

# ITA-2025 Math Essay\*

o1-preview (OpenAI)

November 10, 2024

## Questão 1

Encontre os valores reais  $a$  e  $b$  tais que o polinômio  $p(x) = x^{57} + ax^{14} + bx^7 + 1$ , ao ser dividido por  $x^2 - x + 1$ , deixe resto  $2x + 1$ .

## Solução

Queremos encontrar os valores reais  $a$  e  $b$  tais que, ao dividir o polinômio  $p(x) = x^{57} + ax^{14} + bx^7 + 1$  por  $x^2 - x + 1$ , obtenhamos o resto  $2x + 1$ .

Para resolver o problema, utilizaremos o conceito de congruência polinomial módulo  $x^2 - x + 1$ . Isto é, encontraremos a expressão de  $p(x)$  reduzida módulo  $x^2 - x + 1$ , que será de grau menor que 2, ou seja, um polinômio de grau no máximo 1.

Primeiramente, observamos que, módulo  $x^2 - x + 1$ , temos:

$$x^2 \equiv x - 1$$

Podemos usar esta relação para expressar potências superiores de  $x$  em termos de  $x$  de grau menor que 2. Notemos que as potências de  $x$  se repetirão a cada 6 termos devido ao ciclo que surge ao aplicar repetidamente a relação acima. Vamos determinar o padrão:

---

\*This exam was solved and automatically generated with gpt-resolve: <https://github.com/lgabs/gpt-resolve>

$$x^0 \equiv 1$$

$$x^1 \equiv x$$

$$x^2 \equiv x - 1$$

$$x^3 \equiv x \cdot (x - 1) \equiv x^2 - x \equiv (x - 1) - x \equiv -1$$

$$x^4 \equiv x \cdot (-1) \equiv -x$$

$$x^5 \equiv x \cdot (-x) \equiv -x^2 \equiv -(x - 1) \equiv -x + 1$$

$$x^6 \equiv x \cdot (-x + 1) \equiv -x^2 + x \equiv -(x - 1) + x \equiv -x + 1 + x \equiv 1$$

Observamos que:

$$x^6 \equiv 1, \quad x^7 \equiv x, \quad x^8 \equiv x - 1, \quad \text{e assim por diante.}$$

Portanto, para qualquer potência de  $x$ , podemos escrever:

$$x^n \equiv x^{n \bmod 6}$$

Agora, calculamos:

1.  $x^{57}$ :

$$57 \bmod 6 = 3, \quad \text{pois } 6 \times 9 = 54 \text{ e } 57 - 54 = 3.$$

$$\therefore x^{57} \equiv x^3 \equiv -1$$

2.  $x^{14}$ :

$$14 \bmod 6 = 2, \quad \text{pois } 6 \times 2 = 12 \text{ e } 14 - 12 = 2.$$

$$\therefore x^{14} \equiv x^2 \equiv x - 1$$

3.  $x^7$ :

$$7 \bmod 6 = 1, \quad \text{pois } 6 \times 1 = 6 \text{ e } 7 - 6 = 1.$$

$$\therefore x^7 \equiv x^1 \equiv x$$

Substituindo essas equivalências em  $p(x)$ , obtemos:

$$\begin{aligned} p(x) &\equiv x^{57} + ax^{14} + bx^7 + 1 \\ &\equiv (-1) + a(x - 1) + bx + 1 \\ &= -1 + ax - a + bx + 1 \\ &= (ax + bx) + (-1 + 1 - a) \\ &= (a + b)x - a \end{aligned}$$

Sabemos que o resto da divisão de  $p(x)$  por  $x^2 - x + 1$  é  $2x + 1$ . Portanto, devemos ter:

$$(a + b)x - a = 2x + 1$$

Igualando os coeficientes dos polinômios:

1. Coeficientes de  $x$ :

$$a + b = 2$$

2. Termos constantes:

$$-a = 1$$

Resolvendo o sistema de equações:

Da segunda equação, temos:

$$-a = 1 \implies a = -1$$

Substituindo  $a = -1$  na primeira equação:

$$-1 + b = 2 \implies b = 2 + 1 \implies b = 3$$

**ANSWER:**  $a = -1$  e  $b = 3$ .

## Questão 2

Seja  $E$  uma elipse com eixo focal no eixo  $O_x$  do sistema de coordenadas cartesianas. O centro de  $E$  é o ponto  $(r, 0)$ , com  $r > 0$ , sua excentricidade é  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , e seu semieixo maior mede  $\sqrt{2}$ . Considerando os pontos  $(x, y) \in E$ , determine o valor de  $r$  para que  $\frac{y}{x}$  tenha valor máximo igual a 1.

