 0$$

$$G_2 = \frac{G}{l}(l_1\cos\alpha - h\sin\alpha) = 8{,}65\,\mathrm{kN}.$$



Slika 5.17.b



Slika 5.17.c

c) $\Sigma \vec{M}_B = 0$

Ako su prednji kotači na vagi, a stražnji na kosini (sl. 5.17.c), podloga vage je vodoravna i sila pritiska je vertikalno prema dolje. Iz uvjeta da je vektorski zbroj momenata sila s obzirom na točku B jednak nuli, možete odrediti silu $\vec{G}$.

$$l\,G_1 \sin(90° + \alpha) - (l_2 + h\tan\alpha)\cdot G\cdot\cos\alpha = 0$$

$$G_1 = \frac{G}{l}(l_2 + h\tan\alpha) = 22{,}4\,\text{kN}.$$

Mjereći G_1 na ovaj način može se odrediti visina ležišta iznad tla.

5.13. Homogena daska duljine l i mase m naslonjena je na gladak zid (faktor trenja = 0) i na hrapavu podlogu.

a) Pod kojim kutom α daska može stajati naslonjena na zid?

b) riješite zadatak, ali uz trenje i na zidu ($\mu_B \neq 0$).

Rješenje

a) Daska stoji, dakle,

$$\vec{v} = 0,$$

pa je

$$-mg + N_A = 0$$

i

$$-F_{tr\,A} + N_B = 0.$$

Također je

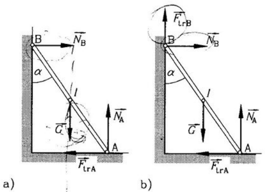
$$F_{tr\,A} = \mu_A N_A.$$

Oko točke A vrijedi

$$mg\frac{l}{2}\sin\alpha - N_B l\cos\alpha = 0,$$

odakle je

$$\tan\alpha = \frac{2N_B}{mg} = 2\mu_A,$$



Slika 5.18.

pa je

$$\alpha \leq \operatorname{arc\,tan} 2\mu_A.$$

b) Rezultantna sila jednaka je nuli

$$-mg + N_A + F_{trB} = 0$$

$$-F_{trA} + N_B = 0, \qquad N_B = F_{trA}.$$

Rezultantni je moment jednak nuli (oko točke A)

$$mg\frac{l}{2}\sin\alpha - F_{trB}l\sin\alpha - N_B l\cos\alpha = 0.$$

Dalje

$$F_{trA} = \mu_A N_A$$

i

$$F_{trB} = \mu_B N_B = \mu_B F_{trA} = \mu_A \mu_B N_A,$$

pa je

$$\tan\alpha = \frac{2N_B}{mg - 2\mu_B N_B} = \frac{2\mu_A}{1-\mu_A\mu_B},$$

odnosno

$$\alpha \leq \operatorname{arc\,tan}\frac{2\mu_A}{1-\mu_A\mu_B}.$$

5.14. Na načelu virtualnog rada riješite ravnotežu sustava kolotura na slici 5.19.a, b, c i d.

Rješenje

a) To je čvrst kolotur. Zanemarit će se masa kolotura i trenje u koloturu. Djelovanje sile F podiže teret težina G. Ako se uže djelovanjem sile F pomakne za δs prema dolje, teret će se isto toliko pomaknuti prema gore, pa jednadžba virtualnog rada za taj najjednostavniji slučaj glasi

$$\delta W = G\,\delta s - F\,\delta s = 0.$$

Odatle je

$$F = G.$$

Takvim se koloturom mijenja samo smjer djelovanja sile.

b) Sustav se sastoji od pomičnog i nepomičnog kolotura. Ako se kraj užeta djelovanjem sile F pomakne za δs prema dolje, teret će se u ovom primjeru pomaknuti za $\frac{\delta s}{2}$ prema gore, jer teret visi na dva dijela užeta koji se pritom skraćuju, svaki za $\frac{\delta s}{2}$. Nepomični kolotur samo mijenja smjer užeta. Dakle,

$$\delta W = G\frac{\delta s}{2} - F\,\delta s = 0$$

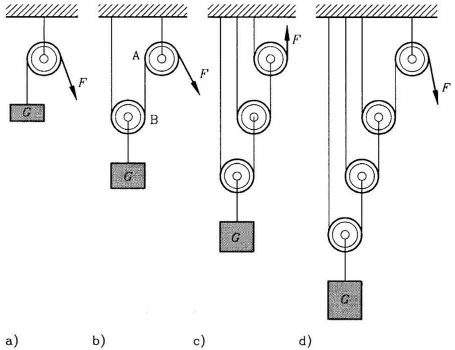
$$F = \frac{G}{2}.$$

c) Kada se slobodni kraj užeta pomakne za δs, teret se pomiče za $\frac{\delta s}{8}$ u istom smjeru, pa je

$$\delta W = -G\frac{\delta s}{8} + F\,\delta s = 0$$

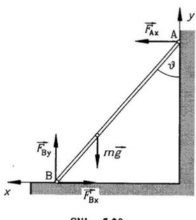
$$F = \frac{G}{8}.$$

d) Kada je riječ o silama, ovaj je primjer identičan s primjerom c), pa je $F = \frac{G}{8}$. Nepomični kolotur samo mijenja smjer djelovanja sile F, ali ne i njezin iznos.



Slika 5.19.

5.15. Nehomogene ljestve čije se težište nalazi na 1/3 visine naslonjene su uz gladak zid u točki A i dodiruju hrapavi pod u točki B, tako da je tu faktor statičkog trenja 0,4. Metodom virtualnog rada valja odrediti uvjete ravnoteže.



Slika 5.20.

Rješenje

Potreban i dovoljan uvjet da bi kruto tijelo bilo u ravnoteži jest da virtualni rad vanjskih sila koje djeluju na tijelo iščezava za bilo koji virtualni pomak. Na ljestve djeluju sila teža i sila trenja. Izabere li se koordinatni sustav kao na slici za pomak δx, virtualni rad sile trenja F_{Bx} bit će jednak $-F_{Bx}\,\delta x$, virtualni je rad sile teže $-mg\,\delta y$. Ukupan virtualni rad mora biti jednak nuli

$$\delta W = -F_{Bx}\delta x - mg\,\delta y = 0.$$

(Rad je sila F_{By} i F_{Ax} nula, jer su one okomite na odgovarajuće pomake.) Budući da je

$$\delta x = l\cos\vartheta\,\delta\vartheta \qquad \text{i} \qquad \delta y = -\frac{1}{3}l(\sin\vartheta)\,\delta\vartheta,$$

bit će

$$F_{Bx} = \frac{mg\tan\vartheta}{3}$$
$$F_{tr} = \mu F_{By} = \mu mg$$
$$F_{Bx} \le \mu mg$$
$$\tan\vartheta \le 3\mu$$
$$\vartheta \le 50{,}2°.$$

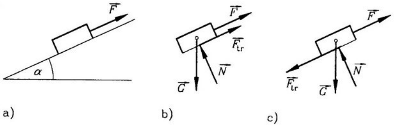
5.16. Primjenom načela virtualnog rada riješite ravnotežu tijela na kosini. Kolika je sila F koja djeluje uz kosinu nagiba 30° (sl. 5.21.a) da bi predmet težine 1 000 N bio u ravnoteži? Pretpostavlja se da su statički i kinetički faktori trenja jednaki $\mu = 0{,}2$.

Rješenje

Tijelo je u ravnoteži na kosini ako na njoj miruje ili se giba jednoliko niz kosinu, odnosno uz kosinu. Najmanja je vrijednost sile F ona uz koju predmet jednoliko klizi niz kosinu, a njezina je najveća vrijednost kada predmet klizi jednoliko uz kosinu. Dijagram sila na slobodno tijelo nacrtan je za prvi i za drugi slučaj na slici 5.21.b i c. Aktivne sile koje djeluju na tijelo jesu sila teža, sila trenja i sila F.

Načelo virtualnog rada daje za minimalnu vrijednost sile F

$$\delta W = (-F + G\sin\alpha - \mu N)\delta s = 0.$$



Slika 5.21.

Budući da je $N = G\cos\alpha$,

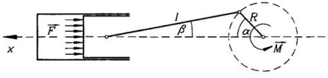
$$F_{min} = G(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = 327\,\text{N}.$$

Na sličan se način dobiva i njezina maksimalna vrijednost:

$$\delta W = (F - G\sin\alpha - \mu G\cos\alpha)\delta s = 0$$

$$F_{maks} = G(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = 673\,\text{N}.$$

5.17. Primjenom načela virtualnog rada potrebno je izvesti vezu između sile koja djeluje na klip motora i momenta koji je potreban da se na koljenastom vratilu uravnoteži ta sila (sl. 5.22).



Slika 5.22.

Rješenje

Za virtualni je pomak δx klipa virtualni rad $-F\,\delta x$. Pritom se koljenasto vratilo pomiče za $\delta\alpha$ i virtualni je rad momenta M pri tom povećanju $-M\,\delta\alpha$, pa prema načelu virtualnog rada mora biti ispunjeno

$$\delta W = -F\,\delta x - M\,\delta\alpha = 0.$$

Da bi se odatle našla veza između M i F, potrebno je pomak izraziti kutom α. Iz slike slijedi:

$$R\sin\alpha = l\sin\beta$$

$$x = R\cos\alpha + l\cos\beta = R\cos\alpha + l\sqrt{1-\left(\frac{R}{l}\right)^2\sin^2\alpha}$$

$$\delta x = -R\sin\alpha\,\delta\alpha - \frac{R^2}{l}\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{1-\left(\frac{R}{l}\right)^2\sin^2\alpha}}\delta\alpha$$

$$M = F R\sin\alpha\left[1+\frac{R\cos\alpha}{l\sqrt{1-\left(\frac{R}{l}\right)^2\sin^2\alpha}}\right].$$

5.18. Preša u obliku vijka ima navoj srednjeg promjera $2r = 4$ cm i hod $h = 2$ cm (sl. 5.23). Ako na prešu djeluje par sila s momentom $M = 100$ N m, kolikom silom djeluje preša?

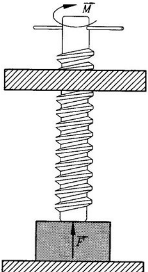
a) Zanemarite trenje!

b) Pretpostavlja se da je faktor trenja između navoja i matrice 0,2.

Rješenje

a) Vijak se može zamisliti kao kosina omotana oko valjka. U ovom je primjeru kut te kosine

$$\alpha = \arctan\frac{h}{2r\pi} = \arctan\frac{0{,}02}{0{,}04\pi} = 9{,}04°.$$



Slika 5.23.

Na vijak djeluje moment para sila $\vec{M}$ i sila reakcije $\vec{F}$ stisnutog predmeta koja je po iznosu jednaka sili kojom vijak djeluje na predmet. Kada se vijak zakrene za puni kut 2π, okomit je pomak jednak hodu vijka h, dok je pritom pomak uz kosinu $2\frac{r\pi}{\cos\alpha}$. Ako se vijak zakrene za kut $\mathrm{d}\vartheta$, vertikalni je pomak $\frac{h}{2\pi}\mathrm{d}\vartheta$, a pomak uz kosinu

$$\frac{2r\pi}{2\pi\cos\alpha}\mathrm{d}\vartheta = \frac{r\,\mathrm{d}\vartheta}{\cos\alpha}.$$

Zanemari li se trenje i primijeni li se načelo virtualnog rada, dobit će se:

$$\mathrm{d}W = M\,\mathrm{d}\vartheta - F\frac{h}{2\pi}\mathrm{d}\vartheta = 0$$

$$F = \frac{2\pi M}{h} = \frac{M}{r\tan\alpha} = 31{,}4\ \mathrm{kN}.$$

b) Uzme li se u obzir trenje, sila trenja djeluje između vijka i okvira preše te iznosi $F_{\mathrm{tr}} = \mu F_{\mathrm{N}}$, gdje je F_{N} normalna sila na kosinu. Budući da se sile u vertikalnom smjeru, zbog ravnoteže, također moraju poništiti

$$F_{\mathrm{tr}}\sin\alpha - F_{\mathrm{N}}\cos\alpha + F = 0,$$

sila trenja je

$$F_{\mathrm{tr}} = \frac{\mu F}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}.$$

Jednadžba virtualnog rada u ovom slučaju daje

$$\delta W = M\,\delta\vartheta - F\frac{h\,\delta\vartheta}{2\pi} - F_{\mathrm{tr}}\frac{r\,\delta\vartheta}{\cos\alpha} = 0.$$

Odatle se može izračunati tražena sila

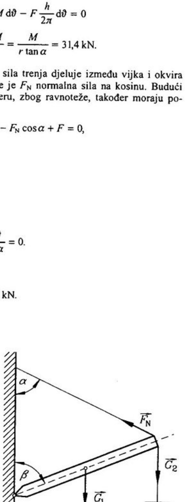
$$F = \frac{M}{r}\frac{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} = 13{,}5\ \mathrm{kN}.$$

Zadaci

5.1. U točki A (1 m, 1 m, 0 m) djeluju dvije sile $\vec{F}_1/\mathrm{N} = 3\vec{i}$ i $\vec{F}_2/\mathrm{N} = -\vec{i} + 5\vec{j}$. Potrebno je izračunati rezultantni moment tih sila s obzirom na ishodište.

Rezultat: $\vec{M} = 3\vec{k}\ \mathrm{Nm}$

5.2. Homogeni stup mase 10 kg, pričvršćen je za vertikalnu stijenu tako da se može okretati oko vodoravne osi i podupire uže na kojem visi uteg 20 kg. Uže je vezano za vertikalnu stijenu i čini s tom sti-



Slika 5.24.

jenom kut od 60°. Stup s vertikalnom stijenom čini kut od 53° (sl. 5.24). Potrebno je odrediti napetost užeta.

Rezultat: $F_N = 212{,}8$ N

5.3. Na vodoravnoj gredi dugoj 12 metara mase 100 kg nalazi se valjak mase 200 kg udaljen 3 m od jednoga njezina kraja. Greda je poduprta na krajevima tako da je sila reakcije oslonca okomita na gredu. Kolike su sile reakcije?

Rezultat: $F_A = 1\,960$ N; $F_B = 980$ N

5.4. Homogeni je štap naslonjen na gladak zid i nalazi se na hrapavom podu. Zatvara li štap kut od 45° s podlogom i ako mu je masa 10 kg, koliko je bilo trenje između štapa i poda?

Rezultat: $F_{tr} = 49{,}1$ N

5.5. Dugačke ljestve mase 40 kg naslonjene su jednim svojim krajem na okomit zid po kojemu mogu kliziti bez trenja, a drugim krajem na površinu zemlje pod kutom od 60°. Koliki mora biti minimalni faktor trenja između ljestava i površine zemlje da bi čovjek mase 80 kg mogao stajati na vrhu ljestava, a da se one ne kližu?

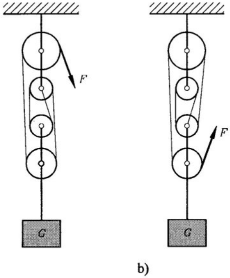
Rezultat: $\mu = 0{,}48$

5.6. Primjenom načela virtualnog rada riješite ravnotežu na Arhimedovu koloturju sastavljenom od dvaju nepomičnih i dvaju pomičnih kolotura (sl. 5.25),

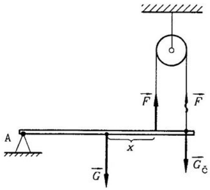
a) kada se slobodni kraj užeta vuče prema dolje i

b) kada se vuče prema gore.

Rezultat: **a)** $F = \frac{G}{4}$; **b)** $F = \frac{G}{5}$.



Slika 5.25.



Slika 5.26.

5.7. Čovjek mase 80 kg nalazi se na kraju grede duge 5 m i teške 400 N. Ako je polumjer kolotura 1 m, a masa kolotura i trenje na njemu mogu se zanemariti, kolikom silom čovjek mora potezati uže da greda bude vodoravna (sl. 5.26)?

Rezultat: $F = 615{,}5\ \mathrm{N}$

6. Rotacija krutog tijela

Uvod

Moment sile $\vec{F}$ definira se izrazom

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \tag{1}$$

gdje je $\vec{r}$ vektor od osi rotacije do hvatišta sile. Jedinica za moment sile je njutnmetar.
Moment tromosti (inercije) tijela s obzirom na os rotacije jest

$$I_z = \int_0^m r^2 \, \mathrm{d}m, \tag{2}$$

gdje je r udaljenost elementa mase $\mathrm{d}m$ od osi rotacije.
Momenti tromosti nekih jednostavnih tijela:

1. materijalna točka mase m na udaljenosti r od osi rotacije $I = m\,r^2$,
2. tanak prsten mase m i polumjera r s obzirom na os koja prolazi središtem prstena okomito na ravninu prstena $I = m\,r^2$,
3. homogeni valjak (ploča, disk) mase m i polumjera r s obzirom na os koja prolazi središtem mase okomito na osnovicu valjka $I = \frac{m\,r^2}{2}$,
4. šuplji valjak mase m, unutrašnjeg polumjera r_1 i vanjskog polumjera r_2 s obzirom na uzdužnu os koja prolazi središtem mase $I = m\frac{r_2^2 + r_1^2}{2}$,
5. kugla mase m i polumjera r s obzirom na os koja prolazi središtem mase $I = \frac{2\,m\,r^2}{5}$,
6. homogeni štap mase m i duljine l s obzirom na os koja je okomita na štap i prolazi središtem mase štapa $I = \frac{m\,l^2}{12}$,
7. pravokutna ploča stranica a i b s obzirom na os koja prolazi središtem mase $I = \frac{m\,(a^2 + b^2)}{12}$.

Steinerov poučak glasi

$$I = I_{CM} + m\,d^2, \tag{3}$$

a u njemu je I_{CM} moment tromosti tijela mase m s obzirom na os koja prolazi središtem mase, I moment tromosti tijela s obzirom na os paralelnu s osi koja prolazi središtem mase i od nje udaljenu za d.

Moment količine gibanja materijalne točke mase m i brzine $\vec{v}$ s obzirom na neku točku O jest

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\,\vec{v}, \tag{4}$$

gdje je $\vec{r}$ radijus-vektor koji spaja točku O s materijalnom točkom. Moment količine gibanja krutog tijela koje rotira oko glavne osi inercije kutnom brzinom $\vec{\omega}$ jednak je

$$\vec{L} = I\,\vec{\omega}. \tag{5}$$

Ako os z oko koje tijelo rotira nije glavna os inercije, tada umjesto (5) vrijedi

$$L_z = I_z\,\omega, \tag{5a}$$

gdje je L_z komponenta ukupnog $\vec{L}$ na z os.

Općenita se rotacija krutog tijela može rastaviti na superpoziciju translacije i rotacije oko nepomočne osi (sl. 6.1). Brzina neke točke B krutog tijela jednaka je vektorskom zbroju translacijske brzine $\vec{v}_A$ (koja je jednaka za sve točke krutog tijela) i obodne brzine $\vec{v}' = \vec{\omega} \times \vec{r}$ pri kruženju oko nepomične točke A

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}'. \tag{6}$$

Slično vrijedi i za akceleraciju

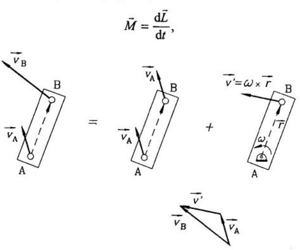
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}', \tag{7}$$

gdje je $\vec{a}'$ akceleracija točke B pri rotaciji oko točke A i vektorski je zbroj radijalne (normalne) i tangencijalne akceleracije

$$\vec{a}' = \vec{a}_t + \vec{a}_r = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \tag{8}$$

Osnovna jednadžba rotacije krutog tijela glasi

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \tag{9}$$



Slika 6.1.

gdje su $\vec{M}$ i $\vec{L}$ s obzirom na nepomičnu točku oko koje tijelo rotira. Ako pritom tijelo rotira oko glavnih osi inercije, tada je $\vec{L} = I\vec{\omega}$ i $\vec{M} = \frac{\mathrm{d}(I\vec{\omega})}{\mathrm{d}t}$. Ako je I = konst., tada je

$$\vec{M} = I\vec{\alpha}. \tag{10}$$

gdje je $\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$ kutna akceleracija.

No, rotira li tijelo oko osi z koja nije glavna os inercije, tada je $L_z = I_z\omega$, i $M_z = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}$, a ako je I_z = konst., tada je

$$M_z = I_z\alpha, \tag{11}$$

gdje su L_z i M_z komponente ukupnog momenta količine gibanja, odnosno momenta sile s obzirom na os rotacije z.

Moment M_z smatramo pozitivnim ako uzrokuje rotaciju u smjeru suprotnom kazaljci na satu.

Ako os oko koje tijelo rotira nema nepomičnu točku s obzirom na inercijski sustav u kojem se promatra rotacija tijela, tada se jednadžba (9) računa s obzirom na centar mase tijela.

Ako je $\vec{M} = 0$ iz jednadžbe (9) izlazi $\vec{L}$ = konst. To je zakon održanja momenta količine gibanja: u zatvorenom je sustavu ukupan moment količine gibanja održan. Dalje iz (5) slijedi: ako tijelo rotira oko glavne osi inercije, tada je za vanjski moment jednak nuli, kutna brzina tijela konstantna ako je I = konst. No, ako je I promjenljiv, tada povećanje momenta tromosti uzrokuje smanjenje ω, i obratno, tako da umnožak $I\omega$ ostaje konstantan.

Pri rotaciji rad je jednak integralu momenta sile po prijeđenom kutu

$$W = \int_0^{\varphi} M_z \,\mathrm{d}\varphi, \tag{12}$$

a ako je M_z = konst., tada je

$$W = M_z\varphi. \tag{13}$$

Snaga pri rotaciji krutog tijela jednaka je

$$P = M_z\omega, \tag{14}$$

gdje je M_z moment sile, a ω trenutna kutna brzina tijela.

Kinetička energija krutog tijela koje rotira kutnom brzinom ω oko osi za koju je moment tromosti I_z iznosi

$$E_{k,r} = \frac{1}{2}I_z\omega^2. \tag{15}$$

Kotrlja li se kruto tijelo bez klizanja, kinetička je energija

$$E_k = \frac{1}{2}m v_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2, \tag{16}$$

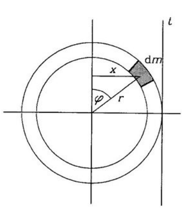
gdje je m masa tijela, v_{CM} brzina translacije centra mase, I_{CM} moment tromosti s obzirom na os koja prolazi kroz centar mase, a ω kutna brzina vrtnje tijela oko te osi. Da bi se homogeno tijelo mase m polumjera R i momenta tromosti I kotrljalo bez klizanja niz kosinu nagiba α, potrebno je ispuniti uvjet

$$\tan\alpha < \mu \frac{I + mR^2}{I},$$

gdje je μ faktor trenja klizanja.

Primjeri

6.1. Odredite moment tromosti tankog prstena mase m, polumjera r oko tangente



Slika 6.2.

Rješenje

Steinerov poučak:

$$I_t = I_{CM} + mr^2$$

$$I_{CM} = \int_0^m x^2 \, dm$$

$$x = r\sin\varphi \qquad r = \text{konst.}$$

$$dm = \frac{m}{2r\pi} dl = \frac{m}{2r\pi} r \, d\varphi = \frac{m}{2\pi} d\varphi$$

$$I_{CM} = 4\frac{m}{2\pi} r^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi \, d\varphi = \frac{4mr^2}{2\pi}\left[\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right]_0^{\pi/2}$$

$$I_{CM} = \frac{mr^2}{2}$$

$$I_t = \frac{3}{2}mr^2.$$

6.2. Četiri homogena štapa spojena su u kvadrat. Masa svakog štapa iznosi 0,5 kg, a duljina 0,5 m. Potrebno je izračunati moment tromosti kvadrata:

a) prema osi koja prolazi vrhom kvadrata i okomita je na ravninu kvadrata,

b) prema osi koja prolazi raspolovištem jedne stranice i okomita je na ravninu kvadrata.

Rješenje

a) Steinerov poučak aditivno daje (l je duljina, a m masa pojedinog štapa):

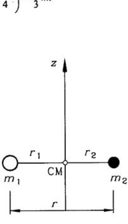
$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \frac{ml^2}{3} + \frac{ml^2}{3} + 2\left(\frac{ml^2}{3} + ml^2\right) = \frac{10}{3}ml^2$$

$$I = 0{,}416 \, \text{kg m}^2.$$

b) $$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \frac{ml^2}{12} + \left(\frac{ml^2}{12} + ml^2\right) + 2\left(\frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} + \frac{ml^2}{4}\right) = \frac{7}{3}ml^2$$

$$I = 0{,}292\,\mathrm{kg\,m^2}.$$

6.3. Izračunajte glavne momente tromosti molekula HCl i CO_2. Udaljenost atoma vodika i klora iznosi 128 pm, a udaljenost atoma ugljika u molekuli CO_2 od svakog atoma kisika je 112 pm.



Slika 6.3.

Rješenje

Za svako tijelo postoje najmanje tri međusobno okomite osi rotacije koje se nazivaju glavnim osima inercije. Za njih vrijedi da je ukupni moment količine gibanja $\vec{L} = I\,\vec{\omega}$, odnosno $\vec{L}$, paralelan s osi rotacije. Odgovarajući momenti inercije I_x, I_y i I_z nazivaju se glavnim momentima inercije tijela. Ima li tijelo jednu os simetrije, tada je to i glavna os, a ostale su dvije bilo koje osi okomite na nju. Obično se kao ishodište uzima centar mase.

Atomi se mogu zamisliti kao materijalne točke mase m udaljene za r. Moment tromosti sustava od dviju materijalnih točaka (sl. 6.3) jest

$$I_z = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2,$$

gdje su r_1 i r_2 udaljenosti materijalnih točaka od središta mase, a z os okomita na spojnicu atoma koja prolazi kroz središte mase.

Za molekulu HCl (i druge dvoatomne molekule) jedna glavna os prolazi kroz atome, odnosno spojnicom atoma. Moment tromosti s obzirom na tu os, pretpostavimo li da su atomi materijalne točke, jednak je nuli. Druge su dvije osi okomite na spojnicu atoma (i međusobno okomite), pa je $I_y = I_z$.

Koristeći se činjenicom da os prolazi kroz centar mase, izrazit ćemo udaljenosti r_1 i r_2 uz pomoć udaljenosti atoma r. Naime, budući da je ishodište u središtu mase, može se pisati:

$$r_{CM} = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} = 0 \qquad m_1 r_1 = -m_2 r_2,$$

odnosno prema iznosu $m_1 r_1 = m_2 r_2$.

Iz te jednadžbe i $r_1 + r_2 = r$ dobiva se:

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \qquad \text{i} \qquad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r,$$

pa je

$$I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2.$$

Zamjenom podataka za molekulu HCl dobiva se $I_y = I_z = 2{,}6 \cdot 10^{-47}\,\mathrm{kg\,m^2}$.

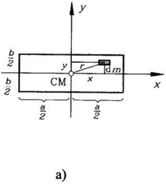
Centar mase molekule CO_2 nalazi se u atomu ugljika, pa je moment tromosti te molekule još jednostavnije izračunati. I tu je $I_x = 0$, dok je $I_y = I_z$ i iznosi

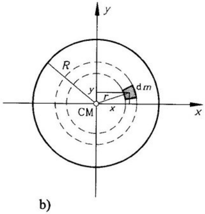
$$I = 2m_0 \cdot r^2 = 2 \cdot 2{,}66 \cdot 10^{-26} \cdot (1{,}12 \cdot 10^{-10})^2\,\mathrm{kg\,m^2} = 6{,}7 \cdot 10^{-46}\,\mathrm{kg\,m^2}.$$

6.4. Izračunajte glavne momente tromosti:

a) tanke pravokutne ploče dimenzija a = 4 cm i b = 1 cm, mase 4 g s obzirom na glavne osi koje prolaze kroz centar mase i

b) tanke okrugle ploče polumjera R = 2 cm i mase 4 g.





Slika 6.4.

Rješenje

a) Glavne osi inercije x *i* y jesu osi simetrije ploče, a os z okomita je na ploču. Centar mase je u središtu ploče. Moment tromosti s obzirom na os x koja prolazi kroz centar mase i paralelna je sa stranicom a jest:

$$I_x = \frac{m}{b}\int_{-b/2}^{b/2} y^2\,\mathrm{d}y = \frac{m}{3b}\frac{b^3}{4} = \frac{mb^2}{12} = 0{,}3\,\mathrm{g\,cm^2}.$$

Slično je za os y

$$I_y = \frac{m}{a}\int_{-a/2}^{a/2} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{m\,a^2}{12} = 5{,}3\,\mathrm{g\,cm^2}.$$

Moment tromosti s obzirom na os z okomitu na ploču jest

$$I_z = \int r^2\,\mathrm{d}m = \int (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}m = \int x^2\,\mathrm{d}m + \int y^2\,\mathrm{d}m = I_y + I_x = \frac{m}{12}(a^2 + b^2) = 5{,}6\,\mathrm{g\,cm^2}.$$

b) Okrugla ploča

Moment tromosti s obzirom na os z okomitu na ploču jest:

$$I_z = \int (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}m = \int r^2\,\mathrm{d}m = \int r^2\,2r\pi\rho\,\mathrm{d}r = 2\rho\pi\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r = 2\rho\pi\frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}mR^2$$

$$I_z = 8\,\mathrm{g\,cm^2},$$

gdje je ρ površinska gustoća ploče

Zbog simetrije su momenti tromosti s obzirom na os x i y jednaki i iznose:

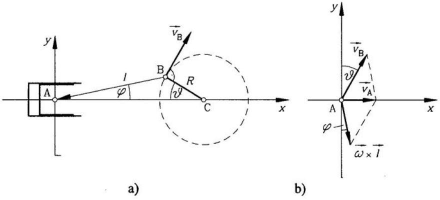
$$I_x = \int y^2\,\mathrm{d}m, \qquad I_y = \int x^2\,\mathrm{d}m, \qquad I_x + I_y = \int (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}m = I_z, \qquad I_x = I_y = \frac{1}{2}I_z.$$

Dakle,

$$I_x = \frac{1}{4}mR^2 = 4\,\mathrm{g\,cm^2}$$

$$I_y = \frac{1}{4}mR^2 = 4\,\mathrm{g\,cm^2}.$$

6.5. Koljenasto vratilo klipnog mehanizma motora (sl. 6.5.a) rotira jednoliko brzinom 1 200 okr./min. Kolika je brzina klipa za kut vratila $\vartheta = 30°$? Dužina koljena R = 3 cm, a dužina klipnjače l = 9 cm.



Slika 6.5.

Rješenje

Kutna je brzina vratila

$$\omega_0 = \frac{2\pi \cdot 1200}{60} = 40\pi\,\mathrm{s}^{-1} = 126\,\mathrm{s}^{-1},$$

Obodna brzina točke B jest

$$V_B = \omega_0 R = 3{,}8\ \mathrm{m\,s}^{-1}.$$

Kut φ iznosi

$$\varphi = \arcsin\frac{R\sin\vartheta}{l} = 9{,}6°.$$

Kutna je brzina klipnjače

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \omega_0 \frac{R}{l}\frac{\cos\vartheta}{\sqrt{1-\frac{R^2}{l^2}\sin^2\vartheta}} = 37\,\mathrm{s}^{-1}.$$

Iz slike slijedi da je put s koji prevali klip

$$s = R(1-\cos\vartheta) + l\left(1-\sqrt{1-\frac{R^2}{l^2}\sin^2\vartheta}\right).$$

Deriviranjem puta dobiva se brzina

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = R\,\omega_0\sin\vartheta + \frac{\omega_0 R^2\sin 2\vartheta}{2l\sqrt{1-\frac{R^2}{l^2}\sin^2\vartheta}} = v_B\sin\vartheta + \omega\,R\sin\vartheta = 2{,}46\,\mathrm{m\,s}^{-1}.$$

Brzina v može se izračunati i na drugi način.

Brzina klipa, tj. točke A, može se odrediti tako da se gibanje klipnjače rastavi na translaciju brzinom $\vec{v}_B$ i rotaciju oko čvrste točke B

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}' = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{l}.$$

Brzina $\vec{\omega} \times \vec{l}$ ima iznos ωl i okomita je na klipnjaču u točki B.

Vektorski zbroj $\vec{v}_B$ i $\vec{\omega} \times \vec{l}$ (sl. 6.5) dat će iznos i smjer brzine $\vec{v}_A$

$$(v_A)_x = (v_B)_x + (\vec{\omega} \times \vec{l})_x = v_B \sin\vartheta + \omega l \sin\varphi = v_B \sin\vartheta + \omega R \sin\vartheta$$

$$(v_A)_x = 2{,}46\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

$$(v_A)_y = (v_B)_y + (\vec{\omega} \times \vec{l})_y = v_B \cos\vartheta - \omega l \cos\varphi = 0.$$

Brzina je klipa 2,45 m/s u smjeru osi x.

Kolika je akceleracija klipa?

6.6. Ljestve dužine l = 3 m dodiruju u točki B vertikalni zid pod kutom ϑ, a pod u točki A (sl. 6.6). Klize li ljestve tako da se kut ϑ povećava i ako je brzina i akceleracija točke A, v_A = 1 m/s i a_A = 1 m/s^2 u vodoravnom smjeru za ϑ = 60°, kolika je brzina točke B? Kolika je kutna brzina i kutna akceleracija ljestava u tom trenutku?

Rješenje

Općenita rotacija krutog tijela može se rastaviti na zbroj translacije i rotacije oko nepomične osi. Ako se gibanje ljestava zamisli kao zbroj translacije brzinom $\vec{v}_A$ i rotacije oko nepomične točke A, tada je brzina točke B jednaka vektorskom zbroju translacijske brzine $\vec{v}_A$ i obodne brzine pri kruženju po kružnici polumjera

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{l}.$$

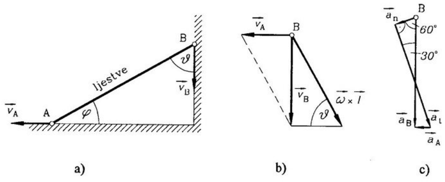
Obodna je brzina $\vec{v}' = \vec{\omega} \times \vec{l}$ po iznosu jednaka ωl, a okomita je na ljestve u točki B. Iz trokuta brzina (sl. 6.6.b) slijedi $\omega l = \dfrac{v_A}{\cos\vartheta}$, odnosno

$$\omega = \frac{v_A}{l\cos\vartheta} = 0{,}67\,\mathrm{s^{-1}}$$

$$v_B = v_A \tan\vartheta = 1{,}7\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Slično se određuje i akceleracija

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}',$$



Slika 6.6.

gdje je $\vec{a}'$ akceleracija točke B pri rotaciji oko točke A. Ta je akceleracija vektorski zbroj radijalne (normalne) $\vec{a}_n$ i tangencijalne akceleracije $\vec{a}_t$:

$$\vec{a}_t' = \vec{\alpha} \times \vec{r}; \qquad a_t = l\alpha$$

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v}' = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}); \qquad a_n = \omega^2 l = 1{,}35\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

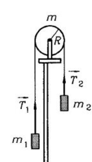
Iz poligona akceleracija (sl. 6.6.c) dobiva se:

$$a_B = \frac{a_n}{\cos\vartheta} + a_A \operatorname{ctan} 30^\circ = 4{,}43\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

$$a_t = a_n \cdot \tan 60^\circ + \frac{a_A}{\sin 30^\circ} = 4{,}34\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

$$\alpha = \frac{a_t}{l} = 1{,}45\,\mathrm{s^{-2}}.$$

6.7. Preko kolotura u obliku diska mase $m = 0{,}3$ kg i polumjera $R = 0{,}1$ m prebačena je tanka čelična žica na krajevima koje vise utezi mase $m_1 = 0{,}18$ kg i $m_2 = 0{,}22$ kg (Atwoodov padostroj, sl. 6.7). Izračunajte akceleraciju utega i napetosti niti. Zanemarite masu žice i trenje u osovini kolotura.



Slika 6.7.

Rješenje

Drugi Newtonov zakon primijenjen na gibanje utega glasi:

$$T_1 - m_1 g = m_1 a$$

$$m_2 g - T_2 = m_2 a.$$

Na kolotur djeluje moment sile $M = (T_2 - T_1) R$ i daje mu kutnu akceleraciju $\alpha = a/R$, pa je prema osnovnoj jednadžbi rotacije

$$(T_2 - T_1) R = I\alpha = \frac{1}{2} m R^2 \frac{a}{R}.$$

Odatle je

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2} m a,$$

odnosno

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} g = 0{,}71\,\mathrm{m\,s^{-2}}.$$

Iz gornjih se jednadžbi dobivaju napetosti niti:

$$T_1 = \frac{2m_2 + \frac{m}{2}}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} m_1 g = 1{,}89\,\mathrm{N},$$

$$T_2 = \frac{2m_1 + \frac{m}{2}}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} m_2 g = 2{,}0\,\mathrm{N}.$$

Kada bi masa kolotura bila zanemariva prema masi utega, napetosti niti bile bi jednake, a akceleracija bi bila nešto veća (0,98 m/s^2).

6.8 Puni valjak (kotač) mase $m_1 = 1$ kg i polumjera $R = 0{,}1$ m može se vrtjeti oko horizontalne osovine (sl. 6.8). Oko valjka namotano je uže na čijem je kraju obješen uteg mase $m_2 = 0{,}1$ kg.

a) Kolika je akceleracija kojom pada uteg?

b) Kolika je brzina utega pošto, krenuvši iz mirovanja, prevali put $h = 1{,}22$ m?

c) Kolika je kutna akceleracija valjka?

d) Kolika je kutna brzina valjka pošto je uteg prevalio put $h = 1{,}22$ m?

e) Kolika je napetost niti?

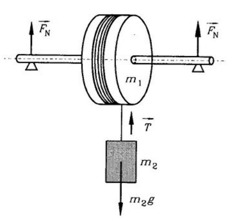
f) Kolika je sila reakcije u ležajevima na osovini valjka?

g) Koliki je moment količine gibanja valjka kad je uteg prevalio put $h = 1{,}22$ m?

Rješenje

a) Sile na valjak jesu: $m_1\vec{g}$, napetost užeta $\vec{T}$, reakcijska sila u ležajevima $\vec{F}_N$. Valjak rotira oko glavne osi inercije koja je nepomična, pa je

$$M = I\alpha = TR$$



Slika 6.8.

jer su momenti ostalih sila ($m_1\vec{g}$ i $\vec{F}_N$) s obzirom na centar mase jednaki nuli. Jednadžba gibanja utega jest

$$m_2 a = m_2 g - T.$$

Uzevši u obzir da je $\alpha = a/R$, dobiva se:

$$TR = I\alpha = \frac{1}{2}m_1 R^2 \alpha = \frac{1}{2}m_1 R^2 \frac{a}{R} = \frac{1}{2}m_1 R a$$

$$T = \frac{1}{2}m_1 a$$

$$a = \frac{m_2 g}{m_2 + \frac{m_1}{2}} = 1{,}64\,\mathrm{m\,s^{-2}}.$$

b) Gibanje je jednoliko ubrzano

$$v = \sqrt{2ah} = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

c) Kutna je akceleracija valjka

$$\alpha = \frac{a}{R} = 16{,}4\,\mathrm{rad\,s^{-2}}.$$

d) Kutna je brzina valjka

$$\omega = \alpha t = \alpha\sqrt{\frac{2h}{a}} = 20\,\mathrm{s^{-1}}.$$

e) Napetost niti je

$$T = \frac{1}{2}m_1 a = 0{,}82\,\mathrm{N}.$$

f) Valjak samo rotira, bez translacije, pa je $\Sigma\vec{F} = 0$, odnosno

$$2\vec{F}_N + m_1\vec{g} + \vec{T} = 0.$$

$$2F_N + m_1 g + T = 0; \qquad F_N = 5{,}3\,\mathrm{N}$$

g)

$$L = I\omega = \frac{1}{2}m_1 R^2 \omega = 0{,}1\,\mathrm{kg\,m^2 s^{-1}}.$$

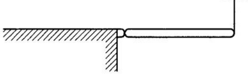
6.9. Tanak je štap jednim krajem uzgloblјen na rub nepokretne horizontalne podloge (sl. 6.9), a drugi je kraj ovješen tankim koncem. Štap je u vodoravnom položaju. Potrebno je izračunati ubrzanje centra mase štapa u trenutku neposredno nakon kidanja konca. Masa štapa je 3 kg, a duljina 2 m.

Rješenje

Kidanjem konca počinje vrtnja štapa (centra mase), pa je moment vrtnje ujednačen momentom sile koja djeluje u centru mase (težina štapa)

$$I\alpha = m g \frac{l}{2},$$

gdje su I, m i l, moment tromosti, masa i duljina štapa. Moment tromosti štapa prema osi rotacije jest $I = \frac{m l^2}{3}$, pa je kutno ubrzanje α dano jednadžbom



Slika 6.9.

$$\alpha = \frac{m g l}{2 I} = \frac{m g l}{2 \frac{m l^2}{3}} = \frac{3}{2}\frac{g}{l} = 7{,}36 \mathrm{s}^{-2}.$$

odnosno ubrzanje centra mase

$$a = \frac{l}{2}\alpha = \frac{3}{4} g = 7{,}36 \,\mathrm{m\,s}^{-2}.$$

6.10. Homogeni štap duljine $l = 8$ m može se zavrtjeti oko okomite osi koja prolazi točkom udaljenom 0,8 m od centra mase štapa. Na kraju štapa bližem osi rotacije, djeluje se stalnom tangencijalnom silom $F = 100$ N. Potrebno je izračunati kutno ubrzanje štapa za vrijeme djelovanja sile, ako mu je masa $m = 2$ kg.

Rješenje

Primjenjuje se osnovni zakon vrtnje krutog tijela:

$$M_z = I_z \alpha$$

kojim se tijelo odziva momentu sile M_z koji vrtnju izaziva

$$M_z = \left(\frac{l}{2} - d\right) \cdot F,$$

gdje je l duljina štapa, a d udaljenost stvarne osi rotacije od osi centra mase štapa. Moment tromosti štapa valja odrediti prema Steinerovu poučku

$$I_z = I_{CM} + m d^2 = \frac{1}{12} m l^2 + m d^2.$$

Kutno ubrzanje štapa α slijedi iz gornjih jednadžbi, pa supstitucijom zadanih podataka proizlazi

$$\alpha = \frac{M_z}{I_z} = \frac{\left(\frac{l}{2} - d\right) F}{m\left(\frac{1}{12} l^2 + d^2\right)} = 26{,}8 \mathrm{s}^{-2}.$$

6.11. Vedro s vodom mase 10 kg, povezano s vitlom bunara užetom namotanim na vreteno vitla pada u bunar. Vitlo bunara čine vreteno (valjak) mase 20 kg, polumjera 0,1 m i kotač, koji se sastoji od prstena mase 5 kg, polumjera 0,6 m i 12 žbica mase 0,4 kg. Za koliko će sekundi donji rub vedra dodirnuti površinu vode u bunaru, ako je prije početka kretanja donji rub vedra bio 5 m iznad vode? Trenje, otpor zraka i masu užeta valja zanemariti.

Rješenje

I. n a č i n.

Osnovna jednadžba rotacije krutog tijela glasi:

$$M = I\alpha. \tag{1}$$

Moment sile dan je izrazom

$$M = (G - m_k a)\, r. \tag{2}$$

Težina vedra G i ubrzanje vedra a dani su relacijama

$$G = m_k g \tag{3}$$

$$a = r\alpha. \tag{4}$$

Uvrštavanjem (3) i (4) u (2) i zatim izjednačivanjem sa (1) dobiva se

$$\alpha = \frac{m_k g r}{I + m_k r^2}. \tag{5}$$

Moment tromosti I može se napisati kao zbroj

$$I = I_1 + I_2 + I_3, \tag{6}$$

gdje su I_1 – moment tromosti vretena (valjka), I_2 – moment tromosti prstena, I_3 – moment tromosti 12 žbica, svi s obzirom na os rotacije:

$$I_1 = \frac{m_v r^2}{2} \tag{7}$$

$$I_2 = m_p R^2 \tag{8}$$

$$I_3 = 12\,\frac{m_ž R^2}{3}. \tag{9}$$

U izrazu (9) napisano je da je moment tromosti žbice (štapa) s obzirom na os okomitu na štap koja prolazi krajem štapa jednak $\frac{m_ž R^2}{3}$. Ta se relacija jednostavno izvodi primjenom Steinerova poučka jer se zna moment tromosti štapa s obzirom na os kroz centar mase.

Kružno gibanje vretena jednoliko je ubrzano, pa vrijedi

$$\varphi = \frac{\alpha t^2}{2}. \tag{10}$$

Put koji prevali vedro vezan je s kutom zakreta izrazom

$$s = \varphi r. \tag{11}$$

Iz (11) i (10) slijedi

$$s = \frac{\alpha t^2 r}{2}. \tag{12}$$

Iz (12) izračunava se t i za α se stavlja relacija (5), tako da se dobiva

$$t = \sqrt{\frac{2\,s\,(m_k r^2 + I)}{m_k r^2 g}}. \tag{13}$$

Uvrštavanjem (7), (8) i (9) u (6) i zatim (6) u (13) dobiva se

$$t = \sqrt{\frac{2\,s\,(m_p + 4\,m_z)\,R^2 + s\,m_v r^2 + 2\,s\,m_k r^2}{m_k\,g\,r^2}}. \tag{14}$$

Stavljanjem zadanih veličina u (14) dobiva se $t = 5{,}1$ s.

2. n a č i n.

Promjena potencijalne energije vedra tijekom gibanja jednaka je zbroju kinetičke energije vedra i kinetičke energije rotacije vretena i kotača

$$m_k\,g\,s = \frac{m_k v_k^2}{2} + \frac{I\,\omega_k^2}{2}. \tag{1}$$

gdje je I moment tromosti vretena i kotača. Budući da vrijedi da je

$$v_k = \omega_k\,r, \tag{2}$$

uvrštavanjem (2) u (1) dobiva se

$$m_k\,g\,s = \left(\frac{m_k}{2} + \frac{I}{2r^2}\right)v_k^2. \tag{3}$$

Vrijeme spuštanja vedra povezano je putom i brzinom vedra u trenutku kada dodirne površinu vode izrazom

$$t = \frac{2s}{v_k}. \tag{4}$$

Iz (3) se izračunava v_k i uvrštava u (4), tako da se dobiva

$$t = \sqrt{\frac{2s\,(m_k r^2 + I)}{m_k r^2 g}}, \tag{5}$$

a to se podudara s relacijom (13) dobijenom prvim načinom.

6.12. Kotač zamašnjak, zajedno s vratilom na kojem se nalazi, ima moment tromosti $I = 200\ \mathrm{kg\,m^2}$ s obzirom na os rotacije kroz središte i načini $n = 180$ okr./min. Koliko iznosi moment sile trenja, uz pretpostavku da je konstantan, ako se kotač zaustavi za dvije minute nakon prestanka djelovanja sile koja ga pokreće?

Rješenje

Kinetička energija rotacije kotača utroši se na rad sile trenja:

$$E_k = \frac{1}{2} I\,\omega_0^2$$

$$W_t = M\,\varphi$$

$$M\,\varphi = \frac{1}{2} I\,\omega_0^2 \qquad M = \frac{1}{2}\frac{I\,\omega_0^2}{\varphi}.$$

U trenutku $t = t_0$

$$\omega = \omega_0 - \alpha t = 0$$

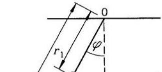
$$\varphi = \omega_0 t_0 - \frac{1}{2}\alpha t_0^2 = \frac{1}{2}\omega_0 t_0.$$

Za $t = 120$ s

$$M = \frac{I\omega_0}{t_0} = \frac{2\pi f I}{t_0}$$

$$M = 31{,}4\,\text{Nm}.$$

6.13. Štap zanemarive težine može rotirati u vertikalnoj ravnini u odnosu prema točki 0 (prema slici 6.10). Na štapu su učvršćene dvije kugle masa $m_1 = 10$ g i $m_2 = 20$ g, čija je udaljenost $r_1 = 0{,}5$ m, odnosno $r_2 = 1$ m od točke 0. Štap se zakrene za kut $\varphi = 20°$ od vertikalnog položaja i pusti da se njiše. Potrebno je odrediti linearne brzine kugli u trenutku kada štap prolazi kroz vertikalni položaj.



Slika 6.10.

Rješenje

Neka je kutna brzina štapa ω. Iz zakona očuvanja energije

$$\frac{\omega^2}{2}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) = g(1-\cos\varphi)(m_1 r_1 + m_2 r_2)$$

$$\omega = 2\sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{g\frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}}$$

$$\omega = 1{,}15\,\text{s}^{-1}$$

$$v_1 = \omega r_1 = 0{,}57\,\text{m s}^{-1}$$

$$v_2 = \omega r_2 = 1{,}15\,\text{m s}^{-1}.$$

6.14. Na zamašnjaku, momenta tromosti 1 kg m^2, koaksijalno je provučen valjčić polumjera 4 cm i mase 200 grama. Na valjčić je namotan konac s utegom od 5 kg obješenim na slobodnom kraju konca.

a) Uteg propadne za visinu h. Kolika je brzina utega na svršetku ovog puta? Početna je brzina utega nula. Masa konca se zanemaruje.

b) Izračunajte vrijeme u kojem će uteg propasti za visinu $h = 2$ m.

Rješenje

a) Uteg je obješen, pa se potencijalna energija propadanjem visine h transformira u njegovu kinetičku energiju i u energiju rotacije zamašnjaka

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_t\omega^2,$$

gdje je $I_t = I + I_v$, I je moment tromosti zamašnjaka, a I_v valjčića. Kutna je brzina ω ista za valjčić i za zamašnjak, tako da je

$$2mgh = mv^2 + (I + I_v)\frac{v^2}{r^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{(I+I_v)}{r^2}}}.$$

b) Za visinu h uteg propada tangencijalnim ubrzanjem a_t:

$$v = a_t t \qquad \text{i} \qquad h = \frac{a_t}{2} t^2,$$

pa povezivanjem dviju jednadžbi slijedi t:

$$t = \frac{2h}{v} = 2h \sqrt{\frac{m + \frac{(I + I_v)}{r^2}}{2mgh}} = 7{,}17\,\text{s}.$$

6.15. Homogeni štap mase m i duljine d rotira oko osi koja prolazi kroz njegov centar mase konstantnom kutnom brzinom ω. Izračunajte moment količine gibanja i moment sile ako je:

a) os okomita na štap i

b) ako os zatvara kut φ sa štapom.

Rješenje

a) Ako je os rotacije okomita na štap (sl. 6.11.a), moment količine gibanja i moment sile iznose:

$$L = \int v\, x\, \mathrm{d}m = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{m}{d} \omega x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{12} m d^2 \omega = I\omega;$$

$$M = 0.$$

Moment količine gibanja je konstantan jer je moment sile jednak nuli.

b) Ako os nije okomita, tada je moment količine gibanja (sl. 6.11.b):

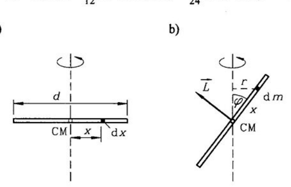
$$L = \int v\, x\, \mathrm{d}m = \frac{m}{d} \omega \sin\varphi \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{12} m d^2 \omega \sin\varphi,$$

odnosno moment sile:

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

$$|\mathrm{d}\vec{L}| = L \cos\varphi\, \omega\, \mathrm{d}t$$

$$M = L\cos\varphi\,\omega = \frac{1}{12} m d^2 \omega^2 \sin\varphi \cos\varphi = \frac{1}{24} m d^2 \omega^2 \sin 2\varphi.$$



Slika 6.11.

