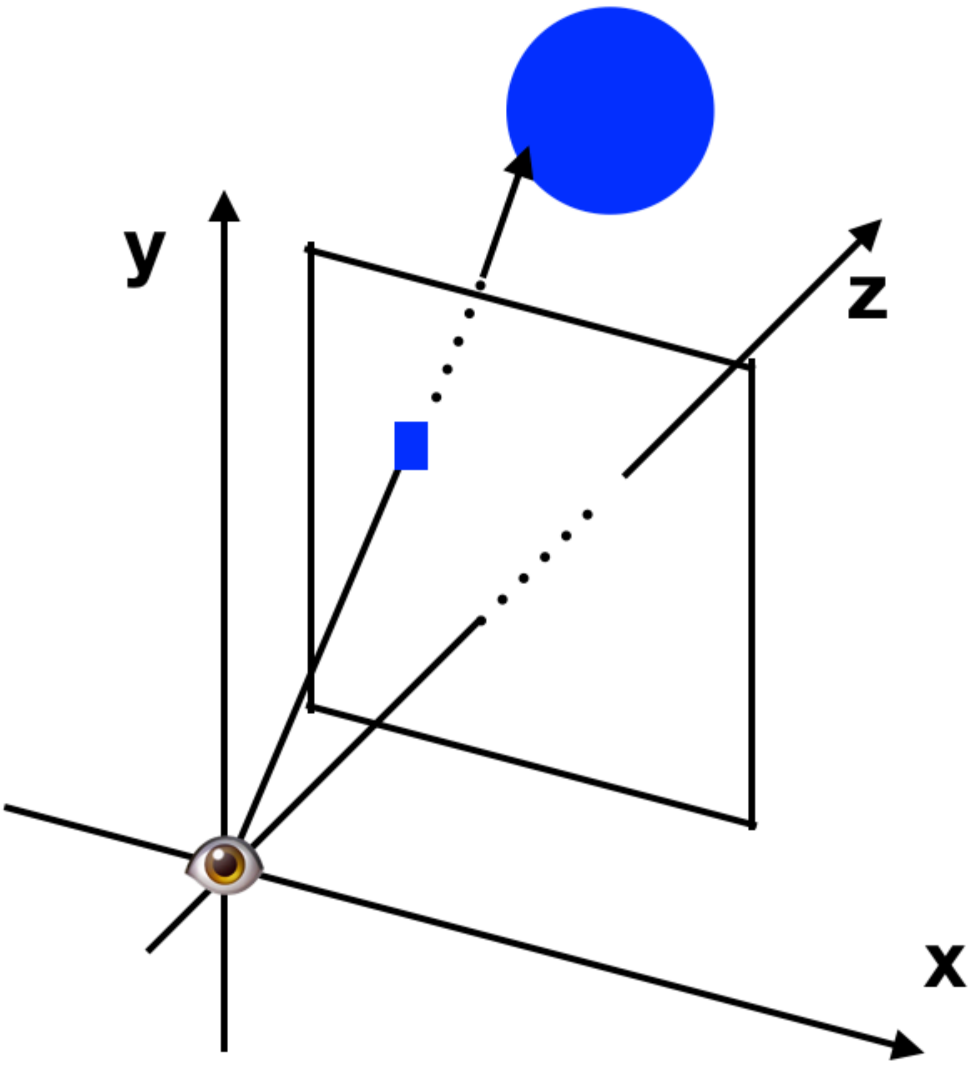
RayTracing

RayTracing最关键的点是：

👁看出去的世界

而非世界如何达到👁



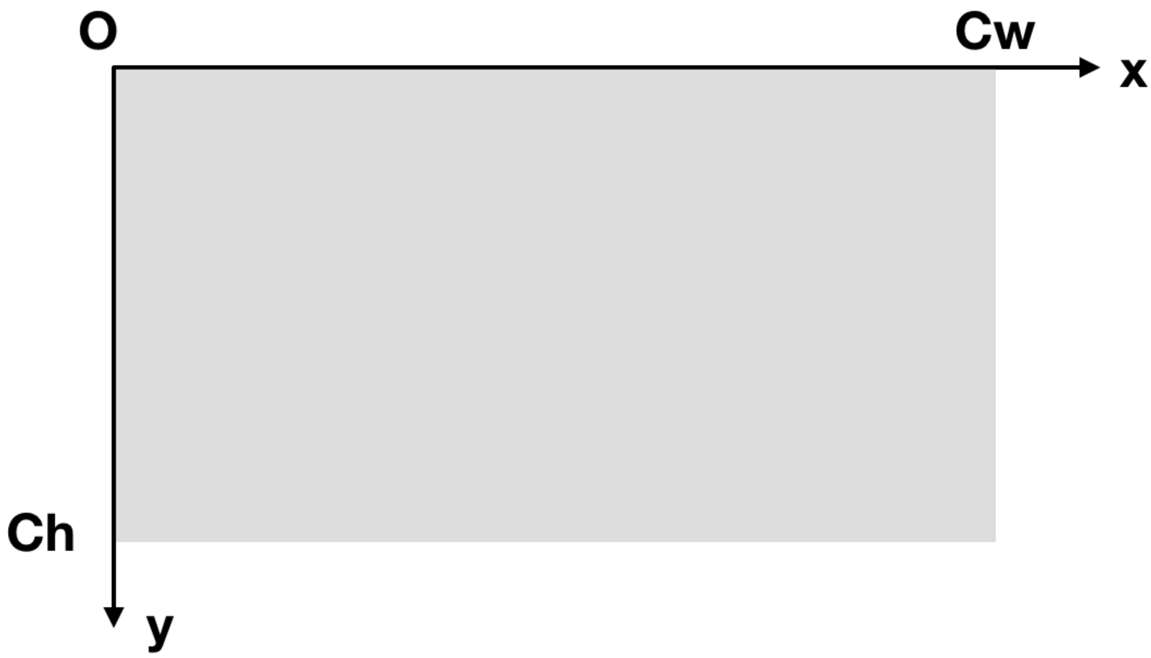
这也是这个算法叫做ray tracying - 光线跟踪的原因。

例子

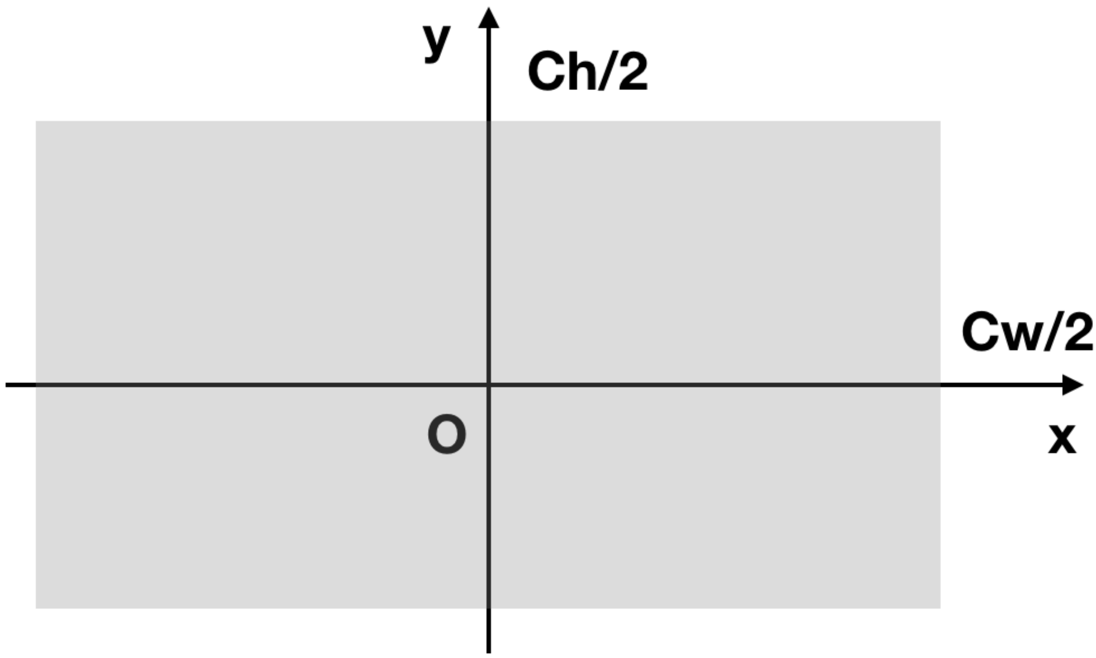