## Solução

Dada a elipse  $E$  com centro em  $(r, 0)$  e eixo focal ao longo do eixo  $O_x$ , com excentricidade  $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$  e semieixo maior  $a = \sqrt{2}$ .

Primeiramente, calculamos o semieixo menor  $b$ :

$$b = a\sqrt{1 - e^2} = \sqrt{2}\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{2}{4}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

A distância focal é:

$$c = ae = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

A equação da elipse é:

$$\frac{(x - r)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x - r)^2}{2} + y^2 = 1.$$

Queremos encontrar  $r$  tal que o valor máximo de  $\frac{y}{x}$  seja igual a 1. Para isso, parametrize a elipse:

$$\begin{cases} x = r + a \cos \theta = r + \sqrt{2} \cos \theta, \\ y = b \sin \theta = \sin \theta. \end{cases}$$

Assim, temos:

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin \theta}{r + \sqrt{2} \cos \theta}.$$

Para encontrar o valor máximo de  $\frac{y}{x}$ , consideramos a função:

$$\lambda(\theta) = \frac{\sin \theta}{r + \sqrt{2} \cos \theta}.$$

Calculamos a derivada em relação a  $\theta$ :

$$\lambda'(\theta) = \frac{\cos \theta (r + \sqrt{2} \cos \theta) - \sin \theta (-\sqrt{2} \sin \theta)}{(r + \sqrt{2} \cos \theta)^2} = \frac{r \cos \theta + \sqrt{2}}{(r + \sqrt{2} \cos \theta)^2}.$$

Para os pontos críticos, igualamos a derivada a zero:

$$r \cos \theta + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{r}.$$

Para que  $\cos \theta$  seja válido, é necessário que  $|\cos \theta| \leq 1$ :

$$\left| -\frac{\sqrt{2}}{r} \right| \leq 1 \Rightarrow r \geq \sqrt{2}.$$

Calculamos  $\sin \theta$ :

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left( \frac{\sqrt{2}}{r} \right)^2 = 1 - \frac{2}{r^2} = \frac{r^2 - 2}{r^2}.$$

Como  $\sin \theta \geq 0$  no quadrante correspondente, temos:

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{r^2 - 2}}{r}.$$

Substituindo na expressão de  $\lambda(\theta)$ :

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{\sin \theta}{r + \sqrt{2} \cos \theta} = \frac{\frac{\sqrt{r^2 - 2}}{r}}{r - \frac{2}{r}} = \frac{\sqrt{r^2 - 2}}{r^2 - 2}.$$

Igualamos  $\lambda_{\text{máx}}$  a 1:

$$\frac{\sqrt{r^2 - 2}}{r^2 - 2} = 1 \Rightarrow \sqrt{r^2 - 2} = r^2 - 2.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado:

$$r^2 - 2 = (r^2 - 2)^2 \Rightarrow (r^2 - 2)^2 - (r^2 - 2) = 0 \Rightarrow (r^2 - 2)(r^2 - 3) = 0.$$

Portanto, as soluções são:

$$r^2 - 2 = 0 \Rightarrow r = \sqrt{2}, \quad r^2 - 3 = 0 \Rightarrow r = \sqrt{3}.$$

Como  $r > 0$  e  $r \geq \sqrt{2}$ , analisamos as soluções:

- Para  $r = \sqrt{2}$ :

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{2})^2 - 2}}{(\sqrt{2})^2 - 2} = \frac{0}{0}, \text{ indeterminado.}$$

Nesse caso, analisando a função, concluímos que  $\lambda_{\text{máx}} = 0$ , o que não satisfaz a condição requerida.

- Para  $r = \sqrt{3}$ :

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3})^2 - 2}}{(\sqrt{3})^2 - 2} = \frac{\sqrt{3-2}}{3-2} = \frac{1}{1} = 1.$$

Assim, o valor de  $r$  que satisfaz a condição é  $r = \sqrt{3}$ .  
**ANSWER:**  $r = \sqrt{3}$

### Questão 3

Sejam  $\alpha, \beta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$  tais que

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad \sin(\alpha) - 2\sin(\beta) + \cos(\beta) = \frac{3}{4}.$$

Calcule o valor de  $\sin(\alpha + \beta)$ .

### Solução

Primeiramente, vamos considerar as equações dadas:

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = \frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\sin(\alpha) - 2\sin(\beta) + \cos(\beta) = \frac{3}{4} \quad (2)$$

Vamos manipular essas equações para encontrar um valor exato para  $\sin(\alpha + \beta)$ .