U slučaju b) moment količine gibanja konstantan je po iznosu i rotira (precesira) oko osi z. Budući da rotacija nije oko glavne osi $\vec{L} \neq I\vec{\omega}$, potreban je moment sile da bi mijenjao smjer vektora $\vec{L}$

$$L_z = L\cos(\pi/2-\varphi) = \frac{1}{12} m\, d^2 \omega \sin^2\varphi = I_z\omega.$$

6.16. Na kotač momenta tromosti $I = 0{,}05\ \mathrm{kg\,m^2}$ vezana je osovina polumjera $r = 10$ cm. Na osovinu je namotano uže na čijem je kraju obješen uteg mase $m = 2$ kg. Pustimo li uteg, on se pod utjecajem težine počinje spuštati. Koliki put prevali uteg tri sekunde nakon početka gibanja?

λ.

Rješenje

Iz zakona očuvanja energije

$$mgh = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

$$v = r\omega$$

$$mgh = \frac{v^2}{2}\left(\frac{I}{r^2} + m\right).$$

Derivira li se ta jednadžba po vremenu, dobiva se

$$mg\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\left(\frac{I}{r^2} + m\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = v \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a$$

$$a = \frac{mg}{\dfrac{I}{r^2} + m} = 2{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

$$h = \frac{1}{2} a t^2 = 12{,}6\,\mathrm{m}.$$

6.17. Homogeni štap mase $m_1 = 500$ g pričvršćen je u vodoravnom položaju kroz vertikalnu os kroz centar mase oko koje može rotirati. Metak mase $m = 10$ g dolijeće u vodoravnoj ravnini i udara brzinom $v = 500$ m/s u štap pod kutom $\alpha = 45°$ na 1/4 duljine od kraja i ostaje u štapu. Kolika je toplina razvijena pri sudaru?

Rješenje

Budući da je

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p},$$

odnosno

$$L = \frac{l}{4} m v \sin\alpha = I\omega$$

i

$$I = I_{\mathrm{CM}} + m\left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{1}{12} m_1 l^2 + m\frac{l^2}{16},$$

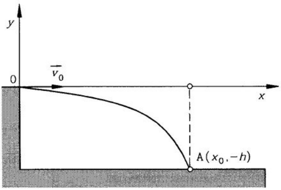
dobiva se iz

$$\frac{m v^2}{2} = Q + \frac{I \omega^2}{2} = Q + \frac{L^2}{2I}.$$

Konačno je

$$Q = \frac{m v^2}{2}\left(1 - \frac{3m\sin^2\alpha}{4m_1 + 3m}\right) = 1241\,\mathrm{J}.$$

6.18. Kugla mase 2 kg bačena je početnom brzinom od 20 m/s u horizontalnom smjeru s tornja visine 50 m. Koliki je moment veličine gibanja kugle u trenutku udara o zemlju s obzirom na mjesto izbacivanja?



Slika 6.12.

Rješenje

Budući da je

$$\vec{L}_A = \vec{r}_A \times \vec{p}_A = m\vec{r}_A \times \vec{v}_A,$$

iz parametarski zadanih Kartezijevih komponenti putanje

$$x = v_0 t; \qquad y = -\frac{g}{2}t^2,$$

dobit će se

$$x_0 = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

i

$$\vec{v}_A = v_0\vec{i} - \sqrt{2gh}\,\vec{j}$$

i

$$\vec{r}_A = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}\,\vec{i} - h\vec{j},$$

pa je

$$\vec{L}_A = m\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_0\sqrt{\dfrac{2h}{g}} & -h & 0 \\ v_0 & -\sqrt{2gh} & 0 \end{vmatrix} = -m\,v_0\,h\,\vec{k},$$

$$\vec{L}_A = -2\,000\,\vec{k}\ \mathrm{kg\,m^2 s^{-1}}.$$

6.19. Puni homogeni valjak mase m = 7 kg i polumjera R = 30 cm počinje se gibati iz mirovanja s vrha kosine visoke h = 2 m koja prema horizontali zatvara kut β = 30° (sl. 6.13). Izračunajte akceleraciju središta mase i kutnu akceleraciju valjka te brzinu središta mase valjka na dnu kosine. Riješite zadatak za:

a) zanemarivo trenje

b) faktor trenja klizanja μ = 0,3 i

c) faktor trenja klizanja μ = 0,1.

Rješenje

a) Kosina i valjak savršeno su glatki, nema trenja. Na valjak djeluje sila teža $m\vec{g}$ u težištu (centru mase) valjka (točki C) i normalna reakcija podloge $\vec{F}_N$ u točki A dodira valjka i podloge. Pravci nosioci obiju sila prolaze centrom mase, njihov je moment s obzirom na tu točku jednak nuli. Početni uvjeti su $v_{CM0} = 0$, kutna brzina valjka $\omega_0 = 0$. Odaberite koordinatni sustav s ishodištem na vrhu kosine osi x, paralelno s kosinom i osi y, okomito na kosinu prema gore. Jednadžbe gibanja valjka jesu:

$$m\ddot{x} = m\,a = m\,g\sin\beta \qquad F_N - m\,g\cos\beta = 0 \qquad I\frac{d\omega}{dt} = 0,$$

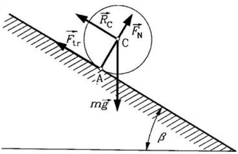
gdje je a akceleracija središta mase zbog translacijskog gibanja niz kosinu ($a = \ddot{x}$), a ω kutna brzina rotacije valjka oko osi koja prolazi centrom mase. Iz treće jednadžbe zaključujemo da je $\alpha = 0$, te ω = konst. = ω_0. Budući da je u $t = 0$, $\omega_0 = 0$, to je i $\omega = 0$. Valjak se neće vrtjeti već samo translacijski gibati niz kosinu, tj. kliziti. Akceleracija centra mase je

$$\ddot{x}_{CM} = a_{CM} = g\sin\beta = 4{,}905\ \mathrm{m\,s^{-2}}.$$

Brzina valjka na dnu kosine je

$$v = \sqrt{2\,a_{CM}\,s} = \sqrt{\frac{2\,a_{CM}\,h}{\sin\beta}} = \sqrt{2\,g\,h} = 6{,}26\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

b) Na valjak djeluje sila teža $m\,\vec{g}$, sila podloge $\vec{F}_N$ i sila trenja $\vec{F}_{tr}$. Budući da je trenje jedina sila za koju je moment sile oko centra mase različit od nule, trenje će uzrokovati kutnu akceleraciju, tj kotrljanje valjka niz kosinu. Jednadžbe gibanja valjka jesu:



Slika 6.13.

$$m\,a_{CM} = mg\sin\beta - F_{tr}$$

$$F_N - mg\cos\beta = 0$$

$$I\alpha = I\frac{d\omega}{dt} = M = F_{tr}R.$$

Valjak se može kotrljati niz kosinu bez klizanja, može se kotrljati i kliziti, odnosno može samo kliziti (kao u primjeru a), sve to ovisno o sili trenja F_{tr}. Pretpostavimo da će se valjak kotrljati niz kosinu bez klizanja. Tada je brzina točke A valjka (sl. 6.13) gdje se dodiruju kosina i valjak jednaka nuli ($v_A = 0$). Budući da je kotrljanje sastavljeno od translacije brzinom v_{CM} i rotacije oko osi kroz centar mase kutnom brzinom ω, brzina točke A zbroj je brzina zbog translacije (v_{CM}) i rotacije ($v = \omega R$) te uvjet da točka A miruje zahtijeva da bude

$$v_{CM} = \omega R,$$

odnosno

$$a_{CM} = \alpha R.$$

Uz taj uvjet i uzevši u obzir da je $I = \frac{mR^2}{2}$ iz prve i treće jednadžbe gibanja, dobivamo akceleraciju centra mase

$$a_{CM} = \frac{mg\sin\beta}{m + \frac{I}{R^2}} = \frac{2}{3}g\sin\beta = 3{,}27\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

silu trenja

$$F_{tr} = \frac{\frac{I}{R^2}g\sin\beta}{1 + \frac{I}{mR^2}} = \frac{1}{3}mg\sin\beta = 11{,}4\,\mathrm{N},$$

i kutnu akceleraciju

$$\alpha = \frac{a_{CM}}{R} = 10{,}9\,\mathrm{rad\,s^{-2}}.$$

Maksimalna sila trenja klizanja jest

$$F_{tr\,maks} = \mu F_N = \mu mg\cos\beta = 17{,}8\,\mathrm{N}.$$

Budući da je sila trenja potrebna za kotrljanje (11,4 N) manja od sile trenja pri klizanju (17,8 N), valjak će se kotrljati bez klizanja. Dakle, uvjet kotrljanja bez klizanja je

$$\frac{1}{3}mg\sin\beta < \mu mg\cos\beta$$

$$\tan\beta < 3\mu.$$

Brzina valjka na dnu kosine je

$$v = \sqrt{2a_{CM}s} = \sqrt{\frac{2a_{CM}h}{\sin\beta}} = \sqrt{\frac{4gh}{3}} = 5{,}1\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

c) Ako je $\mu = 0{,}1$, nije ispunjen uvjet $\tan\beta < 3\mu$ jer je $\tan\beta = 0{,}58$, a $3\mu = 0{,}3$ te će valjak uz kotrljanje i kliziti niz kosinu. Brzina točke dodira A različita je od nule, ne vrijedi uvjet $v_{CM} = \omega R$. Međutim, poznata je sila trenja

$$F_{tr} = \mu mg\cos\beta = 5{,}95\,\mathrm{N},$$

pa jednadžbe gibanja glase:

$$m\,a_{CM} = mg\sin\beta - \mu\, mg\cos\beta$$

$$I\,\alpha = M = F_{tr}R = \mu\, mg\, R\cos\beta.$$

Odatle je:

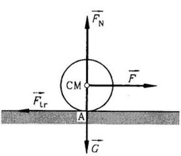
$$a_{CM} = g\sin\beta - \mu\, g\cos\beta = 4{,}06\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

$$\alpha = \frac{2\mu\, g\cos\alpha}{R} = 5{,}66\,s^{-2}.$$

Brzina valjka pri dnu kosine je

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{2a_{CM}h}{\sin\beta}} = 5{,}7\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

6.20. Na valjak mase 5 kg djeluje stalna vodoravna sila $F = 15$ N, tako da se valjak kotrlja po vodoravnoj površini (sl. 6.14). Kolikom se akceleracijom giba centar mase (težište) valjka? Koliki je minimalni faktor trenja pritom potreban?



Slika 6.14.

Rješenje

Da bi se valjak kotrljao bez klizanja, mora postojati dovoljna sila trenja F_{tr} između valjka i podloge. Pri kotrljanju je trenutna brzina točke dodira (A) valjka i podloge nula. Ako se valjak zarotira za kut φ, točka dodira A pomiče se na podlozi za $s = R\,\varphi$, gdje je R polumjer valjka. Isto toliki put prevali i centar mase valjka, pa je

$$s_{CM} = R\,\varphi$$

$$v_{CM} = \frac{ds_{CM}}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} = R\,\omega$$

$$a_{CM} = \frac{dv_{CM}}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\,\alpha,$$

gdje je ω i α kutna brzina i akceleracija pri rotaciji centra mase valjka oko trenutne nepomične osi kroz A.

Na valjak djeluje sila teža $\vec{G} = m\,\vec{g}$, vodoravna sila $\vec{F}$, sila trenja $\vec{F}_{tr}$ i reakcija podloge $\vec{F}_N$ (sl. 6.14). Centar mase valjka giba se paralelno s ravninom podloge, pa je

$$\vec{F}_N + m\,\vec{g} = 0$$

$$\vec{F} + \vec{F}_{tr} = m\,\vec{a}_{CM},$$

ili pisano skalarno

$$F_N = m\,g \qquad F - F_{tr} = m\,a_{CM}.$$

Rezultantni moment sile, s obzirom na os kroz točku A, jest

$$M_A = F\,R,$$

jer su momenti svih sila osim sile F jednaki nuli.

Iz jednadžbe rotacije $M_A = I_A\alpha$ dobiva se

$$\alpha = \frac{M_A}{I_A} = \frac{F\,R}{\left(\frac{m\,R^2}{2} + m\,R^2\right)} = \frac{2}{3}\frac{F}{m\,R},$$

gdje je moment tromosti izračunan uz pomoć Steinerovog poučka. Akceleracija centra mase valjka iznosi, dakle,

$$a_{CM} = R\alpha = \frac{2}{3}\frac{F}{m} = 2\,\mathrm{m\,s^{-2}}.$$

Kad bi valjak klizio bez trenja, akceleracija bi bila

$$a_{CM} = \frac{F}{m} = 3\,\mathrm{m\,s^{-2}}.$$

Sila trenja je

$$F_{tr} = F - m\,a_{CM} = F - \frac{2}{3}F = \frac{1}{3}F \le \mu F_N = \mu m g.$$

Da bi se valjak mogao kotrljati bez klizanja, koeficijent statičkog trenja između valjka i podloge mora biti

$$\mu \ge \frac{F}{3mg} = 0{,}1.$$

Zadatak se može riješiti i tako da se napiše jednadžba rotacije valjka s obzirom na os kroz centar mase. Tada se iz

$$M_{CM} = F_{tr}R = I_{CM}\alpha \qquad \text{i} \qquad F - F_{tr} = m\,a_{CM},$$

dobiva, naravno, isti rezultat:

$$a_{CM} = \frac{2}{3}\frac{F}{m}.$$

6.21. Kotač mase $m = 2{,}5$ kg i polumjera $R = 6$ cm kotrlja se bez klizanja niz kosinu duljine 2 m i priklonog kuta 30°. Potrebno je izračunati moment tromosti kotača s obzirom na os rotacije, ako mu je obodna brzina na dnu kosine 3 m/s. Trenje zanemarite.

Rješenje

Ukupnoj energiji kotača zbog kotrljanja bez klizanja pridonose kinetička energija rotacije i translacije

$$E_u = E_{kr} + E_{kt} = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{1}{2}m v^2.$$

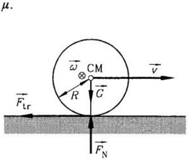
Budući da je kotrljanje po kosini, valja uračunati njezinu karakterističnu geometriju. Jednadžba očuvanja energije na kosini u uvjetima zadatka glasi

$$mgh = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{1}{2}m v^2,$$

u njoj je lijeva strana potencijalna energija na vrhu kosine, u kojoj je visina određena geometrijom: $h = l\sin\alpha$. Poznavanjem obodne brzine v pri dnu kosine slijedi $\omega = \frac{v}{R}$ i moment tromosti kotača I:

$$I = \frac{mgh - \frac{1}{2}m v^2}{\frac{v^2}{2R^2}} = m R^2\left(\frac{2gl\sin\alpha}{v^2} - 1\right) = 1{,}06\cdot 10^{-2}\,\mathrm{kg\,m^2}.$$

6.22. Valjak polumjera R i mase m vrti se kutnom brzinom ω oko osi kroz centar mase. Kako će se gibati valjak ako mu se, stavivši ga na ravnu horizontalnu podlogu, dade početna brzina u vodoravnom smjeru $v_0 = 2\,\omega_0 R$? Faktor trenja u dodirnoj točki je μ.



Slika 6.15.

Rješenje

Na sl. 6.15. prikazane su sile koje djeluju na valjak, Kada bi početna brzina bila $v_0 = R\,\omega_0$ valjak bi se kotrljao bez klizanja. Budući da je početna brzina veća, uz kotrljanje nastat će i klizanje. Sila trenja $F_{tr} = \mu\, G$ djelovat će u smjeru $-\vec{v}_0$ i smanjivat će se brzina centra mase valjka sve dok ne postane jednaka $R\,\omega_0$, kada će valjak nastaviti gibanje konstantnom brzinom. Drugi Newtonov zakon za translaciju centra mase glasi

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu\, m\, g.$$

Valjak također rotira oko osi kroz težište (centar mase), pa je

$$M_{CM} = F_{tr} R = I\,\alpha = \frac{m R^2}{2}\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \mu\, m\, g\, R.$$

Odatle se integriranjem dobivaju brzina centra mase i kutna brzina valjka:

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 - \mu\, g\, t$$

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt} = \omega_0 + \frac{2\mu\, g\, t}{R}.$$

Kada postane $v = \omega\, R$, valjak će se nastaviti kotrljati bez klizanja brzinom v_1 i rotirat će kutnom brzinom ω_1:

$$v_1 = v_0 - \mu\, g\, t_1 = \omega_1 R = \omega_0 R + 2\,\mu\, g\, t_1.$$

Odatle je:

$$t_1 = \frac{v_0 - \omega_0 R}{3\mu\, g}$$

$$v_1 = v_0 - \frac{v_0 - \omega_0 R}{3} = \frac{2}{3}v_0 + \frac{\omega_0 R}{3}$$

$$\omega_1 = \frac{2}{3}\frac{v_0}{R} + \frac{\omega_0}{3}.$$

Budući da je $v_0 = 2\,\omega_0 R$, bit će

$$v_1 = \frac{5}{3}\omega_0 R$$

$$\omega_1 = \frac{5}{3}\omega_0.$$

6.23. Dva valjka, jedan pun, a drugi šuplji s tankom stijenkom, istodobno krenu s kosine visine $h = 0{,}5$ m, nagnute prema vodoravnoj ravnini pod kutom od 30°. Koji će od njih i koliko će prije doći do podnožja kosine uz pretpostavku da su početne brzine oba valjka nula i da ne dolazi do klizanja valjka?

Rješenje

Centar mase valjka giba se jednoliko ubrzano niz kosinu. Linearno ubrzanje centra mase valjka može se izračunati na sljedeća dva načina:

1. n a č i n

Sile koje djeluju na valjak jesu težina mg, normalna sila N i sila statičkog trenja F_{tr}. Komponenta rezultantne sile u smjeru kosine jest $mg \sin\theta - F_{tr}$, tako da se primjenom drugoga Newtonova zakona dobiva

$$mg \sin\theta - F_{tr} = m\,a. \tag{1}$$

Rezultanta momenata sila s obzirom na os koja prolazi kroz centar mase jest $F_{tr} \cdot R$, tako da zakon gibanja krutog tijela daje

$$F_{tr} \cdot R = I_0 \cdot \alpha. \tag{2}$$

Uzimajući u obzir da je $a = R\,\alpha$, iz (1) i (2), slijedi

$$a = g \sin\theta \frac{1}{1 + \left(\dfrac{I_0}{m R^2}\right)}. \tag{3}$$

2. n a č i n

Zakon očuvanja energije traži da zbroj potencijalne i kinetičke energije valjka bude na vrhu kosine jednak zbroju potencijalne i kinetičke energije u trenutku kada valjak dođe do podnožja kosine, tj.

$$(E_p + E_k)_1 = (E_p + E_k)_2. \tag{4}$$

Neka je referentna razina potencijalne energije horizontalna ravnina. Tada je potencijalna energija valjka na vrhu kosine $mg \cdot s \cdot \sin\theta$, a kinetička je energija jednaka nuli. Na podnožju kosine potencijalna je energija jednaka nuli, a kinetička je energija $m \cdot \frac{v^2}{2} + I_0 \frac{\omega^2}{2}$. Uvrštavanjem u (4) dobiva se

$$mg\, s \sin\theta = \frac{1}{2} m\, v^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2. \tag{5}$$

Uzme li se u obzir da nema klizanja, tako da vrijedi $v = R\,\omega$,

$$v^2 = 2\,g\,s \sin\theta \frac{1}{1 + \dfrac{I_0}{m R^2}}. \tag{6}$$

Kod jednoliko ubrzanog gibanja vrijedi sljedeća relacija:

$$v^2 = 2\,a\,s. \tag{7}$$

Uzimajući u obzir (6) i (7), dobiva se za ubrzanje

$$a = g \sin\theta \frac{1}{1 + \dfrac{I_0}{m R^2}}, \tag{8}$$

što se podudara sa (3).

Poznato je da je moment tromosti šupljeg valjka s tankim stijenkama, s obzirom na os okomitu na osnovicu valjka a koja prolazi kroz centar mase jednak

$$I_{01} = m\,R^2. \tag{9}$$

Uvrštavanjem (9) u (8) dobiva se za ubrzanje šupljeg valjka s tankim stijenkama:

$$a_1 = \frac{1}{2} g \sin\theta. \tag{10}$$

Za puni je valjak moment tromosti, s obzirom na os okomitu na osnovicu valjka koja prolazi centrom mase

$$I_{02} = \frac{1}{2} m R^2, \tag{11}$$

pa je

$$a_2 = \frac{2}{3} g \sin\theta. \tag{12}$$

Put koji prijeđe valjak na kosini može se izraziti pomoću nagiba kosine θ i visine kosine h:

$$s = \frac{h}{\sin\theta}. \tag{13}$$

Za jednoliko ubrzano gibanje vrijedi

$$s = \frac{a}{2} t^2. \tag{14}$$

Korištenjem relacija (10), (13) i (14) dobiva se za vrijeme t_1 koje je potrebno da šuplji valjak dođe do podnožja kosine

$$t_1 = \frac{2}{\sin\theta}\sqrt{\frac{h}{g}}. \tag{15}$$

Analogno korištenju relacija (12), (13) i (14) dobiva se za vrijeme t_2 koje je potrebno da puni valjak dođe do podnožja kosine

$$t_2 = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{3h}{g}}. \tag{16}$$

Vrijeme za koje će prije stići puni valjak Δt jest

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{h}{g}}\,(2 - \sqrt{3}). \tag{17}$$

Uvrštavanjem zadanih veličina u (17) dobiva se $\Delta t = 0{,}12$ s.

6.24. Svake se godine Mjesec udalji od Zemlje 4 cm. Koliki je moment sile koji uzrokuje to udaljavanje? Koliko se snage troši na plimno trenje?

Rješenje

Gibanje Mjeseca oko Zemlje opisano je općim zakonom gravitacije: gravitacijska sila osigurava potrebnu centripetalnu silu za to kružno gibanje

$$G\frac{m_M m_z}{r^2} = \frac{m_M v_M^2}{r}.$$

Odatle je brzina Mjeseca

$$v_M^2 = G\frac{m_z}{r} = \omega_M^2 r^2,$$

gdje je ω_M kutna brzina Mjeseca.

Moment količine gibanja Mjeseca je

$$L = m_M v_M r = m_M \sqrt{G m_z r}.$$

Zbog promjene polumjera r mijenja se i moment količine gibanja

$$\Delta L = \frac{\mathrm{d}\,L}{\mathrm{d}\,r}\Delta r = \frac{m_M}{2}\sqrt{\frac{G\,m_z}{r}}\,\Delta r.$$

Moment sile koji uzrokuje promjenu momenta količine gibanja iznosi

$$M = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{m_M}{2}\sqrt{\frac{G\,m_z}{r}}\,\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{m_M\,\omega_M\,r}{2}\,\frac{\Delta r}{\Delta t}.$$

Moment sile jednak po iznosu, a suprotnog smjera, djeluje i na Zemlju. Zbog toga je snaga utrošena na plimno trenje

$$P = M\,\omega_z = \frac{m_M\,\omega_M\,\omega_z\,r}{2}\,\frac{\Delta r}{\Delta t}.$$

Služeći se podacima iz tablice u I. Dodatku, dobivamo:

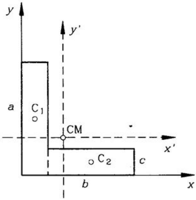
$$M = 4{,}8\cdot 10^{16}\ \mathrm{Nm}$$

$$P = 3{,}5\cdot 10^{12}\ \mathrm{W}.$$

Zadaci

6.1. Potrebno je izračunati momente tromosti kutnika stranice $a = b = 4$ cm, širine $c = 1$ cm i zanemarive debljine s obzirom na osi paralelne sa stranicama kutnika koje prolaze kroz centar mase na slici 6.16. Masa kutnika je 7 g.

Rezultat: $I_x' = I_y' = 9{,}4\ \mathrm{g\,cm^2}$



Slika 6.16.

6.2. Izračunajte glavne momente tromosti homogenog valjka mase m, polumjera R i visine h s obzirom na osi kroz centar mase valjka.

Rezultat: $I_x = I_y = m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right)$, $I_z = \frac{m\,R^2}{2}$

6.3. Valjak (kotač) promjera 30 cm, koji se vrti brzinom 1 200 okr./min, počinje se jednoliko zaustavljati i zaustavi se nakon 100 s. Kolike su brzina i akceleracija točke na udaljenosti 10 cm od centra 50 s nakon početka usporavanja?

Rezultat: $v = 6{,}3$ m/s; $a_r = 394\ \mathrm{m/s^2}$; $a_t = 0{,}13\ \mathrm{m/s^2}$; $a = 394\ \mathrm{m/s^2}$

6.4. Čestica mase $9\cdot 10^{-28}$ g giba se eliptičnom stazom (mala poluos je $2\cdot 10^{-10}$ m). Izračunajte momente količine gibanja čestice s obzirom na desni fokus elipse u točkama u kojima je udaljenost do fokusa jednaka velikoj poluosi i brzina $2{,}2\cdot 10^6$ m/s.

Rezultat: $\vec{L} = -3{,}96\cdot 10^{-34}\,\vec{k}\ \mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$

6.5. Homogeni se valjak kotrlja niz kosinu koja s horizontalnim smjerom zatvara kut $\varphi = 45°$. Potrebno je odrediti brzinu i ubrzanje centra mase valjka, ako on do dna kosine prevali put $s = 10$ m.

Rezultat: $v = 9{,}6$ m/s; $a = 4{,}6\ \mathrm{m/s^2}$

6.6. Valjak čiji se centar mase giba brzinom $v_0 = 1$ m/s počinje se kotrljati (bez klizanja) uz kosinu nagiba 30°. Nakon kojeg se vremena valjak zaustavlja? Koliki je minimalni faktor trenja potreban da bi takvo gibanje bilo moguće? Masa valjka jest 1 kg.

Rezultat: $t = 0{,}1$ s; $\mu \geq 0{,}59$

6.7. Loptica počne kliziti početnom brzinom $v_0 = 6{,}5$ m/s po vodoravnoj podlozi. Nakon koliko vremena će se početi kotrljati? Faktor trenja klizanja je 0,3.

Rezultat: $t = 0{,}63$ s

6.8. Koliko je stupnjeva slobode u sljedećim primjerima:

a) čestica koja se kreće po zadanoj prostornoj krivulji,

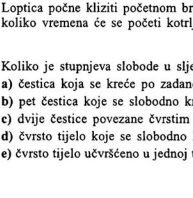
b) pet čestica koje se slobodno kreću u ravnini,

c) dvije čestice povezane čvrstim štapom koje se slobodno kreću u ravnini,

d) čvrsto tijelo koje se slobodno kreće u trodimenzionalnom prostoru,

e) čvrsto tijelo učvršćeno u jednoj točki, oko koje se može slobodno kretati u prostoru.

Rezultat: a) 1; b) 10; c) 3; d) 6; e) 3.



Slika 6.17.

6.9. Homogeni valjak promjera 30 cm kotrlja se bez klizanja po vodoravnoj podlozi. Brzina centra mase valjka je 0,43 m/s. Kolike su brzine točaka A, B, C i D (sl. 6.17)?

Rezultat: $v_A = 0$, $v_B = 0{,}61$ m/s, $v_C = 0{,}86$ m/s, $v_D = 0{,}61$ m/s

6.10. Homogeni se valjak promjera 30 cm giba po vodoravnoj ravnini. U početnom trenutku brzina centra mase valjka je $v_0 = 0{,}2$ m/s, a početna kutna brzina vrtnje oko osi kroz centar mase je $\omega_0 = 6\ \mathrm{s}^{-1}$. Nakon koliko vremena će se valjak kotrljati bez klizanja? Kolike će mu tada biti brzine središta mase i kutna brzina? Faktor trenja klizanja je 0,1.

Rezultat: $t = 0{,}24$ s, $v_{CM} = 0{,}43\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, $\omega = 2{,}86\ \mathrm{s}^{-1}$

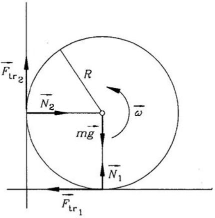
6.11. Homogeni valjak momenta tromosti I_z počinje rotirati u fluidu pod utjecajem vanjskoga zakretnog momenta $M = a\,I_z$. Pretpostavite da je otporni moment sredstva proporcionalan kutnoj brzini vrtnje, $M_{ot} = -\,b\,\omega$. Kako kutna brzina ovisi o vremenu? Nacrtajte $\omega\ (t)$ dijagram. Kolika je granična brzina kojom će se valjak, kad je postigne, vrtjeti jednoliko?

U posebnom slučaju računajte sa $I_z = 1\ \mathrm{kgm}^2$, $a = 10\ \mathrm{s}^{-2}$ i $b = 0{,}7$ Nms

Rezultat: $\omega = \frac{I\,a}{b}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{bt}{I}})$, $\omega_g = 14{,}3\ \mathrm{s}^{-1}$

6.12. Šuplji valjak tankih stijenki (sl. 6.18) zarotiran je do 10 okreta u sekundi i stavljen na tlo uz vertikalnu stijenu. Ako je faktor trenja klizanja $\mu = 0{,}1$, potrebno je odrediti nakon koliko će se vremena valjak zaustaviti? Koliko okreta napravi valjak ako mu je $R = 30$ cm?

Rezultat: $t = 17{,}6$ s, N = 88



Slika 6.18.

6.13. Vodoravna platforma mase 80 kg, polumjera 1 m u centru koje stoji čovjek raširenih ruku u kojima drži utege, rotira frekvencijom od 20 okr./min.

Kolika će biti frekvencija okretanja platforme ako čovjek spusti ruke i time smanji svoj moment tromosti sa 2,94 kg m^2 na 0,98 kg m^2? Pretpostavlja se da platforma ima oblik diska.

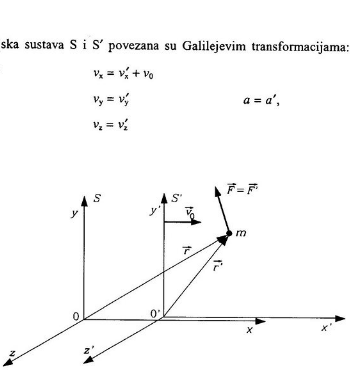
Rezultat: f_2 = 0,35 Hz

7. Inercijski i neinercijski sustavi

Uvod

Dva inercijska sustava S i S′ povezana su Galilejevim transformacijama:

$$
\begin{aligned}
&x = x_0' + v_0 t \qquad && v_x = v_x' + v_0 \qquad && \\
&y = y' && v_y = v_y' && a = a', \\
&z = z' && v_z = v_z' && \\
&t = t' && &&
\end{aligned}
\tag{1}
$$



Slika 7.1.

U neinercijskom sustavu drugi Newtonov zakon glasi:

$$m\,\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_i, \tag{2}$$

gdje je $\vec{F}$ rezultanta vanjskih sila, a $\vec{F}_i$ rezultanta inercijskih sila. Ubrzava li se neinercijski sustav S′ prema inercijskom sustavu S akceleracijom $\vec{a}_0$, tada na tijelo mase m djeluje inercijska sila

$$\vec{F}_i = m\,\vec{a}_0 \tag{3}$$

koju ne uzrokuje djelovanje drugih tijela, već je posljedica toga što je sustav ubrzan.
Kada sustav S′ rotira kutnom brzinom ω, na materijalnu točku mase m djeluje inercijska centrifugalna sila

$$\vec{F}_{cf} = m\,\omega^2 \vec{r}', \tag{4}$$

gdje je $\vec{r}'$ vektor od ishodišta sustava S′ do materijalne točke.
Giba li se tijelo brzinom $\vec{v}'$ s obzirom na rotirajući sustav, na njega, uz centrifugalnu silu, djeluje i Coriolisova sila

$$\vec{F}_{Cor} = 2m\,\vec{v}' \times \vec{\omega}. \tag{5}$$

D'Alambertov princip. Napišemo li jednadžbu gibanja $m\,\vec{a} = \Sigma\vec{F}$ u obliku $\Sigma\vec{F} - m\,\vec{a} = 0$, pa umjesto $-m\,\vec{a}$ pišemo $\vec{F}_i$, dobivamo jednadžbu dinamičke ravnoteže:

$$\Sigma\vec{F} + \vec{F}_i = 0.$$

Tako smo jednadžbu gibanja dinamike formalno preveli u jednadžbu uvjeta ravnoteže statike. Formalnim dodavanjem inercijalnih sila stvarnima, dinamički se problem svodi na statički. To je D'Alambertov princip kojim se primjenom metode statike rješavaju problemi dinamike.

Primjeri

7.1. Promatrač A ispusti kamen s vrha nebodera. Promatrač B počinje se spuštati dizalom s vrha nebodera u trenutku kada je kamen ispušten. Traže se položaj, brzina i ubrzanje kamena u odnosu prema promatraču B, i to 3 s nakon ispuštanja kamena ako se dizalo giba stalnom brzinom 5 m/s.

Rješenje

A – sustav X

B – sustav X′

$$x' = x - v_0 t = g\,t^2/2 - v_0 t = 29{,}1 \text{ m}$$

$$v' = v - v_0 = g\,t - v_0 = 24{,}4 \text{ m/s}$$

$$\frac{dv'}{dt} = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a' = g.$$

7.2. Na koloturu zanemarive mase obješena su dva tijela, m_1 = 5 kg i m_2 = 15 kg, povezana nerastegljivim čvrstim koncem zanemarive mase. Trenje između kolotura i konca, a i sva ostala trenja zanemaruju se. Kolotur je pričvršćen na strop dizala koje se spušta ubrzanjem $a = \frac{g}{3}$. Potrebno je:

a) izračunati ubrzanje utega na koloturu,

b) odrediti ubrzanje tijela mase m_2 u sustavu kabine dizala, ako se naglo prereže konac na kojem je uteg visio,

c) vrijeme udarca utega m_2 o pod kabine, ako je u času kada je konac prerezan uteg mirovao spram dizala na visini 1,7 m od poda dizala.

Rješenje

a) Primijeni li se drugi Newtonov zakon za dizalo koje se spušta, jednadžbe gibanja utega za lijevu i desnu stranu bit će:

$$\text{desna strana } (m_1)\text{: } m_1 a_k = T - m_1 g + m_1 a$$
$$\text{lijeva strana } (m_2)\text{: } m_2 a_k = m_2 g - T - m_2 a,$$

gdje je a ubrzanje dizala, a_k ubrzanje sustava kolotura, T napetost niti koja djeluje suprotno od težine utega i ubrzanja dizala. Zbog zanemarive mase kolotura napetost T jednaka je za obje strane kolotura. (Usporediti s primjerom 6.7.)

Rješavanjem jednadžbi računa se a_k:

$$a_k = (g - a)\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} = \frac{g}{3}.$$

b) Naglim rezanjem konca uteg m_2 počinje padati ubrzanjem

$$a_2 = g - a = g - \frac{g}{3} = \frac{2}{3}g.$$

c) Isti zakon slobodnog pada vrijedi u dizalu, samo je ubrzanje a_2, pa je vrijeme udara u pod

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a_2}} = \sqrt{\frac{3h}{g}} = 0{,}72\,\mathrm{s}.$$

7.3. Disk se vrti frekvencijom 30 okr./min oko vlastite vertikalne osi. Sitno je tijelo položeno na plohu diska na udaljenosti 20 cm od osi rotacije. Izračunajte najmanji faktor trenja potreban da sitno tijelo ne isklizne s diska?

Rješenje

Zbog vrtnje diska na sitno tijelo djeluje centrifugalna sila $\vec{F}_c$ koja izaziva njegovo radijalno iskliznuće. Preko sile trenja kompenzira se ova sila, a najmanji je koeficijent trenja μ određen jednadžbom

$$\vec{F}_c = \vec{F}_{tr}$$
$$mr\omega^2 = mr(2\pi f)^2 = \mu mg,$$

pa je

$$\mu = \frac{4\pi^2 f^2 r}{g} = 0{,}20$$

najmanji statički koeficijent trenja potreban da tijelo ne isklizne.

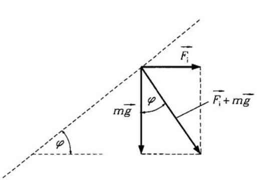
7.4. Približujući se semaforu, automobil se usporava deceleracijom $|\vec{a}| = 4\ \mathrm{m/s^2}$. Pretpostavivši stolić i na njemu posudu s vodom u sustavu automobila, pod kojim će se kutom u odnosu prema horizontali postaviti razina vode u posudi?

Rješenje

Sustav je automobila usporavajući, pa mu je inherentna inercijska sila $\vec{F}_i = -m\vec{a}$, smjera suprotnog od smjera akceleracije. Razina vode proprimit će takav položaj da je okomita na zbroj gravitacijske i inercijske sile $\vec{F}_i + m\vec{g}$ (sl. 7.2), iz čega slijedi:

$$F\sin\varphi - ma = 0$$
$$F\cos\varphi - mg = 0,$$

gdje je φ kut razine vode prema horizontali, a $\vec{F}$ sila okomita na stacionarnu postavljenu razinu vode. Iz zadanih se jednadžbi računa



Slika 7.2.

$$\tan\varphi = \frac{a}{g}, \qquad \varphi = \operatorname{arc\,tan}\frac{a}{g} = 22{,}18°.$$

7.5. Skijaš se spušta dijelom staze čiji je oblik dobro opisan jednadžbom elipse velike poluosi $a = 100$ m i male poluosi $b = 80$ m, a vrh je brijega točno 80 m iznad ravnog dijela staze. Koliki je omjer pritiska na podlogu na vrhu brijega i na visini 60 m iznad ravnog dijela staze? Pretpostavite da se skijaš počinje spuštati praktično iz mirovanja.

Rješenje

U točki A (ξ, η) dan je polumjer zakrivljenosti

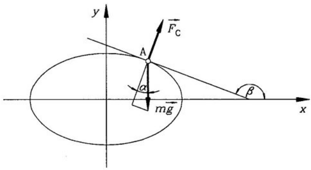
$$R = \frac{[1+(y')^2]^{3/2}}{y''} = \frac{(a^4\eta^2 + b^4\xi^2)^{3/2}}{a^4 b^4},$$

pa je

$$F_C = \frac{m v^2}{R(\xi,\eta)} = \frac{m v^2 a^4 b^4}{(a^4\eta^2 + b^4\xi^2)^{3/2}}.$$

Također je

$$\tan\beta = \frac{dy}{dx},$$



Slika 7.3.

tj.

$$\beta = \arctan\left(-\frac{b^2}{a^2}\frac{\xi}{\eta}\right).$$

Pritisak na podlogu zbog težine jest

$$F_N = mg\cos\alpha = mg\cos(\pi - \beta) = -mg\cos\left[\arctan\left(\frac{b^2}{a^2}\frac{\xi}{\eta}\right)\right],$$

pa je traženi omjer

$$\frac{F_{vrh}}{F_N - F_C} = \frac{mg}{F_N - F_C} = 2{,}48,$$

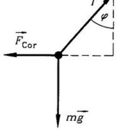
gdje je

$$\xi = 25\sqrt{7}\ \mathrm{m}, \qquad \eta = 60\ \mathrm{m}$$

i

$$mgh' = \frac{m v^2}{2}, \qquad h' = (80 - 60)\ \mathrm{m} = 20\ \mathrm{m}.$$

7.6. Na horizontalnoj ploči koja rotira konstantnom kutnom brzinom $\omega = 2\pi\ \mathrm{s}^{-1}$ radijalno su postavljene tračnice po kojima se gibaju kolica konstantnom brzinom $v = 0{,}5$ m/s. Na unutrašnjoj strani prednje stranice kolica obješeno je matematičko njihalo. Koliki kut zatvara to matematičko njihalo s vertikalom?



Slika 7.4.

Rješenje

Na kuglicu matematičkog njihala djeluju Coriolisova sila, težina i napetost niti (sl. 7.4). Budući da su te tri sile u ravnoteži, izjednačivanjem komponenti dobiva se:

$$2\,mv\omega = T\sin\varphi \tag{1}$$

$$mg = T\cos\varphi. \tag{2}$$

Eliminacijom napetosti niti T, dobiva se

$$\tan\varphi = \frac{2\,v\,\omega}{g}. \tag{3}$$

Iz (3) slijedi

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2\,v\,\omega}{g}\right). \tag{4}$$

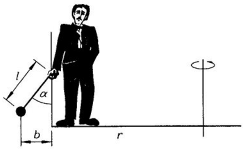
Uvrštavanje zadanih veličina u (4) daje $\varphi = 32{,}6°$.

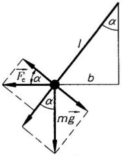
7.7. Čovjek stoji na rubu platforme i točno iznad ruba drži matematičko njihalo mase $m = 100$ g i duljine $l = 80$ cm. Ako se pri rotaciji nit otkloni za 25°, a pritom je kinetička energija njihala 1,25 J, koliki je polumjer platforme?

Rješenje

Budući da je

$$E_k = \frac{m v^2}{2},$$





Slika 7.5.

dobiva se

$$v = 5 \text{ m/s}.$$

Iz sl. 7.5. jasno je da je

$$\sin\alpha = \frac{b}{l},$$

pa je

$$F_c \cos\alpha = mg\sin\alpha$$

i zato što je

$$F_c = \frac{mv^2}{r+b},$$

dobiva se

$$r = \frac{2E_k}{mg}\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} - l\sin\alpha$$

$$r = 5{,}13 \text{ m}.$$

7.8. Staza za motociklističke akrobacije prozvana »zidom smrti« oblikovana je u vertikalni cilindar polumjera R i izrađena od materijala koji omogućuje relativno velik faktor trenja. Ako je faktor trenja $\mu = 0{,}75$, a polumjer zida $R = 10$ m, izračunajte:

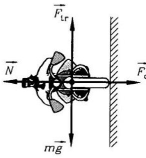
a) kojom se najmanjom brzinom motociklist mora voziti da ne kliže dolje?

b) motociklist i cilindar čine rotacijski referentni sustav koji se vrti kutnom brzinom ω oko vertikalne simetrične osi. Za koju najmanju frekvenciju vrtnje sustava, motociklist neće kliziti prema dolje?

Rješenje

a) Vožnjom po zakrivljenoj površini motociklist pritišće podlogu čija se reakcija manifestira kao centripetalna akceleracija pridana motociklistu. Klizanje niz vertikalni cilindar ne događa se sve dok je sila kinetičkog trenja jednaka ili veća od težine motociklista. Jednadžba gibanja glasi

$$\vec{F}_{tr} + m\vec{g} = 0,$$



Slika 7.6.

gdje je $\vec{F}_{tr} = \mu N = \mu \frac{m v^2}{R}$, a tu je $N = \frac{m v^2}{R}$ reakcija zakrivljene podloge. Iz jednadžbi slijedi tražena brzina:

$$F_{tr} \geq mg$$

$$v \geq \sqrt{\frac{Rg}{\mu}} = 11{,}44\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

b) U rotacijskom referentnom sustavu na motociklista djeluju ove sile:

$m\vec{g}$ = težina

$\vec{F}_{cf}$ = inercijalna centrifugalna sila

$\vec{F}_{tr}$ = sila trenja

$\vec{N}$ = reakcija podloge.

Prema slici je očito da vrijede ove jednadžbe:

$$\vec{F}_{cf} - \vec{N} = 0$$
$$F_{tr} = \mu N = \mu m \omega^2 R.$$

Uvjet da motociklist ne sklizne niz »zid smrti« jest

$$F_{tr} \geq mg,$$

pa tražena frekvencija vrtnje iznosi

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{\mu R}} = 1{,}144\,\mathrm{s^{-1}}$$

$$f \geq \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\mu R}} = 0{,}18\,\mathrm{s^{-1}}.$$

7.9. Cilindrična posuda polumjera R i visine h u kojoj je tekućina do visine h_0, zavrti se stalnom kutnom frekvencijom ω oko vertikalne osi simetrije. Zbog vrtnje površina tekućine mijenja oblik.

a) Potrebno je odrediti matematički oblik površine u rotirajućem sustavu tekućine.

b) Za koju će se frekvenciju razina tekućine podići uz stijenku posude upravo do njezine visine h? Traži se da se izračuna frekvencija ω_h za $h_0 = 4$ cm, $h = 10$ cm i $R = 3$ cm.

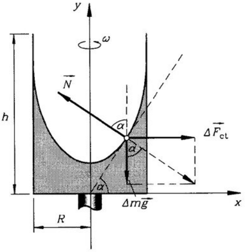
Rješenje

a) Postavlja se referentni sustav za tekućinu u posudi koja se vrti frekvencijom ω. Na svaki djelić tekućine Δm djeluju tri sile, grafički prikazane na slici 7.7:

$$\Delta m\,\vec{g} = \text{gravitacijska sila,}$$
$$\Delta m\,\omega^2 \vec{x} = \text{centrifugalna inercijalna sila } \Delta F_{cf}$$
$$\vec{N} = \text{reakcija tekućine.}$$

Gravitacijska i centrifugalna sila uravnotežene su reakcijom tekućine $\vec{N}$: kut α između $\vec{N}$ i osi y jednak je kutu između tangente i osi x u promatranoj točki. Zato je $\tan\alpha$ definiran omjerom sila

$$\tan\alpha = \frac{\Delta F_{cf}}{\Delta mg} = \frac{\omega^2 x}{g}.$$



Slika 7.7.

U postavljenu je referentnom sustavu $dy = \tan\alpha\, dx$, pa se do potpunog oblika površine tekućine dolazi integriranjem izraza

$$y = \int \frac{\omega^2}{g} x\, dx = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + y_0,$$

gdje integracijsku konstantu y_0 prepoznajemo kao minimalnu visinu tekućine nastalu nakon uspostavljanja stacionarnog oblika tekućine (parabola).

b) Volumen tekućine iznad minimuma jest:

$$dV = 2\pi x\, dx \cdot (y - y_0) \qquad V = 2\pi \int_0^R x \frac{\omega^2}{2g} x^2\, dx = \frac{\omega^2 \pi}{4g} R^4.$$

Pomoću gornjeg izraza postavljamo i uvjet za y_0

$$R^2 \pi h_0 = y_0 R^2 \pi + V \qquad y_0 = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g}.$$

Visina stacionarnog stupca tekućine prema uvjetima zadatka jest:

$$y(R) = h$$

$$h = \frac{\omega^2}{2g} R^2 + y_0 = h_0 + \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

$$\omega^2 = \frac{4g(h - h_0)}{R^2}.$$

Uvrštavanjem zadanih podataka dobiva se

$$\omega_h = \frac{2\sqrt{g(h - h_0)}}{R} = 51{,}2\,\mathrm{s}^{-1}.$$

7.10. Na kolicima je poprečno položen valjak mase m i polumjera R. Ako se kolica ubrzavaju stalnom akceleracijom a_0, kolikom se akceleracijom giba centar mase valjka spram ubrzanog sustava kolica? Riješite zadatak za pun i šuplji valjak jednake mase.

Rješenje

Na valjak djeluju sila teža $m\vec{g}$, sila podloge $\vec{F}_N$, sila trenja $\vec{F}_{tr}$ i inercijalna sila $\vec{F}_i = -m\,\vec{a}_0$. Primjenom drugog Newtonova zakona za translaciju dobiva se:

$$\vec{F}_i + \vec{F}_{tr} = m\,\vec{a}_{CM}; \qquad \vec{F}_N + m\vec{g} = 0,$$

ili pisano skalarno

$$F_i - F_{tr} = m\,a_{CM}; \qquad F_N = mg. \tag{1}$$

Nema li trenja, valjak će kliziti akceleracijom $-\vec{a}_0$. Postoji li trenje, valjak će se kotrljati ako je a_0 manje od neke maksimalne vrijednosti ovisne o faktoru trenja, inače će za $a_0 > a_m$ kliziti. Ako se valjak kotrlja, tada se prema drugom Newtonovom zakonu za rotaciju dobiva:

$$M = I\alpha$$

$$F_{tr}R = I\alpha \tag{2}$$

jer rotaciju uzrokuje moment sile trenja. Iz (1) i (2) dobiva se akceleracija centra mase valjka

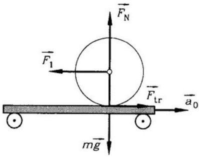
$$-m\,a_0 - \frac{I\alpha}{R} = m\,a_{CM}$$

Budući da je $\alpha = \frac{a_{CM}}{R}$, bit će

$$-m\,a_0 - \frac{I\,a_{CM}}{R^2} = m\,a_{CM}$$

$$-m\,a_0 = m\,a_{CM}\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)$$

$$a_{CM} = -\frac{a_0}{1 + \frac{I}{mR^2}}.$$



Slika 7.8.

Za puni valjak $I = \frac{mR^2}{2}$, pa je $a_{CM} = -\frac{2a_0}{3}$, dok je za šuplji valjak $I = mR^2$, te je $a_{CM} = -\frac{a_0}{2}$.

7.11. Projektil mase 1 000 kg giba se brzinom 3 600 km/h:

a) paralelom od zapada prema istoku i

b) meridijanom od sjevera prema jugu.

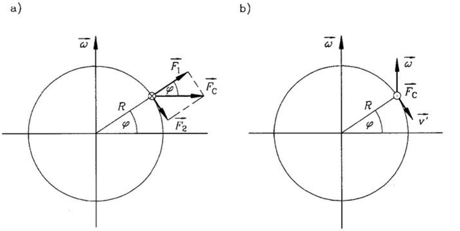
Kako djeluje Coriolisova sila ako se projektil nalazi na sjevernoj zemljopisnoj širini $\varphi = 45°$?

Rješenje

a) Iz $\vec{F}_C = 2m\,\vec{v}' \times \vec{\omega}$ dobiva se iznos Coriolisove sile

$$F_C = 2m\,v'\omega \sin(\vec{v}, \vec{\omega}) = 2m\,v'\omega \sin 90° = 145\,\text{N}.$$

Ta se sila može rastaviti na dvije komponente (sl. 7.9.a): $\vec{F}_1$ koja djeluje u smjeru polumjera Zemlje i smanjuje težinu projektila i $\vec{F}_2$ koja djeluje bočno na projektil i skreće ga prema jugu. Iz sl. 7.9.a proizlazi:



Slika 7.9.

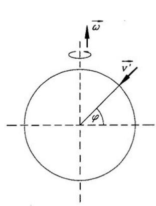
$$F_1 = F_C \cos\varphi = 103\,\mathrm{N}$$

$$F_2 = F_C \sin\varphi = 103\,\mathrm{N}.$$

b) Kada se projektil giba meridijanom, Coriolisova sila djeluje bočno na projektil i skreće ga prema zapadu (sl. 7.9.b). Ona iznosi

$$F_C = 2\,m\,v'\omega\sin\varphi = 103\,\mathrm{N}.$$

7.12. Kolika Coriolisova sila djeluje na tijelo koje slobodno pada s visine h na zemljopisnoj širini φ? Koliki je otklon i u kojem je smjeru? Potrebno je izračunati otklon za $h = 24$ m, $\varphi = 45°$.



Slika 7.10.