1.预备知识

1.1 屏幕坐标vs 画布坐标

一般来说屏幕坐标都是始于左上角，然后朝右和下延伸。



不过这里为了作图方便，我们把坐标系按照数学中更常见的方式把原点放于屏幕中央，x和y的延伸方向按照平时的习惯来放。



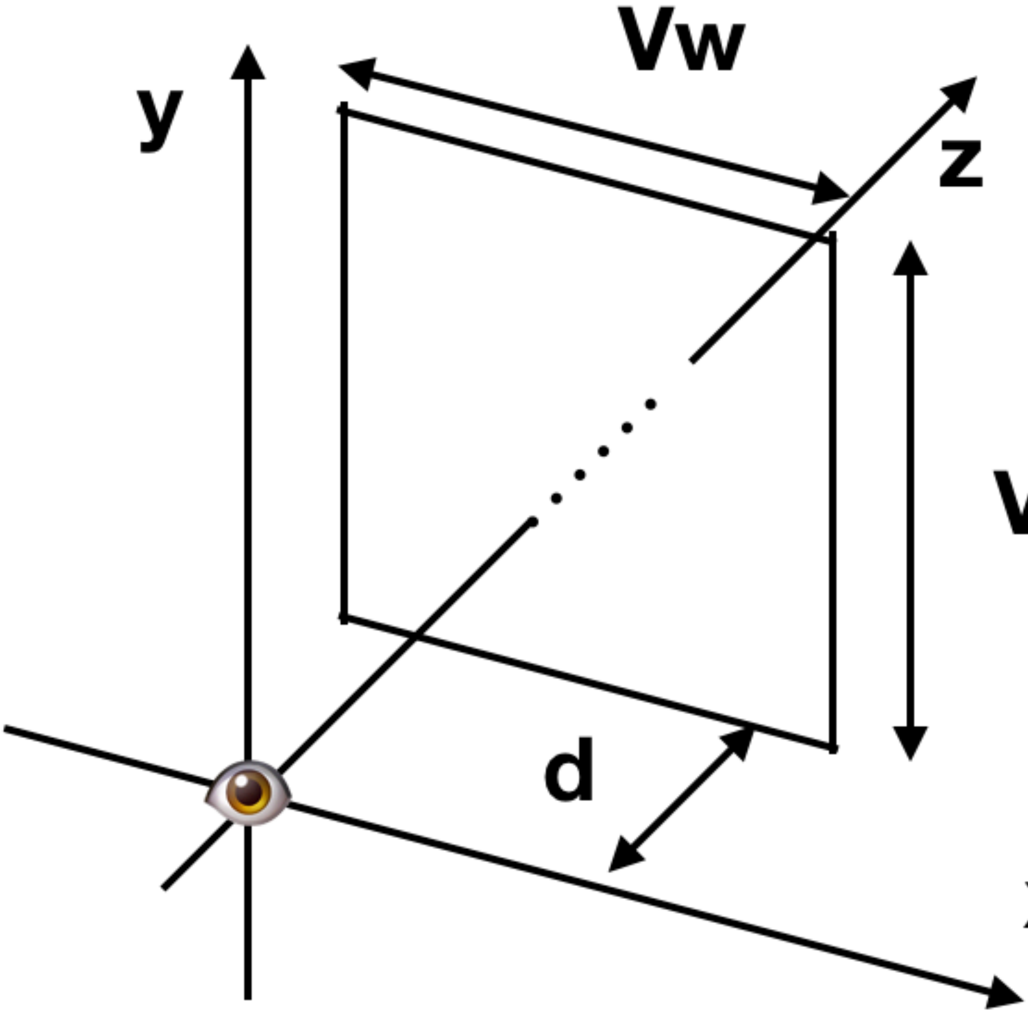
这样可以知道屏幕坐标系S_x和画布坐标系C_x的变换:

