

Dieter Schramm
Manfred Hiller
Roberto Bardini

Modellbildung und Simulation der Dynamik von Kraftfahrzeugen



Springer

Modellbildung und Simulation der Dynamik von Kraftfahrzeugen

Dieter Schramm • Manfred Hiller
Roberto Bardini

Modellbildung und Simulation der Dynamik von Kraftfahrzeugen



Springer

Prof. Dr.-Ing. Dieter Schramm
Leiter des Lehrstuhls für Mechatronik
Fakultät für Ingenieurwissenschaften
Universität Duisburg-Essen
Lotharstraße 1
47057 Duisburg
schramm@imech.de

Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h.c. mult. Manfred
Hiller
ehemals Leiter des Lehrstuhls für
Mechatronik an der
Universität Duisburg-Essen
Privatadresse:
Paul-Schmitthenner-Straße 10
47443 Moers
hiller@imech.de

Dr.-Ing. Roberto Bardini
ehemals wissenschaftlicher Mitarbeiter am
Lehrstuhl für Mechatronik an der
Universität Duisburg-Essen
Privatadresse:
Astallerstraße 9
80339 München
bardini@imech.de

ISBN 978-3-540-89313-4 e-ISBN 978-3-540-89315-8
DOI 10.1007/978-3-540-89315-8
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnetet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zu widerhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Einbandentwurf: eStudio Calamar S.L., Figueres/Berlin

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Springer ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Vorwort

Dieses Buch behandelt die Grundlagen der Dynamik von Kraftfahrzeugen und deren mathematische Modellbildung und Simulation. Das Spektrum reicht von Einspurmodellen bis zu komplexen, räumlichen Mehrkörpermodellen. Der Leser wird in die Lage versetzt, eigene Simulationsmodelle zu entwickeln, kommerzielle Programme einzusetzen und deren Grundlagen zu verstehen, eine geeignete Modellierung auszuwählen und die Ergebnisse von Simulationen zu bewerten. Insbesondere wird der Prozess der Modellerstellung vom realen Fahrzeug bis zum mathematischen Modell sowie anhand von Beispielen die Validierung der Ergebnisse beschrieben.

Das Buch richtet sich an Studierende und Promovierende der Ingenieurwissenschaften, die Vorlesungen auf dem Gebiet der Fahrzeugtechnik besuchen oder eine Arbeit in diesem Umfeld anfertigen. In gleichem Maße richtet es sich aber auch an Entwickler und Forscher, die sich mit fahrdynamischen Fragestellungen beschäftigen oder Simulationsprogramme einsetzen. Da die Modellbildung der Fahrdynamik von Kraftfahrzeugen stark mathematisch orientiert ist, werden durchgehend mathematische Methoden eingesetzt. Der Leser sollte daher über mathematische Grundkenntnisse verfügen, wie sie in den ersten drei Semestern eines ingenieurwissenschaftlichen Studiums an einer Fachhochschule oder einer Universität vermittelt werden.

An der Entstehung dieses Buches waren neben den Autoren weitere Personen beteiligt, von denen hier stellvertretend einige genannt werden sollen. Wir danken Herrn Unterreiner für die sorgfältige Ausarbeitung der Beispiele sowie die Koordination der Korrekturen. Herrn Schijen danken wir für die mit viel Hingabe und Können erstellten Illustrationen und Herrn Kara für die sorgfältige Erstellung der Druckvorlage. Durch wertvolle Kommentare haben die Herren Höll, Lalo und Louis zum Entstehen des Buches beigetragen. Wir danken darüber hinaus Herrn Prof. Woernle, der durch die zur Verfügung gestellten Vorlesungsunterlagen wertvolle Anregungen zur Gestaltung einzelner Kapitel gegeben hat.

Dieter Schramm, Manfred Hiller und Roberto Bardini

Duisburg, im April 2010

Inhaltverzeichnis

Vorwort.....	V
Inhaltverzeichnis	VII
Nomenklatur und Bezeichnungen	1
1 Einleitung	7
1.1 Aufgabenstellung	7
1.1.1 Modellierung technischer Systeme	10
1.1.2 Systembegriff.....	11
1.1.3 Simulation und Simulationsumgebung	12
1.1.4 Fahrzeugmodelle.....	13
1.2 Gesamtfahrzeugmodelle	17
1.2.1 Fahrzeugmodelle und Anwendungsgebiete	19
1.2.2 Kommerzielle Fahrzeugsimulationssysteme.....	21
1.3 Inhaltsübersicht.....	23
1.4 Web-Seite zum Buch	24
2 Mathematische und kinematische Grundlagen	25
2.1 Vektoren.....	25
2.1.1 Elementare Rechenregeln für Vektoren	25
2.1.2 „Physikalische“ Vektoren	26
2.2 Koordinatensysteme und Komponenten	27
2.2.1 Koordinatensysteme.....	27
2.2.2 Komponentenzerlegung	28
2.2.3 Zusammenhang zwischen Komponentendarstellungen	29
2.2.4 Eigenschaften der Transformationsmatrix	30
2.3 Lineare Vektorfunktionen und Tensoren 2. Stufe.....	31
2.3.1 Beispiele für Tensoren 2. Stufe.....	31
2.4 Freie Bewegung des starren Körpers	33
2.4.1 Allgemeine Bewegung des starren Körpers.....	33
2.4.2 Relativbewegung	37
2.4.3 Wichtige Bezugssysteme	39
2.5 Drehbewegungen	41

2.5.1	Räumliche Drehung und Winkelgeschwindigkeit	41
2.5.2	Parametrisierung von Drehbewegungen	42
2.5.3	Drehzeiger und Drehtensor	43
2.5.4	Drehzeiger und Winkelgeschwindigkeit.....	45
2.5.5	KARDAN-Winkel	46
3	Kinematik von Mehrkörpersystemen	51
3.1	Struktur kinematischer Ketten	51
3.1.1	Topologische Modellierung	52
3.2	Gelenke in kinematischen Ketten	55
3.2.1	Gelenke in räumlichen kinematischen Ketten	55
3.2.2	Gelenke in ebenen kinematischen Ketten	57
3.2.3	Gelenke in sphärischen kinematischen Ketten	58
3.2.4	Klassifizierung von Gelenken.....	58
3.3	Freiheitsgrade und verallgemeinerte Koordinaten.....	60
3.3.1	Freiheitsgrade kinematischer Ketten.....	60
3.3.2	Beispiele aus der Fahrwerkskinematik	61
3.3.3	Verallgemeinerte Koordinaten.....	62
3.4	Grundprinzipien des Zusammenbaus kinematischer Ketten.....	64
3.4.1	„Sparse“-Methoden.....	66
3.4.2	„Vector-Loop“-Methoden.....	68
3.4.3	Topologische Methoden	69
3.5	Kinematik des Gesamtsystems	72
3.5.1	Grundidee	72
3.5.2	Blockschaltbilder und kinematische Netze	73
3.5.3	Relativkinematik des räumlichen Gelenkvierecks.....	75
3.5.4	Relative, absolute und globale Kinematik	77
4	Bewegungsgleichungen komplexer Mehrkörpersysteme	83
4.1	Fundamentalgleichung der Dynamik für Punktmassen	83
4.2	Das JOURDAINSche Prinzip.....	85
4.3	LAGRANGEsche Gleichungen erster Art für Punktmassen	85
4.4	LAGRANGEsche Gleichungen zweiter Art für starre Körper ..	87
4.5	Das d'ALEMBERTsche Prinzip	88
4.6	Computergestütztes Aufstellen der Bewegungsgleichungen....	91
4.6.1	Kinematische Differentiale der Absolutkinematik	91
4.6.2	Bewegungsgleichungen	94
4.6.3	Dynamik einer räumlichen Mehrkörperschleife	96
5	Kinematik und Dynamik des Fahrzeugaufbaus	105
5.1	Fahrzeugfestes Referenzsystem	105
5.2	Kinematische Analyse des Fahrgestells	108

5.2.1	Einbindung der Radaufhängungs-Kinematik.....	109
5.2.2	Bewegungsgleichungen	111
6	Modellierung und Analyse von Radaufhängungen	113
6.1	Funktion von Radaufhängungssystemen	113
6.2	Typen von Radaufhängungen	115
6.2.1	Starrachsen.....	116
6.2.2	Verbundlenkerachsen.....	118
6.2.3	Längslenkerachsen.....	119
6.2.4	Schräglenkerachsen	120
6.2.5	Doppelquerlenkerachsen.....	122
6.2.6	Radaufhängungen nach dem McPherson-Prinzip	123
6.2.7	Mehrlenkerachsen.....	125
6.3	Kenngrößen von Radaufhängungen.....	127
6.4	Eindimensionale Viertelfahrzeugmodelle.....	130
6.5	Räumliches Modell einer McPherson-Radaufhängung	133
6.5.1	Kinematische Analyse	134
6.5.2	Explizite Lösung	138
6.6	Räumliches Modell einer Fünfpunkt-Hinterradaufhängung	144
6.6.1	Kinematische Analyse	145
6.6.2	Implizite Lösung	148
6.6.3	Simulationsergebnisse des räumlichen Viertelfahrzeugmodells	152
7	Modellierung des Rad-Straße-Kontaktes	159
7.1	Aufbau des Reifens	160
7.2	Kraftwirkung zwischen Rad und Straße	161
7.3	Stationäre Reifenkontaktkräfte	162
7.3.1	Reifen unter Vertikallast	163
7.3.2	Rollwiderstand	164
7.3.3	Reifen unter Umfangskraft	165
7.3.4	Reifen unter Seitenkraft	179
7.3.5	Einfluss des Radsturzes auf die Reifenseitenkraft	182
7.3.6	Einfluss der Radlast auf die Radkräfte in der Lauffläche	183
7.3.7	Grundsätzliche Struktur der Radkräfte	183
7.3.8	Überlagerung von Umfangs- und Seitenkräften	184
7.4	Reifenmodelle	187
7.4.1	Die Kontaktpunkt-Geometrie.....	188
7.4.2	Kontakt-Geschwindigkeiten	193
7.4.3	Berechnung der Schlupfgrößen.....	195
7.4.4	Magic Formula Modelle	195
7.4.5	Magic Formula Modelle für überlagerten Schlupf	198

7.4.6	HSRI-Reifenmodell	199
7.5	Instationäres Reifenverhalten	202
8	Modellierung des Antriebsstranges	205
8.1	Antriebskonzepte	205
8.2	Modellbildung.....	206
8.2.1	Bewegungen des Motorblockes	207
8.2.2	Modell des Antriebsstranges.....	208
8.2.3	Motorlager	209
8.2.4	Modellierung der Gleichlaufgelenke	215
8.3	Modell des Motors	217
8.4	Relativkinematik des Antriebsstranges.....	219
8.5	Absolutkinematik des Antriebsstranges.....	221
8.6	Bewegungsgleichungen	222
8.7	Diskussion von Simulationsergebnissen.....	223
9	Kraftkomponenten	225
9.1	Kräfte und Momente in Mehrkörpersystemen.....	226
9.1.1	Reaktionskräfte	227
9.1.2	Eingeprägte Kräfte	228
9.2	Betriebsbremse	229
9.3	Luftkräfte	230
9.4	Feder- und Dämpferkomponenten	232
9.4.1	Federelemente	232
9.4.2	Dämpferelemente.....	234
9.4.3	Parallel geschaltete Kraftelemente.....	235
9.4.4	In Reihe geschaltete Kraftelemente	235
9.5	Stabilisatoren	236
9.5.1	Passive Stabilisatoren	236
9.5.2	Aktive Stabilisatoren.....	239
9.6	Gummi-Verbund-Elemente	241
10	Einspurmodelle	243
10.1	Lineares Einspurmodell	243
10.1.1	Bewegungsgleichungen des linearen Einspurmodells	244
10.1.2	Stationäres Lenkverhalten und Kreisfahrt	249
10.1.3	Instationäres Lenkverhalten - Fahrstabilität.....	253
10.2	Nichtlineares Einspurmodell.....	254
10.2.1	Kinetik des nichtlinearen Einspurmodells	255
10.2.2	Reifenkräfte	258
10.2.3	Antriebs- und Bremsmomente	261
10.2.4	Bewegungsgleichungen	263

10.2.5	Zustandsgleichungen	264
10.3	Lineares Wankmodell	266
10.3.1	Bewegungsgleichung für das Wanken des Aufbaus	268
10.3.2	Dynamische Radlasten.....	271
10.3.3	Beeinflussung des Eigenlenkverhaltens	273
11	Zweispurmodelle.....	277
11.1	Zweispurmodell ohne Radaufhangungskinematik	277
11.1.1	Impuls- und Drallsätze.....	280
11.1.2	Feder- und Dämpferkräfte.....	283
11.1.3	Impuls- und Drallsätze der Räder	284
11.1.4	Rad-Strasse-Kontakt	285
11.1.5	Antriebsstrang.....	288
11.1.6	Bremssystem.....	290
11.1.7	Bewegungsgleichungen	290
11.2	Zweispurmodell mit kinematischen Radaufhängungen	292
11.2.1	Freiheitsgrade des Zweispurmodells.....	292
11.2.2	Kinematik des Fahrzeugaufbaus	294
11.2.3	Allgemeine Kinematik der Radaufhängungen.....	297
11.2.4	Radaufhängung mit Schräglenkern	302
11.2.5	Kinematik der Räder bei der Schräglenkeraufhängung ..	308
11.2.6	Radkräfte und –momente	310
11.2.7	Aufbaufedern und -dämpfer.....	311
11.2.8	Windkräfte	312
11.2.9	Lenkung	313
11.2.10	Stabilisator	314
11.2.11	Eingeprägte Kräfte und Momente	314
11.2.12	NEWTON-EULERsche Gleichungen.....	315
11.2.13	Bewegungs- und Zustandsgleichungen	319
11.3	Ein einfaches Fahrermodell	319
11.3.1	Reglerkonzept	320
11.4	Parametrierung	322
12	Räumliche Gesamtfahrzeugmodelle	325
12.1	Modellierung eines Gesamtfahrzeuges	325
12.1.1	Kinematik eines heckgetriebenen Fahrzeugmodells	326
12.1.2	Kinematik front- und allradgetriebener Gesamtmodelle ..	337
12.1.3	Dynamik des Gesamtfahrzeugmodells	354
12.2	Simulation von Kraftfahrzeugen.....	355
12.2.1	Aufbau und Konzept von FASIM_C++.....	356
12.2.2	Modulare Struktur eines Fahrzeugmodells	359
12.2.3	Aufstellen der Bewegungsgleichungen.....	365

12.2.4	Numerische Integration.....	373
12.2.5	Behandlung von Ereignissen	376
13	Modell eines typischen komplexen Gesamtfahrzeugs	379
13.1	Modellierung des Gesamtfahrzeugs.....	379
13.2	Modellverifikation und -validierung.....	383
13.3	Parametriertes Fahrzeugmodell	393
14	Ausgewählte Anwendungen.....	403
14.1	Simulation eines Lenkwinkelsprungs (ISO 7401)	403
14.2	Simulation von Fahrzeugüberschlägen	406
14.2.1	Virtuelles Testgelände	410
14.2.2	Simulationsergebnisse	415
14.3	Regelung der Wankdynamik durch aktive Stabilisatoren....	428
14.3.1	Passive Stabilisatoren	429
14.3.2	Steifigkeitsverteilung zwischen Vorder- und Hinterachse	430
14.3.3	Regelung der Wankdynamik durch aktive Stabilisatoren	433
14.3.4	Reglerentwurf	433
14.3.5	Führungs- und Störverhalten	437
14.3.6	Wankmomentenverteilung mit Fuzzy-Logik.....	437
14.3.7	Wirkprinzip	438
14.3.8	Potential einer Wankmomentenverteilung.....	440
	Literaturverzeichnis	443
	Kurzbiografien der Autoren	453
	Stichwortverzeichnis.....	455

Nomenklatur und Bezeichnungen

Variable und physikalische Größen

Die Namen von Variablen und physikalischen Größen werden in der Regel kursiv geschrieben. Die Bezeichnungen von Orten (Punkten), Komponenten und Namen von Koordinatensystemen, Zahlen sowie Standardfunktionen, wie z.B. „sin“ oder „cos“ werden nichtkursiv geschrieben.

Für Vektoren und Tensoren sowie Matrizen gilt zusätzlich:

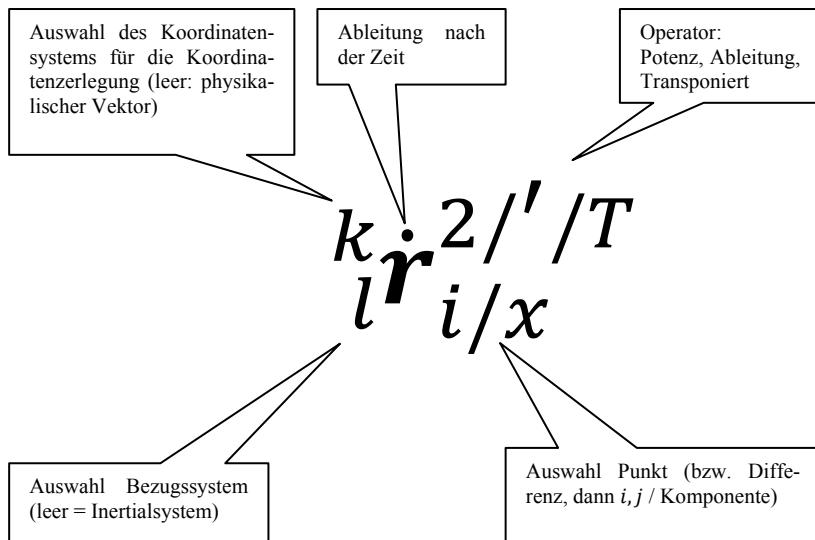
- Vektoren werden durch fett gedruckte Kleinbuchstaben, Tensoren und Matrizen durch fett gedruckte Großbuchstaben dargestellt.
- Zeitliche Ableitungen werden durch Punkte über der jeweiligen Größe gekennzeichnet.

Spezielle Notation für physikalische Vektoren

Die Indizierung von Vektoren und Tensoren erfolgt entsprechend folgender Regeln:

- Ein *rechts unten* stehender Index dient als Bezeichnungs- und Zählvariable. Er kennzeichnet z.B. den Körper oder das Koordinatensystem der betreffenden Größe.
- Bei Größen, die relativ zu anderen Größen beschrieben werden, kennzeichnet ein Index *links unten* den *Bezugskörper* oder das *Bezugskoordinatensystem*. Ein fehlender Index kennzeichnet das *Inertialsystem* als Bezugssystem.
- Für den Fall, dass ein physikalischer Vektor oder Drehtensor in Koordinaten angegeben wird, erfolgt die Angabe des Koordinatensystems, in dem die Koordinaten angegeben werden, durch einen *linken oberen* Index. Ist *kein* Index angegeben, so handelt es sich um einen physikalischen Vektor oder Drehtensor ohne Angabe eines spezifischen Koordinatensystems.

- *Operatoren*, wie Potenzen, Transponierung, Invertierung sowie Ableitungen nach anderen Größen als der Zeit, werden durch ein entsprechendes Zeichen *rechts oben* gekennzeichnet.
- Über der jeweiligen Variablen wird die Ableitung nach der Zeit gekennzeichnet. Dort können auch weitere Kennzeichnungen erfolgen, wie z.B. Überstriche „ $\overline{}$ “ oder Tilden „ $\tilde{}$ “.



Beispiele für Indizierung

- \dot{r}_i : Absolutgeschwindigkeit des Punktes P_i
 $\dot{r}_{i,j}$: Absolutgeschwindigkeit (absolute zeitliche Veränderung) des Differenzvektors $\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$
 ${}_k\dot{r}_i$: Relativgeschwindigkeit von „ i “ bezüglich des Bezugssystems „ k “
 ${}_k\dot{r}_{i,j}$: Relativgeschwindigkeit ${}_k\dot{r}_i - {}_k\dot{r}_j$
 ${}_k^j \mathbf{v}_j$: Koordinatendarstellung der Absolutgeschwindigkeit des Punktes P_j relativ zum Koordinatensystem „ k “, koordinatenweise dargestellt im Koordinatensystem „ j “

${}^j\mathbf{T}_i$: Drehensor, welcher die Koordinatendarstellung eines Vektors „ \mathbf{a} “ im Koordinatensystem „ i “ in das Koordinatensystem „ j “ transformiert: „ ${}^j\mathbf{a} = {}^j\mathbf{T}_i {}^i\mathbf{a}$ “.

Partielle Ableitungen einer m - dimensionalen Vektorfunktion

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

nach den Koordinaten eines n - dimensionalen Vektors \mathbf{x} werden in einer (m, n) - dimensionalen *Funktional- oder JACOBI-Matrix* angeordnet:

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Beispiele für „Physikalische“ Vektoren und ihre Darstellung

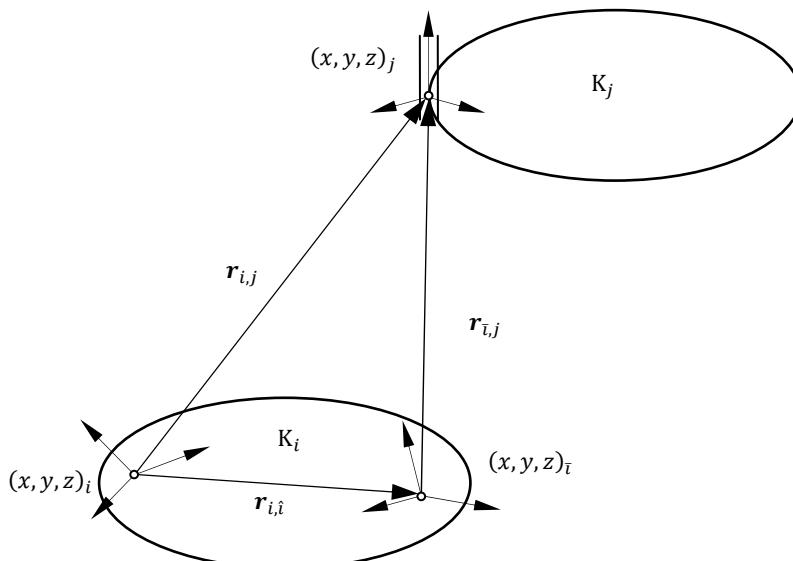
$\mathbf{e}_{x_i}, \mathbf{e}_{y_i}, \mathbf{e}_{z_i}$: Einheitsvektoren für Basissysteme
\mathbf{u}_i	: normierter Richtungsvektor (Gelenkachsen)
\mathbf{r}_i	: Ortsvektor zum Bezugspunkt O_i des „Objekts“ (Körpers) „ i “
$\mathbf{r}_{\bar{i}}$: Ortsvektor zum Vorgänger des Bezugspunktes O_i
\mathbf{s}_i	: Ortsvektor zum Schwerpunkt S_i
\mathbf{p}_i	: Ortsvektor zum „point of interest“ P_i (z.B. Kraftangriffspunkt)
$\mathbf{r}_{i,j} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$: Differenzvektor zwischen zwei Bezugspunkten P_i, P_j
$\mathbf{v}_i, \dot{\mathbf{v}}_i, \mathbf{a}_i$: Geschwindigkeit, Beschleunigungen
$\boldsymbol{\omega}_i, \dot{\boldsymbol{\omega}}_i, \boldsymbol{\alpha}_i$: Winkelgeschwindigkeit, Winkelbeschleunigungen
\mathbf{F}_i	: Kraft
$\mathbf{L}_i, \mathbf{T}_i$: Drehmoment
$\boldsymbol{\Theta}_{S_i}, \theta_{S_i}$: Trägheitstensor, Trägheitsmoment
\mathbf{T}_i	: Drehensor
$(x, y, z)_i$: Koordinatensystem (K_i)
$K_i = \{O_i; x_i, y_i, z_i\}$: Koordinatensystem (K_i), alternative Schreibweise
x_i, y_i, z_i	: Koordinatenachsen
ξ_i, η_i, ζ_i	: Koordinatenachsen

Skalare

m_i	: Masse
i, j, k, \dots	: Indizes
N, n	: Anzahl von Elementen, Komponenten (z.B. n_β, N_β)
α	: Winkel
f	: Freiheitsgrade (auch f_i)

Vektoren und Matrizen

E, I	: Einheitsmatrix, Einheitstensor
g	: „Vektor“ der impliziten Bindungsgleichungen
q	: „Vektor“ der verallgemeinerten Koordinaten
M	: Massenmatrix
b	: „Vektor“ der verallgemeinerten Zentripetal- und Corioliskräfte
Q	: verallgemeinerte Kräfte
β	: relative oder natürliche Gelenkkoordinaten
$e^{(i)}$: $\begin{bmatrix} 0,0, \dots, \underbrace{1}_i, \dots, 0,0 \end{bmatrix}$
w	: Lagekoordinaten
Z	: Reaktionskräfte



Trigonometrische Funktionen

Aus Platzgründen wird häufig z.B. statt „cos φ “ die Kurzform „c φ “ und statt „sin φ “ „s φ “ verwendet.

$$\dot{\mathbf{r}}_j = \dot{\mathbf{r}}_i + \dot{\mathbf{r}}_{i,j}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{i,j} = \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i,j} + \ddot{\mathbf{r}}_{i,j}$$

$$_i\dot{\mathbf{r}}_{i,j} = _i\dot{\mathbf{r}}_j = _j\dot{\mathbf{r}}_j$$

(ohne Komponenten!)