Rješenje

Coriolisova je sila:

$$\vec{F}_C = m\,\vec{a}_C = 2\,m\,\vec{v}' \times \vec{\omega}$$

i ima smjer prema istoku. Odatle je

$$a = 2\,\omega\,v'\cos\varphi.$$

Tijelo slobodno pada, pa mu je brzina $v' = g\,t$, jer se utjecaj Coriolisove sile na promjenu brzine može zanemariti i brzinu v' smatrati konstantnom.

Integriranjem akceleracije dobiva se:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = a = 2\,\omega\,v'\cos\varphi = 2\,\omega\,g\,t\cos\varphi$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \omega\,g\,t^2\cos\varphi$$

$$y = \frac{1}{3}\omega\,g\,t^3\cos\varphi.$$

Vrijeme potrebno da tijelo slobodno padne s visine h jest

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

pa je otklon na istok

$$y = \frac{1}{3}\omega g\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}\cos\varphi = \frac{2}{3}\omega h\sqrt{\frac{2h}{g}}\cos\varphi = 0{,}002\,\mathrm{m}.$$

7.13. Stožasto se njihalo sastoji od kuglice mase m = 1 g obješene na nit duljine l = 1 m, koja se giba jednoliko po kružnici polumjera 0,5 m (v. primjer 3.20). Primjenom D'Alambertova načela valja naći brzinu, period kruženja i napetost niti.

Rješenje

Prema D'Alambertovu načelu kuglica je u dinamičkoj ravnoteži za koju je uvjet $\Sigma\vec{F} + \vec{F}_i = 0$

Na kuglicu djeluje sila teža $\vec{G} = m\,\vec{g}$, napetost niti $\vec{N}$ i inercijska centrifugalna sila $\vec{F}_{cf} = m\frac{v^2}{r}\vec{r}_0$, pa je

$$\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_{cf} = 0.$$

Zbroje li se te tri sile vektorski, iz trokuta na sl. 7.11. proizlazi:

$$\tan\alpha = \frac{r}{\sqrt{l^2 - r^2}} = \frac{m v^2/r}{m g};$$

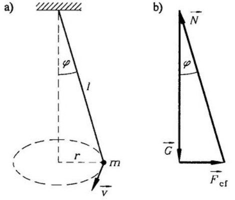
$$v = r\sqrt{\frac{g}{\sqrt{l^2 - r^2}}} = 1{,}7\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Napetost je niti

$$N = \frac{G}{\cos\varphi} = \frac{G\,l}{\sqrt{l^2 - r^2}} = 0{,}01\,\mathrm{N}.$$

Period kruženja jest:

$$T = \frac{2r\pi}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{l^2 - r^2}}{g}} = 1{,}9\,\mathrm{s}.$$



Slika 7.11.

7.14. Automobil mase 1 000 kg ubrzava se na vodoravnoj cesti. Izračunajte maksimalnu akceleraciju koju može postići pri startu iz mirovanja ako je faktor trenja $\mu = 0{,}5$. Pogon automobila je na stražnjim kotačima, težište je jednako udaljeno od prednje i stražnje osovine i udaljeno je od ceste za $h = 0{,}5$ m. Razmak prednjih i stražnjih kotača iznosi $l = 2{,}44$ m. Kolike su pritom sile reakcije u prednjim i stražnjim kotačima?

Rješenje

Pri ubrzavanju vožnje na automobil djeluju sila teža $\vec{G}$ u težištu, sile reakcije $\vec{F}_A$ i $\vec{F}_B$, sila trenja $\mu\,\vec{F}_B$ i inercijska sila $-m\,\vec{a}$. Iz uvjeta dinamičke ravnoteže $\Sigma\vec{M}_i = 0$, računajući momente s obzirom na točku 0, dobiva se:

$$G\,l/2 + \mu\,F_B\,h - F_B\,l = 0$$

$$F_B = \frac{m\,g\,l}{2(l - \mu\,h)}$$

$$F_{tr} = \mu\,F_B = \frac{\mu\,m\,g\,l}{2(l - \mu\,h)}.$$

Iz drugog Newtonova zakona za translatorno gibanje automobila proizlazi:

$$m\,a = F_{tr} = \mu\,F_B = \frac{\mu\,m\,g\,l}{2(l - \mu\,h)}$$

$$a = \frac{\mu\,g\,l}{2(l - \mu\,h)} = 2{,}7\ \mathrm{m/s^2}.$$

Sile reakcije mogu se odrediti tako da se primijeni uvjet dinamičke ravnoteže, računajući momente, npr. s obzirom na točku O i T ili na točke A i B. Računa li se ΣM_i s obzirom na točku B, dobiva se

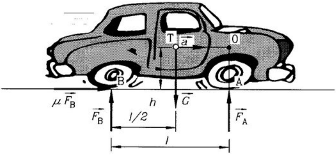
$$-m\,g\,l/2 + F_A\,l + m\,a\,h = 0 \qquad F_A = m\,g/2 - m\,a\,h/l = \frac{m\,g\,(l - 2\,\mu\,h)}{2(l - \mu\,h)},$$

dok je s obzirom na točku A:

$$\frac{m\,g\,l}{2} + m\,a\,h - F_B\,l = 0 \qquad F_B = \frac{m\,g}{2} + m\,a\,h/l = \frac{m\,g\,l}{2(l - \mu\,h)}.$$

Uvrštavanjem podataka dobiva se:

$$F_A = 4{,}35\ \mathrm{kN} \qquad F_B = 5{,}46\ \mathrm{kN}.$$



Slika 7.12.

Zadaci

7.1. Kolikom silom čovjek mase 100 kg djeluje na pod dizala kada se dizalo:

a) diže konstantnom brzinom,

b) diže akceleracijom 1 m/s^2 i

c) spušta akceleracijom 1 m/s^2?

Rezultat: **a)** $F = 980$ N; **b)** $F = 1\,080$ N; **c)** $F = 880$ N

7.2. Predmet se nalazi na kosini nagiba $\alpha = 30°$. Faktor trenja između predmeta i kosine jest $\mu = 0{,}36$. Kojom se akceleracijom mora gibati kosina da bi predmet na njoj mirovao?

Rezultat: $11{,}6 \text{ m s}^{-2} > a_0 > 1{,}8 \text{ m s}^{-2}$

7.3. Kolika centrifugalna sila djeluje na tijelo mase 1 kg na Zemljinoj površini:

a) na ekvatoru

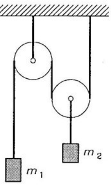
b) na 45° zemljopisne širine

c) na polu?

Rezultat: **a)** $F_{cf} = 0{,}034$ N; **b)** $F_{cf} = 0{,}024$ N; **c)** $F_{cf} = 0$

7.4. Preko kolotura Atwoodova padostroja prebačena je tanka čelična žica na čijim krajevima vise utezi mase $m_1 = 0{,}18$ kg i $m_2 = 0{,}22$ kg.
Kolotur je u obliku diska mase 0,3 kg i polumjera $R = 0{,}1$ m. Primjenom D'Alambertova načela valja izračunati akceleraciju utega.

Rezultat: $a = 0{,}71 \text{ m s}^{-2}$



Slika 7.13.

7.5. Sustav koji se sastoji od pomičnog i nepomičnog koloturja i utega mase m_1 i m_2 prikazan je na sl. 7.13. Primjenom D'Alambertova načela i principa virtualnog rada valja odrediti akceleraciju utega mase m_1 i utega mase m_2. Mase utega jesu $m_1 = 2$ kg i $m_2 = 0{,}5$ kg. Neka se zanemare trenje i masa kolotura.

Rezultat: $a_1 = 8{,}08 \text{ m s}^{-2}$, $a_2 = 4{,}04 \text{ m s}^{-2}$

7.6. Tijelo mase 1 kg nalazi se na horizontalnoj ploči mase 2 kg koja miruje na podlozi. Statički i dinamički faktor trenja iznosi 0,1. Ako na ploču počne djelovati sila koja linearno raste s vremenom: $F = 2t$, u kojem trenutku počinje gornje tijelo kliziti po donjem? (Pri rješavanju zadatka primijenite D'Alambertovo načelo).

Rezultat: $t = 2{,}94$ s

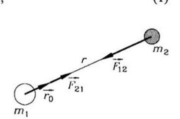
8. Gravitacija

Uvod

Dvije materijalne točke mase m_1 i m_2 udaljene za r, privlače se gravitacijskom silom

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{r}_0 = -\vec{F}_{21}, \tag{1}$$

gdje je $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$ univerzalna gravitacijska konstanta, a $\vec{r}_0$ jedinični vektor od tijela mase m_1 prema tijelu m_2. Osim za materijalne točke, izraz (1) vrijedi i za dvije kuglaste mase čija je gustoća konstantna ili ovisi samo o polumjeru kugle. Sila $\vec{F}_{12}$ jest sila kojom masa m_1 privlači masu m_2, a $\vec{F}_{21}$ obratno. Jakost gravitacijskog polja $\vec{\gamma}$ mase m_1 vektorska je veličina definirana izrazom



Slika 8.1.

$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}}{m_2}, \tag{2}$$

gdje je $\vec{F}$ sila kojom polje u promatranoj točki djeluje na tijelo mase m_2. Jakost gravitacijskog polja materijalne točke mase m_1 na udaljenosti r jest

$$\vec{\gamma} = -G\frac{m_1}{r^2}\vec{r}_0. \tag{3}$$

Jedinica za gravitacijsko polje je njutn po kilogramu (znak: N/kg) ili m/s^2, dakle ista je kao i za akceleraciju.

Na tijelo mase m koje se nalazi u blizini Zemljine površine djeluje vertikalno nadolje sila teža $\vec{G} = m\,\vec{g}$, koja je rezultanta gravitacijske sile i centrifugalne sile zbog vrtnje Zemlje oko svoje osi. Polje sile teže (koje je jednako akceleraciji slobodnog pada) vektorski je zbroj gravitacijskog polja Zemlje $\vec{\gamma}_Z$ i centrifugalne akceleracije $\vec{a}_{cf}$ što je uzrokuje vrtnja Zemlje oko svoje osi

$$\vec{g} = \vec{\gamma}_Z + \vec{a}_{cf}. \tag{4}$$

No za većinu je računa dovoljna aproksimacija

$$g \approx \gamma_Z = G\frac{m_Z}{R_Z^2} \doteq 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}, \tag{5}$$

gdje su m_Z i R_Z masa i srednji polumjer Zemlje.

Gravitacijska potencijalna energija dviju materijalnih točki mase m_1 i m_2, čija je međusobna udaljenost r, iznosi

$$E_p = -G\frac{m_1 m_2}{r}, \tag{6}$$

uz uvjet da je $E_p(r = \infty) = 0$. Gravitacijski potencijal definira se izrazom

$$\varphi = \frac{E_p}{m_2}, \tag{7}$$

gdje je E_p potencijalna energija mase m_2 u promatranoj točki gravitacijskog polja. Jedinica za gravitacijski potencijal je džul po kilogramu (znak: J/kg).

Primjeri

8.1. Čovjek vuče tijelo mase 20 kg po podlozi silom od 50 N. Tijelo se ubrzava akceleracijom 0,5 m/s^2. Na koju bi se visinu iznad Zemlje morao popeti čovjek da se u istoj situaciji tijelo ubrzava za 1 promil brže?

Rješenje

Iz numeričkih je vrijednosti očito da postoji trenje, pa je jednadžba gibanja na Zemlji

$$F - m g \mu = m a,$$

a iznad Zemlje

$$F - m g' \mu = m a',$$

uz

$$g = \frac{G m_Z}{R_Z^2} \quad \text{i} \quad g' = \frac{G m_Z}{(R_Z + h)^2}.$$

Odatle dobivamo

$$\frac{g'}{g} = \frac{F - m a'}{F - m a},$$

odnosno

$$h = R_Z\left[\sqrt{\frac{F - m a}{F - m a'}} - 1\right].$$

Budući da je $a' = a + \Delta a$, može se napisati

$$h = R_Z\,[(1-\delta)^{-\frac{1}{2}} - 1] \approx R_Z \cdot \frac{1}{2}\delta,$$

gdje je

$$\delta = \frac{\Delta a \cdot m}{F - m a}$$

i uporabljena je približna formula $(1-x)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x$. Odavde se dobiva

$$h = 800 \text{ m},$$

a točnim računom

$$h = 800{,}154 \text{ m}.$$

8.2. Satelit se giba blizu površine planeta gustoće ρ. Koliko je ophodno vrijeme satelita?

Rješenje

Iz Newtonova općeg zakona gravitacije

$$F = G\frac{m_1 m_2}{R^2}$$

dobiva se

$$G\frac{m_1 m_2}{R^2} = \frac{m_1 v^2}{R} = m_1 R \frac{4\pi^2}{T^2}$$

i uz

$$\rho = \frac{m_2}{\frac{4\pi R^3}{3}}$$

dobiva se

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}}.$$

8.3. U planetnom sustavu koji je ustrojen potpuno jednako kao i naš, srednje su gustoće dva puta manje od srednjih gustoća Sunca i Zemlje, a sve su udaljenosti, duljine i razmaci tri puta manji. Koliko je ophodno vrijeme »Zemlje« u tom sustavu u odnosu prema našoj Zemlji?

Rješenje

Označimo kutnu brzinu, ophodno vrijeme, polumjer i gustoću u našem sustavu sa ω, T, R i ρ, a u zamišljenom sustavu sa ω_0, T_0, R_0 i ρ_0.

Budući da je

$$G\frac{m_1 m_2}{r^2} = m_1 \omega^2 r$$

i

$$m_2 = \frac{4R^3\pi}{3}\rho,$$

dobiva se kutna brzina Zemlje oko Sunca u našem planetnom sustavu:

$$\omega = \sqrt{\frac{4R^3\pi\rho G}{3r^3}},$$

a u zamišljenom sustavu:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4R_0^3\pi\rho_0 G}{3r_0^3}}.$$

Uz dane podatke dobivamo

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{T_0}{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$T = \sqrt{2}\, T_0 = 514 \text{ dana.}$$

8.4. Satelit je lansiran s ekvatora i kreće se po kružnoj putanji u ekvatorijalnoj ravnini u smjeru vrtnje Zemlje. Potrebno je odrediti omjer između polumjera putanje satelita i polumjera Zemlje ako satelit periodički prolazi iznad mjesta lansiranja, s periodom od 2 dana.

Rješenje

a) $\omega > \omega_Z$, kutna je brzina satelita veća od kutne brzine Zemlje

$$(\omega - \omega_Z)\, 2 T_Z = 2\pi$$

$$\omega_Z = \frac{2\pi}{T_Z} \qquad \left(\omega - \frac{2\pi}{T_Z}\right) 2 T_Z = 2\pi$$

$$2\,\omega T_Z = 6\pi \qquad \omega = \frac{3\pi}{T_Z}$$

$$m\,\omega^2 r = \frac{G M_Z m}{r^2} \qquad G\frac{M_Z \cancel{m}}{R_Z^2} = \cancel{m}\, g$$

$$\omega^2 r = g\frac{R_Z^2}{r^2}$$

$$\frac{r}{R_Z} = \sqrt[3]{\frac{g}{R_Z\,\omega^2}} = \sqrt[3]{\frac{g\,T_Z^2}{9\pi^2 R_Z}} = \sqrt[3]{\frac{9{,}78\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot (8{,}64\cdot 10^4)^2\,\mathrm{s}^2}{9\pi^2 \cdot 6{,}37\cdot 10^6\,\mathrm{m}}} = 5{,}05.$$

b) $\omega < \omega_Z$, kutna je brzina satelita manja od kutne brzine Zemlje

$$\omega = \frac{\pi}{T_Z} \qquad \frac{r}{R_Z} = \sqrt[3]{\frac{g\,T_Z^2}{\pi^2 R_Z}} = 10{,}5.$$

8.5. Kut pod kojim se Sunce vidi sa Zemlje iznosi približno 10^{-2} rad. Iz tog podatka valja naći odnos prosječne gustoće Zemlje i Sunca. Pretpostavlja se da su Zemlja i Sunce jednolike gustoće, a $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$.

Rješenje

Označimo kut pod kojim se Sunce vidi sa Zemlje sa α, polumjer Sunca R_S i udaljenost Zemlje od Sunca sa r. Veza među tim veličinama je $2R_S = r\,\alpha$. Nadalje je:

$$F = G\frac{m_Z m_S}{r^2}$$

$$a = \omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

$$G\frac{m_Z m_S}{r^2} = m_Z \frac{4\pi^2}{T^2} r$$

$$\frac{G m_Z}{R_Z^2} = g$$

$$m_S\, g\, R_Z^2/r^2 = m_Z \frac{4\pi^2}{T^2} r$$

$$m_Z/m_S = \frac{g\, R_Z^2\, T^2}{4\pi^2 r^3}$$

$$\rho_Z/\rho_S = \frac{g\, T^2 R_S^3}{4\pi^2 r^3 R_Z} = \frac{g\,\alpha^3 T^2}{32\pi^2 R_Z} = 4{,}4.$$

8.6. Satelit putuje oko Zemlje po kružnoj stazi na visini h = 760 km od Zemljine površine.
4, Kolika je potrebna promjena brzine ako se želi da satelit opisuje eliptičnu putanju s najvećom udaljenošću od površine Zemlje H = 40 000 km i najmanjom udaljenošću od površine h = 760 km? Koliki će biti period gibanja po eliptičnoj putanji?

Rješenje

Radi jednostavnosti pretpostavlja se da se brzina satelita mijenja za veoma kratko vrijeme. Određuju se brzine satelita u točki A (sl. 8.2) na kružnoj (v_0) i eliptičnoj putanji (v_1):

$$\frac{m\, v_0^2}{R+h} = G \frac{m\, M_Z}{(R+h)^2}$$

$$v_0 = \sqrt{G \frac{M_Z}{R+h}} = 7\,468 \text{ m/s}$$

$$\frac{m\, v_1^2}{2} - G\frac{m\, M_Z}{R+h} = \frac{m\, v_2^2}{2} - G\frac{m\, M_Z}{R+H}.$$

Prema drugom Keplerovu zakonu:

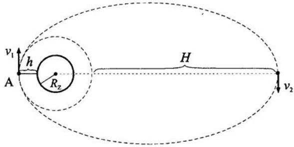
$$\frac{1}{2}(R+h)\, v_1 \Delta t = \frac{1}{2}(R+H)\, v_2 \Delta t$$

$$v_2 = v_1 \frac{R+h}{R+H}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2GM_Z}{2R+H+h}\,\frac{R+H}{R+h}} = 9\,832 \text{ m/s}.$$

$$\Delta v = v_1 - v_0 = 2\,364 \text{ m/s}.$$

Treći Keplerov zakon daje period gibanja po eliptičnoj stazi. Prema tom zakonu kvadrati ophodnih vremena odnose se kao kubovi velikih poluosi eliptičnih putanja.



Slika 8.2.

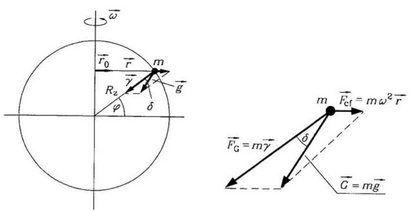
$$\left[\frac{T}{T_0}\right]^2 = \frac{(2R+H+h)^3}{8(R+h)^3}$$

$$T_0 = 2\pi\frac{R+h}{v_0}$$

$$T = \pi(2R+H+h)\sqrt{\frac{2R+H+h}{2GM_Z}}$$

$$T = 12{,}1\,\text{h}.$$

8.7. Potrebno je izračunati kut između vektora gravitacijskog polja i vektora akceleracije sile teže na 45° zemljopisne širine.



Slika 8.3.

Rješenje

Sila teža je rezultanta gravitacijske i centrifugalne sile

$$\vec{G} = \vec{F}_G + \vec{F}_{cf}.$$

Centrifugalna sila koja djeluje na tijelo mase m koje se nalazi na Zemljinoj površini nastaje zbog vrtnje Zemlje oko svoje osi te iznosi

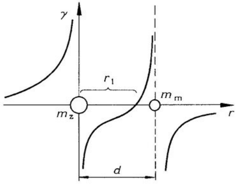
$$\vec{F}_{cf} = m\omega^2\vec{r} = m\omega^2 R_Z \cos\varphi\,\vec{r}_0.$$

Kut δ između vektora $\vec{\gamma} = \vec{F}_G/m$ i vektora $\vec{g} = \vec{G}/m$ iznosi (sl. 8.3)

$$\sin\delta = \frac{a_{cf}}{g}\sin\varphi = \frac{4\pi^2 R_Z \sin\varphi\cos\varphi}{gT^2} = 1{,}7\cdot10^{-3}.$$

$$\delta = 5{,}9'.$$

8.8. Izračunajte rad potreban da bi se tijelo mase $m = 500$ kg s površine Zemlje popelo u točku gdje se gravitacijska polja Zemlje i Mjeseca poništavaju. Pri računu valja uzeti u obzir da je masa Zemlje 81 put veća od mase Mjeseca i da je udaljenost središta Zemlje i Mjeseca 60 puta veća od polumjera Zemlje.



Slika 8.4.

Rješenje

Gravitacijsko polje u prostoru između Zemlje i Mjeseca jest (sl. 8.4)

$$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_Z + \vec{\gamma}_m = -G\frac{m_Z}{r_1^2}\vec{r}_0 + G\frac{m_m}{(d - r_1)^2}\vec{r}_0$$

i poništava se kad je $\gamma_Z = \gamma_m$,

$$G\frac{m_Z}{r_1^2} = G\frac{m_m}{(d - r_1)^2} \qquad \text{odnosno} \qquad r_1 = \frac{d}{1 + \sqrt{m_m/m_Z}} = 0{,}9\,d.$$

Potreban je rad

$$W = m(\varphi_2 - \varphi_1) = mG\left(-\frac{m_Z}{0{,}9\,d} - \frac{m_m}{0{,}1\,d} + \frac{m_Z}{R_Z} + \frac{m_m}{d - R_Z}\right)$$

$$W = 0{,}98\,m\,G\,m_Z/R_Z = 3{,}1 \cdot 10^{10}\ \text{J}.$$

8.9. Na ekvatoru nekog planeta težina je tijela dva puta manja nego na polu. Srednja gustoća planeta jest $3 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3$. Traži se period okretanja planeta oko svoje osi.

Rješenje

Označimo li F_G' težinu na ekvatoru, F_G težinu na polu, R polumjer planeta, i m masa tijela i m_p masa planeta, može se pisati

$$F_G' = F - \frac{m v^2}{R} \tag{1}$$

$$F_G = F, \tag{2}$$

gdje je F – gravitacijska sila između planeta i tijela na površini planeta.

$$F = G\frac{m\,m_p}{R^2} \tag{3}$$

Iz uvjeta $2F_G' = F_G$ korištenjem relacija (1) i (2) dobiva se

$$F = \frac{2 m v^2}{R}. \tag{4}$$

Izjednačivanjem (3) i (4) i uzimanjem u obzir da vrijedi

$$m_p = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4R^3\pi}{3} \tag{5}$$

i

$$v = \frac{2\pi R}{T} \tag{6}$$

dobiva se

$$T = \sqrt{\frac{6\pi}{\rho G}}. \tag{7}$$

Uvrštavanjem zadanih veličina u (7) dobiva se

$$T = 9\,704 \text{ s}.$$

Zadaci

8.1. Izračunajte jakost gravitacijskog polja Zemlje i gravitacijski potencijal Zemlje u točki na visini od 1 000 km iznad Zemljine površine. Pretpostavlja se da je Zemlja homogena kugla. Koliko je u toj točki gravitacijsko polje Sunca?

Rezultat: $\gamma_Z = 7{,}3 \text{ m/s}^2$; $\varphi = -5{,}4 \cdot 10^7 \text{J/kg}$; $\gamma_S = 5{,}9 \cdot 10^{-3} \text{m/s}^2$

8.2. Satelit mase 1 000 kg kruži oko Zemlje na visini od 1 000 km. Odredite brzinu, ophodno vrijeme, kinetičku, potencijalnu i ukupnu energiju satelita.

Rezultat: $v = 7{,}3$ km/s, $T = 6{,}3 \cdot 10^3$ s, $E_k = 27$ GJ, $E_p = -54$ GJ, $E = -27$ GJ

8.3. Izračunajte silu kojom žica polukružnog oblika polumjera 1 m, mase 10^{-2} kg, djeluje na točkastu masu od 10^{-3} kg smještenu u središtu zakrivljenosti polukružnice.

Rezultat: $F = 4{,}25 \cdot 10^{-16}$ N

8.4. Pretpostavite gravitacijski kolaps (stezanje) Sunca u Pulsar. Potrebno je odrediti omjer kinetičkih energija rotacije Pulsara i Sunca E^{P}_{rot}/E^{S}_{rot} za minimalni polumjer Pulsara $R_p = 1{,}5 \cdot 10^4$ m. Period rotacije Sunca oko vlastite osi jest 25 dana.

Rezultat: $\frac{E_P}{E_S} = 2{,}15 \cdot 10^9$

8.5. Odredite rad potreban za prijenos tijela mase $m = 100$ kg s jednog planeta na drugi ako se zanemari sila otpora. Mase planeta jesu: $M_1 = 1{,}74 \cdot 10^{23}$ kg, $M_2 = 2{,}85 \cdot 10^{24}$ kg, a polumjeri $R_1 = 2\,400$ km, $R_2 = 6\,100$ km.

Rezultat: $W = 2{,}6 \cdot 10^9$ J

8.6. Izračunajte prvu i drugu kozmičku brzinu:

a) za Zemlju i

b) za Mjesec.

Masa Zemlje veća je oko 81 put od mase Mjeseca, dok je polumjer Zemlje ($R = 6\,370$ km) oko 3,7 puta veći od polumjera Mjeseca.

Rezultat: a) $v_1 = 7{,}9$ km/s, $v_2 = 11{,}2$ km/s; b) $v_1' = 1{,}7$ km/s, $v_2' = 2{,}4$ km/s

9. Relativistička mehanika

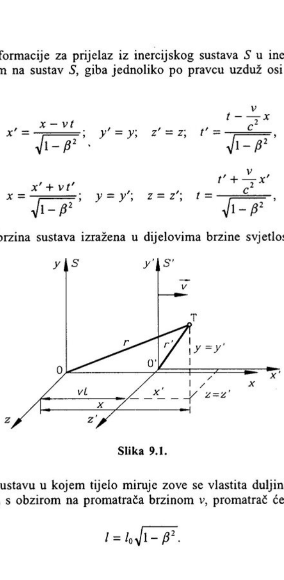
Uvod

Lorentzove transformacije za prijelaz iz inercijskog sustava S u inercijski sustav S', koji se, s obzirom na sustav S, giba jednoliko po pravcu uzduž osi x brzinom v (sl. 9.1), glase:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{1}$$

gdje je $\beta = v/c$, brzina sustava izražena u dijelovima brzine svjetlosti c.



Slika 9.1.

Duljina tijela u sustavu u kojem tijelo miruje zove se vlastita duljina. Giba li se štap vlastite duljine l_0 s obzirom na promatrača brzinom v, promatrač će izmjeriti duljinu l koja iznosi

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2}. \tag{2}$$

Kontrakcija duljine zbiva se samo u smjeru relativnog gibanja, a nema je u smjerovima okomitim na smjer gibanja.

Vremenski interval Δt_0 između dva događaja u istoj točki prostora inercijskog sustava S' (vlastito vrijeme) i vremenski interval Δt između ta ista dva događaja – ali mjeren iz sustava S – povezani su relacijom

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{3}$$

Ta se pojava zove dilatacija vremena.

Relativistički zakon slaganja brzina glasi

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}; \quad u_y' = \frac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}; \quad u_z' = \frac{u_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} \tag{4}$$

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{v}{c^2}u_x'}; \quad u_y = \frac{u_y'\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v}{c^2}u_x'}; \quad u_z = \frac{u_z'\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v}{c^2}u_x'}, \tag{5}$$

gdje su $u_x = \frac{dx}{dt}$, $u_x' = \frac{dx'}{dt'}$ itd. komponente brzine u sustavu S, odnosno S', a v relativna brzina sustava S' prema sustavu S koja je u smjeru osi x odnosno x' (sl. 9.1).

Relativistička količina gibanja čestice mase mirovanja m_0 koja se giba brzinom v jest

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{6}$$

Ukupna energija tijela mase mirovanja m_0 koje se giba brzinom v iznosi

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{7}$$

gdje je $m_0 c^2 = E_0$ energija mirovanja tijela. Kinetička je energija

$$E_k = E - E_0 = m_0 c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right). \tag{8}$$

Kada se masa tijela promijeni za Δm, ukupna mu se energija promijeni za

$$\Delta E = c^2\,\Delta m. \tag{9}$$

Veza između ukupne energije E i količine gibanja čestice jest:

$$E = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}. \tag{10}$$

Veza između količine gibanja p i kinetičke energije E_k jest

$$pc = \sqrt{E_k^2 + 2mc^2 E_k}, \tag{11}$$

a veza je između $\vec{v}$, $\vec{p}$ i E

$$\vec{v} = \frac{c^2}{E}\vec{p}. \tag{12}$$

Primjeri

9.1. U odnosu prema mirnom promatraču gibaju se dva koordinatna sustava u istom smjeru. Brzina prvog je $v_1 = 0{,}93\,c$, a drugog $v_2 = 0{,}9\,c$. Koji kut među dijagonalama kvadrata koji miruje u drugom sustavu mjeri promatrač u prvom? Kvadrat je orijentiran tako da su mu dvije stranice paralelne sa smjerom gibanja.

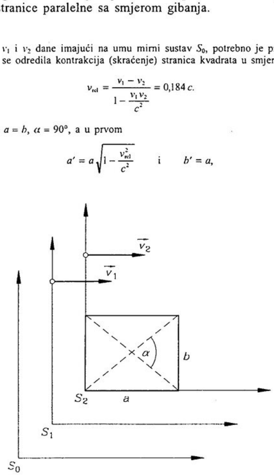
Rješenje

Budući da su brzine v_1 i v_2 dane imajući na umu mirni sustav S_0, potrebno je pronaći relativnu brzinu sustava S_1 i S_2 da bi se odredila kontrakcija (skraćenje) stranica kvadrata u smjeru gibanja. Dakle,

$$v_{rel} = \frac{v_1 - v_2}{1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}} = 0{,}184\,c.$$

U drugom je sustavu $a = b$, $\alpha = 90°$, a u prvom

$$a' = a\sqrt{1 - \frac{v_{rel}^2}{c^2}} \qquad \text{i} \qquad b' = a,$$



Slika 9.2.

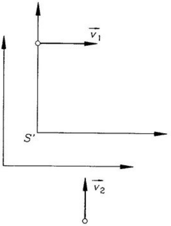
pa je

$$\tan\frac{\alpha'}{2} = \frac{b'}{a'} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_{rel}^2}{c^2}}}$$

ili

$$\alpha' = 91°.$$

9.2. Dvije se čestice u mirnom sustavu gibaju brzinama $v_1 = 0{,}6\,c$, odnosno $v_2 = 0{,}7\,c$, tako da im se (pravocrtne) putanje sijeku pod pravim kutom. Kolika je njihova relativna brzina?



Slika 9.3.

Rješenje

Potrebno je naći brzinu druge čestice u sustavu S' (vlastiti sustav prve čestice) koji se giba brzinom v_1 u odnosu prema mirnom sustavu S. Budući da komponente brzine druge čestice

u sustavu S: $u_x = 0$, $u_y = v_2$

u sustavu S': u'_x, u'_y,

dobiva se

$$u'_x = \frac{u_x - v_1}{1 - \frac{u_x v_1}{c^2}} = -v_1$$

i

$$u'_y = \frac{v_2\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{u_x v_1}{c^2}} = v_2\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2},$$

pa je onda

$$u' = v_{rel} = \sqrt{u'^2_x + u'^2_y} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - \frac{v_1^2 v_2^2}{c^2}},$$

tj.

$$v_{rel} = 0{,}82\,c = 2{,}46 \cdot 10^8\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

9.3. U trenutku kada svemirski brod brzinom $v = 0{,}6\,c$ prolazi pokraj satelita smještenog u blizini Marsa, sa satelita je poslan radio-signal prema Zemlji. Signal stiže na Zemlju nakon $t_1 = 1\,250$ s. Koliko traje put od Zemlje do satelita za posadu svemirskog broda?

Rješenje

Neka je S sustav vezan za zemlju, a S' sustav vezan za brod.

Put od Zemlje do satelita jest

$$d = c\,t_1.$$

Za promatrača na Zemlji trajanje puta je:

$$t = \frac{d}{v} = \frac{ct_1}{0{,}6c} = 2083\,\mathrm{s},$$

a za posadu svemirskog broda

$$t' = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1666\,\mathrm{s}.$$

9.4. Inercijski sustav S' kreće se brzinom $v = 0{,}6\,c$ u odnosu prema inercijskom sustavu S. U sustavu S' nalazi se štap koji zatvara kut $\theta' = 45°$ sa smjerom kretanja. Koji kut zatvara taj štap sa smjerom kretanja u sustavu S?

Rješenje

$$\operatorname{ctan}\theta' = \frac{\Delta x'}{\Delta y'} \text{ – u sustavu } S'$$

$$\operatorname{ctan}\theta = \frac{\Delta x}{\Delta y} \text{ – u sustavu } S$$

$$\Delta x = \Delta x'(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Delta y = \Delta y'$$

$$\operatorname{ctan}\theta = (1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ctan}\theta' = 0{,}8$$

$$\theta = 51{,}34° = 51° 20'.$$

9.5. U akceleratorskom sustavu Švicarskog instituta za nuklearna istraživanja (SIN) proizvode se pioni za eksperimentalna istraživanja tako da primarni snop protona pogađa berilijsku metu. Nastali se pionski snop magnetskim kanalom, duljine 18 m, dovodi do korisnika – teleskopskih brojača. No pion je nestabilna čestica, pa će kroz magnetski kanal dolaziti do korisnika i njegovi produkti raspada. Ako je jedan od produkata raspada elektron iste količine gibanja nastao na početku kanala, potrebno je izračunati vremensku razliku dolaska piona i elektrona u korisničku točku za količinu gibanja piona od $3{,}2 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{J}/c$. (Uputa: masa piona jest $2{,}48 \cdot 10^{-28}$ kg, masa elektrona $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg, a c je brzina svjetlosti.)

Rješenje

Elektron kroz magnetski kanal duljine L brže stiže do korisničke točke – teleskopskih brojača, jer je čestica lakša nego pion. Vrijeme dolaska čestice na metu $t_\check{c} = L/v_\check{c}$ obratno je proporcionalno s brzinama čestica koje valja izračunati relativistički. Količina gibanja i brzina povezane su relacijom

$$p = m\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

pa se brzina može izračunati relativistički kao

$$v^2 = \frac{p^2 c^2}{p^2 + m^2 c^2} = \frac{c^2}{1 + \frac{m^2 c^2}{p^2}}$$

$$v = c\left(1 + \frac{m^2 c^2}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Vremenska razlika $\Delta t = L\left(\frac{1}{v_\pi} - \frac{1}{v_e}\right)$, ako je $p_\pi = p_e = p$, iznosi

$$\Delta t = \frac{L}{c}\left[\sqrt{1+\frac{m_\pi^2 c^2}{p^2}} - \sqrt{1+\frac{m_e^2 c^2}{p^2}}\right].$$

Za količinu gibanja $p = 3{,}2 \cdot 10^{-11}$ J/c i zadanu masu piona i elektrona, proizlazi

$$\Delta t = 13{,}15 \cdot 10^{-9}\,\text{s}.$$

Pouka: Budući da je elektron relativistički (brzina v gotovo jednaka c), drugi član u uglatoj zagradi u veoma dobroj aproksimaciji ima vrijednost 1. Uvođenjem energijskih ekvivalenata za masu mc^2, zadatak bi se još jednostavnije mogao riješiti.

9.6. Izvedite vezu:

a) između ukupne energije i količine gibanja i

b) između kinetičke energije i količine gibanja za relativističku česticu mase m i brzine v.

c) Također valja pokazati da je $\vec{v} = \frac{c^2}{E}\vec{p}$.

d) Kolika je količina gibanja i brzina protona kinetičke energije 5,63 GeV?

Rješenje

a) Ukupna je energija čestice

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Odatle se dobiva

$$\frac{E^2}{c^2} = \frac{m^2c^2}{1-v^2/c^2} + m^2c^2 - m^2c^2 = m^2c^2 + \frac{m^2c^2}{1-v^2/c^2} = m^2c^2 + p^2$$
$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4.$$

b) Veza između kinetičke energije i količine gibanja proizlazi iz $E = mc^2 + E_k$ i $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$:

$$E^2 = m^2c^4 + 2mc^2E_k + E_k^2$$
$$pc = \sqrt{E_k^2 + 2mc^2E_k}.$$

c) Veza između v, p i E proizlazi iz $p = mv/\sqrt{1-\beta^2}$, $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ i $\beta = \frac{v}{c}$:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\frac{v}{v} = \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\frac{c^2}{v} = p\frac{c^2}{v},$$

ili

$$\frac{E}{p} = \frac{c^2}{v}, \quad \vec{v} = \frac{c^2}{E}\vec{p}.$$

d) Energija mirovanja protona jest $mc^2 = 938{,}3$ MeV $= 0{,}9383$ GeV. Kinetička mu je energija $E_k = 5{,}63$ GeV $= 6\,mc^2$, ukupna energija $7\,mc^2$, pa je količina gibanja

$$pc = \sqrt{E^2 - m^2c^4}, \quad pc = \sqrt{49m^2c^4 - m^2c^4} = 6{,}93\, mc^2,$$
$$p = 3{,}47 \cdot 10^{-18} \mathrm{kg\,m\,s^{-1}},$$

a brzina

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{c}{E}p = \frac{6{,}93\, mc^2}{7\, mc^2} = 0{,}99; \quad v = 0{,}99\, c.$$

Količina gibanja može se izračunati i iz

$$pc = \sqrt{E_k^2 + 2mc^2 E_k} = 1{,}04 \cdot 10^{-9} \mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}$$
$$p = 3{,}47 \cdot 10^{-18} \mathrm{kg\,m\,s^{-1}}.$$

9.7. Pokažite da za $v \ll c$ relativistički izraz za kinetičku energiju prelazi u klasični, odnosno da je tada ukupna energija jednaka $mc^2 + \frac{mv^2}{2}$.

Rješenje

1. način
Relativistički izraz za kinetičku energiju jest:

$$E_k = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right).$$

Ako je $v \ll c, \beta \ll 1$, relativistički se izraz može razviti u red potencija po β^2 i zanemariti članove višeg reda

$$E_k = mc^2\left[(1-\beta^2)^{-1/2} - 1\right] = mc^2\left[1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \cdots - 1\right] = \frac{1}{2}mc^2\beta^2 = \frac{mv^2}{2}.$$

U nerelativističkoj aproksimaciji ukupna je energija

$$E = mc^2 + E_k = mc^2 + \frac{mv^2}{2}.$$

2. način
Iz relacije $pc = \sqrt{E_k^2 + 2mc^2E_k}$, odnosno $p^2c^2 = E_k^2 + 2mc^2E_k$, dobiva se

$$\frac{p^2}{2m} = E_k + \frac{E_k^2}{2mc^2}.$$

Ako je $v \ll c$, $E_k^2/2mc^2 \doteq 0$, $p \doteq mv$, te je $E_k = \frac{p^2}{2m} = \frac{mv^2}{2}$.

9.8. Odredite energiju mirovanja, ukupnu energiju, brzinu i količinu gibanja elektrona kinetičke energije 4,6 MeV.

Rješenje

Masa elektrona jest $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, pa je energija mirovanja

$$E_0 = m_0 c^2 = 8{,}19 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{J}.$$

Energije u atomskoj fizici često se izražavaju elektron-voltima (1 eV = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$J), pa je energija mirovanja elektrona 0,511 MeV.

Ukupna je energija jednaka zbroju energije mirovanja i kinetičke energije

$$E = E_0 + E_k = 8{,}18 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J} = 5{,}11\,\mathrm{MeV}.$$

Brzina elektrona dobiva se iz izraza $E_k = \dfrac{E_0}{\sqrt{1-\beta^2}} - E_0$:

$$\beta = \frac{\sqrt{E_k(2E_0 + E_k)}}{E_0 + E_k} = 0{,}995$$

$$v = 0{,}995c.$$

Količina gibanja jest

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{E_k(2E_0 + E_k)} = 2{,}7 \cdot 10^{-21}\ \mathrm{kg\,m\,s^{-1}}.$$

9.9. Solarna konstanta (snaga koja upada na jediničnu površinu okomitu na smjer sunčevih zraka na rubu Zemljine atmosfere, tj. na udaljenosti $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m od Sunca) iznosi 1,353 kW/m^2. Kolika je ukupna snaga koju zrači Sunce? Koliko se zbog toga smanjuje masa Sunca svake sekunde? Uz pretpostavku da je zračenje Sunca konstantno, nakon kojeg bi se vremena masa Sunca smanjila 1%?

Rješenje

Ukupna se snaga koju zrači Sunce u cijeli prostor može izračunati iz solarne konstante E_0

$$P = 4r^2\pi E_0 = 3{,}8 \cdot 10^{26}\ \mathrm{W}.$$

Promjena mase Sunca zbog tog zračenja (koje nastaje fuzijom vodika u helij) jest

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{P}{c^2} = 4{,}2 \cdot 10^{9}\ \mathrm{kg/s}.$$

Masa Sunca iznosi $m_S = 1{,}98 \cdot 10^{30}$ kg, pa će se smanjiti za 1% nakon

$$t = \frac{0{,}01 m_S}{\dfrac{\Delta m}{\Delta t}} = 4{,}7 \cdot 10^{18}\ \mathrm{s} = 1{,}5 \cdot 10^{11}\ \mathrm{god.}$$

9.10. Kada elektron e^- i pozitron e^+ uzajamno djeluju, umjesto njih nastaju dva jednaka gama-fotona. Ako je kinetička energija elektrona i pozitrona u trenutku interakcije zanemariva, kolika je energija svakog od nastalih gama-fotona?

Rješenje

Ta se nuklearna reakcija (tzv. anihilacija elektrona i pozitrona) piše ovako:

$$e^- + e^+ = 2\gamma.$$

Svaki od nastalih fotona ima energiju E i količinu gibanja $p = E/c$.

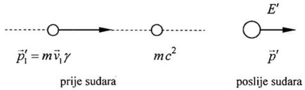
Zakon očuvanja energije zahtijeva: $2\, m_0\, c^2 = 2E$, odnosno

$$E = m_0 c^2 = 8{,}19 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{J} = 0{,}511\,\mathrm{MeV}.$$

Količina gibanja prije reakcije jest nula (elektron i pozitron miruju). Da bi zakon održanja količine gibanja bio ispunjen, moraju nastati dva fotona (a ne jedan), svaki s jednakom količinom gibanja, ali u suprotnom smjeru, tako da bi ukupna količina gibanja bila jednaka nuli.

Fotoni (γ-zrake) energije 0,511 MeV opažaju se npr. pri radioaktivnom β^{+}-raspadu, kada pozitroni prolaze kroz materijal.

9.11. Relativistička čestica mase m i kinetičke energije E_{k1} sudara se s česticom iste mase i $E_{k2} = 0$. Ako je sudar neelastičan (u sudaru nastaje jedna čestica), kolike su masa, energija i brzina nastale čestice?



Slika 9.4.

Rješenje

Zakoni održanja energije i količine gibanja primijenjeni na ovaj sudar daju

$$E + mc^2 = E'$$

$$p_1 = p'.$$

U sudaru nastaje jedna čestica mase m', energije E' i brzine v'. Veza između energije E' i količine gibanja p' nastale čestice jest

$$E' = c\sqrt{m'^2c^2 + p'^2}.$$

Budući da je

$$E' = mc^2 + E = 2mc^2 + E_{k1}$$

$$p' = p_1 = \frac{1}{c}\sqrt{E_{k1}^2 + 2mc^2E_{k1}},$$

dobiva se:

$$(2mc^2 + E_{k1})^2 = c^2\left[m'^2c^2 + \frac{1}{c^2}(E_{k1}^2 + 2mc^2E_{k1})\right],$$

odnosno nakon sređivanja

$$m' = \frac{1}{c}\sqrt{4m^2c^2 + 2mE_{k1}}.$$

To je masa nastale čestice. Njezina je energija i količina gibanja

$$E' = 2mc^2 + E_{k1}$$

$$p' = \frac{1}{c}\sqrt{E_{k1}^2 + 2mc^2E_{k1}},$$

odnosno brzina

$$v' = \frac{c^2}{E'}p' = c\sqrt{\frac{E_{k1}}{E_{k1} + 2mc^2}}.$$

U nerelativističkoj aproksimaciji $v \ll c$:

$$m' = 2m\sqrt{1+\frac{E_{k1}}{mc^2}} = 2m$$

$$v' = c\sqrt{\frac{E_{k1}}{2mc^2}}\left(1+\frac{E_{k1}}{2mc^2}\right)^{-1/2} = \sqrt{\frac{E_{k1}}{2m}} = \frac{1}{2}v_1.$$

9.12. Čestica koje je masa m kreće se duž osi x tako da je njezin položaj u svakom trenutku zadan izrazom $x = \sqrt{b^2 + c^2t^2}$, pri čemu je b neka konstanta. Čemu je jednaka sila pod djelovanjem koje se čestica ovako giba?

Rješenje

Iz relativističkog oblika drugog Newtonova zakona dobivamo

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} + \frac{v^2}{c^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}\right]\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

Iz zadane koordinate x, dobivamo v i $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$:

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{c^2t}{\sqrt{b^2+c^2t^2}}, \quad 1-\frac{v^2}{c^2} = \frac{b^2}{b^2+c^2t^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{c^2b^2}{(b^2+c^2t^2)^{3/2}},$$

odnosno za traženu silu

$$F = mc^2b^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}(b^2+c^2t^2)^{-3/2} = \frac{mc^2}{b}.$$

Zadaci

9.1. Tijelo duljine l = 100 m giba se prema promatraču brzinom v. Kolika je brzina gibanja v, ako je kontrakcija duljine tijela 1 mm?

Rezultat: $v = 1{,}3 \cdot 10^6\ \mathrm{m\ s^{-1}}$

9.2. Inercijski sustav S' kreće se brzinom $v = 0{,}6\ c$ u odnosu prema inercijskom sustavu S. Pod kutom $\theta' = 60°$ u odnosu prema inercijskom sustavu S' i njegovom smjeru kretanja ispaljena je raketa brzinom $v' = 0{,}1\ c$. Kojem kutu θ odgovara taj kut u sustavu S? Kakav je rezultat ako se umjesto rakete ispali foton?

Rezultat: $\vartheta = 6{,}1°$; $\vartheta_f = 32{,}2°$

9.3. Inercijski sustavi S_1 i S_2 kreću se u smjeru osi x brzinama $v_1 = 0{,}8\ c$ i $v_2 = 0{,}6\ c$ u odnosu prema inercijskom sustavu S. Ako je prema satu koji miruje u sustavu S_1 ustanovljeno da je prošla 1 s, koliko vremena prođe za opažača u sustavu S_2?

Rezultat: $t_2 = 1{,}08$ s

9.4. Tahioni su hipotetske čestice koje se mogu kretati brže od svjetlosti. Dva promatrača **L** i **D** krenula su u $t = 0$ u suprotnim smjerovima relativnom brzinom $v = 3/5\ c$. Promatrač **L** uputio je snop tahiona brzinom $v = 7\ c$ prema opažaču **D**, kada je na satu opažača **L** prošlo 32 dana. U kojem trenutku tahioni stižu do opažača **D** prema satu opažača **L**, odnosno **D**? Koliko je vremena prošlo na satu opažača **D** u trenutku upućivanja tahiona?

Rezultat: 35 dana, 28 dana, 40 dana

9.5. Raketa dugačka 70 m kreće se u odnosu prema mirnom promatraču brzinom $v = c/2$. U određenom trenutku foton i masivna čestica, koja ima brzinu $v_1 = 3c/4$ (u odnosu prema mirnom opažaču), počinju utrku sa stražnjeg dijela rakete prema prednjem dijelu. Foton, naravno, prvi dolazi do prednjeg dijela rakete od kojega se odmah reflektira natrag. Na kojoj će se udaljenosti od stražnjeg dijela rakete foton i čestica susresti?

Rezultat: $d = 40$ m

9.6. Odredite omjer udaljenosti koju pion (pi-mezon) prevali nakon produkcije, uračunavajući relativističku dilataciju vremena prema slučaju kada se ona zanemaruje. Brzina gibanja piona iznosi 0,96 c, a vrijeme života (do raspadanja) $\Delta\tau = 2{,}603 \cdot 10^{-8}$ s. Udaljenosti se promatraju u laboratorijskom sustavu.

Rezultat: $\frac{l_{rel}}{l_{ner}} = 3{,}57$

9.7. Vrijeme života slobodnog neutrona iznosi 12 min. Koliki put prevali snop neutrona ako je ukupna energija pojedinog neutrona 1 000 MeV (1GeV)?

Rezultat: $s = 7{,}7 \cdot 10^{10}$ m

9.8. Brzina elektrona mijenja se u jednolikom električnom polju od $v_1 = 0{,}97\ c$ do $v_2 = 0{,}99\ c$. Traži se napon koji ubrzava elektron.

Uputa: potencijal $U = \frac{\Delta E}{Q}$, Q je naboj elektrona.

Rezultat: $U = 1{,}52 \cdot 10^6$ V

9.9. Razmatra se sudar elektrona i fotona. Foton (čestica svjetlosti mase nula i brzine c) energije E upada na mirni elektron, predaje mu dio energije i odlijeće pod kutom ϑ prema prvobitnom smjeru s energijom E' (tzv. Comptonovo raspršenje). Kolika je energija fotona nakon raspršenja?

Rezultat: $E' = \dfrac{E}{1 + \dfrac{2E}{m_e c^2} \sin^2 \dfrac{\vartheta}{2}}$

10. Statika fluida

Uvod

Tlak je omjer sile i površine na koju ta sila okomito djeluje

$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS}. \tag{1}$$

Jedinica za tlak je paskal (znak: Pa).

Iznimno dopuštena jedinica tlaka jest bar (znak: bar), bar = 10^5 Pa.

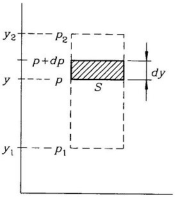
Tlak u fluidu izazvan vanjskom silom (tzv. vanjski ili hidraulički tlak) širi se u fluidu jednako na sve strane (Pascalov zakon).

Iz uvjeta statičke ravnoteže za element mirnog fluida (sl. 10.1) na visini y od neke referentne razine slijedi

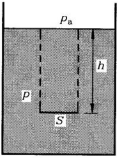
$$dp = -\rho g \, dy. \tag{2}$$

Integriranjem te relacije uz uvjet ρ = konst. dobiva se

$$p_1 - p_2 = \rho g (y_2 - y_1) \tag{3}$$



Slika 10.1.



Slika 10.2.

ili

$$p_1 + \rho g y_1 = p_2 + \rho g y_2 = \text{konst.}$$

Na dubini h ispod površine tekućine (sl. 10.2) tlak je

$$p = p_a + \rho g h, \tag{4}$$

gdje je p_a atmosferski tlak, a $\rho g h$ hidrostatski tlak što ga uzrokuje težina tekućine. Atmosferski se tlak mijenja s nadmorskom visinom i opada po barometarskoj formuli koja za izotermnu atmosferu glasi

$$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0} g h}, \tag{5}$$

gdje su p_0 i ρ_0 tlak i gustoća zraka na visini $h = 0$.