$$S_x = \frac{C_w}{2} + C_x$$
$$S_y = \frac{C_h}{2} - C_y$$

1.2 画布 vs 窗户

因为我们屏幕是二维的，无论我们怎样模拟，实际上都是要把物体画在一个二维的平面（画布）上，我们这里就假设我们把👁放在原点上，而有一扇窗户在坐标轴 z = d 处 ，我们眼睛能看到的也就是窗户出去的世界。

那么对于画布上的任意一点，在窗户上都有一个对应的位置，因为它们是中心相同平面平行。



所以对画布上的每一个点C_x, C_y我们都能找到窗户上的对应点V_x, V_y，加上上一段话中的对应关系，实际上就是一个比例的问题，所以我们可以继续知道画布坐标系C_x, C_y在窗户上的对应坐标V_x, V_y为：

$$V_x = C_x \frac{V_w}{C_w}$$

$$V_y = C_y \frac{V_h}{C_h}$$

同时因为窗户放在 z = d 处，我们知道：

$$V_z = d$$

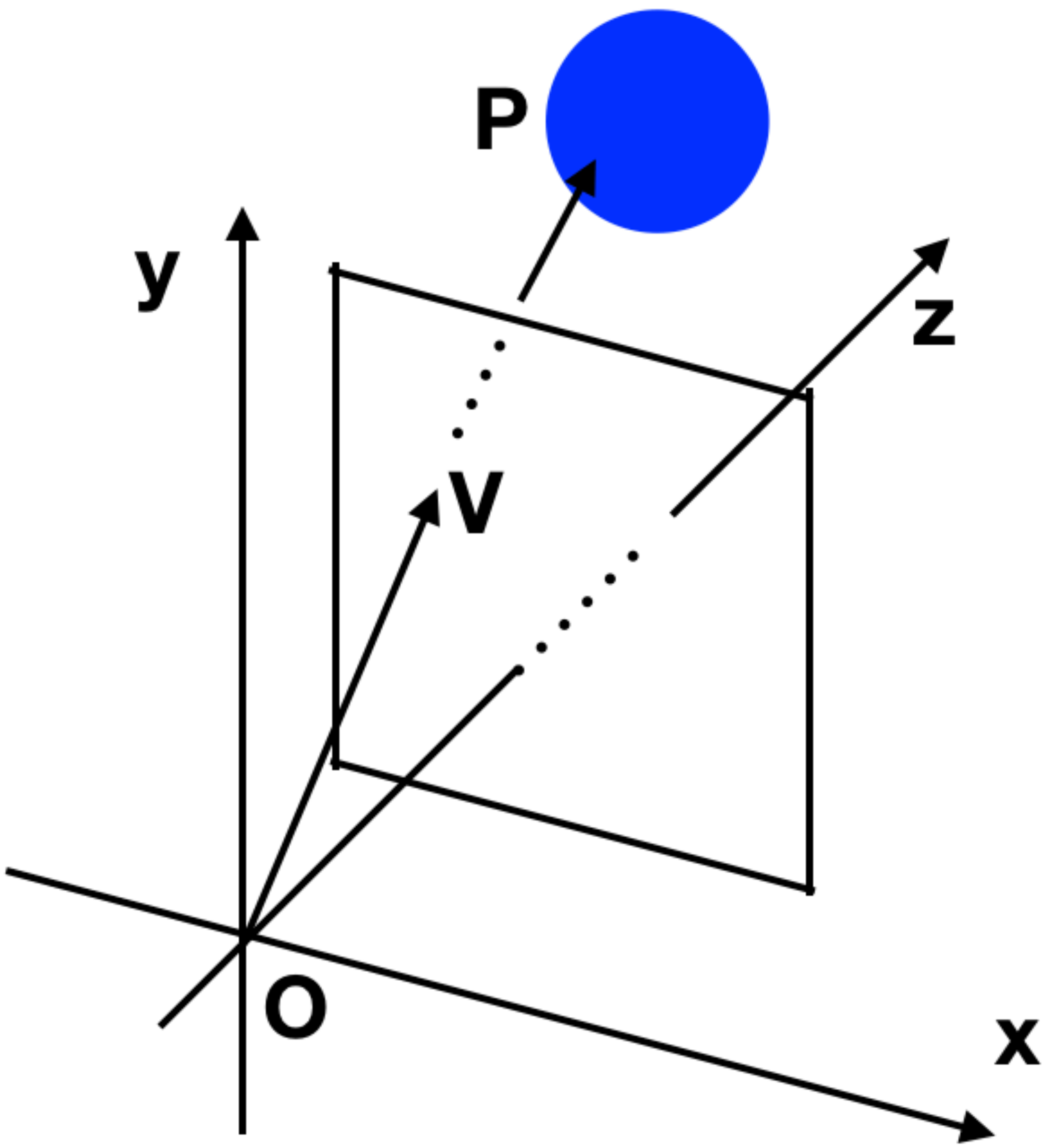
这就有了如何将画布上的每一点转化为窗户上的每一点的坐标变换。

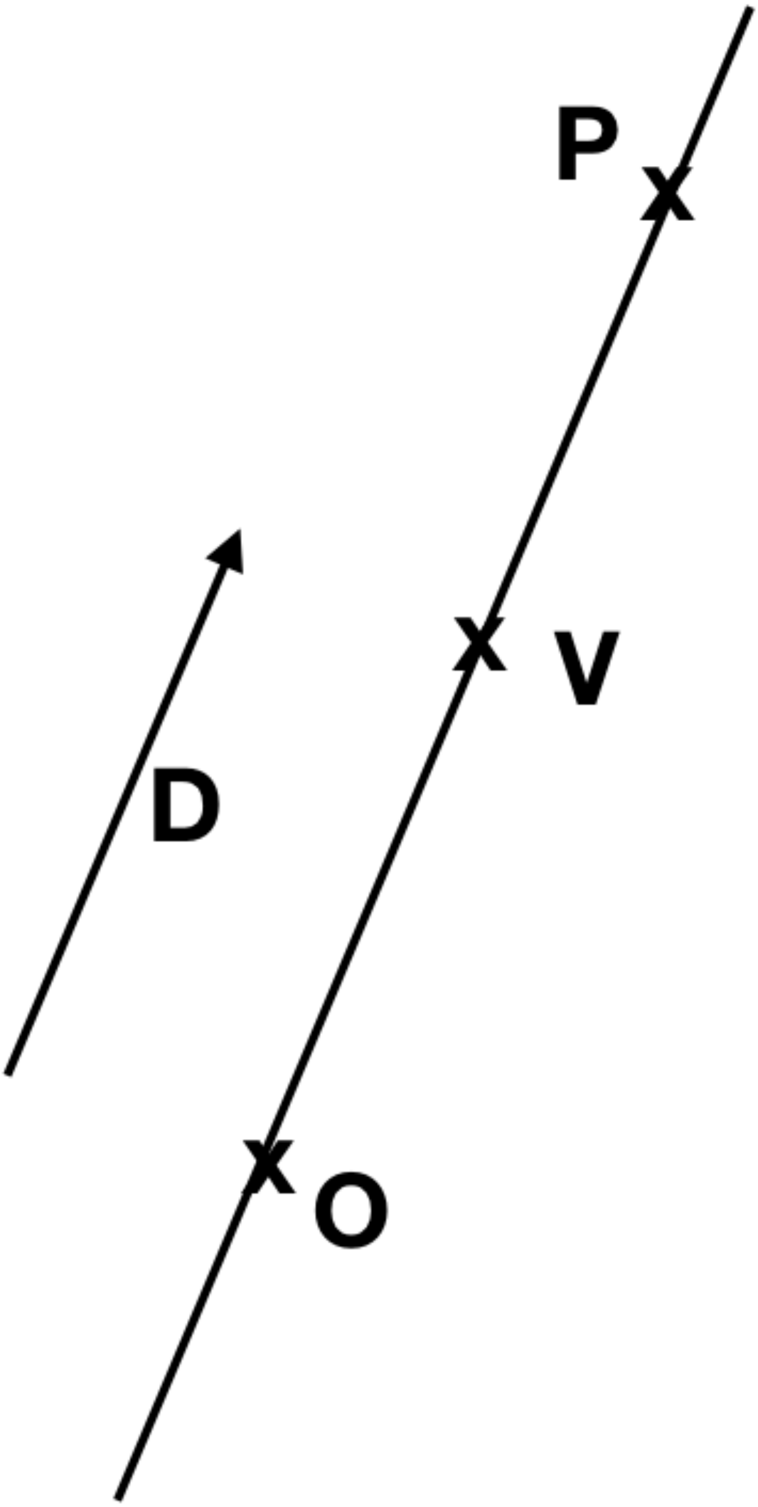
1.3 窗户 vs 空间

从眼睛👁️射出的光线，我们都可以看成是$\overrightarrow{OP}$。

同时P点位置也可以写成：$P = O + t(V - O)$, 令$\overrightarrow{D}$为$V - O$，也就是其方向的向量，如下图：