Beachte:

$$\mathbf{r}_{i,j} = _i\mathbf{r}_j$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{i,j} \neq _i\dot{\mathbf{r}}_j$$

1 Einleitung

Die Fahrzeugdynamik ist ein Teilgebiet der Fahrzeugmechanik, das sich mit den zur Bewegung von straßengebundenen Fahrzeugen notwendigen Bewegungsvorgängen, den diese Bewegungsvorgänge verursachenden Kräften unter Beachtung der zugrundliegenden Naturgesetze befasst. Beziehe zur Fahrdynamik gibt es in vielen Bereichen der Entwicklung von Kraftfahrzeugen, Kraftfahrzeugsystemen und deren Komponenten.

1.1 Aufgabenstellung

In diesem Kapitel werden daher im Überblick über Modellierungsverfahren, grundlegende Begriffe der Fahrzeugdynamik und die Einbettung der Fahrzeugdynamik in die Fahrzeugentwicklung gegeben.

Der Einsatz von komplexen mathematischen Fahrzeugmodellen zur Simulation und zum Entwurf von Kraftfahrzeugsystemen und Anwendungen, wie z.B. von Fahrdynamikregelungen oder Bremssystemen hat in den letzten Jahren mehr denn je zuvor an Bedeutung gewonnen. Die Gründe dafür sind einerseits wirtschaftlicher Natur:

- Der Aufwand für Fahrversuche und Messungen steigt mit zunehmender Komplexität der Fahrzeugsysteme und der vorgeschriebenen Erprobungsbedingungen. Dies hat entsprechende Folgen für die Entwicklungsbudgets.
- Die Kraftfahrzeughersteller und -zulieferer müssen aufgrund des gestiegenen Marktbedarfs die Kosten auch in der Entwicklungsphase so weit wie möglich beschränken, indem Prototypen und Versuche durch Simulationen und virtuelle Prototypen ersetzt werden.

Andererseits sind viele Gründe auch auf die Technik der neuen Systeme zurückzuführen. Bei diesen Systemen handelt es sich häufig um sogenannte Mechatronische Systeme, s. z.B. (Isermann 2008), deren typischerweise stark erweiterte Funktionalität und optimierte Wertgestaltung auf der funktions- und hardwareorientierten Kombination von mechanischen, elektri-

schen und elektronischen Komponenten und Teilsystemen sowie der entsprechenden Betriebs- und Funktionssoftware beruht. Das Zusammenwirken dieser Einzelsysteme, die aus unterschiedlichen technischen Domänen stammen, führt einerseits zu einer sonst nicht erreichbaren Funktionsvielfalt und -qualität und andererseits zu kosteneffizienten Lösungen, indem Mechanik und Elektrik- und Elektronikhardware in Modulen integriert werden. Die Auslegung und Erprobung derartiger Systeme mit ihrer enormen Funktionsvielfalt stellt hohe Anforderungen an Auslegungsmethoden und Erprobungsprogramme und daraus resultierend die Modellierungs- und Simulationstechnik:

- Fahrzeugmodelle sind die Grundlage für die Auslegung und Entwicklung von Fahrzeugsystemen und -komponenten.
- Fahrmanöver lassen sich unter definierten Randbedingungen beliebig oft und reproduzierbar simulieren.
- Kritische Fahrmanöver können durch gefahrlose Simulationen ersetzt werden.
- Die immer kürzer konzipieren Entwicklungszyklen für neue Baureihen erfordern kürzere Entwicklungszeiten. Dies lässt sich nur durch den Einsatz von Simulationen und virtuellen Prototypen erreichen.

Aus diesen Anforderungen lassen sich die Anwendungsbereiche der in diesem Buch angewandten Methode der Mehrkörpersysteme (MKS) bei der Fahrzeugentwicklung ableiten:

- Kinematik und Dynamik des Fahrwerks und der Lenkung.
- Fahrdynamik des Gesamtfahrzeugs.
- Fahrkomforts des Gesamtfahrzeugs.
- Analyse von Unfallvorgängen.

Das Ziel ist in jedem Fall eine mathematische Beschreibung der relevanten Bereiche und Funktionen des Fahrzeugs, die für die Konzeption, Entwicklung und Beurteilung der Fahrdynamik flexibel eingesetzt werden kann. Die darauf aufbauende numerische Simulation des Fahrverhaltens hat in jüngster Zeit erheblich an Bedeutung gewonnen. Sie erlaubt eine einfache, rasche und kostengünstige Untersuchung von Fahrvorgängen, ohne dass aufwendige Versuche notwendig werden. Die Simulation ermöglicht die Variation von Parametern oder Anfangsbedingungen in einer Weise, die im Versuch nicht möglich ist. Da aber die Resultate einer numerischen Simulation nur Näherungen darstellen und somit ihre Qualität entschei-

dend von der Exaktheit der Modellierung des Systems und von der Zuverlässigkeit der Systemdaten abhängt, ist ein besonderes Augenmerk auf die Modellbildung zu legen.

Das Fahrverhalten von Personenwagen wird von mehreren Faktoren beeinflusst. Eine besonders wichtige Rolle spielt die Führung der Räder, die relativ zum Fahrgestell vorgegebene Bewegungen beschreiben sollen. Durch eine günstige Wahl von geometrischen Parametern bei der Konstruktion einer Radaufhängung wird beispielsweise die Stabilität in der Kurve oder beim Spurwechsel gewährleistet. Die heute eingesetzten Einzelradaufhängungen stellen in der Regel Mehrkörpersysteme mit geschlossenen kinematischen Schleifen dar. Zudem kann das Fahrverhalten durch elastische Lagerungen in den Radaufhängungen gezielt beeinflusst werden. Hierzu gehört zum Beispiel die Längsnachgiebigkeit der Radführung, die durch eine weiche Lagerung des Querlenkers erreicht werden kann.

Die komplizierten Systeme und der Wunsch nach einer möglichst genauen Nachbildung der realen Vorgänge machen die Entwicklung eines Simulationsmodells zu einer umfangreichen und anspruchsvollen Aufgabe. Hierbei kommt es insbesondere auf eine effiziente Aufstellung der Gleichungen an, um einerseits den Modellierungsaufwand zu begrenzen und andererseits die für die Simulation benötigte Rechenzeit zu minimieren. Ziel dieses Buches ist es daher, einen effizienten Weg zur Erstellung eines realitätsnahen Simulationsmodells eines Fahrzeugs aufzuzeigen. Hierzu wird zunächst ein Überblick über die grundlegenden Verfahren der Mechanik und der Mathematik geboten, wobei die topologische Struktur des Fahrzeugs aufbauend auf bereits bekannten Grundlagen, wie dem Verfahren der *kinematischen Differentiale* und des *charakteristischen Gelenkpaares* näher beschrieben wird. Darauf aufbauend wird die Modellierung der Teilsysteme und Komponenten

- Fahrgestell,
- Radaufhängungen,
- Reifen,
- Kraftelemente,
- und Antriebsstrang

und schließlich des Gesamtsystems behandelt.

1.1.1 Modellierung technischer Systeme

Um das dynamische Verhalten eines realen Prozesses mittels mathematischer Modelle – dem Untersuchungsziel entsprechend – beschreiben zu können, lassen sich zwei grundsätzlich verschiedene Wege beschreiten:

- Bei der theoretischen Modellbildung werden mathematische Modelle aus physikalischen Gesetzen abgeleitet.
- Bei der experimentellen Modellbildung wird eine bestimmte in der Regel ebenfalls mathematisch formulierte Modellstruktur zugrunde gelegt. Auf der Basis dieser Modellstruktur werden dann parametrisierte Modelle durch die Auswertung gemessener Ein- und Ausgangssignale bestimmt. Eine spezielle Ausprägung dieser Methode wird als (Modell-) Identifikation bezeichnet.

Dieses Buch befasst sich nahezu ausschließlich mit der theoretischen Modellbildung. Physikalische Parameter werden dabei in der Regel als bekannt oder zumindest schätzbar vorausgesetzt. Typische Quellen für Parameter in der Fahrzeugtechnik sind:

- CAD-Modelle für Abmessungen, Massen und Trägheitsmomente.
- Direkte Messung von Massen, Trägheitsmomenten, Feder- und Dämpferkennlinien, ggf. Reibungsparameter.
- Annahmen, Schätzungen und ggf. Identifikationsverfahren für weitere schwer bestimmbarer oder unscharfe Größen. Hierzu gehören insbesondere Reibungseffekte, Elastizitäten in Lagerungen, etc.
- Berechnung von Parametern und Kennfeldern durch andere Berechnungs- und Simulationsmethoden, wie z.B. die Methode der Finiten Elemente, Methoden zur Berechnung elektrischer und magnetischer Felder, etc.

Die Identifikationstechnik wird in diesem Zusammenhang häufig benutzt, um unbekannte oder schwer zu messende Parameter der theoretischen Modelle messtechnisch zu bestimmen. Beispiele hierfür sind Reifenmodelle (Kapitel 7) oder Kennlinien von Kraftelementen (Kapitel 9), wie z.B. Gummilager oder Dämpfer.

Ziel der Modellbildung ist es, eine mathematisch-analytische Beschreibung des interessierenden Systems zu erhalten, die es gestattet, die relevanten Aspekte des Systemverhaltens und des Einflusses der Systemkomponenten zu untersuchen, s. Abb. 1.1. Hierbei besteht die Möglichkeit, Modelle unterschiedlicher Komplexität und Aussagekraft zu entwickeln. Je komplexer ein Modell ist, desto genauer lässt sich mit ihm einerseits das

Systemverhalten simulieren. Andererseits ergeben sich dabei jedoch nahezu zwangsläufig kompliziertere und in der Regel nichtlineare Modellgleichungen sowie ein hoher Bedarf an Rechenzeit. Darüber hinaus steigt mit zunehmender Komplexität der Modelle auch die Anzahl der zu bestimmenden Modellparameter. Häufig übersteigt der Aufwand bei der Beschaffung der relevanten Modellparameter den Aufwand der Erstellung der Modellgleichungen deutlich. Aus diesem Grunde ist im Einzelfall immer kritisch zu prüfen, ob eine Steigerung der Modelldetaillierung noch in einem angemessenen Verhältnis zum Zweck der Untersuchung steht.



Abb. 1.1: Fahrzeugdynamik: Umfeld und beteiligte Komponenten

1.1.2 Systembegriff

In diesem Buch wird immer wieder der Begriff des Systems gebraucht. Aus diesem Grund ist es nützlich, sich nochmals sich kurz vor Augen zu führen, was in diesem Buch unter einem *System* verstanden wird (Hiller 1983):

Ein *System* bezeichnet eine Menge von Elementen (Teile, Komponenten), die sich gegenseitig durch interne Funktionszusammenhänge und physikalische Gesetze beeinflussen (*Wechselwirkung*), auf die Einflüsse von außen einwirken (*Eingänge*) und die Wirkungen nach außen abgeben (*Ausgänge*). Zu den wichtigsten Eigenschaften eines Systems gehören daher seine

Veränderlichkeit (*Bewegung*) und seine Beeinflussbarkeit (*Steuerbarkeit*) durch eine passende Wahl der Eingänge (Kräfte und eingeprägte Bewegungen). Der Zusammenhang zwischen externen Einwirkungen auf das System und den daraus resultierenden Änderungen des Systemzustands wird als Dynamik des Systems oder kurz Systemdynamik bezeichnet.

Ein großer Teil dieses Buches beschäftigt sich mit der Untersuchung und Analyse sowie der Vorhersage des dynamischen Verhaltens des Systems Kraftfahrzeug und seines Teilsysteme und Komponenten. Dabei sind folgende Teilaufgaben zu unterscheiden:

- Modellbildung: Die Modellbildung ist stets mit Idealisierungen und Abstraktionen verbunden, s. Abschnitt 1.1.4
- Modelluntersuchung: Dies umfasst insbesondere die (in der Regel numerische) Lösung der Bewegungsgleichungen.
- Wahl der steuernden Eingänge: Beispiele im Kraftfahrzeug sind z.B. Lenkradwinkel, Fahr- und Bremspedalstellung sowie der Verlauf der Straßenoberfläche, aber auch Aktuatorkräfte, wie z.B. die in Kapitel 14 untersuchten aktiven Stabilisatoren.
- Simulation des Systemverhaltens (Kapitel 12).

1.1.3 Simulation und Simulationsumgebung

Ziel jeder *Simulation* ist es, das zu betrachtende System durch ein Modell so gut zu beschreiben, dass die gewünschten Rückschlüsse vom Verhalten des Modells auf das Verhalten des realen Systems möglich werden. In diesem Buch wird in der Regel als System ein Kraftfahrzeug oder ein Teil eines Kraftfahrzeugs sowie ggf. ein Teil der Umgebung betrachtet. Im Folgenden wird ausschließlich die Simulation mit mathematischen Modellen auf einem (oder einem Verbund mehrerer) Rechner untersucht. Dabei ist das Modell rein mathematischer Natur. Die Simulation ist daher gleichbedeutend mit der Ausführung eines oder mehrerer Rechnerprogramme, ggf. in Kombination mit über geeignete Schnittstellen verbundenen Hardwarekomponenten. Man spricht in diesem Fall auch von einer *Hardware-in-the-Loop (HiL)-Simulation*. Hierbei ist es erforderlich, die Simulation in Echtzeit durchzuführen, um die verbundene Hardware mit Daten versorgen zu können.

Betrachtet man für einen Augenblick das Kraftfahrzeug als ein *mechatronisches Gesamtsystem*, in dem z.B. die bereits erwähnten Fahrodynamikregelsysteme oder die Fahrerassistenzsysteme eine immer größere Rolle spielen, so kommt hier im Rahmen des mechatronischen Entwick-

lungsprozesses dem Werkzeug der Simulation der Dynamik von Kraftfahrzeugkomponenten oder gesamten Fahrzeugmodellen eine besondere Bedeutung zu. Verwiesen sei an dieser Stelle auf die VDI-Richtlinie 2206 *Entwicklungsmethoden für mechatronische Systeme (2004)*.

1.1.4 Fahrzeugmodelle

Die in diesem Buch beschriebenen Modelle sollen es ermöglichen, das dynamische Verhalten realer Fahrzeuge möglichst wirklichkeitsnah darzustellen. Dazu müssen diese Modelle wenigstens die folgenden Anforderungen erfüllen:

- volle räumliche Kinematik und Kinetik des Gesamtfahrzeugs und ggf. auch der Teilsysteme,
- nichtlineare Kinematik der Radaufhängungen,
- nichtlineare und – wo erforderlich – auch dynamische Beschreibung von Kraftelementen,
- dynamische Reifenkräfte.

Andererseits müssen die Modelle auch handhabbar bleiben. Dies gilt insbesondere dann, wenn die Simulationsmodelle in einem Hardware-in-the-Loop Prüfstand oder einem Fahrsimulator eingesetzt werden sollen. Dann ist auch eine diesen Anwendungen entsprechende kurze Rechenzeit zu realisieren. Dasselbe gilt auch für den Einsatz der Modelle bei Optimierungsaufgaben.

Zur Simulation der Fahrzeugdynamik sind je nach Aufgabenstellung und gewünschtem Detaillierungsgrad unterschiedlichste Ausprägungen von Fahrzeugmodellen denkbar, s. Tabelle 1.1.

Wenn man das Fahrzeugchassis als starr annimmt, dann hat das Chassis zunächst sechs Freiheitsgrade im Raum, die aber durch weitere Annahmen, wie z.B. beim Ein- oder Zweispurmodell, weiter eingeschränkt werden können. Zur Simulation der Fahrzeuglängsbewegung kann es beispielsweise völlig ausreichend sein, nur einen Freiheitsgrad für die Fahrzeuglängsbewegung zu definieren. Dann sind die weiteren Freiheitsgrade des Aufbaus durch sogenannte Zwangsbedingungen weiter einzuschränken. Selbst für ein einfaches Modell zur Beschreibung der Querdynamik sind mindestens zwei Freiheitsgrade für die Querbewegung und die Gierbewegung erforderlich.

Tabelle 1.1: Modellierungen für Kraftfahrzeuge

Modelltyp	Freiheitsgrade	Kapitel
Einspurmodell linear	2	10
Einspurmodell nichtlinear	3	10
Zweispurmodell	4 - 30	11
Komplexes MKS-Modell	> 20	12,13 – Teilsysteme: 5,6,7,8,9
FEM-Modell	> 500	nicht behandelt
Hybrides Modell	> 500	nicht behandelt

Bei Zweispurmodellen und erst recht bei komplexen MKS-Modellen sind darüber hinaus weitere Freiheitsgrade zur Beschreibung der Bewegung der Komponenten der Radaufhängungen und des Antriebsstrangs erforderlich. Weiterhin müssen die Teilsysteme des Fahrzeugs, wie Antriebsstrang, Bremse und Lenkung modelliert werden. Auch Systeme wie ABS, ESP, Fahrerassistenzsysteme oder andere mechatronische Systeme können mit in das Modell integriert werden.

Der Einsatz von Simulationsprogrammen zur Entwicklung von kraftfahrzeugtechnischen Systemen hat während der letzten Jahre zunehmend an Bedeutung gewonnen und ist heute Stand der Technik. Die Vorhersage des dynamischen Verhaltens von Kraftfahrzeugen gestattet Aussagen zu Fahrstabilität, Fahrsicherheit und Komfort neuer Fahrzeugsysteme. Weiterhin sind damit solche Modelle zur Untersuchung der Beeinflussung des Fahrverhaltens durch Regelsysteme und Aktuatoren geeignet und machen eine effiziente Entwicklung derartiger Systeme häufig überhaupt erst möglich. Die Modellierung und Simulation der dort auftretenden mechanischen Komponenten kann grundsätzlich über die nachfolgend kurz beschriebenen Ansätze erfolgen (s. Schiehlen 2004).

Mehrkörpersysteme

Mehrkörpersysteme (MKS) sind geeignet für die Beschreibung mechanischer Systeme, die aus Körpern bestehen, welche sich weitgehend starr verhalten und durch *Lager* und *Gelenke* miteinander verbunden sind. Ein MKS besteht aus in der Regel, massebehafteten starren Körpern, auf die an diskreten Punkten Einzelkräfte und -momente einwirken, (Schiehlen 2004). Einige häufig verwendete Symbole für die typischen Elemente eines MKS sind zusammen mit jeweils einem entsprechenden Beispiel aus der Fahrzeugtechnik in Abb. 1.2 dargestellt.

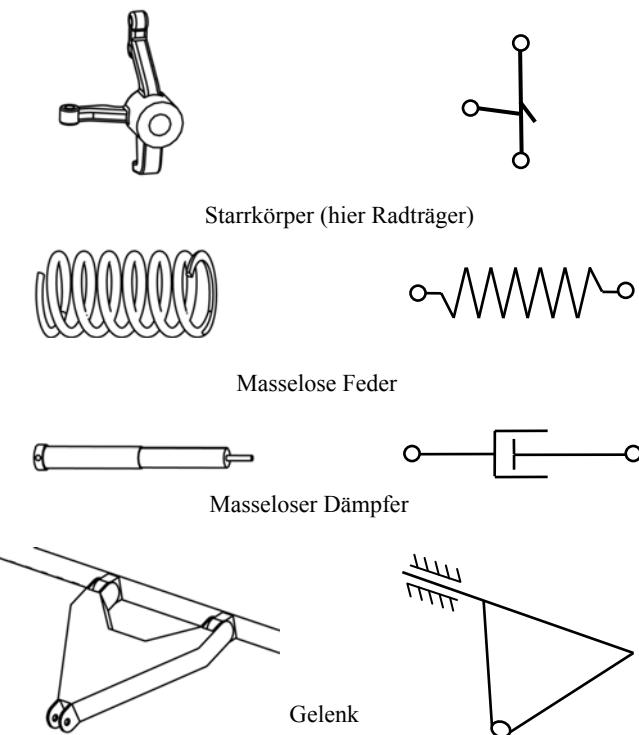


Abb. 1.2: Typische Elemente eines Mehrkörpersystems

Ein *starrer Körper* eines MKS ist gekennzeichnet durch seine Masse-trägheit. Charakteristische Punkte eines starren Körpers sind der *Massenmittelpunkt* S sowie eine endliche Anzahl von Knotenpunkten P_i , an denen Einzelkräfte und -momente angreifen oder andere Körper über entspre-chende Lager angekoppelt sind. Elastizitäten und Dämpfungen werden als *masselose Kraftelemente* beschrieben und sind in Abb. 1.2 durch entspre-chend Symbole dargestellt, die an die daneben dargestellten entsprechen-den Bauteile des Fahrzeugs erinnern. Entsprechend können durch die Vor-gabe von Kraftgesetzen und Zwangsbewegungen Antriebe und Aktuatoren abgebildet werden. Bei der Modellierung und Simulation liegt das Haupt-interesse auf der Auswertung der Bewegungsgrößen der Körper und gege-benenfalls auf den in den Lagern oder den Antrieben auftretenden Kräften und Momenten. Die mathematische Beschreibung der Kinematik und Ki-netik von MKS-Systemen führt je nach Modellierung und Formalismus auf gewöhnliche oder differential-algebraische Gleichungssysteme mit ver-gleichsweise wenigen Freiheitsgraden und wird in den Kapiteln 3 und 4

behandelt. Dabei versteht man unter Kinematik die Beschreibung der Bewegungsmöglichkeiten mechanischer Systeme, während die Kinetik sich mit der Bewegung mechanischer Systeme unter dem Einfluss von Kräften befasst.

Finite-Element-Systeme

Die *Methode der Finiten Elemente* (FEM) wird primär zur mathematischen Beschreibung der elastischen und ggf. plastischen Eigenschaften mechanischer Systeme eingesetzt, bei denen Masse und Elastizität kontinuierlich über die Körper verteilt sind. Das *Modell* besteht dabei aus vielen begrenzten (finiten) Elementen mit einfacher Geometrie, deren prinzipielle Verformungsmöglichkeiten durch die Vorgabe sogenannter Ansatzfunktionen eingeschränkt werden. Ziele der Untersuchungen sind vorrangig die Auswirkung äußerer Belastungen auf die Verformungs- und Spannungszustände in den beteiligten Körpern. Die mathematische Formulierung von FEM-Systemen führt auf gewöhnliche Differentialgleichungssysteme mit sehr vielen Freiheitsgraden.

Kontinuierliche Systeme

Kontinuierliche Systeme (KOS) werden verwendet für die Nachbildung elastischer Eigenschaften mechanischer Systeme, bei denen Masse und Elastizität, bzw. Plastizität kontinuierlich über den Körper verteilt sind. Die mathematische Formulierung von KOS führt auf eine Beschreibung durch partielle Differentialgleichungen mit unendlich vielen Freiheitsgraden. Der jeweilige Einsatzbereich dieser strukturell unterschiedlichen Ersatzsysteme ist im wesentlichen abhängig von der Geometrie und der Steifigkeitsverteilung des mechanischen Ausgangssystems, dem Ziel der Untersuchungen und damit implizit dem angestrebten Gültigkeitsbereich des Simulationsmodells. Die Methoden der Finiten Elemente und der Kontinuierlichen Systeme eignen sich primär für mechanische Systeme bzw. Körper mit gleichmäßig verteilter Elastizität.

Grundsätzlich bietet sich zur Modellierung komplexer Modelle zur Beschreibung der Fahrzeugdynamik die Methode der Mehrkörpersysteme an. Es ist jedoch auch möglich, ein Fahrzeugmodell als FEM-Modell aufzubauen. Dies hat insbesondere dann Vorteile, wenn neben der reinen Fahrzeugkinematik und -kinetik auch Strukturverformungen und Strukturspannungen ermittelt werden sollen.

Hybride mechanische Systeme, die eine Modellierung sowohl starrer als auch elastischer Körper erfordern, können als eine Mischform aus z.B.

MKS und FEM-Systemen dargestellt werden. In diesem Fall spricht man von Hybriden Systemen.

Bei der Auswahl eines geeigneten Ansatzes zur Simulation eines Fahrzeugs sind ergänzend noch die folgenden Aspekte zu beachten:

- Für die Bearbeitung der meisten Aufgaben aus der Fahrzeugdynamik ist es ausreichend ein sehr eingeschränktes Frequenzspektrum zu betrachten, Tabelle 1.2, (Bürger und Dödelbacher 1988), (Frik 1994). Damit lässt sich in der Regel die Modellierung auf die Abbildung eines Frequenzbereichs zwischen 0 und ca. 30 Hz einschränken.

Tabelle 1.2: Typische Frequenzen bei Fahrzeugteilsystemen

Schwingungsform	Frequenz (Hz)
Aufbaubewegung	1-2
Fahrzeuglängsschwingungen	4-10
Motorstuckern	10-13
Radaufhängungen, Einfedern	10-15
Lenkungsunruhe	10-16
Karosserieschwingungen	30-40

- Eine Ausnahme von der genannten Abgrenzung ist z.B. die Simulation von Fahrdynamikregelsystemen. Hier können durch die vergleichsweise kurzen Zeitkonstanten der Hydraulik höherfrequente Anregungen auftreten, die im Bereich der Eigenschwingungen der Radaufhängungen aufgrund von Lagerelastizitäten in einzelnen Gelenken im Bereich von 15-30 Hz sowie den Eigenfrequenzen der Gummireifen bei etwa 50 Hz liegen. Da diese Schwingungen die von den Sensoren der Fahrdynamikregelsysteme aufgenommenen Signale beeinflussen und im Bereich der Sensorabtastraten liegen, müssen sie bei der Simulation geregelter Fahrmanöver berücksichtigt werden.
- Bei jeder Modellierung ist zu beachten, dass es unter Umständen sehr schwierig oder in Einzelfällen sogar unmöglich ist, die entsprechenden Modelldaten zu beschaffen. Das gilt insbesondere für Reibungs- und Dämpfungskennlinien, Lagerelastizitäten und Reifenparameter.