**\*\*Passo 1:\*\*** Subtraindo a equação (1) da equação (2):

$$\begin{aligned} [\sin(\alpha) - 2\sin(\beta) + \cos(\beta)] - [\sin(\alpha) - \sin(\beta)] &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \\ (-\sin(\beta) + \cos(\beta)) &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3)$$

**\*\*Passo 2:\*\*** Reescrevendo a equação (3):

$$\cos(\beta) - \sin(\beta) = \frac{1}{2}$$

**\*\*Passo 3:\*\*** Elevando ambos os lados ao quadrado:

$$\begin{aligned} [\cos(\beta) - \sin(\beta)]^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ \cos^2(\beta) - 2\sin(\beta)\cos(\beta) + \sin^2(\beta) &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

**\*\*Passo 4:\*\*** Sabemos que  $\sin^2(\beta) + \cos^2(\beta) = 1$ , portanto:

$$\begin{aligned} 1 - 2\sin(\beta)\cos(\beta) &= \frac{1}{4} \\ -2\sin(\beta)\cos(\beta) &= -\frac{3}{4} \\ \sin(\beta)\cos(\beta) &= \frac{3}{8} \end{aligned} \quad (4)$$

**\*\*Passo 5:\*\*** Da equação (1), isolamos  $\sin(\alpha)$ :

$$\sin(\alpha) = \sin(\beta) + \frac{1}{4} \quad (5)$$

**\*\*Passo 6:\*\*** Substituindo  $\sin(\alpha)$  da equação (5) na equação (2):

$$\begin{aligned} \left( \sin(\beta) + \frac{1}{4} \right) - 2 \sin(\beta) + \cos(\beta) &= \frac{3}{4} \\ -\sin(\beta) + \cos(\beta) + \frac{1}{4} &= \frac{3}{4} \\ -\sin(\beta) + \cos(\beta) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Note que chegamos novamente à equação (3), confirmando nossa manipulação.

**\*\*Passo 7:\*\*** Usando as identidades trigonométricas, sabemos que:

$$\cos(\beta) = -\sqrt{1 - \sin^2(\beta)} \quad (\text{porque } \beta \in \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \text{ e } \cos(\beta) < 0)$$

**\*\*Passo 8:\*\*** Agora, da equação (3):

$$\begin{aligned} \cos(\beta) &= \frac{1}{2} + \sin(\beta) \\ -\sqrt{1 - \sin^2(\beta)} &= \frac{1}{2} + \sin(\beta) \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados por  $-1$ :

$$\sqrt{1 - \sin^2(\beta)} = -\frac{1}{2} - \sin(\beta)$$

Como o lado esquerdo é positivo, o lado direito também deve ser positivo, logo:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} - \sin(\beta) &\geq 0 \\ \sin(\beta) &\leq -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

**\*\*Passo 9:\*\*** Elevando ambos os lados da equação ao quadrado:

$$\begin{aligned} [1 - \sin^2(\beta)] &= \left( -\frac{1}{2} - \sin(\beta) \right)^2 \\ 1 - \sin^2(\beta) &= \frac{1}{4} + \sin^2(\beta) + \sin(\beta) \end{aligned}$$



Simplificando:

$$\begin{aligned}1 - \sin^2(\beta) &= \frac{1}{4} + \sin^2(\beta) + \sin(\beta) \\1 - \frac{1}{4} &= 2\sin^2(\beta) + \sin(\beta) \\ \frac{3}{4} &= 2\sin^2(\beta) + \sin(\beta)\end{aligned}$$

**\*\*Passo 10:\*\*** Rearranjando a equação:

$$2\sin^2(\beta) + \sin(\beta) - \frac{3}{4} = 0$$

Multiplicando ambos os lados por 4 para eliminar denominadores:

$$8\sin^2(\beta) + 4\sin(\beta) - 3 = 0$$

**\*\*Passo 11:\*\*** Resolvendo a equação quadrática:

$$\begin{aligned}\text{Seja } x &= \sin(\beta) \\ 8x^2 + 4x - 3 &= 0\end{aligned}$$

Calculando o discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-3) = 16 + 96 = 112$$

As raízes são:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{112}}{16} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{7}}{16} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{4}$$

Como  $\sin(\beta) \leq -\frac{1}{2}$ , escolhemos:

$$\sin(\beta) = \frac{-1 - \sqrt{7}}{4}$$

**\*\*Passo 12:\*\*** Calculando  $\sin(\alpha)$  a partir da equação (5):

$$\sin(\alpha) = \sin(\beta) + \frac{1}{4} = \frac{-1 - \sqrt{7}}{4} + \frac{1}{4} = \frac{-\sqrt{7}}{4}$$