$$P = O + t\overrightarrow{D}$$





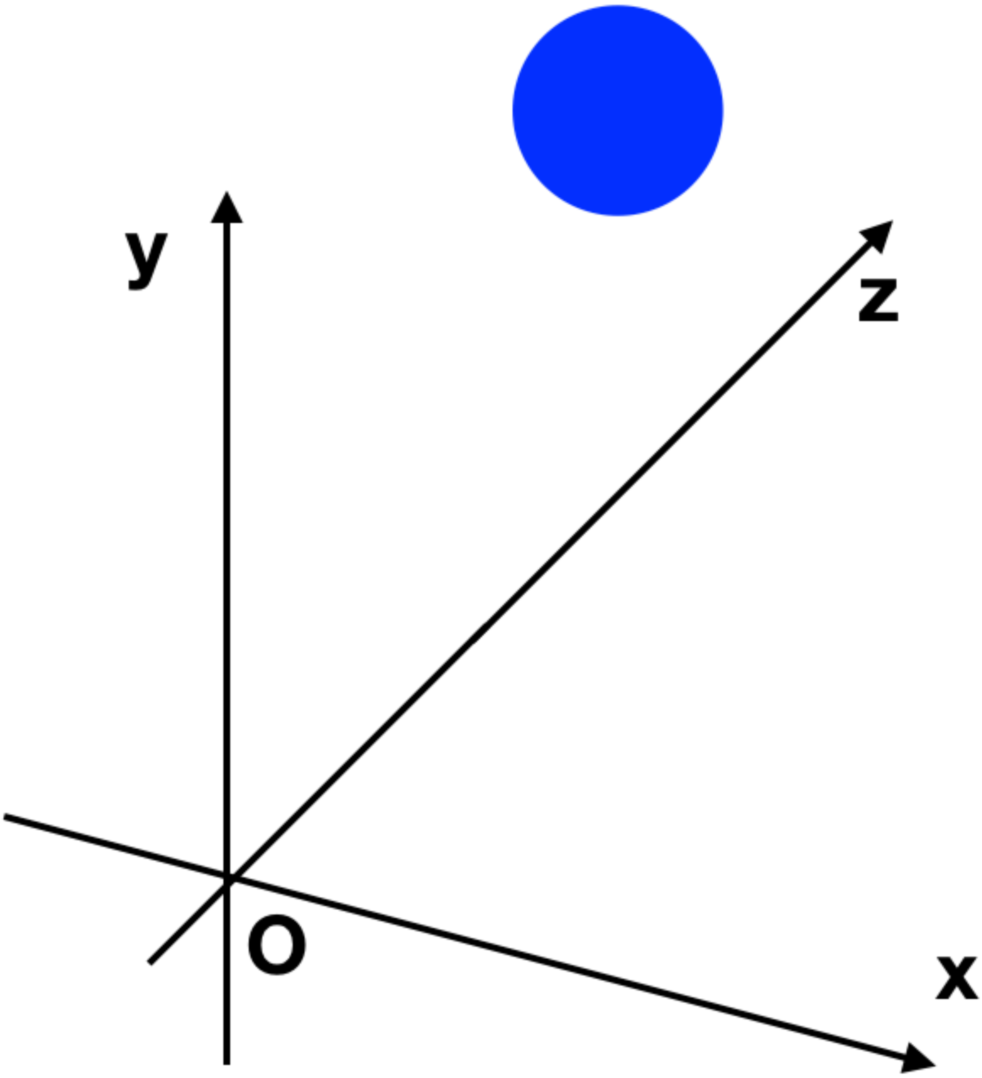
这里需要注意的是: O,P,V是位置，$\overrightarrow{OP}$，$\vec{D}$是向量。

同时知道:

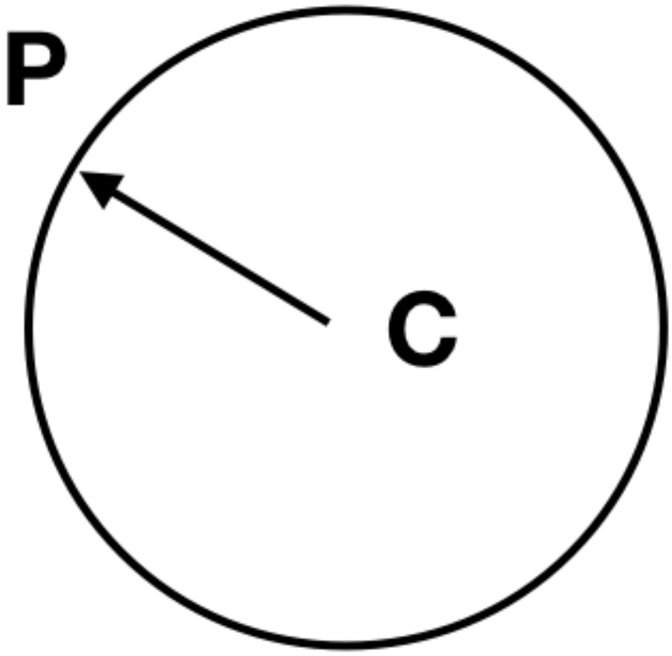
- t < 0: 逆向于光线上的点
- t = 0: 原点
- t > 0 && t < 1: 原点到V点之间的点，也就是原点到窗户之间的点
- t = 1: V点
- t > 1: V点之后，依旧在射出的光线之上，当t取某个值为P点