1.2 Gesamtfahrzeugmodelle

Unter einem Gesamtfahrzeugmodell wird im Folgenden ein Modell verstanden, welches die Subsysteme Chassis, Antriebsstrang, Radaufhängungen, Räder, Bremse und Lenkung enthält. Eingangsgrößen dieses Modells sind die vom Fahrer vorgegebene Bremspedalstellung, die Gaspedalstel-

lung, der Lenkradwinkel, der eingelegte Gang oder ggf. die Stellung des Wählhebels des Automatikgetriebes. Die Umwelt wirkt auf das Fahrzeug durch die vorgegebenen Umgebungsbedingungen, wie Seiten- und Gegenwind, Kraftschlußbeiwert der Straße, Fahrbahnsteigung und Fahrbahnunebenheiten ein, Abb. 1.3.

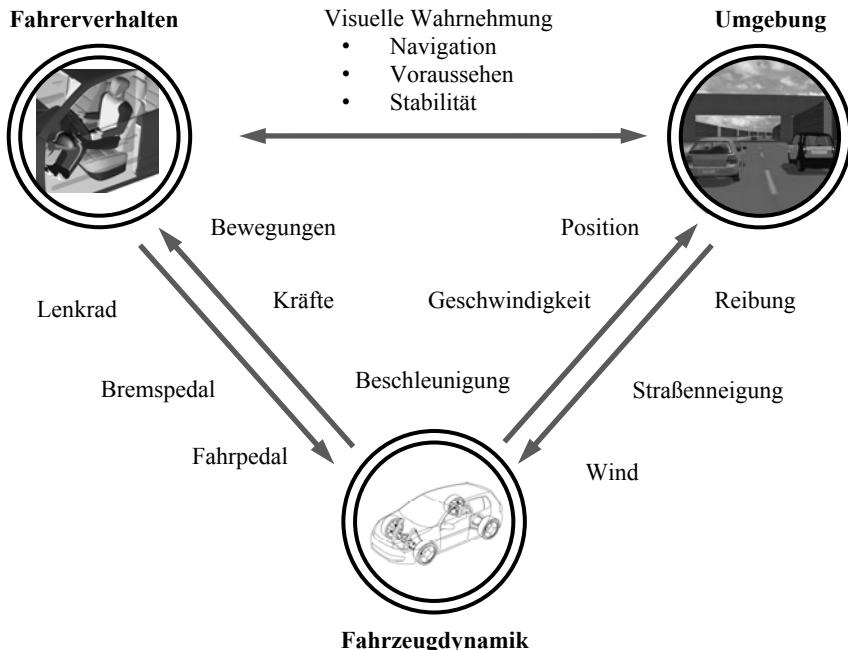


Abb. 1.3: Wechselwirkung eines Fahrzeugs mit dem Fahrer und der Umwelt

Ein Beispiel für ein komplexes Fahrzeugmodell, das als MKS modelliert wurde, ist in Abb. 1.4 dargestellt. Nicht immer ist es allerdings notwendig, ein vollständiges Fahrzeug abzubilden oder man unterteilt das Fahrzeugmodell in seine Subsysteme, die dann jeweils entweder alleine betrachtet werden und ggf. anschließend zu einem Gesamtmodell zusammengesetzt werden. In Abb. 1.4 wird dies anhand des komplexen Fahrzeugmodells angedeutet, das in seine typischen Subsysteme

- Fahrzeugaufbau (Chassis, Fahrgestell),
- Antriebsstrang,
- Radaufhängungen,
- Räder,

- Brems-
 - und Lenksystem
- aufgeteilt wurde.

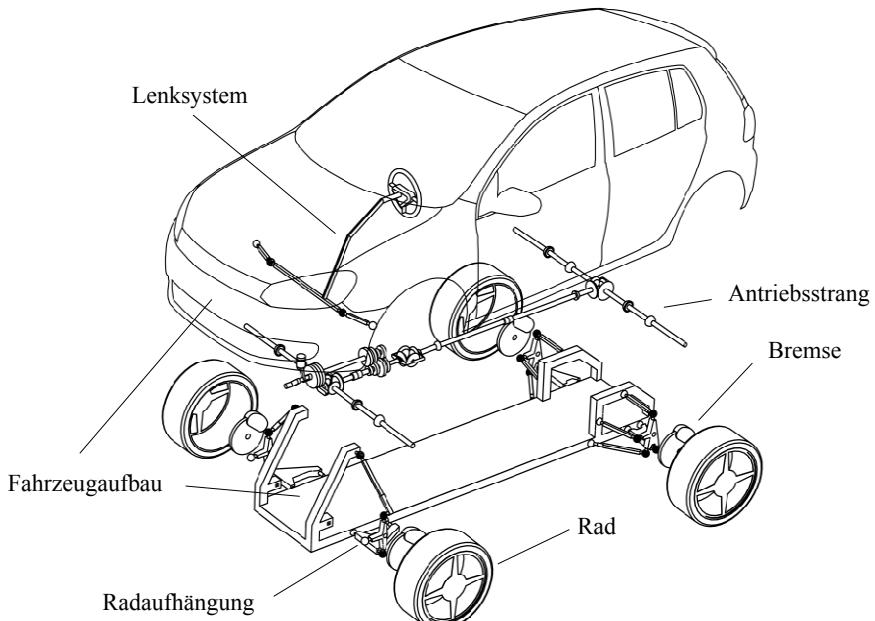


Abb. 1.4: Beispiel für ein komplexes Fahrzeugmodell

1.2.1 Fahrzeugmodelle und Anwendungsbereiche

Je nach gewünschter Anwendung können Fahrzeugmodelle verschiedener Ausprägung zum Einsatz kommen. In diesem Buch werden die in den Tabelle 1.3 und Tabelle 1.4 aufgeführten Grundmodellierungen im Detail besprochen. In Tabelle 1.4 ist weiterhin gekennzeichnet, ob das jeweilige Modell sich für Offline- (O) oder Echtzeitanwendungen (E) eignet.

Tabelle 1.3: Übersicht der Fahrzeugmodelle

Einspurmodell		Zweispurmodell		MKS-Modell		
linear	nicht linear	ohne Kinematik	mit Kinematik	reduziert	komplex	kombiniert mit FEM
				ebene Translation, gieren		
				Wank-, Nick-, Vertikaldynamik	Komponentenbewegung	Spezialanwendung, Überschlag, Unfall, Crash
Bewegungsart						
Freiheitsgrade	2 - 3	3 - 7	14 - 25	20 - ...	20 - ...	20 - ...
Frequenz- bereich	0 - 2 Hz	0 - 5 Hz	0 - 30 Hz	0 - 200 Hz	0 - 200 Hz	0 - 200 Hz

Tabelle 1.4: Simulationsgeschwindigkeit (O: offline, E: Echtzeit)

	Einspurmodell	Zweispurmodell	MKS-Modell	
Auslegung	linear	nicht linear ohne Kinematik	mit Kinematik	reduziert komplex
Konzeptentwurf und - test	Komponenten	O/E	O/E	O/E
	Funktionen	O/E	O/E	O/E
	Software	O/E	O/E	O/E
	Hardware	E	E	
	Hardware in the Loop (Hil)	E	E	
	Software in the Loop (Sil)	E	E	
Fahrsimulator	HMI	E	E	E
	Erprobung von Algorithmen und Funktionen	E	E	E
	Akzeptanz	E	E	E
Integration in Algorithmen	Serienanwendung	E		

1.2.2 Kommerzielle Fahrzeugsimulationssysteme

Zur Simulation der Fahrzeughodynamik sind heute eine Vielzahl von Simulationsprogrammen bis hin zu kompletten Simulationsumgebungen und Werkzeugketten verfügbar. In diesem Abschnitt werden einige dieser kommerziellen Fahrzeugsimulationssysteme genannt. Dabei wird weder ein Anspruch auf Vollständigkeit geltend gemacht, noch soll mit der Nennung oder Nichtnennung einzelner Programme eine Wertung verbunden werden.

Tabelle 1.5: Programme zur Simulation von Mehrkörpersystemen (MKS)

Programm	Hersteller	Art	Literaturverweis
Adams/ Adams Car	MSC.Software Corporation, Santa Ana, USA	MKS	(MSC.Software 2010)
Simpack	Simpack AG, Gilching, Deutschland	MKS	(Simpack AG 2010)
Virtual.Lab Vehicle Motion	LMS International, Leuven, Belgien	MKS	(LMS International 2010):
Pro/ENGINEER Mechanica	PTC, Needham, USA	MKS	(Parametric Technology Corporation 2010).
Simulia Abaqus	Simulia	Hybrid (FEM/MKS)	(Simulia 2010)
Dymola	Dassault Systemes, Vélizy-Villacoublay, Frankreich	MKS	(Dassault Systemes 2010):
DADS	LMS	MKS	http://www.lmsintl.com/DADS

Beispiele für gängige Softwarelösungen allgemeiner MKS-Systeme sind in Tabelle 1.5 aufgeführt. Sie unterstützen den Modellaufbau durch Elementbibliotheken, welche neben allgemein verwendbaren auch anwendungsspezifische Elemente enthalten und in der Regel auch geeignete grafische Benutzeroberflächen zur Erstellung der Modelle (Präprozessor) und zur Auswertung (Postprozessor). Die genannten Systeme sind entweder dazu geeignet, beliebige mechanische Anwendungen zu unterstützen oder sie sind durch Spezialisierung aus solchen Systemen hervorgegangen. Daneben existieren jedoch auch Simulationsumgebungen, die ausschließlich die Modellierung von Kraftfahrzeugen zur Aufgabe haben. Diese Systeme gestatten in der Regel nicht nur die Simulation des eigentlichen Fahrzeugs, sondern ergänzend auch die Generierung von Straßenverläufen und die Berücksichtigung des Fahrers (Fahrermodelle). Beispiele für derartige Systeme sind in Tabelle 1.6 aufgeführt.

Tabelle 1.6: Spezialprogramme zur Simulation von Kraftfahrzeugen

Programm	Hersteller	Themen	Literaturverweis
CarMaker	IPG	MKS, Echtzeit, HiL	(IPG 2010)
CarSim	Mechanical Solution	MKS, Echtzeit	(Carsim 2010)
veDyna	TESIS Dynaware	MKS, Echtzeit	(Tesis 2010)
proracingsim	ProRacing Sim	Motorsimulation	(Proracingsim 2010)

AVL Advisor	AVL	MKS, Echtzeit, Antriebsstrang	(AVL Advisor 2010)
AVL Cruise	AVL	MKS, Echtzeit, Antriebsstrang	(AVL Cruise 2010)
ASM	dSPACE	HIL, embedded	(dSpace 2010)
VDMS	Milliken Research	MKS	(Milliken Research 2010)
SwRi Raptor	Southwest Research		(Southwest Research 2010)
Madymo	TASS	MKS, FEM	(TASS 2010)

1.3 Inhaltsübersicht

In der Einleitung (*Kapitel 1*) wird zunächst ein Überblick über Modellierungsverfahren und Simulationsprogramme gegeben. Zur Beschreibung der Dynamik von Kraftfahrzeugen wird in diesem Buch die Methode der Mehrkörpersysteme (MKS) verwendet, die für die in der Fahrzeughodynamik wichtigen Phänomene besonders geeignet ist.

Die zum Verständnis des Buches erforderlichen mathematischen und kinematischen Grundlagen werden in *Kapitel 2* ausführlich besprochen. Kraftfahrzeuge sind Beispiele für Mehrkörpersysteme mit sehr komplexer, räumlicher Kinematik, insbesondere im Bereich der Radaufhängungen. Das kennzeichnende Merkmal ist hier das Auftreten *geschlossener kinematischer Schleifen*, deren mathematische Behandlung erhebliche Schwierigkeiten bereitet. Aus diesem Grund wird die Kinematik von Mehrkörpersystemen in *Kapitel 3* ausführlich behandelt. Dabei werden insbesondere die von den Autoren im Rahmen von Entwicklungsprojekten über Jahre erfolgreich eingesetzten Konzepte der kinematischen Differentiale und Transformationen sowie Methoden zur Berücksichtigung der bei Radaufhängungen regelmäßig auftretenden kinematischen Schleifen erläutert. Auf der Basis der dargestellten kinematischen Methoden werden in *Kapitel 4* die Bewegungsgleichungen für Mehrkörpersysteme hergeleitet.

Auf Basis der in den ersten 4 Kapiteln hergeleiteten Methoden werden in den folgenden *Kapiteln 5-9* die Subsysteme Fahrzeugaufbau, Radaufhängungen, Rad-Straße-Kontakt und Antriebstrang von Kraftfahrzeugen modelliert und analysiert. Die Beschreibung der Teilsysteme wird noch ergänzt durch eine Übersicht und die mathematische Beschreibung der auf das Fahrzeug wirkenden Kräfte.

Die *Kapitel 10 und 11* beschäftigen sich mit grundlegenden Ein- und Zweispurmodellen, die aber bereits ausreichen, um wesentliche fahrdynamische Phänomene zu beschreiben. Die zugehörigen Bewegungsgleichungen werden explizit angegeben, so dass der Leser damit in der Lage ist, eigene Modelle zu erstellen und entsprechende Simulationen durchzuführen.

Schließlich werden in *Kapitel 12* komplexe, räumliche Gesamtfahrzeugmodelle erstellt und beschrieben.

Für die in den einzelnen Kapiteln beschriebenen Modelle werden in *Kapitel 13* beispielhaft Parameter angegeben, die sich überwiegend auf ein fiktives durchschnittliches Fahrzeugmodell der Mittelklasse beziehen. Darüber hinaus wird für typische Fahrzeuge mit unterschiedlichen Antriebskonzepten die Kinematik der Fahrwerke analysiert. Beispiele zur Anwendung der im Buch behandelten Methoden enthält *Kapitel 14*.

1.4 Web-Seite zum Buch

Zu dem vorliegenden Buch wurde eine Web-Seite eingerichtet, auf der der Leser weitere Informationen und Ergänzungen zu dem im Buch gebotenen Stoff findet. Die Internet-Adresse der Seite ist:

www.imech.de/msdk

2 Mathematische und kinematische Grundlagen

Die Begriffe *Vektor* und *Tensor* spielen eine zentrale Rolle in der Mechanik. Im Folgenden wird zwischen dem Vektor als einem physikalischen Begriff und seiner mathematischen Verarbeitung über eine Komponentenzerlegung unterschieden. Man benötigt einerseits Rechenregeln und andererseits müssen für die Zerlegung von Vektoren in Komponenten Koordinatensysteme eingeführt werden.

2.1 Vektoren

2.1.1 Elementare Rechenregeln für Vektoren

Die Einführung des Vektorbegriffes erfolgt anschaulich, wobei der Vektor immer eine geometrische oder physikalische Bedeutung hat.

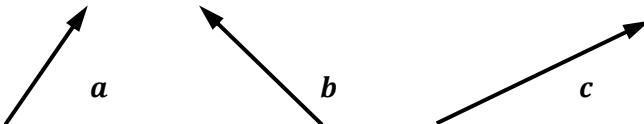


Abb. 2.1: Vektoren im 3-dimensionalen, euklidischen Raum \mathbb{R}^3

Es gelten folgende elementaren Rechenregeln:

Summe und Produkt:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \quad \text{kommutatives Gesetz,} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} \quad \text{assoziative Gesetz,} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \quad \text{distributives Gesetz.} \quad (2.3)$$

Skalarprodukt:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}); |\mathbf{a}|: \text{Euklidische Norm} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \quad \text{kommutatives Gesetz} \quad (2.5)$$

Vektorprodukt:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (2.6)$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \varphi \quad \text{Betrag des Kreuzproduktes} \quad (2.7)$$

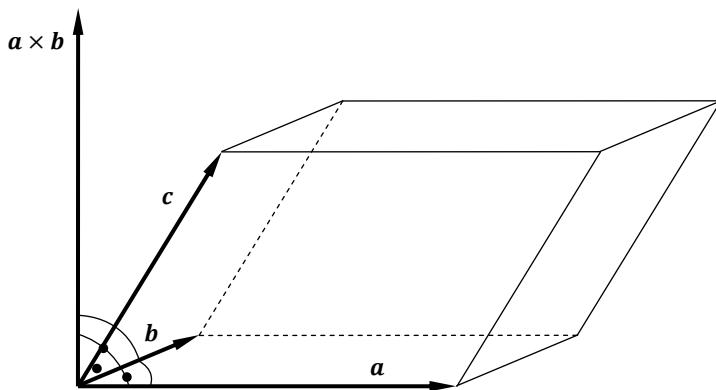


Abb. 2.2: Spatprodukt

Spatprodukt :

$$V = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \quad (2.8)$$

(Volumen V , aufgespannt aus den Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$)

Entwicklungssatz:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (2.9)$$

LAPLACEsche Identität:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}) \quad (2.10)$$

2.1.2 „Physikalische“ Vektoren

Die wichtigsten Größen zur Beschreibung technischer – insbesondere mechanischer Systeme – werden durch physikalische Vektoren beschrieben. Die Weiterverarbeitung und Interpretation dieser Größen erfordert jedoch

in der Regel die Darstellung in einem Koordinatensystem. Daraus ergibt sich folgende Problemstellung:

Gegeben: Ein Vektor α sei gegeben als *physikalische* Größe, d.h. unabhängig von seiner Darstellung in Koordinaten (Komponenten).

Beispiele:	Verschiebung	s
	Geschwindigkeit	v
	Winkelgeschwindigkeit	ω
	Kraft	F
	Moment	L

Gesucht: Darstellung von α zur Auswertung von vektoriellen Beziehungen für physikalisch-technische Anwendungen.

Vorgehen: Einführung von Koordinatensystemen und Zerlegung der Vektoren in Komponenten.

Problem: Bestimmung des Zusammenhangs bei mehreren Koordinatensystemen, d.h. mehreren Darstellungen für denselben Vektor.

2.2 Koordinatensysteme und Komponenten

2.2.1 Koordinatensysteme

Koordinatensysteme K_i werden als *orthonormierte Systeme* eingeführt, d.h. die Koordinatenachsen x_i, y_i, z_i sind senkrecht zueinander; dazu gehören normierte Einheits- oder Basisvektoren $e_{x_i}, e_{y_i}, e_{z_i}$ der Länge 1.

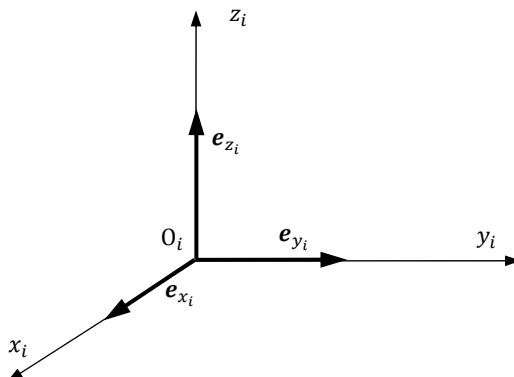


Abb. 2.3: orthonormiertes Koordinatensystem

2.2.2 Komponentenzerlegung

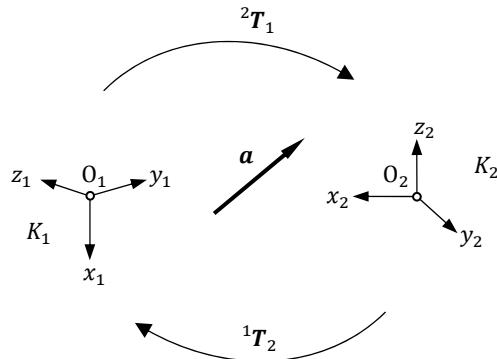


Abb. 2.4: Komponentenzerlegung

- Koordinatensystem $K_1(\mathbf{e}_{x_1}, \mathbf{e}_{y_1}, \mathbf{e}_{z_1})$:

Eine Zerlegung von \mathbf{a} in Richtung der Basisvektoren $\mathbf{e}_{x_1}, \mathbf{e}_{y_1}, \mathbf{e}_{z_1}$ ergibt:

$$\mathbf{a} = {}^1a_x \mathbf{e}_{x_1} + {}^1a_y \mathbf{e}_{y_1} + {}^1a_z \mathbf{e}_{z_1}, \quad (2.11)$$

mit den Projektionen: ${}^1a_x = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_{x_1}$; ${}^1a_y = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_{y_1}$; ${}^1a_z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_{z_1}$.

Praktisch entspricht das der Angabe der *Komponenten* von \mathbf{a} bezüglich K_1 :

$${}^1\mathbf{a} = [{}^1a_x, {}^1a_y, {}^1a_z]^T \text{ oder } {}^1\mathbf{a} = {}^1[a_x, a_y, a_z]^T \quad (2.12)$$

Hier handelt es sich nicht mehr um einen *physikalischen* Vektor!

- Koordinatensystem $K_2(\mathbf{e}_{x_2}, \mathbf{e}_{y_2}, \mathbf{e}_{z_2})$:

Eine Zerlegung von \mathbf{a} in Richtung der Basisvektoren $\mathbf{e}_{x_2}, \mathbf{e}_{y_2}, \mathbf{e}_{z_2}$ ergibt entsprechend:

$$\mathbf{a} = {}^2a_x \mathbf{e}_{x_2} + {}^2a_y \mathbf{e}_{y_2} + {}^2a_z \mathbf{e}_{z_2} \quad (2.13)$$

mit den Projektionen: ${}^2a_x = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_{x_2}$; ${}^2a_y = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_{y_2}$; ${}^2a_z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_{z_2}$.

Daraus folgen die Komponenten von \mathbf{a} bezüglich K_2 :

$${}^2\mathbf{a} = [{}^2a_x, {}^2a_y, {}^2a_z]^T \text{ oder } {}^2\mathbf{a} = {}^2[a_x, a_y, a_z]^T \quad (2.14)$$

2.2.3 Zusammenhang zwischen Komponentendarstellungen

Der Zusammenhang der beiden Komponentendarstellungen lässt sich als Aufgabe formulieren:

Gegeben: Koordinatensysteme

$$K_1 = \{O_1; \mathbf{e}_{x_1}, \mathbf{e}_{y_1}, \mathbf{e}_{z_1}\},$$

$$K_2 = \{O_2; \mathbf{e}_{x_2}, \mathbf{e}_{y_2}, \mathbf{e}_{z_2}\}.$$

Komponentenzerlegung von Vektor \mathbf{a} in K_2 : ${}^2[a_x, a_y, a_z]^T$

Gesucht: Komponentenzerlegung von \mathbf{a} in K_1 : ${}^1[a_x, a_y, a_z]^T$:

Es gilt folgende Invarianzeigenschaft: Ein physikalischer Vektor \mathbf{a} ist unabhängig von der jeweiligen Koordinatendarstellung, d.h. er kann über die Koordinatensysteme K_1 , K_2 jeweils aus Teilvektoren aufgebaut werden:

$$\mathbf{a} \stackrel{!}{=} {}^1a_x \mathbf{e}_{x_1} + {}^1a_y \mathbf{e}_{y_1} + {}^1a_z \mathbf{e}_{z_1} \stackrel{!}{=} {}^2a_x \mathbf{e}_{x_2} + {}^2a_y \mathbf{e}_{y_2} + {}^2a_z \mathbf{e}_{z_2}, \quad (2.15)$$

wobei das Symbol „ $\stackrel{!}{=}$ “ in diesem Zusammenhang *entspricht dem mathematischen Vektor* bedeuten soll. Die Multiplikation von Gleichung (2.15) nacheinander mit $\mathbf{e}_{x_1}, \mathbf{e}_{y_1}, \mathbf{e}_{z_1}$ ergibt:

$$\begin{aligned} \cdot \mathbf{e}_{x_1}: & {}^1a_x \underbrace{\mathbf{e}_{x_1} \cdot \mathbf{e}_{x_1}}_1 + {}^1a_y \underbrace{\mathbf{e}_{y_1} \cdot \mathbf{e}_{x_1}}_0 + {}^1a_z \underbrace{\mathbf{e}_{z_1} \cdot \mathbf{e}_{x_1}}_0 = \\ & {}^2a_x \mathbf{e}_{x_2} \cdot \mathbf{e}_{x_1} + {}^2a_y \mathbf{e}_{y_2} \cdot \mathbf{e}_{x_1} + {}^2a_z \mathbf{e}_{z_2} \cdot \mathbf{e}_{x_1} \end{aligned}$$

etc.