**\*\*Passo 13:\*\*** Calculando  $\cos(\alpha)$ :

$$\cos(\alpha) = -\sqrt{1 - \sin^2(\alpha)} = -\sqrt{1 - \left(\frac{-\sqrt{7}}{4}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{7}{16}} = -\sqrt{\frac{9}{16}} = -\frac{3}{4}$$

**\*\*Passo 14:\*\*** Calculando  $\cos(\beta)$ :

Usando a equação:

$$\cos(\beta) = \sin(\beta) + \frac{1}{2} = \frac{-1 - \sqrt{7}}{4} + \frac{1}{2} = \frac{-1 - \sqrt{7} + 2}{4} = \frac{1 - \sqrt{7}}{4}$$

**\*\*Passo 15:\*\*** Finalmente, calculando  $\sin(\alpha + \beta)$ :

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) \\ &= \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) \left(\frac{1 - \sqrt{7}}{4}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) \left(\frac{-1 - \sqrt{7}}{4}\right) \\ &= \frac{-\sqrt{7}(1 - \sqrt{7})}{16} + \frac{3(1 + \sqrt{7})}{16} \\ &= \frac{-\sqrt{7} + 7}{16} + \frac{3 + 3\sqrt{7}}{16} \\ &= \frac{(-\sqrt{7} + 7) + (3 + 3\sqrt{7})}{16} \\ &= \frac{(7 + 3) + (-\sqrt{7} + 3\sqrt{7})}{16} \\ &= \frac{10 + 2\sqrt{7}}{16} \\ &= \frac{5 + \sqrt{7}}{8} \end{aligned}$$

**\*\*ANSWER:\*\***  $\frac{5 + \sqrt{7}}{8}$

## Questão 4

Seja  $ABC$  um triângulo de lados  $m(\overline{AB}) = 6$ ,  $m(\overline{AC}) = 10$  e  $m(\overline{BC}) = 14$ . Calcule o raio da circunferência externa ao triângulo  $ABC$  que tangencia simultaneamente o segmento  $\overline{BC}$  e as retas suportes  $AB$  e  $AC$ .

## Solução

Primeiramente, vamos identificar os lados do triângulo  $ABC$ :

$$AB = 6$$

$$AC = 10$$

$$BC = 14$$

Calculamos o semiperímetro do triângulo:

$$s = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{6 + 10 + 14}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

Em seguida, aplicamos a fórmula de Heron para calcular a área  $S$  do triângulo:

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{s(s - AB)(s - AC)(s - BC)} \\ &= \sqrt{15 \times (15 - 6) \times (15 - 10) \times (15 - 14)} \\ &= \sqrt{15 \times 9 \times 5 \times 1} \\ &= \sqrt{675} \\ &= 15\sqrt{3} \end{aligned}$$

O raio da excircunferência oposta ao vértice  $A$  (que tangencia o lado  $BC$  e as retas suporte de  $AB$  e  $AC$ ) é dado por:

$$r_a = \frac{S}{s - a}$$

onde  $a = BC = 14$  e  $s - a = 15 - 14 = 1$ .

Substituindo os valores:

$$r_a = \frac{15\sqrt{3}}{1} = 15\sqrt{3}$$

**Resposta:**  $15\sqrt{3}$

## Questão 5

Usando as aproximações  $\log_{10} 2 = 0,3010$ ,  $\log_{10} 3 = 0,4771$  e  $\log_{10} 7 = 0,8450$ , determine o primeiro algarismo (da esquerda para a direita) do resultado de  $3^{100}$ .

## Solução

Para determinar o primeiro algarismo de  $3^{100}$ , vamos usar logaritmos para encontrar a parte decimal de  $\log_{10} 3^{100}$  e então calcular 10 elevado a essa parte decimal para encontrar o valor inicial de  $3^{100}$ .

Primeiramente, calculamos  $\log_{10} 3^{100}$ :

$$\begin{aligned}\log_{10} 3^{100} &= 100 \times \log_{10} 3 \\ &= 100 \times 0,4771 \\ &= 47,71\end{aligned}$$

Então, temos:

$$\log_{10} 3^{100} = 47,71$$

A parte inteira é 47 e a parte decimal é 0,71.

Isso significa que:

$$3^{100} = 10^{47,71} = 10^{47} \times 10^{0,71}$$

Nosso objetivo é calcular  $N = 10^{0,71}$ .

Para aproximar  $N$ , usaremos interpolação linear entre valores conhecidos de logaritmos.