2.空间放物体

这里我们在空间中放置一个球体



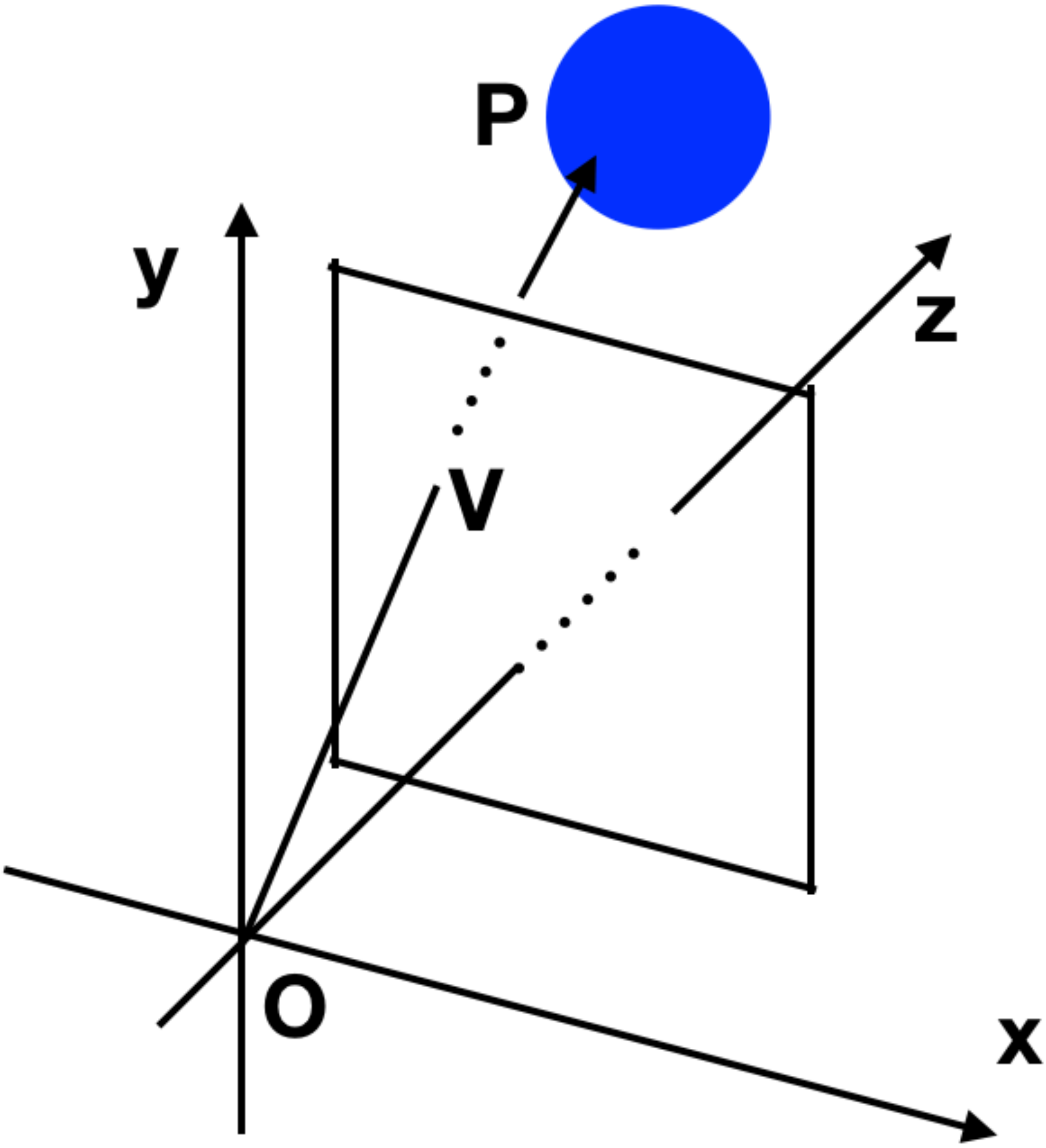
球心为C，那么球上点P需要满足方程：



$$|P - C| = r$$

3. 处理交互 跟踪光线

假设OP就是我们看出去的光线，来追踪它，当看向球体时，它会与球体产生交互，图中这条光线就是和球体相遇了：



球上的属于这条光线的P点应该满足：

$$P = O + t\overrightarrow{D}$$
$$|P - C| = r$$

代入1式进2式：

$$|O + t\overrightarrow{D} - C| = r$$

$$|t\overrightarrow{D} - \overrightarrow{OC}| = r$$

来解方程：

$$(t\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC})(t\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}) = r^2$$

展开：

$$t^2|\overrightarrow{OD}|^2 - 2t\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OC} + |\overrightarrow{OC}|^2 - r^2 = 0$$