Najčešće je $p_0 = 101\,325$ Pa, $\rho_0 = 1{,}225$ kg/m^3 i $T_0 = 288$ K (15 °C).

No uzme li se u obzir sniženje temperature po visini, tada će za tzv. standardnu atmosferu $\left(\frac{\Delta T}{\Delta h} = -\,6{,}5 \text{ K/km}\right)$ barometarska formula glasiti

$$p = p_0\left(1 - \frac{0{,}0065\,h/m}{288}\right)^{5{,}255}. \tag{6}$$

Normiran je atmosferski tlak $1{,}013 \cdot 10^5$ Pa, odnosno 1 013 mbar.

Prema Arhimedovu zakonu je uzgon na tijelo uronjeno u fluid

$$F_u = \rho_f g V, \tag{7}$$

gdje je ρ_f gustoća fluida, V volumen uronjenog tijela, a g akceleracija sile teže. Molekularne sile u tekućinama uzrokuju napetost površine i kapilarnost. Koeficijent površinske napetosti σ definira se izrazom

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta S}, \tag{8}$$

gdje je ΔW rad potreban za povećanje površine ΔS.

Nadtlak zbog zakrivljene površine tekućine (Laplaceova formula) je

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r}, \tag{9}$$

gdje je r polumjer zakrivljenosti.

Primjeri

10.1. Na kojoj je dubini pod vodom polumjer mjehura zraka dvostruko manji ($r' = r/2$) od onog pri površini ($p_{pov} = 10^5$ Pa). (Neka se računa sa stalnom temperaturom, a napetost površine vode neka se zanemari.)

Rješenje

Jednadžba stanja idealnog plina daje

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

i uz

$$p_1 = p_{pov}, \qquad p_2 = p_{duh} = p_{pov} + \rho_v g h,$$

pa

$$V_1 = \frac{4}{3} r^3 \pi$$

i

$$V_2 = \frac{4}{3}\left(\frac{r}{2}\right)^3 \pi,$$

dobiva se

$$h = \frac{7 p_{pov}}{\rho_v g} = 71{,}36\,\mathrm{m}.$$

Riješite zadatak uzevši u obzir napetost površine ($\sigma_v = 0{,}073\ \mathrm{N\,m^{-1}}$) ako je $r = 1$ mm.

10.2. Izračunajte tlak, temperaturu i gustoću zraka na visini 11 km, pretpostavivši:

a) izotermnu atmosferu (T = konst.),

b) adijabatsku atmosferu ($p/\rho^{1,4}$ = konst.) i

c) standardnu atmosferu ($p/\rho^{1,235}$ = konst.).

Neka je za $h = 0$, tlak $p = p_0 = 101\,325$ Pa, gustoća $\rho_0 = 1{,}225\ \mathrm{kg/m^3}$, temperatura $T_0 = 288$ K. Plinska je jednadžba za zrak $p = \rho R' T$, gdje je $R' = 287$ J/(kg K).

Rješenje

a) T = konst.,

$$\rho(h) = \frac{\rho_0}{p_0} p(h)$$

$$\mathrm{d}p = -\rho g\, \mathrm{d}h$$

$$\int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{\rho_0 g}{p_0} \int_0^h \mathrm{d}h$$

$$p = p_0 \mathrm{e}^{-\rho_0 g h / p_0} = p_0 \mathrm{e}^{-\frac{h/m}{8432}}$$

$$\rho(h) = \rho_0 \mathrm{e}^{-\frac{h/m}{8432}}.$$

Ako je $h = 11$ km, tada je $p = 0{,}27\, p_0 = 27{,}5$ kPa, $\rho = 0{,}27\, \rho_0 = 0{,}33\ \mathrm{kg/m^3}$, $T = 288$ K.

b) Za adijabatski proces p/ρ^{κ} = konst., odnosno

$$\frac{p}{\rho^{\kappa}} = \frac{p_0}{\rho_0^{\kappa}} \qquad \rho = \frac{\rho_0}{p_0^{1/\kappa}} p^{1/\kappa}.$$

Iz $\mathrm{d}p = -\rho g\, \mathrm{d}h$ integriranjem se dobiva

$$\int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{p^{1/\kappa}} = -g\frac{\rho_0}{p_0^{1/\kappa}}\int_0^h \mathrm{d}h$$

$$p = p_0\left(1-\frac{\rho_0 g\left(1-\frac{1}{\kappa}\right)h}{p_0}\right)^{\frac{1}{1-1/\kappa}} = p_0\left(1-3{,}39\cdot10^{-5}\frac{h}{\mathrm{m}}\right)^{3,5}$$

$$\rho = \rho_0\left(1-\frac{\rho_0 g\left(1-\frac{1}{\kappa}\right)h}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} = \rho_0\left(1-3{,}39\cdot10^{-5}\frac{h}{\mathrm{m}}\right)^{2,5}.$$

Iz plinske jednadžbe i veze tlaka i gustoće dobiva se promjena temperature s visinom:

$$p_0 = \rho_0 R' T_0, \qquad p = \rho R' T$$

$$T = T_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}.$$

Budući da je

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}h} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}h},$$

izračunavanjem $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}p}$ i $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}h}$ može se dobiti $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}h}$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}p} = \frac{\kappa-1}{\kappa}\frac{T_0}{p_0^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}h} = -\rho g = -\frac{p g}{R' T}$$

$$-\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}h} = \frac{\kappa-1}{\kappa}\frac{T_0}{p_0^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}-1}\frac{p g}{R' T} = \frac{\kappa-1}{\kappa}\frac{g}{R'}.$$

Ako je h = 11 km, p = 0,195 p_0 = 19,8 kPa, ρ = 0,31 ρ_0 = 0,38 kg/m^3, dT/dh = – 9,8 K/km, T = 180 K (= – 93 °C).

c) Ako je n = 1,235, iz gornjih se jednadžbi dobiva:

$$p = p_0\left(1-\frac{\rho_0 g\left(1-\frac{1}{n}\right)h}{p_0}\right)^{5,255} = p_0\left(1-2{,}26\cdot10^{-5}\frac{h}{\mathrm{m}}\right)^{5,255},$$

$$\rho = \rho_0\left(1-\frac{\rho_0 g\left(1-\frac{1}{n}\right)h}{p_0}\right)^{4,26} = \rho_0\left(1-2{,}26\cdot10^{-5}\frac{h}{\mathrm{m}}\right)^{4,26},$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}h} = \frac{n-1}{n}\frac{g}{R'}.$$

Ako je h = 11 km, p = 0,22 p_0 = 22,6 kPa, ρ = 0,296 ρ_0 = 0,36 kg/m^3, dT/dh = – 6,5 K/km, T = 216 K (= – 57 °C).

10.3. Kako glasi barometarska formula za standardnu atmosferu, pretpostavljajući da temperatura linearno opada s visinom h prema zakonu $T = T_0 - \delta\, h$, gdje je $T_0 = 288$ K (= 15 °C), a $\delta = 6{,}5$ °C/km. (Plinska je jednadžba za zrak $p = \rho\, R'\, T$, gdje je tzv. inženjerska plinska konstanta za zrak $R' = 287$ J kg^{-1} K^{-1}.)

Rješenje

Iz formule za hidrostatski tlak u fluidu

$$\mathrm{d}p = -\rho\, g\, \mathrm{d}h$$

i plinske jednadžbe

$$p = \rho \frac{R}{M} T = \rho\, R' T$$

dobiva se

$$\mathrm{d}p = -\frac{p\, g}{R'\, T}\mathrm{d}h = -\frac{p\, g\, \mathrm{d}h}{R'\,(T_0 - \delta\, h)}$$

$$\int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{g}{R'} \int_0^h \frac{\mathrm{d}h}{T_0 - \delta\, h}.$$

Zamjenom $T_0 - \delta\, h = u$, $\mathrm{d}h = -\mathrm{d}u/\delta$ i integriranjem dobiva se:

$$\ln \frac{p}{p_0} = \frac{g}{R'\delta} \ln \frac{T_0 - \delta\, h}{T_0}$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{\delta\, h}{T_0}\right)^{\frac{g}{R'\delta}}$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{6{,}5\, h\,/\,\mathrm{km}}{288}\right)^{5{,}26}.$$

10.4. Gustoća tekućine u posudi dubine 1 m jest linearna funkcija dubine: Gustoća je na dnu 1,19 g/cm^3, a na površini je 10% manja. Koliki je rad potreban da se predmet mase 0,01 kg i volumena 5 cm^3 podigne s dna na površinu tekućine? (Trenje u tekućini može se zanemariti.)

Rješenje

Budući da je

$$\rho(x) = k\, x + l,$$

dobiva se

$$\rho(x) = \frac{\rho_1 - \rho_0}{d} x + \rho_0; \qquad \rho_0 = \rho(0); \qquad \rho_1 = \rho(d),$$

pa je na dubini x (od površine)

$$F(x) = m\, g - U(x) = m\, g - \left(\frac{\rho_1 - \rho_0}{d} x + \rho_0\right) \cdot V \cdot g,$$

a rad je $\mathrm{d}W = F(x)\, \mathrm{d}x$, tj.

$$W = \int_0^d \left[m\,g - \left(\frac{\rho_1 - \rho_0}{d} x + \rho_0 \right) V g \right] dx = V \frac{g\,d}{2} (2\rho_1 - \rho_1 - \rho_0),$$

gdje je

$$\rho_1 = \frac{m}{V}.$$

Dobiva se

$$W = 4{,}27 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{J}.$$

10.5. U valjkastu posudu čiji je polumjer dna 10 cm nalivena je 1 litra vode. U posudu se spušta staklena kocka ($\rho_s = 4 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$). Koliku je silu potrebno upotrijebiti da se kocka podigne sa dna, ako je masa kocke 0,75 kg?

Rješenje

Kada se kocka uroni u vodu, razina vode se podiže na visinu h

$$h = \frac{V_v}{r^2\pi - a^2} = 0{,}0355\,\mathrm{m},$$

pri čemu je brid kocke

$$a = \sqrt[3]{\frac{m}{\rho_s}} = 0{,}0572\,\mathrm{m}.$$

Sila potrebna da se podigne tijelo jest

$$F = m\,g - U = m\,g - \rho_v g\,h\,a^2 = 6{,}22\,\mathrm{N}.$$

10.6. Okrugli je balon napunjen plinom gustoće 1 kg m^{-3}. Površinska gustoća materijala od kojega je balon napravljen je 0,04 kg m^{-2}. Koliki najmanji polumjer mora imati balon da bi lebdio u zraku? Za gustoću zraka valja uzeti 1,3 kg m^{-3}.

Rješenje

Da bi balon lebdio:

$$U = m\,g + V\rho_p g$$

$$V\rho_z g = \sigma S g + V\rho_p g$$

$$4/3 r^3 \pi \rho_z g = \sigma 4 r^2 \pi g + 4/3 r^3 \pi \rho_p g$$

$$\frac{r}{3}(\rho_z - \rho_p) = \sigma$$

$$r = \frac{3\sigma}{\rho_z - \rho_p} = 0{,}4\,\mathrm{m}.$$

10.7. Tijelo pliva na površini žive tako da mu je 25% volumena potopljeno u živu. Koliki je postotak volumena potopljen u živu ako se preko tijela prelije voda tako da tijelo bude potpuno prekriveno? ($\rho_ž = 13{,}6 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$)

Rješenje

Iz Arhimedova je zakona

$$m g = U = \rho_z \cdot 0{,}25 \cdot V \cdot g$$

i iz

$$\rho_t = \frac{m}{V}$$

dobiva se

$$\rho_t = \rho_z \cdot 0{,}25.$$

Kada se tijelo prelije vodom, bit će

$$m g = U_v + U_z = V_v' g \rho_v + V_z' g \rho_z = \rho_t V g$$

i uz

$$V = V_v' + V_z'$$

dobit će se

$$V_z' = V \frac{\rho_t - \rho_v}{\rho_z - \rho_v},$$

odnosno

$$V_z' = 0{,}19 V \quad \text{ili} \quad 19\%.$$

10.8. Kugla je sastavljena od materijala različitih gustoća. Vanjski sloj kugle polumjera 15 cm napravljen je od aluminija ($\rho_1 = 2\,700$ kg/m^3), a unutrašnji je dio polumjera 14 cm ispunjen homogenim materijalom gustoće $\rho_2 = 250$ kg/m^3. Ako je kugla položena u vodi, kolika je visina dijela kugle iznad razine vode?

Rješenje

Na kuglu položenu u vodu djeluju sile težine i uzgona U. Budući da ona pliva, navedene su sile u ravnoteži

$$\sum_i G_i = U,$$

gdje indeks i obuhvaća komponente od različitih sastavnih materijala kugle. Uz oznake: r = polumjer unutrašnje homogene kugle gustoće ρ_2, R = polumjer vanjskog aluminijskog sloja gustoće ρ_1, ρ = gustoća vode, ravnoteža sila eksplicitno glasi:

$$g \rho_1 \frac{4}{3}\pi (R^3 - r^3) + g \rho_2 \frac{4}{3}\pi r^3 = g \rho \frac{4}{3} R^3 \pi - g \rho \frac{\pi x^2}{3}(3R - x).$$

Volumen kuglina odsječka iznad razine vode je $\frac{\pi x^2}{3}(3R-x)$. Uvrštavanjem zadanih podataka dobivamo jednadžbu

$$1000 x^3 - 450 x^2 + 3{,}94 = 0$$

čije je rješenje tražena visina

$$x = 10{,}7\,\text{cm}.$$

10.9. Areometar je uronjen u vodu do dubine $h_0 = 10$ cm, a u tekućinu gustoće $\rho_1 = 0{,}7 \cdot 10^3$ kg/m^3 do dubine $h_1 = 15$ cm. Koliko će duboko uroniti areometar u tekućinu gustoće $\rho = 1{,}8 \cdot 10^3$ kg/m^3?

Rješenje

Presjek cijevi areometra je S, a volumen polukugle na dnu areometra je V_0.

$$m g = (V_0 + S h_0)\rho_0 g \qquad V_0 = \frac{m}{\rho_0} - S h_0 \tag{1}$$

$$m g = (V_0 + S h_1)\rho_1 g \qquad V_0 = \frac{m}{\rho_1} - S h_1 \tag{2}$$

$$m g = (V_0 + S h)\rho g \qquad V_0 = \frac{m}{\rho} - S h. \tag{3}$$

Iz jednadžbi (1) i (2)

$$S = \frac{m}{h_0 - h_1}\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_1}\right). \tag{4}$$

Iz jednadžbi (1) i (3)

$$S = \frac{m}{h_0 - h}\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho}\right). \tag{5}$$

Iz (4) i (5)

$$h = h_0 + (h_1 - h_0)\frac{\rho_1(\rho - \rho_0)}{\rho(\rho_1 - \rho_0)}, \qquad h = 4{,}8\,\mathrm{cm}.$$

10.10. U posudi se nalaze dvije tekućine koje se ne miješaju. Njihove su gustoće $\rho_1 = 1{,}1 \cdot 10^3\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$, $\rho_2 = 1{,}3 \cdot 10^3\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$, a debljine njihovih slojeva $d_1 = 2$ cm i $d_2 = 8$ cm. S površine tekućine u posudi se ispusti maleno tijelo koje pada bez trenja, a u trenutku kada dođe do dna, njegova je brzina jednaka nuli. Kolika je gustoća materijala iz kojega je napravljeno tijelo?

Rješenje

Budući da je kinetička energija tijela u trenutku kada dođe do dna jednaka nuli, rad sile teže jednak je radu sila uzgona. Prema zakonu očuvanja energije dobivamo:

$$\Delta E_p = m g (d_1 + d_2) = W_1 + W_2$$

$$W_1 = \rho_1 V g d_1$$

$$W_2 = \rho_2 V g d_2$$

$$\rho(d_1 + d_2) = \rho_1 d_1 + \rho_2 d_2$$

$$\rho = \frac{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2}{d_1 + d_2} = 1{,}26 \cdot 10^3\ \mathrm{kg\,m^{-3}}.$$

10.11. Cilindrična metalna plutača promjera $2r = 1$ m i visine $h_0 = 0{,}6$ m pričvršćena je užetom za dno tako da su dvije trećine visine plutače uronjene u vodu. Kolika je sila kojom uže vuče plutaču, ako je debljina stijenki plutače $d = 0{,}01$ m, gustoća metala $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$?

Rješenje

Sile koje djeluju na plutaču uravnotežene su tako da vrijedi

$$G + F = U, \tag{1}$$

gdje je G težina plutače, F sila kojom uže vuče plutaču, U uzgon:

$$G = m \cdot g = V \cdot \rho \cdot g = (r^2 \pi\, h_0 - (r - d)^2 \pi\, (h_0 - 2d))\, \rho\, g \tag{2}$$

$$U = r^2 \pi\, h\, \rho_0\, g = \frac{2}{3} r^2 \pi\, h_0\, \rho_0\, g. \tag{3}$$

Uvrštavanjem (2) i (3) u (1) i uzimanjem u obzir da je $h = 2h_0/3$ dobiva se

$$F = r^2 \pi\, g\, h_0 \rho_0 \left(\frac{2}{3} - \frac{\rho}{\rho_0} + \left(1 - \frac{d}{r}\right)^2 \left(1 - \frac{2d}{h_0}\right) \frac{\rho}{\rho_0} \right). \tag{4}$$

Uvrštavanjem zadanih veličina u (4) dobiva se $F = 499{,}6$ N.

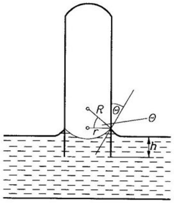
10.12. Koliki je rad potreban da bi se kapljica žive polumjera 1 mm razbila na kapljice dvostruko manjeg polumjera? ($\sigma = 0{,}48$ N/m)

Rješenje

Od jedne se kapljice dobiva 8 kapljica dvostruko manjeg promjera, jer je $V_1 = 8V_2$. Pritom se površina tekućine povećava od $4 r_1^2 \pi$ na $8 r_1^2 \pi$, pa je

$$W = \sigma \Delta S = \sigma (8 r_1^2 \pi - 4 r_1^2 \pi) = 4 r_1^2 \pi\, \sigma = 6 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{J}.$$

10.13. Kapilarnu cjevčicu zatvorenu na jednom kraju uranjamo okomito u posudu s vodom. Da bi se izjednačila razina vode u cjevčici i u posudi, valja uroniti u vodu 3% duljine cjevčice. Močenje je potpuno, tlak 10^5 Pa, a koeficijent površinske napetosti vode 0,073 N/m. Koliki je unutrašnji polumjer cjevčice?



Slika 10.3.

Rješenje

Kapilara duljine l i presjeka S ima volumen $V_0 = S\, l$ i prije uranjanja tlak p_0. Uranjanjem cjevčice u vodu (sl. 10.3) događa se karakteristična kapilarna pojava. Onaj dio cjevčice u koji nije dospjela voda neka ima volumen

$$V_1 = S\,(l - h) \text{ s tlakom } p_1.$$

Boyle-Mariotteov zakon veže stanje prije i poslije uranjanja(v. str. 203)

$$p_0 V_0 = p_1 V_1,$$

odnosno

$$p_0 l = p_1 (l - h).$$

Tlak p_1 je, međutim, složen od prvobitnog tlaka p_0 i tlaka kapilarnog stupca vode Δp, prema relaciji

$$p_1 = p_0 + \Delta p = p_0 + \frac{2\sigma \cos\theta}{r},$$

gdje je r traženi unutrašnji polumjer cjevčice, a $\frac{r}{\cos\theta}$ polumjer zakrivljenosti meniska i θ kut močenja.

Ujedinjavanjem gornjih jednadžbi, dobiva se

$$p_0 l = \left(p_0 + \frac{2\sigma \cos\theta}{r} \right)(l - h)$$

iz koje proizlazi r

$$r = \frac{2\sigma\cos\theta}{p_0 \frac{h}{l-h}}.$$

Močenje je potpuno, $\cos\theta = 1$, pa je nakon uvrštenja $r = 0{,}0487$ mm.

10.14. Energija vezanja atoma tekućeg neona na temperaturi $-248\ °C$ iznosi $0{,}97 \cdot 10^8\ J/m^3$, a površinska napetost za neon na toj temperaturi iznosi $5{,}5 \cdot 10^{-3}\ J/m^2$. Kolika je udaljenost između atoma neona?

Rješenje

Atom u unutrašnjosti tekućine vezan je sa svojim susjedima energijom vezanja E_0. Atom na površini vezan je s manjom energijom jer nema susjeda iznad sebe. Ta se razlika može izračunati ako se pretpostavi da se vezanje atoma sa susjedima sastoji od šest veza u smjerovima gore-dolje, lijevo-desno, naprijed-natrag. Za atom na površini jedna od tih veza nedostaje, tako da će energija veze biti $5/6\,E_0$. Na taj način površina ima višak energije. Za 1 m^2 taj je višak površinska napetost:

$$\sigma = \frac{1}{6} E_0 d^{-2}$$

d^{-2} – broj atoma u 1 m^2 na površini tekućine

d – udaljenost između atoma.

Energija veze E_v potrebna da se 1 m^3 razdvoji u odvojene atome iznosi

$$E_v = E_0 d^{-3}$$

$$d = \frac{6\sigma}{E_v} = 3{,}4 \cdot 10^{-10}\,\text{m}.$$

10.15. Kojom najvećom kutnom brzinom može rotirati kapljica vode mase 10^{-5} kg, a da se ne razdvoji. Za površinsku napetost kapljice uzmite $7 \cdot 10^{-2}\ J/m^2$. Uzmite u obzir da se prilikom deformacije povećava moment inercije kapljice.

Rješenje

Kapljica vode sfernog oblika, polumjera r, rotira kutnom brzinom ω_0, deformira se i u graničnom slučaju može se predstaviti kao da se sastoji od dviju kugli polumjera r_1 koje rotiraju oko osi koja je tangenta za obje. Deformacijom kapljice povećava se njezina površina, smanjuje kinetička energija, a zbog površinske napetosti povećava površinska energija. Pritom vrijedi zakon očuvanja mehaničke energije i momenta količine gibanja jer je sustav izoliran.

Dok je kapljica sfernog oblika, moment tromosti i kinetička energija jesu:

$$I_0 = \frac{2}{5} m r^2$$

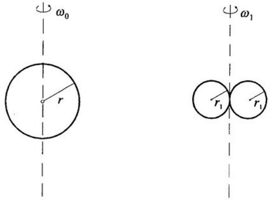
$$E_{KO} = \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2.$$

Kada se kapljica deformira u dvije kapljice polumjera r_1, površina se povećava od $4r^2\pi$ na $S = 2 \cdot 4 r_1^2 \pi$.

$$\frac{4r^3\pi}{3} = 2 \cdot \frac{4}{3} r_1^3 \pi \quad \Rightarrow \quad r_1 = \frac{r}{\sqrt[3]{2}}$$

$$S = 4\sqrt[3]{2}\, r^2 \pi$$

Te se dvije kapljice vrte kutnom brzinom ω_1 oko osi koja je tangenta za obje. Moment tromosti I_1 određujemo primjenom Steinerova poučka i dobivamo



Slika 10.4.

$$I_1 = \frac{14}{5} m_1 \frac{r^2}{2^{2/3}} = \frac{7}{2^{5/3}} I_0 = 2{,}205\, I_0.$$

Prema zakonu očuvanja momenta količine gibanja

$$I_0 \omega_0 = I_1 \omega_1 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \frac{2^{5/3}}{7} \omega_0.$$

Kinetička energija dviju kapljica je

$$E_{k1} = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2 \frac{2^{5/3}}{7} = \frac{E_{k0}}{2{,}205}.$$

Rad za povećanje površine jednak je promjeni kinetičke energije:

$$\sigma (S - 4 r^2 \pi) = E_{k0} - E_{k1}$$

$$4 r^2 \pi \sigma (\sqrt[3]{2} - 1) = \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2 (1 - \frac{2^{5/3}}{7}) = \frac{1}{5} m r_0^2 \omega_0^2 \left(1 - \frac{2^{5/3}}{7}\right).$$

Odatle je

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{20 \pi \sigma (\sqrt[3]{2} - 1)}{\left(1 - \frac{2^{5/3}}{7}\right) m}} = 457\,\mathrm{s}^{-1}, \qquad \omega_1 = \frac{2^{5/3}}{7} \omega_0 = 207{,}3\,\mathrm{s}^{-1}.$$

Zadaci

10.1. Dug, zatvoreni, okomito postavljen cilindar stalnog volumena potpuno je ispunjen nestlačivom tekućinom (gustoće $\rho = 0{,}8 \cdot 10^3\ \mathrm{kgm^{-3}}$), osim veoma malog mjehurića idealnog plina netopljivog u tekućini koji se zadržava na udaljenosti $h_1 = 10$ m ispod vrha tekućine. Tlak na vrhu tekućine jest $p = 10^5$ Pa. Mjehurić se oslobodi i dođe na površinu tekućine. Koliki je sada tlak na površini tekućine i na dubini h_1?

Rezultat: $1{,}78 \cdot 10^5$ Pa; $2{,}57 \cdot 10^5$ Pa

10.2. Izračunajte ovisnost tlaka o nadmorskoj visini za h = 100 m, 500 m, 1 000 m, 5 000 m i 10 000 m, za:

a) izotermnu atmosferu i

b) standardnu atmosferu ($\Delta T/\Delta h$ = – 6,5 °C/km).

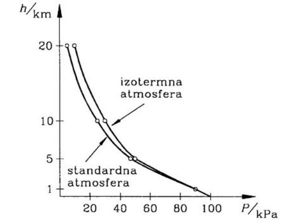
Nacrtajte $h(p)$, (p_0 = 101 325 Pa, ρ_0 = 1,225 kg/m^3, T_0 = 288 K).

Rezultat: a)

h/m	0	100	500	1 000	5 000	10 000	20 000
p/kPa	101,3	100,1	95,5	90	56	31	9,5

b)

h/m	0	100	500	1 000	5 000	10 000	20 000
p/kPa	101,3	100,1	95,5	89,9	54	26,4	4,3



Slika 10.5.

10.3. Ako je tlak na podnožju planine (nadmorska visina 300 m) 101 kPa, koliki je tlak na vrhu planine visoke 1 000 m? Pretpostavimo da je temperatura svuda jednaka i da iznosi 0 °C.

Rezultat: p = 92,5 kPa

10.4. U standardnoj atmosferi (ICAOSA – International Civil Aviation Organization Standard Atmosphere) tlak i gustoća zraka povezani su relacijom p/ρ^n = konst., n = 1,235. Potrebno je pokazati da to odgovara temperaturnom gradijentu od – 6,5 K/km. Koliki je temperaturni gradijent za adijabatsku atmosferu (n = 1,4)? (Plinska jednadžba za zrak jest $p = \rho R' T$, gdje je R' = 287 J kg^{-1} K^{-1}.)

Rezultat: $-\frac{dT}{dh} = \frac{g}{R'}\frac{n-1}{n}$; n = 1,235, $\frac{dT}{dh} = -6{,}5$ K km^{-1}; n = 1,4, $\frac{dT}{dh} = -9{,}8$ K km^{-1}

10.5. Na kolicima se nalazi posuda valjkastog oblika napunjena vodom do visine h = 1 m. Na suprotnim su stranama posude dva ventila površine otvora 10^{-3} m^2 na visini h_1 =

= 0,25 m, odnosno h_2 = 0,5 m. Kojom se silom i u kom se smjeru mora djelovati na kolica da bi ona ostala nepomična pošto se otvore ventili?

Rezultat: $F = 4{,}9$ N

10.6. Okomito postavljena cijev duljine 5 m sužava se od gornjeg dijela prema donjem, tako da je na gornjem dijelu promjer 10 cm, a na donjem dijelu 5 cm. Cijev je s donje strane začepljena čepom koji može izdržati silu 200 N i zatim napunjena vodom. Kolikom se najmanjom silom mora pritiskati voda s gornje strane da bi se izbacio čep?

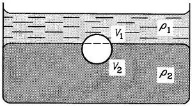
Rezultat $F_1 \geq 414{,}8$ N

10.7. Željezni brod mase 100 t nalazi se na dnu jezera. Brod se može podići sa dna tako da se za brod užadima vežu jastuci koji se napune vodikom. Potrebno je odrediti volumen koji mora zauzimati plin u jastucima da bi se brod podigao ako je masa jastuka i užadi 2 t. Gustoća željeza iznosi $7{,}8 \cdot 10^3$ kg/m^3. Srednja je gustoća užadi i praznih jastuka $5 \cdot 10^3$ kg/m^3. Težinu vodika valja zanemariti.

Rezultat: $V = 88{,}8$ m^3

10.8. U moru pliva santa leda. Volumen sante iznad mora iznosi 195 m^3. Koliki je ukupan volumen sante ako je $\rho_v = 1{,}03$ g/cm^3, a $\rho_{led} = 0{,}9$ g/cm^3.

Rezultat: $V = 1\,545$ m^3



Slika 10.6.

10.9. U posudi je živa, a iznad nje voda (sl. 10.6). Homogena željezna kugla pliva na granici između žive i vode. Koliki je dio volumena kugle u živi, a koliki u vodi?

Rezultat: $V_2 = 0{,}55\,V$; $V_1 = 0{,}45\,V$

10.10. Tijelo gustoće 800 kg/m^3 uronjeno je u vodu gustoće 1 000 kg/m^3 na dubinu od 1 m i pušteno. Koju će maksimalnu visinu iznad površine vode doseći tijelo? Trenje tijela u vodi i zraku valja zanemariti.

Rezultat: $h = 0{,}25$ m

10.11. Homogenim drvenim štapom duljine $l = 5$ m, težine $G = 40$ N, gustoće $\rho_1 = 796$ kg/m^3 izmjeri se dubina jezera $H = 4{,}75$ m. Koliki je izvršeni rad ako je štap potapan vertikalno? (Gustoća vode $\rho_2 = 10^3$ kg/m^3)

Rezultat: $W = 2{,}98$ J

10.12. U U-cijev čiji krakovi imaju različite polumjere ulivena je voda. Kolika je razlika razina ako su polumjeri $r_1 = 4$ mm i $r_2 = 0{,}6$ mm. Pretpostavimo da voda potpuno moči stijenku cijevi. Koeficjent površinske napetosti vode je 0,073 N/m.

Rezultat: $\Delta h = 2{,}1$ cm

11. Dinamika fluida

Uvod

Za stacionarno strujanje idealnoga nestlačivog fluida zakoni očuvanja mase i energije izražavaju se u obliku jednadžbe kontinuiteta

$$q = S\,v = \text{konst.} \tag{1}$$

i Bernoullijeve jednadžbe

$$p + \rho\,g\,h + \frac{\rho}{2}v^2 = \text{konst.}, \tag{2}$$

gdje je ρ gustoća fluida, q protok, S presjek cijevi, v brzina i p tlak fluida u promatranoj točki, a h visina te točke s obzirom na referentnu razinu.

Sila unutrašnjeg trenja između dva susjedna sloja fluida kojih je površina S i koji su međusobno udaljeni za $\mathrm{d}z$ jest

$$F_{\mathrm{tr}} = \eta\,S\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}, \tag{3}$$

gdje je η dinamički koeficijent viskoznosti koji se iskazuje jedinicom paskal sekunda (znak: Pa s).

Strujanje je laminarno ako je Reynoldsov broj

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho\,v\,l}{\eta} \tag{4}$$

manji od kritičnog. Tu je ρ gustoća fluida, η koeficijent viskoznosti, v brzina strujanja fluida i l karakteristična dimenzija tijela.

Za laminarno strujanje realnog fluida kroz cijev dužine l i promjera $2R = d$ vrijedi Poisseuilleov zakon. Brzina strujanja na udaljenosti r od središta cijevi jest

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta\,l}(R^2 - r^2), \tag{5}$$

a protok je

$$q = \frac{\pi}{8\eta}\frac{p_1 - p_2}{l}R^4. \tag{6}$$

Ako sa $\bar{v}$ označimo srednju brzinu koja bi, kada bi bila konstantna na cijelom presjeku cijevi, dala isti protok, bit će otpor pri laminarnom protjecanju viskozne tekućine

$$F_{tr} = 8\pi\eta l\bar{v}. \tag{7}$$

Kada se kugla polumjera R giba kroz viskozni fluid brzinom v tako da je strujanje fluida oko nje laminarno, sila trenja je dana Stokesovim zakonom

$$F_{tr} = 6\pi\eta R v. \tag{8}$$

Kada je strujanje turbulentno, otpor sredstva je proporcionalan kvadratu brzine

$$F_{ot} = \frac{1}{2}c_0 \cdot S\rho v^2, \tag{9}$$

gdje je c_0 otporni broj, S karakteristična površina, ρ gustoća i v brzina fluida.

Primjeri

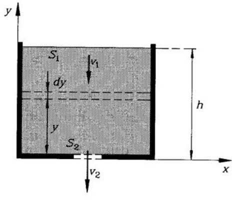
11.1. Posuda cilindričnog oblika visine 1,5 m ispunjena je vodom do vrha. U kojem će vremenu voda potpuno isteći kroz otvor na dnu posude ako je površina otvora 1/350 površine dna?

Rješenje

Problem je ilustriran slikom 11.1 na kojoj su označene sve relevantne veličine. Voda struji brzinom v_1 na površini, odnosno brzinom v_2 na otvoru, pa potpuni opis problema daju Bernoullijeva jednadžba i jednadžba kontinuiteta:

$$p_a + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_a$$

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad \text{i} \quad v_2 = v_1\frac{S_1}{S_2}.$$



Slika 11.1.

Iz tih jednadžbi proizlazi brzina v_1

$$v_1 = \frac{S_2\sqrt{2gh}}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}} = K\sqrt{h}$$

uz kraćenje

$$K = \frac{S_2\sqrt{2g}}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}}.$$

Visina je vode u posudi prije početka istjecanja h. Tijekom istjecanja ona se mijenja, a to se izražava varijablom y (v. sl. 11.1). Promjenu razine daje jednadžba

$$-dy = v_1 dt = K\sqrt{y}\,dt,$$

čijom integracijom određujemo ukupno vrijeme t za potpuno istjecanje vode

$$-\int_0^t dt = \int_h^0 \frac{1}{K}\frac{dy}{\sqrt{y}}$$

$$t = \frac{1}{K}\int_0^h \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{2}{K}\sqrt{h} = \sqrt{\frac{2h\left[\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right]}{g}}.$$

Nakon uvrštenja $h = 1{,}5$ m, i $S_2 = \frac{1}{350}S_1$ slijedi $t = 193{,}55$ s.

11.2. Vodoravnom cijevi protječe voda. Na mjestima gdje su presjeci cijevi $S_1 = 1\ \text{cm}^2$ i $S_2 = 3\ \text{cm}^2$ okomito su spojene dvije manometarske cijevi. Odredite protok vode kroz vodoravnu cijev ako je razlika razina vode u manometrima $\Delta h = 10$ cm.

Rješenje

Primijenimo Bernoullijevu jednadžbu i jednadžbu kontinuiteta

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$v_1 S_1 = v_2 S_2,$$

gdje su brzine v_1 i v_2 brzine protjecanja na užem i širem dijelu cijevi.
Razlika je tlakova:

$$p_2 - p_1 = \rho g \Delta h.$$

Ako to uvrstimo u Bernoullijevu jednadžbu i eliminiramo v_2 iz jednadžbe kontinuiteta, dobivamo

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) = \rho g \Delta h$$

$$v_1^2 = \frac{2S_2^2 g \Delta h}{S_2^2 - S_1^2}.$$

Protok je

$$q = S_1 v_1 = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2g\Delta h}{S_2^2 - S_1^2}}$$

$$q = 1{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^3\text{s}^{-1}.$$

11.3. Kroz cijev duljine 100 m teče voda brzinom 1 m/s. Pri zatvaranju ispusnog ventila tlak se povećava za $2 \cdot 10^5$ Pa. Koliko je trajalo zatvaranje ventila?

Rješenje

Ako se ventil zatvori za vrijeme Δt, količina gibanja vode za to vrijeme padne od mv do nule. Masa vode je $m = \rho V = \rho S l$.

Zbog toga na ventil djeluje impuls sile

$$F\Delta t = \Delta(mv) = m\Delta v = mv,$$

odnosno povećava se tlak za

$$\Delta p = \frac{F}{S} = \frac{m\Delta v}{S\Delta t}.$$

Odatle je vrijeme zatvaranja ventila

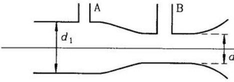
$$\Delta t = \frac{m\,\Delta v}{\Delta p\, S} = \frac{\rho\, l\, v}{\Delta p} = 0{,}5\,\mathrm{s}.$$

11.4. Količina plina koji struji plinovodom mjeri se sustavom prikazanim na sl. 11.2. O brzini protjecanja sudi se na osnovi razlike tlakova u točkama A i B na sl. 11.2. Potrebno je odrediti masu plina koja prostruji kroz jedan sat ako su zadani: $d_1 = 50$ mm, $d_2 = 40$ mm, $\Delta p = 0{,}188$ Pa i gustoća plina $\rho = 1{,}6\ \mathrm{kg/m^3}$.

Rješenje

Strujanje plina kroz širi i uzi dio plinovoda opisuje jednadžba kontinuiteta

$$r_1^2 \pi\, v_1 = r_2^2 \pi\, v_2,$$



Slika 11.2.

kojom se omjer brzina prevodi u odnos polumjera užeg i šireg dijela cijevi

$$\left(\frac{v_1}{v_2}\right) = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2.$$

Plinovod je vodoravno postavljen, pa Bernoullijeva jednadžba poprima oblik

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho\, v_2^2\left(1 - \frac{v_1^2}{v_2^2}\right).$$

Iz izmjerene razlike statičkog tlaka $\Delta p = p_1 - p_2$ te zamjenom omjera brzina omjerom polumjera računa se brzina strujanja v_2

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho\left[1 - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^4\right]}} = 0{,}63\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Tijekom jednog sata prostrujit će količina plina mase m prema jednadžbi

$$m = \rho\, S_2\, v_2\, t = \rho\, r_2^2 \pi\, v_2\, t = 4{,}56\,\mathrm{kg}.$$

11.5. Protok vode mjeri se nagnutim venturi-metrom (sl. 11.3) čija ulazna cijev ima presjek 20 cm^2, a presjek suženja mu je 10 cm^2. Visinska razlika između šireg i užeg dijela (tj. mjesta gdje su spojeni manometri) jest 30 cm. Razlika tlakova je 40,5 kPa. Koliki je protok vode? Kolika bi bila razlika tlakova za isti protok da je cijev vodoravna? Ako bi se protok mjerio živinim manometrom u obliku U-cijevi, kolika bi bila razlika stupaca žive u oba slučaja?

Rješenje

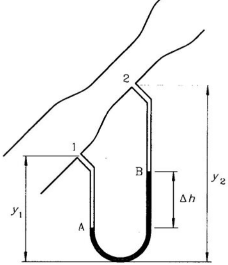
Iz Bernoullijeve jednadžbe

$$p_1 + \rho\, g\, y_1 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 = p_2 + \rho\, g\, y_2 + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2$$

i jednadžbe kontinuiteta

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

dobivaju se brzina vode



Slika 11.3.

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2) + 2\rho g (y_1 - y_2)}{\rho\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right)}}$$

i protok

$$q = S_1 v_1 = S_1 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2) + 2\rho g (y_1 - y_2)}{\rho\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right)}} = 10^{-2}\ \mathrm{m^3\,s^{-1}}.$$

Razlika tlakova $p_1 - p_2$ ovisi o razlici razine žive Δh i o visinskoj razlici $y_2 - y_1$. Budući da su tlakovi

$$p_A = p_1 + \rho g (y_1 - y_A) = p_2 + \rho g (y_2 - y_B) + \rho_z g \Delta h$$

ili

$$p_1 - p_2 + \rho g (y_1 - y_2) = g(\rho_z - \rho)\Delta h,$$

razlika stupaca žive jest:

$$\Delta h = \frac{p_1 - p_2 + \rho g (y_1 - y_2)}{g(\rho_z - \rho)} = 0{,}3\ \mathrm{m}.$$

Ako je cijev vodoravna, tada za isti protok q razlika tlakova mora biti

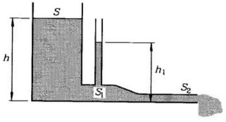
$$\Delta p' = 37{,}5\ \mathrm{kPa}.$$

Budući da je

$$q = S_1 \sqrt{\frac{2g(\rho_z - \rho)\Delta h}{\rho\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right)}},$$

bez obzira na nagib cijevi, Δh je isti u oba slučaja.

11.6. U posudi poprečnog presjeka 300 cm^2 nalazi se 12 litara vode. Voda istječe kroz vodoravnu cijev iz otvora pri dnu posude (sl. 11.4). Ta je cijev na početku presjeka 3 cm^2, a zatim se sužava u cijev presjeka 1,5 cm^2. Koliki je tlak, odnosno kolika je visina stupca vode u manometru u širem dijelu vodoravne cijevi? (Pretpostavimo da je voda idealan fluid.)



Slika 11.4.

Rješenje

Iz jednadžbe kontinuiteta izlazi

$$q = S_1 v_1 = S_2 v_2.$$

Visina vode u posudi jest:

$$h = \frac{V}{S} = 0{,}4\ \mathrm{m}.$$

Bernoullijeva jednadžba primijenjena na razne presjeke daje

$$p_a + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2. \tag{1}$$

Budući da je $p_2 = p_a$ i $v \approx 0$, onda je

$$\rho g h = \frac{1}{2}\rho v_2^2; \qquad v_2 = \sqrt{2gh}; \qquad v_1 = \frac{S_2}{S_1} v_2 = \frac{S_2}{S_1}\sqrt{2gh}.$$

Iz (1) se može odrediti tlak p_1 u širem dijelu vodoravne cijevi

$$p_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_a + \frac{1}{2}\rho v_2^2\left(1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}\right) = p_a + \rho g h\left(1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}\right).$$

Visina stupca vode u manometru proporcionalna je s tlakom p_1:

$$p_1 = \rho g h_1 + p_a,$$

pa je

$$h_1 = h\left(1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}\right) = \frac{3}{4}h = 0{,}3\ \mathrm{m}.$$

11.7. Iz posude istječe voda kroz horizontalnu cijev pri dnu posude (sl. 11.5). Kolika je brzina istjecanja ako je visina vode u posudi 35 cm, duljina cijevi 40 cm, a stupac vode u manometru na sredini cijevi visok 15 cm. Pretpostavlja se da je istjecanje laminarno.

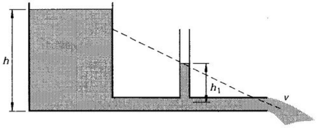
Rješenje

Tlak je na otvoru posude $p_1 = \rho g h + p_a$, a na svršetku cijevi p_a. Razlika tlakova jest $\Delta p = \rho g h$. Gubitak tlaka zbog trenja na duljini cijevi od 20 cm jest $\rho g h_1 = 1{,}47$ kPa, pa će na cijeloj duljini cijevi pad tlaka biti 2,94 kPa. Zbog toga je

$$p_a + \rho g h = p_a + \frac{1}{2}\rho v^2 + \Delta p_u$$

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \rho g h - 2\rho g h_1$$

$$v = \sqrt{2g(h - 2h_1)} = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$



Slika 11.5.

11.8. Pokažite da je Bernoullijeva jednadžba u diferencijalnom obliku $dp + \rho\, g\, dh + \rho\, v\, dv = 0$ i integrirajte tu jednadžbu za stlačive plinove, pretpostavljajući da gustoća varira s tlakom adijabatski, tj. da je p/ρ^{κ} = konst., gdje je κ adijabatski koeficijent plina.

Rješenje

Na djelić fluida na strujnici u strujnoj cijevi primijenjuje se drugi Newtonov zakon.

Na presjeku $S_1 = S$ tlak je p, brzina v i visina od neke referentne razine h. Na presjeku $S_2 = S + dS$ tlak je $p + dp$, visina $h + dh$ i brzina $v + dv$. Rezultantna sila koja djeluje na promatrani djelić fluida jest

$$F = p\, S_1 - (p + dp)\, S_2 - \rho\, g \frac{S_1 + S_2}{2} ds \frac{dh}{ds} = -dp\, S - \rho\, g\, S\, dh.$$

Primjenom drugog Newtonova zakona dobiva se

$$m\, a = F$$

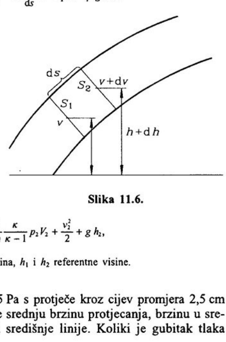
$$\rho\, S\, ds \frac{dv}{dt} = -dp\, S - \rho\, g\, dh\, S$$

$$\rho\, v\, dv = -dp - \rho\, g\, dh$$

$$dp + \rho\, g\, dh + \rho\, v\, dv = 0.$$

Integriranjem se dobiva

$$h + \frac{v^2}{2g} + \int \frac{dp}{\rho\, g} = \text{konst.}$$



Slika 11.6.

Uzimajući u obzir da je p/ρ^{κ} = konst., nakon provedene se integracije dobiva

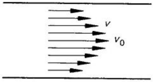
$$g\, h_1 + \frac{1}{m} \frac{\kappa}{\kappa - 1} p_1 V_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{1}{m} \frac{\kappa}{\kappa - 1} p_2 V_2 + \frac{v_2^2}{2} + g\, h_2,$$

gdje su: m masa plina, p tlak, v brzina, V volumen plina, h_1 i h_2 referentne visine.

11.9. Tekućina gustoće 900 kg/m³ i viskoznosti 0,05 Pa s protječe kroz cijev promjera 2,5 cm i duljine 100 m. Protok je 0,5 L/s. Izračunajte srednju brzinu protjecanja, brzinu u središtu cijevi i brzinu na udaljenosti 1 cm od središnje linije. Koliki je gubitak tlaka na cijeloj duljini cijevi?

Rješenje

Protok fluida kroz cijev promjera d jest



Slika 11.7.

$$q = S\,\overline{v} = \frac{d^2\pi}{4}\overline{v}. \qquad (1)$$

Srednja je brzina protjecanja

$$\overline{v} = \frac{4q}{d^2\pi} = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Za tu je brzinu Reynoldsov broj

$$Re = \frac{\rho\,\overline{v}\,d}{\eta} = 450.$$

Budući da je $Re < Re_k = 2\,100$, protjecanje je laminarno. Brzina je funkcija udaljenosti r od središta cijevi i dana je izrazom

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta l}\left(\frac{d^2}{4} - r^2\right).$$

Budući da je protok

$$q = \frac{\pi}{8\eta}\frac{p_1 - p_2}{l}R^4 = \frac{\Delta p\, d^4 \pi}{128\eta l}, \qquad (2)$$

razlika tlakova na duljini cijevi $l = 100$ m jest

$$p_1 - p_2 = \Delta p = \frac{128 q \eta l}{d^4 \pi} = 260\,\mathrm{kPa}.$$

Brzina u središtu cijevi ($r = 0$) jest

$$v_0 = \frac{\Delta p}{4\eta l}\frac{d^2}{4} = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Brzina na udaljenosti $r = 1$ cm od središnje linije iznosi

$$v_1 = v_0\left(1 - \frac{4r^2}{d^2}\right) = 0{,}7\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Brzina u cijevi mijenja se po zakonu parabole (sl. 11.7). Izjednačujući formule (1) i (2) za protok, vidi se da je $\overline{v} = v_0/2 = 2$ m/s.

11.10. Tekućina gustoće 900 kg/m^3 i viskoznosti 0,05 Pa s protječe srednjom brzinom 1 m/s kroz cijev promjera 2,5 cm. Na duljini cijevi od 100 m promjena je tlaka 260 kPa. Kojom bi srednjom brzinom protjecala voda ($\eta = 10^{-3}$ Pa s) u dva puta užoj cijevi da bi protok bio dinamički sličan? Koliki bi bio pad tlaka na istoj duljini cijevi?

Rješenje

Dva su sustava dinamički slična ako su geometrijski slična i ako sile koje djeluju u jednom sustavu imaju isti omjer kao i sile u drugom sustavu. Tada su putanje dijelova fluida geometrijski slične. Ako u fluidu djeluju viskozne sile među slojevima fluida, sustavi su slični ako su im Reynoldsovi brojevi jednaki. Dakle,

$$Re_1 = \frac{\rho_1 \overline{v}_1 d_1}{\eta_1} = Re_2 = \frac{\rho_2 \overline{v}_2 d_2}{\eta_2}.$$

Odatle je

$$\bar{v}_2 = \frac{\rho_1 \eta_2 d_1 \bar{v}_1}{\rho_2 \eta_1 d_2} = 0{,}036\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Reynoldsov je broj

$$Re = \frac{\rho_1 \bar{v}_1 d_1}{\eta_1} = 450,$$

dakle manji od kritičnog $R_{ek} = 2\,100$, pa je protjecanje laminarno.

Kada tekućina gustoće ρ viskoznosti η protječe laminarno srednjom brzinom $\bar{v}$ kroz cijev promjera d i duljine l, pad tlaka je (v. primjer 11.9)

$$\Delta p = \frac{32\eta\, l\, \bar{v}}{d^2} = \frac{32}{Re}\frac{l}{d}\rho\,\bar{v}^2.$$

Kada su sustavi geometrijski i dinamički slični, omjer pada tlakova jest

$$\frac{\Delta p_2}{\Delta p_1} = \frac{\rho_2 d_1 l_2 \bar{v}_2^2}{\rho_1 d_2 l_1 \bar{v}_1^2},$$

pa je

$$\Delta p_2 = 0{,}75\ \mathrm{kPa}.$$

11.11. Izračunajte brzinu padanja vodene kapljice promjera 0,1 mm u zraku ($\eta = 2 \cdot 10^{-5}$ Pa s):

a) nakon $t = 0{,}01$ s,

b) kada kapljica dostigne konačnu brzinu.

c) Koliki je prevaljeni put u $t = 0{,}01$ s?
(Gustoća zraka $\rho_z = 1{,}225$ kg/m^3)

Rješenje

a) Na kapljicu djeluju sila teža, uzgon i sila viskoznog trenja, koja u slučaju laminarnog strujanja iznosi (Stokesov zakon)

$$F_{tr} = 6\pi\,\eta\,R\,v = k\,v.$$

Jednadžba gibanja kapljice jest

$$m\,a = m\,g - F_u - F_{tr},$$

$$\frac{4}{3}R^3\pi\,\rho\,a = \frac{4}{3}R^3\pi\,\rho\,g - \frac{4}{3}R^3\pi\,\rho_z\,g - k\,v$$

$$a = A - B\,v,$$

gdje je

$$A = g\left(1 - \frac{\rho_z}{\rho}\right) \quad \text{i} \quad B = \frac{k}{m}.$$

Zamjenom $A - B\,v = u$, $\mathrm{d}v = -\dfrac{\mathrm{d}u}{B}$ i integriranjem dobiva se:

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = -B\int \mathrm{d}t$$

$$u = A\,\mathrm{e}^{-Bt} = g\left(1-\frac{\rho_z}{\rho}\right)\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}$$

$$v = \frac{A}{B}\left(1-\mathrm{e}^{-Bt}\right) = \frac{mg\left(1-\frac{\rho_z}{\rho}\right)}{k}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right) = \frac{mg\left(1-\frac{\rho_z}{\rho}\right)}{6\pi\eta R}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{6\pi\eta R}{m}t}\right) = \frac{2}{9\eta}R^2 g\,(\rho-\rho_z)\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{9\eta}{2R^2\rho}t}\right).$$

Ako je $t = 0{,}01$ s, $v = 0{,}08$ m/s.

b) Konačna je brzina

$$v = v_g = \frac{mg\left(1-\frac{\rho_z}{\rho}\right)}{6\pi\eta R} = \frac{2}{9\eta}R^2 g\,(\rho-\rho_z) = 0{,}272\,\mathrm{m/s}; \qquad t = 0{,}16\,\mathrm{s}.$$

c) Put se dobiva integracijom brzine:

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{A}{B}\left(1-\mathrm{e}^{-Bt}\right)$$

$$s = \frac{A}{B}t + \frac{A}{B^2}\left(\mathrm{e}^{-Bt}-1\right)$$

$$s = \frac{mg\left(1-\frac{\rho_z}{\rho}\right)}{6\pi\eta R}t + \frac{m^2 g\left(1-\frac{\rho_z}{\rho}\right)}{36\pi^2\eta^2R^2}\left[\mathrm{e}^{-\frac{6\pi\eta R}{m}t}-1\right] =$$

$$= \frac{2}{9\eta}R^2 g\,(\rho-\rho_z)\,t + \frac{4}{81\eta^2}R^4 g\,\rho\,(\rho-\rho_z)\left(\mathrm{e}^{-\frac{9\eta}{2R^2\rho}t}-1\right) =$$

$$= v_g t - \frac{\rho v_g}{g\,(\rho-\rho_z)}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{(\rho-\rho_z)g}{v_g\rho}t}\right) = 0{,}44\,\mathrm{mm}.$$

Reynoldsov je broj

$$Re = \frac{\rho v_g d}{\eta} = 1{,}67$$

i strujanje je laminarno.