Sabemos que:

$$\begin{aligned}\log_{10} 5 &= 0,6990 \\ \log_{10} 6 &= 0,7781\end{aligned}$$

Entre 5 e 6, o aumento da função logarítmica é:

$$\Delta \log_{10} N = 0,7781 - 0,6990 = 0,0791$$

A diferença entre 0,71 e 0,6990 é:

$$\delta = 0,71 - 0,6990 = 0,0110$$

Usando interpolação linear:

$$N = 5 + (6 - 5) \times \frac{0,0110}{0,0791} = 5 + \frac{0,0110}{0,0791} = 5 + 0,1391 = 5,1391$$

Portanto:

$$10^{0,71} \approx 5,1391$$

Assim, temos:

$$3^{100} \approx 10^{47} \times 5,1391 = 5,1391 \times 10^{47}$$

O primeiro algarismo de  $3^{100}$  é, portanto, 5.

**RESPOSTA:** 5

## Questão 6

Uma moeda não viciada é lançada  $n$  vezes. Encontre os valores de  $n$  que maximizam a probabilidade de sair cara pela quarta vez exatamente no  $n$ -ésimo lançamento.

## Solução

Para encontrar os valores de  $n$  que maximizam a probabilidade de obter a quarta cara exatamente no  $n$ -ésimo lançamento de uma moeda não viciada, vamos modelar o problema usando a distribuição binomial negativa.

A probabilidade de obter a  $k$ -ésima cara no  $n$ -ésimo lançamento é dada por:

$$P(N = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

Onde: -  $p = 0,5$  é a probabilidade de obter cara em um lançamento. -  $k = 4$  é o número de caras que desejamos. -  $n \geq k$  é o número total de lançamentos.

Substituindo os valores:

$$P(N = n) = \binom{n-1}{3} (0,5)^4 (0,5)^{n-4} = \binom{n-1}{3} (0,5)^n$$

Simplificando a expressão:

$$P(N = n) = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Nosso objetivo é encontrar os valores de  $n$  que maximizam  $P(N = n)$ . Vamos analisar a função:

$$f(n) = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Para facilitar, calcularemos o logaritmo natural da função:

$$L(n) = \ln f(n) = \ln((n-1)(n-2)(n-3)) - n \ln 2 - \ln 6$$

Derivando  $L(n)$  em relação a  $n$ :

$$L'(n) = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-3} - \ln 2$$

Para encontrar os valores críticos, igualamos a derivada a zero:

$$\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-3} = \ln 2$$

Como a equação acima não possui solução exata em  $n$ , vamos calcular os valores de  $P(N = n)$  para  $n$  inteiros a partir de 4:

$$P(4) = \binom{3}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1 \times \frac{1}{16} = 0,0625$$

$$P(5) = \binom{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 4 \times \frac{1}{32} = 0,125$$

$$P(6) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 10 \times \frac{1}{64} = 0,15625$$

$$P(7) = \binom{6}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^7 = 20 \times \frac{1}{128} = 0,15625$$

$$P(8) = \binom{7}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^8 = 35 \times \frac{1}{256} \approx 0,1367$$

$$P(9) = \binom{8}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 56 \times \frac{1}{512} \approx 0,1094$$

$$P(10) = \binom{9}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 84 \times \frac{1}{1024} \approx 0,0820$$

Observamos que  $P(N = n)$  aumenta de  $n = 4$  até  $n = 6$ , atinge seu valor máximo em  $n = 6$  e  $n = 7$ , e depois diminui para  $n > 7$ .

Portanto, os valores de  $n$  que maximizam a probabilidade são  $n = 6$  e  $n = 7$ .

**ANSWER:**  $n = 6$  e  $n = 7$ .

## Questão 7

Considere o polinômio  $p(x) = x^3 + ax^2 + b$ . Determine os valores reais  $a$  e  $b$ , sabendo que:

- I.  $p(x)$  tem uma raiz real dupla;
- II. Os pontos  $(x_1, 0)$ ,  $(x_2, 0)$  e  $(0, b)$  são vértices de um triângulo retângulo, em que  $x_1$  e  $x_2$  são raízes distintas de  $p(x)$ .

## Solução

O polinômio dado é  $p(x) = x^3 + ax^2 + b$ . Sabemos que:

- I.  $p(x)$  tem uma raiz real dupla.
- II. Os pontos  $(x_1, 0)$ ,  $(x_2, 0)$  e  $(0, b)$  são vértices de um triângulo retângulo, com  $x_1$  e  $x_2$  sendo raízes distintas de  $p(x)$ .

\*\*Passo 1: Encontrar a forma fatorada de  $p(x)$ \*\* Como  $p(x)$  possui uma raiz dupla real, podemos escrever:

$$p(x) = (x - \alpha)^2(x - \beta)$$

onde  $\alpha$  é a raiz dupla e  $\beta$  é a raiz simples, com  $\alpha \neq \beta$ .