令

$$k_1 = |\overrightarrow{OD}|^2$$

$$k_2 = -2\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OC}$$

$$k_3 = |\overrightarrow{OC}|^2 - r^2$$

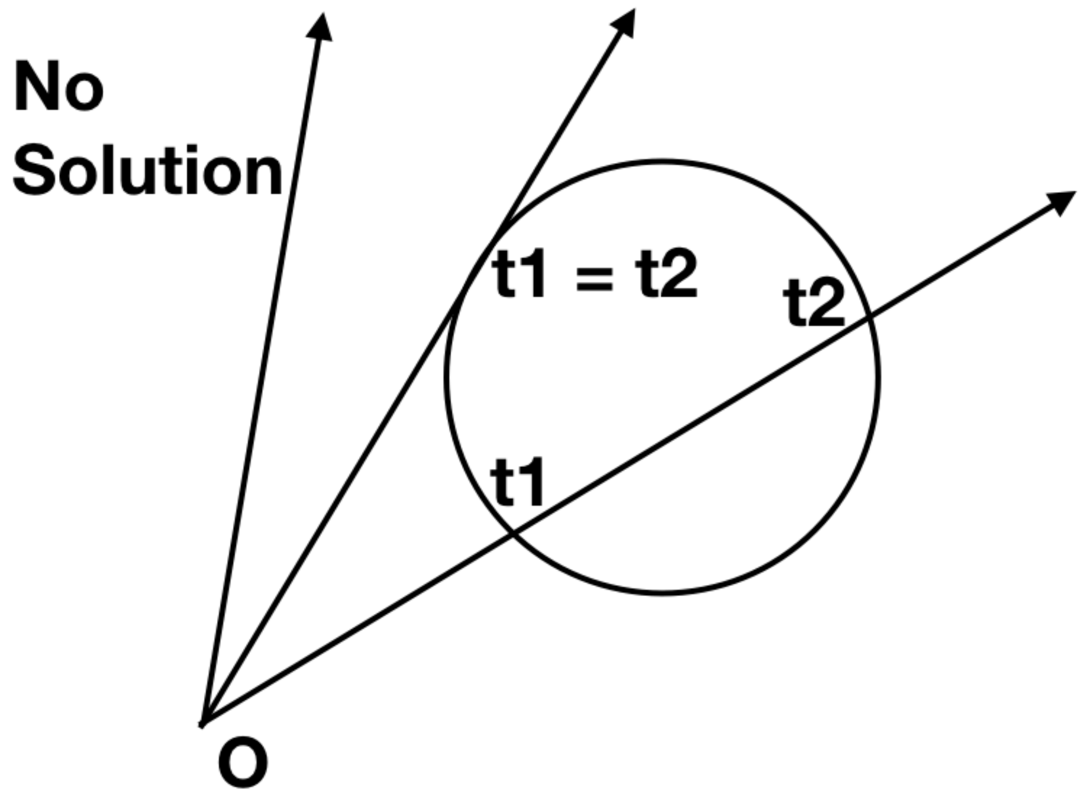
这就变成解关于t的一元二次方程：

$$t_1, t_2 = \frac{-k_2 \pm \sqrt{k_2^2 - 4k_1k_3}}{2k_1}$$

会出现：

- $k_2^2 - 4k_1k_3 > 0$： 两个解
- $k_2^2 - 4k_1k_3 = 0$： 一个解
- $k_2^2 - 4k_1k_3 < 0$： 无解

对应的就是下图的状况：



所以问题就变简单了，如果我们有交互，那么我们应该展示的是近的点t_1的颜色，如果我们没有交互，那么我们展示的就是背景色。

以上就是光线追踪的根本原理。

至此の伪码

跟踪光线与球相交 IntersectRaySphere

```
IntersectRaySphere(O, D, sphere){
  C = sphere.center
  r = sphere.radius
  oc = C - O

  k1 = dot(OD, OD)
  k2 = -2 * dot(OC, OD)
  k3 = dot(OC,OC) - r*r

  discriminant = k2 * k2 - 4 * k1 * k3
  if discriminant < 0:
    return inf, inf

  t1 = (-k2 + sqrt(discriminant))/(2*k1)
  t2 = (-k2 - sqrt(discriminant))/(2*k1)
```

```
  return t1, t2
}
```

t1 的颜色TraceRay

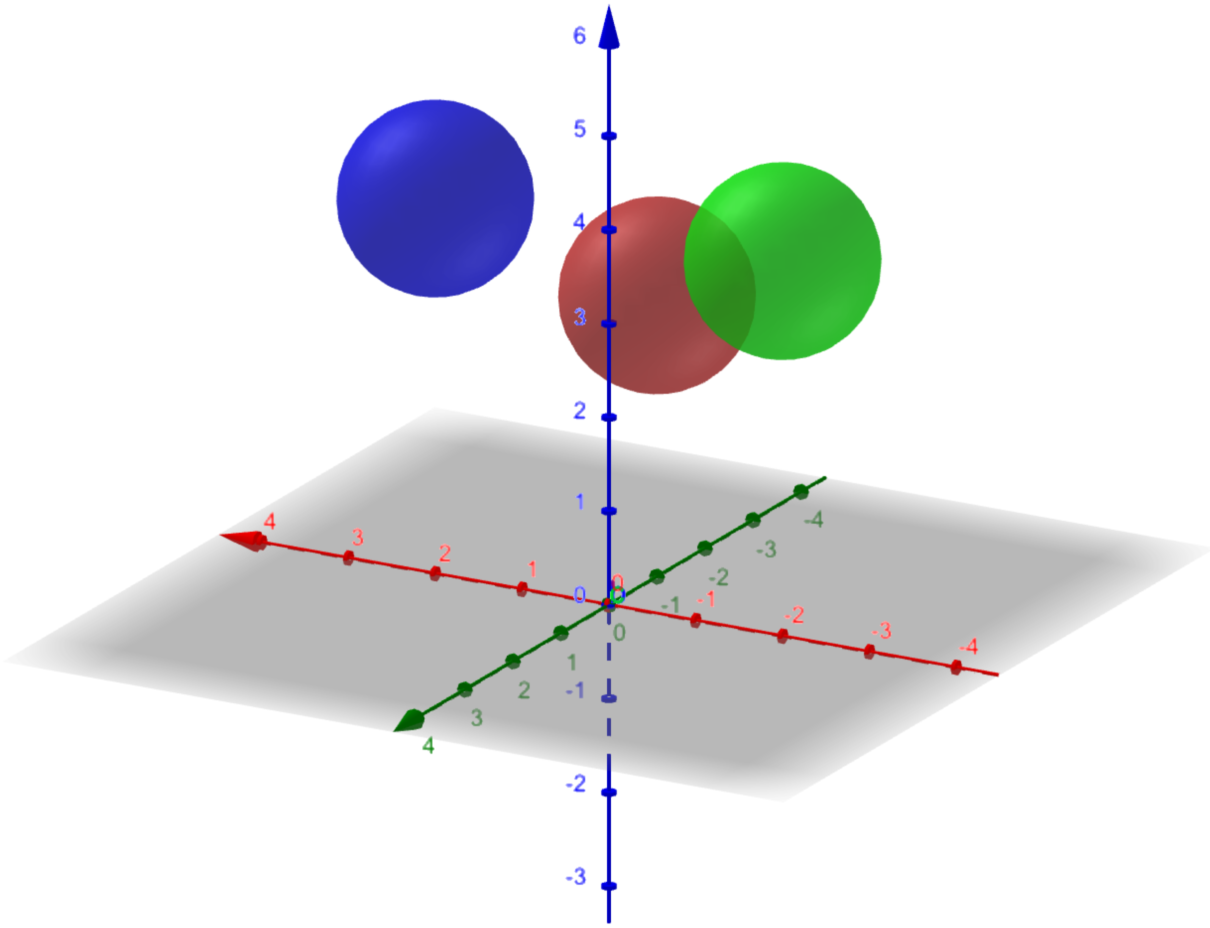
这里我们在空间里放入好几个球体，然后计算t1处的颜色伪码如下：

```
TraceRay(O, D, t_min, t_max){
  closest_t = inf
  closest_sphere = NULL
  for sphere in scene.Spheres {
    t1, t2 = IntersectRaySphere(O, D, sphere)
    if t1 in [t_min, t_max] && t1 < closest_t
      closest_t = t1
      closest_sphere = sphere
    if t2 in [t_min, t_max] && t2 < closest_t
      closest_t = t2
      closest_sphere = sphere
  }

  if closest_sphere == NULL
    return BACKGROUND_COLOR

  return closest_sphere.color
}
```