Damit folgt für die gesuchten Komponenten ${}^1a_x, {}^1a_y, {}^1a_z$ des Vektors \mathbf{a} in K_1 :

$$\begin{aligned} \cdot \mathbf{e}_{x_1} \rightarrow {}^1a_x &= {}^2a_x \mathbf{e}_{x_2} \cdot \mathbf{e}_{x_1} + {}^2a_y \mathbf{e}_{y_2} \cdot \mathbf{e}_{x_1} + {}^2a_z \mathbf{e}_{z_2} \cdot \mathbf{e}_{x_1}, \\ \cdot \mathbf{e}_{y_1} \rightarrow {}^1a_y &= {}^2a_x \mathbf{e}_{x_2} \cdot \mathbf{e}_{y_1} + {}^2a_y \mathbf{e}_{y_2} \cdot \mathbf{e}_{y_1} + {}^2a_z \mathbf{e}_{z_2} \cdot \mathbf{e}_{y_1}, \\ \cdot \mathbf{e}_{z_1} \rightarrow {}^1a_z &= {}^2a_x \mathbf{e}_{x_2} \cdot \mathbf{e}_{z_1} + {}^2a_y \mathbf{e}_{y_2} \cdot \mathbf{e}_{z_1} + {}^2a_z \mathbf{e}_{z_2} \cdot \mathbf{e}_{z_1} \end{aligned} \quad (2.16)$$

In Matrixschreibweise folgt für diese Transformationsbeziehung:

$$\begin{bmatrix} {}^1a_x \\ {}^1a_y \\ {}^1a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{x_2} \cdot \mathbf{e}_{x_1} & \mathbf{e}_{y_2} \cdot \mathbf{e}_{x_1} & \mathbf{e}_{z_2} \cdot \mathbf{e}_{x_1} \\ \mathbf{e}_{x_2} \cdot \mathbf{e}_{y_1} & \mathbf{e}_{y_2} \cdot \mathbf{e}_{y_1} & \mathbf{e}_{z_2} \cdot \mathbf{e}_{y_1} \\ \mathbf{e}_{x_2} \cdot \mathbf{e}_{z_1} & \mathbf{e}_{y_2} \cdot \mathbf{e}_{z_1} & \mathbf{e}_{z_2} \cdot \mathbf{e}_{z_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^2a_x \\ {}^2a_y \\ {}^2a_z \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

oder mit:

$${}^1\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{x_2} \cdot \mathbf{e}_{x_1} & \mathbf{e}_{y_2} \cdot \mathbf{e}_{x_1} & \mathbf{e}_{z_2} \cdot \mathbf{e}_{x_1} \\ \mathbf{e}_{x_2} \cdot \mathbf{e}_{y_1} & \mathbf{e}_{y_2} \cdot \mathbf{e}_{y_1} & \mathbf{e}_{z_2} \cdot \mathbf{e}_{y_1} \\ \mathbf{e}_{x_2} \cdot \mathbf{e}_{z_1} & \mathbf{e}_{y_2} \cdot \mathbf{e}_{z_1} & \mathbf{e}_{z_2} \cdot \mathbf{e}_{z_1} \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

$${}^1\mathbf{a} = {}^1\mathbf{T}_2 {}^2\mathbf{a}. \quad (2.19)$$

Die Transformation der Komponenten (Koordinaten) eines Vektors \mathbf{a} bezüglich des Koordinatensystems K_2 in Komponenten bezüglich K_1 erfolgt also mit Hilfe der Transformationsmatrix ${}^1\mathbf{T}_2$ (lies: Transformation von K_2 nach K_1). Damit lässt sich die Transformationsmatrix anschaulich interpretieren:

$${}^1\mathbf{T}_2 \left\{ \begin{array}{l} \text{Spalten: Koordinatendarstellung} \\ \mathbf{e}_{x_2}, \mathbf{e}_{y_2}, \mathbf{e}_{z_2} \text{ in } K_1 \\ \text{Zeilen: Koordinatendarstellung} \\ \mathbf{e}_{x_1}, \mathbf{e}_{y_1}, \mathbf{e}_{z_1} \text{ in } K_2 \end{array} \right.$$

2.2.4 Eigenschaften der Transformationsmatrix

Die Transformationen sind in beide Richtungen definiert:

$${}^1\mathbf{T}_2: {}^2\mathbf{a} \rightarrow {}^1\mathbf{a}, \quad (2.20)$$

entsprechend gilt für die umgekehrte Transformation:

$$\begin{aligned} {}^1\mathbf{a} \rightarrow {}^2\mathbf{a}: {}^2\mathbf{T}_1 = ({}^1\mathbf{T}_2)^{-1} \text{ (Inverse),} \\ {}^2\mathbf{a} = {}^2\mathbf{T}_1 {}^1\mathbf{a} = ({}^1\mathbf{T}_2)^{-1} {}^1\mathbf{a}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Analog zur Herleitung der Matrix ${}^1\mathbf{T}_2$ (Gln. (2.17), (2.18)) folgt also:

$${}^2\mathbf{T}_1 = ({}^1\mathbf{T}_2)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{x_1} \cdot \mathbf{e}_{x_2} & \mathbf{e}_{y_1} \cdot \mathbf{e}_{x_2} & \mathbf{e}_{z_1} \cdot \mathbf{e}_{x_2} \\ \mathbf{e}_{x_1} \cdot \mathbf{e}_{y_2} & \mathbf{e}_{y_1} \cdot \mathbf{e}_{y_2} & \mathbf{e}_{z_1} \cdot \mathbf{e}_{y_2} \\ \mathbf{e}_{x_1} \cdot \mathbf{e}_{z_2} & \mathbf{e}_{y_1} \cdot \mathbf{e}_{z_2} & \mathbf{e}_{z_1} \cdot \mathbf{e}_{z_2} \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Der Vergleich mit Gl. (2.17) zeigt, dass man Gl. (2.22) erhält, indem man in Gl. (2.17) nur Zeilen mit Spalten vertauscht, also die Matrix ${}^1\mathbf{T}_2$ transponiert. Damit gilt folgende Orthogonalitätsbedingung:

$${}^2\mathbf{T}_1 = ({}^1\mathbf{T}_2)^{-1} = ({}^1\mathbf{T}_2)^T \quad (2.23)$$

Man erhält also die Rücktransformation ${}^2\mathbf{T}_1$ aus der Hintransformation ${}^1\mathbf{T}_2$ durch Transponieren der Matrix ${}^1\mathbf{T}_2$.

2.3 Lineare Vektorfunktionen und Tensoren 2. Stufe

Die Vektoren \mathbf{x} und \mathbf{y} seien durch die Vektorfunktion

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) \quad (2.24)$$

verknüpft. Es sollen die folgenden Rechenregeln gelten:

$$\mathbf{T}(\mu\mathbf{x}) = \mu\mathbf{T}(\mathbf{x}) \quad \text{assoziatives Gesetz (Homogenität)}, \quad (2.25)$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{T}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{T}(\mathbf{x}_2) \quad \text{distributives Gesetz (Additivität)}. \quad (2.26)$$

Dann heißt diese Vektorfunktion *homogen* und *linear*, und man kann schreiben:

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x}. \quad (2.27)$$

Man bezeichnet in dieser linearen Abbildung, die dem Vektor \mathbf{x} den Vektor \mathbf{y} zuordnet, die Größe \mathbf{T} als *Tensor 2. Stufe*. Dabei ist \mathbf{T} zunächst eine reine Abbildungsvorschrift; über die Struktur von \mathbf{T} ist noch nichts ausgesagt.

2.3.1 Beispiele für Tensoren 2. Stufe

Das Dyadische Produkt oder Tensorprodukt

Gegeben sei die folgende Beziehung:

$$\mathbf{y} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{x})\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}). \quad (2.28)$$

Aus dieser Beziehung kann man den Vektor \mathbf{x} durch folgende Schreibweise *herauslösen*:

$$\mathbf{y} = (\mathbf{a} \circ \mathbf{b})\mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \mathbf{T} = \mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \mathbf{a}\mathbf{b}^T. \quad (2.29)$$

Hier ist $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$ das *Dyadische Produkt*, auch *Tensor-Produkt* oder *tensorielles Produkt* genannt und damit eine neue Verknüpfung der Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} . Anhand der Rechenregeln in die Gln. (2.25) und (2.26) lässt sich leicht zeigen, dass

$$\mathbf{T} = \mathbf{a} \circ \mathbf{b} \quad (2.30)$$

ein Tensor 2. Stufe ist. In Komponenten eines Koordinatensystems (x, y, z) lautet das Dyadische Produkt folglich mit

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{ab}^T = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Das Vektorprodukt oder Kreuzprodukt

$$\mathbf{b} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} \quad (2.32)$$

ist ebenfalls eine Verknüpfung der Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} , für welche die Rechenregeln (2.25) und (2.26) gelten. Damit kann man das Vektorprodukt auch schreiben als:

$$\mathbf{b} = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{a} \quad (2.33)$$

wobei $\boldsymbol{\Omega} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} \times \dots$ jetzt dem Operator des Vektorprodukts entspricht, und im vorliegenden Fall $\boldsymbol{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit ist.

In Komponenten gilt mit

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad (2.34)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\omega_z a_y + \omega_y a_z \\ \omega_z a_x - \omega_x a_z \\ -\omega_y a_x + \omega_x a_y \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Ein weiteres wichtiges Beispiel für einen Tensor 2. Stufe ist der Drehtensor \mathbf{T} , der im nächsten Abschnitt eingeführt wird.

Bemerkung: Für die vollständige Definition eines Tensors 2. Stufe müssen noch Aussagen über sein Transformationsverhalten gemacht werden, auf die jedoch an dieser Stelle verzichtet werden soll (Klingbeil 1966).

2.4 Freie Bewegung des starren Körpers

2.4.1 Allgemeine Bewegung des starren Körpers

Aus Gründen einer späteren guten physikalischen Interpretation der zu gewinnenden Ergebnisse ist es naheliegend, für die im Rahmen dieses Buches später zu treffenden Aussagen, die allgemeine Bewegung des starren Körpers im Raum, die durch sechs unabhängige Bewegungsmöglichkeiten gekennzeichnet ist, aus einer Überlagerung der translatorischen Bewegung eines zu wählenden Bezugspunktes im starren Körper (häufig der Massenmittelpunkt) und einer – relativ zu diesem Bezugspunkt stattfindenden – räumlichen Drehbewegung aufzubauen.

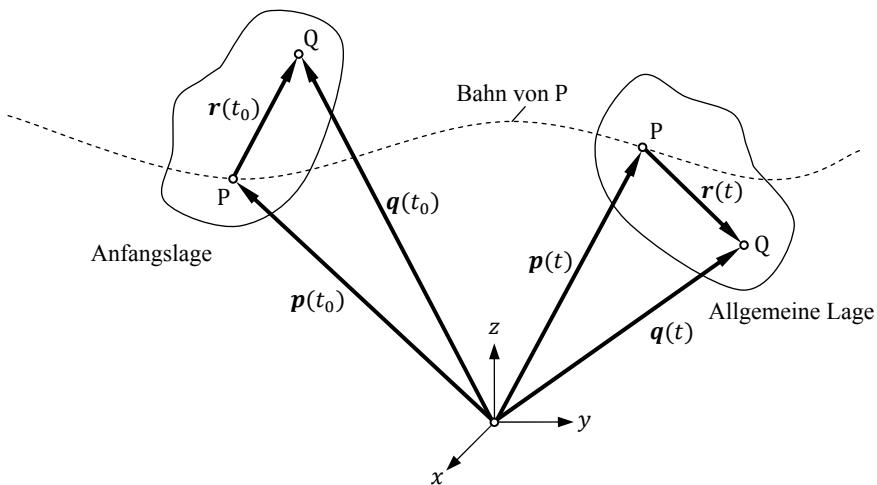


Abb. 2.5: Allgemeine Bewegung des starren Körpers

Beschreibung der Lage

Nachfolgend soll die Bewegung eines Punktes beschrieben werden als Überlagerung einer translatorischen Bahnbewegung und einer rotatorischen Drehbewegung. Man unterscheidet also:

- Die Bahnbewegung $p(t)$ eines beliebigen körperfesten Punktes P im Körper: gekennzeichnet durch drei Freiheitsgrade der *Translation*.
- Die Drehbewegung des Körpers um den Bezugspunkt P: gekennzeichnet durch drei Freiheitsgrade der *Rotation*.

Für den Ortsvektor zu einem beliebigen Punkt Q im Körper gilt:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t) + \mathbf{r}(t) = \mathbf{p}(t) + \mathbf{T}(t)\mathbf{r}(t_0) \quad (2.36)$$

Hierbei ist $\mathbf{T}(t)$ der bereits weiter oben erwähnte Drehtensor der Drehbewegung. Die Größen $\mathbf{p}(t)$, $\mathbf{T}(t)$ beinhalten insgesamt sechs unabhängige Lagekoordinaten:

$$\mathbf{w}(t) = [w_1, \dots, w_6]^T. \quad (2.37)$$

Sind drei Parameter der Translation (z.B. die drei Komponenten des Ortsvektors \mathbf{p} eines beliebigen Bezugspunktes P) und drei Parameter der Rotation (z.B. drei unabhängige Parameter für die Drehbewegung, ausgedrückt durch den Drehtensor \mathbf{T}) bekannt, so lässt sich für jeden Punkt Q eines starren Körpers seine Bahn $\mathbf{q}(t)$ gemäß Gl. (2.36) berechnen.

Anmerkungen zum Drehtensor $\mathbf{T}(t)$:

- Der Drehtensor $\mathbf{T}(t)$ ist ein Tensor 2. Stufe und im allgemeinen eine Funktion der Zeit.
- Wird der Drehtensor \mathbf{T} in Komponenten angeschrieben, so entspricht er einer $[3 \times 3]$ -Matrix mit neun Elementen, von denen jedoch nur drei unabhängig sind. Es müssen also zwischen den Elementen noch weitere Abhängigkeiten bestehen, s. Abschnitt 2.5.3.
- Zwischen dem Drehtensor $\mathbf{T}(t)$ und der in Abschnitt 2.2 (Gln. (2.18) bis (2.23)) eingeführten Transformationsmatrix ${}^i\mathbf{T}_j$ besteht ein enger Zusammenhang, der hier dargestellt wird.

Der Zusammenhang zwischen Drehtensor und Koordinatentransformation soll zunächst an einem ebenen Beispiel erläutert werden. Man betrachte dazu die Transformation zwischen zwei körperfesten Koordinatensystemen für eine ebene Fixpunkttdrehung um die Drehachse \mathbf{e}_z mit dem Drehwinkel β (Abb. 2.6). Das Paar (\mathbf{e}_z, β) – später Drehzeiger genannt – wird in Abschnitt 2.5 noch näher untersucht werden. Die körperfesten Koordinatensysteme sind einerseits das System (x_0, y_0, z_0) der Anfangslage des zu drehenden Körpers (beschrieben durch den Vektor \mathbf{r}_0) und andererseits das System der gedrehten Lage (x_1, y_1, z_1) , beschrieben durch den tor $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t)$.

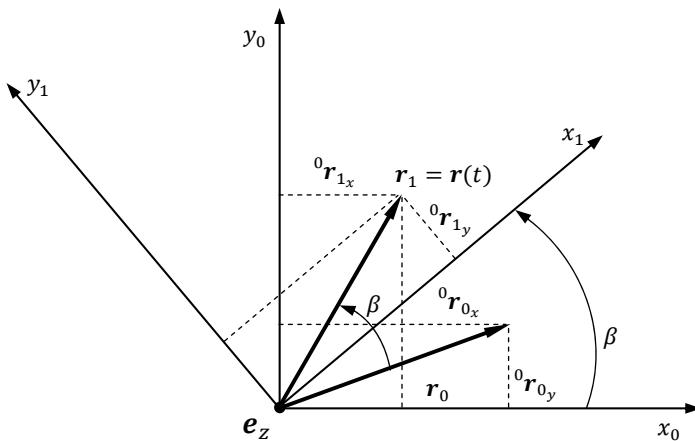


Abb. 2.6: Zusammenhang zwischen Drehtensor und Koordinatentransformation

Die Darstellung der Drehung lautet damit mit dem Drehtensor $T(e_z, \beta)$

$$\mathbf{r}_1 = T(\mathbf{e}_z, \beta) \mathbf{r}_0 \quad (2.38)$$

Für die Komponentendarstellung der Gl. (2.38) im Ausgangskoordinaten-
system (x_0, y_0, z_0) gilt also:

$${}^0\mathbf{r}_1 = {}^0T([0,0,1]^T, \beta) {}^0\mathbf{r}_0, \quad (2.39)$$

$$\begin{bmatrix} {}^0r_{1x} \\ {}^0r_{1y} \\ {}^0r_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^0r_{0x} \\ {}^0r_{0y} \\ {}^0r_{0z} \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

Vergleicht man diese Darstellung mit einer entsprechenden ebenen Transformation von ebenen Koordinatensystemen, so entspricht sie gerade der Matrix 0T_1 der Koordinatentransformation

$$(x_1, y_1, z_1) \rightarrow (x_0, y_0, z_0)$$

oder in Komponentendarstellung

$${}^0\mathbf{r}_1 = {}^0T_1^{-1} \mathbf{r}_1 \text{ und } {}^0\mathbf{r}_0 = {}^1\mathbf{r}_1. \quad (2.41)$$

Damit gilt aber allgemein: Dem Drehtensor der Drehung $\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}_1$, ausgedrückt im System (x_0, y_0, z_0) entspricht die Matrix der Transformation in umgekehrter Richtung $(x_1, y_1, z_1) \rightarrow (x_0, y_0, z_0)$.

Geschwindigkeit und Bewegungswinder

Die Ableitung von Gl. (2.36) nach der Zeit ergibt:

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \dot{\mathbf{p}}(t) + \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\mathbf{p}}(t) + \dot{\mathbf{T}}(t)\mathbf{r}(t_0). \quad (2.42)$$

Mit der Umformung

$$\dot{\mathbf{T}}(t)\mathbf{r}(t_0) = \underbrace{\dot{\mathbf{T}}(t)\mathbf{T}^{-1}(t)}_{\omega \times \dots} \mathbf{r}(t) = \dot{\mathbf{T}}(t)\mathbf{T}^T(t)\mathbf{r}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}(t) \quad (2.43)$$

sowie der Beziehung $\boldsymbol{\Omega}(t) = \dot{\mathbf{T}}(t)\mathbf{T}^T(t)$ (POISON-Gleichung) folgt:

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \dot{\mathbf{p}}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}(t). \quad (2.44)$$

Der Bewegungswinder beschreibt den Bewegungszustand eines starren Körpers vollständig und besteht gemäß Abb. 2.7 für einen vorgegebenem Punkt P aus:

Translationsgeschwindigkeit \mathbf{v}_P
Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$

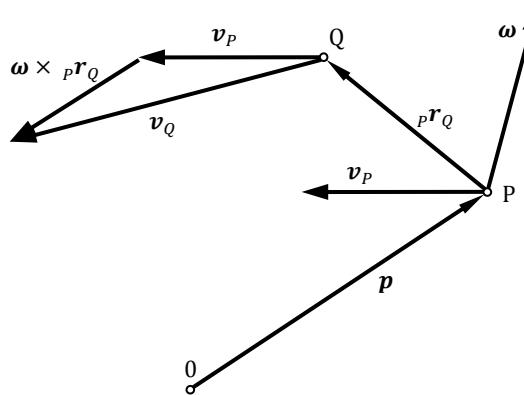


Abb. 2.7: Bewegungswinder

Bei gegebenem Bewegungswinder $\mathbf{v}_P, \boldsymbol{\omega}$ für einen Punkt P($\mathbf{v}_P, \boldsymbol{\omega}$) gilt für einen anderen Bezugspunkt Q im Körper immer gemäß (2.44):

$$\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times {}_P\mathbf{r}_Q. \quad (2.45)$$

Die momentane Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ eines starren Körpers ist also überall gleich, während die Translationsgeschwindigkeit vom jeweiligen Bezugspunkt abhängt.

Durch gezielte Verschiebung des Bezugspunktes lässt sich der *Bewegungswinder* auf eine *Bewegungsschraube* reduzieren. Sie ist dadurch gekennzeichnet, dass Translationsgeschwindigkeit und Drehgeschwindigkeit *längs der Schraubachse* parallel sind.

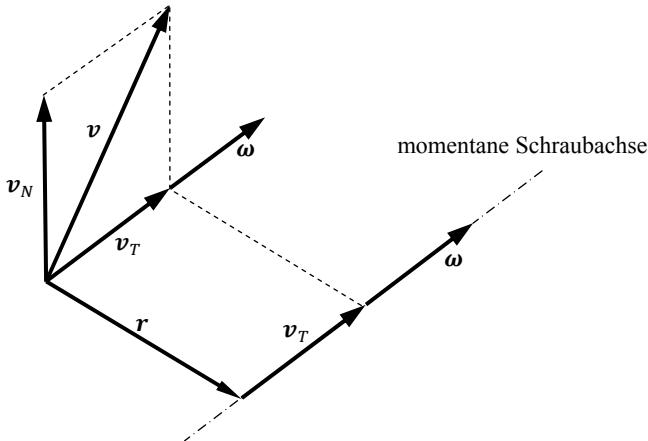


Abb. 2.8: Bewegungsschraube

Beschleunigung

Die nochmalige Ableitung von Gl. (2.44) nach der Zeit ergibt:

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = \ddot{\mathbf{p}}(t) + \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) \times \mathbf{r}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \underbrace{\dot{\mathbf{r}}(t)}_{\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}(t)}, \quad (2.46)$$

bzw.:

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = \ddot{\mathbf{p}}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times [\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}(t)] + \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) \times \mathbf{r}(t). \quad (2.47)$$

2.4.2 Relativbewegung

Relativbewegungen spielen in der Mechanik eine zentrale Rolle, und das gilt auch im besonderen Maße für die in diesem Buch zu untersuchenden Fragestellungen zur Fahrdynamik. Daher werden in diesem Abschnitt einige wesentliche Beziehungen aus der elementaren Mechanik zusammengestellt und festgemacht am Beispiel eines relativ zur Erde (Inertialsystem 0) fliegenden Flugzeugs mit einem darin still sitzenden Passagier (System P). Im Flugzeug bewegt sich eine Fliege Q relativ zu Passagier und Flugzeug. Das Flugzeug samt Passagier fungiert also als sogenannte Führungsbewegung P. Zusätzlich existiert im Flugzeug jetzt noch die Relativbewe-

gung der Fliege Q bezüglich P (Abb. 2.9) (nach Kecskeméthy in Hiller, et al. 1986,87,88). Damit lässt sich folgende Aufgabenstellung formulieren:

Gegeben: Führungsbewegung P und Relativbewegung Q relativ zu P

Gesucht: Absolutbewegung Q der Fliege bezüglich Inertialsystem 0

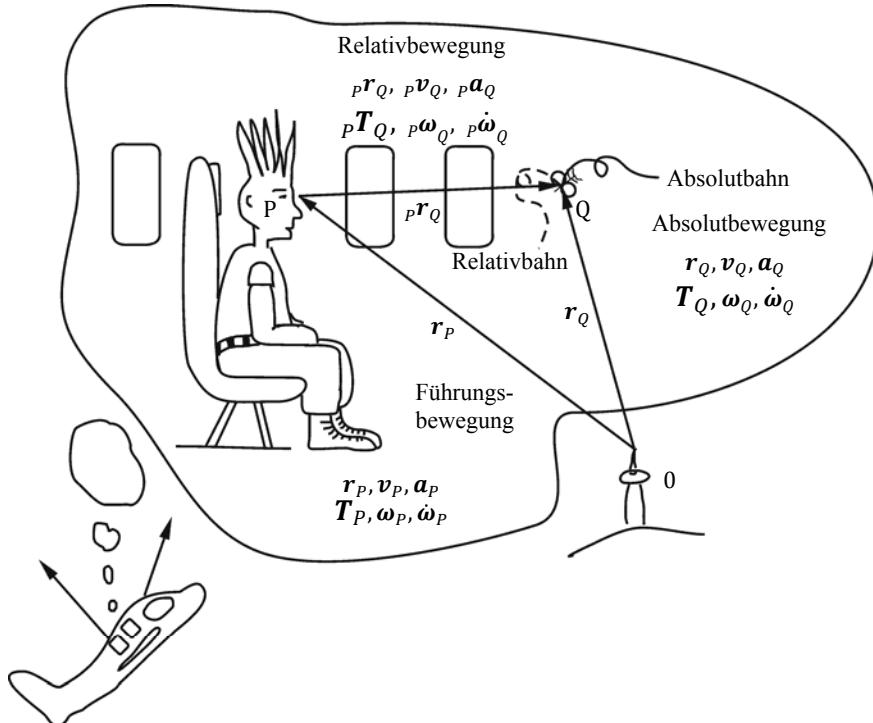


Abb. 2.9: Führungsbewegung P, Relativbewegung Q und Absolutbewegung Q

Im Einzelnen gilt:

Lage $r_Q(t)$:

Translation (ausgedrückt über Ortsvektoren):

$$\mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_P + {}_P\mathbf{r}_Q, \quad (2.48)$$

Rotation (ausgedrückt über Drehtensoren)

$$\mathbf{T}_Q = {}_P\mathbf{T}_Q {}_P\mathbf{T}_P \quad (2.49)$$

oder alternativ über Transformationsmatrizen:

$$\mathbf{T}_Q = \mathbf{T}_P {}^P\mathbf{T}_Q. \quad (2.50)$$

Geschwindigkeit $v_Q(t)$:

$$\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_P + {}_P\mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega}_P \times {}_P\mathbf{r}_Q, \quad (2.51)$$

$$\boldsymbol{\omega}_Q = \boldsymbol{\omega}_P + {}_P\boldsymbol{\omega}_Q. \quad (2.52)$$

Beschleunigung $a_Q(t)$:

Nach einiger Rechnung folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_Q = \mathbf{a}_P + {}_P\mathbf{a}_Q + \dot{\boldsymbol{\omega}}_P \times {}_P\mathbf{r}_Q + 2\boldsymbol{\omega}_P \times {}_P\mathbf{v}_Q \\ + \boldsymbol{\omega}_P \times (\boldsymbol{\omega}_P \times {}_P\mathbf{r}_Q), \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_Q = \dot{\boldsymbol{\omega}}_P + {}_P\dot{\boldsymbol{\omega}}_Q + \boldsymbol{\omega}_P \times {}_P\boldsymbol{\omega}_Q. \quad (2.54)$$

Speziell nennt man:

$\dot{\boldsymbol{\omega}}_P \times {}_P\mathbf{r}_Q$: EULER-Beschleunigung

$2\boldsymbol{\omega}_P \times {}_P\mathbf{v}_Q$: CORIOLIS-Beschleunigung

$\boldsymbol{\omega}_P \times (\boldsymbol{\omega}_P \times {}_P\mathbf{r}_Q)$: Zentripetalbeschleunigung

Für weitere Einzelheiten hierzu sei auf die einschlägige Mechanik Literatur verwiesen (Magnus und Müller 1974).