\*\*Passo 2: Expandir  $p(x)$  e igualar os coeficientes\*\* Expandindo, temos:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - \alpha)^2(x - \beta) \\ &= (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2)(x - \beta) \\ &= x^3 - (\beta + 2\alpha)x^2 + (2\alpha\beta + \alpha^2)x - \alpha^2\beta \end{aligned}$$

Comparando com  $p(x) = x^3 + ax^2 + 0x + b$ , obtemos:

$$-(\beta + 2\alpha) = a \quad (1)$$

$$2\alpha\beta + \alpha^2 = 0 \quad (2)$$

$$-\alpha^2\beta = b \quad (3)$$

\*\*Passo 3: Resolver o sistema de equações\*\* Da equação (2):

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta = 0 \implies \alpha(\alpha + 2\beta) = 0$$

Como  $\alpha \neq 0$ , então:

$$\alpha + 2\beta = 0 \implies \alpha = -2\beta$$

Substituindo  $\alpha = -2\beta$  na equação (1):

$$\begin{aligned} -(\beta + 2(-2\beta)) &= a \\ -(\beta - 4\beta) &= a \\ -(-3\beta) &= a \\ 3\beta &= a \quad (4) \end{aligned}$$



Da equação (3), substituindo  $\alpha = -2\beta$ :

$$\begin{aligned} b &= -(-2\beta)^2\beta \\ &= -(4\beta^2)\beta \\ &= -4\beta^3 \quad (5) \end{aligned}$$

**\*\*Passo 4: Caracterizar os pontos do triângulo\*\*** Os pontos são:

$$A(x_1, 0) = (\beta, 0), \quad B(x_2, 0) = (\alpha, 0) = (-2\beta, 0), \quad C(0, b)$$

**\*\*Passo 5: Verificar a condição do triângulo retângulo\*\*** Calculamos os vetores:

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= B - A = (-2\beta - \beta, 0 - 0) = (-3\beta, 0) \\ \vec{AC} &= C - A = (0 - \beta, b - 0) = (-\beta, b) \\ \vec{BC} &= C - B = (0 - (-2\beta), b - 0) = (2\beta, b) \end{aligned}$$

Calculamos o produto escalar entre  $\vec{AC}$  e  $\vec{BC}$ :

$$\vec{AC} \cdot \vec{BC} = (-\beta)(2\beta) + b \cdot b = -2\beta^2 + b^2$$

Para que o triângulo seja retângulo, algum produto escalar entre os vetores dos lados deve ser zero. Assim:

$$-2\beta^2 + b^2 = 0 \implies b^2 = 2\beta^2 \implies b^2 = 2\beta^2$$

**\*\*Passo 6: Encontrar os valores de  $\beta$ ,  $a$  e  $b$ \*\*** Substituindo  $b$  da equação (5):

$$b^2 = (-4\beta^3)^2 = 16\beta^6$$

Igualando com o resultado anterior:

$$16\beta^6 = 2\beta^2 \implies 16\beta^4 = 2 \implies \beta^4 = \frac{1}{8}$$

Então:

$$\beta^4 = \frac{1}{8} \implies \beta = \pm \left(\frac{1}{8}\right)^{1/4} = \pm 2^{-3/4}$$

**\*\*Calculando  $a$  e  $b$  usando  $\beta = 2^{-3/4}$ \*\***

Caso 1 ( $\beta = 2^{-3/4}$ ):

$$\begin{aligned} a &= 3\beta = 3 \cdot 2^{-3/4} \\ b &= -4\beta^3 = -4(2^{-3/4})^3 = -4 \cdot 2^{-9/4} = -2^{-1/4} \end{aligned}$$

Caso 2 ( $\beta = -2^{-3/4}$ ):

$$\begin{aligned} a &= 3\beta = 3(-2^{-3/4}) = -3 \cdot 2^{-3/4} \\ b &= -4\beta^3 = -4(-2^{-3/4})^3 = -4(-1)(2^{-9/4}) = 2^{-1/4} \end{aligned}$$

**\*\*Resposta Final:\*\***

$$\text{Para } \beta = +2^{-3/4} : \begin{cases} a = 3 \cdot 2^{-3/4} \\ b = -2^{-1/4} \end{cases}$$

$$\text{Para } \beta = -2^{-3/4} : \begin{cases} a = -3 \cdot 2^{-3/4} \\ b = +2^{-1/4} \end{cases}$$

**ANSWER:** Os valores de  $a$  e  $b$  são:

$$a = \pm 3 \cdot 2^{-3/4}, \quad b = \mp 2^{-1/4}$$

## Questão 8

Seja  $A_k = (a_{ij})$  uma matriz quadrada de ordem  $k$ , em que  $a_{ij} = \max\{i, j\}$  para todo  $i, j$  em  $\{1, 2, \dots, k\}$ . Determine  $\sum_{k=1}^{2025} \det(A_k)$ .