11.12. Staklena kuglica promjera $2r = 8$ mm pada u tekućem glicerinu. Nakon nekog vremena brzina kuglice postaje konstantna. Odredite tu konstantnu brzinu i početno ubrzanje kuglice. Približno odredite vrijeme nakon kojeg je brzina postala konstantna i put koji je kuglica prošla za to vrijeme. (Gustoća glicerina $\rho_0 = 1{,}21 \cdot 10^3$ kg/m^3, koeficijent viskoznosti glicerina $\eta = 1{,}49$ Pa s, gustoća stakla $\rho = 2{,}53 \cdot 10^3$ kg/m^3.)

Rješenje

Jednadžba gibanja kuglice u glicerinu glasi

$$mg - F_u - F_{tr} = ma.$$

Budući da je viskoznost glicerina velika, Reynoldsov je broj malen, pa se u ovom slučaju može primijeniti Stokesov zakon:

$$F_{tr} = 6\pi\eta r v$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_0 g - 6\pi\eta r v = \frac{4}{3}\pi r^3 a \rho.$$

a) Konstantna se brzina određuje uz uvjet $a = 0$

$$v = \frac{2r^2 g(\rho - \rho_0)}{9\eta} = 0{,}03\,\mathrm{m/s}.$$

Reynoldsov je broj

$$Re = \frac{\rho_0 v \cdot 2r}{\eta} = 0{,}2,$$

pa Stokesov zakon vrijei.

b) Početno ubrzanje određuje se uz $v = 0$

$$a_0 = \frac{(\rho - \rho_0) g}{\rho} = 5{,}1\,\mathrm{m\,s^{-2}}.$$

c) Upotrijebi li se aproksimacija da je srednje ubrzanje a_s jednako aritmetičkoj sredini početnog i konačnog ubrzanja, vrijeme će biti:

$$t \approx \frac{v}{a_s} = \frac{2v}{a_0} = 1{,}2 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{s}$$

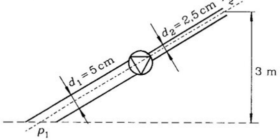
$$s \approx \frac{a_s t^2}{2} = \frac{a_0 t^2}{4} = 1{,}8 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}.$$

11.13. Kroz cijev promjera 5 cm voda dolazi do pumpe, a iz nje odlazi kroz cijev promjera 2,5 cm (sl. 11.8.). Razlika tlakova na krajevima cijevi jest 300 kPa, a visinska je razlika 3 m. Stupanj djelovanja pumpe jest 0,7. Kolika je potrebna snaga motora ako je protok 4 L/s, a unutrašnje se trenje zanemari? Koliki je pad tlaka zbog unutrašnjeg trenja (viskoznosti) ako je utrošena snaga 2,2 kW?

Rješenje

Pumpom se dovodi mehanička energija fluidu i u tom slučaju Bernoullijeva jednadžba glasi

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \Delta p_p = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \Delta p_{tr}.$$



Slika 11.8.

Odatle je

$$\Delta p_p = p_2 - p_1 + \rho g (h_2 - h_1) + \frac{1}{2}\rho (v_2^2 - v_1^2) + \Delta p_{tr}.$$

Ako se zanemari trenje

$$\Delta p_p = 300\,\text{kPa} + 29{,}4\,\text{kPa} + 30\,\text{kPa} = 359{,}4\,\text{kPa}.$$

Potrebna je snaga

$$P' = q\,\Delta p_p = 1438\,\text{W}.$$

Snaga motora je

$$P = \frac{P'}{\eta} = 2\,054\,\text{W}.$$

Ako je utrošena snaga 2 200 W, snaga potrebna za pumpanje bit će 2 200 W $\cdot\,\eta$ = 1 540 W, pa je

$$\Delta p_{tr} = 25{,}6\,\text{kPa}.$$

11.14. Tekućina gustoće 900 kg/m^3 i viskoznosti 0,01 Pa s protječe kroz cijev promjera 2 cm, duljine 100 m. Kolika je snaga pumpe ako je protok 0,094 L/s? Stupanj djelovanja pumpe jest 0,7.

Rješenje

Srednja je brzina protjecanja:

$$\bar{v} = \frac{q}{r^2\pi} = 0{,}3\,\text{m/s}.$$

Budući da je Reynoldsov broj

$$Re = \frac{\rho v d}{\eta} = 539$$

manji od kritičnog (Re$_k$ = 2 100), strujanje je laminarno.

Razlika tlakova potrebna za takvo protjecanje dobiva se iz Poisseuilleova zakona:

$$\Delta p = \frac{32\eta l \bar{v}}{d^2} = 24\,\text{kPa}.$$

Potrebna je snaga

$$P = \Delta p\, S\, \bar{v} = q\,\Delta p = 2{,}3\,\text{W}.$$

Budući da je stupanj djelovanja pumpe η = 0,7, snaga pumpe je

$$P' = \frac{P}{\eta} = 3{,}2\,\text{W}.$$

11.15. U posudu s glicerinom čiji je koeficijent viskoznosti 0,83 Pa s, puštene su dvije metalne kuglice promjera $2r_1$ = 1 mm i $2r_2$ = 2 mm. One su se istodobno našle na visini 50 cm od dna posude, a tu su visinu dostigle konstantnim brzinama padanja. Kolika je razlika u vremenima padanja kuglica s visine h na dno posude? Kuglice su jednake gustoće 6 000 kg/m^3, a gustoća glicerina je 800 kg/m^3.

Rješenje
Pod utjecajem gravitacijske sile

$$G = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$$

kuglice bi na visinu h padale jednoliko ubrzano. No, pojavljuju se još dvije sile: uzgon prema Arhimedovu zakonu

$$U = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_g g,$$

gdje je ρ_g gustoća glicerina, i retardirajuća sila zbog viskoznosti glicerina prema Stokesovu zakonu

$$F_S = 6\pi \eta r v.$$

Budući da su brzine padanja konstantne, rezultantne su sile na kuglice jednake nuli

$$G - U - F_S = 0,$$

odnosno, potpuno zamjenjujući izraze za sile

$$\frac{4}{3}\pi r^3 (\rho - \rho_g) g = 6\pi \eta r v,$$

slijede brzine padanja kuglica v_1 i v_2:

$$v_1 = \frac{2r_1^2(\rho - \rho_g) g}{9\eta} \qquad \text{i} \qquad v_2 = \frac{2r_2^2(\rho - \rho_g) g}{9\eta}.$$

Rješenjem $v_1 = 0{,}34\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$ i $v_2 = 1{,}37\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$ razlika u vremenima padanja postaje

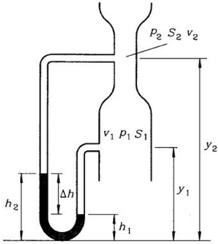
$$t = h\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}\right) = 110\,\mathrm{s}.$$

Zadaci

11.1. Poprečni je presjek klipa u vodoravno položenoj štrcaljki 1,6 cm^2, a presjek otvora je 1 mm^2. Za koliko će vremena isteći voda iz štrcaljke ako na klip djeluje sila od 5 N i ako je hod klipa 4 cm?

Rezultat: $t = 0{,}81$ s

11.2. Voda prolazi kroz okomitu Venturijevu cijev koja na ulazu ima promjer 4 cm, a na suženom dijelu, koji je 0,5 m iznad ulaznog, promjer je 2 cm (sl. 11.9). Na ulazu je tlak 160 kPa, a na suženom dijelu 80 kPa. Izračunajte brzinu protjecanja vode i protok vode kroz cijev. Kolika bi bila razlika stupaca žive u živinom manometru u



Slika 11.9.

obliku U-cijevi spojenom između ulaza i suženja cijevi? Zanemaruje se unutrašnje trenje.

Rezultat: $v_1 = 3{,}16\ \mathrm{m\,s^{-1}}$; $q = 3{,}97\ \mathrm{L\,s^{-1}}$; $\Delta h = 0{,}61$ m

11.3. U spremniku se nalazi voda do razine od 2 m, a iznad vode je sloj ulja gustoće 850 kg/m^3 i debljine 1 m. Kolika je početna brzina istjecanja vode kroz otvor na dnu spremnika? Gustoća vode je 10^3 kg/m^3.

Rezultat: $v = 7{,}5\ \mathrm{m\,s^{-1}}$

11.4. Mlaz vode izlazi iz kružnog otvora promjera 2 cm i penje se okomito do visine 4,1 m. Koliki je promjer mlaza 1 m iznad otvora?

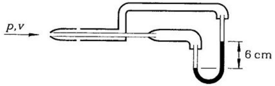
Rezultat: $d_2 = 2{,}14$ cm

11.5. Kroz vodoravnu cijev sa suženjem na jednome mjestu teče tekućina gustoće 0,9 g/cm^3. Ako je brzina tekućine u užem dijelu cijevi 5 m/s, a razlika tlakova šireg i užeg dijela iznosi 5 kPa, za koliko je potrebno podići suženje cijevi da bi se brzina u njemu smanjila 50 posto?

Rezultat: $\Delta h = 0{,}49$ m

11.6. Pitot-Prandtlova cijev nalazi se u struji zraka gustoće 1,2 kg/m^3, brzine v i tlaka p. Kolika je brzina zraka ako je razlika stupaca vode u diferencijalnom manometru spojenom na Pitotovu cijev (sl. 11.10) 6 cm?

Rezultat: $v = 31$ m/s



Slika 11.10.

11.7. Manometri na Pitotovoj cijevi u zrakoplovu pokazuju statički tlak od 80 kPa i ukupan tlak od 100 kPa. Kolika je brzina zrakoplova? Pretpostavlja se da je gustoća zraka 1 kg/m^3.

a) Pretpostavlja se da je zrak nestlačiv fluid.

b) Pretpostavlja se adijabatski proces.

Rezultat: a) $v = 200\ \mathrm{m\,s^{-1}}$; b) $v = 191\ \mathrm{m\,s^{-1}}$

11.8. Kolika je snaga crpke koja kroz cijev stalnog presjeka crpi vodu na visinu 3 m ako je razlika tlakova 60 kPa, protok 10 L/s, gubitak tlaka zbog viskoznog trenja 40 kPa? Stupanj djelovanja je 0,7.

Rezultat: $P = 1{,}9$ kW

11.9. Nafta protječe kroz cijev promjera 2,54 cm i duljine 18 m srednjom brzinom 0,1 m/s. Koliko je smanjenje tlaka u cijevi uzrokovano viskoznošću ako je $\eta = 0{,}1$ Pa s? Je li protjecanje laminarno? Gustoća nafte je 850 kg/m^3.

Rezultat: $\Delta p = 8928$ Pa; $Re = 22$

11.10. Tekućina viskoznosti 0,1 Pa s protječe kroz cijev promjera 2 cm, duljine 42 m. Razlika tlaka između početka i svršetka cijevi iznosi 60 kPa. Izračunajte kolika je srednja brzina protjecanja, brzina protjecanja u sredini cijevi i na udaljenosti 0,2 cm od stijenke cijevi.

Rezultat: $\bar{v} = 17{,}9\ \mathrm{cm\ s^{-1}}$; $v_1 = 35{,}7\ \mathrm{cm\ s^{-1}}$; $v_2 = 12{,}9\ \mathrm{cm\ s^{-1}}$

11.11. Pokus je pokazao da laminarno strujanje prelazi u turbulentno kada brzina zraka kroz cijev promjera 10 cm prede kritičnu vrijednost od 33 cm/s. Potrebno je izračunati kritični Reynoldsov broj. Kolika bi bila kritična brzina za strujanje vode kroz cijev promjera 2,54 cm?

Rezultat: $Re_k = 2\,200$; $v_2 = 8{,}7\ \mathrm{cm\ s^{-1}}$

11.12. Kapljice vode u nekom oblaku imaju polumjer od $5 \cdot 10^{-5}$ m. Kojom najvećom brzinom te kapljice mogu padati kroz zrak? Za viskoznost zraka uzima se $1{,}8 \cdot 10^{-5}$ Pa s.

Rezultat: $v = 0{,}3\ \mathrm{m\ s^{-1}}$

11.13. Potrebno je odrediti brzinu kišne kapi u času kada padne na tlo ako se kap smatra kuglicom polumjera $r = 4 \cdot 10^{-4}$ m, a koeficijent viskoznosti zraka je $\eta = 18{,}2 \cdot 10^{-6}$ Pa s.

Rezultat: $v = 19{,}2\ \mathrm{m\ s^{-1}}$

12. Toplina i temperatura

Uvod

Temperatura T mjera je za srednju kinetičku energiju toplinskoga gibanja molekula: što je kinetička energija veća, to je i temperatura veća. Veza između termodinamičke temperature T izražene kelvinom i temperature t izražene Celzijevim stupnjevima jest

$$\frac{T}{\mathrm{K}} = 273{,}15 + \frac{t}{{}^\circ\mathrm{C}}. \tag{1}$$

Čvrsta se tijela zagrijavanjem rastežu, a hlađenjem stežu. Koeficijent linearnog rastezanja α definira se izrazom

$$\alpha = \frac{l_t - l_0}{l_0 t} = \frac{1}{l_0}\frac{\Delta l}{\Delta T}, \tag{2}$$

gdje je l_0 duljina tijela (štapa) pri 0 °C, l_t duljina pri temperaturi t. Iz (2) proizlazi

$$l_t = l_0 (1 + \alpha \, \Delta T). \tag{3}$$

Jedinica za koeficijent linearnog rastezanja jest recipročni kelvin (znak: K^{-1}). Volumno rastezanje čvrstih tijela i tekućina računa se pomoću relacije

$$V_t = V_0 (1 + \gamma \, \Delta T), \tag{4}$$

gdje je V_0 volumen tijela pri 0 °C, V_t volumen tijela na temperaturi t, a γ koeficijent volumnog rastezanja (toplinskog širenja)

$$\gamma = \frac{V_t - V_0}{V_0 t} = \frac{1}{V_0}\frac{\Delta V}{\Delta T} = 3\alpha. \tag{5}$$

Jedinica za koeficijent toplinskog širenja γ također je recipročni kelvin, K^{-1}.
Jednadžba stanja idealnog plina jest

$$pV = nRT = \frac{m}{M} RT, \tag{6}$$

u kojoj je m masa, n količina tvari $M = m/n$ molna masa plina, a

$$R = 8{,}314 \text{ J (Kmol)}^{-1}$$

plinska konstanta.

Pri izotermnom procesu (T = konst.) jednadžba (6) prelazi u Boyle-Mariotteov zakon

$$pV = \text{konst., pri } T = \text{konst.} \tag{7}$$

Pri izobarnom procesu (p = konst.) jednadžba (6) daje Gay-Lussacov zakon

$$V = V_0 \frac{T}{T_0}, \text{ pri } p = \text{konst.,} \tag{8}$$

gdje je V volumen plina na termodinamičkoj temperaturi T, a V_0 volumen plina na termodinamičkoj temperaturi T_0. Piše li se umjesto termodinamičke temperature T Celzijeva temperatura t, relacija (6) prelazi u

$$V_t = V_0 (1 + \gamma\, t), \tag{9}$$

gdje je V_t volumen plina na t, V_0 volumen plina pri 0 °C i $\gamma = \frac{1}{273}\,\mathrm{K}^{-1}$ toplinski koeficijent širenja plina.

Za izohornu (V = konst.) promjenu stanja plina vrijedi Charlesov zakon

$$p = p_0 \frac{T}{T_0} \text{ pri } V = \text{konst.,} \tag{10}$$

gdje je p tlak plina na termodinamičkoj temperaturi T, a p_0 tlak pri temperaturi T_0. Slično kao relacija (9) i relacija (10) može se pisati i u obliku

$$p_t = p_0 (1 + \beta\, t), \tag{11}$$

u kojoj je p_t tlak plina pri temperaturi t, p_0 tlak pri 0 °C, a $\beta = \frac{1}{273}\,\mathrm{K}^{-1}$ toplinski koeficijent promjene tlaka plina.

Zbroj srednje kinetičke i potencijalne energije molekula nekog tijela naziva se unutrašnjom energijom U.

Unutrašnja se energija sustava može promijeniti na dva načina: prijenosom topline i vanjskim radom. Unutrašnja energija u procesima prijenosa topline promijeni se za količinu topline Q. To je energija koja prelazi s jednog tijela na drugo zbog njihove temperaturne razlike.

Jedinica topline jest džul (znak: J).

Pri zagrijavanju i hlađenju primljena, odnosno predana toplina jest

$$Q = c\, m\, \Delta T, \tag{12}$$

gdje je c specifični toplinski kapacitet, m masa tijela, a $\Delta T = T - T_1$ promjena temperature. Specifični toplinski kapacitet c jest toplina potrebna da se nekoj tvari mase 1 kg promijeni temperatura za 1 K i izražava se u J/(kgK). Zagrijavanjem pri stalnom volumenu sva se dovedena količina topline utroši za povećanje unutrašnje energije, pa je

$$Q = \Delta U = m\, c_v\, \Delta T; \qquad V = \text{konst.,} \tag{13}$$

gdje je $c_v = \frac{1}{m}\frac{\Delta U}{\Delta T}$ specifičan toplinski kapacitet pri stalnom volumenu. Dovođenjem topline pri stalnom tlaku tijelo se i grije i obavlja rad, pa je $Q > \Delta U$. Specifičan toplinski kapacitet c_p tada se definira izrazom

$$c_p = \frac{1}{m}\frac{Q}{\Delta T}; \qquad p = \text{konst.} \tag{14}$$

Oba specifična toplinska kapaciteta (c_v i c_p) praktično su jednaka za tekućine i čvrsta tijela, a znatno se razlikuju za plinove.

Pri taljenu (očvršćivanju) temperatura tališta ostaje nepromijenjena sve dok se sva tvar ne rastali.

Toplina taljenja je

$$Q = m\,L_t, \tag{15}$$

gdje je m masa tijela, a L_t specifična toplina taljenja. Jednaku toplinu predaje tekućina pri očvršćivanju. Slično je i toplina isparivanja, odnosno kondenzacije

$$Q = m\,L_i, \tag{16}$$

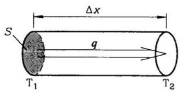
gdje je L_i specifična (latentna) toplina isparivanja tekućine. Pri izgaranju goriva oslobađa se toplina izgaranja

$$Q = m\,L_g, \tag{17}$$

gdje je L_g specifična toplina izgaranja. Specifične topline taljenja, isparivanja i izgaranja izražavaju se jedinicom džul po kilogramu.

Fourierov zakon za vođenje topline glasi

$$Q = -\lambda\frac{\Delta T}{\Delta x}S\,t, \tag{18}$$



Slika 12.1.

gdje je Q toplina koja u vremenu t prođe sredstvom (sl. 12.1), λ koeficijent toplinske vodljivosti materijala, $\Delta T = T_2 - T_1$ razlika temperatura između dvaju slojeva materijala međusobno udaljenih za Δx, a S presjek vodiča. Taj se zakon može napisati i pomoću toplinskog toka $\Phi = Q/t$ i gustoće toplinskog toka $q = \dfrac{\Phi}{S}$.

Toplinski otpor R definira se izrazom

$$R = -\frac{\Delta T}{\Phi}, \tag{19}$$

i za vođenje topline jednak je $\dfrac{\Delta x}{\lambda S}$. Izražava se u kelvinu po vatu (K/W).

Prijenos topline konvekcijom računa se pomoću Newtonova zakona hlađenja:

$$q = h_c\,(T_p - T_f), \tag{20}$$

gdje je T_p temperatura čvrste plohe uz koju struji fluid, T_f temperatura fluida dalje od granične plohe, a h_c koeficijent konvekcije koji se izražava jedinicom W/(m^2 K).

Kada toplinsko zračenje pada na površinu nekog tijela djelomično se reflektira i djelomično apsorbira. Ako je tijelo za to zračenje prozirno, tada dio zračenja potpuno prolazi kroz tijelo. Omjer apsorbiranog i upadnog toka zračenja zove se faktor apsorpcije

$$\alpha = \frac{\Phi_a}{\Phi_u}, \tag{21}$$

a omjer reflektiranog i upadnog toka faktor refleksije

$$\rho = \frac{\Phi_r}{\Phi_u}. \tag{22}$$

Slično se definira i faktor transmisije:

$$\tau = \frac{\Phi_t}{\Phi_u}. \tag{23}$$

Za ukupno zračenje koje pada na tijelo vrijedi

$$\alpha + \rho + \tau = 1. \tag{24}$$

Za idealno crno tijelo $\alpha = 1$, $\rho = 0$, $\tau = 0$.

Energetska (radijacijska) egzitancija jest gustoća toka energije emitirana s površine S nekog tijela

$$M = \frac{\Phi_e}{S}. \tag{25}$$

Spektralna egzitancija crnog tijela na temperaturi T može se izračunati pomoću Planckove formule

$$M_\lambda^{ct} = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}, \tag{26}$$

gdje je c brzina svjetlosti u vakuumu, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K Bolzmannova konstanta i $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J s Planckova konstanta.

Kirchhoffov zakon zračenja kaže

$$\Phi_e = \varepsilon \Phi_e^{ct} = \alpha \Phi_e^{ct}, \tag{27}$$

gdje je ε faktor emisije tijela definiran omjerom emitiranog toka tog tijela i toka crnog tijela iste površine pri istoj temperaturi.

Stefan-Boltzmannov zakon daje toplinski tok koji emitira površina tijela zagrijana na temperaturu T

$$\Phi_e = \varepsilon \sigma S T^4, \tag{28}$$

gdje je σ Stefan-Boltzmannova konstanta $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}.

Ako je T_1 temperatura tijela, a T_2 temperatura okoline, tada je

$$\Phi_e = \varepsilon \sigma S (T_1^4 - T_2^4). \tag{29}$$

Wienov zakon daje valnu duljinu kod koje je spektralna gustoća zračenja M_λ maksimalna

$$\lambda_m T = \text{konst.} = 2{,}898 \cdot 10^{-3}\ \text{K m}. \qquad (30)$$

Toplinski tok prenesen zračenjem može se računati uz pomoć izraza

$$\Phi_r = h_r S (T_1 - T_2), \qquad (31)$$

gdje je h_r koeficijent prijenosa topline zračenjem od jedne površine temperature T_1 prema drugoj površini temperature T_2. Za dvije je paralelne ravnine

$$h_r = \frac{\sigma (T_1^2 + T_2^2)(T_1 + T_2)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}. \qquad (32)$$

ukupni koeficijent prijenosa topline (toplinskih gubitaka) k definira se relacijom

$$q = k\,\Delta T, \qquad (33)$$

gdje je q gustoća toplinskog toka, a ΔT razlika temperatura. Jedinica za koeficijent prijenosa topline jest $W/(\text{m}^2\,\text{K})$.

Primjeri

12.1. Čelična kuglica mase m = 100 g, obješena na niti zanemarive mase, uronjena je u petrolej. Za koliko će se promijeniti sila napetosti niti ako se cijeli sustav zagrijava od temperature t_1 = 20 °C do temperature t_2 = 50 °C? Uz normirane uvjete gustoća čelika iznosi ρ_{10} = 7 800 kg/m^3, a petroleja ρ_{20} = 800 kg/m^3, koeficijent linearnog širenja čelika $\alpha_1 = 1{,}1 \cdot 10^{-5}\ \text{K}^{-1}$, a koeficijent volumnog širenja petroleja $\gamma_2 = 10^{-3}\ \text{K}^{-1}$).

Rješenje

Volumen kuglice na temperaturi T_1 jest

$$V_1 = V_0\left[1 + \gamma_1 (T_1 - T_0)\right], \qquad T_0 = 273\ \text{K},$$

dok

$$F_u(T_1) = \rho_2 V_1 g$$

označuje silu uzgona koja djeluje na kuglicu.

Promjena gustoće s temperaturom glasi

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \gamma (T - T_0)}.$$

Na temperaturi T_2

$$V_2 = V_0\left[1 + \gamma_1 (T_2 - T_0)\right]$$

$$F_u(T_1) = \frac{\rho_{20} m g \left[1 + \gamma_1 (T_1 - T_0)\right]}{\left[1 + \gamma_2 (T_1 - T_0)\right]\rho_{10}}$$

$$F_u(T_2) = \frac{\rho_{20} m g \left[1 + \gamma_1 (T_2 - T_0)\right]}{\left[1 + \gamma_2 (T_2 - T_0)\right]\rho_{10}}.$$

Promjena napetosti niti jest

$$N_2 - N_1 = mg + F_u(T_1) - mg - F_u(T_2) = F_u(T_1) - F_u(T_2)$$

$$N_2 - N_1 = 2{,}8 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N}.$$

12.2. Tijelo od bakra i tijelo od aluminija jednaka su volumena pri $T_1 = 273$ K. Tijelo od aluminija zagrijemo na 373 K i zatim oba tijela spojimo. Kolika će biti relativna promjena volumena novonastalog tijela? (Gustoća bakra $\rho_1 = 8\,500$ kg/m^3, aluminija $\rho_2 = 2\,600$ kg/m^3, specifični toplinski kapacitet bakra $c_1 = 376$ J/(kg K), a aluminija $c_2 = 920$ J/(kg K), linearni koeficijent širenja bakra $\alpha_1 = 1{,}7 \cdot 10^{-5}$ K^{-1}, a aluminija $\alpha_2 = 2{,}3 \cdot 10^{-5}$ K^{-1}.)

Rješenje

Temperatura novonastalog tijela jest

$$T = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

$$T = \frac{\rho_1 c_1 T_1 + \rho_2 c_2 T_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2}$$

$$T = 315{,}8\,\mathrm{K}.$$

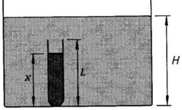
Promjena je volumena tijela

$$\Delta V_1 = V_0 \cdot 3\alpha_1 (T - T_1)$$

$$\Delta V_2 = V_0 \cdot 3\alpha_2 (T - T_2)$$

$$\frac{\Delta V_1 + \Delta V_2}{2V_0} = \frac{3}{2}\left[T(\alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_1 T_1 - \alpha_2 T_2\right] = -8{,}8 \cdot 10^{-4}.$$

12.3. Epruveta visine $L = 0{,}3$ m napunjena je vodikom pod tlakom $p_0 = 10^5$ Pa i zatvorena pomičnim čepom (sl. 12.2.). Kolika će biti razina vodika u epruveti ako je stavimo u posudu sa živom visine $H = 1$ m (tako da dira dno posude) u vertikalnom položaju s čepom prema gore? Pritom se temperatura vodika ne mijenja. Gustoća žive $\rho = 13\,600$ kg/m^3, a vanjski je atmosferski tlak p_a normirani (1 013 mbar).



Slika 12.2.

Rješenje

Prema Boyle-Mariottovu zakonu

$$\left[p_a + \rho g (H - x)\right] x S = p_0 L S \tag{1}$$

S je površina presjeka epruvete

$$x^2 - x\left(H + \frac{p_a}{\rho g}\right) + \frac{p_0 L}{\rho g} = 0 \tag{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(H + \frac{p_a}{\rho g}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(H + \frac{p_a}{\rho g}\right)^2 - \frac{p_0 L}{\rho g}} \tag{3}$$

$$x = 0{,}14\,\mathrm{m}.$$

12.4. Plin je u posudi od 1 L uz pomoć adijabatskog klipa podijeljen na dva jednaka dijela koji su zatim zagrijani do 373 K, odnosno do 473 K. Koliki su odgovarajući volumeni nakon pomicanja klipa?

Rješenje

Iz jednadžbe stanja idealnog plina dobiva se

$$p_1 V_1 = n R T_1$$

i

$$p_1 V_2 = n R T_2$$

ili dijeljenjem uz $V = V_1 + V_2$

$$V_1 = V \cdot \frac{T_1}{T_1 + T_2} = 0{,}441 \text{ L}$$

i

$$V_2 = V \cdot \frac{T_2}{T_1 + T_2} = 0{,}559 \text{ L}.$$

12.5. U zatvorenoj se posudi nalazi dušik na sobnoj temperaturi (20 °C) i pod tlakom 10^5 Pa. U posudu se doda određena količina tekućeg dušika temperature vrenja (– 196 °C) koji ispari, pa temperatura naraste na – 140 °C. Kad temperatura ponovno naraste na sobnu temperaturu, izmjeri se tlak $1{,}5 \cdot 10^5$ Pa. Izračunajte molarnu toplinu isparivanja (C_v = = 20,8 J/(mol K).

Rješenje

Iz jednadžbe stanja idealnog plina

$$p_0 V = n_0 R T_0$$

i

$$p_3 V = (n_0 + \Delta n) R T_0$$

dobiva se

$$\Delta n = 0{,}5 n_0.$$

Iz zakona očuvanja energije

$$C_v n_0 (T_0 - T_2) = \Delta n \, L_i + C_v \Delta n (T_2 - T_1),$$

pa se dobiva

$$L_i = C_v \left[\frac{n_0}{\Delta n} (T_0 - T_2) - (T_2 - T_1) \right]$$

$$L_i = 5491{,}2 \text{ J/mol}.$$

12.6. Dva staklena balona volumena $V = 10^{-3}$ m^3 spojena su sa cijevi zanemarivog volumena i sadrže vodik uz normirane uvjete gustoće $\rho = 0{,}09$ kg/m^3. Jedan se balon stavi u tekući kisik na $t_1 = -190$ °C, a drugi u vodenu paru na $t_2 = 100$ °C. Kolika masa vodika prođe kroz cijev koja spaja balone do izjednačenja tlaka u balonima? Koliki je taj tlak?

Rješenje

Početno je stanje plina u svakom balonu opisano sa:

$$p_0,\ V,\ T_0,\ \frac{1}{2}(n_1+n_2)$$

$$p_0 V = \frac{1}{2}(n_1+n_2)RT_0 \qquad T_0 = 273\,\mathrm{K}.$$

Parametri plina u balonu koji je u tekućem kisiku jesu

$$p,\ V,\ T_1,\ n_1,$$

a u balonu u vodenoj pari:

$$p,\ V,\ T_2,\ n_2,$$

$$pV = n_1RT_1 = n_2RT_2$$

$$\frac{p}{p_0} = \frac{2n_1RT_1}{(n_1+n_2)RT_0} = \frac{2T_1}{\left(1+\dfrac{n_2}{n_1}\right)T_0} = \frac{2T_1}{\left(1+\dfrac{T_1}{T_2}\right)T_0}$$

$$\frac{p}{p_0} = 0{,}497$$

$$p = 50397\,\mathrm{Pa}.$$

Na temperaturi T_0 u volumenu V ima $\frac{1}{2}(n_1+n_2)$ mola plina, a na temperaturi T_1 ima n_1 mola.

Kroz cijev prođe $\frac{1}{2}(n_1-n_2)$.

Dio vodika koji prođe kroz cijev:

$$\frac{\frac{1}{2}(n_1-n_2)}{\frac{1}{2}(n_1+n_2)} = \frac{T_2-T_1}{T_2+T_1} = 0{,}636.$$

$$m = \rho V = 9\cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg}$$

$$\Delta m = 0{,}636m = 5{,}72\cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg}.$$

12.7. U potpuno zatvorenoj posudi nalazi se voda u kojoj pliva komad leda mase $m_0 = 0{,}1$ kg u kojem se nalazi mala olovna kuglica mase $m_2 = 5$ g. Koja je količina topline potrebna da bi led s kuglicom počeo tonuti? Gustoća olova iznosi 11,3 g/cm^3, gustoća leda 0,9 g cm^{-3}, toplina otapanja leda 3,3 10^5 J/kg. Temperatura vode iznosi 0 °C.

Rješenje

Da bi kuglica počela tonuti, nije potrebno da se otopi sav led. Dovoljno je da prosječna gustoća leda s kuglicom postane jednaka gustoći vode:

$$\frac{m_1+m_2}{V} = \rho_v$$

$$V = \frac{m_1}{\rho_L} + \frac{m_2}{\rho_{OL}}$$

$$m_1 + m_2 = \rho_v\left(\frac{m_1}{\rho_L} + \frac{m_2}{\rho_{OL}}\right)$$

$$m_1 = m_2\frac{(\rho_{OL}-\rho_v)\rho_L}{(\rho_v-\rho_L)\rho_{OL}} = 0{,}041\,\mathrm{kg}.$$

Masa leda koju valja rastopiti jest

$$\Delta m = m_0 - m_1 = 59\,\mathrm{g}.$$

$$Q = L\Delta m = 19{,}5\,\mathrm{kJ}.$$

12.8. U Dewarovu posudu (termos-bocu), u kojoj se nalazi tekući dušik na temperaturi vrelišta 77 K, ubacuje se komad željeza mase 0,3 kg i temperature 24 °C. Koliko će se dušika ispariti dok se željezo ne ohladi na 77 K uz pretpostavku da je posuda izolirana od okolice? (Specifičan toplinski kapacitet željeza jest 460 J/(kg K), a specifična je toplina isparavanja dušika $2{,}01 \cdot 10^5$ J/kg).

Rješenje

Zakon očuvanja energije može se pisati

$$Q_1 = Q_2, \tag{1}$$

gdje je Q_1 – toplina koja prelazi sa željeza na tekući dušik, a Q_2 – toplina koju prima tekući dušik i kojom se koristi za isparivanje.

Za Q_1 i Q_2 vrijedi

$$Q_1 = m_{Fe} \cdot c_{Fe} \cdot (T_2 - T_1) \tag{2}$$

$$Q_2 = m_N \cdot L_{iN}. \tag{3}$$

Uvrštavanjem (2) i (3) u (1) dobiva se

$$m_N = \frac{m_{Fe} \cdot c_{Fe} \cdot (T_2 - T_1)}{L_{iN}} = 0{,}151\,\mathrm{kg}.$$

12.9. Dvije su posude ispunjene različitim tekućinama. Tekućina u prvoj posudi ima masu 7 kg, specifičan toplinski kapacitet $4{,}18 \cdot 10^3$ J/(kg K) i temperaturu 80 °C. Tekućina u drugoj posudi ima masu 5 kg, specifičan toplinski kapacitet $2{,}14 \cdot 10^3$ J/(kg K) i temperaturu 20 °C. Posude su povezane metalnim štapom duljine 3 m, presjeka $5 \cdot 10^{-3}$ m^2 i s koeficijentom toplinske vodljivosti 58,6 W/(m K). Izračunajmo vrijeme t za koje će temperaturna razlika između tih dviju posuda pasti na 20 °C, ako su posude i štap izolirani tako da nema gubitaka topline u okolicu i ako su toplinski kapaciteti posude zanemarivi.

Rješenje

Prijeđe li u infinitezimalnom vremenu dt količina topline dQ iz prve posude u drugu, počet će se hladiti prva tekućina za infinitezimalni iznos dT_1 (d$T_1 < 0$) i zagrijavati druga tekućina za infinitezimalni iznos dT_2 (d$T_2 > 0$). Uzimajući u obzir mase i specifične toplinske kapacitete tekućina, može se pisati

$$\mathrm{d}Q = -m_1 c_1 \mathrm{d}T \tag{1}$$

$$\mathrm{d}Q = m_2 c_2 \mathrm{d}T_2. \tag{2}$$

Infinitezimalna promjena razlike temperatura dviju tekućina d (ΔT) jednaka je

$$\mathrm{d}(\Delta T) = \mathrm{d}T_1 - \mathrm{d}T_2. \tag{3}$$

Iz (1), (2) i (3) dobiva se

$$\mathrm{d}(\Delta T) = -\mathrm{d}Q\left(\frac{1}{m_1 c_1} + \frac{1}{m_2 c_2}\right). \tag{4}$$

Infinitezimalna količina topline dQ koja je vođenjem prešla u drugu posudu dana je relacijom

$$dQ = \frac{\lambda S \Delta T}{l}\,dt. \tag{5}$$

Iz (4) i (5) slijedi

$$\frac{d(\Delta T)}{\Delta T} = -\left(\frac{1}{m_1 c_1} + \frac{1}{m_2 c_2}\right)\frac{\lambda S}{l}\,dt. \tag{6}$$

U izrazu (6) varijable su separirane tako da se može provesti integracija od neke početne razlike temperatura $(\Delta T)_{poč}$ u trenutku 0 do konačne razlike temperatura $(\Delta T)_{kon}$ u nekom trenutku t:

$$\int_{(\Delta T)_{poč}}^{(\Delta T)_{kon}} \frac{d(\Delta T)}{\Delta T} = -\left(\frac{1}{m_1 c_1} + \frac{1}{m_2 c_2}\right)\frac{\lambda S}{l}\int_0^t dt. \tag{7}$$

Imajući na umu da je $(\Delta T)_{poč} = T_1 - T_2$ iz (7), dobiva se

$$t = \frac{m_1 c_1 m_2 c_2 l}{\lambda S (m_1 c_1 + m_2 c_2)} \ln \frac{T_1 - T_2}{(\Delta T)_{kon}} = 8{,}8 \cdot 10^4\,\text{s}.$$

12.10. Koliko će biti debeo led nakon 20 min ako je početna debljina leda 6 cm, temperatura vode ispod leda 0 °C, a temperatura zraka iznad leda – 8 °C? (Koeficijent toplinske vodljivosti leda jest 2,18 W/(m K), specifična toplina taljenja leda je $33{,}5 \cdot 10^4$ J/kg, a gustoća leda je 920 kg/m^3.)

Rješenje

Količina topline koja prolazi kroz površinu leda S u vremenu Δt jednaka je

$$\Delta Q = \lambda S \frac{(T_1 - T_2)}{d} \cdot \Delta t. \tag{1}$$

Pritom će se pretvoriti u led sljedeća masa vode Δm:

$$\Delta m = \frac{\Delta Q}{L}. \tag{2}$$

Masa nastalog leda Δm može se izraziti uz pomoć gustoće ρ, debljine Δx i površine leda S sljedećim izrazom

$$\Delta m = \rho S \Delta x. \tag{3}$$

Iz (3) se upotrebom (1) i (2) dobiva Δx

$$\Delta x = \frac{\lambda (T_1 - T_2)\Delta t}{\rho d L}. \tag{4}$$

Debljina leda nakon vremena Δt jednaka je zbroju početne debljine leda d i Δx, tj.

$$d_1 = d + \Delta x = d + \frac{\lambda (T_1 - T_2)\Delta t}{\rho d L} = 0{,}061\,\text{m}.$$

12.11. Temperatura zraka u prostoriji iznosi 20 °C, a vanjska je temperatura zraka – 20 °C. Termička vodljivost zida debelog 20 cm jest 0,7 W/(m K). Koeficijent konvekcije s vanjske strane zida jest 40 W/(m^2 K), a s unutrašnje strane zida je 10 W/(m^2 K). Kolika je gustoća toplinskog toka kroz zid i temperature površina zida?

Rješenje

Gustoća toplinskog toka kroza zid jest

$$q = \frac{\Delta T}{RS},$$

gdje je toplinski otpor

$$R = R_1 + R_2 + R_3 = \frac{1}{h_{c1}S} + \frac{\Delta x}{\lambda S} + \frac{1}{h_{c2}S},$$

pa je

$$q = \frac{\Delta T}{\frac{1}{h_{c1}} + \frac{\Delta x}{\lambda} + \frac{1}{h_{c2}}} = k\,\Delta T,$$

gdje je k ukupni koeficijent toplinskih gubitaka.
Nakon uvrštavanja numeričkih podataka dobiva se $k = 2{,}4\ \mathrm{W/(m^2\,K)}$ i $q = 97\ \mathrm{W/m^2}$.
Temperature površina zida mogu se odrediti iz jednadžbi:

$$q = \frac{T_p - T_1}{\frac{1}{h_{c1}}} = \frac{T_2 - T_1}{\frac{\Delta x}{\lambda}} = \frac{T_z - T_2}{\frac{1}{h_{c2}}}$$

$$T_1 = T_p - \frac{q}{h_{c1}} = 10{,}3\,^\circ\mathrm{C}$$

$$T_2 = T_z + \frac{q}{h_{c2}} = -17{,}6\,^\circ\mathrm{C}.$$

12.12. Tijelo temperature 80 °C koje se nalazi u zraku temperature 20 °C ohladit će se za 20 s na 60 °C. Kolika će biti temperatura tijela nakon 50 s?

Rješenje

Prema Newtonovu zakonu hlađenja vremenska je promjena temperature tijela proporcionalna s razlikom temperatura tijela i okolice

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -h(T - T_{ok}), \tag{1}$$

gdje je h konstanta, koja je različita za razna tijela i medije koji ga okružuju.
Relacija (1) može se napisati u sljedećem obliku:

$$\frac{\mathrm{d}T}{T - T_{ok}} = -h\,\mathrm{d}t. \tag{2}$$

Integracijom izraza (2) od neke početne temperature tijela T_0 u trenutku $t = 0$ do konačne temperature tijela T u trenutku t dobiva se

$$\ln\frac{T - T_{ok}}{T_0 - T_{ok}} = -h\,t. \tag{3}$$

Uzme li se u obzir da je nakon vremena t_1 temperatura T_1, a nakon vremena t_2 temperatura je T_2, iz (3) će slijediti

$$\ln\frac{T_1 - T_{ok}}{T_0 - T_{ok}} = -h\,t_1 \tag{4}$$

$$\ln\frac{T_2 - T_{ok}}{T_0 - T_{ok}} = -h\,t_2. \tag{5}$$

Iz (4) se izračunava h i uvrštava se u (5), pa se dobiva

$$\ln\frac{T_2 - T_{ok}}{T_0 - T_{ok}} = \frac{t_2}{t_1}\ln\frac{T_1 - T_{ok}}{T_0 - T_{ok}}. \tag{6}$$

Iz (6) slijedi

$$T_2 = T_{ok} + (T_0 - T_{ok})\left(\frac{T_1 - T_{ok}}{T_0 - T_{ok}}\right)^{\frac{t_2}{t_1}}. \tag{7}$$

Uvrštavanjem u (7) zadanih veličina dobiva se

$$T_2 = 42\ °\mathrm{C}.$$

12.13. Potrebno je usporediti toplinske gubitke kroz jednostruke, dvostruke i trostruke prozore. Unutrašnja je temperatura 20 °C, a vanjska temperatura − 10 °C. Koeficijent konvekcije s vanjske strane iznosi 20 W/(m^2 K), s unutrašnje strane 6 W/(m^2 K), termička je vodljivost stakla 0,8 W/(m K). Debljina stakla je 0,3 cm, razmak između stakala je 2 cm, a površina stakla 1 m^2. Termička je vodljivost zraka 0,025 W/(m K).

Rješenje

a) Za jednostruki prozor, toplinski otpori iznose

$$R_1 = \frac{1}{h_{c1}S} = 0{,}17\,\mathrm{K\,W^{-1}}, \qquad R_2 = \frac{\Delta x}{\lambda S} = 0{,}0038\,\mathrm{K\,W^{-1}}, \qquad R_3 = \frac{1}{h_{c2}S} = 0{,}05\,\mathrm{K\,W^{-1}}$$

Gustoća toplinskog toka je

$$q = \frac{\Delta T}{(R_1 + R_2 + R_3)S} = 134\,\mathrm{W\,m^{-2}},$$

dok je ukupni koeficijent toplinskih gubitaka

$$k = \frac{q}{\Delta T} = 4{,}47\,\mathrm{W}\,(m^2\,\mathrm{K})^{-1}.$$

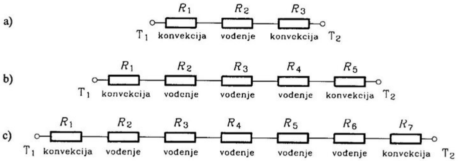
b) Slično se dobiva i za dvostruki prozor:

$$R_1 = 0{,}17\,\mathrm{K\,W^{-1}}, \qquad R_2 = 0{,}0038\,\mathrm{K\,W^{-1}}, \qquad R_3 = 0{,}8\,\mathrm{K\,W^{-1}},$$
$$R_4 = R_2 = 0{,}0038\,\mathrm{K\,W^{-1}}, \qquad R_5 = 0{,}05\,\mathrm{K\,W^{-1}},$$
$$q = \frac{\Delta T}{(R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5)S} = 29\,\mathrm{W\,m^{-2}}$$
$$k = 0{,}97\,\mathrm{W\,(m^2\,K)^{-1}}.$$

c) Za trostruki prozor dobivamo:

$$R_1 = 0{,}17\,\mathrm{K\,W^{-1}}, \qquad R_2 = 0{,}004\,\mathrm{K\,W^{-1}},$$
$$R_3 = 0{,}8\,\mathrm{K\,W^{-1}}, \qquad R_4 = R_2 = 0{,}004\,\mathrm{K\,W^{-1}},$$
$$R_5 = R_3 = 0{,}8\,\mathrm{K\,W^{-1}}, \qquad R_6 = R_2 = 0{,}004\,\mathrm{K\,W^{-1}},$$
$$R_7 = 0{,}05\,\mathrm{K\,W^{-1}},$$
$$q = \frac{\Delta T}{S\sum_i R_i} = \frac{\Delta T}{(R_1 + 3R_2 + 2R_3 + R_7)} = 16{,}4\,\mathrm{W\,m^{-2}}$$
$$k = 0{,}55\,\mathrm{W\,(m^2\,K)^{-1}}.$$

Zanemareni su konvekcija između ploča i zračenje.



Slika 12.3.

12.14. Zid je napravljen od cigli debljine 20 cm (λ_1 = 0,7 W/(K m)), vanjske žbuke debljine 3 cm i unutrašnje žbuke debljine 3 cm. (Vodljivost je žbuke λ_2 = 0,8 W/(K m). Koliko se smanjuje toplinski tok kroz 1 m^2 zida ako se umjesto unutrašnje žbuke ugradi sloj stiropora (λ_3 = 0,04 W/(K m)) debljine 2 cm prekrivenog drvom (λ_4 = 0,13 W/(K m)) debljine 1 cm?

Rješenje
Toplinski je tok

$$\Phi = \frac{\Delta T}{R}.$$

Toplinski su otpori:
vanjska žbuka

$$R_2 = \frac{\Delta x_2}{\lambda_2 S} = 0{,}0375\,\mathrm{K\,W^{-1}},$$

cigla

$$R_1 = \frac{\Delta x_1}{\lambda_1 S} = 0{,}286\,\mathrm{K\,W^{-1}},$$

unutrašnja žbuka

$$R_2' = \Delta x_3/\lambda_2 S = 0{,}0375\,\mathrm{K\,W^{-1}},$$

stiropor

$$R_3 = 0{,}5\,\mathrm{K\,W^{-1}},$$

drvo

$$R_4 = 0{,}077\,\mathrm{K\,W^{-1}}.$$

Toplinski je tok u prvom slučaju

$$\Phi_1 = \frac{\Delta T}{\Sigma R} = \frac{\Delta T}{R_1 + R_2 + R_2'} = \frac{\Delta T}{0{,}361\,\mathrm{K\,W^{-1}m^2}} \Rightarrow k_1 = 2{,}77\,\mathrm{W\,(m^2\,K)^{-1}}.$$

Toplinski tok za dodatno izolirani zid jest

$$\Phi_2 = \frac{\Delta T}{\Sigma R} = \frac{\Delta T}{0{,}9\,\mathrm{kW^{-1}m^2}} \Rightarrow k_2 = 1{,}1\,\mathrm{W\,(m^2\,K)^{-1}}.$$

Iz toga se zaključuje da se toplinski tok smanjio 2,5 puta.

12.15. Kolika je ukupna emisijska moć crnog tijela ugrijanog na temperaturu 127 °C? Na kojoj je valnoj duljini maksimum spektra i kolika je spektralna egzitancija na toj temperaturi?

Rješenje

$$M = \varepsilon\,\sigma\,T^4 = 1450\,\mathrm{W\,m^{-2}}$$

$$\lambda_m = \frac{2{,}898\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}}{T} = 7{,}25\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}$$

$$M_\lambda^{\mathrm{ct}} = \frac{2\pi\,h\,c^2}{\lambda^5}\,\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1} = 1{,}3\cdot 10^2\,\mathrm{W\,(m^2\,\mu m)^{-1}}.$$

12.16. Sunce zrači onoliko energije koliko i crno tijelo ugrijano na temperaturu 5 800 K. Za koju valnu duljinu spektar Sunčeva zračenja ima maksimum? Koliku snagu zrači 1 m^2 Sunčeve površine? Kolika je ukupna snaga koju zrači Sunčeva površina? Koji dio od te snage prima Zemlja? Kolika je srednja gustoća energetskog toka koja od Sunca dolazi na Zemljinu površinu?

Rješenje

Primjenom Wienova zakona dobiva se

$$\lambda_m T = 2{,}9\cdot 10^{-3}\,\mathrm{K\,m} \Rightarrow \lambda_m = 0{,}5\,\mu\mathrm{m}.$$

Iz Stefan-Boltzmannova zakona slijedi

$$I = \sigma\,T^4 = 6{,}4\cdot 10^7\,\mathrm{W\,m^{-2}}.$$

Ukupna snaga koju Sunce emitira u cijeli prostor jest

$$P = 4\,R_S^2\,\pi\,I = 3{,}9\cdot 10^{26}\,\mathrm{W},$$

gdje je $R_S = 6{,}95\cdot 10^8$ m polumjer Sunca.