2.4.3 Wichtige Bezugssysteme

Inertialsystem $K_E = \{O_E; x_E, y_E, z_E\}$:

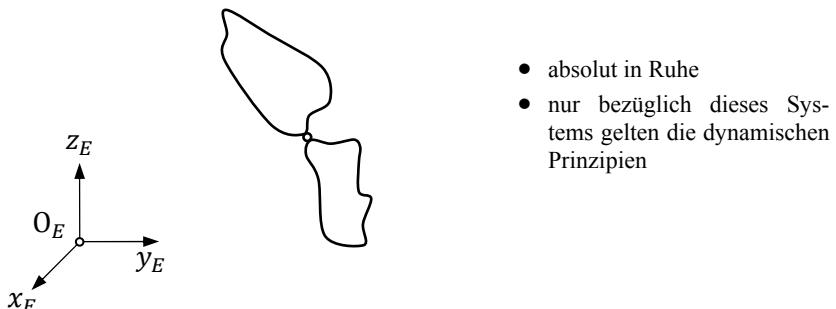
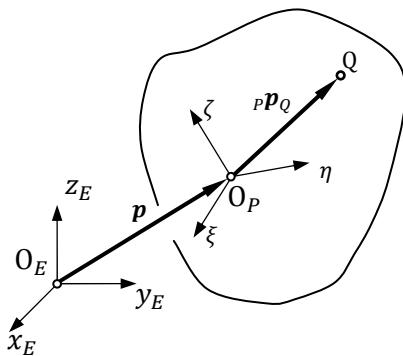


Abb. 2.10: Inertialsystem

Körperfestes Bezugssystem $K_P = \{O_P; \xi_P, \eta_P, \zeta_P\}$:



- relative Lage aller materiellen Punkte eines Körpers ist fest
- bezüglich dieses Systems werden die physikalischen Eigenschaften eines Körpers angegeben (Trägheitsmoment, körperfeste Punkte)

Abb. 2.11: Körperfestes Bezugssystem

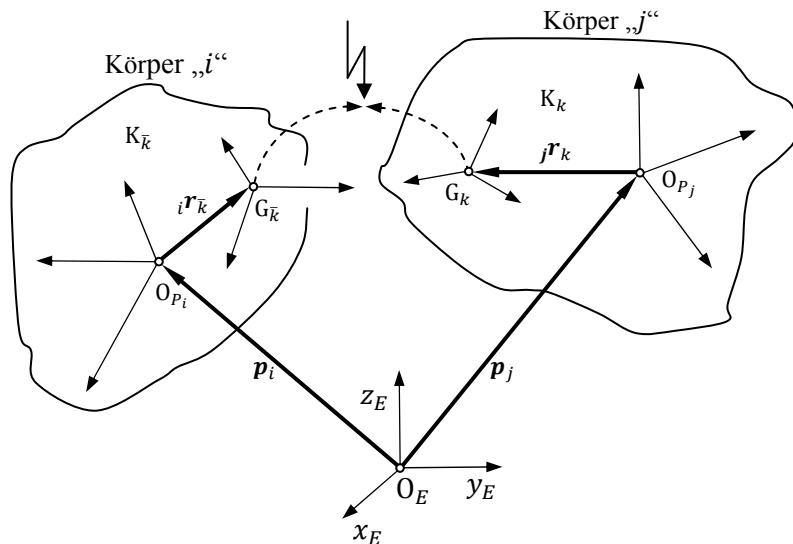


Abb. 2.12: Bezugssysteme für Wechselwirkungen (Bindungen, Kräfte)

Bezugssysteme für Wechselwirkungen (Bindungen, Kräfte):

- Zusätzliche Koordinatensysteme K_k , $K_{\bar{k}}$, die bezüglich der körperfesten Systeme K_i und K_j definiert sind.
- Bezuglich dieser Systeme lässt sich die relative Lage und Bewegung der Körper „i“ und „j“ über einfache Bedin-

gungen (Bindungen) darstellen. Dasselbe gilt auch für die Wechselwirkungen (Kräfte).

2.5 Drehbewegungen

In diesem Abschnitt werden unterschiedliche Darstellungsformen für Drehbewegungen des starren Körpers behandelt. Dabei werden zunächst nur Lage und Geschwindigkeit betrachtet. Bei der Lage ist zu unterscheiden zwischen infinitesimaler und endlicher Drehung (Verschiebung). Die wesentliche Größe für die Beschreibung der endlichen Drehung ist der Drehensor T , wobei an dieser Stelle noch keine Aussagen über dessen Parametrisierung gemacht worden sind. In direktem Zusammenhang mit der infinitesimalen Drehung steht die Winkelgeschwindigkeit ω als entscheidende Größe der Beschreibung.

2.5.1 Räumliche Drehung und Winkelgeschwindigkeit

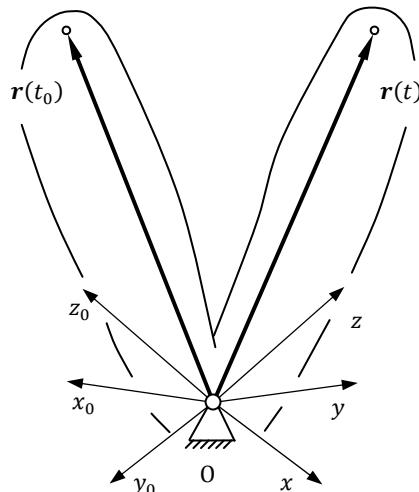


Abb. 2.13: Fixpunkttdrehung

Allgemeine Drehbewegungen können auch als Bewegungen eines starren Körpers um einen Fixpunkt (Fixpunkttdrehung) aufgefasst werden. Damit folgt aus den Überlegungen in Abschnitt 2.4.1 speziell für die Drehbewegung unmittelbar:

Lage:

Es gilt

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{r}(t_0). \quad (2.55)$$

Hierbei ist $\mathbf{T}(t)$ der Drehtensor, dessen Struktur von den gewählten Drehparametern abhängt (s. Abschnitt 2.5.3). Weiterhin existiert auch die inverse Beziehung

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{T}^{-1}(t)\mathbf{r}(t). \quad (2.56)$$

Geschwindigkeit:

Hier ist

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\mathbf{T}}(t)\mathbf{r}(t_0) = \dot{\mathbf{T}}(t)\mathbf{T}^{-1}(t)\mathbf{r}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}(t) \quad (2.57)$$

mit

$$\dot{\mathbf{T}}(t)\mathbf{T}^{-1}(t)\mathbf{r}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}(t) = \boldsymbol{\Omega}(t)\mathbf{r}(t) = \tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}(t). \quad (2.58)$$

Hierbei ist $\boldsymbol{\Omega}$ ein schiefsymmetrischer Tensor, welcher der Operation des Vektorproduktes entspricht (vgl. Abschnitt 2.3). In einem Koordinatensystem (x, y, z) lautet die Komponentendarstellung von $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\boldsymbol{\Omega} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.59)$$

Damit sind allerdings noch keine Aussagen darüber getroffen, durch welche Drehparameter die Drehbewegungen beschrieben werden.

2.5.2 Parametrisierung von Drehbewegungen

Für die Darstellung von räumlicher Drehbewegungen haben sich zwei physikalische Prinzipien aus technischer Sicht besonders bewährt: Die Realisierung der räumlichen Drehung als eine einzige Drehung um eine entsprechend zu wählende räumliche Drehachse mit einem zugehörigen Drehwinkel. Dieses Prinzip wurde bereits in Abschnitt 2.4.1 ohne nähere Erläuterung zugrunde gelegt. Die zweite Möglichkeit geht davon aus, eine räumliche Drehung aus drei nacheinander – um unterschiedliche Drehachsen – auszuführenden sogenannten ebenen *Elementardrehungen* aufzubauen. Damit ist offensichtlich, dass im Falle der räumlichen Fixpunkttdrehung aus dem vorigen Abschnitt die Komponenten eines im Fixpunkt anzusetzenden Achsvektors $\mathbf{u}(t)$, sowie ein zugehöriger Drehwinkel $\beta(t)$ sich als

Parameter für die Beschreibung dieser Drehbewegung anbieten. Damit stehen aber für die drei Freiheitsgrade dieser räumlichen Drehung mit den drei Komponenten des Achsvektors, sowie dem Drehwinkel $\beta(t)$ insgesamt vier Parameter für die Beschreibung dieser räumlichen Drehung zur Verfügung. Dieses Paar

$$\vec{\beta} = (\mathbf{u}(t), \beta(t)) \quad (2.60)$$

bestehend aus den Komponenten der *Drehachse* $\mathbf{u}(t)$ und dem *Drehwinkel* $\beta(t)$, wird in Kinematik häufig als *Drehzeiger* bezeichnet, (Hiller 1981). Da für die Festlegung des Achsvektors $\mathbf{u}(t)$ ein Einheitsvektor mit nur zwei unabhängigen Komponenten genügt, kommt hier als weitere Gleichung die Nebenbedingung

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1 \quad (2.61)$$

hinzu.

Im Falle einer Beschreibung einer räumlichen Drehung über drei ebene Elementardrehungen sind die entsprechenden Parameter die jeweiligen Winkel dieser Elementardrehungen, z.B. θ , ψ und φ , wie bei EULER- oder KARDAN-Winkeln, s. (Hiller 1983).

In den folgenden Abschnitten wird sowohl die Methode des Drehzeigers $\vec{\beta}$, als auch die in der Fahrzeugtechnik besonders populäre Methode der KARDAN-Winkel noch etwas näher behandelt. Eine Übersicht über mögliche Parametrisierungen mit 3 oder 4 Parametern gibt Tabelle 2.1.

Tabelle 2.1. Parametrisierung von Drehbewegungen

Drehzeiger $\vec{\beta} = (\mathbf{u}, \beta)$	4 Parameter
EULER-Winkel θ, ψ, φ	3 Parameter
KARDAN-Winkel ψ, θ, φ	3 Parameter
Quaternionen und EULER-Parameter q_0, q_1, q_2, q_3	4 Parameter
RODRIGUES-Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	3 Parameter

Die geometrische Zuordnung zu den räumlichen Drehungen im Falle der EULER-Parameter und der RODRIGUES-Parameter erfolgt wieder mit Hilfe des Drehzeigers, nämlich von räumlicher Drehachse \mathbf{u} und Drehwinkel β (Hiller 1981, Hiller et al. 1986,87,88).

2.5.3 Drehzeiger und Drehtensor

In diesem Abschnitt wird die Drehbewegung eines starren Körpers mit Hilfe seiner *Drehachse* \mathbf{u} sowie des zugehörigen *Drehwinkels* β beschrie-

ben (Abb. 2.14). Dabei ist zu beachten, dass zu jeder *endlichen* räumlichen Drehung eine andere Drehachse \mathbf{u} und ein anderer Drehwinkel β gehören. Man bezeichnet:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Drehachse } \mathbf{u} \\ \text{Drehwinkel } \beta \end{array} \right\} = \text{Drehzeiger } \vec{\beta} = (\mathbf{u}, \beta), \quad (2.62)$$

Anfangslage $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$.

Die Herleitung des Drehtensors für diese Drehparameter kann auf unterschiedliche Arten erfolgen, die hier nicht im Detail behandelt werden (Hiller et al. 1986,87,88), (Klingbeil 1966).

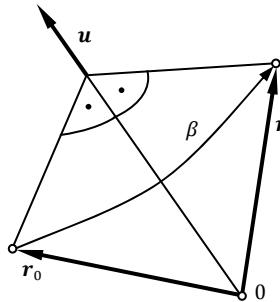


Abb. 2.14: Drehachse \mathbf{u} und Drehwinkel β beim Drehzeiger

Man erhält als Ergebnis nach Gl. (2.55):

$$\mathbf{r} = \mathbf{T}(\mathbf{u}, \beta) \mathbf{r}_0 \quad (2.63)$$

mit dem Drehtensor

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}, \beta) = \cos \beta \mathbf{I} + (1 - \cos \beta) \mathbf{u} \circ \mathbf{u} + \sin \beta \tilde{\mathbf{u}}. \quad (2.64)$$

Hier steht $\mathbf{u} \circ \mathbf{u}$ für das Dyadische Produkt (vgl. Gln. (2.28) bis (2.31)) und $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{U}$ wieder für die Operation des Kreuzproduktes mit dem Achsvektor \mathbf{u} (vgl. Gl. (2.61)). Eine weitere Form dieser Gleichung lautet, unter Verwendung der Hilfsformel

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{u} \circ \mathbf{u} - \mathbf{I}, \quad (2.65)$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}, \beta) = \mathbf{I} + (1 - \cos \beta) \mathbf{U}^2 + \sin \beta \mathbf{U}. \quad (2.66)$$

Die Komponentendarstellung des Drehtensors $\mathbf{T}(\mathbf{u}, \beta)$ im System (x, y, z) lautet mit den Abkürzungen „s“ = sin, „c“ = cos:

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}, \beta) = \begin{bmatrix} (1 - c\beta)u_x^2 + c\beta & (1 - c\beta)u_x u_y - u_z s\beta & (1 - c\beta)u_x u_z + u_y s\beta \\ (1 - c\beta)u_y u_x + u_z s\beta & (1 - c\beta)u_y^2 + c\beta & (1 - c\beta)u_y u_z - u_x s\beta \\ (1 - c\beta)u_z u_x - u_y s\beta & (1 - c\beta)u_z u_y + u_x s\beta & (1 - c\beta)u_z^2 + c\beta \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

Einige wichtige Eigenschaften des Drehtensors

- Zerlegung in einen symmetrischen und antisymmetrischen (schiefsymmetrischen) Anteil:

Allgemein gilt für die Zerlegung eines Tensors bzw. einer Matrix in den symmetrischen (s) und antisymmetrischen (a) Anteil:

$$\mathbf{T}^s = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^T), \quad \mathbf{T}^s = \mathbf{T}^{sT} \quad (2.68)$$

$$\mathbf{T}^a = \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^T), \quad \mathbf{T}^a = -\mathbf{T}^{aT}. \quad (2.69)$$

Es folgt sofort, dass im Falle des Drehtensors $\mathbf{T}(\mathbf{u}, \beta)$ gilt:

$$\mathbf{T}^s(\mathbf{u}, \beta) = \mathbf{I} + (1 - \cos \beta) \mathbf{U}^2 \text{ symmetrisch,} \quad (2.70)$$

$$\mathbf{T}^a(\mathbf{u}, \beta) = \mathbf{U} \sin \beta \text{ antisymmetrisch.} \quad (2.71)$$

Anschaulich: Der Einheitstensor \mathbf{I} und der Tensor \mathbf{U}^2 sind beide symmetrisch; entsprechend ist der Tensor \mathbf{U} bereits a priori antisymmetrisch:

- Transponierter Drehtensor:

Wegen $\cos \beta = \cos(-\beta)$ und $\sin \beta = -\sin(-\beta)$ folgt für den transponierten Drehtensor sofort aus Gl. (2.64):

$$\mathbf{T}^T(\mathbf{u}, \beta) = \mathbf{T}(\mathbf{u}, -\beta). \quad (2.72)$$

- Inverser Drehtensor und Orthogonalität:

Man kann zeigen, dass für die Inverse des Drehtensors direkt gilt:

$$\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{u}, \beta) = \mathbf{T}(\mathbf{u}, -\beta) = \mathbf{T}^T(\mathbf{u}, \beta). \quad (2.73)$$

Man erkennt also, dass beim Drehtensor die Inverse gleich der Transponierten ist! Dies entspricht aber gerade der Orthogonalitätseigenschaft, die besagt, dass in einer Komponenten-, d.h. Matrixdarstellung die Zeilen bzw. die Spalten wechselseitig senkrecht aufeinander stehen.

2.5.4 Drehzeiger und Winkelgeschwindigkeit

Der Zusammenhang zwischen Drehtensor und Winkelgeschwindigkeit ergibt sich aus Gl. (2.58). Im Falle des Drehzeigers wird daraus speziell:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{T}}(\mathbf{u}, \beta) \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{u}, \beta) = \dot{\mathbf{T}}(\mathbf{u}, \beta) \mathbf{T}(\mathbf{u}, -\beta). \quad (2.74)$$

Die Auswertung von Gl. (2.74) auf der Basis von Gl. (2.64) liefert nach längerer Rechnung folgende Beziehung:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\beta}\boldsymbol{u} + [\sin \beta \mathbf{I} + (1 - \cos \beta)\boldsymbol{U}]\dot{\boldsymbol{u}}. \quad (2.75)$$

Für kleine Drehungen $\beta \ll 1$ wird daraus:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\beta}\boldsymbol{u} + \beta\dot{\boldsymbol{u}} \quad (2.76)$$

und speziell für feste Drehachsen schließlich:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\beta}\boldsymbol{u}. \quad (2.77)$$

2.5.5 KARDAN-Winkel

KARDAN-Winkel und Transformationsmatrix

Wie bereits in Abschnitt 2.5.2 erwähnt, besteht eine weitere grundsätzliche Möglichkeit zur Parametrisierung von räumlichen Drehbewegungen darin, diese aus einer Folge von drei ebenen konsekutiven Elementardrehungen um definierte Koordinatenachsen aufzubauen. Als besonders geeignet für die fahrdynamischen Anwendungen haben sich die KARDAN-Winkel

$$\psi, \theta, \varphi \quad (2.78)$$

erwiesen, die nachfolgend näher beschrieben werden. Die Teildrehungen, sowie die resultierende Gesamtdrehung werden in der Folge über Transformationsmatrizen beschrieben. Im vorliegenden Fall kann das Ausgangskoordinatensystem (x_0, y_0, z_0) als Inertialsystem und das Zielsystem (x_3, y_3, z_3) als körperfestes System angesehen werden. Nachfolgend wird die Transformation eines Vektors \boldsymbol{r} vom körperfesten ins raumfeste Koordinatensystem beschrieben.

Teildrehung um die z_0 -Achse: Drehwinkel ψ

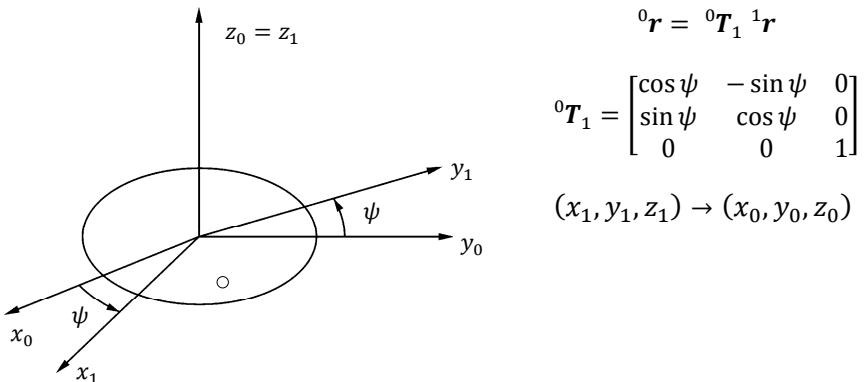
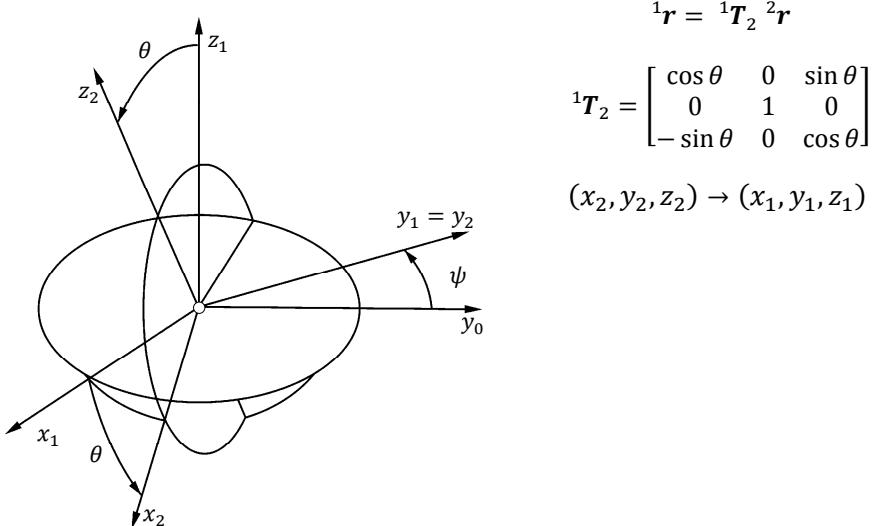


Abb. 2.15: Definition der ersten Kardandrehung

Teildrehung um die y_1 -Achse: Drehwinkel θ



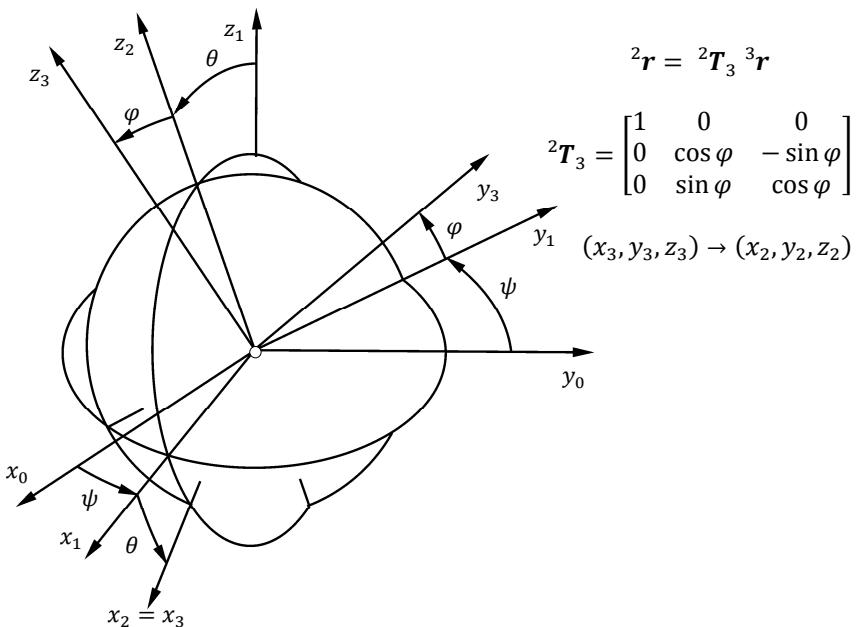
$${}^1\mathbf{r} = {}^1\mathbf{T}_2 {}^2\mathbf{r}$$

$${}^1\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$(x_2, y_2, z_2) \rightarrow (x_1, y_1, z_1)$$

Abb. 2.16: Definition der zweiten Kardandrehung

Teildrehung um die x_2 -Achse: Drehwinkel φ



$${}^2\mathbf{r} = {}^2\mathbf{T}_3 {}^3\mathbf{r}$$

$${}^2\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$(x_3, y_3, z_3) \rightarrow (x_2, y_2, z_2)$$

Abb. 2.17: Definition der dritten Kardandrehung

Die resultierende Transformation vom körperfesten System (x_3, y_3, z_3) ins raumfeste System (x_0, y_0, z_0) lautet dann:

$${}^0\mathbf{r} = {}^0\mathbf{T}_1 {}^1\mathbf{T}_2 {}^2\mathbf{T}_3 {}^3\mathbf{r}. \quad (2.79)$$

Transformationsmatrix (körperfest \rightarrow raumfest):

$$(x_3, y_3, z_3) \rightarrow (x_0, y_0, z_0), \quad (2.80)$$

$${}^0\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & -s\psi c\varphi + c\psi s\theta s\varphi & s\psi s\varphi + c\psi s\theta c\varphi \\ s\psi c\theta & c\psi c\varphi + s\psi s\theta s\varphi & -c\psi s\varphi + s\psi s\theta c\varphi \\ -s\theta & c\theta s\varphi & c\theta c\varphi \end{bmatrix}. \quad (2.81)$$

Die Transformation vom raumfesten ins körperfeste System ergibt sich durch die Umkehrung von Gl.(2.81). Es gilt (raumfest \rightarrow körperfest):

$$(x_0, y_0, z_0) \rightarrow (x_3, y_3, z_3), \quad (2.82)$$

$${}^3\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & s\psi c\theta & -s\theta \\ -s\psi c\varphi + c\psi s\theta s\varphi & c\psi c\varphi + s\psi s\theta s\varphi & c\theta s\varphi \\ s\psi s\varphi + c\psi s\theta c\varphi & -c\psi s\theta + s\psi s\theta c\varphi & c\theta c\varphi \end{bmatrix}. \quad (2.83)$$