## Solução

Temos a matriz  $A_k = (a_{ij})$  de ordem  $k$  definida por  $a_{ij} = \max\{i, j\}$  para todos  $i, j$ .

Vamos calcular  $\det(A_k)$  para alguns valores de  $k$  e encontrar um padrão.

Para  $k = 1$ :

$$A_1 = [1], \quad \det(A_1) = 1$$

Para  $k = 2$ :

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \det(A_2) = (1)(2) - (2)(2) = -2$$

Para  $k = 3$ :

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Calculando o determinante:

$$\begin{aligned} \det(A_3) &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (2 \cdot 3 - 3 \cdot 3) - 2 \cdot (2 \cdot 3 - 3 \cdot 3) + 3 \cdot (2 \cdot 3 - 2 \cdot 3) \\ &= 1(-3) - 2(-3) + 3(0) \\ &= -3 + 6 + 0 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Observamos que:

$$\det(A_1) = 1, \quad \det(A_2) = -2, \quad \det(A_3) = 3$$

Percebemos que o determinante alterna de sinal e é igual em magnitude a  $k$ :

$$\det(A_k) = (-1)^{k+1} \cdot k$$

Assim, a soma requerida é:

$$\sum_{k=1}^{2025} \det(A_k) = \sum_{k=1}^{2025} (-1)^{k+1} \cdot k$$

Separando a soma em termos ímpares e pares:

$$\sum_{k=1}^{2025} \det(A_k) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ímpar}}}^{2025} k - \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ par}}}^{2024} k$$

O número de termos ímpares é:

$$n_{\text{ímpar}} = \frac{2025 + 1}{2} = 1013$$

O número de termos pares é:

$$n_{\text{par}} = \frac{2025 - 1}{2} = 1012$$

A soma dos números ímpares de 1 a 2025 é:

$$S_{\text{ímpar}} = n_{\text{ímpar}}^2 = (1013)^2 = 1\,026\,169$$

A soma dos números pares de 2 a 2024 é:

$$S_{\text{par}} = n_{\text{par}} \cdot (n_{\text{par}} + 1) = 1012 \times 1013 = 1\,025\,156$$

Portanto, a soma total é:

$$\sum_{k=1}^{2025} \det(A_k) = S_{\text{ímpar}} - S_{\text{par}} = 1\,026\,169 - 1\,025\,156 = 1\,013$$

**ANSWER:**  $\sum_{k=1}^{2025} \det(A_k) = 1\,013$

## Questão 9

Determine a quantidade de matrizes  $5 \times 5$  invertíveis e com entradas inteiras que satisfazem a propriedade  $A^{-1} = A^T$ .

## Solução

Para determinar a quantidade de matrizes  $5 \times 5$  invertíveis com entradas inteiras que satisfazem a propriedade  $A^{-1} = A^T$ , devemos identificar todas as matrizes inteiras para as quais  $A^T = A^{-1}$ . Isso implica que  $A$  é uma matriz ortogonal com entradas inteiras.

**\*\*Matrizes ortogonais inteiras:\*\*** As únicas matrizes ortogonais com entradas inteiras são as chamadas **\*matrizes de permutação assinadas\***. Essas matrizes possuem as seguintes características:

- Cada linha e cada coluna contém exatamente um elemento não nulo. - Os elementos não nulos são  $+1$  ou  $-1$ . - Todos os demais elementos são zero.

**\*\*Passo 1: Contar as permutações\*\***

O número de maneiras de permutar as linhas (ou colunas) é dado pelo número de permutações dos 5 elementos:

$$\text{Número de permutações} = 5! = 120.$$

**\*\*Passo 2: Atribuição de sinais\*\***

Para cada permutação, cada elemento não nulo pode ser  $+1$  ou  $-1$ . Como há 5 elementos não nulos, o número de maneiras de atribuir os sinais é:

$$\text{Número de atribuições de sinais} = 2^5 = 32.$$

**\*\*Passo 3: Total de matrizes\*\***

Multiplicando o número de permutações pelo número de atribuições de sinais, obtemos o total de matrizes que satisfazem a propriedade:

$$\text{Total de matrizes} = 5! \times 2^5 = 120 \times 32 = 3840.$$

**\*\*ANSWER: 3840.\*\***

## Questão 10

Calcule a área da projeção ortogonal de um cubo de aresta 2 sobre um plano perpendicular a uma das diagonais do cubo.