Budući da je polumjer Zemlje $R_Z = 6{,}37\cdot 10^6$ m, a udaljenost Zemlja–Sunce $r = 1{,}5\cdot 10^{11}$ m, snaga koju prima Zemlja bit će

$$P_1 = \frac{P}{4\,r^2\,\pi}\cdot R_z^2\,\pi = 1{,}7\cdot 10^{17}\,\mathrm{W}.$$

Ako se s $\overline{E}_0$ označi gustoća toka Sunčeva zračenja kroz površinu okomitu na smjer Sunčevih zraka na srednjoj udaljenosti Zemlja–Sunce, bit će

$$P = \overline{E}_0\cdot 4\,r^2\,\pi,$$

odnosno

$$\overline{E}_0 = \frac{P}{4\,r^2\,\pi} = \frac{R_s^2}{r^2}\,I = 1380\,\mathrm{W\,m^{-2}}.$$

$\overline{E}_0$ je solarna konstanta.

12.17. Termos-boca ima dvostruke staklene stijenke između kojih je vakuum tako da se toplina između stijenki prenosi jedino zračenjem. Ako je temperatura jedne staklene površine 100 °C, a druge 27 °C, koliki je toplinski tok između površina ako:

a) površine nisu posrebrene i

b) ako su površine posrebrene? Koeficijent emisije stakla u infracrvenom području iznosi 0,95, a srebra 0,02.

Rješenje

a) $$q = \frac{\sigma(T_2^4 - T_1^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} = \frac{5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}(373^4 - 300^4)\,\mathrm{K}^4}{\frac{1}{0{,}95} + \frac{1}{0{,}95} - 1} = 578\,\mathrm{W\,m^{-2}}.$$

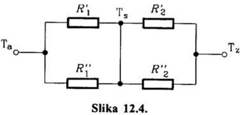
b) $$q = \frac{\sigma(T_2^4 - T_1^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} = \frac{5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}(373^4 - 300^4)\,\mathrm{K}^4}{\frac{1}{0{,}02} + \frac{1}{0{,}02} - 1} = 6{,}5\,\mathrm{W\,m^{-2}}.$$

12.18. Solarni se kolektor sastoji od apsorbera prekrivenog staklom. Toplina se iz apsorbera gubi zračenjem i konvekcijom prema staklu, a zatim iz stakla u okolni zrak. Potrebno je izračunati ukupni koeficijent toplinskih gubitaka ako je koeficijent toplinskih gubitaka konvekcijom između apsorbera i stakla $k_1' = 4\ \mathrm{W/(m^2\,K)}$, koeficijent prijenosa topline zračenjem iz apsorbera prema staklu $k_1'' = 8\ \mathrm{W/(m^2\,K)}$, koeficijent za zračenje iz stakla u atmosferu $k_2'' = 5\ \mathrm{W/(m^2\,K)}$ i koeficijent konvekcije iz stakla u zrak $k_2' = 10\ \mathrm{W/(m^2\,K)}$. (Gubitke prema stražnjoj strani i bočnim stranama kolektora valja zanemariti.)

Rješenje

Toplinska je shema prikazana na sl. 12.4.

Toplinski otpor R_1 za prijenos topline od apsorbera do prozora paralelan je spoj otpora zbog konvekcije R_1' i zračenja R_1'', pa je



Slika 12.4.

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_1''}.$$

Odgovarajući je koeficijent prijenosa topline

$$k_1 = k_1' + k_1''.$$

Slično vrijedi i iza gubitak topline iz staklenog prozora

$$k_2 = k_2' + k_2''.$$

Dakle, ukupan je koeficijent toplinskih gubitaka kolektora

$$k = \frac{1}{\frac{1}{k_1' + k_1''} + \frac{1}{k_2' + k_2''}} = 6{,}7\,\mathrm{W\,(m^2\,K)^{-1}}.$$

12.19. Crna je površina $S = 1\ \mathrm{m}^2$ zagrijana na temperaturu 400 K. Iznad nje, udaljena 5 cm, nalazi se staklena površina na temperaturi 300 K. Koeficijent konvekcije je $4\ \mathrm{W/(m^2\,K)}$, koeficijent emisije stakla 0,9, termička vodljivost zraka 0,025 W/(K m). Koliki je toplinski tok između te dvije površine?

Rješenje

Toplinski je otpor za prijenos konvekcijom

$$R_1 = \frac{1}{h_c S} = 0{,}25\,\mathrm{K\,W^{-1}}.$$

Toplinski otpor za prijenos zračenjem jest

$$R_2 = \frac{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1}{\sigma S (T_1^2 + T_2^2)(T_1 + T_2)} = 0{,}11\,\mathrm{K\,W^{-1}}.$$

Toplinski otpor za prijenos vođenjem jest

$$R_3 = \frac{\Delta x}{\lambda S} = 2\,\mathrm{K\,W^{-1}}.$$

Ukupan je otpor jednak paralelnom spoju ovih otpora:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = 13{,}6\frac{\mathrm{W}}{K} \Rightarrow R = 0{,}0735\,\mathrm{K\,W^{-1}}.$$

Toplinski tok i gustoća toplinskog toka jesu

$$\Phi = \frac{\Delta T}{R} = 1360\,\mathrm{W}, \qquad q = \frac{\Delta T}{RS} = 1360\,\mathrm{W\,m^{-2}}.$$

Zadaci

12.1. Jedan krak U-cijevi napunjene petrolejom do visine $h_1 = 280$ mm, nalazi se na temperaturi $t_1 = 10$ °C. Razina petroleja u drugom kraku jest $h_2 = 300$ mm, a temperatura $t_2 = 80$ °C. Potrebno je odrediti koeficijent volumnog širenja petroleja γ.

Rezultat: $\gamma = 1{,}03 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{K^{-1}}$

12.2. Kolika je temperatura idealnog plina koji se nalazi u čvrstoj posudi ako mu se pri promjeni temperature za 1 K tlak poveća 1 posto?

Rezultat: $T_1 = 100$ K

12.3. Koliki je tlak plina koji se nalazi u čvrstoj, zatvorenoj posudi ako mu se pri povećanju temperature za 1 posto promijeni tlak za 10^3 Pa?

Rezultat: $p_1 = 10^5$ Pa

12.4. U posudu volumena $10^{-2}\,\mathrm{m^3}$ napunjenu suhim zrakom uz normalne se uvjete ($p_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Pa, $t_0 = 0$ °C) stavlja $3 \cdot 10^{-3}$ kg vode, pa se posuda zagrijava do 100 °C tako da sva voda ispari. Potrebno je odrediti tlak vlažnog zraka u posudi pri toj temperaturi.

Rezultat: $p = 1{,}9 \cdot 10^5$ Pa

12.5. Posuda s helijem ima masu 21 kg na temperaturi − 3 °C i pri tlaku $6{,}5 \cdot 10^6$ Pa. Na toj istoj temperaturi, ali uz tlak $2 \cdot 10^6$ Pa, masa posude s helijem iznosi 20 kg. Kolika se masa helija nalazi u posudi uz tlak $1{,}5 \cdot 10^7$ Pa i na temperaturi 27 °C?

Rezultat: $m_3 = 3$ kg

12.6. U zatvorenoj posudi volumena $V = 10$ L nalazi se zrak pod tlakom $p_1 = 10^5$ Pa. Koju je količinu topline potrebno dovesti zraku da bi se tlak u posudi povećao pet puta?

Rezultat $Q = 10^4$ J

12.7. Željezna kuglica polumjera $r = 1$ cm zagrijana je do temperature $T = 393$ K i stavljena na led. Na koju će dubinu kuglica upasti u led ako su zadani: specifičan toplinski kapacitet željeza $c = 475$ J/(kg K), gustoća leda $\rho_0 = 0{,}9 \cdot 10^3$ kg/m^3, gustoća željeza $\rho = 7{,}9 \cdot 10^3$ kg/m^3 i toplina taljenja leda $L_t = 3{,}34 \cdot 10^5$ J/kg?

Rezultat: $h' = 2{,}33$ cm

12.8. U kalorimetar u kojem je 200 cm^3 vode temperature 303 K stavljen je komad leda mase 10 g i temperature 273 K. Kolika je temperatura nakon uspostavljanja termičke ravnoteže? (Toplina taljenja leda je $3{,}34 \cdot 10^5$ J/kg.)

Rezultat: 297,8 K

12.9. U kalorimetar u kojem se nalazi 0,1 kg leda smješan s 0,1 kg vode temperature 0 °C pušta se para temperature 100 °C. Koliko će vode (na temperaturi 0 °C) biti u kalorimetru neposredno pošto se sav led otopio? (Specifična je toplina taljenja leda $335 \cdot 10^3$ J/kg, specifična toplina isparavanja vode jest $22{,}6 \cdot 10^5$ J/kg i specifičan je toplinski kapacitet vode $4{,}19 \cdot 10^3$ J kg^{-1} K^{-1}). Zanemaruje se toplinski kapacitet i gubici kalorimetra.

Rezultat: $m = 0{,}2125$ kg

12.10. Kolika će biti temperatura uranova dioksida mase 5 kg i početne temperature 700 °C ako mu se dovede toplina $5 \cdot 10^4$ J? Specifičan toplinski kapacitet uran dioksida ovisan je o temperaturi i u intervalu od 500 °C do 2 500 °C dan je relacijom $c = (231{,}2 + 0{,}1024\, t)\dfrac{\text{J}}{\text{kg K}}$ gdje je t temperatura u Celzijevim stupnjevima.

Gubitke topline u okolicu valja zanemariti.

Rezultat: $t_2 = 732{,}8$ °C

12.11. Koliki su toplinski gubici (gustoća toplinskog toka) kroz zid debeo 25 cm ($\lambda = 0{,}7$ W/Km) koji:

a) s vanjske strane nije ožbukan,

b) ožbukan je cement-vapnenom žbukom ($\lambda = 0{,}8$ W/Km) debljine 3 cm i

c) ožbukan je toplinskom žbukom ($\lambda = 0{,}11$ W/Km) debljine 3 cm?

Vanjska je temperatura − 10 °C, a unutrašnja 20 °C. Pretpostavlja se da je koeficijent konvekcije s vanjske strane 20 W/(m^2 K), a s unutrašnje strane 6 W/(m^2 K). Koliki je ukupni koeficijent prijenosa topline u ta tri slučaja?

Rezultat: **a)** $q = 52$ W m^{-2}, $k = 1{,}74$ W (m^{2}K)$^{-1}$; **b)** $q = 49$ W m^{-2}, $k = 1{,}63$ W (m^{2}K)$^{-1}$; **c)** $q = 35$ W m^{-2}, $k = 1{,}18$ W (m^{2}K)$^{-1}$;

12.12. Kolika će biti debljina leda u primjeru 12.10 (str. 211) nakon 10 sati?

Rezultat: $d_1 = 0{,}088$ m

13. Termodinamika

Uvod

Prvi zakon termodinamike (zapravo zakon održanja energije) glasi

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}Q - \mathrm{d}W, \tag{1}$$

gdje su $\mathrm{d}U$ promjena unutrašnje energije, $\mathrm{d}Q$ dovedena (odvedena) toplina i $\mathrm{d}W = p\,\mathrm{d}V$ obavljeni rad.

Unutrašnja energija idealnog plina iznosi

$$U = n\frac{i}{2}RT, \tag{2}$$

gdje je i broj stupnjeva slobode gibanja molekule. Za jednoatomne plinove (čije se molekule mogu gibati samo translacijom) $i = 3$, dok za višeatomne plinove pri proračunu unutrašnje energije valja uzeti u obzir i rotaciju i vibraciju molekule. Entalpija sustava definira se relacijom

$$H = U + pV. \tag{3}$$

Pri izobarnom procesu (p = konst.) $\mathrm{d}H = \mathrm{d}U + p\,\mathrm{d}V = \mathrm{d}Q$, pa se specifičan toplinski kapacitet pri stalnom tlaku može pisati i

$$c_\mathrm{p} = \frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}T}, \tag{4}$$

a specifična latentna toplina pri izobarnoj promjeni faze

$$L_\mathrm{t} = \frac{1}{m}H_\mathrm{t}. \tag{5}$$

Specifičan toplinski kapacitet pri stalnom volumenu definira se uz pomoć unutrašnje energije

$$c_\mathrm{v} = \frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T}. \tag{6}$$

Za idealni je plin

$$c_p - c_v = \frac{R}{M}. \tag{7}$$

Iz $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ i Mayerove relacije (7) slijede relacije za molarne toplinske kapacitete idealnog plina:

$$C_v = \frac{R}{\kappa - 1} \qquad C_p = \frac{\kappa R}{\kappa - 1}. \tag{8}$$

Omjer specifičnoga toplinskog kapaciteta pri stalnom tlaku i stalnom volumenu

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} \tag{9}$$

zove se adijabatski koeficijent i iznosi za jednoatomne plinove 1,66, a za dvoatomne plinove 1,4.

Rad pri promjeni volumena plina jest

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V. \tag{10}$$

Pri izobarnoj je promjeni volumena plina

$$W = p(V_2 - V_1). \tag{11}$$

Za izotermni proces (T = konst.) rad idealnog plina jednak je dovedenoj toplini i iznosi

$$W = Q = nRT\ln\frac{V_2}{V_1} = nRT\ln\frac{p_1}{p_2}. \tag{12}$$

Pri adijabatskom procesu ($\mathrm{d}Q = 0$) tlak, volumen i temperatura idealnog plina povezani su Poissonovim jednadžbama (jednadžbama adijabate):

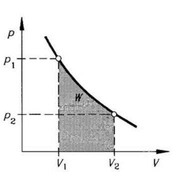
$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa}, \qquad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1}, \qquad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}. \tag{13}$$

Rad idealnog plina pri adijabatskom procesu jest

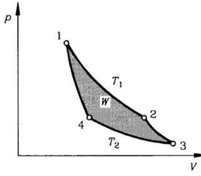
$$W = \frac{nR}{\kappa - 1}(T_1 - T_2) = \frac{nRT_1}{\kappa - 1}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{p_1V_1}{\kappa - 1}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right). \tag{14}$$

Najčešće se termodinamički procesi prikazuju u p,V-dijagramu. U tom je slučaju rad predočen površinom ispod krivulje kao što je označeno na slici 13.1. Rad pri Carnotovu kružnom procesu (sl. 13.2) jest

$$W = Q_1 + Q_2 = |Q_1| - |Q_2| = Q_1\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right), \tag{15}$$



Slika 13.1.



Slika 13.2.

gdje je Q_1 toplina dovedena radnom fluidu (idealnom plinu), a Q_2 toplina predana hladnijem spremniku, T_1 temperatura toplijeg, a T_2 temperatura hladnijeg spremnika. Korisnost je toplinskog stroja

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{|Q_1| - |Q_2|}{Q_1}, \tag{16}$$

gdje je W rad dobiven u kružnom procesu, Q_1 toplina koju je topliji spremnik predao radnom fluidu i Q_2 toplina odvedena iz radnog fluida u hladniji spremnik. Za Carnotov kružni proces (koji od svih mogućih procesa ima najveći η) koeficijent iskorištenja jest

$$\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \tag{17}$$

Koeficijent hlađenja rashladnog stroja definira se omjerom

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{W}, \tag{18}$$

gdje je Q_2 toplina uzeta iz prostora koji se hladi, a W uloženi rad.

Promjena entropije pri reverzibilnoj promjeni stanja jest

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 dS = \int_1^2 \frac{dQ}{T}. \tag{19}$$

Drugi zakon termodinamike kaže da je za sustav koji je termički izoliran od okoline

$$\Delta S \geq 0, \tag{20}$$

gdje znak jednakosti vrijedi za reverzibilne, a znak nejednakosti za ireverzibilne procese unutar sustava.

Unutrašnja energija, entalpija i entropija jesu funkcije stanja sustava dok su p, V i T varijable stanja sustava.

Primjeri

13.1. Tri mola idealnog plina volumena V_0 na početnoj temperaturi $T_0 = 273\ \mathrm{K}$ izotermno se šire do konačnog volumena $5\ V_0$, a nakon toga se izohorno griju sve dok se tlakovi konačnog i početnog stanja ne izjednače (sl. 13.3). Ukupna količina topline predana plinu za vrijeme procesa $Q = 80\ \mathrm{kJ}$. Odredite adijabatski koeficijent plina.

Rješenje

Pri izotermnom širenju $T_0 =$ konst., $p\ V = n\ R\ T_0 =$ konst.

Pri izohornom grijanju $V =$ konst., $Q = n\ C_V\ (T_1 - T_0)$:

$$p_0 V_0 = n R T_0$$

$$p_0 5 V_0 = n R T_1 \qquad T_1 = \frac{5 p_0 V_0}{n R} = 5 T_0$$

$$W = n R T_0 \ln \frac{V}{V_0} = n R T_0 \ln 5$$

$$Q' = n C_v (T_1 - T_0)$$

$$Q = W + Q'$$

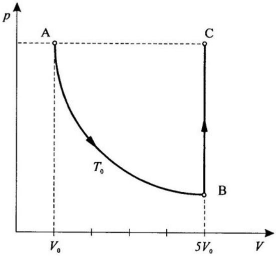
$$Q = n R T_0 \ln 5 + 4 n C_v T_0$$

$$C_v = \frac{Q - n R T_0 \ln 5}{4 n T_0}$$

$$C_p = C_v + R$$

$$\kappa = \frac{C_p}{C_v} = 1 + \frac{4}{\dfrac{Q}{n R T_0} - \ln 5}$$

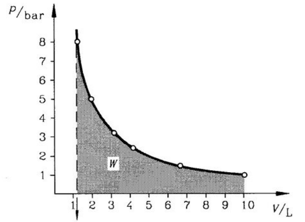
$$\kappa = 1{,}39.$$



Slika 13.3.

13.2. U cilindru s klipom volumena 10 L nalazi se idealni plin pri tlaku 1 bar. Mjerenja tlaka i volumena pri kvazistatičnoj (gotovo ravnotežnoj) kompresiji plina naznačeni su u tablici. Koliki je rad potreban za tu kompresiju?

V/L	10	7	4	3	2	1,25
p/bar	1	1,4	2,5	3,3	5	8



Slika 13.4.

Rješenje

Rad idealnog plina jest

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V.$$

U ovom je slučaju kompresije rad negativan jer ga vanjske sile (okolica) obavljaju nad sustavom. Ovisnost tlaka o volumenu tijekom procesa dana je tablično, a može se predočiti i u p,V-dijagramu (sl. 13.4). Površina ispod krivulje jednaka je

$$\int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V,$$

pa se rad može izračunati grafičkom integracijom, tako da se npr., krivulja nacrta na milimetarskom papiru (tako da, npr. 1 mm^2 odgovara 1 J) i brojeći kvadratne milimetre odredi ukupna površina pod krivuljom. Dobiva se da je ukupni rad oko 2,1 kJ.

U ovom se slučaju prepoznaje da je krivulja hiperbola pV = konst., pa se integracija može provesti i analitički:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V = \text{konst.}\int_{V_1}^{V_2}\frac{\mathrm{d}V}{V} = \text{konst}\cdot\ln\frac{V_2}{V_1} = p_1V_1\ln\frac{V_2}{V_1} = 2{,}1\,\text{kJ}.$$

13.3. Jednoatomni idealni plin na temperaturi 27 °C pri tlaku $p_1 = 1{,}25\cdot10^6$ Pa ima volumen $V_1 = 4\cdot10^{-3}$ m^3. Ako se plinu izobarno dovede količina topline $2\cdot10^4$ J, kolika će biti konačna temperatura i volumen plina? Koliko se pritom povećala unutrašnja energija plina? Koliki je rad obavio plin?

Rješenje

Za jednoatomni idealni plin $c_p = \frac{5}{2}\frac{R}{M}$, pa je promjena temperature

$$\Delta T = \frac{\Delta Q}{m c_p} = \frac{2\Delta Q T_1}{5 p_1 V_1} = 480\,\mathrm{K},$$

gdje je masa izražena iz plinske jednadžbe $p_1 V_1 = \frac{m}{M} R T_1$. Konačna temperatura nakon izobarne ekspanzije jest

$$T_2 = T_1 + \Delta T = 780\,\mathrm{K} = 507\,°\mathrm{C}.$$

Konačni volumen V_2 može se izračunati iz plinske jednadžbe napisane za početno i konačno stanje plina:

$$p_1 V_1 = n R T_1$$
$$p_1 V_2 = n R T_2.$$

Dijeljenjem tih dviju jednadžbi dobiva se

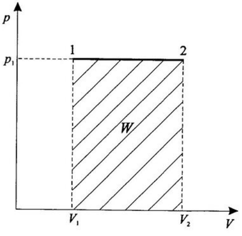
$$V_2 = \frac{T_2}{T_1} V_1 = 1{,}04 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3.$$

Promjena unutrašnje energije jest

$$\Delta U = \frac{3}{2} n R \Delta T = \frac{3}{2}\frac{p_1 V_1}{R T_1} R \Delta T = \frac{3}{2}\frac{p_1 V_1}{T_1}\Delta T = 1{,}2 \cdot 10^4\,\mathrm{J}.$$

Pri toj izobarnoj ekspanziji plin obavlja rad

$$\Delta W = \int_{V_1}^{V_2} p_1 \mathrm{d}V = p_1 (V_2 - V_1)$$
$$\Delta W = 8 \cdot 10^3\,\mathrm{J}.$$



Slika 13.5.

Rad je jednak površini ispod dijela pravca na slici 13.5. Jedan je dio od dovedene količine topline povećao unutrašnju energiju plina, a ostatak se utrošio na obavljanje rada

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W = 12\,000\,\mathrm{J} + 8\,000\,\mathrm{J}$$

$$\Delta Q = 20\,000\,\mathrm{J},$$

kao što i mora biti prema prvom zakonu termodinamike.

13.4. Jedan mol dvoatomnog plina nalazi se na temperaturi 10 °C. Adijabatskom se ekspanzijom volumen plina udvostručuje i zatim se izotermnom kompresijom dovodi na svoju prvobitnu vrijednost. Koliku količinu topline plin mora dobiti da bi se vratio u početno stanje?

Rješenje

Jednadžba adijabate daje

$$V_1 T_1^{\frac{1}{\kappa-1}} = V_2 T_2^{\frac{1}{\kappa-1}},$$

gdje je

$$\kappa = 1 + \frac{2}{i}.$$

Odavde je (uz oznake na slici 13.6)

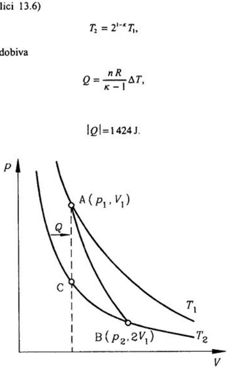
$$T_2 = 2^{1-\kappa} T_1,$$

i uz Mayerovu se relaciju dobiva

$$Q = \frac{nR}{\kappa - 1} \Delta T,$$

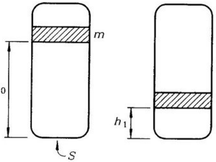
odnosno

$$|Q| = 1424\,\mathrm{J}.$$



Slika 13.6.

13.5. U vertikalno postavljenoj cijevi adijabatskih stijenki, zatvorenoj na oba kraja, učvršćen je klip mase 40 kg na visini 1 m od dna cijevi (sl. 13.7.). Ispod klipa nalazi se 0,16 g He na temperaturi 27 °C. Iznad klipa je vakuum. Na kojoj se visini zaustavlja klip pošto se oslobodi? (Klip ne apsorbira toplinu.)



Slika 13.7.

Rješenje

Budući da je

$$dQ = 0$$

i

$$\kappa = 1 + \frac{2}{i} = \frac{5}{3},$$

dobiva se

$$W = \frac{1}{\kappa - 1}(p_1 V_1 - p_2 V_2) = m\,g\,(h_1 - h_0).$$

Isto je tako

$$p_2 = \frac{m\,g}{S}$$

i

$$m\,g\,(h_1 - h_0) = \frac{3}{2}\left(n\,R\,T_1 - \frac{m\,g}{S}\,h_1 S\right).$$

Dakle,

$$h_1 = \frac{2}{5}h_0 + \frac{3}{5}\frac{n\,R\,T_1}{m\,g} = 0{,}5526\,\mathrm{m}.$$

13.6. Želi se komprimirati 0,02 m^3 zraka na četiri puta manji volumen. Koji kompresijski proces – adijabatski ili izotermni – zahtijeva manji utrošak rada? Izračunajte faktor $\frac{W_{ad}}{W_{iz}}$.

Rješenje

Adijabatskom kompresijom utrošeni rad

$$W_{ad} = \frac{n\,R\,T_1}{\kappa - 1}\left[1 - \left(\frac{V_p}{V_k}\right)^{\kappa-1}\right]$$

valja usporediti s radom utrošenim u izotermnom procesu

$$W_{iz} = n\,R\,T \ln\left(\frac{V_k}{V_p}\right) \qquad \text{uz} \qquad T = T_1 = T_2.$$

Zadani su $V_p = 0{,}02\,\mathrm{m}^3$, $V_k = 0{,}005\,\mathrm{m}^3$ i adijabatska konstanta za dvoatomne molekule $\kappa = 1{,}4$, pa zamjenom podataka slijedi vrijednost omjera

$$\frac{W_{ad}}{W_{iz}} = \frac{\left[1-\left(\frac{V_p}{V_k}\right)^{\kappa-1}\right]}{(\kappa-1)\ln\left(\frac{V_k}{V_p}\right)} = 1{,}336.$$

U postavljenim je alternativama izotermna kompresija bolja jer zahtijeva manji utrošak energije.

13.7. Vodiku mase 10 g i temperature 27 °C povećava se adijabatski volumen 4 puta, a nakon toga se izotermnom kompresijom smanjuje na polovicu početnog volumena. Odredite promjenu unutrašnje energije nakon tih procesa.

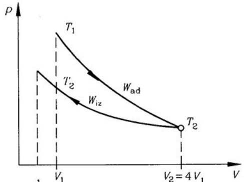
Rješenje

Termodinamičke procese ilustrira dijagram na slici 13.8. Poissonovom se jednadžbom najprije određuje temperatura T_2 na svršetku adijabatskog procesa

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1}.$$

Uz $\kappa = \frac{c_p}{c_V} = 1{,}4$ za vodik H_2, temperaturu $T_1 = 300$ K i $V_2 = 4V_1$, slijedi

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1} = 172{,}3\ \text{K}.$$



Slika 13.8.

Rad plina u adijabatskom procesu jest

$$W_{ad} = W_{12} = \frac{nR}{\kappa-1}(T_1 - T_2) = 13{,}27\ \text{kJ}.$$

Vodik je sada podvrgnut izotermnoj kompresiji (temperatura T_2 određuje izotermu). Rad tog procesa je

$$W_{iz} = W_{23} = nRT_2\ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right).$$

Budući da je $V_3 = 0{,}5V_1$ i $V_2 = 4V_1$ slijedi $W_{iz} = -14{,}894$ kJ. Negativan predznak pokazuje da u izotermnoj kompresiji valja dovesti rad u sustav.

Prema prvom zakonu termodinamike $dU = dQ - dW$ i glavnom svojstvu adijabatskog procesa $dQ = 0$ proizlazi da je promjena unutrašnje energije upravo jednaka radu adijabatskog procesa

$$\Delta U = \Delta W_{ad} = 13{,}27\ \text{kJ}.$$

(Naputak: Zadatak se može riješiti i primjenom relacije $\Delta U = \frac{i}{2}nR\Delta T$.)

13.8. Dvije litre dušika nalaze se pod tlakom 10^6 Pa. Koji iznos topline valja predati dušiku za udvostručenje njegova volumena? Pri toj je promjeni tlak stalan.

Rješenje

U izobarnoj je promjeni stanja rad plina

$$W = p\,\Delta V, \quad p = \text{konst}.$$

Član $p\,\Delta V$, prema jednadžbi stanja idealnog plina, daje promjenu temperature, ΔT u procesu:

$$p\,\Delta V = n\,R\,\Delta T \quad \text{i} \quad \Delta T = \frac{p\,\Delta V}{n\,R},$$

koju valja osigurati predajom odgovarajuće topline Q uz stalan tlak:

$$Q = n\,C_p\,\Delta T = C_p\,\frac{p\,\Delta V}{R}.$$

Molekula je dušika dvoatomna, pa je

$$C_p = \frac{i+2}{2}R = \frac{7}{2}R,$$

čijim je uvrštenjem

$$Q = \frac{7}{2}p\,\Delta V.$$

Uz $\Delta V = V_k - V_p = 2 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3$, dobivamo Q = 7 000 J.

13.9. Zrak mase 1 kg prevodi se iz početnog stanja (p_1 = 1 bar, T_1 = 300 K) u konačno stanje (T_2 = 600 K):

a) izovolumnim zagrijavanjem,

b) izobarnim zagrijavanjem i

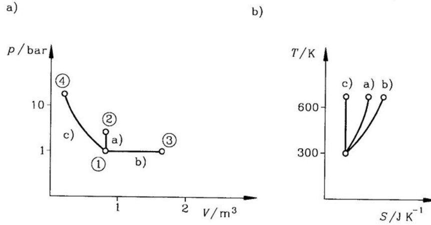
c) adijabatskom kompresijom (κ = 1,4).

Nacrtajte p,V-dijagram tih procesa, izračunajte promjenu entropije i nacrtajte T,S-dijagram. (Pretpostavlja se da je c_p = 1 000 J/(kg K) i c_V = 713 J/(kg K.)

Rješenje

a) Početno je stanje plina p_1 = 1 bar, T_1 = 300 K, $V_1 = \frac{m\,R\,T_1}{M\,p_1} = 0{,}861\ \text{m}^3$. Nakon izovolumnog zagrijavanja T_2 = 600 K, $p_2 = \frac{p_1\,T_2}{T_1} = 2$ bar, $V_2 = 0{,}861\ \text{m}^3$.

Promjena je entropije



Slika 13.9.

$$\Delta S = S_2 - S_1 = m\, c_V \ln \frac{T_2}{T_1} = 0{,}5 \text{ kJ K}^{-1}.$$

b) Nakon izobarnog zagrijavanja $T_2 = 600$ K, $p_2 = 1$ bar, $V_3 = \frac{V_1 T_2}{T_1} = 1{,}72 \text{ m}^3$.

Promjena entropije iznosi

$$\Delta S = S_3 - S_1 = m\, c_p \ln \frac{T_2}{T_1} = 0{,}7 \text{ kJ K}^{-1}.$$

c) Pri adijabatskoj kompresiji ($dQ = 0$) promjena entropije je nula. Volumen se pritom smanjio na $V_4 = V_1 \left(\frac{T_1}{T_4}\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} =$ $= 0{,}152 \text{ m}^3$, a tlak je porastao na $p_4 = p_1 \left(\frac{T_4}{T_1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} = 11{,}3$ bar.

Na sl. 13.9. prikazani su p,V i T,S-dijagrami tih procesa.

13.10. Kolika je promjena entalpije i entropije sustava i okolice kada se 1 kg leda temperature − 10 °C otopi i toplinski uravnoteži s okolicom temperature + 10 °C? (Specifičan je toplinski kapacitet leda 2,1 kJ (kg K)$^{-1}$, a latentna toplina taljenja leda je 335 kJ/kg.)

Rješenje

Da bi se led zagrijao od − 10 °C do 0 °C, da bi se otopio i da bi se nastala voda zagrijala do + 10 °C, potrebno je iz okolice dovesti toplinu

$$\Delta Q = m\left[c_1(T_2 - T_1) + L_t + c_2(T_3 - T_2)\right] = 398 \text{ kJ}.$$

Budući da je proces izobaran, promjena je entalpije $\Delta H = \Delta Q = 398$ kJ.

Promjena entropije sustava jednaka je zbroju promjena entropije pri zagrijavanju leda, pri taljenu leda i pri zagrijavanju nastale vode:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{m\, c_1 \mathrm{d}T}{T} + \frac{m\, L_t}{T_2} + \int_{T_2}^{T_3} \frac{m\, c_2 \mathrm{d}T}{T} =$$

$$= m\left[c_1 \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{L_t}{T_2} + c_2 \ln \frac{T_3}{T_2}\right] = 1{,}456 \text{ kJ K}^{-1}.$$

Promjena entropije okolice jest

$$\Delta S' = -\frac{\Delta Q}{T_3} = -1{,}406 \text{ kJ (K)}^{-1}.$$

Ukupna je promjena entropije

$$\Delta S_u = \Delta S + \Delta S' = 50 \text{ J K}^{-1}.$$

Prema drugom zakonu termodimanike ($\Delta S_u \geq 0$) ovaj je proces ireverzibilan jer je ukupna promjena entropije pozitivna.

13.11. **a)** Izvedite izraz za promjenu entropije pri promjeni stanja idealnog plina.

b) Valja izračunati promjenu entropije pri kompresiji 1 kg zraka iz početnog stanja ($p_1 = 1$ bar, $T_1 = 300$ K) u konačno stanje ($p_2 = 2$ bar, $T_2 = 366$ K).

Pretpostavlja se da su specifični toplinski kapaciteti konstantni, da je $c_p = 1{,}007$ kJ/(kg K) i da je adijabatski koeficijent $\kappa = 1{,}4$.

Rješenje

Iz prvog zakona termodinamike $dQ = dU + p\, dV$ i definicije entropije $dQ = T\, dS$ dobiva se

$$T\, \mathrm{d}S = \mathrm{d}U + p\, \mathrm{d}V.$$

Za idealni plin $dU = m\,c_V\,dT$ i $p\,V = \frac{m\,R\,T}{M}$, pa je

$$S_2 - S_1 = m\,c_V \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \frac{m\,R}{M} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = m\,c_V \ln\frac{T_2}{T_1} + \frac{m\,R}{M} \ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Ako su zadani tlak i temperatura, promjena se entropije može izraziti pomoću te dvije veličine. Iz plinske se jednadžbe dobiva

$$p\,dV + V\,dp = \frac{m}{M} R\,dT,$$

pa je

$$T\,dS = dU + \frac{m}{M} R\,dT - V\,dp = m\,c_V\,dT + \frac{m\,R}{M} dT - \frac{m\,R\,T}{M}\frac{dp}{p} = m\,c_p\,dT - \frac{m\,R\,T}{M}\frac{dp}{p}$$

jer je $c_p - c_v = \frac{R}{M}$. Odatle je

$$S_2 - S_1 = m\,c_p \ln\frac{T_2}{T_1} - \frac{m\,R}{M} \ln\frac{p_2}{p_1}$$

$$S_2 - S_1 = m\,c_p \ln\frac{T_2}{T_1} - m\,c_p \frac{\kappa - 1}{\kappa} \ln\frac{p_2}{p_1}.$$

Uvrštavanjem zadanih podataka dobiva se da je $S_2 - S_1 = 0$. Promjena entropije je nula, proces je adijabatski (izentropski).

Pokažite da je zaista početno i konačno stanje plina povezano Poissonovom jednadžbom

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}.$$

13.12. Kolika je promjena entropije pri miješanju 1 kg vode temperature 17 °C i 0,5 kg vode temperature 60 °C?

Rješenje

Temperatura smjese iznosi

$$T = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2} = 304{,}3\,\mathrm{K}.$$

Promjena je entropije

$$\Delta S = m_1 c \ln\frac{T}{T_1} + m_2 c \ln\frac{T}{T_2} = 12{,}8\ \mathrm{J\,K^{-1}}.$$

Sustav je izoliran, promjena entropije je pozitivna, a to pokazuje da je proces ireverzibilan.

13.13. Specifični i molarni toplinski kapaciteti plinova ovise o temperaturi. Ta se ovisnost u prvoj aproksimaciji može predočiti linearnom funkcijom. Ako je za zrak ta ovisnost dana izrazom $C_p = (27{,}12 + 0{,}006\ \mathrm{T})\ \mathrm{J/(mol\ K)}$, valja izračunati promjenu entalpije i entropije pri izobarnom zagrijavanju 1 mol zraka od 273 K do 820 K.

Rješenje

Promjena entalpije jest

$$\Delta H = \int n C_p \mathrm{d}T = n\int_{T_1}^{T_2}(a + bT)\mathrm{d}T = na(T_2 - T_1) + n\frac{b}{2}(T_2^2 - T_1^2) = 16{,}6\,\mathrm{kJ}.$$

Promjena je entropije

$$\Delta S = \int\frac{\mathrm{d}Q}{T} = \int\frac{\mathrm{d}U + p\,\mathrm{d}V}{T} = \int\frac{n C_V \mathrm{d}T + nR\,\mathrm{d}T}{T} = n\int_{T_1}^{T_2} C_p\frac{\mathrm{d}T}{T}.$$

Kada se uvrsti $C_p = a + bT$, i to se integrira, dobiva se

$$\Delta S = na\ln\frac{T_2}{T_1} + nb(T_2 - T_1) = 33{,}1\ \mathrm{J\,(K\,mol)^{-1}}.$$

13.14. Tijela mase m_1 sa specifičnim toplinskim kapacitetom c_1 i s početnom temperaturom T_1 te mase m_2 sa specifičnim toplinskim kapacitetom c_2 i početnom temperaturom T_2, dovedena su u toplinski kontakt i izolirana od svoje okolice. Nađite njihove konačne temperature, koristeći se prvim i drugim zakonom termodinamike.

Rješenje

$$m_1c_1(T_1' - T_1) + m_2c_2(T_2 - T_2') = 0$$

$$\Delta S = m_1c_1\ln\frac{T_1'}{T_1} + m_2c_2\ln\frac{T_2'}{T_2}$$

$$T_2' = \frac{m_1c_1(T_1 - T_1')}{m_2c_2} - T_2$$

$$\Delta S = m_1c_1\ln\frac{T_1'}{T_1} + m_2c_2\ln\left(\frac{m_1c_1(T_1 - T_1') + m_2c_2T_2}{m_2c_2T_2}\right).$$

Izolirani sustav prema drugom zakonu termodinamike teži da dođe u stanje maksimalne entropije:

$$\frac{\mathrm{d}\Delta S}{\mathrm{d}T_1'} = m_1c_1\frac{1}{T_1'} - m_2c_2\frac{m_1c_1}{m_1c_1(T_1 - T_1') + m_2c_2T_2} = 0$$

$$m_1c_1(T_1 - T_1') + m_2c_2T_2 = m_2c_2T_1'$$

$$T_1' = \frac{m_1c_1T_1 + m_2c_2T_2}{m_1c_1 + m_2c_2}$$

$$T_1' = \frac{m_1c_1(m_1c_1T_1 + m_2c_2T_1 - m_1c_1T_1 - m_2c_2T_2)}{m_2c_2(m_1c_1 + m_2c_2)} + T_2 = \frac{m_1c_1(T_1 - T_2)}{m_1c_1 + m_2c_2} + T_2$$

$$T_2 = \frac{m_1c_1T_1 + m_2c_2T_2}{m_1c_1 + m_2c_2} = T_1'.$$

13.15. Carnotov stroj radi s koeficijentom iskorištenja $\eta_1 = 40\%$. Ako se temperaturu hladnijeg spremnika $t_2 = 9\ ^\circ\mathrm{C}$ drži konstantnom, koeficijent iskorištenja poraste na $\eta_2 = 50\%$ uz povišenje temperature toplijeg spremnika. Koliko iznosi to povišenje temperature?

Rješenje

Koeficijent iskorištenja jest:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

$$T_1 = \frac{T_2}{1-\eta_1} \quad \text{i} \quad T_1' = \frac{T_2}{1-\eta_2}$$

$$\Delta T = T_1' - T_1 = \frac{T_2(\eta_2 - \eta_1)}{(1-\eta_1)(1-\eta_2)}$$

$$\Delta T = 94\,\mathrm{K}.$$

13.16. Odredite ukupnu promjenu entropije idealnog plina u Carnotovu procesu.

Rješenje

U početnom stanju entropija plina jest S_1.

Nakon izotermnog širenja plina promjena je entropije

$$S_2 - S_1 = \int \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \int \frac{p\,\mathrm{d}V}{T} = \frac{m}{M} R \int \frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Nakon adijabatskog širenja

$$S_3 - S_2 = \int \frac{\mathrm{d}Q}{T} = 0, \qquad \text{jer je} \qquad \mathrm{d}Q = 0.$$

Nakon izotermnog sabijanja

$$S_4 - S_3 = \frac{m}{M} R \ln \frac{V_4}{V_3} = -\frac{m}{M} R \ln \frac{V_3}{V_4}$$

$$S_4 - S_3 = -\frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1}, \qquad \text{jer je} \qquad \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1}.$$

Nakon adijabatskog sabijanja $\mathrm{d}Q = 0$, pa je promjena entropije $(S_1 - S_4)$ nula. Ukupna promjena entropije

$$\Delta S = \frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$\Delta S = 0.$$

13.17. Carnotov kružni proces odvija se između 300 K i 700 K. U sustavu je zrak mase 1 kg. U početku izotermne ekspanzije tlak je 40 bar, a najniži je tlak tijekom procesa 1 bar.

a) Koliki su tlak, volumen i temperatura u sve četiri karakteristične točke procesa? Potrebno je nacrtati p,V-dijagram.

b) Kolika je dovedena i odvedena toplina i koliki je dobiveni rad?

c) Koliki je termički stupanj iskorištenja?

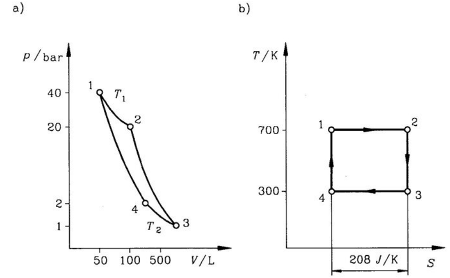
c) Kolika je promjena entropije u svakom dijelu procesa? Nacrtajte T,S-dijagram.

e) Koliko će se promijeniti unutrašnja energija radnog fluida (zraka) tijekom kružnog procesa?

Rješenje

a) Početni je tlak $p_1 = 40$ bar, temperatura $T_1 = 700$ K. Volumen V_1 može se odrediti iz plinske jednadžbe

$$V_1 = \frac{m}{M p_1} R T_1 = 0{,}05\,\mathrm{m}^3.$$



Slika 13.10.

Nakon izotermne ekspanzije do točke 2 i adijabatske ekspanzije do točke 3 tlak se smanjuje na p_3 = 1 bar. Volumen plina u točki 3 jest

$$V_3 = \frac{m}{M p_3} R T_2 = 0{,}861\,\mathrm{m}^3.$$

Tlak i temperatura u točkama 2 i 3 povezani su jednadžbom adijabate, pa je

$$p_2 = p_3 \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = 19{,}4 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa} = 19{,}4\ \mathrm{bar},$$

gdje je za adijabatski koeficijent zraka (dvoatomni plinovi) uvršteno κ = 1,4.

Slično se određuju i ostale tražene veličine, pa se dobiva:

$$p_4 = p_1 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = 2{,}06\ \mathrm{bar}$$

$$V_2 = \frac{p_1 V_1}{p_2} = 0{,}103\ \mathrm{m}^3$$

$$V_4 = \frac{p_3 V_3}{p_4} = 0{,}42\ \mathrm{m}^3.$$

Na sl. 13.10.a prikazan je p,V-dijagram.

b) Dovedena je toplina

$$Q_1 = \frac{m}{M} R T_1 \ln \frac{p_1}{p_2} = \frac{m}{M} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = 145{,}4\ \mathrm{kJ}.$$

Odvedena je toplina

$$Q_2 = \frac{m}{M} R T_2 \ln \frac{p_3}{p_4} = \frac{m}{M} R T_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -62{,}3\,\text{kJ}.$$

Dobiveni je rad

$$W = Q_1 + Q_2 = 83\ \text{kJ}$$

i jednak je površini lika u p,V-dijagramu (sl. 13.10.a)

c) Koeficijent iskorištenja je

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = 0{,}57, \quad \text{odnosno} \quad \eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 0{,}57.$$

d) Promjena entropije je

$$S_2 - S_1 = \frac{Q_1}{T_1} = 0{,}208\,\text{kJ K}^{-1}, \quad S_3 - S_2 = 0$$

$$S_4 - S_3 = -0{,}208\,\text{kJ K}^{-1}, \quad S_1 - S_4 = 0.$$

Ukupna promjena entropije jest $\Delta S = 0$. (S je funkcija stanja.) T,S-dijagram prikazan je na slici 13.10.b. Površina unutar pravokutnika jednaka je iskorištenoj toplini, odnosno izvršenom radu.

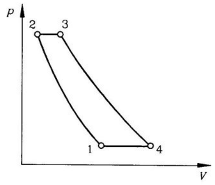
e) Promjena unutrašnje energije za vrijeme ekspanzije (plin se hladi) jest

$$\Delta U = \frac{m}{M} C_V \Delta T.$$

Uvrštavajući za $m = 1$ kg, $M = 28{,}96$ g/mol, $C_V = \frac{R}{\kappa - 1}$ i $\Delta T = -400$ K, dobiva se za promjenu unutrašnje energije $\Delta U = -287$ kJ.

Za vrijeme kompresije plin se grije, promjena je unutrašnje energije $\Delta U = 287$ kJ, pa je ukupna promjena unutrašnje energije $\Delta U = 0$. (U je funkcija stanja.)

13.18. Jouleov se kružni proces sastoji od dviju izobara i dviju adijabata (sl. 13.11). Koliki je koeficijent iskorištenja ako je omjer tlakova $p_2/p_1 = 10$, a adijabatski koeficijent $\kappa = 1{,}4$?



Slika 13.11.

Rješenje

Dovedena je toplina

$$Q_{23} = n\, C_p\, (T_3 - T_2).$$

Odvedena je toplina

$$Q_{41} = n\, C_p\, (T_1 - T_4).$$

Koeficijent iskorištenja jest

$$\eta = \frac{W}{Q_{23}} = \frac{Q_{23} + Q_{41}}{Q_{23}} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}.$$

Uzevši u obzir Poissonove jednadžbe za adijabatski proces, može se pisati

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} = \beta^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}$$

$$\frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{p_3}{p_4}\right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} = \beta^{\frac{1-\kappa}{\kappa}},$$

gdje je

$$\beta = \frac{p_2}{p_1} = \frac{p_3}{p_4}.$$

Budući da je

$$\frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = \frac{\left(\frac{T_4}{T_3}\right)T_3 - \left(\frac{T_1}{T_2}\right)T_2}{T_3 - T_2} = \beta^{\frac{1-\kappa}{\kappa}},$$

bit će

$$\eta = 1 - \beta^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} = 0{,}48.$$

13.19. Pri Dieselovu procesu, koji se sastoji od adijabatske kompresije, izobarnog zagrijavanja, adijabatske ekspanzije i izovolumnog hlađenja, izgaranje goriva zbiva se u vrućem zraku pri stalnom tlaku. Neka je početni tlak 1 bar, a početna temperatura 300 K. Količina zraka 1 mol najprije se adijabatski komprimira na $V_1/15$, a zatim se izobarno zagrijava tako da mu volumen poraste do $V_1/10$ (Za zrak: c_V = 0,72 kJ/(kg K), c_p = = 1,01 kJ/(kg K.))

a) Koliki su tlak, volumen i temperatura u karakterističnim točkama procesa? Nacrtajte p, V-dijagram.

b) Kolike su dovedena i odvedena toplina i koliki je koristan rad?

c) Koliki je koeficijent iskorištenja?

d) Kolika je promjena entropije? Nacrtajte T,S-dijagram.

Rješenje

a) Početni su tlak i temperatura p_1 = 1 bar, T_1 = 300 K. Početni volumen zraka jest

$$V_1 = \frac{n\,R\,T_1}{p_1} = 24{,}9\ \mathrm{L}.$$

Nakon adijabatske kompresije (κ = 1,4) volumen je $V_2 = \frac{V_1}{15} = 1{,}66$ L, a tlak i temperatura su

$$p_2 = p_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa} = 44\ \mathrm{bar}$$

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1} = 886\ \mathrm{K}.$$

Izobarnim zagrijavanjem povećava se volumen od V_2 = 1,66 L na $V_3 = V_1/10$ = 2,49 L (δ = 1,5), pa će i temperatura porasti 1,5 puta

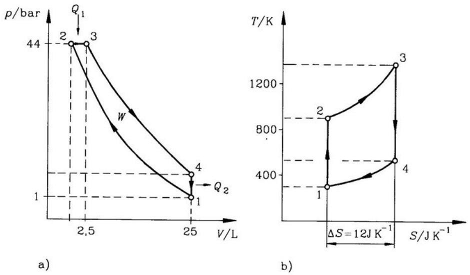
$$T_3 = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)T_2 = 1329\ \mathrm{K}.$$

Adijabatskom ekspanzijom do početnog volumena tlak se smanjuje na

$$p_4 = p_3\left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\kappa} = 1{,}75\ \mathrm{bar}.$$

a temperatura na

$$T_4 = \frac{p_4\,V_4}{n\,R} = 524\ \mathrm{K}.$$



Slika 13.12.

p,V-dijagram prikazan je na slici 13.12.a.

b) Količina dovedene topline pri izobarnom zagrijavanju

$$Q_1 = n\,C_p\,(T_3 - T_2) = n\,M\,c_p\,(T_3 - T_2) = 12{,}9\ \text{kJ}.$$

Odvedena je toplina

$$Q_2 = n\,M\,c_V\,(T_1 - T_4) = -4{,}7\ \text{kJ}.$$

Koristan je rad

$$W = W_{23} + W_{34} + W_{12} = p_2(V_3 - V_2) + \frac{nR}{\kappa - 1}(T_3 - T_4) + \frac{nR}{\kappa - 1}(T_1 - T_2) = 8{,}2\ \text{kJ}$$

ili

$$W = Q_1 + Q_2 = 8{,}2\ \text{kJ}.$$

c) Koeficijent iskorištenja jest

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = 0{,}64.$$

d) Promjena entropije jest

$$S_2 - S_1 = 0$$

$$S_3 - S_2 = m\,c_p \ln\frac{T_3}{T_2} = 0{,}0289\,\text{kg} \cdot 1010\ \text{J}\,\text{kg}^{-1}\,\text{K}^{-1} \ln\frac{1329}{886} = 11{,}8\ \text{J/K}$$

$$S_4 - S_3 = 0$$

$$S_1 - S_4 = m\,c_V \ln\frac{T_1}{T_4} = -11{,}8\ \text{J/K}.$$

Ukupna je promjena entropije $\Delta S = 0$. T,S-dijagram prikazan je na slici 13.12.b.

13.20. Pokažite da je koeficijent iskorištenja Dieselova procesa η, koji se sastoji od adijabatske kompresije, izobarnog zagrijavanja, adijabatske ekspanzije i izovolumnog hlađenja (sl. 13.12.):

$$\eta = 1 - \frac{1}{\kappa}\frac{1}{\varepsilon^{\kappa-1}}\frac{\delta^{\kappa}-1}{\kappa(\delta-1)},$$

gdje je κ adijabatski koeficijent, $\varepsilon = \frac{V_1}{V_2}$ omjer adijabatske kompresije, a $\delta = \frac{V_3}{V_2}$ omjer izobarne ekspanzije.

Koliki je η ako je κ = 1,4, ε = 15 i δ = 1,5?

Rješenje

Koeficijent iskorištenja jest

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \frac{n C_p(T_3 - T_2) + n C_V(T_1 - T_4)}{n C_p(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{\kappa(T_3 - T_2)}.$$

Budući da je $V_1 = V_4$, $\frac{V_3}{V_2} = \frac{T_3}{T_2} = \delta$, $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1} = \varepsilon^{\kappa-1}$, iz $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1}$ i $\frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{\kappa-1}$ dobivamo $\frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_2}\cdot\left(\frac{V_3 V_1}{V_2 V_4}\right)^{\kappa-1} = \left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\kappa}$.