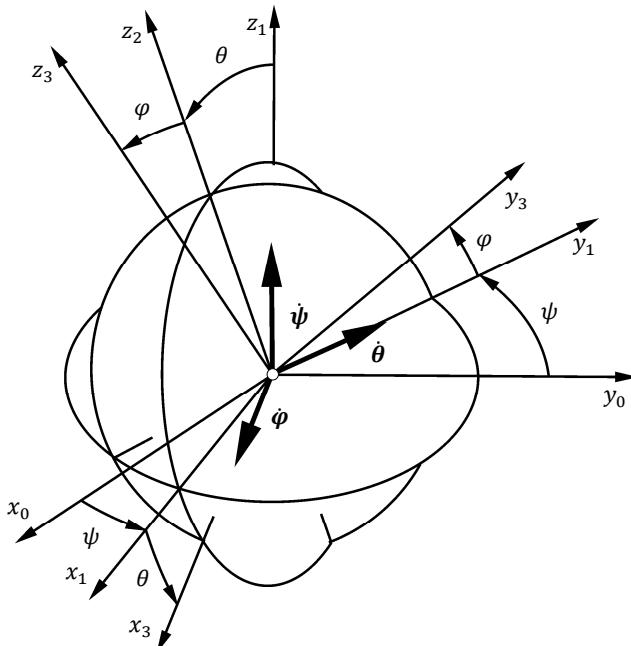


Abb. 2.18: Zu den kinematischen KARDAN-Gleichungen

Die kinematischen KARDAN-Gleichungen

Die kinematischen KARDAN-Gleichungen liefern den Zusammenhang zwischen der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ des körperfesten Systems (x_3, y_3, z_3) relativ zum Ausgangssystem (x_0, y_0, z_0) und den zeitlichen Ableitungen der KARDAN-Winkel: $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$. Wie aus Abb. 2.18 zu entnehmen ist, lässt sich die resultierende Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ vektoriell aus den Teilwinkelgeschwindigkeiten $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ zusammensetzen. Es gilt:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{e}_{z_0} + \dot{\theta} \mathbf{e}_{y_1} + \dot{\varphi} \mathbf{e}_{x_2}. \quad (2.84)$$

Die Auswertung dieser Vektorgleichung im Ausgangssystem (x_0, y_0, z_0) liefert:

$${}^0\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} {}^0\mathbf{e}_{z_0} + \dot{\theta} {}^0\mathbf{e}_{y_1} + \dot{\varphi} {}^0\mathbf{e}_{x_2}. \quad (2.85)$$

Daraus folgt für die Komponenten im raumfesten System (x_0, y_0, z_0) :

$$\begin{bmatrix} {}^0\omega_x \\ {}^0\omega_y \\ {}^0\omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \psi & \cos \psi \cos \theta \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \cos \theta \\ 1 & 0 & -\sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}. \quad (2.86)$$

Die Komponenten im körperfesten System (x_3, y_3, z_3) – üblicherweise als kinematische KARDAN Gleichungen bezeichnet – lauten:

$$\begin{bmatrix} {}^3\omega_x \\ {}^3\omega_y \\ {}^3\omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & 0 & 1 \\ \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}. \quad (2.87)$$

Singuläre Stellung: $\theta = \frac{\pi}{2}, \sin \theta = 1$

Für $\theta = \frac{\pi}{2}$ sind die Winkel ψ und φ nicht mehr zu unterscheiden; es tritt nur noch der Differenzwinkel $(\psi - \varphi)$ auf. Die reduzierte Transformationsmatrix vom raumfesten System (x_0, y_0, z_0) ins körperfeste System (x_3, y_3, z_3) ist damit:

$${}^3\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\sin(\psi - \varphi) & \cos(\psi - \varphi) & 0 \\ \cos(\psi - \varphi) & \sin(\psi - \varphi) & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.88)$$

Die Nullstellung der KARDAN-Winkel lässt sich am Beispiel eines kardanisch gelagerten Kreisels veranschaulichen (Abb. 2.13):

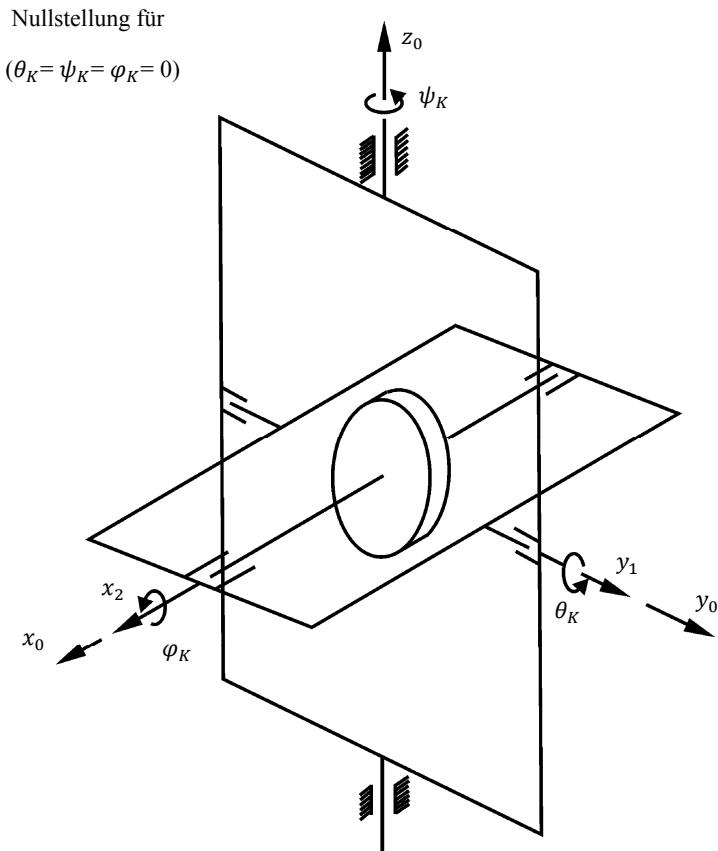


Abb. 2.19: Kardanisch gelagerter Kreisel

3 Kinematik von Mehrkörpersystemen

In diesem Kapitel werden die wesentlichen Grundlagen zur Kinematik von Mehrkörpersystemen – soweit sie für die spätere Modellierung von Fahrzeugkomponenten und Gesamtfahrzeugen benötigt werden – zusammengestellt. Für weitere Details sei auf (Hiller et al. 1986), (Hiller et al. 1986, 87, 88), (Woernle 1988), (Hiller und Kecskeméthy 1989), (Kecskeméthy 1993 und Hiller 1995) verwiesen.

3.1 Struktur kinematischer Ketten

Ein Mehrkörpersystem gelenkig miteinander verbundener (starrer) Körper wird als kinematische Kette bzw. als kinematisch zusammenhängendes Mehrkörpersystem bezeichnet. (Auf den Gelenkbegriff wird in Abschnitt 3.2 ausführlich eingegangen.) Ein kinematisch nicht zusammenhängendes Mehrkörpersystem kann, falls erforderlich, durch Einführung von *virtuellen Gelenken* mit $f_{G_i} = 6$ Gelenkfähigkeiten in ein kinematisch zusammenhängendes System überführt werden (Abb. 3.1).

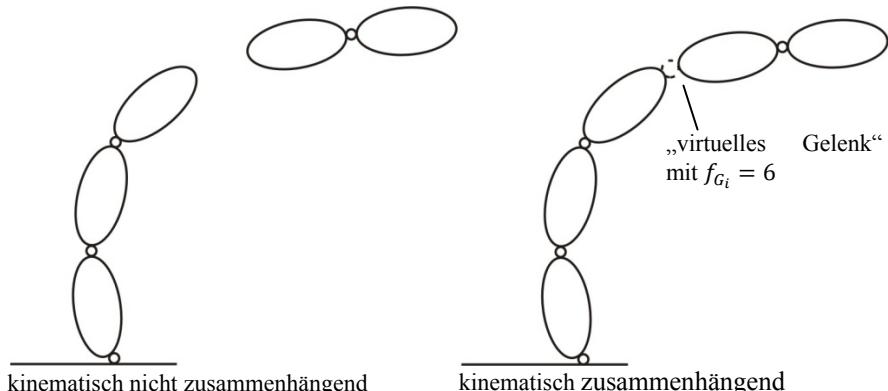


Abb. 3.1: Kinematisch zusammenhängende Ketten

3.1.1 Topologische Modellierung

Man unterscheidet bei kinematischen Ketten zwei topologische Grundprinzipien.

Offene kinematische Ketten – Baumstruktur

Bei einer kinematischen Kette mit Baumstruktur ist der Weg von einem Körper zu jedem beliebigen anderen Körper eindeutig bestimmt. Damit kann jedem Körper eindeutig ein Vorgängerkörper bzw. ein Vorgängerlenk zugeordnet werden. Wählt man einen Körper als Bezugskörper aus, so ist:

$$n_G = n_B, \quad (3.1)$$

mit

n_G - Anzahl von Gelenken

n_B - Anzahl von Körpern (ohne Bezugskörper).

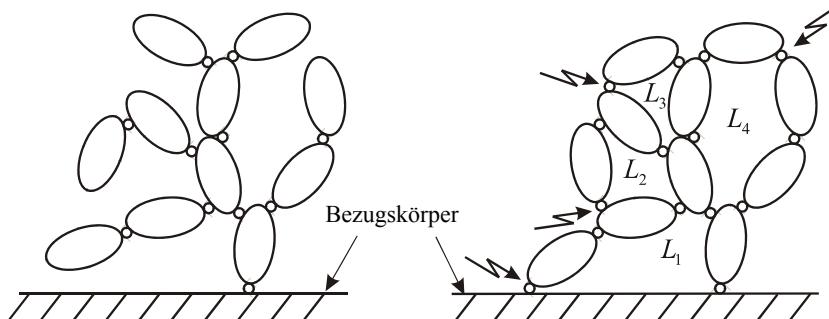


Abb. 3.2: Offene kinematische Kette – geschlossene kinematische Kette

Geschlossene kinematische Ketten – kinematische Schleifen

Ausgehend von einer kinematischen Kette mit Baumstruktur gelangt man durch Einführung von je einem zusätzlichen Gelenk zu jeweils einer unabhängigen kinematischen Mehrkörperschleife. Ausgehend von Gl. (3.1) gilt dann für die Anzahl n_L von unabhängigen Schleifen (Abb. 3.2):

$$n_L = n_G - n_B. \quad (3.2)$$

Weiter lassen sich teilweise und vollständig geschlossene kinematische Ketten unterscheiden. Ein System mit kinematischen Schleifen bildet eine teilweise geschlossene Kette, wenn

- einzelne Teilsysteme offene Ketten bilden, oder

- mehrere geschlossene Teilsysteme *offen* miteinander verbunden sind.
- Vollständig geschlossene Ketten sind dadurch gekennzeichnet, dass
- jeder Körper Teil einer Mehrkörperschleife ist und
 - jede Schleife mindestens einen Körper mit einer anderen Schleife gemeinsam hat.

Mechanismen gehören zu den geschlossenen kinematischen Ketten (s. Abschnitt 3.4.1).

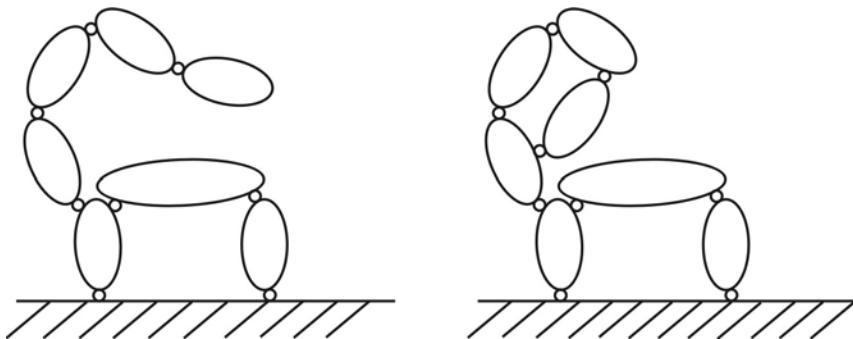


Abb. 3.3: Teilweise geschlossene kinematische Ketten

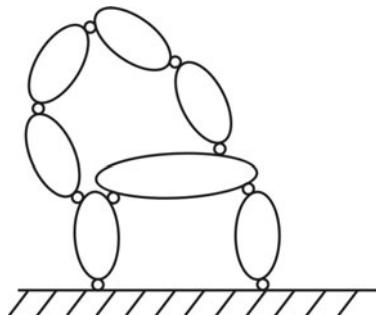


Abb. 3.4: Vollständig geschlossene kinematische Kette Kinematische Modellierungen

Nach der Art der Bewegung lassen sich kinematische Ketten in drei Gruppen unterteilen:

Ebene kinematische Ketten

In ebenen kinematischen Ketten bewegen sich alle Körperpunkte in oder parallel zu einer Bewegungsebene. Die Bewegung jedes Körpers hat damit einen rotatorischen und zwei translatorische Bewegungsanteile. Als relativ-

ve Bewegung der Körper zwischen den Gelenken können nur Verschiebungen parallel zur Bewegungsebene oder Drehungen senkrecht zur Bewegungsebene auftreten.

Sphärische kinematische Ketten

In sphärischen kinematischen Ketten bewegen sich alle Körperpunkte auf konzentrischen Kugeloberflächen um einen Fixpunkt. Die Körper haben damit drei rotatorische und keine translatorischen Bewegungsanteile. Die Relativbewegungen der Körper können nur Drehungen um Achsen durch den Fixpunkt sein.

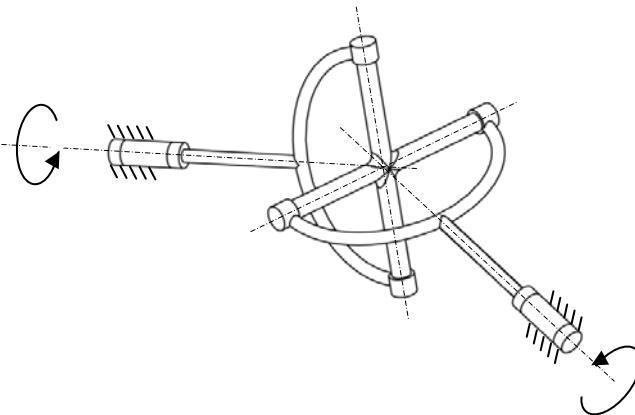


Abb. 3.5: Beispiel für sphärische kinematische Ketten: Welle mit Kardangelenk

Räumliche kinematische Ketten

In räumlichen kinematischen Ketten führen die Körper allgemeine räumliche Bewegungen mit je drei translatorischen und drei rotatorischen Bewegungsanteilen aus. Die Relativbewegung der Körper in den Gelenken – abhängig vom Gelenk – ist ebenfalls beliebig.

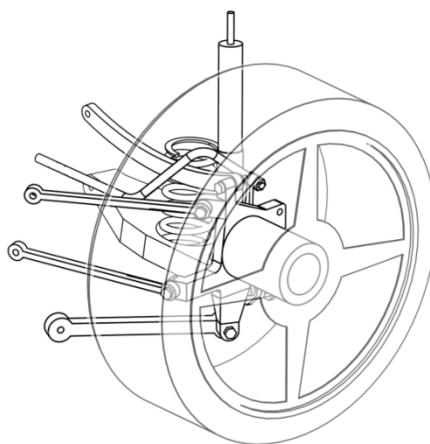


Abb. 3.6: Beispiel für räumliche kinematische Ketten: Fünfpunkt-Radaufhängung

3.2 Gelenke in kinematischen Ketten

Ein Gelenk verbindet jeweils zwei Körper einer kinematischen Kette. In Abhängigkeit vom Gelenkfähigkeitsgrad f_{G_i} stellt es $6 - f_{G_i}$ geometrische Bindungen zwischen den beiden Körpern her.

3.2.1 Gelenke in räumlichen kinematischen Ketten

Die relative Bewegung zweier durch ein Gelenk miteinander verbundener Körper lässt sich durch so genannte natürliche bzw. relative Gelenkkordinaten β_i beschreiben. Bei den in den späteren Kapiteln beschriebenen Untersuchungen räumlicher kinematischer Ketten werden die in den nachfolgenden Tabellen 3.1 und 3.2 zusammengestellten Gelenke betrachtet, die für eine große Klasse technisch auftretender Fälle repräsentativ sind. Die natürlichen Gelenkkordinaten dieser Gelenke sind Drehwinkel $\beta_i = \theta_i$ bzw. Verschiebungen $\beta_i = s_i$. Das allgemeinste Gelenk der Zusammenstellung ist dabei das Schraubgelenk (H). Als Sonderfälle entstehen daraus unmittelbar das Drehgelenk (R) (Steigung $p = 0$) und das Schubgelenk (P) (Steigung $p = \infty$). Die Gelenke mit mehreren Gelenkfähigkeitsgraden, also das Dreh-Schubgelenk (C), das Kardangelenk (T), das Kugelgelenk (S) und das ebene Gelenk (E) können wiederum durch Hintereinanderschalten oder Parallelschalten von Dreh- bzw. Schubgelenken entsprechend der Tabellen 3.1 und 3.2 aufgebaut werden.

Tabelle 3.1: Gelenke in räumlichen kinematischen Ketten

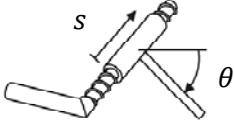
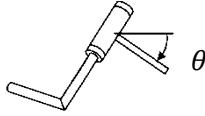
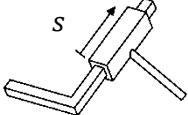
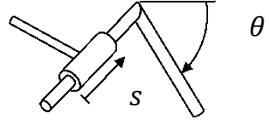
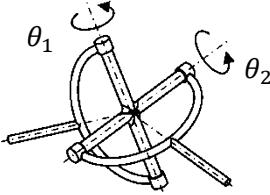
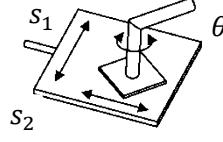
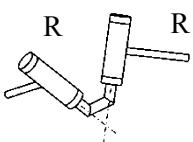
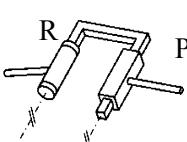
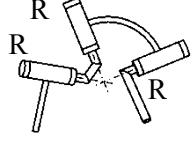
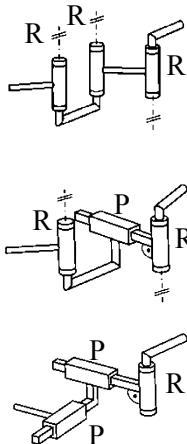
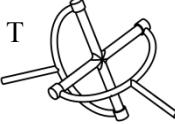
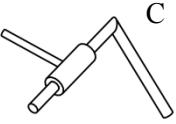
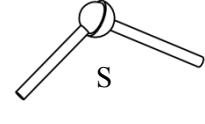
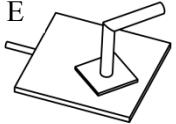
Gelenk	Symbol	Darstellung	f	natürliche Gelenkkoordinaten
Schraubgelenk (Helical)	H		1	$\beta = \theta$ $s = p \cdot \theta$ $p :=$ Steigung
Drehgelenk (Revolute)	R		1	$\beta = \theta$
Schubgelenk (Prismatic)	P		1	$\beta = s$
Dreh-Schubgelenk (Cylindric)	C		1	$\beta_1 = \theta$ $\beta_2 = s$
Kardangelenk (Universal)	T		2	$\beta_1 = \theta_1$ $\beta_2 = \theta_2$
Ebenes Gelenk	E		3	$\beta_1 = \theta$ $\beta_2 = s_1$ $\beta_3 = s_2$
Kugelgelenk (Spherical)	S		3	z.B. EULER-Winkel $\beta_1 = \psi$ $\beta_2 = \theta$ $\beta_3 = \varphi$

Tabelle 3.2: Aufbau von Gelenken mit mehreren Freiheitsgraden aus Dreh- und Schubgelenken

Kardangelenk	Dreh-Schubgelenk	Kugelgelenk	Ebenes Gelenk
			
			

3.2.2 Gelenke in ebenen kinematischen Ketten

Bei den ebenen kinematischen Ketten besitzen die Körper nur einen rotatorischen und zwei translatorische Bewegungsanteile. Von den in Abschnitt 3.2.1 betrachteten Gelenken treten deshalb nur Drehgelenke (Drehachsen senkrecht zur Bewegungsebene) und Schubgelenke (Verschiebungssachsen in der Bewegungsebene) auf.

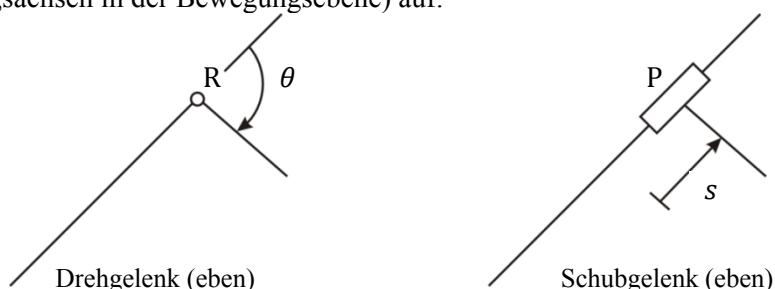


Abb. 3.7: Gelenke in ebenen kinematischen Ketten

3.2.3 Gelenke in sphärischen kinematischen Ketten

Bei sphärischen kinematischen Ketten besitzen alle Körper nur drei rotatorische Bewegungsanteile. Von den in Abschnitt 3.2.1 betrachteten Gelenken treten deshalb nur Drehgelenke auf, deren Achsen sich im Fixpunkt O der kinematischen Ketten schneiden.

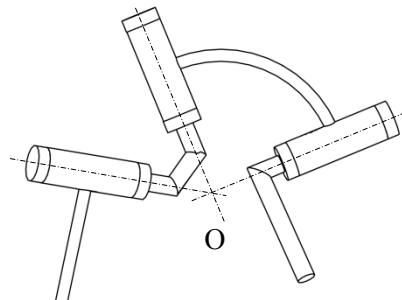


Abb. 3.8: Drehgelenke in sphärischen kinematischen Ketten

3.2.4 Klassifizierung von Gelenken

In der Getriebelehre unterscheidet man nach (Reuleaux 1875), zwischen Standardgelenken (*niedrige Elementpaare*, lower pairs) und komplexen Gelenken (*höhere Elementpaare*, higher pairs):

- Bei Standardgelenken haben die Körper Flächenberührungen. Man unterscheidet die folgenden sechs Standardgelenke (Tabelle 3.3):

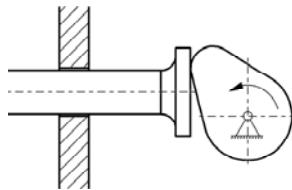
Tabelle 3.3: Standardgelenke

Gelenk		Berührfläche
Schraubgelenk	(H)	Schraubenfläche
Drehgelenk	(R)	Rotationsfläche
Schubgelenk	(P)	Mantelfläche eines Prismas
Dreh-Schubgelenk	(C)	Zylindermantel
Kugelgelenk	(S)	Kugeloberfläche
Ebenes Gelenk	(E)	Ebene

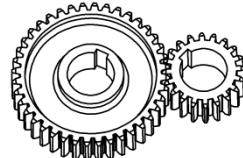
- Bei komplexen Gelenken haben die Körper Linien- oder Punktberührung (Abb. 3.9).

Die Berührung der beiden Körper kann auch an zwei nicht materiell vorhandenen, raumfesten bzw. körperfesten Flächen, der Spur- bzw. Polflä-

che, entlang der momentanen Dreh- bzw. Schraubachse, welche den momentanen Bewegungszustand kennzeichnet, erfolgen.



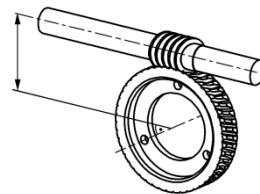
Kurvegetriebe (eben)



Stirnradgetriebe (eben)



Kegelradgetriebe (sphärisch)



Schneckengetriebe (räumlich)

Abb. 3.9: Beispiele für komplexe Gelenke mit materieller Flächenberührungen

Bei der Einfederungsbewegung der Fünfpunkt-Radaufhängung als Beispiel lässt sich die Bewegung des Radträgers relativ zum Fahrgestell als Schraubbewegung (Schroten) der radträgerfesten Polfläche auf der fahrgestellfesten Spurfläche darstellen (Abb. 3.10). Die *Berührlinie* ist die momentane Schraubachse der räumlichen Bewegung des Radträgers.

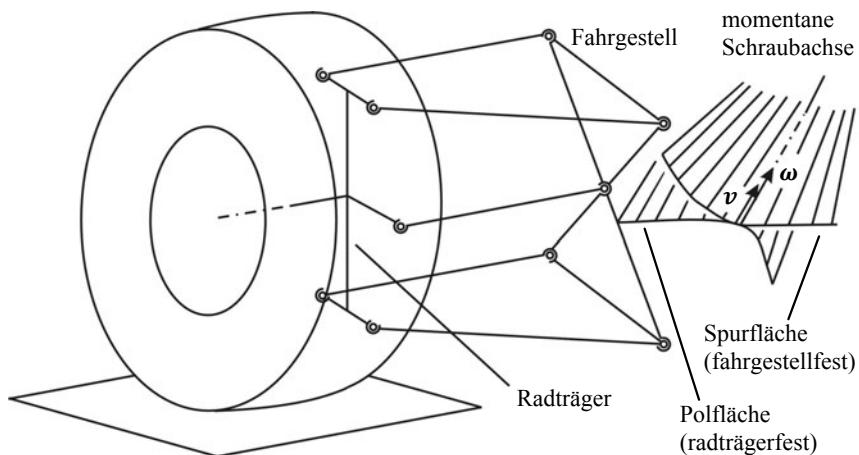


Abb. 3.10: Pol- und Spurfläche einer Fünfpunkt-Radaufhängung

3.3 Freiheitsgrade und verallgemeinerte Koordinaten

3.3.1 Freiheitsgrade kinematischer Ketten

Es wird eine beliebige räumliche kinematische Kette – ohne oder mit kinematischen Schleifen – betrachtet, bestehend aus

n_B Körpern (ohne Bezugskörper),

n_G Gelenken mit jeweils

f_{G_i} Gelenkfreiheitsgraden,

wobei der einzelne Körper im Falle einer freien Bewegung sechs unabhängige Bewegungsmöglichkeiten im Raum haben kann. Der *Gesamtfreiheitsgrad* f (in der Getriebetechnik auch als *Laufgrad* bezeichnet) relativ zum Bezugskörper ist dann

$$f = 6n_B - \sum_{i=1}^{n_G} (6 - f_{G_i}), \text{ bzw.} \quad (3.3)$$

$$f = 6(n_B - n_G) + \sum_{i=1}^{n_G} f_{G_i}. \quad (3.4)$$

Mit der Anzahl von kinematischen Schleifen

$$n_L = n_G - n_B \quad (3.5)$$

folgt aus Gl. (3.4) für die Bestimmung des Freiheitsgrades:

$$f = \sum_{i=1}^{n_G} f_{G_i} - 6n_L. \quad (3.6)$$

In der Getriebetechnik wird Gl. (3.6) als Kriterium von KUTZBACH bzw. – speziell bei $f = 1$ – als Kriterium von GRÜBLER bezeichnet. Mehrkörpersysteme bzw. kinematische Ketten mit $f = 1$ werden auch als (zwangsläufige) *Mechanismen* bezeichnet. Man unterscheidet:

- $f=1$ zwangsläufiger Mechanismus,
- $f=0$ statisch bestimmte Struktur (Fachwerk),
- $f<0$ statisch unbestimmte Struktur.