## Solução

Para calcular a área da projeção ortogonal de um cubo de aresta 2 sobre um plano perpendicular a uma de suas diagonais, vamos seguir os seguintes passos:

### 1. Considerações iniciais:

A diagonal do cubo em questão é a *diagonal espacial*, que une dois vértices opostos do cubo. Para facilitar os cálculos, posicionaremos o cubo no sistema de coordenadas de forma que seu centro coincida com a origem e suas arestas estejam alinhadas com os eixos coordenados.

Assim, os vértices do cubo terão coordenadas  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ , já que a aresta do cubo é 2 (então metade da aresta é 1).

### 2. Equação do plano perpendicular à diagonal:

A diagonal espacial do cubo pode ser representada pelo vetor  $\vec{d} = (1, 1, 1)$ . O plano perpendicular a essa diagonal e que passa pela origem tem como vetor normal  $\vec{n} = (1, 1, 1)$  e sua equação é dada por:

$$x + y + z = 0.$$

### 3. Determinação dos pontos de interseção:

Vamos encontrar os pontos onde as arestas do cubo interceptam o plano  $x + y + z = 0$ . Consideramos as arestas que conectam os vértices cujas somas de coordenadas têm sinais opostos, pois essas são as que interceptam o plano.

Calculamos a soma das coordenadas de cada vértice:

$$\begin{aligned} V1 : (1, 1, 1) &\Rightarrow x + y + z = 3 \\ V2 : (1, 1, -1) &\Rightarrow x + y + z = 1 \\ V3 : (1, -1, 1) &\Rightarrow x + y + z = 1 \\ V4 : (1, -1, -1) &\Rightarrow x + y + z = -1 \\ V5 : (-1, 1, 1) &\Rightarrow x + y + z = 1 \\ V6 : (-1, 1, -1) &\Rightarrow x + y + z = -1 \\ V7 : (-1, -1, 1) &\Rightarrow x + y + z = -1 \\ V8 : (-1, -1, -1) &\Rightarrow x + y + z = -3. \end{aligned}$$

As arestas que interceptam o plano são aquelas entre os vértices cujas somas de coordenadas são 1 e -1.

### 4. Cálculo dos pontos de interseção nas arestas:

Vamos encontrar os pontos de interseção em cada aresta relevante:

*Exemplo para a aresta entre V2 e V4:*

Parâmetro  $t \in [0, 1]$ :

$$\vec{r}(t) = \vec{V}2 + t(\vec{V}4 - \vec{V}2) = (1, 1, -1) + t(0, -2, 0).$$

As equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = 1 - 2t \\ z(t) = -1. \end{cases}$$

Encontramos  $t$  tal que  $x(t) + y(t) + z(t) = 0$ :

$$1 + (1 - 2t) + (-1) = 0 \Rightarrow 1 + 1 - 2t - 1 = 0 \Rightarrow 2 - 2t = 0 \Rightarrow t = 1.$$

Portanto, o ponto de interseção é:

$$(1, y(1), -1) = (1, -1, -1).$$

Procedendo de forma similar para as outras arestas, encontramos os seis pontos de interseção:

$$\begin{cases} P1 : (1, 0, -1) \\ P2 : (0, 1, -1) \\ P3 : (-1, 1, 0) \\ P4 : (-1, 0, 1) \\ P5 : (0, -1, 1) \\ P6 : (1, -1, 0). \end{cases}$$

### 5. Formação do hexágono regular:

Os pontos  $P1$  a  $P6$  formam um hexágono regular no plano  $x + y + z = 0$ . Para calcular a área desse hexágono, precisamos determinar o comprimento de seus lados.

### 6. Cálculo do lado do hexágono:

Calculamos a distância entre dois pontos adjacentes:

Entre  $P1$  e  $P2$ :

$$\text{Distância } d = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2 + (-1-(-1))^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

Os demais lados também têm comprimento  $\sqrt{2}$ , confirmando que o hexágono é regular com lado  $s = \sqrt{2}$ .

### 7. Cálculo da área do hexágono:

A área de um hexágono regular é dada por:

$$A = \frac{3\sqrt{3}}{2} s^2.$$

Substituindo  $s = \sqrt{2}$ :

$$A = \frac{3\sqrt{3}}{2} (\sqrt{2})^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 2 = 3\sqrt{3}.$$

**Resposta final:**

**ANSWER:**  $3\sqrt{3}$