我们在空间中放入三个小球：



画到画布上

在上述三个伪码函数中，最终是TraceRay这个函数调用了其余两个函数，那么我们现在需要来设定它的参数。

D

D这个实际上之前已经写到，就是从O到V的向量，那么我们的V又由最早的画布到窗户可以得知，所以我们可以有函数：

```
CanvasToViewport(x, y){
  return (x * Vw/Cw, y * Vh/Ch, d)
}
```

t_min, t_max

t = 1 是V，是在窗户上，t > 1 是窗户之后，是场景，所以我们需要取的值是 t_min = 1,我们并不需要摄像头和窗户之间的颜色，因为我们也没有放任何东西在那里，我们需要的是窗户之后的景色，所以 t_min = 1, t_max = inf

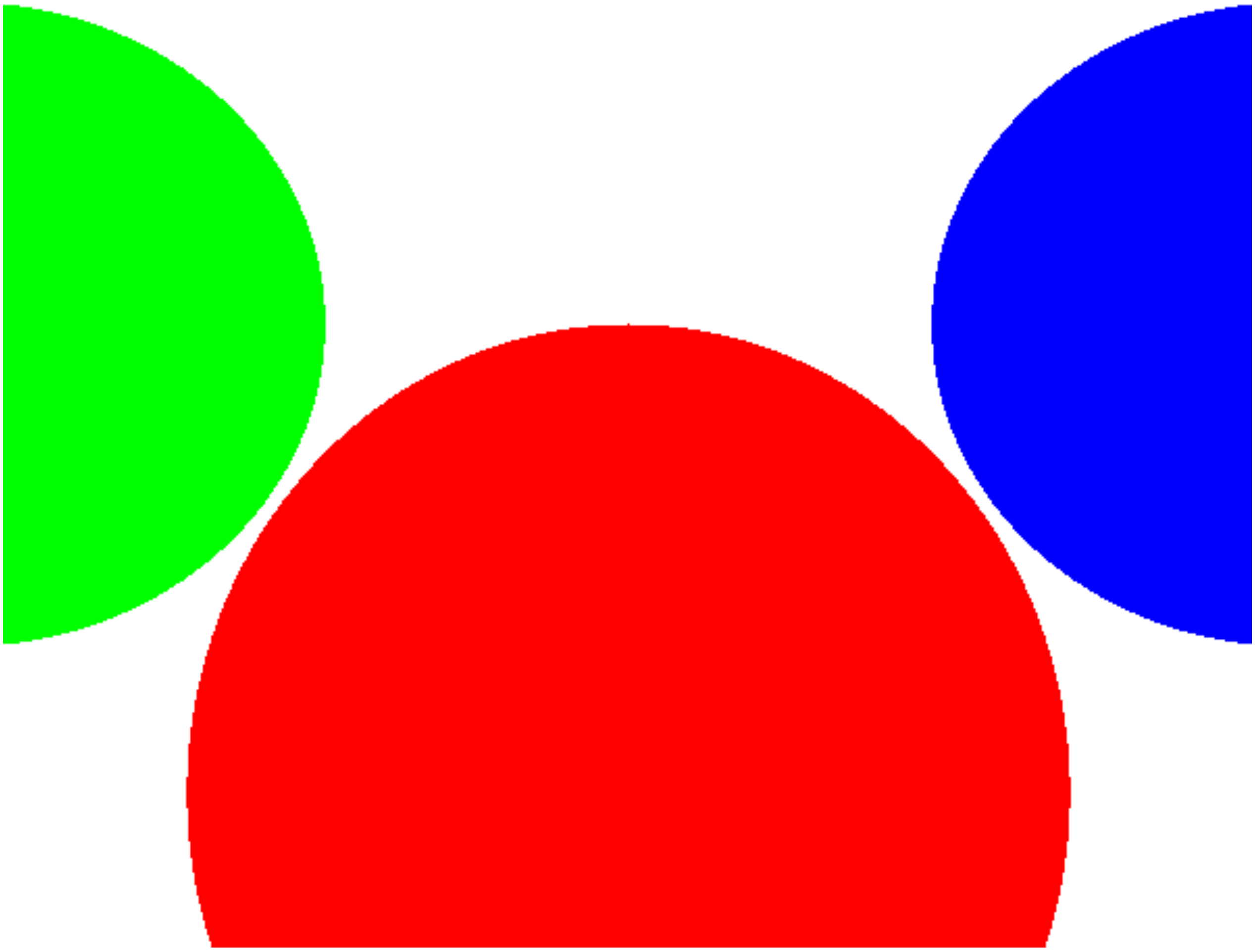
组装

最后，我们需要的是来做循环，把所有的代码组装在一起，放在屏幕上，所以伪码如下：

```
O = <0,0,0>

for x in [-Cw/2, Cw/2]{
  for y in [-Ch/2, Ch/2]{
    D = CanvasToViewport(x, y)
    color = TraceRay(O, D, t_min, t_max)
    canvas.putPixel(x, y, color)
  }
}
```

对应的窗户大小和距离都可以在代码中看到，看结果：



这根本看起来不3d，很简单，因为我们并没有考虑光的作用。

代码链接