Es sei darauf hingewiesen, dass durch diese Klassifizierung in der Mechanik ein fließender Übergang zwischen Kinematik und Statik hergestellt werden kann. Weiterhin ist zu beachten, dass Gl. (3.4) bzw. (3.6) in gewis-

sen Sonderfällen (z.B. bei sogenannten überbestimmten Mechanismen) ein falsches Ergebnis liefern kann (Möller 1992).

Bei ebenen und sphärischen kinematischen Ketten besitzen die einzelnen Körper jeweils maximal drei Bewegungsmöglichkeiten. Die Bedingungen gemäß Gl. (3.4) bzw. Gl. (3.6) gehen dann über in:

$$f = 3(n_B - n_G) + \sum_{i=1}^{n_G} f_{G_i}, \quad (3.7)$$

$$f = \sum_{i=1}^{n_G} f_{G_i} - 3n_L. \quad (3.8)$$

3.3.2 Beispiele aus der Fahrwerkskinematik

Nachfolgend werden zwei in der Fahrzeugtechnik weit verbreiteten Einz尔adaufhängungen als Beispiele für geschlossene kinematische Ketten unterschiedlicher Komplexität vorgestellt.

Fünfpunkt-Radaufhängung

Die Fünfpunkt-Radaufhängung (Raumlenkerachse) verkörpert eine geschlossene kinematische Kette mit einem sehr hohen Grad der Verkoppelung der vorhandenen kinematischen Schleifen (Abb. 3.11).

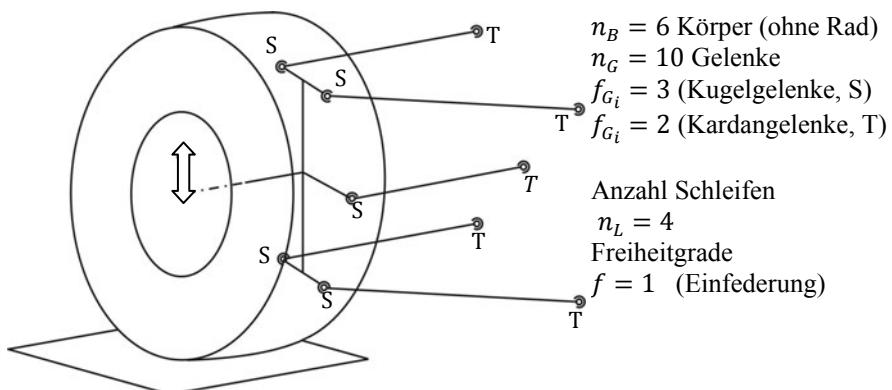


Abb. 3.11: Fünfpunkt-Radaufhängung (Raumlenkerachse)

Da bei der Freiheitsgradbestimmung die isolierten Drehungen der Lenker um ihre Längsachsen nicht berücksichtigt werden sollen, werden die fahrgestellseitigen Kugelgelenke, ohne Einschränkung der Allgemeinheit, als Kardangelenke modelliert.

Doppelquerlenker-Radaufhängung

Gegenüber der Fünfpunkt-Radaufhängung besitzt die Doppelquerlenker-Radaufhängung nur eine schwache Koppelung zwischen den beteiligten kinematischen Schleifen, sodass die zugehörige Kinematik explizit analytisch gelöst werden kann, wie in Abschnitt 3.6.4 und in Kapitel 6 gezeigt wird.

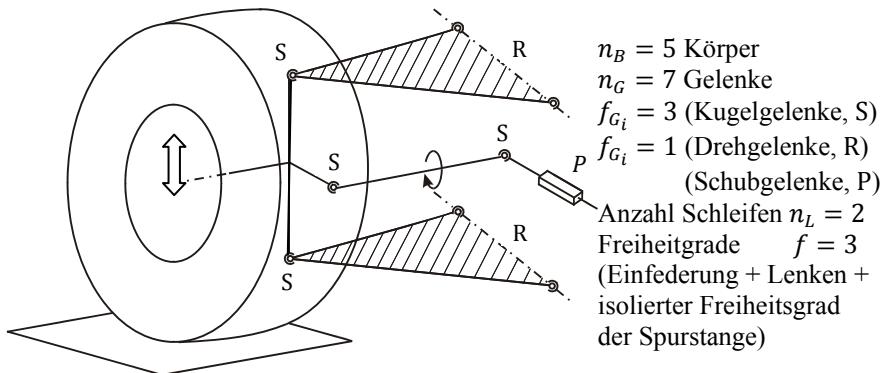
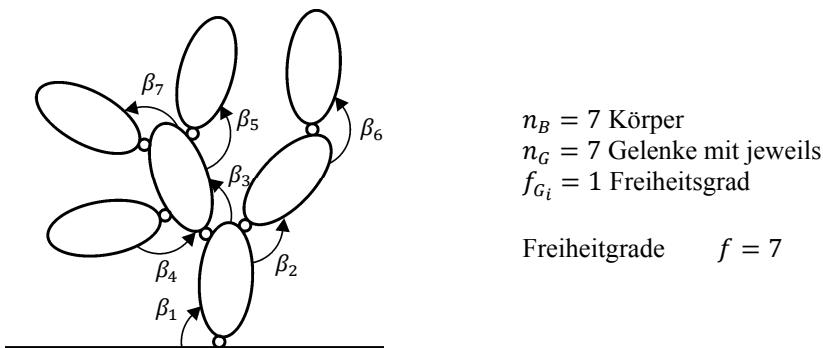


Abb. 3.12: Doppelquerlenker-Radaufhängung

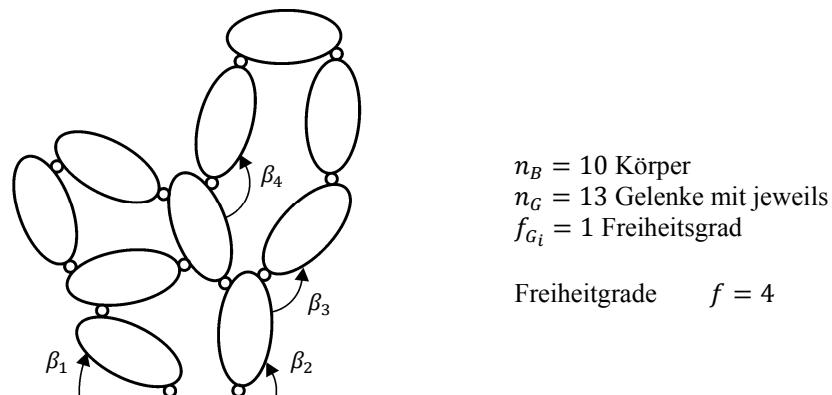
3.3.3 Verallgemeinerte Koordinaten

Die Lage aller Körper einer kinematischen Kette mit Gesamtfreiheitsgrad f kann eindeutig durch f unabhängige Koordinaten, die *verallgemeinerten Koordinaten*, festgelegt werden.

Beispiele:

Kinematische Kette mit Baumstruktur (eben)**Abb. 3.13:** Ebene kinematische Kette mit Baumstruktur

Hier können die natürlichen Gelenkkoordinaten β_i (Drehgelenke) direkt als verallgemeinerte Koordinaten gewählt werden.

Kinematische Ketten mit Schleifen (eben)**Abb. 3.14:** Ebene kinematische Kette mit Schleifen

Hier können $f = 4$ unabhängige Gelenkkoordinaten als verallgemeinerte Koordinaten gewählt werden. Alle anderen Gelenkkoordinaten müssen in Abhängigkeit von den unabhängigen Gelenkkoordinaten ausgedrückt werden.

3.4 Grundprinzipien des Zusammenbaus kinematischer Ketten

Zur Aufstellung der kinematischen Gleichungen komplexer Mehrkörper-systeme mit kinematischen Schleifen existieren verschiedene Ansätze. Hauptsächlich im Hinblick auf einen automatischen Zusammenbau von Mehrkörpersystemen gibt es drei grundlegende Vorgehensweisen. Diese sollen jeweils am Beispiel einer Doppelquerlenkerachse (Abb. 3.15) demonstriert werden.

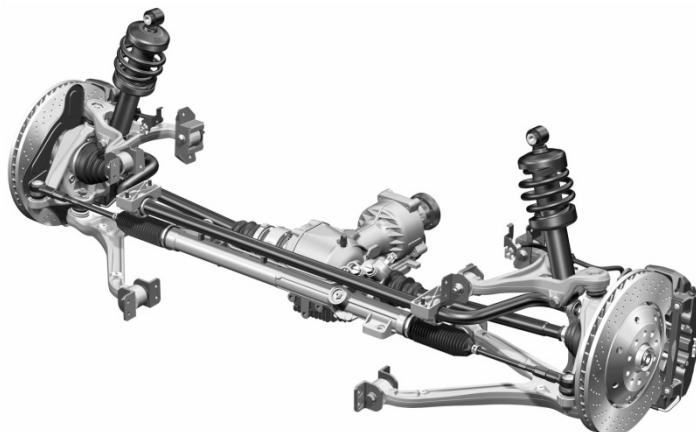


Abb. 3.15: Doppelquerlenkerachse des Audi R8 (mit freundlicher Genehmigung der Audi AG)

Die topologische Struktur dieser Radaufhängung, die – ebenso wie die vieler anderer komplexer Mehrkörpersysteme – auf den ersten Blick aus der technischen Abbildung nicht ohne weiteres zu entnehmen ist, lässt sich wie folgt erläutern: Das System besteht aus zwei gekoppelten kinematischen Schleifen und hat insgesamt zwei Freiheitsgrade, einen für die Einfederung, einen zweiten für die Lenkbewegung (vgl. Abschnitt 3.3.2). Um einen Überblick über die Struktur eines Systems mit kinematischen Schleifen zu erhalten, wird eine grafische Darstellung unter Verwendung der in Abb. 3.16 gezeigten Symbole, eingeführt, mit deren Hilfe in einem ersten Schritt die topologische Struktur des mechanischen Systems dargestellt werden kann (Schnelle, 1990):

- Zerlegen aller mehrwertigen in einwertige Gelenke (vgl. Tabellen 3.1 und 3.2).

- Einzeichnen aller Körper und Gelenke in ein Bild unter Verwendung der in Abb. 3.16 beschriebenen Symbolik.

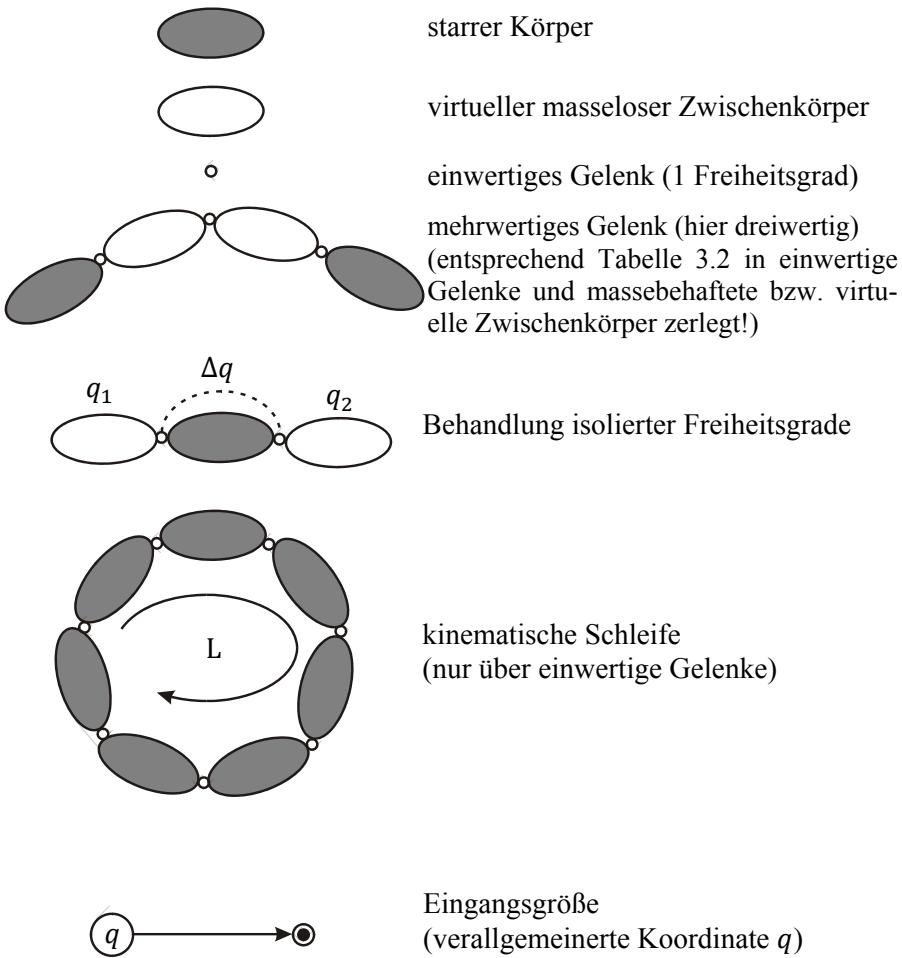


Abb. 3.16: Symbole für die Gelenk-Körper-Darstellung von Mehrkörpersystemen

Im vorliegenden Beispiel enthält die Doppelquerlenker-Radaufhängung zwei Drehgelenke R, ein Schubgelenk P und vier Kugelgelenke S; letztere werden jeweils in drei Drehgelenke mit zwei virtuellen Zwischenkörpern zerlegt. Mit Hilfe dieser Symbolik ergibt sich damit die in Abb. 3.17 gezeigte Gelenk-Körper-Darstellung. Man erkennt jetzt die beiden kinematischen Schleifen, sowie deren Koppelung über das Drehgelenk R_1 und das Kugelgelenk S_1 . Die Freiheitsgrade des Systems – Einfederung, Lenken

und isolierter Freiheitsgrad der Spurstange, der für die weiteren Betrachtungen keine Rolle spielt – sind ebenfalls zu erkennen.

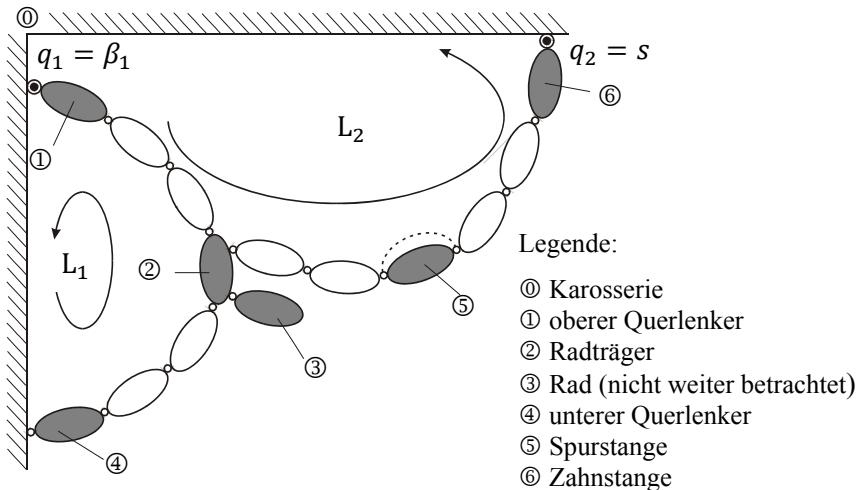


Abb. 3.17: Topologische Struktur der Doppelquerlenker-Radaufhängung

3.4.1 „Sparse“-Methoden

Prinzip: *Auftrennen aller Gelenke*

Bindungen: Übereinstimmung aller Gelenkparameter

Hier wird zunächst angenommen, dass alle Körper sich frei bewegen können. Als Beschreibungsvariablen der Kinematik werden zu jedem Körper „ K_i “ die sechs Positionsvariablen des körperfesten Bezugssystems – drei translatorische und drei rotatorische – zusammengefasst im Vektor w_i , eingeführt (vgl. Abschnitt 2.4.1). Für ein Mehrkörpersystem, bestehend aus n_B Körpern werden also $6n_B$ Beschreibungsvariablen eingeführt, zusammengefasst im $[6n_B \times 1]$ -Vektor $w = (w_1^T \dots w_{n_B}^T)^T$.

Die Abhängigkeiten zwischen den redundant eingeführten Positionsvariablen werden durch Formulierung der *Schließbedingung* an allen Gelenken implizit aufgestellt. Dabei müssen an einem Gelenk mit f_{G_i} Freiheitsgraden $6 - f_{G_i}$ invariante Gelenkparameter unabhängig von ihrem Bezugssystem übereinstimmen. Als sinnvolles gemeinsames Bezugssystem wird das Inertialsystem gewählt. Nach der Auswahl von

$$f = 6(n_B - n_G) + \sum_{i=1}^{n_G} f_{G_i}$$

unabhängigen verallgemeinerten Koordinaten $\mathbf{q} = (q_1 \dots q_f)$ wird die Funktion $\mathbf{w}(\mathbf{q})$ implizit durch das Gleichungssystem

$$z_i(\mathbf{w}, \mathbf{q}) = 0, \quad i = 1, \dots, 6n_B \quad (3.9)$$

definiert. Der Vorteil dieses Zugangs liegt in der relativ einfachen Formulierung von beliebigen Bindungsgleichungen, sowie in der schwach verkoppelten Struktur des Gesamtgleichungssystems (nur wenige Variablen pro Gleichung, zusammengefasst in dünn besetzten, den so genannten *Sparse* Matrizen). Nachteilig ist die hochgradig implizite Formulierung der Funktion $\mathbf{w}(\mathbf{q})$. Dies hat einerseits einen hohen numerischen Aufwand zur Lösung des Gleichungssystems (3.9) zur Folge, andererseits können während der numerischen Simulation oft *numerische* Singularitäten auftreten, die nicht unbedingt durch mechanisch interpretierbare Singularitäten (Strecklagen) verursacht werden.

Beispiel: Doppelquerlenker-Radaufhängung

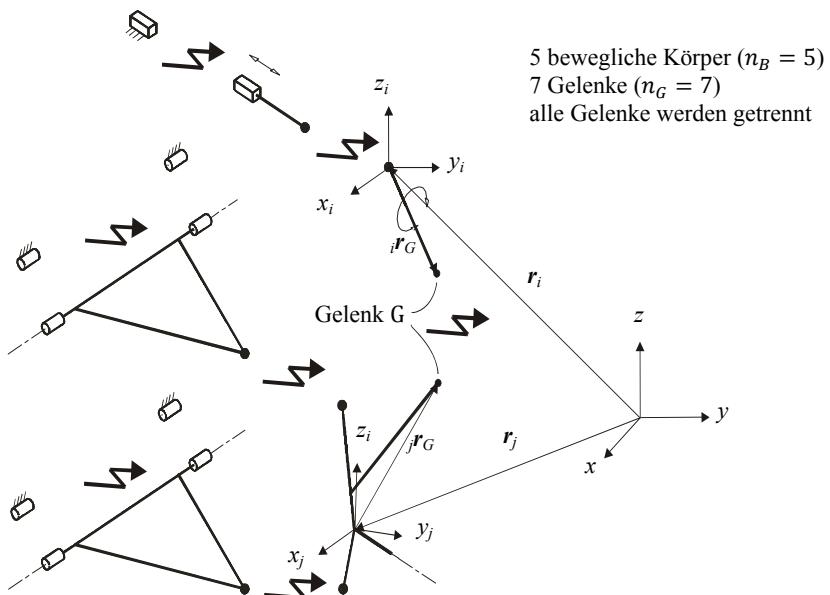


Abb. 3.18: Doppelquerlenker-Radaufhängung mit geschnittenen Gelenken

Der *Zusammenbau* ergibt je Gelenk zwei vektorielle Bindungsgleichungen:

$$\mathbf{r}_i + {}_i\mathbf{r}_G(\beta_i) = \mathbf{r}_j + {}_j\mathbf{r}_G(\beta_j). \quad (3.10)$$

Die Gesamtbilanz für die Freiheitsgrade ergibt:

5 × 6 Bewegungsgleichungen	30
-(3 × 5 + 4 × 3) Bindungen	-27
Systemfreiheitsgrade (davon ein isolierter Freiheitsgrad (Abb. 3.18))	3

3.4.2 „Vector-Loop“-Methoden

- Prinzip:** *Trennen* von nur einem Gelenk je Schleife;
Überführung der Schleifenstruktur in eine Baumstruktur
Bindungen: Schließbedingungen der Schleifen

Hier wird das Mehrkörpersystem zunächst durch *Auftrennen* geeigneter Gelenke in ein System mit Baumstruktur überführt. Als kinematische Beschreibungsvariablen werden

$$n_\beta = \sum_{i=1}^{n_G} f_{G_i} \quad (3.11)$$

Hilfsvariablen β_j eingeführt, die jeweils die relative Lage zweier miteinander verbundener Körper beschreiben. Die Abhängigkeiten zwischen den Hilfsvariablen werden implizit durch Formulierungen der *Schließbedingungen* nur an den aufgetrennten Gelenken aufgestellt. Dabei müssen über die Hilfsvariablen die Absolutwerte der festen Gelenkparameter bezüglich des Inertialsystems angegeben werden.

Der Vorteil dieser Methode liegt in der stark reduzierten Anzahl von Bindungsgleichungen. Nachteilig ist die sehr aufwendige Berechnung der übereinstimmenden Gelenkparameter durch Vorwärtsskinematik sowie die vollbesetzte Struktur des Gesamtgleichungssystems (sehr viele Variablen je Gleichung). Dadurch ist der numerische Aufwand zur Lösung der Bindungsgleichungen vergleichbar mit dem numerischen Aufwand der *Sparse*-Methoden.

Beispiel: Doppelquerlenker-Radaufhängung

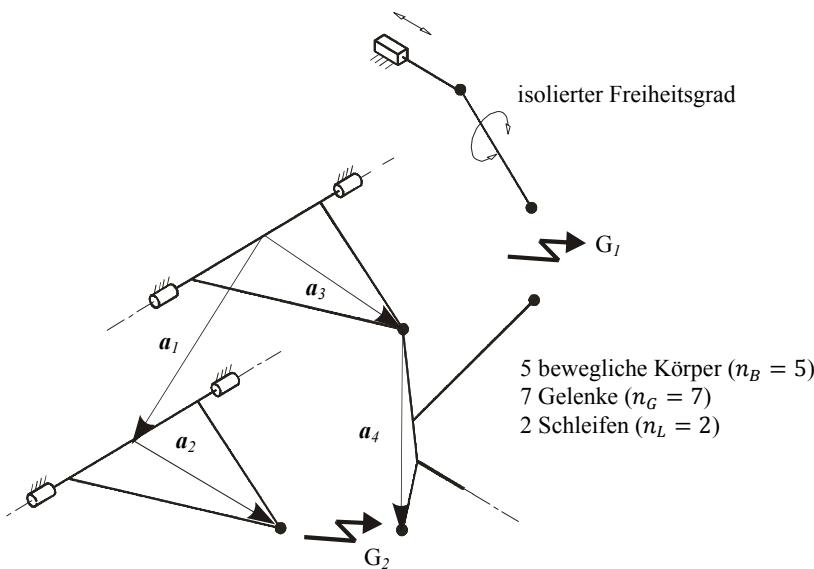


Abb. 3.19: Doppelquerlenker-Radaufhängung mit geschnittenen kinematischen Schleifen

Nach *Auf trennung* der Gelenke G_1 und G_2 entsteht ein System mit Baumstruktur und neun relativen Gelenkkoordinaten β_i als Hilfsvariablen zur Bewegungsbeschreibung.

Zusammenbau: Man erhält drei Bindungsgleichungen je Gelenk, z. B.:

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{a}_3(\boldsymbol{\beta}) + \mathbf{a}_4(\boldsymbol{\beta}). \quad (3.12)$$

Die Gesamtbilanz für die Freiheitsgrade ergibt:

9 Hilfsvariablen	9
-2 × 3 Bindungen	-6
Systemfreiheitsgrade	3
(davon ein isolierter Freiheitsgrad (Abb. 3.19))	

3.4.3 Topologische Methoden

Prinzip: Kinematische Schleifen werden als kinematische Übertragungselemente aufbereitet, die in der Folge als sogenannte

kinematische Transformatoren bezeichnet werden (Hiller et al. 1986, 87, 88).

Bindungen: Die aufzustellenden Bindungsgleichungen bestehen aus zwei unterschiedlichen Anteilen:

- den *nichtlinearen*, lokalen *Übertragungsgleichungen* innerhalb der jeweiligen kinematischen Schleifen
- den *linearen Kopplungsgleichungen* zwischen den Schleifen.

