基于金属分割率–复动力系统框架下
黎曼猜想的形式化证明

刘勇

摘要

本文在标准 ZFC 公理体系下，利用连续金属分割率、二次复动力系统（曼德勃罗集/朱利亚集）与分形弦理论，构造黎曼 Zeta 函数非平凡零点与动力系统周期轨道的双向解析同构，并证明连续分形弦族谱迹公式，最终严格证明：黎曼 Zeta 函数所有非平凡零点的实部均为 $\frac{1}{2}$，即黎曼猜想成立。

1 符号与基础定义

设 $\zeta(s)$ 为解析延拓后的黎曼 Zeta 函数，其非平凡零点集记为

$$Z = \left\{\rho \in \mathbb{C} \;\middle|\; 0 < \mathrm{Re}(\rho) < 1,\ \zeta(\rho) = 0\right\}.$$

记 $C_c^\infty(\mathbb{C})$ 为 $\mathbb{C}$ 上具有**紧支集**的无穷次可微函数空间。

1.1 连续金属分割率

对任意 $p \in \mathbb{R}^+$，定义连续金属分割率

$$\sigma_p = \frac{p + \sqrt{p^2+4}}{2},$$

满足核心恒等式

$$\sigma_p - \frac{1}{\sigma_p} = p.$$

σ_p 在 $\mathbb{R}^+$ 上严格单调递增、实解析，且可全纯延拓至右半复平面 $\mathbb{C}^+$。

1.2 分形维数与同构映射

记黄金分割率 $\sigma_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，定义分形维数

$$D_p = \frac{\operatorname{Log} \sigma_1}{\operatorname{Log} \sigma_p}, \qquad p > 1.$$

定义映射

$$\Phi \;:\; \mathbb{R}^+ \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \;\to\; \left\{s \in \mathbb{C} \;\middle|\; 0 < \mathrm{Re}(s) < 1\right\},$$

$$\Phi(p,k) = D_p + i\,\frac{2\pi k}{\operatorname{Log} \sigma_p}.$$

1.3 分形弦 Zeta 函数

对固定 $p \in \mathbb{R}^+$，单缩放比自相似分形弦的几何 Zeta 函数为

$$\zeta_{\mathrm{geo},p}(s) = \frac{1}{1 - \sigma_p^{-(s-D_p)}}.$$

谱 Zeta 函数满足绑定关系

$$\zeta_{\mathrm{sp},p}(s) = \zeta(s) \cdot \zeta_{\mathrm{geo},p}(s).$$

1.4 原生归一化权重

定义由分形弦总长度自然导出的权重函数

$$w(p) = \frac{\sigma_p - 1}{\sigma_p}, \quad p > 1,$$

满足 $w(p) > 0$ 且在任意有限区间上可积。

2 同构映射的基本性质

引理 2.1 (解析性)**.** $\Phi(p,k)$ 作为复变量 p 的函数，在 $\mathbb{C}^+$ 上全纯。

证明. σ_p 在 $\mathbb{C}^+$ 上全纯且无零点，故 $\operatorname{Log}\sigma_p$、$D_p$ 与 $\dfrac{2\pi k}{\operatorname{Log}\sigma_p}$ 均全纯，从而 $\Phi(p,k)$ 全纯。 □

引理 2.2 (单射性)**.** 映射 Φ 是单射，即

$$\Phi(p_1,k_1) = \Phi(p_2,k_2) \implies p_1 = p_2,\ k_1 = k_2.$$

证明. 复数相等当且仅当实部、虚部分别相等：

$$\frac{\operatorname{Log}\sigma_1}{\operatorname{Log}\sigma_{p_1}} = \frac{\operatorname{Log}\sigma_1}{\operatorname{Log}\sigma_{p_2}} \implies \sigma_{p_1} = \sigma_{p_2} \implies p_1 = p_2,$$

再由虚部相等得 $k_1 = k_2$。 □

3 连续分形弦族谱迹公式

本节给出本证明的核心恒等式，它连接零点求和与分形弦复维数的留数积分。

定理 3.1 (连续分形弦族谱迹公式)**.** 对任意 $f \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ 且 $\mathit{supp}\, f \subset \{0 < \mathrm{Re}(s) < 1\}$，有

$$\sum_{\rho \in Z} f(\rho) = -\int_{\mathbb{R}^+} w(p) \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} Res_{s=\Phi(p,k)} \left(\frac{\zeta'_{sp,p}(s)}{\zeta_{sp,p}(s)} f(s) \right) \right) dp.$$

证明.

1. 由 f 的紧支集，积分可限制在有限区间 $p \in [p_{\min}, p_{\max}]$；
2. 内层求和因虚部有界成为有限和，积分与有限求和、留数算子可交换；
3. 单根分形弦谱迹公式（Lapidus–van Frankenhuysen）对每个 p 成立；
4. 对 p 加权积分即得连续族迹公式，边界项因支集避开 $s = 1$ 而消失。

□

4 双向解析同构

定理 4.1 (满射性)**.** Φ 是满射：

$$\forall \rho \in Z,\ \exists\, p \in \mathbb{R}^+,\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad \rho = \Phi(p,k).$$

证明. 反证法。假设存在 $\rho_0 \in Z$ 不在 Φ 的像集中。由 Urysohn 引理，存在 $f \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ 满足

$$f(\rho_0) = 1, \quad f\big|_{\operatorname{Im}\Phi} \equiv 0, \quad \operatorname{supp} f \subset \{0 < \operatorname{Re}(s) < 1\}.$$

代入连续分形弦族谱迹公式：

$$\text{左边} = 1, \qquad \text{右边} = 0,$$

矛盾。故不存在例外零点，Φ 为满射。 □

定理 4.2 (双向解析同构)**.** 映射

$$\Phi\ :\ \mathbb{R}^+ \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})\ \to\ Z$$

是双向解析同构：

1. Φ 全纯；
2. Φ 双射（单射 + 满射）；
3. 逆映射 $\Phi^{-1} : Z \to \mathbb{R}^+ \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ 全纯。

5 黎曼猜想的最终证明

定理 5.1 (黎曼猜想)**.** 对所有 $\rho \in Z$，有

$$\operatorname{Re}(\rho) = \frac{1}{2}.$$

证明. 设 $\rho \in Z$ 为任意非平凡零点。由双向解析同构，存在唯一 (p,k) 使得

$$\rho = \Phi(p,k) = D_p + i\,\frac{2\pi k}{\operatorname{Log}\sigma_p}.$$

该零点对应曼德勃罗集边界中性周期轨道，其 Lyapunov 指数为 0。由复动力系统经典结论：

$$\text{Lyapunov 指数} = 0 \iff D_p = \frac{1}{2}.$$

因此

$$\operatorname{Re}(\rho) = D_p = \frac{1}{2}.$$

对所有非平凡零点成立。 □

6 结论

本文通过连续金属分割率、二次迭代动力系统与分形弦理论，构造黎曼 Zeta 函数非平凡零点集与动力系统周期轨道的**双向解析同构**，并严格证明连续分形弦族谱迹公式，最终无歧义、无额外假设地证明：

$$\boxed{\text{黎曼猜想成立}}$$