Nadalje je

$$\left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\kappa} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\kappa} = \delta^{\kappa},$$

$$\eta = 1 - \frac{T_1(\delta^{\kappa}-1)}{\kappa T_2(\delta-1)} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\kappa-1}}\frac{\delta^{\kappa}-1}{\kappa(\delta-1)}.$$

Za ε = 15, δ = 1,5 i κ = 1,4 koeficijent iskorištenja iznosi η = 0,63, dakle, razultat je isti kao i u prethodnom zadatku.

13.21. Motori s unutrašnjim izgaranjem rade tako da se toplina dovodi radnom fluidu u samom ekspanzijskom prostoru. Benzinski se motor koristi Ottovim ciklusom od dvije adijabate i dvije izohore. Neka je početni tlak p_1 = 1 bar i početna temperatura T_1 = 300 K. Količina zraka n = 1 mol adijabatski se komprimira na 1/5 početnog volumena, a zatim se izovolumno zagrije (izgaranjem zapaljive smjese) toplinom Q_1 = = 12 kJ. Nakon toga plin se adijabatskom ekspanzijom i izovolumnim hlađenjem vraća u početno stanje.

a) Koliki su tlak, volumen i temperatura u karakterističnim točkama toga kružnog procesa? Nacrtajte p,V-dijagram.

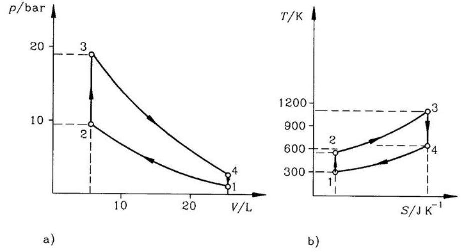
b) Koliki su odvedena toplina i dobiveni rad?

c) Koliki je stupanj djelovanja?

d) Koliki bi bio stupanj djelovanja Carnotova kružnog procesa izvedenog između temperatura T_1 i T_3?

e) Kolika je promjena entropije? Nacrtajte T,S-dijagram.

(Potrebno je računati sa specifičnim toplinskim kapacitetima c_V = 0,72 kJ/(kg K) i c_p = 1,01 kJ/(kg K) i molnom masom zraka M = 28,9 g/mol).



Slika 13.13.

Rješenje

a) Početni je volumen

$$V_1 = \frac{n R T_1}{p_1} = 24{,}9\,\mathrm{L}.$$

Nakon adijabatske kompresije $\left(\kappa = \frac{c_p}{c_V} = 1{,}4\right)$ volumen je $V_2 = \frac{V_1}{5} = 4{,}98\,\mathrm{L}$, a tlak i temperatura su

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa} = 9{,}52\,\mathrm{bar} \qquad T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa - 1} = 571\,\mathrm{K}.$$

Izovolumnim zagrijavanjem povećava se temperatura na T_3, a tlak na p_3

$$T_3 - T_2 = \frac{Q_1}{n M c_V} = 577\,\mathrm{K}, \qquad T_3 = 1148\,\mathrm{K}$$

$$p_3 = p_2 \frac{T_3}{T_2} = 19{,}1\,\mathrm{bar}.$$

Adijabatskom ekspanzijom do početnog volumena $V_4 = V_1 = 24{,}9$ L tlak se smanjuje na

$$p_4 = p_3 \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\kappa} = 2\,\mathrm{bar},$$

a temperatura na

$$T_4 = T_3 \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\kappa - 1} = 603\,\mathrm{K}.$$

Na slici 13.13.a prikazan je p,V-dijagram ovog procesa.

b) Toplina odvedena pri izovolumnom hlađenju jest

$$Q_2 = \Delta U = n M c_V (T_1 - T_4) = -6{,}3\ \mathrm{kJ}.$$

Dobiveni je rad

$$W = Q_1 + Q_2 = 5{,}7 \text{ kJ}.$$

c) Koeficijent iskorištenja jest

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = 0{,}48.$$

d) Za Carnotov proces između temparatura $T_3 = 1\,148$ K i $T_1 = 300$ K stupanj djelovanja bio bi

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_3} = 0{,}74.$$

(Carnotov proces ima najveću korisnost od svih mogućih procesa.)

e) Promjena je entropije

$$S_2 - S_1 = 0$$

$$S_3 - S_2 = n\,M\,c_V \ln\frac{T_3}{T_2} = 14{,}5 \text{ J/K}$$

$$S_4 - S_3 = 0$$

$$S_1 - S_4 = n\,M\,c_V \ln\frac{T_1}{T_4} = -14{,}5 \text{ J/K}.$$

Ukupna je promjena entropije nula (reverzibilni kružni proces). T,S-dijagram prikazan je na slici 13.13.b.

13.22. Potrebno je pokazati da je stupanj djelovanja benzinskog motora (Ottov ciklus, sl. 13.13)

$$\eta = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\kappa-1}},$$

gdje je ε omjer kompresije motora, a κ adijabatski koeficijent radnog fluida. Koliki je η za $\varepsilon = 5$ i $\kappa = 1{,}4$?

Rješenje

Stupanj djelovanja jest

$$\eta = \frac{W}{Q_1},$$

gdje je W koristan rad, a Q_1 dovedena toplina. Rad pri Ottovu procesu jednak je razlici rada dobivenog adijabatskom ekspanzijom od 3 do 4 (sl. 13.13) i rada utrošenog pri kompresiji od 1 do 2. Valja uočiti da je rad W jednak razlici između dovedene i odvedene topline

$$W = Q_1 + Q_2 = |Q_1| - |Q_2|.$$

Dakle,

$$W_{34} = \frac{nR}{\kappa - 1}(T_3 - T_4), \qquad W_{12} = \frac{nR}{\kappa - 1}(T_1 - T_2)$$

$$W = \frac{nR}{\kappa - 1}(T_3 - T_4 + T_1 - T_2)$$

$$Q_1 = nC_V(T_3 - T_2) = \frac{nR}{\kappa - 1}(T_3 - T_2)$$

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{T_3 - T_2 + T_1 - T_4}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}.$$

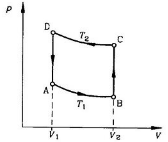
Budući da je $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1}$ i $\frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\kappa-1}$, te $V_2 = V_3$ i $V_1 = V_4$, bit će $\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1}$.

Uzimajući to u obzir, dobiva se

$$\eta = 1 - \frac{T_4}{T_3} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\kappa-1}}.$$

Za $\varepsilon = 5$, $\kappa = 1{,}4$ dobiva se $\eta = 0{,}48$, dakako isti rezultat kao i u prethodnom zadatku.

13.23. Termodinamički dijagram za Stirlingov ciklus prikazan je na slici 13.14. Sastoji se od dviju izotermi **AB**, **CD** i dviju izohora **CD**, **DA**. Nađite stupanj djelovanja za Stirlingov ciklus uz ove uvjete: da unutrašnja energija plina ovisi samo o temperaturi $U = U(T)$ i da umnožak pV ovisi samo o temperaturi, $pV = f(T)$.



Slika 13.14.

Rješenje

Topline izmijenjene u dijelu CB i DA ciklusa jednake su po iznosu, pa se međusobno poništavaju:

$$Q_{AB} = \int_A^B p\,dV = f(T_1)\ln\frac{V_A}{V_B}$$

$$Q_{CD} = f(T_2)\ln\frac{V_A}{V_B} < 0$$

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{AB}|}{|Q_{CD}|} = 1 - \frac{f(T_1)}{f(T_2)} = 1 - \frac{p_A}{p_D}.$$

13.24. Za održavanje temperature − 20 °C u unutrašnjosti hladnjaka, pri temperaturi prostorije + 17 °C, potrebna je snaga 100 W. Koliki je faktor djelovanja (rashladni broj) hladnjaka? Koliki je toplinski tok koji rashladna tekućina oduzima iz unutrašnjosti hladnjaka? Koliko bi se smanjila potrošnja (električne) energije kada bi se u unutrašnjosti hladnjaka održavala temperatura − 18 °C uz pretpostavku da je toplinski tok nepromijenjen?

Rješenje

Uz pretpostavku inverznog Carnotova procesa faktor djelovanja (hlađenja) hladnjaka jest

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{|W|} = \frac{T_2}{T_1 - T_2},$$

gdje je Q_2 toplina odvedena iz unutrašnjosti hladnjaka, a W uloženi rad (npr. električna energija), T_1 temperatura okoline (290 K) i T_2 temperatura hladnjaka (253 K). Dakle,

$$\varepsilon = \frac{T_2}{T_1 - T_2} = 6{,}8.$$

Toplinski tok koji iz okoline ulazi u hladnjak jest

$$\Phi = \varepsilon\, P = 680\ \text{W}.$$

Uloženi je rad

$$|W| = \frac{Q_2}{\varepsilon} = Q_2\left(\frac{T_1}{T_2} - 1\right).$$

Ako se T_2 promijeni za ΔT_2, rad će se promijeniti za

$$\Delta W = \frac{dW}{dT_2}\Delta T_2 = Q_2 \frac{T_1}{T_2^2}\Delta T_2,$$

odnosno

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}\frac{\Delta T_2}{T_2} = 0{,}06.$$

Potrošnja električne energije smanjit će se za 6%.

13.25. Toplinska crpka podiže toplinu iz hladnijeg spremnika (npr. tla ili okolne atmosfere) temperature T_2 u topliji spremnik (npr. u prostoriju koju je potrebno zagrijavati) temperature T_1 i zapravo radi kao hladnjak samo s drukčijom namjenom. Koliki je maksimalni stupanj djelovanja toplinske crpke ako je $T_1 = 20$ °C, a $T_2 = -10$ °C?

Rješenje

Stupanj djelovanja toplinske crpke definira se kao omjer topline Q_1 dovedene u topliji spremnik i obavljenog rada W. Ako se pretpostavi da takva idealna toplinska crpka koristi inverzni Carnotov proces, tada je

$$\varepsilon = \frac{|Q_1|}{|W|} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} = 9{,}8.$$

To je teorijski maksimalni ε. Svi ostali kružni procesi dali bi stupanj djelovanja manji od Carnotova. U ovom bi slučaju dovedena toplina iz okolice bila oko 10 puta veća od uloženog rada (npr. električne energije), pa bi takva toplinska crpka, trošeći npr. 1 kWh električne energije, proizvela 9,8 kWh toplinske, uzimajući 8,8 kWh iz okolice (bazena s vodom, bunara, tla, atmosfere i iz sličnog izvora).

13.26. Voda mase 1 kg pri tlaku 5 bar zagrijava se izobarno od temperature vrelišta 152 °C do temperature 403 °C. U tablicama za vodenu paru mogu se naći ovi podaci za zasićeno stanje vode: t = 152 °C, p = 5 bar, specifični volumen zasićene tekućine 1,093 L/kg, specifični volumen zasićene pare 375 L/kg, specifični volumen pare pri 403 °C je 624 L/kg, entalpija zasićene tekućine pri 152 °C jest 640 kJ/kg, entalpija zasićene pare pri 152 °C iznosi 2 749 kJ/kg.

a) Nacrtajte promjenu stanja vode u p,V i T,S-dijagramu.

b) Izračunajte dovedenu količinu topline i izvršeni rad.

c) Kolika je promjena unutrašnje energije u tom procesu?

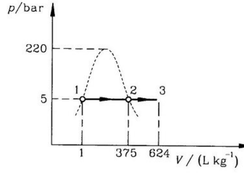
(Pretpostavlja se da je molarni toplinski kapacitet vodene pare C_p = 8 R/2.)

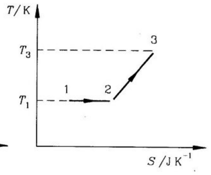
Rješenje

a) Vidi sliku 13.15.a i b.

b) Dovedena je toplina

$$Q_{13} = L_1 + Q_{23} = L_1 + m\,c_p(T_3 - T_2) = H_2 - H_1 + m\frac{C_p}{M}(T_3 - T_2) = 2{,}573\ \text{MJ kg}^{-1}.$$





Slika 13.15.

Izvršeni je rad

$$W = \int_1^3 p\,\mathrm{d}V = p_1(V_3 - V_1) = \frac{m R T_3}{M} - p_1 V_1 = 311{,}7\,\mathrm{kJ}.$$

c) Promjena unutrašnje energije pri isparavanju vode jest

$$\Delta U_{12} = \Delta H_{12} - p_1 \Delta V_{12} = \Delta H_{12} - p_1(V_2 - V_1) = 2{,}11\ \mathrm{MJ} - 0{,}187\ \mathrm{MJ}$$

$$\Delta U_{12} = 1{,}92\ \mathrm{MJ}.$$

Promjena unutrašnje energije pri zagrijavanju vodene pare iznosi

$$\Delta U_{23} = \Delta H_{23} - p_1(V_3 - V_2) = Q_{23} - p_1(V_3 - V_2) = 463{,}7\,\mathrm{kJ} - 124{,}5\,\mathrm{kJ}$$

$$\Delta U_{23} = 339\,\mathrm{kJ}.$$

Ukupna je promjena unutrašnje energije u tom procesu

$$\Delta U = \Delta U_{12} + \Delta U_{23} = 2{,}26\ \mathrm{MJ/kg}.$$

Zadaci

13.1. Pokažite da su molarni toplinski kapaciteti pri stalnom tlaku i stalnom volumenu za idealan plin povezani Mayerovom relacijom $C_p - C_V = R$ i izraziti C_p i C_V uz pomoć plinske konstante i adijabatskog koeficijenta. Izračunajte ih za $\kappa = 1{,}4$.

Rezultat: $C_V = 20{,}8\ \mathrm{J\,(mol\,K)^{-1}}$, $C_p = 29{,}1\ \mathrm{J\,K^{-1}}$

13.2. U izoliranim posudama volumena V_1 i V_2 zatvoren je idealni plin na istome tlaku p. U svakoj posudi nalazi se 1 kmol plina, a temperatura je plina T_1 u prvoj i T_2 u drugoj posudi. Spajanjem posuda uspostavlja se ravnotežno stanje. Izračunajte promjenu entropije sustava nakon postignutog ravnotežnog stanja ako je $T_1 = 20$ °C i $T_2 = 35$ °C. (Idealni je plin jednoatomnog sastava.)

Rezultat: $\Delta S = 12{,}95\ \mathrm{J\,K^{-1}}$

13.3. Kolika je promjena entropije ako se pomiješa $m_1 = 10$ g vode temperature $t_1 = 100$ °C i $m_2 = 20$ g vode temperature $t_2 = 15$ °C?

Rezultat: $\Delta S = 0{,}95\ \mathrm{J\,K^{-1}}$

13.4. Potrebno je prikazati Carnotov reverzibilni ciklus u sustavu termodinamičkih koordinata temperature T i entropije S sustava i pokazati da koeficijent iskorištenja ciklusa ovisi o ekstremnim temperaturama ciklusa T_1 i T_2 i da iznosi $\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1}$.

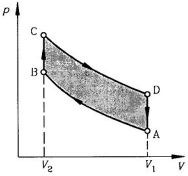
13.5. Nuklearna elektrana snage 600 MW koristi se riječnom vodom kao hladnijim spremnikom u koji odvodi toplinu. Koliki je maksimalni mogući koeficijent iskorištenja i minimalna moguća odvedena toplina ako je temperatura toplijeg spremnika (reaktora) 300 °C, a temperatura vode 20 °C?

Rezultat: η = 0,49; Q' = 625 MW

13.6. Termodinamički procesi, izgaranjem benzina u motoru s unutrašnjim izgaranjem, prikazani su dijagramom za idealni reverzibilni ciklus (sl. 13.16). Segment A – B odnosi se na adijabatsku kompresiju izgarajuće smjese, a B – C na izohorno izgaranje pri čemu radni plin prima količinu topline Q. Segment C – D odgovara adijabatskom širenju radnog plina, a D – A odgovara izohornom ispustu stvorenih plinova.

a) Potrebno je odrediti koeficijent iskorištenja ciklusa η, izrazivši ga koeficijentom kompresijskog omjera plina $\varepsilon = \frac{V_1}{V_2}$.

b) Izračunajte koeficijent iskorištenja motora koji bi radio po ovom ciklusu, za $\varepsilon = 6$ i uzevši da je $\kappa = 1{,}38$ za smjesu zraka i benzina.



Slika 13.16.

Rezultat: a) $\eta = 1 - \varepsilon^{1-\kappa}$; b) η = 49,4%

13.7. Termički izolirana posuda u obliku cilindra podijeljena je laganim pomičnim klipom na dva dijela – A i B. U svakom se dijelu nalazi jedan mol idealnoga jednoatomnog plina. U početnom trenutku temperatura plina u dijelu A jednaka je $T_A = T$, a u dijelu B, $T_B = n\,T$. Koliki bi koristan rad mogao izvršiti taj sustav uz uvjet da je prijelaz topline s jednog sustava na drugi potpuno reverzibilan?

Rezultat: $W = \frac{3}{2} R\,T\left(1 + n - \frac{2\sqrt[3]{4}\,n^{5/6}}{(1+n)^{2/3}}\right)$

14. Kinetičko-molekularna teorija topline

Uvod

Tlak plina na stijenke posude objašnjava se u kinetičkoj teoriji elastičnim sudarima molekula i stijenke posude, pa iznosi

$$p = \frac{1}{3}\frac{N}{V} m_m \overline{v^2} = \frac{1}{3}\rho v_{ef}^2, \tag{1}$$

gdje je N broj molekula u volumenu V, m_m masa molekule, $\overline{v^2}$ srednja vrijednost kvadrata brzine i ρ gustoća plina.

Srednja kvadratična (efektivna) brzina molekula plina jest

$$v_{ef} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3pV}{m_m}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}, \tag{2}$$

gdje je m masa plina, M molna masa, k Boltzmannova konstanta, R plinska konstanta i T apsolutna temperatura.

Jednadžba stanja idealnog plina u mikroskopskom obliku glasi

$$pV = NkT, \tag{3}$$

što se dobiva i kombinacijom relacija (1) i (2).

Srednja kinetička energija translacijskog gibanja molekula idealnog plina proporcionalna je s apsolutnom temperaturom

$$\overline{E_k} = \frac{m_m \overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2}kT. \tag{4}$$

Unutrašnja energija idealnog plina (zbroj kinetičkih energija molekula) jednaka je

$$U = \frac{i}{2}NkT = \frac{i}{2}nRT, \tag{5}$$

gdje je i broj stupnjeva slobode gibanja molekula. Za jednoatomne plinove $i = 3$, za dvoatomne, ovisno o temperaturi, može biti 5 ili 7, a za višeatomne 6 ili 8.

Maxwellova raspodjela molekula po brzinama jest

$$N_v = \frac{dN}{dv} = \frac{4N}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m_m}{2kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{m_m v^2}{2kT}}, \tag{6}$$

gdje je m_m masa molekule, v njezina brzina, N_v broj molekula koje se gibaju brzinama između v i $v + dv$, N ukupan broj molekula, T apsolutna temperatura i $k = 1{,}38 \cdot 10^{23}$ J/K Boltzmannova konstanta.

Najvjerojatnija je brzina v_m ona za koju raspodjela ima maksimum

$$v_m = \sqrt{\frac{2kT}{m_m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}. \tag{7}$$

Srednja je brzina dana relacijom

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \tag{8}$$

Maxwell-Boltzmannova energetska raspodjela za translacijsko gibanje molekula idealnog plina glasi

$$N_E = \frac{dN}{dE} = \frac{2N}{\sqrt{\pi k^3 T^3}}\sqrt{E}\, e^{-\frac{E}{kT}}. \tag{9}$$

Maksimum je raspodjele na energiji $E_m = \frac{kT}{2}$, a srednja je energija $\bar{E} = \frac{3kT}{2}$.

Molarni toplinski kapaciteti prema kinetičkoj teoriji plinova iznose:

$$C_v = \frac{i}{2}R, \qquad C_p = \frac{i+2}{2}R, \qquad \kappa = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i}, \tag{10}$$

gdje je i broj stupnjeva slobode gibanja molekula plina.

Van der Waalsova jednadžba za realne plinove glasi

$$\left(p + n^2\frac{a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT, \tag{11}$$

gdje su a i b konstante karakteristične za određeni plin i mogu se odrediti iz kritičnih konstanti plina:

$$a = \frac{27}{64}\frac{R^2 T_c^2}{p_c}, \qquad b = \frac{RT_c}{8p_c}. \tag{12}$$

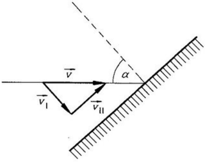
Frekvencija sudara molekule u plinu prema kinetičkoj teoriji iznosi

$$z = \frac{4\pi}{3} n d^2 v, \tag{13}$$

gdje je n koncentracija molekula i d promjer molekule.

Primjeri

14.1. Odredite tlak čestica mase $m = 4 \cdot 10^{-26}$ kg koje se brzinom $v = 100$ m/s elastično sudaraju sa stijenkom. Kut između brzine čestica i okomice na površinu $\alpha = 45\,°$. Koncentracija čestica $n = 3 \cdot 10^{25}\ \mathrm{m^{-3}}$.



Slika 14.1.

Rješenje

Broj čestica koje u vremenu Δt udare u stijenku jest

$$N = n\, v\, S\, \Delta t \cos\alpha .$$

Sudarom se mijenja samo normalna komponenta brzine v, pa je sila po čestici

$$F' = \frac{\Delta(m\, v_\perp)}{\Delta t} = \frac{2\, m\, v \cos\alpha}{\Delta t}.$$

Ukupna je sila

$$F = N\, F' = 2\, n\, S\, m\, v^2 \cos^2\alpha,$$

a tlak

$$p = 2\, n\, m\, v^2 \cos^2\alpha$$

$$p = 1{,}2 \cdot 10^4\ \mathrm{N\, m^{-2}}.$$

14.2. U zatvorenoj posudi izmjenjuju se molekule s okolicom kroz mali otvor. Tlak plina izvan posude iznosi 1 Pa. Plin je tako razrijeđen da se molekule pri ulazu i izlazu iz posude međusobno ne sudaraju. Temperatura u posudi je $4\,T$, gdje je T temperatura plina izvan posude. Koliki je tlak plina u posudi?

Rješenje

Tlak plina u posudi dan je izrazom

$$p_1 = n_1 k\, T_1 = 4\, n_1 k\, T,$$

gdje je n_1 – broj molekula po jediničnom volumenu u posudi.
Tlak izvan posude jest

$$p = n_2 k\, T,$$

gdje je n_2 – broj molekula po jediničnom volumenu izvan posude. Dakle

$$p_1 = 4\, p\, n_1 / n_2 .$$

U ravnoteži je broj molekula koje ulaze u posudu jednak broju molekula koje izlaze iz posude:

$$1/2\, n_1 S\, |\bar{v}_{1x}| = 1/2\, n_2 S\, |\bar{v}_{2x}|$$

$$\frac{n_1}{n_2} = |\bar{v}_{2x}| / |\bar{v}_{1x}| = \sqrt{\frac{T}{4T}} \qquad p_1 = 2\, p = 2\ \mathrm{Pa}.$$

14.3. Izračunajte koncentraciju molekula (broj molekula u jedinici volumena) kisika pri normiranom tlaku ako je najvjerojatnija brzina molekula 395 m/s.

Rješenje

Najvjerojatnija je brzina molekula

$$v_m = \sqrt{\frac{2\, R\, T}{M}}.$$

Iz plinske jednadžbe u mikroskopskom obliku $pV = NkT$ dobiva se koncentracija molekula

$$\frac{N}{V} = \frac{p N_A}{RT},$$

gdje je $N_A = \frac{R}{k}$ Avogadrova konstanta. Eliminiranjem temperature iz tih dviju jednadžbi dobiva se

$$\frac{N}{V} = \frac{2 p N_A}{M v_m^2}.$$

Uvrsti li se za $p = 1{,}03 \cdot 10^5$ Pa, $N_A = 6{,}023 \cdot 10^{23}$, $M = 0{,}032$ kg/mol, $R = 8{,}314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}$ i $v_m = 395$ m/s, koncentracija molekula uz te uvjete jednaka je $2{,}5 \cdot 10^{25}\ \text{m}^{-3}$.

14.4. Izračunajte omjer broja molekula nekog plina koje imaju najvjerojatniju brzinu i broja molekula koje imaju srednju kvadratičnu brzinu pri istoj temperaturi.

Rješenje

Najvjerojatnija je brzina $v_m = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$, a srednja je kvadratična brzina $v_{ef} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$. Traženi se omjer dobiva iz Maxwellove raspodjele molekula po brzinama:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{v_m^2}{v_{ef}^2} \frac{e^{-v_m^2/v_m^2}}{e^{-v_{ef}^2/v_m^2}}.$$

Budući da je $v_{ef}^2 / v_m^2 = 3/2 = 1{,}5$, bit će

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{2}{3} \frac{e^{-1}}{e^{-1{,}5}} = 1{,}1.$$

14.5. Izračunajte najvjerojatniju brzinu v_m molekula kisika na temperaturi 300 K. Koliki dio molekula ima brzinu u intervalu od $v_m - 1$ m/s do $v_m + 1$ m/s?

Rješenje

Maxwellova raspodjela molekula po brzinama dana je izrazom

$$N_v = \frac{dN}{dv} = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}. \tag{1}$$

Najvjerojatnija je brzina ona za koju raspodjela ima maksimum. Ako se derivacija funkcije (1) izjednači s nulom, dobiva se

$$v_m = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = 395\ \text{m s}^{-1}.$$

Raspodjela (1) može se pisati i ovako

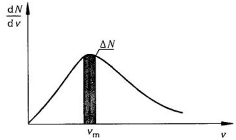
$$dN = \frac{4N}{\sqrt{\pi}\, v_m^3} v^2 e^{-v^2/v_m^2} dv.$$

Uvrštavajući

$$\Delta v = 2\ \text{m s}^{-1}, \qquad v = v_m = 395\ \text{m s}^{-1},$$

dobiva se

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4 \Delta v}{\sqrt{\pi}\, e\, v_m} = 0{,}42\%.$$



Slika 14.2.

14.6. U posudi se nalazi 1 mol plina ^{4}He na temperaturi 300 K. Potrebno je izračunati srednju kvadratičnu brzinu molekula, prosječnu kinetičku energiju molekule i ukupnu kinetičku energiju molekula plina.

Rješenje

Srednja je kvadratična brzina

$$v_{ef} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 1368\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Srednja kinetička energija atoma helija (jednoatomni plin) jednaka je

$$E_k = \frac{3}{2}kT = 6{,}21 \cdot 10^{-21}\mathrm{J}; \qquad (= 0{,}04\,\mathrm{eV})$$

i ne ovisi o vrsti plina, već samo o temperaturi. Isti se rezultat dobiva i ovako:

$$\overline{E}_k = \frac{m v_{ef}^2}{2} = 6{,}21 \cdot 10^{-21}\mathrm{J}.$$

Unutrašnja je energija (ukupna kinetička energija molekula) jednoatomnog idealnog plina

$$U = \frac{3}{2}nRT = 3740\,\mathrm{J}.$$

Isti se rezultat dobiva i množenjem prosječne energije molekule s brojem molekula

$$U = \sum_i E_{ki} = N\overline{E}_k = nN_A\overline{E}_k = 3740\,\mathrm{J}.$$

14.7. Dušiku temperature $t_0 = 27$ °C pod tlakom $p_0 = 10^5$ Pa udvostručen je obujam.

a) izotermnim i

b) adijabatskim

procesom. Potrebno je odrediti srednju kvadratičnu brzinu molekula i promjenu koncentracije molekula u plinu za oba slučaja.

Rješenje

a) Kod izotermnog je procesa temperatura konstantna, pa se srednja kvadratična brzina molekula ne mijenja

$$\overline{v}_{ef} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 517\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Koncentracija molekula mijenja se sa n_0 na n_1:

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{\dfrac{p_1}{kT_0}}{\dfrac{p_0}{kT_0}} = \frac{p_1}{p_0}$$

$$p_0V_0 = p_1V_1, \qquad \text{pa je} \quad \frac{n_1}{n_0} = \frac{V_0}{V_1}$$

$$n_1 = \frac{1}{2}n_0 = \frac{1\,p_0}{2\,kT_0}$$

$$n_1 = 1{,}2 \cdot 10^{25}\,\mathrm{m^{-3}}$$

$$n_0 = 2{,}4 \cdot 10^{25}\,\mathrm{m^{-3}}.$$

b) Za vrijeme adijabatskog procesa mijenja se volumen sa V_0 na V_2, temperatura sa T_0 na T_2 i koncentracija sa n_0 na n_2:

$$T_0 V_0^{\kappa-1} = T_2 V_2^{\kappa-1}, \qquad \kappa = 1{,}4$$

$$T_2 = T_0 \left(\frac{V_0}{V_2}\right)^{\kappa-1} = 227{,}4\ \mathrm{K}$$

$$\overline{v}_{ef}' = \sqrt{\frac{3RT_2}{M}} = 450\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

$$p_0 V_0^{\kappa} = p_2 V_2^{\kappa} \qquad p_2 = p_0 \left(\frac{V_0}{V_2}\right)^{\kappa}$$

$$n_2 = \frac{p_2}{k\,T_2} = \frac{p_0}{k\,T_2}\left(\frac{V_0}{V_2}\right)^{\kappa}$$

$$n_2 = \frac{1}{2} n_0,$$

koncentracija ne ovisi o procesu kojim se mijenjao volumen.

14.8. Osnovnimi rezultatima molekularno-kinetičke teorije topline i teorije gravitacije valja dokazati da Mjesec ne može zadržavati vlastitu atmosferu. Računajte s temperaturnim maksimumom od ~ 370 K koji se javlja tijekom lunarnog dana.
Masa je Mjeseca $m_M = 7{,}33 \cdot 10^{22}$ kg, polumjer $R_M = 1{,}74 \cdot 10^6$ m.

Rješenje

Srednjom kvadratičnom brzinom, u sklopu Maxwellove raspodjele brzina, računaju se, na primjer, brzine tipičnih molekula vodika i kisika u očekivanoj atmosferi Mjeseca, za temperaturu 370 K (~ 100 °C):

$$\left[\overline{v^2}\right]_{H_2}^{1/2} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 2{,}148 \cdot 10^3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

$$\left[\overline{v^2}\right]_{O_2}^{1/2} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 5{,}37 \cdot 10^2\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Druga kozmička brzina, iz teorije gravitacije, pokazuje kojom se brzinom oslobađa gravitacijskog polja Mjeseca. Ona iznosi

$$v_2 = \sqrt{2G\frac{m_M}{R_M}} = 2{,}37\,\mathrm{km\,s^{-1}}.$$

Očito je da gravitacijsko polje Mjeseca ne može zadržati molekule vodika jer su $[\overline{v^2}]_{H_2}^{1/2}$ i v_2 gotovo jednake. Brzina molekula kisika oko 4,5 puta je manja od v_2, ali prema Maxwellovoj raspodjeli značajne frakcije molekula imaju brzine nekoliko puta veće od srednjih brzina u raspodjeli. Prema tome, Mjesec ne obavija oko svoje mase ni molekule kisika zbog slabog gravitacijskog polja, pa se one raspršuju u prostoru.

14.9. Razmak elektroda u izbojnoj cijevi ispunjenoj zrakom iznosi 280 mm. Potrebno je odrediti tlak u cijevi na kojem će Crookesov tamni prostor dodirnuti anodu, pretpostavljajući srednji promjer molekula zraka $d = 0{,}1$ nm.

(*Naputak:* Crookesov je tamni prostor područje u blizini katode ispunjeno pretežno pozitivnim ionima koji nastaju sudaranjem molekula zraka i elektrona izletjelih iz katode.)

Rješenje

Crookesov tamni prostor dodiruje anodu kad srednji slobodni put molekula plina postaje jednak razmaku elektroda. Traženi tlak, prema tome, odgovara srednjem slobodnom putu $\overline{L} = 280$ mm. Srednji slobodni put $\overline{L}$

$$\overline{L} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\pi d^2 n},$$

ovisi o srednjem promjeru molekula d i o njihovoj koncentraciji n. Odatle je koncentracija

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}\, \pi d^2 \overline{L}} = 8{,}039 \cdot 10^{19}\ \mathrm{m}^{-3}.$$

Iz jednadžbe stanja idealnog plina napisane u obliku

$$pV = NkT$$

uzevši u obzir da je koncentracija $n = N/V$, dobivamo

$$p_0 = n_0 k T_0$$

$$p = nkT,$$

odnosno

$$p = p_0 \frac{n}{n_0} \frac{T}{T_0},$$

gdje je $p_0 = 1\,013 \cdot 10^5$ Pa, $T_0 = 273$ K. Koncentracija molekula uz normirane uvjete (Loschmidtov broj) je $n_0 = n_L = 2{,}687 \cdot 10^{25}\ \mathrm{m}^{-3}$. Uz pretpostavku da je $T = T_0$, dobivamo

$$p = p_0 \frac{n}{n_0} = 0{,}303\ \mathrm{Pa}.$$

14.10. Izračunajte promjenu srednje vrijednosti kinetičke energije molekule plina argona ako se masi plina $m = 200$ g plina dovodi toplina $Q = 3\,500$ J kod konstantnog volumena.

Rješenje

Nema li promjene volumena, dovedena toplina prelazi u unutrašnju energiju:

$$Q = \Delta U$$

$$U = n N_A \overline{E},$$

$\overline{E}$ je srednja kinetička energija

$$n = \frac{m}{M}, \qquad \overline{E} = \frac{3}{2} kT$$

$$Q = \frac{m}{M} N_A \frac{3}{2} k \Delta T$$

$$\Delta T = \frac{2QM}{3kmN_A}.$$

Promjena srednje energije

$$\Delta \overline{E} = \frac{QM}{mN_A}$$

$$\Delta \overline{E} = 116 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J}.$$

14.11. U zatvorenoj se posudi nalazi vodik na 0 °C, pod tlakom $p = 10^5$ Pa. Potrebno je odrediti broj sudara u jednoj sekundi ako je promjer molekule $d = 2{,}38 \cdot 10^{-8}$ cm.

Rješenje

Broj sudara molekule u jednoj sekundi jest

$$z = \frac{4\pi n d^2}{3}\bar{v}.$$

Ukupan broj sudara tijekom jedne sekunde u kubičnom metru plina:

$$z_0 = \frac{n}{2}z = \frac{4\pi n^2 d^2}{6}\bar{v}$$

$$n = \frac{p}{kT} \qquad \bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

$$z_0 = \frac{4p^2 d^2}{3k^2 T^2}\sqrt{\frac{2\pi RT}{M}}$$

$$z_0 = 1{,}4 \cdot 10^{35}\,\mathrm{m^{-3}\,s^{-1}}.$$

14.12. Srednji slobodni put molekula kisika jest $9{,}2 \cdot 10^{-8}$ m na temperaturi 0 °C i uz tlak p_1. Izračunajte srednji broj sudara molekula kisika u sekundi ako se tlak u posudi umanji na 1% od početne (p_1) vrijednosti. Temperatura je konstantna.

Rješenje

Srednji je broj sudara molekula $\bar{z}$ određen srednjim slobodnim putem $\bar{L}$

$$\bar{z} = \frac{\bar{v}}{\bar{L}},$$

gdje je $\bar{v}$ srednja brzina prema Maxwellovoj raspodjeli molekularnih brzina u plinu

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}.$$

Činjenicom da je srednji slobodni put obrnuto proporcionalan tlaku plina

$$\bar{L}_2 : \bar{L}_1 = p_1 : p_2, \qquad \text{te} \qquad \bar{L}_2 = \bar{L}_1 \frac{p_1}{p_2},$$

slijedi srednji broj sudara

$$\bar{z} = \frac{\bar{v}}{\bar{L}_2} = \frac{\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}}{\bar{L}_1 \frac{p_1}{p_2}}.$$

Zamjenom $p_2 = 0{,}01\,p_1$ i iz molnu masu za kisik $M = 0{,}032$ kg/mol, dobiva se $\bar{z} = 4{,}62 \cdot 10^7\,\mathrm{s^{-1}}$.

14.13. Potrebno je odrediti srednju brzinu molekula plina argona ako je vrijeme između dvaju sudara $\tau = 9 \cdot 10^{-7}$ s, a koncentracija molekula $n = 3{,}4 \cdot 10^{12}\,\mathrm{cm^{-3}}$. Pri normalnim uvjetima srednji slobodni put molekula jest $l_0 = 6{,}66 \cdot 10^{-6}$ cm.

Rješenje

Srednji slobodni put

$$L = \bar{v}\,\tau$$

$$L = \frac{3}{4\pi\, n\, d^2}$$

$$L_0 = \frac{3}{4\pi\, n_0\, d^2}$$

$$L = L_0 \frac{n_0}{n}$$

$$n_0 = \frac{p_0}{k\, T_0}$$

$$L = \frac{l_0\, p_0}{n\, k\, T_0}$$

$$\bar{v} = \frac{L}{\tau} = \frac{l_0\, p_0}{n\, k\, T_0\, \tau}$$

$$\bar{v} = 5{,}85 \cdot 10^5 \text{ m/s}.$$

14.14. Množina 1 mol CO_2 ima volumen 2 L na temperaturi 315 K. Izračunajte tlak prema

a) jednadžbi za idealni plin i

b) Van der Waalsovoj jednadžbi ($a = 0{,}364$ N m^4/mol^2, $b = 0{,}428 \cdot 10^{-5}$ m^3/mol).

Rješenje

a) Iz $p\,V = n\,R\,T$ dobiva se

$$p = \frac{n\,R\,T}{V} = 13{,}1 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 = 13{,}1 \text{ bar}.$$

b) Prema Van der Waalsovoj jednadžbi tlak je

$$p = \frac{n\,R\,T}{V - n\,b} - n^2 \frac{a}{V^2} = 12{,}2 \text{ bar}.$$

U tim se uvjetima ($T = 315$ K, $V_m = 2$ L) CO_2 ponaša kao realni plin i za njega ne vrijedi plinska jednadžba za idealne plinove.

14.15. U tablicama termičkih osobina vodene pare nalazi se vrijednost za specifičan volumen $v = 26{,}3$ cm^3/g pri tlaku 100 bar i temperaturi 400 °C. Kolika bi se vrijednost dobila upotrebom:

a) plinske jednadžbe za idealni plin

b) Van der Waalsove jednadžbe?

Rješenje

a) Iz plinske jednadžbe $pV = \frac{m}{M} RT$ dobiva se

$$v = \frac{V}{m} = \frac{R\,T}{Mp} = 31 \text{cm}^3 \text{g}^{-1}.$$

Odstupanje je od mjerene vrijednosti veliko, vodena je para u tim uvjetima realni plin.

b) Iz Van der Waalsove jednadžbe

$$\left(p + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - n\,b) = n\,R\,T.$$

Zamjenom $n = m/M = \frac{1}{18}$ mol = 0,0556 mol, $p = 10^7$ N/m², $a = 0,55$ N m⁴/mol², $b = 3,1 \cdot 10^{-5}$ m³/mol, $T =$ = 673 K, dobiva se

$$v = \frac{V}{m} = 26,7\,\mathrm{cm^3\,g^{-1}}.$$

Odstupanje od mjerene vrijednosti u ovom slučaju nije veliko.

Zadaci

14.1. Uz pretpostavku da su molekule vode kuglice promjera $d = 2,7 \cdot 10^{-10}$ m, valja izračunati koliki dio ukupnog prostora zauzetog vodom otpada na same molekule?

Rezultat: $\frac{V_M}{V_v} = 34,5\%$

14.2. Molekula plina mase $m = 4,65 \cdot 10^{-26}$ kg leti brzinom $v = 450$ m/s, udara u stijenku posude pod kutom od 60° prema normali i elastično se odbija pod istim kutom bez gubitka brzine. Izračunajte impuls sile kojim stijenka »djeluje« na molekulu za vrijeme sudara.

Rezultat: $F\Delta t = 2,1 \cdot 10^{-23}$ N s

14.3. Pri kojoj je temperaturi srednja brzina gibanja molekula ugljik-dioksida jednaka srednjoj brzini gibanja molekula dušika na 0 °C?

Rezultat: $t_2 = 156$ °C

14.4. Jednoatomni se helij nalazi na temperaturi – 70 °C. Izračunajte srednju efektivnu brzinu $\sqrt{\overline{v^2}}$ i srednju brzinu $\overline{v}$ ako se radi o atomima ^{4}He. Koji je međusobni odnos tih brzina?

Rezultat: $v_{ef} = 1,125 \cdot 10^3$ m s^{-1}; $\overline{v} = 1,04 \cdot 10^3$ m/s; $\frac{v_{ef}}{\overline{v}} = 1,085$

14.5. Kuglica polumjera 10^{-5} m giba se u kisiku temperature 50 °C brzinom koja je jednaka 1/6 brzine molekula plina (na toj temperaturi). Ako je koeficijent viskoznosti jednak $2 \cdot 10^{-5}$ Pa s, potrebno je izračunati srednju vrijednost Stokesove sile u kinetičkoj teoriji plinova.

Rezultat: $F = 2,9 \cdot 10^{-7}$ N

14.6. Umjetni je satelit volumena 1 000 m³ napunjen zrakom na temperaturi 300 K. Meteorit koji udari u satelit probija na njegovoj oplati rupu površine 1 cm². Za koje će se vrijeme tlak unutar satelita promijeniti za 1%? Uzmite da se temperatura plina nije promijenila i zanemarite sudare između molekula.

Rezultat: $\tau = 680$ s

14.7. Pri normiranim uvjetima srednji slobodni put molekula vodika iznosi $L_0 = 1,28 \cdot 10^{-5}$ cm. Potrebno je odrediti promjer molekula vodika i srednji slobodni put pri temperaturi $t_0 = 0$ °C i tlaku $p = 10$ Pa.

Rezultat: $d = 2,6 \cdot 10^{-10}$ m; $L = 0,13$ cm

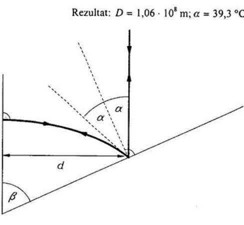
15. Zadaci s pismenih ispita na Fakultetu elektrotehnike i računarstva

1. Satelit se giba u ravnini brzinom $\vec{v}(x, y) = ay\vec{i} + bx\vec{j}$, gdje je $a = 10^9\ \mathrm{s}^{-1}$ i $b = 10^8\ \mathrm{s}^{-1}$. U trenutku $t = 0$ radijus-vektor satelita $\vec{r} = 10^8\ \mathrm{m}\vec{i}$. Kako je daleko od ishodišta satelit u trenutku kada su mu komponenta x i komponenta y brzine jednake? Koliki je u tom trenutku kut između brzine i akceleracije?

Rezultat: $D = 1{,}06 \cdot 10^8$ m; $\alpha = 39{,}3$ °C

2. S koje visine valja ispustiti kuglicu da se ona, nakon tri savršeno elastična sudara vrati u početnu točku? Udaljenost $d = 20$ cm, a kut $\beta = 60°$.

Rezultat: $h = 23{,}1$ cm



Slika uz zad. 2.

3. U inercijalnom sustavu S jedan se događaj odigrao u prostorno-vremenskoj točki s koordinatama $x = 5$ m i $ct = 3$ m. Kojom se brzinom mora gibati inercijalni sustav S′ u kojem se podudaraju vremenske koordinate ishodišta S i događaja?

Rezultat: $v = \frac{3}{5}c$

4. U trenutku polijetanja zrakoplov mora imati brzinu 80 km/h: Ako je masa zrakoplova 1 t, uzletna staza duga 100 m i koeficijent trenja 0,2, kolika mora biti minimalna snaga motora da zrakoplov poleti? Gibanje prilikom zaleta je jednoliko ubrzano.

Rezultat: $P = 98{,}5$ kW

5. Točka se na rubu kotača polumjera 80 cm kreće prema zakonu $s = 0{,}1 \cdot t^3$ (s je u metrima). Koliki je iznos ukupnog ubrzanja te točke u trenutku kada je brzina 3 m/s?

Rezultat: $a = 11{,}4\ \mathrm{m/s}^2$

6. Objekt se 5 min udaljava brzinom $4c/5$ od neke točke u sustavu S, a onda naglo mijenja brzinu u $-4c/5$ i vraća se u istu točku u sustavu S. Koliko je vremena za taj put potrebno objektu?

Rezultat: $t = 6$ min

7. Valjkasta posuda s vodom može rotirati oko osi koja prolazi središtem osnovice valjka. Otvorimo li i zarotiramo posudu, dio tekućine iscuri i stvori se paraboloidna ploha koja doseže do polovice dubine posude. Izračunajte omjer momenata tromosti zatvorene (pune) i otvorene posude kako je gore opisano. (Mase posude i poklopca zanemarite.)

Rezultat: $I_z / I_{ot} = 1{,}2$

8. Na mirno tijelo mase $m = 2$ kg, koje se nalazi na vodoravnoj podlozi, počne djelovati sila koja o udaljenosti od početne točke ovisi ovako:

$$F(s) = F_0\sqrt{1 + (s/R)^2},$$

pod kutom $\alpha = \arctan s/R$. Kolika je brzina tijela u trenutku odvajanja tijela od podloge ako je $F_0 > \mu mg$, a μ je koeficijent trenja. $F_0 = 5$ N, $R = 0{,}1$ m i $\mu = 0{,}2$.

Rezultat: $v(s_0) = \sqrt{2Rg - \dfrac{Rmg^2\mu}{F_0}} = 1{,}092\ \mathrm{m\,s^{-1}}$

9. Pedeset je kockica povezano nitima u niz. Masa prve je 10 g, druge 20 g, treće 30 g itd. Ako na prvu počne djelovati vremenski promjenljiva sila $F(t) = 2\,t\,N$, kolika je napetost niti između 35. i 36. kockice 10 s nakon početka gibanja?

Rezultat: $T = 10{,}12$ N

10. Astronaut u svemirskom brodu koji se udaljava od Zemlje u smjeru osi x brzinom 0,8 c primijeti eksploziju Nove u prostorno-vremenskim koordinatama $t' = -6 \cdot 10^8$ s, $x' = 6{,}2 \cdot 10^8\ c\,s$, $y' = 4 \cdot 10^8\ c\,s$, $z' = 0$ ($c\,s$ je udaljenost koju prijeđe svjetlost za 1 s). **a)** U kojem je trenutku stigla svjetlost Nove do broda? **b)** U kojem je trenutku došla obavijest s broda do Zemlje? **c)** U kojem je trenutku svjetlost Nove došla do Zemlje?

Rezultat: a) $t'' = 1{,}388 \cdot 10^8$ s; b) $t_d = 4{,}14 \cdot 10^8$ s; c) $t_e = 2{,}9 \cdot 10^8$ s

11. Tijelo mase $m = 5$ kg miruje na vodoravnoj podlozi. Na njega počne djelovati sila

$$F(s) = \frac{F_0}{\sqrt{1 - \dfrac{s^2}{R^2}}},$$

gdje je $F_0 = 20$ N, a $R = 10$ m, pod kutom $\alpha = \arcsin s/R$. Kolika je brzina tijela u trenutku njegova odvajanja od podloge ako je $F_0 > \mu\,g$, ($\mu = 0{,}1$ je faktor trenja).

Uputa: $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\sqrt{1 - x^2}$.

Rezultat: $v = 7{,}27\ \mathrm{m\,s^{-1}}$

12. Valjak i kugla (različitih polumjera i masa) nalaze se na vrhu kosine. Istodobno ispušteni niz kosinu rotirajući se spuštaju uz neki koeficijent trenja. Ako je nagib kosine 30°, tko će pobijediti u »utrci« i za koliko ako je duljina kosine 5 m?

Rezultat: $t_k = 1{,}69$ s; $t_v = 1{,}75$ s

13. Zamašnjak (ploča) polumjera 30 cm i mase 4 kg okreće se 720 okret/min. U jednom se trenutku na njega prisloni kočnica na koju djeluje sila proporcionalna vremenu, tj. $F = a\,t$ ($a = 0{,}1\,\pi$ N/s). Koliko okretaja napravi zamašnjak do zaustavljanja ako je koeficijent trenja između njega i kočnice jednak 0,5?

Rezultat: $N = 192$

14. Mjerenjem je ustanovljeno da na automobil mase 1 500 kg pri gibanju djeluju sile otpora sredstva i trenja tako da je njihovo ukupno djelovanje proporcionalno nekoj potenciji brzine. Nadalje, kada se motor automobila ugasi pri brzini 10 km/h, on se ugasi nakon 18 s, a brzina padne na (10/3) km/h za 10,104 s. Valja napisati točan oblik ukupne sile otpora i trenja.

Rezultat: $F = -239\,v^{1/4}$

15. Kamion vozi stalnom brzinom 80 km/h, a iza njega automobil stalnom brzinom od 100 km/h. U trenutku kada je razmak vozila 50 m, kamion počne kočiti akceleracijom 1,6 m/s^2. Koliko dugo nakon početka kočenja kamiona automobil mora početi kočiti, da bi se vozila na kraju zaustavljanja tek dodirnula, ako automobil može kočiti akceleracijom 7 m/s^2?

Rezultat: $t = 5{,}37$ s

16. Drveni blok težine G leži na hrapavoj vodoravnoj podlozi. Koeficijent trenja između tijela i podloge jest μ. Silom F djelujemo na tijelo tako da možemo mijenjati kut nagiba sile θ prema vodoravnoj podlozi. Odredite uvjet za kut θ uz koji će sila F biti minimalna, a gibanje bloka jednoliko.

Rezultat: $\mu = \tan\theta$

17. Skijaš se započeo spuštati s vrha brežuljka početnom brzinom $v_0 = 2{,}5$ m s^{-1}. Polumjer zakrivljenosti brežuljka $R = 30$ m. Koliki put s skijaš prijeđe do trenutka odvajanja od podloge (odleta)? (Trenje zanemarite!)

Rezultat: $s = r \cdot \alpha$
$s = 25$ m

18. Izračunajte omjer udaljenosti koju prevali π-mezon nakon što je nastao, uračunavajući relativističku dilataciju vremena prema slučaju kada se ona zanemaruje. Brzina gibanja piona je $0{,}90\,c$, a srednji život piona $2{,}603 \cdot 10^{-8}$ s.

Rezultat: $\dfrac{\Delta l_{rel}}{\Delta l} = 2{,}294$

19. Horizontalna kapilarna cjevčica unutrašnjeg polumjera 1 mm i duljine 2 cm ubodena je u bočnu stijenku veće cilindrične posude u kojoj je glicerin. Razina glicerina je 18 cm iznad kapilarne cjevčice i ona se u većoj posudi održava stalnom. Za koliko će vremena isteći 5 cm^3 glicerina kroz kapilarnu horizontalnu cjevčicu? (Gustoća glicerina je 1 200 $kg\ m^{-3}$, a dinamički koeficijent viskoznosti $1{,}0\ N\ s\ m^{-2}$.)

Rezultat: $t = 120{,}24\ s \approx 2\ min$

20. Kolika je promjena entropije sustava kada se 10 g leda temperature – 20 °C (početno stanje) pretvori u vodenu paru temperature 100 °C (konačno stanje)? (Specifični je toplinski kapacitet leda $2{,}1\ kJ\ kg^{-1}K^{-1}$, latentna toplina taljenja leda $3{,}35 \cdot 10^5\ J\ kg^{-1}$, a latentna toplina isparavanja vode jest $2{,}26 \cdot 10^6\ J\ kg^{-1}$, i specifični toplinski kapacitet $4\ 190\ J\ kg^{-1}K^{-1}$.)

Rezultat: $\Delta S = 87{,}5\ J\ K^{-1}$

21. Čestica mase m pogađa drugu česticu koja miruje i čija je masa 235 puta veća od mase prve. Pretpostavivši elastičan i centralni sraz, izračunajte koliki dio brzine ($\Delta v/v$) je manja čestica izgubila tijekom sraza? Kolika je brzina druge (veće) čestice nakon sraza?

Rezultat: $\dfrac{\Delta v}{v_1} = \dfrac{2}{236} = 0{,}85\%$, $v_2' = \Delta v = 0{,}0085 v_1$

22. Dva valjka, aluminijski i olovni, jednakih polumjera (r = 6 cm) i jednakih masa (m = = 0,5 kg), puštaju se niz kosinu visine 0,5 m i kuta nagiba 30°. Aluminijski je valjak homogeni, a olovni je šuplji. Izračunajte vremensku razliku u stizanju valjaka do podnožja kosine ako je njihovo kotrljanje (bez klizanja) započelo s vrha kosine, s početnim brzinama jednakima nuli. ($\rho_{Al} = 2\ 700\ kg/m^3$, $\rho_{Pb} = 11\ 300\ kg/m^3$)

Rezultat: $\Delta t = t_{Pb} - t_{Al} = 0{,}094\ s$

23. Dugom cijevi struji voda protokom 200 cm^3 u sekundi. Kinematička viskoznost vode u tome strujanju jest $10^{-6}\ m^2/s$. Odredite za koji će najveći promjer cijevi strujanje vode još uvijek biti laminarno? (Kritični Reynoldsov broj za ovu pojavu jest $Re \leq 3\ 000$.)

Rezultat: $l = D \leq 0{,}085\ m$

24. Na koju energiju treba ubrzati protone u ciklotronu da im relativno povećanje vlastite mase ne bude veće od 10%? (Masa protona jest $m_p = 1{,}6726 \cdot 10^{-27}$ kg.)

Rezultat: $E_{kin} = 1{,}505 \cdot 10^{-11}$ J ili 94,0625 MeV

25. Kolika će biti prosječna frekvencija sudara molekula dušika ako se tlak u posudi smanji do 0,01 početnog tlaka? Srednji slobodni put molekula dušika je 95 nm na 0 °C i odgovarajućem tlaku. (Dok se tlak u posudi mijenja, temperatura ostaje stalnom.)

Rezultat: $\bar{f} = 4{,}784 \cdot 10^7\ s^{-1} = 47{,}84\ MHz$

26. Brzina svjetlosti (c') koja se kreće kroz neki prozirni predmet manja je od njezine brzine u vakuumu (c). Stavimo takav predmet u raketu, koja se kreće brzinom v_R nadesno u odnosu prema mirnom promatraču. Svjetlost se kreće također nadesno kroz taj predmet. Kolika je njezina brzina u odnosu prema mirnom promatraču kada je $v_R \ll c$?

Rezultat: $v \approx c' + v_R\left[1 - \left(\dfrac{c'}{c}\right)^2\right]$

27. Koliku najmanju kinetičku energiju može imati elektron da bi mogao u centralnom elastičnom srazu polovicu svoje kinetičke energije predati protonu? Proton prije sraza miruje, a elektron se odbije od protona. Uzmite u obzir da je $m_e \ll m_p$.

Rezultat: $E_k = 469{,}15$ MeV

28. Satelit obilazi Zemlju po kružnoj orbiti. Kolika je njegova linearna brzina, ako je na toj visini na kojoj se nalazi satelit njegova težina 16 puta manja nego na Zemljinoj površini.

Rezultat: $3{,}95 \text{ km s}^{-1}$

29. Balon se napuni jednim molom helija na temperaturi 25 °C i pri tlaku $1{,}01 \cdot 10^5$ Pa. Koliki je promjer balona i uzgon? 1 mol zraka ima masu od 29 g.

Rezultat: $d = 0{,}36$ m $U = 0{,}28$ N

30. Satelit mase m = 150 kg giba se kružnom stazom oko Zemlje na visini h = 800 km iznad tla. Izračunajte energiju koja bi se morala satelitu dodati da napusti Zemljino gravitacijsko polje.

Rezultat: $\Delta E = -4{,}16 \cdot 10^9$ J

31. Svemirski se brod giba jednolikom brzinom $v = 0{,}866\,c$ u smjeru od Zemlje. U trenutku $t_1 = 0$ brod pošalje prvi, a u trenutku $t_2 = 4$ s drugi svjetlosni signal (t_i su vremena mjerena u sustavu broda). Izračunajte koliko u Zemljinom sustavu iznosi vremenski interval između primanja dvaju signala.

Rezultat: $\Delta t = 14{,}93$ s

32. Zatvorena posuda A ima konstantni obujam V_A = 9 l. Spojena je sa zatvorenom posudom B konstantnog volumena V_B = 1 L pomoću kratke cijevi čiji je obujam zanemariv. U cijevi se nalazi posebni diferencijalni ventil. Kad je otvoren, ventil omogućava protjecanje plina iz A u B samo ako je tlak u posudi A veći od tlaka u posudi B barem za Δp = = 1,2 bar. Na početku je idealni plin u posudi A temperature $(T_A)_0$ = 300 K i tlaka $(p_A)_0$ = = 1 bar, a u posudi B je vakuum. Diferencijalni ventil je otvoren. Ugrijte cijeli sustav na T_1 = = 420 K. Koliki su tlakovi u posudama B i A?

Rezultat: $p_A = 1{,}38$ bar; $p_B = 0{,}18$ bar

33. Niz krov, koji zatvara kut od 30° sa Zemljinom površinom kotrlja se bez klizanja homogena kugla. Krenuvši iz stanja mirovanja kugla prijeđe po krovu 2,8 m i na visini 9 m napušta krov. Kolika je brzina kugle u trenutku kada padne za tlo?

Rezultat: $v = 14{,}01 \text{ m s}^{-1}$

34. Na peronu je putnik udaljen l = 100 m od posljednjeg vagona vlaka, u trenutku kada vlak krene ubrzanjem $0{,}3 \text{ m s}^{-2}$. Trči li putnik brzinom 9 m s^{-1}, za koliko će vremena stići do zadnjeg vagona?

Rezultat: $t = 14{,}7$ s

35. Odredite moment tromosti šuplje kocke napravljene od šest homogenih kvadratičnih ploča stranice $2a$ mase M oko osi koja prolazi jednim bridom kocke:

Rezultat: $I = \dfrac{56}{3} m a^2$

36. Plin temperature T_0 obujma 1 L nalazi se pod tlakom 10^5 Pa. Odredite ukupnu količinu topline dovedenu plinu i izvršeni rad ako se plin izobarno grije do dvostruko većeg obujma, zatim izohorno grije do dvostruko većeg tlaka i naposljetku adijabatski ekspandira sve dok se temperatura ne vrati na početnu vrijednost T_0. Adijabatski koeficijent plina je 1,4.

Rezultat: Q = 850 J; W = 850 J

37. Kugla polumjera 0,3 m pliva tako da je pola kugle u vodi. Koliki je rad potrebno uložiti da se kugla izvadi iz vode?

Rezultat: W = 104 J

38. Tijelo težine 98,1 N giba se pod djelovanjem promjenljive sile $F = k(q - t)$, gdje je $k = 100\ \mathrm{N\,s^{-1}}$, a q = 1 s. Koliki će put tijelo proći do zaustavljanja ako je u trenutku t = 0 s brzina tijela $v_0 = 0{,}2\ \mathrm{m\,s^{-1}}$?

Rezultat: s = 7,07 m

39. U centralno elastičnom sudaru kugla mase m_1 = 1,3 kg sudara se s mirnom većom kuglom mase m_2 gubeći pritom 26% kinetičke energije. Odredite masu m_2 veće kugle.

Rezultat: m_2 = 16 kg

40. Izračunajte razliku Δh između razine žive i vode kada je u cijev U oblika ulivena živa gustoće $\rho_1 = 13{,}6 \cdot 10^3\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$, zatim voda i nakon toga izmjerena je (pri jednakom vanjskom tlaku na oba otvora cijevi) razlika između dvije razine žive Δh_0 = 0,08 m.

Rezultat: Δh = 1,008 m

41. Tijelo mase 2 kg leži na rubu stola visine 0,8 m. Metak mase 0,004 kg ispaljen je u tijelo u kojem i ostaje. Tijelo i metak padnu na horizontalnu podlogu u točki koja je 2 m udaljena od projekcije točke u kojoj se tijelo nalazilo na početku. Kolika je početna brzina metka?

Rezultat: 2 481 m/s

42. Izračunajte koordinate centra mase homogene limene ploče kružnog oblika, polumjera 0,4 m iz koje je izrezan jednakostranični trokut visine 0,4 m tako da se vrh trokuta nalazi na obodu kruga, a središte suprotne stranice u središtu kruga!

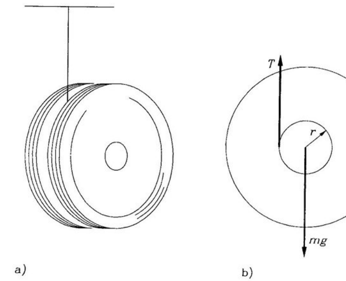
Rezultat: $|x_{CM}|$ = 0,03 m, y_{CM} = 0 m

43. Igračka (jo-jo) mase 0,4 kg ima moment tromosti, s obzirom na os kroz centar mase koja je okomita na kružni presjek te igračke, 0,0014 kg m^2. Nit koja je namotana oko unutrašnjeg cilindra polumjera 0,02 m drugim je krajem privezana za čvrsti predmet. Koliko je linearno ubrzanje igračke jo-jo u trenutku ispuštanja? (Pretpostavite da nit koja drži igračku ostaje okomita.)

Rezultat: 1 006 m/s^2

44. Šuplji cilindrični plovak promjera 0,2 m pliva tako da je 0,1 m iznad površine vode kada mu se na dno objesi komad željeza mase 10 kg. Koliko će biti iznad vode ako se taj komad željeza stavi u plovak? (Gustoća željeza je 7 800 kg/m^3.)

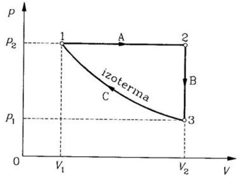
Rezultat: 0,089 m



Slika uz zad. 43.

45. Monoatomni idealni plin podvrgnut je kružnom procesu prikazanim p,V-dijagramom, gdje su $p_1 = 2 \cdot 10^5$ Pa, $p_2 = 5 \cdot 10^5$ Pa, $V_1 = 0{,}1$ m^3, $V_2 = 0{,}25$ m^3, a proces C je izotermni proces na temperaturi 300 K. Nađite omjer koeficijenta iskorištenja toplinskog stroja koji radi u opisanom kružnom procesu i koeficijenta iskorištenja toplinskog stroja koji radi u Carnotovu kružnom procesu između temperatura točaka 2 i 3.

Rezultat: $\eta_1/\eta_2 = 0{,}156/0{,}6 = 0{,}26$



Slika uz zad. 45.

46. Brzi vlak koji se giba brzinom 60 km/h koči na putu 900 m da bi se zaustavio pred zatvorenim signalom. Vlak zatim stoji 4 minute ispred zatvorenog signala, a zatim ubrzanjem 0,15 m/s^2 povećava brzinu do 60 km/h. Koliko će minuta vlak kasniti zbog zatvorenog signala?

Rezultat: 5,8 min

47. Koliki je rad potrebno obaviti da bi se kameni blok mase 20 tona izvukao iz 15 metara duboke jame po kosini koja s horizontalnom ravninom zatvara kut 30°. Faktor trenja između kamenog bloka i kosine je 0,25.

Rezultat: $4{,}2 \cdot 10^6$ J

48. Homogeni štap duljine 4 m savijen je pod kutom 90° u točki koja je udaljena od jednog kraja štapa 1 m. Odredite radijus-vektor centra mase ako je koordinatna os x u smjeru duljeg dijela savinutog štapa, a os y u smjeru kraćeg dijela štapa.

Rezultat: $(1{,}125\vec{i} + 0{,}125\vec{j})$ m

49. Kolika je ukupna sila koja djeluje na bočnu plohu spremnika oblika kocke čiji je brid 3 m, ako je visina vode u spremniku 2,5 m?

Rezultat: $F = 92$ kN

50. Na sloj snijega debljine 4 cm, temperature -2 °C, pada kiša temperature 5 °C. Kolika bi morala biti minimalna debljina sloja kiše da bi se snijeg potpuno otopio? (Gustoća snijega je 250 kg/m^3, specifična toplina taljenja snijega je 335 kJ/kg, specifični toplinski kapacitet snijega je 2,1 kJ/(kg K), specifični toplinski kapacitet vode je 4,19 kJ/(kg K).)

Rezultat: 0,163 m

I. Dodatak

Veličine i jedinice

Znak veličine	Naziv	Jedinica
l	duljina	m
S (A)	površina	m^2
V	volumen	m^3
v	specifični volumen	$m^3\ kg^{-1}$
V_m	molarni volumen	$m^3\ mol^{-1}$
m	masa	kg
ρ	gustoća	$kg\ m^{-3}$
t	vrijeme	s
s	put	m
v, u, c	brzina	$m\ s^{-1}$
a	akceleracija (ubrzanje)	$m\ s^{-2}$
g	akceleracija sile teže (slobodnog pada)	$m\ s^{-2}$
f, ν	frekvencija	Hz
ω	kružna frekvencija, pulzacija	s^{-1}
T	period	s
n	broj okretaja	1
ω	kutna brzina	$rad\ s^{-1}$, s^{-1}
α	kutna akceleracija	$rad\ s^{-2}$, s^{-2}
λ	valna duljina	m
k	valni broj	m^{-1}
F	sila	N
I	impuls sile	N s
G	težina	N
F_G	sila teža	N
F_u	uzgon	N
p	količina gibanja	$kg\ m\ s^{-1}$
G	gravitacijska konstanta	$m^3\ s^{-2}\ kg^{-1}$
γ	jakost gravitacijskog polja	$N\ kg^{-1}$
M	moment sile	N m

I	moment tromosti (inercije)	$kg\ m^2$
L	moment količine gibanja	$kg\ m^2\ s^{-1}$
W	rad	J
E	energija	J
E_p	potencijalna energija	J
E_k	kinetička energija	J
P	snaga	W
w	gustoća energije	$J\ m^{-3}$
η	korisnost, stupanj korisnog djelovanja	1
E	modul elastičnosti	$N\ m^{-2}$
κ	stlačivost	Pa^{-1}
k	konstanta opruge	$N\ m^{-1}$
μ	faktor trenja	1
η	koeficijent dinamičke viskoznosti	$N\ s\ m^{-2}$
ν	koeficijent kinematičke viskoznosti	$m^2\ s^{-1}$
σ	površinska napetost	$N\ m^{-1}$
q_m	maseni protok	$kg\ s^{-1}$
q_v	volumni protok	$m^3\ s^{-1}$
T	termodinamička temperatura	K
t	Celzijeva temperatura	°C
α	koeficijent linearnog rastezanja	K^{-1}
γ	koeficijent toplinskog širenja	K^{-1}
β	koeficijent promjene tlaka	K^{-1}
Q	toplina	J
R	plinska konstanta	$J\ (mol\ K)^{-1}$
k	Boltzmannova konstanta	$J\ K^{-1}$
L	specifična toplina transformacije faze	$J\ kg^{-1}$
Φ	toplinski tok	W
q	gustoća toplinskog toka	$W\ m^{-2}$
R	toplinski otpor	$K\ W^{-1}$
λ	koeficijent toplinske vodljivosti	$W\ (Km)^{-1}$
h_c	koeficijent konvekcije	$W\ (m^2K)^{-1}$
h_r	koeficijent prijenosa topline zračenjem	$W\ (m^2K)^{-1}$
k	koeficijent prijenosa topline (toplinskih gubitaka)	$W\ (m^2K)^{-1}$
C_t	toplinski kapacitet	$J\ K^{-1}$
c	specifični toplinski kapacitet	$J\ (kg\ K)^{-1}$
C	molarni toplinski kapacitet	$J\ (mol\ K)^{-1}$
κ	adijabatski koeficijent (c_p/c_v)	1
U	unutrašnja energija	J
H	entalpija	J
S	entropija	J/K
σ	Stefan-Boltzmannova konstanta	$W\ (K^4/m^2)^{-1}$
α	faktor apsorpcije	1
ρ	faktor refleksije	1

ε	faktor emisije	1
M	energetska (radijacijska) egzitancija	$W\ m^{-2}$
M_λ	spektralna egzitancija	$W\ m^{-3}$
n	količina tvari (množina)	mol
n	koncentracija (gustoća) molekula	m^{-3}
N_A	Avogadrova konstanta	mol^{-1}
M	molarna masa	$kg\ mol^{-1}$

Važnije konstante

brzina svjetlosti u vakuumu	$c = 2{,}997925 \cdot 10^8\ m\ s^{-1}$
elementarni električni naboj	$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ C$
dielektrična konstanta (permitivnost) vakuuma	$\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ F\ m^{-1}$
permeabilnost vakuuma	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ H\ m^{-1}$
gravitacijska konstanta	$G = 6{,}672 \cdot 10^{-11}\ N\ m^2\ kg^{-2}$
Planckova konstanta	$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\ J\ s$
Boltzmannova konstanta	$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ J\ K^{-1}$
plinska konstanta	$R = 8{,}314\ J\ mol^{-1}\ K^{-1}$
Avogadrova konstanta	$N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}\ mol^{-1}$
normirani molarni volumen plina	$V_{mo} = 22{,}4 \cdot 10^{-3}\ m^3\ mol^{-1}$
Loschmidtov broj	$n_L = 2{,}687 \cdot 10^{25}\ m^{-3}$
Stefan-Boltzmanova konstanta	$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ W\ m^{-2}\ K^{-4}$
Rydbergova konstanta	$R_\infty = 1{,}0974 \cdot 10^7\ m^{-1}$
masa mirovanja elektrona	$m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\ kg = 5{,}486 \cdot 10^{-4}\ u$
masa mirovanja protona	$m_p = 1{,}6726 \cdot 10^{-27}\ kg = 1{,}007276\ u$
masa mirovanja neutrona	$m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}\ kg = 1{,}008665\ u$
Faradayeva konstanta	$F = 9{,}648 \cdot 10^4\ C\ mol^{-1}$
atomska masena konstanta	$m_u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ kg = 1\ u$
akceleracija slobodnog pada	$g = 9{,}80665\ m\ s^{-2}$
srednji polumjer Zemlje	$6{,}37 \cdot 10^6\ m$
masa Zemlje	$5{,}96 \cdot 10^{24}\ kg$
polumjer Sunca	$6{,}95 \cdot 10^8\ m$
masa Sunca	$1{,}98 \cdot 10^{30}\ kg$
polumjer Mjeseca	$1{,}74 \cdot 10^6\ m$
masa Mjeseca	$7{,}33 \cdot 10^{22}\ kg$
srednja udaljenost središta Zemlje i Sunca	$1{,}49 \cdot 10^{11}\ m$
srednja udaljenost središta Zemlje i Mjeseca	$3{,}84 \cdot 10^8\ m$
ophodno vrijeme Mjeseca oko Zemlje	27,32 dana = $2{,}36 \cdot 10^6\ s$
ophodno vrijeme Zemlje oko Sunca	365,25 dana
kutna brzina vrtnje Zemlje oko svoje osi	$7{,}272 \cdot 10^{-5}\ rad\ s^{-1}$

numeričke konstante:

Ludolfov broj	$\pi = 3{,}14159$
baza prirodnih logaritama	$e = 2{,}7183$

Tablice

Osobine nekih čvrstih tvari

Tvar	Gustoća	Youngov modul	Specifični toplinski kapacitet	Koeficijent linearnog rastezanja
	kg/m^3	GN/m2	J/(kg K)	$10^{-6}\ K^{-1}$
aluminij	2 700	70	900	24
bakar	8 900	110	390	17
čelik	7 700	200	460	12
led	900	–	2 100	–
nikal	8 900	210	520	18
olovo	11 300	16	130	29
platina	21 500	170	130	9
pluto	250	–	2 050	–
srebro	10 500	85	230	19
staklo	2 500	50	800	9
volfram	19 200	360	150	4,5
zlato	19 300	78	130	15
željezo	7 900	180	460	12

Osobine nekih tekućina

Tekućina	Gustoća	Specifični toplinski kapacitet	Koeficijent volumnog rastezanja
	kg/m^3	J/(kg K)	$10^{-3}\ K^{-1}$
alkohol (etanol)	790	2 500	1,1
benzin	700	2 100	0,95
morska voda	1 030	3 930	0,24
voda	1 000	4 190	0,20
živa	13 600	140	0,18

Osobine nekih plinova

Plin	Gustoća (0 °C i 1,01 bar)	c_V
	(kg/m^3)	J/(kg K)
dušik, N_2	1,25	740
helij, He	0,179	3 150
kisik, O_2	1,43	650
ugljik-dioksid, CO_2	1,98	650
vodik, H_2	0,09	10 000
zrak	1,293	720

Koeficijent viskoznosti

Fluid	η/(Pa s)	Fluid	η/(Pa s)
voda (20 °C)	$1 \cdot 10^{-3}$	glicerin (20 °C)	$8{,}6 \cdot 10^{-1}$
voda (70 °C)	$4 \cdot 10^{-4}$	zrak (20 °C)	$1{,}8 \cdot 10^{-5}$
voda (100 °C)	$2{,}8 \cdot 10^{-4}$	zrak (70 °C)	$1{,}95 \cdot 10^{-5}$
etanol (20 °C)	$1{,}1 \cdot 10^{-4}$	vodik (20 °C)	$0{,}9 \cdot 10^{-5}$
etanol (70 °C)	$5{,}3 \cdot 10^{-4}$	motorno ulje (SAE 30, 100 °C)	$9 \cdot 10^{-3}$
živa (20 °C)	$1{,}55 \cdot 10^{-3}$		
živa (70 °C)	$1{,}4 \cdot 10^{-3}$		
maslinovo ulje (20 °C)	$8{,}4 \cdot 10^{-2}$		
maslinovo ulje (70 °C)	$6 \cdot 10^{-3}$		

Koeficijenti toplinske vodljivosti

Tvar	λ/(Wm^{-1} K^{-1})	Tvar	λ/(Wm^{-1} K^{-1})
srebro	420	šamot	0,2
bakar	380	guma	0,2
aluminij	230	papir	0,14
željezo	60	drvo	0,13
živa	10	pluto	0,05
beton	1,1	staklena vuna	0,04
žbuka	0,8	vuna	0,04
staklo	0,8	poliuretanska pjena	0,03
opeka	0,7	zrak	0,025
voda	0,6	polistirol	0,01
zemlja	0,5		
azbestni cement	0,5		

II. Dodatak

Kratki pregled diferencijalnog i integralnog računa

A) Derivacija

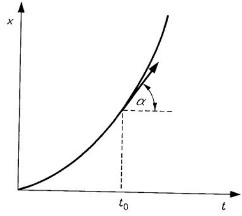
U kinematici se uvodi srednja brzina kao omjer prijeđenog puta Δx i vremena Δt potrebnog da se prijeđe taj put, tj.

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{1}$$

Ako smąnjujemo Δt i računamo omjer (1) između prijeđenog puta za takav (mali) Δt, onda srednja brzina postaje **prava**, trenutna brzina na malom djeliću puta koji je prijeđen za kratki vremenski interval Δt, tj. pišemo

$$v \text{ (prava, trenutna)} \equiv v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \equiv \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

gdje oznaka lim kazuje da promatramo limes, tj. graničnu vrijednost kvocijenta prirasta funkcije $x = x(t)$ (djelić prijeđenog puta) u beskonačno malom ($\to 0$) vremenskom intervalu Δt, tj. računamo derivaciju funkcije $x(t)$.



Slika D.1.

Grafički, u pravokutnom t,x-sustavu (sl. D.1) $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ je koeficijent smjera tangente. Naime, $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ je (ponovno) funkcija od vremena t, pa je

$$k = \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} \tag{3}$$

koeficijent smjera tangente povučene u točki ($x(t_0)$, t_0) krivulje $x(t)$. U nekoj drugoj točki, npr. $t = t_1$, vrijednost $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ je drukčija, tj. tangenta ima drukčiji nagib. Prevedeno na jezik fizike, to bi značilo da se trenutna brzina, tj. $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ mijenja duž putanje ($x(t)$) tijela.

Na osnovi (2) mogu se izvesti derivacije funkcija koje su dane u tablici 1.

Tablica 1. Tablica derivacija elementarnih funkcija

Funkcija	Derivacija	Funkcija	Derivacija
C (konstanta)	0	arc sin x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x	1		
x^n	$n\,x^{n-1}$		
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	arc cos x	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	arc tan x	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	arc ctan x	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	arc sc x	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
e^x	e^x	arc csc x	$-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
a^x	$a^x \ln a$		
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	sh x	ch x
		ch x	sh x
$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	th x	$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$
$\log x$	$\frac{1}{x}\log e \approx \frac{0{,}4343}{x}$	cth x	$-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$
$\sin x$	$\cos x$	Ar sh x	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$		
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = \mathrm{sc}^2 x$	Ar ch x	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
ctan x	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$	Ar th x	$\frac{1}{1-x^2}$
sc x	$\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \tan x\ \mathrm{sc}\,x$	Ar cth x	$\frac{1}{x^2-1}$
csc x	$-\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctan}\,x \csc x$		

Pravila deriviranja

1. Derivacija konstante koja množi funkciju

$$\frac{d}{dt}(c\,f(t)) = c\frac{df}{dt},$$

npr.

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{a}{2}t^2\right) = \frac{m\,a}{2}\frac{d}{dt}(t^2) = mat.$$

2. Derivacija zbroja funkcija

$$\frac{d}{dt}(f(t) + g(t)) = \frac{df}{dt} + \frac{dg}{dt},$$

npr.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{a}{2}t^2 + v_0 t\right) = a\,t + v_0.$$

3. Derivacija umnoška funkcija

$$\frac{d}{dt}(fgh) = \frac{df}{dt}gh + f\frac{dg}{dt}h + fg\frac{dh}{dt},$$

npr.

$$\frac{d}{dt}(A_0 e^{-\delta t}\cos\omega t) = A_0\left(\frac{d}{dt}e^{-\delta t}\right)\cos\omega t +$$

$$+A_0 e^{-\delta t}\frac{d}{dt}(\cos\omega t) = -A_0\delta e^{-\delta t} - A_0\omega e^{-\delta t}\sin\omega t.$$

4. Derivacija složene funkcije

$$\frac{d}{dt}(f(g(h(t))) = \frac{df}{dg}\cdot\frac{dg}{dh}\cdot\frac{dh}{dt},$$

npr.

$$\frac{d}{dt}(A_0 e^{\sin\omega t}) = A_0\frac{de^{\sin\omega t}}{d(\sin\omega t)}\cdot\frac{d(\sin\omega t)}{d(\omega t)}\cdot\frac{d\omega t}{dt} = A_0 e^{\sin\omega t}\cdot\cos\omega t\cdot\omega.$$

Primjene deriviranja

Očita primjena deriviranja izlazi iz (3). Naime, kako je vrijednost derivacije u nekoj točki koeficijent smjera tangente povučene u toj točki, nameće se pitanje u kojoj je točki krivulje $k = 0$? Jasno je da u takvoj točki, gdje je $k = 0$, tj. gdje je tangenta horizontalna ($k = \tan\alpha$, α je kut između pozitivne osi nezavisne varijable t i tangente) funkcija ima (lokalni) ekstrem, tj. (lokalni) maksimum ili minimum. Kako je k, tj. dx/dt funkcija od t, nalaženje ekstrema svodi se na rješenje jednadžbe

$$\frac{dx}{dt} = 0.$$

Primjer

Neka je dana funkcija

$$x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + x_0,$$

gdje su g, v_0 i x_0 (poznate) konstante. Valja odrediti ekstrem funkcije $x(t)$, tj. odrediti t za koji funkcija ima ekstrem i koja je vrijednost funkcije $x(t)$ u toj točki. Dakle

$$\frac{dx}{dt} \equiv \dot{x}(t) = -g\,t + v_0$$

i funkcija $\dot{x}(t)$ (uobičajena oznaka za vremensku derivaciju u fizici je točka iznad funkcije) ima nul-točku u t_0, tj.

$$\dot{x}(t_0) = 0 = -g\,t_0 + v_0,$$

odnosno

$$t_0 = \frac{v_0}{g}.$$

Dakle u točki t_0 funkcija ima ekstrem, a vrijednost u tom ekstremu je

$$x(t_0) = x\left(\frac{v_0}{g}\right) = x_0 + \frac{v_0^2}{2g}.$$

Lako se može vidjeti da je ekstrem zapravo maksimum, a to se može dobiti ako se u točki t_0 izvrijedni druga derivacija funkcije $x(t)$, tj.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) \equiv \left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_{t=t_0} \equiv \ddot{x}(t_0)$$

i ako je

$$\ddot{x}(t_0)\begin{cases} > 0 \Rightarrow \text{u } t_0 \text{ je minimum} \\ < 0 \Rightarrow \text{u } t_0 \text{ je maksimum.} \end{cases}$$

Taylorov red

Neka je $f(t)$ glatka (neprekinuta) funkcija u okolini točke t_0. Onda se vrijednost funkcije u okolini točke t_0 može napisati ovako:

$$f(t) = f(t_0) + \frac{1}{1!}\frac{df}{dt}(t - t_0) + \frac{1}{2!}\frac{d^2f}{dt^2}(t - t_0)^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3f}{dt^3}(t - t_0)^3 + \dots$$

a derivacije se izvrednuju u t_0. To je Taylorov red za funkciju $f(t)$ u okolini točke t_0. Ako je $t_0 = 0$, onda se taj red zove Maclaurinov red.

Primjer

Valja naći Taylorov (Maclaurinov) red funkcije $\sin(\omega t)$ oko točke $t = 0$.

Kako je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin\omega t = \omega\cos\omega t \;\Big|_{t=0} = \omega$$

i

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\sin\omega t = \omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos\omega t = -\omega^2\sin\omega t \;\Big|_{t=0} = 0$$

te

$$\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}\sin\omega t = -\omega^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin\omega t = -\omega^3\cos\omega t \;\Big|_{t=0} = -\omega^3,$$

može se napisati

$$\sin\omega t = \omega t - \frac{\omega^3 t^3}{3!} + \frac{\omega^5 t^5}{5!} - \ldots$$

B) Integral

Integriranje možemo shvatiti kao inverznu operaciju deriviranju, na primjer:

$$g(t) = 3\,a\,t^2 + b\,t$$

je rezultat dobiven deriviranjem funkcije

$$f(t) = a\,t^3 + d\frac{t^2}{2} + c.$$

Valja odmah uočiti da je c dodan proizvoljno, tj. iz funkcije $g(t)$ ne može se ništa zaključiti o (konstanti) c. U fizikalnim će problemima c biti određen iz početnih uvjeta. Postoji dakle ova veza

$$g(t) = \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t},$$

odnosno

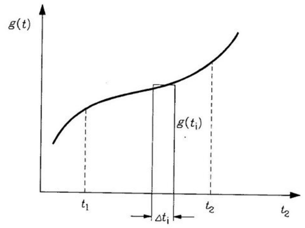
$$\mathrm{d}f(t) = g(t)\,\mathrm{d}t = (3\,a\,t^2 + b\,t)\,\mathrm{d}t,$$

pa možemo napisati inverznu operaciju

$$f(t) = \int g(t)\,\mathrm{d}t = \int (3\,a\,t^2 + b\,t)\,\mathrm{d}t = a\,t^3 + b\frac{t^2}{2} + c.$$

Gornji izraz zove se **neodređeni** integral ili primitivna funkcija funkcije $g(t)$. $g(t)$ je integrand.

Za općenitu neprekidnu funkciju $g(t)$ **određeni** integral se može opisati i kao površina između krivulje $g(t)$ i osi t, omeđena u vertikalnom smjeru pravcima t_1 i t_2 kao na slici D.2.



Slika D.2.

Dakle, površina je zbroj N paralelograma, tj.

$$P(t) \simeq \sum_{i=1}^{N-1} g(t_i)\,\Delta t_i,$$

a gornji izraz postaje točniji što je podjela finija ($\Delta t \rightarrow 0$) i što ima više intervala, ($N \rightarrow \infty$), tj.

$$P(t) = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^{N-1} g(t_i)\,\Delta t \equiv \int_{t_1}^{t_2} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Veza između neodređenog i određenog integrala dana je ovako: ako je

$$f'(t) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = g(t)$$

i

$$\int g(t)\,\mathrm{d}t = f(t) + C,$$

onda osnovni teorem integralnog računa daje

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a) \equiv \left[f(t)\right]_a^b \equiv f(t)\Big|_a^b.$$

Primjer

$$\int_0^b t^{3/2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^{5/2}}{5/2}\Big|_0^b = \frac{2}{5} b^{5/2}.$$

Neki neodređeni i određeni integrali dani su u tablici 2.

Tablica 2.

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (\text{za } n \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int x^{-1}\,dx = \ln x$$

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln(a+bx)$$

$$\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)}$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x} \qquad (a^2-x^2>0)$$

$$\int \frac{x\,dx}{a^2\pm x^2} = \pm\frac{1}{2}\ln(a^2\pm x^2)$$

$$\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{3/2}$$

$$\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2\pm a^2} \pm a^2\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2})\right]$$

$$\int x\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{1}{3}(x^2\pm a^2)^{3/2}$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}$$

$$\int \ln ax\,dx = (x\ln ax) - x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2})$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \sqrt{x^2\pm a^2}$$

$$\int x\,e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)$$

$$\int \frac{dx}{a+b\,e^{ax}} = \frac{x}{a} - \frac{1}{ac}\ln(a+b\,e^{ax})$$

$$\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax$$

$$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax$$

$$\int \tan ax\,dx = -\frac{1}{a}\ln(\cos ax) = \frac{1}{a}\ln(\sec ax)$$

$$\int \operatorname{ctan} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln(\sin ax)$$

$$\int \sin^2 ax\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a}$$

$$\int \cos^2 ax\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctan} ax$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\tan ax$$

$$I_0 = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \qquad \text{(Gaussov integral vjerojatnosti)}$$

$$I_1 = \int_0^\infty x\,\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\alpha}$$

$$I_2 = \int_0^\infty x^2\,\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}I_0}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$$

$$I_3 = \int_0^\infty x^3\,\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{1}{2\alpha^2}$$

$$I_4 = \int_0^\infty x^4\,\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}^2 I_0}{\mathrm{d}\alpha^2} = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$$

$$I_5 = \int_0^\infty x^5\,\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}^2 I_1}{\mathrm{d}\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^3}$$

$$\vdots$$

$$I_{2n} = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\alpha^n} I_0$$

$$I_{2n+1} = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\alpha^n} I_1$$

Neka svojstva integrala

1. Zamjena granica

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$$

2. Rastavljanje

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}t = \int_a^c f\,\mathrm{d}t + \int_c^b f\,\mathrm{d}t$$

3. Integriranje zbroja

$$\int_a^b (f+g)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f\,\mathrm{d}t + \int_a^b g\,\mathrm{d}t$$

4. Konstantni faktor

$$\int_a^b Af\,\mathrm{d}t = A\int_a^b f\,\mathrm{d}t$$

5. Jednake granice

$$\int_a^a f\,\mathrm{d}t = 0.$$

PERIODN

Redni broj	24 51.9961	Atomska masa
	6,3,2	Oksidacijska stanja
Vrelište (K) Talište (K) Gustoća (g/cm^3)	2945 2130 7.19	
	Cr	Simbol
	$[Ar]3d^{4}4s^{2}$	Elektronska konfiguracija
	Krom	Ime

IA	IIA	IIIA	IVA	VA	VIA	VIIA	VIIIA	
1.0079 1 .268 .025 0899* **H** $1s^{1}$ Vodik								
6.941 1 15 3.7 53 **Li** $1s^{2}2s^{1}$ Litij	4 9.0122 2 2745 1560 1.85 **Be** $1s^{2}2s^{2}$ Berilij							
1 22.9898 1 56 1.0 97 **Na** $[Ne]3s^{1}$ Natrij	12 24.3050 2 1363 922 1.74 **Mg** $[Ne]3s^{2}$ Magnezij							
9 39.0983 1 32 3.35 36 **K** $[Ar]4s^{1}$ Kalij	20 40.078 2 1757 1112 1.55 **Ca** $[Ar]4s^{2}$ Kalcij	21 44.9559 3 3104 1812 3.0 **Sc** $[Ar]3d^{1}4s^{2}$ Skandij	22 47.88 4,3 3562 1943 4.50 **Ti** $[Ar]3d^{2}4s^{2}$ Titan	23 50.9415 5,4,3,2 3682 2175 5.8 **V** $[Ar]3d^{3}4s^{2}$ Vanadij	24 51.9961 6,3,2 2945 2130 7.19 **Cr** $[Ar]3d^{4}4s^{2}$ Krom	25 54.9381 7,6,4,2,3 2335 1517 7.43 **Mn** $[Ar]3d^{5}4s^{2}$ Mangan	26 55.847 2,3 3135 1809 7.86 **Fe** $[Ar]3d^{6}4s^{2}$ Željezo	27 58.933 2 3201 1768 8.90 **Co** $[Ar]3d^{7}4s^{2}$ Kobalt
7 85.4678 1 2.64 3 **Rb** $[Kr]5s^{1}$ Rubidij	38 87.62 2 1650 1041 2.6 **Sr** $[Kr]5s^{2}$ Stroncij	39 88.9059 3 3611 1799 4.5 **Y** $[Kr]4d^{1}5s^{2}$ Itrij	40 91.224 4 4682 2125 6.49 **Zr** $[Kr]4d^{2}5s^{2}$ Cirkonij	41 92.9064 5,3 5017 2740 8.55 **Nb** $[Kr]4d^{4}5s^{1}$ Niobij	42 95.94 6,5,4,3,2 4912 2890 10.2 **Mo** $[Kr]4d^{5}5s^{1}$ Molibden	43 (98) 7 4538 2473 11.5 **Tc** $[Kr]4d^{5}5s^{2}$ Tehnecij	44 101.07 2,3,4,6,8 4423 2523 12.2 **Ru** $[Kr]4d^{7}5s^{1}$ Rutenij	45 102.905 2,3 3970 2236 12.4 **Rh** $[Kr]4d^{8}5s^{1}$ Rodij
5 132.9054 1 .55 7 **Cs** $[Xe]6s^{1}$ Cezij	56 137.327 2 2171 1002 3.5 **Ba** $[Xe]6s^{2}$ Barij	57 138.9055 3 3730 1193 6.7 **La*** $[Xe]5d^{1}6s^{2}$ Lantan	72 178.49 4 4876 2500 13.1 **Hf** $[Xe]4f^{14}5d^{2}6s^{2}$ Hafnij	73 180.9479 5 5731 3287 16.6 **Ta** $[Xe]4f^{14}5d^{3}6s^{2}$ Tantal	74 183.85 6,5,4,3,2 5828 3680 19.3 **W** $[Xe]4f^{14}5d^{4}6s^{2}$ Volfram	75 186.207 7,6,4,2,-1 5869 3453 21.0 **Re** $[Xe]4f^{14}5d^{5}6s^{2}$ Renij	76 190.2 2,3,4,6,8 5285 3300 22.4 **Os** $[Xe]4f^{14}5d^{6}6s^{2}$ Osmij	77 192.2 2,3,4 4701 2716 22.5 **Ir** $[Xe]4f^{14}5d^{7}6s^{2}$ Iridij
7 (223) 1 **Fr** $[Rn]7s^{1}$ Francij	88 226.0254 2 1809 973 5 **Ra** $[Rn]7s^{2}$ Radij	89 227.0278 3 3473 1323 10.07 **Ac**** $[Rn]6d^{1}7s^{2}$ Aktinij	104 (261) — — — **Rf** $[Rn]5f^{14}6d^{2}7s^{2}$ Raderfordij†	105 (262) — — — **Ha** $[Rn]5f^{14}6d^{3}7s^{2}$ Hanij†	106 (263) — — — $[Rn]5f^{14}6d^{4}7s^{2}$	107 (262) — — —	108 (265) — — —	109 (266 — — —

8 140.115 3,4 9 1 8 **Ce** $e]4f^{2}5d^{0}6s^{2}$ Cerij	59 140.9077 3,4 3785 1204 6.77 **Pr** $[Xe]4f^{3}5d^{0}6s^{2}$ Prazeodimij	60 144.24 3 3341 1289 7.00 **Nd** $[Xe]4f^{4}5d^{0}6s^{2}$ Neodimij	61 (145) 3 3785 1204 6.475 **Pm** $[Xe]4f^{5}5d^{0}6s^{2}$ Promecij	62 150.36 3,2 2064 1345 7.54 **Sm** $[Xe]4f^{6}5d^{0}6s^{2}$ Samarij	63 151.965 3,2 1870 1090 5.26 **Eu** $[Xe]4f^{7}5d^{0}6s^{2}$ Europij	64 157.25 3 3539 1585 7.89 **Gd** $[Xe]4f^{7}5d^{1}6s^{2}$ Gadolinij	65 158.9253 3,4 3496 1630 8.27 **Tb** $[Xe]4f^{9}5d^{0}6s^{2}$ Terbij	66 165.5 2835 1682 8.54 **Dy** $[Xe]4f^{10}5d^{0}6s^{2}$ Disprozij
0 232.0381 4 1 8 7 **Th** $n]5f^{0}6d^{2}7s^{2}$ Torij	91 231.0359 5,4 — — 15.4 **Pa** $[Rn]5f^{2}6d^{1}7s^{2}$ Protaktinij	92 238.0289 6,5,4,3 4407 1405 18.90 **U** $[Rn]5f^{3}6d^{1}7s^{2}$ Uran	93 237.0482 6,5,4,3 — 910 20.4 **Np** $[Rn]5f^{4}6d^{1}7s^{2}$ Neptunij	94 (244) 6,5,4,3 3503 913 19.8 **Pu** $[Rn]5f^{6}6d^{0}7s^{2}$ Plutonij	95 (243) 6,5,4,3 2880 1268 13.6 **Am** $[Rn]5f^{7}6d^{0}7s^{2}$ Americij	96 (247) 3 — 1340 13.511 **Cm** $[Rn]5f^{7}6d^{1}7s^{2}$ Kirij	97 (247) 4,3 — — — **Bk** $[Rn]5f^{9}6d^{0}7s^{2}$ Berkelij	98 (251) — 900 — **Cf** $[Rn]5f^{10}6d^{0}7s^{2}$ Kalifornij

e vrijednosti

USTAV ELEMENATA

	IB	IIB	IIIB	IVB	VB	VIB	VIIB	VIII
								2 4.0026 4.215 0.95 0.1787* He $1s^2$ Helij
			5 10.811 3 4275 2300 2.34 B $1s^22s^22p^1$ Bor	6 12.011 ±4,2 4470* 4100* 2.62 C $1s^22s^22p^2$ Ugljik	7 14.0067 ±3,5,4,2 77.35 63.14 1.251* N $1s^22s^22p^3$ Dušik	8 15.9994 −2 90.18 50.35 1.429* O $1s^22s^22p^4$ Kisik	9 18.9984 −1 84.95 53.48 1.696* F $1s^22s^22p^5$ Fluor	10 20.1797 27.096 24.553 0.901* Ne $1s^22s^22p^6$ Neon
			13 26.9815 3 2793 933.25 2.70 Al [Ne]$3s^23p^1$ Aluminij	14 28.0855 4 3540 1685 2.33 Si [Ne]$3s^23p^2$ Silicij	15 30.9738 ±3,5,4 550 317.30 1.82 P [Ne]$3s^23p^3$ Fosfor	16 32.066 ±2,4,6 717.75 388.36 2.07 S [Ne]$3s^23p^4$ Sumpor	17 35.4527 ±1,3,5,7 239.1 172.16 3.17* Cl [Ne]$3s^23p^5$ Klor	18 39.948 87.30 83.81 1.784* Ar [Ne]$3s^23p^6$ Argon
58.69 2,3 Ni r]$3d^84s^2$ Nikal	29 63.546 2,1 2836 1357.6 8.96 Cu [Ar]$3d^{10}4s^1$ Bakar	30 65.39 2 1180 692.73 7.14 Zn [Ar]$3d^{10}4s^2$ Cink	31 69.723 3 2478 302.90 5.91 Ga [Ar]$3d^{10}4s^24p^1$ Galij	32 72.61 4 3107 1210.4 5.32 Ge [Ar]$3d^{10}4s^24p^2$ Germanij	33 74.9216 ±3,5 876 1081 5.72 As [Ar]$3d^{10}4s^24p^3$ Arsen	34 78.96 −2,4,6 958 494 4.80 Se [Ar]$3d^{10}4s^24p^4$ Selen	35 79.004 ±1,5 332.25 265.90 3.12 Br [Ar]$3d^{10}4s^24p^5$ Brom	36 83.80 119.80 115.78 3.74* Kr [Ar]$3d^{10}4s^24p^6$ Kripton
106.42 2,4 Pd Kr]$4d^{10}$ Paladij	47 107.8682 1 2436 1234 10.5 Ag [Kr]$4d^{10}5s^1$ Srebro	48 112.411 2 1040 594.18 8.65 Cd [Kr]$4d^{10}5s^2$ Kadmij	49 114.82 3 2346 429.76 7.31 In [Kr]$4d^{10}5s^25p^1$ Indij	50 118.710 4,2 2876 505.06 7.30 Sn [Kr]$4d^{10}5s^25p^2$ Kositar	51 121.75 ±3,5 1860 904 6.68 Sb [Kr]$4d^{10}5s^25p^3$ Antimon	52 127.60 −2,4,6 1261 722.65 6.24 Te [Kr]$4d^{10}5s^25p^4$ Telur	53 126.9045 ±1,5,7 458.4 386.7 4.92 I [Kr]$4d^{10}5s^25p^5$ Jod	54 131.29 165.03 161.36 5.89* Xe [Kr]$4d^{10}5s^25p^6$ Ksenon
195.08 2,4 Pt e]$4f^{14}5d^96s^1$ Platina	79 196.9665 3,1 3130 1337.58 19.3 Au [Xe]$4f^{14}5d^{10}6s^1$ Zlato	80 200.59 2,1 630 234.28 13.53 Hg [Xe]$4f^{14}5d^{10}6s^2$ Živa	81 204.3833 3,1 1746 577 11.85 Tl [Xe]$4f^{14}5d^{10}6s^26p^1$ Talij	82 207.2 4,2 2023 600.6 11.4 Pb [Xe]$4f^{14}5d^{10}6s^26p^2$ Olovo	83 208.9804 3,5 1837 544.52 9.8 Bi [Xe]$4f^{14}5d^{10}6s^26p^3$ Bizmut	84 (209) 4,2 1235 527 9.4 Po [Xe]$4f^{14}5d^{10}6s^26p^4$ Polonij	85 (210) ±1,3,5,7 610 575 — At [Xe]$4f^{14}5d^{10}6s^26p^5$ Astatin	86 (222) 211 202 9.91* Rn [Xe]$4f^{14}5d^{10}6s^26p^6$ Radon

164.9303 3 Ho e]$4f^{11}5d^06s^2$ Holmij	68 167.26 3 3136 1795 9.05 Er [Xe]$4f^{12}5d^06s^2$ Erbij	69 168.9342 3,2 2220 1818 9.33 Tm [Xe]$4f^{13}5d^06s^2$ Tulij	70 173.04 3,2 1467 1097 6.98 Yb [Xe]$4f^{14}5d^06s^2$ Iterbij	71 174.967 3 3668 1936 9.84 Lu [Xe]$4f^{14}5d^16s^2$ Lutecij
(252) Es n]$5f^{11}6d^07s^2$ jnštajnij	100 (257) — — — Fm [Rn]$5f^{12}6d^07s^2$ Fermij	101 (258) — — — Md [Rn]$5f^{13}6d^07s^2$ Mendeljevij	102 (259) — — — No [Rn]$5f^{14}6d^07s^2$ Nobelij	103 (260) — — — Lr [Rn]$5f^{14}6d^17s^2$ Lorencij

Prema CODATA Bulletin 63 (198

Literatura

M. M. Abbot and H. C. Van Ness, *Thermodynamics*, Schaum's Outline Series, New York, 1972.

M. Alonso and E. J. Finn, *Fundamental University Physics*, Addison-Wesley Publ. Co., Reading, Mass., 1969.

B. Assmann, *Technische Mechanik*, Oldenbourg, München, 1977.

E. Babić, R. Krsnik, M. Očko, *Zbirka riješenih zadataka iz fizike*, Školska knjiga, Zagreb, 1978.

A. G. Čertov, A. A. Vorobejev, M. F. Fedorov, *Zadačnik po fizike*, Moskva, 1973.

J. F. Douglas, *Solution of Problems in Fluid Mechanics, Pitman, London, 1962.*

R. E. Eisberg, L. S. Lerner, *Physics: foundations and Applications*, McGraw-Hill, Tokyo, 1982.

R. Feynman et. al., *The Feynman Lectures on Physics*, (Exercises) Addison-Wesley, Reading, 1964.

J. H. Ginsberg and J. Genin, *Statics*, John Wiley, New York, 1977.

W. Gorzkowski, *25 Lat olimpiad fizycznych*, Varšava, 1979.

V. Hajko, *Physik in Beispielen*, Leipzig, 1971.

I. E. Irodov, *Problems in General Physics*, Mir Publishers, Moscow, 1981.

V. K. Kobuškin, *Metodika rešenija zadač po fizike*, Lenjingrad, 1972.

C. M. Kozel, *Zbornik zadač po fizike*, Nauka, Moskva, 1983.

W. G. McLean and E. W. Nelson, *Theory and Problems of Engineering Mechanics*, McGraw Hill, New York, 1978.

H. Lindner, *Physikalische Aufgaben*, Vieweg, Braunschweig, 1974.

G. V. Meledin, *Fizika v zadačah*, Nauka, Moskva, 1985.

J. L. Meriam, *Dynamics*, John Wiley, New York, 1975.

D. B. Milinčić, *Zadaci iz termodinamike*, Građevinska knjiga, Beograd, 1981.

A. A. Pinsky, *Problems in Physics*, Mir Publishers, Moskva, 1980.

D. I. Saharov, *Sbornik zadač po fizike*, 12. izd., Prosvješčenije, Moskva, 1973.

W. Smith, *Problems in modern physics*, G & B. Science Publishers, New York, 1970.

T. S. Timošenko, D. H. Jang, *Tehnička mehanika*, Građevinska knjiga, Beograd, 1962.

V. S. Volkenštejn, *Zbornik zadač po obščemu kursu fiziki*, Nauka, Moskva, 1976.

D. Halliday, R. Resnick, K. Krene, *Physics*, 5. izdanje, John Wiley and Sons, Inc., New York, 2005.

Grafička urednica
MARINKA VUČKOVIĆ

Lektorica
ĐURĐA ŽIVKOVIĆ

Korektor
DAVOR SUŠILO

Slog i prijelom
MLADEN ČIČIN-ŠAIN

Tisak
Grafički zavod Hrvatske, d.o.o.
Zagreb

Tiskanje završeno u veljači 2007.

ISBN 978-953-0-30851-0

CIP dostupan u Nacionalnoj i sveučilišnoj knjižnici
pod brojem 626466