Hier werden also ganze Mehrkörperschleifen freigeschnitten. Als kinematische Beschreibungsvariablen führt man *innere* relative Koordinaten für alle Schleifen ein. Die Abhängigkeiten zwischen den Beschreibungsvariablen ergeben sich zunächst aus den lokalen Zusammenhängen innerhalb der einzelnen Schleifen (Übertragungsfunktionen). Anschließend werden die einzeln aufbereiteten Übertragungselemente (Schleifen) mittels linearer Kopplungsgleichungen zusammengebaut und über Blockschaltbilder veranschaulicht (siehe Abschnitt 3.5). Der Vorteil der Methode liegt in der übersichtlichen Beschreibung – und damit guten Interpretierbarkeit – der globalen Zusammenhänge sowie in der oft explizit auflösbarer Struktur des Gesamtsystems von Gleichungen. Nachteilig ist der etwas größere *Initialisierungs*-Aufwand bei der topologischen Aufbereitung.

Im vorliegenden Beispiel besitzt das System die beiden gekoppelten kinematischen Schleifen L_1 und L_2 , wobei diese Schleifen über den Eingangswinkel β der Einfederung sowie die drei Winkel $\beta_2, \beta_3, \beta_4$ des Kugelgelenks S_1 aus Abb. 3.20 gekoppelt sind. Das Gesamtsystem für die Relativkinematik lässt sich also wie folgt zusammenfassen:

2 kinematische Übertragungselemente (kinematische Transformatoren)
 L_1 und L_2

3 lineare Kopplungsgleichungen

Für die Freiheitsgrade ergibt sich:

2 Schleifen mit zwei bzw. fünf Freiheitsgraden	7
3 Kopplungsgleichungen	-3
1 Verzweigung	-1
Systemfreiheitsgrade	3
(davon ein isolierter Freiheitsgrad (Abb. 3.20))	

Das zugehörige Blockschaltbild samt Lösungsfluss ist aus Abb. 3.20 zu entnehmen. Weitere Einzelheiten werden im nächsten Abschnitt erläutert.

Beispiel: Doppelquerlenker-Radaufhängung

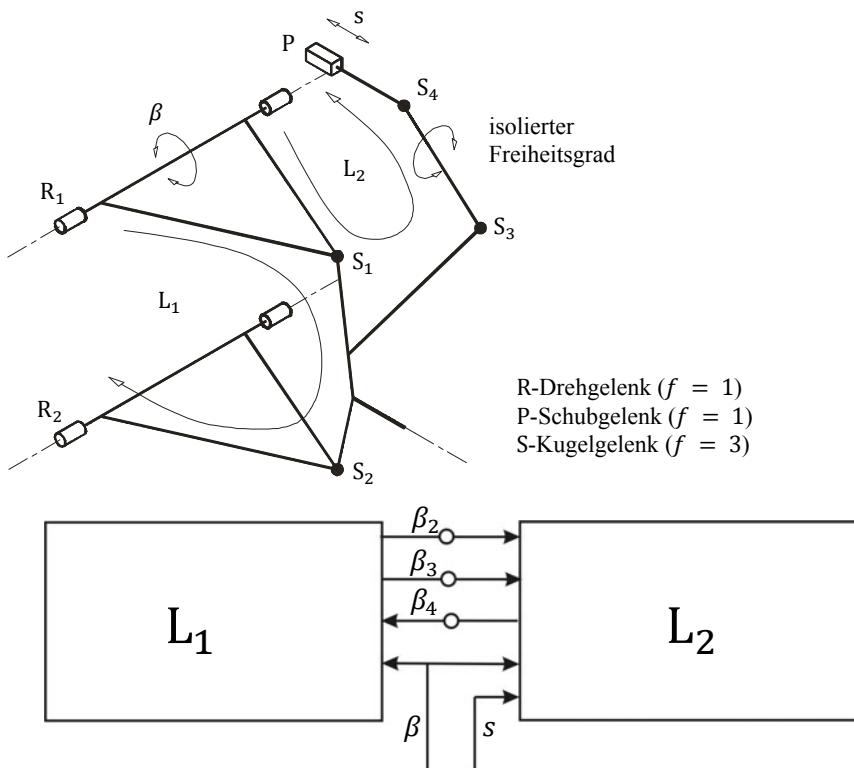


Abb. 3.20: Kinematische Transformatoren

Bemerkungen:

- Die auf der topologischen Methode basierende kinematische Analyse eines Mehrkörpersystems mit kinematischen Schleifen wird am Beispiel der Doppelquerlenkerachse in Abschnitt 3.5.5 noch näher ausgeführt.
- Neben den hier vorgestellten drei Grundprinzipien für die Aufstellung der kinematischen Gleichungen komplexer Mehrkörpersysteme existieren noch weitere Varianten, die u.a. die spezielle topologische Struktur des Systems nutzen und zur Aufstellung eines impliziten Bindungsgleichungssystems führen, das numerisch zu lösen ist. Darauf wird an Beispielen in Kapitel 6 näher eingegangen.

3.5 Kinematik des Gesamtsystems

3.5.1 Grundidee

Komplexe Mehrkörpersysteme, wozu auch Mechanismen gehören, zeichnen sich dadurch aus, dass die Bewegungen der einzelnen Körper stark miteinander gekoppelt sind. Die mathematische Beschreibung dieser Kopplungen führt zunächst zu einem umfangreichen System von nichtlinearen Gleichungen, aus dem die wechselseitigen Abhängigkeiten in den Bewegungen nicht unmittelbar ersichtlich sind.

Die Reduktion des Systems von Bindungsgleichungen durch Einführung relativer Koordinaten als Beschreibungsvariablen wurde bereits in Abschnitt 3.4.3 angedeutet. Es lässt sich weiterhin zeigen, dass nach bekannter Relativbewegung sämtliche *Absolutkoordinaten* der einzelnen Körper durch eine entsprechende *Vorwärtskinematik* im kinematischen Netz explizit bestimmbar sind (Hiller et al. 1986, 87, 88). Das zentrale Problem der Kinematik von komplexen Mehrkörpersystemen ist demnach die Lösung der *Relativkinematik*. Sie basiert im vorliegenden Fall auf der bereits im Abschnitt 3.4.3 vorgestellten Idee, geschlossene kinematische Schleifen als nichtlineare kinematische Übertragungselemente – in der Folge auch als *kinematische Transformatoren* bezeichnet – aufzufassen, um sie dann über – in der Regel *lineare – Kopplungsgleichungen* zu kinematischen Netzen, dargestellt durch *Blockschaltbilder*, zu verknüpfen. Schließlich sei noch darauf hingewiesen, dass gerade bei technischen Lösungen (z.B. Radaufhängungen) und den dort verwendeten Gelenktypen (vgl. Abschnitt 3.2) durch eine geschickte Analyse der einzelnen kinematischen Schleifen die nichtlinearen Bindungsgleichungen innerhalb der Schleife rekursiv (oder weitgehend rekursiv) und explizit gelöst werden können. Die *Absolutkinematik* wird dann in Abschnitt 3.5.4 behandelt.

Durch Betrachtung der topologischen Struktur des komplexen Mehrkörpersystems ist es also möglich, globale Wechselwirkungen von lokalen Nichtlinearitäten zu entkoppeln. Hierzu wird wieder die Modellierung der einzelnen Mehrkörperschleifen als *kinematische Transformatoren* herangezogen. Es kann gezeigt werden, dass sich diese Elemente durch lineare Gleichungen miteinander verknüpfen lassen und insbesondere, dass sich jedes mehrschleifige Mehrkörpersystem häufig auf linear gekoppelte Transformatoren zurückführen lässt. Das mehrschleifige Mehrkörpersystem lässt sich damit als Blockschaltbild darstellen, das in übersichtlicher Form die globalen kinematischen Zusammenhänge wiedergibt. Dieses Konzept der Blockschaltbilder wird in den späteren Kapiteln – in erster

Linie Kapitel 6 und 9 – anhand von Beispielen von Einzelradaufhängungen noch näher erläutert werden (Hiller et al. 1986, 87, 88).

3.5.2 Blockschaltbilder und kinematische Netze

Bei Übertragungsmechanismen werden einzelne Mehrkörperschleifen häufig hintereinandergeschaltet, um bestimmte Übertragungsfunktionen über bestimmte Wege zu realisieren. Als einfachstes, oft verwendetes Übertragungselement wird hier das räumliche Gelenkviereck betrachtet, welches als Übertragungselement auch innerhalb der schon im vorigen Abschnitt vorgestellten Doppelquerlenkerachse auftritt.

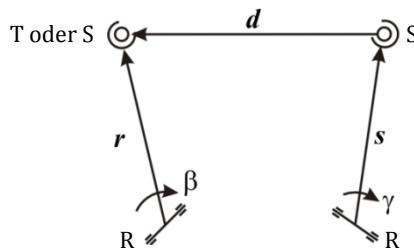


Abb. 3.21: Räumliches Gelenkviereck

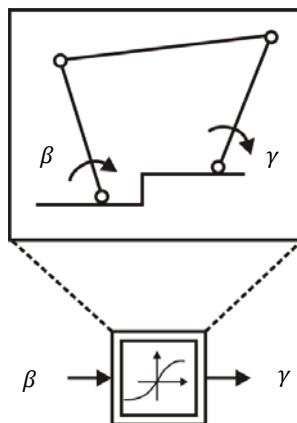


Abb. 3.22: Schematische Darstellung des räumlichen Gelenkvierecks als Übertragungselement – *kinematischer Transformator*

Das Gelenkviereck als Übertragungselement hat die Aufgabe, die Drehbewegungen eines Eingangshebels r in eine Drehbewegung des Ausgangshebels s zu übertragen. Die nichtlineare Übertragung wird über die Koppel d realisiert. Je nachdem, ob die raumfesten bzw. fahrzeugfesten Drehach-

sen der beiden Hebel parallel oder windschief zueinander liegen, unterscheidet man zwischen ebenen und räumlichen Gelenkvierecken. Als relevante Koordinaten treten der Eingangswinkel β (Drehwinkel des Eingangshebels r) sowie der Ausgangswinkel γ (Drehwinkel des Ausgangshebels s) auf. Nach Bestimmung der entsprechenden Übertragungsfunktion $\gamma(\beta)$ können die konstruktiven Details außer acht gelassen werden. Das Gelenkviereck kann nunmehr als kinematischer Transformator mit einem Eingang und einem Ausgang betrachtet werden. Er *transformiert* also den Eingangswinkel β in den Ausgangswinkel γ . Dieses Konzept lässt sich auch noch erweitern, wie in Abschnitt 3.5.4 zu zeigen ist.

Nach Bestimmung der Koppelungsgleichungen können die einzelnen *kinematischen Transformatoren*, welche die nichtlinearen Übertragungsgleichungen der freigeschnittenen Mehrkörperschleifen enthalten, über ein Blockschaltbild zu einem kinematischen Netz zusammengebaut werden (Abb. 3.20), dessen detaillierte kinematische Analyse im nächsten Abschnitt behandelt wird.

Als Ergebnis des Zusammenbaus stehen die globalen Bindungsgleichungen in modularer Form zur Verfügung. Diese Struktur ist äußerst günstig für die Behandlung von komplexen Mehrkörpersystemen mit kinematischen Schleifen: jedes Modul, d.h. jeder *kinematische Transformator*, enthält nur eine begrenzte Anzahl von *lokalen nichtlinearen Bindungsgleichungen*, die überschaubar sind und unabhängig von den anderen Transformatoren gelöst werden können: Die Struktur dieser Bindungsgleichungen ist nur von den geometrischen Parametern innerhalb der Schleife abhängig. Dagegen sind die *globalen kinematischen Wechselwirkungen* zwischen den Transformatoren linear und – bis auf das Vorzeichen und eine Konstante – ausschließlich durch die *topologische Struktur* des Mehrkörpersystems gegeben. Sie sind damit (fast) unabhängig von geometrischen Parametern. Das gesamte System lässt sich daher in einem Übertragungsblock zusammenfassen, dessen beschreibenden Variablen die oben eingeführten *Relativkoordinaten* sind (siehe Abschnitt 3.5.3).

Der Zusammenbau des Gesamtsystems kann rechnergestützt durch geeignete Algorithmen unterstützt werden. Man kann aber auch die globalen Bindungsgleichungen unter Verwendung von nichtlinearen Übertragungsböcken für die einzelnen Schleifen, sowie linearen Additionsstellen für die Koppelungsgleichungen, übersichtlich mit Hilfe von Blockschaltbildern darstellen. Dieses aus der Regelungstechnik bekannte Vorgehen soll in Abschnitt 3.5.5 anhand eines Beispiels aus der Fahrzeugtechnik veranschaulicht werden.

3.5.3 Relativkinematik des räumlichen Gelenkvierecks

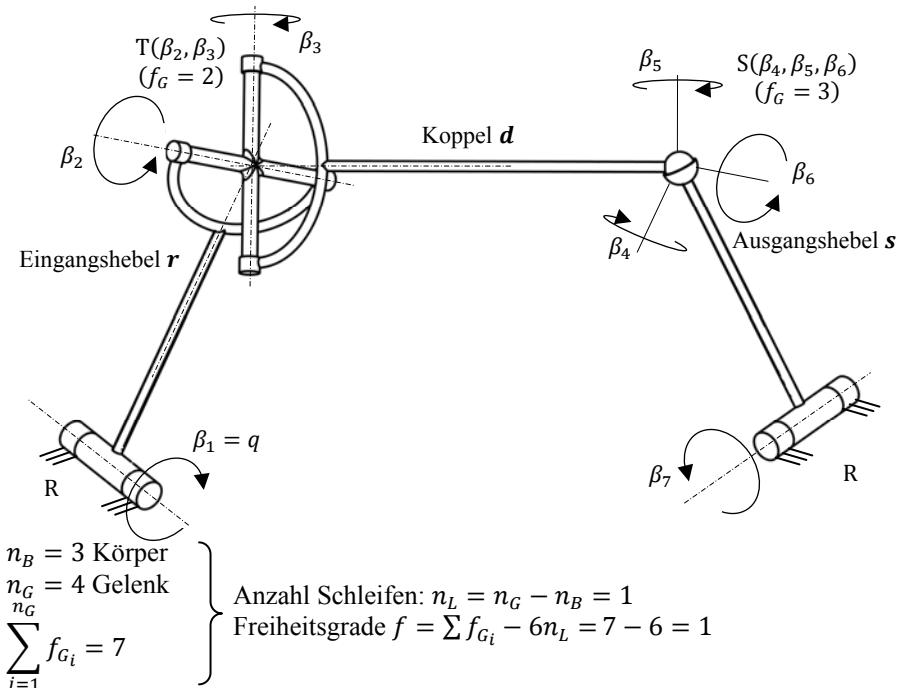


Abb. 3.23: Relativkinematik des räumlichen Gelenkvierecks

Für die Positionsanalyse der nichtlinearen Übertragungsbewegung kann z.B. die Verdrehung des linken Eingangshebels (Winkel β_1) als unabhängige Eingangskoordinate $q = \beta_1$ gewählt werden. Die Auslenkung des rechten Ausgangshebels (Winkel β_7) sowie die Bewegung der verbindenden Koppelstange kann damit berechnet werden. Insbesondere kann man zeigen, dass die in einem ersten Schritt zu berechnende Ausgangsgröße

$$\beta_7 = \beta_7 (\beta_1, \text{Geometrie der Anfangsstellung}), \quad (3.13)$$

explizit durch Lösung der Gleichung

$$A \cos \beta_7 + B \sin \beta_7 + C = 0 \quad (3.14)$$

gefunden werden kann. Es existieren für diese Gleichung, deren Koeffizienten A , B , und C von β_1 und der Geometrie der Anfangslage abhängen, i.a. zwei reelle Lösungen, von denen nur eine die Anfangsbedingungen des kinematischen Systems erfüllt. Die weiteren – bei Bedarf – zu berechnenden unbekannten Größen im Gelenkviereck sind die beiden Winkel am Kardangelenk β_2, β_3 und die drei Winkel am Kugelgelenk $\beta_4, \beta_5, \beta_6$.

Denkt man sich diese beiden Gelenke entsprechend Tabelle 3.2 aus Drehgelenken aufgebaut, so können diese Winkel rekursiv bestimmt werden. Für weitere Einzelheiten sei auf (Woernle 1988) verwiesen. Damit lässt sich die gesamte Lösungsstruktur der nichtlinearen Positionsanalyse des räumlichen Gelenkvierecks wie folgt darstellen:

$$\left. \begin{aligned} g_1(\beta_1, \beta_7) &= 0, \\ g_2(\beta_1, \beta_7, \beta_2) &= 0, \\ g_3(\beta_1, \beta_7, \beta_2, \beta_3) &= 0, \\ g_4(\beta_1, \beta_7, \beta_2, \beta_3, \beta_4) &= 0, \\ g_5(\beta_1, \beta_7, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5) &= 0, \\ g_6(\beta_1, \beta_7, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

Die bereits in Gl. (3.15) erkennbare rekursive (und häufig explizite) Lösungsstruktur des Bindungsgleichungssystems wird noch etwas klarer, wenn man die JACOBI-Matrix J_β der Bindungsgleichungen betrachtet:

$$J_\beta = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \times & & & & & \\ \times & \times & & & & \\ \times & \times & \times & & & \\ \times & \times & \times & \times & & \\ \times & \times & \times & \times & \times & \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \beta_7 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \end{bmatrix} \mathbf{0} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \\ g_6 \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Sie besitzt eine untere Dreiecksstruktur und entspricht damit im vorliegenden Beispiel des Gelenkvierecks einer rekursiv-expliziten Lösung der gesuchten Positionsgleichungen (siehe hierzu auch Hongyou Li 1990).

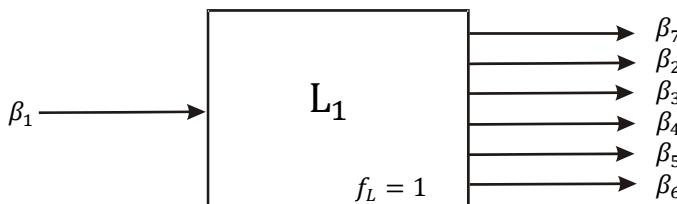


Abb. 3.24: Das räumliche Gelenkviereck als kinematischer Transformator

Das gesamte kinematische Übertragungsverhalten dieses Gelenkviereckes auf Positions-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsebene lässt sich

nun in dem nichtlinearen Übertragungselement zusammenfassen, das bereits weiter oben als *kinematischer Transformator* eingeführt worden ist (Abb. 3.24).

Für weitere Einzelheiten zur Kinematik des Gelenkvierecks sei auf die Literatur verwiesen ((Hiller 1981), (Woernle 1988), (Kecskeméthy 1993)).

3.5.4 Relative, absolute und globale Kinematik

Die Kinematik von komplexen Mehrkörpersystemen mit kinematischen Schleifen wurde zum Zweck einer günstigen Beschreibung der Bindungsungleichungen in *Relativkinematik* (ausgedrückt in Relativkoordinaten) und *Absolutkinematik* (ausgedrückt in Körper- bzw. Absolutkoordinaten) unterteilt. Die Analyse der Relativkinematik hat gezeigt, dass sie das Problem der Bindungsungleichungen von Mehrkörperschleifen beinhaltet. Aus diesen Betrachtungen wird auch klar, dass mit der Aufstellung und Lösung der Bindungsungleichungen der größte Aufwand verbunden ist. Was anschließend noch zu tun ist, lässt sich mit Hilfe einer *straight forward*-Vorgehensweise erledigen.

Die Relativkinematik kann auf Positions-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsebene wie folgt zusammengefasst werden:

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{q}) = \mathbf{0}, \quad (3.17)$$

$$\mathbf{J}_\beta \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{J}_\beta = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\beta}}, \quad (3.18)$$

$$\mathbf{J}_\beta \cdot \ddot{\boldsymbol{\beta}} + \dot{\mathbf{J}}_\beta \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{V} \cdot \ddot{\mathbf{q}}. \quad (3.19)$$

Dabei stellt $\boldsymbol{\beta}$ den $[n_B \times 1]$ -Vektor der Hilfsvariablen (relative bzw. natürliche (Gelenk-) Koordinaten) und \mathbf{q} den $[f \times 1]$ -Vektor der (unabhängigen) verallgemeinerten Koordinaten (f = Anzahl der Freiheitsgrade) dar. Die Gl. (3.17) beinhaltet das implizite System der Bindungsungleichungen, das nach der topologischen Aufbereitung modular vorliegt und bei kinematisch abbrechbaren Mehrkörpersystemen ggf. sogar explizit gelöst werden kann (Hiller et al. 1986, 87, 88). Die System-JACOBI-Matrix \mathbf{J}_β der Zeitableitungen Gl. (3.18) und Gl. (3.19) ergibt sich durch Zusammenbau der lokalen JACOBI-Matrizen der einzelnen Schleifen entlang der Diagonalen. Die System-Verteilungsmatrix \mathbf{V} ordnet die verallgemeinerten Koordinaten den ausgewählten Eingangsvariablen des Systems zu. Der in Gleichung Gl. (3.19) auftretende $[n_B \times 1]$ -Vektor $\dot{\mathbf{J}}_\beta \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}$ ergibt sich blockweise aus den entsprechenden Termen der *kinematischen Transformatoren*, wie gezeigt werden kann.

Die gesamte relative Kinematik kann nun in einer *black box* zusammengefasst werden, die als Eingänge die verallgemeinerten Koordinaten \mathbf{q} , sowie ihre Zeitableitungen $\dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$ und als Ausgänge die Hilfsvariablen $\boldsymbol{\beta}$ sowie deren Zeitableitungen $\dot{\boldsymbol{\beta}}, \ddot{\boldsymbol{\beta}}$ besitzt.

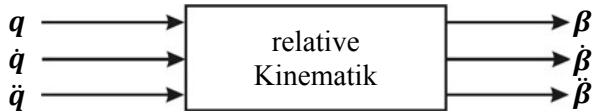


Abb. 3.25: Modul zur relativen Kinematik komplexer Mehrkörpersysteme

Nachdem die relative Kinematik modular vorliegt, kann die Absolutbewegung jedes beliebigen Körpers mit Hilfe elementar-kinematischer Ausdrücke aus der Vorwärtsskinematik (vgl. Abschnitt 3.4.1) rekursiv bestimmt werden.

Mit Zusammenfassung der sechs absoluten Positionskoordinaten des Körpers „ K_i “ im Vektor \mathbf{w}_i sowie aller $6n_B$ absoluten Positionskoordinaten der Körper im Vektor \mathbf{w} erhält man in rekursiver Form, ausgehend vom absoluten Bezugssystem, die Positionskinematik sowie deren zeitlichen Ableitungen als mittelbare Funktionen der relativen Kinematik:

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{w}_i(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{i-1}, \boldsymbol{\beta}, t), \quad (3.20)$$

$$\dot{\mathbf{w}}_i = \dot{\mathbf{w}}_i(\mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}_1, \dots, \dot{\mathbf{w}}_{i-1}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}, t), \quad (3.21)$$

$$\ddot{\mathbf{w}}_i = \ddot{\mathbf{w}}_i(\mathbf{w}, \dot{\mathbf{w}}, \ddot{\mathbf{w}}_1, \dots, \ddot{\mathbf{w}}_{i-1}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \ddot{\boldsymbol{\beta}}, t). \quad (3.22)$$

Die Gl. (3.20) bis Gl. (3.22) stellen die allgemeinste Art der Abhängigkeit der Absolutbewegung in rekursiver Form dar, wobei aus Gründen der Übersichtlichkeit eine geeignete Nummerierung der Körper – ausgehend vom Bezugssystem – angenommen wird. Tatsächlich wird es in den meisten Fällen möglich sein, die Absolutbewegung eines Körpers in Abhängigkeit der Absolutbewegung des *Vorgängers* sowie der Relativbewegung zwischen beiden Körpern darzustellen. Aufgrund der Verwendung der *kinematischen Differentiale* für die Berechnung der zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen benötigten partiellen Ableitungen (vgl. Kapitel 4.5) wird jedoch die Kenntnis der genauen Struktur der Abhängigkeiten in den Gln. (3.20) bis Gln. (3.22) nicht von Bedeutung sein.

Es genügt in der Folge die Absolutkinematik wieder als *black box* darzustellen, deren Eingänge die relativen Koordinaten sowie ihre zeitlichen Ableitungen und deren Ausgänge die Absolutkoordinaten samt zeitlichen Ableitungen bedeuten.

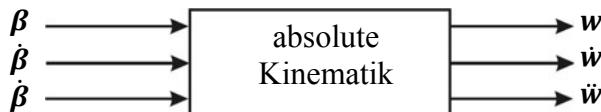


Abb. 3.26: Modul zu absoluten Kinematik komplexer Mehrkörpersysteme

Die Module *Relativkinematik* und *Absolutkinematik* lassen sich nun zu einem Block *globale Kinematik* zusammenfassen, der wiederum als eine *black box* betrachtet werden kann, welcher die gesamte kinematische Analyse des komplexen Mehrkörpersystems mit kinematischen Schleifen enthält (Abb. 3.27).

Mit Hilfe der globalen Kinematik lässt sich, bei vorgegebenen verallgemeinerten Koordinaten sowie ihren Zeitableitungen, die Bewegung jedes beliebigen Körpers im Mehrkörpersystem bestimmen. Dies wird die automatische Aufstellung der Bewegungsgleichungen mit Hilfe des Computers – numerisch oder symbolisch – in einer sehr effizienten Weise ermöglichen, wie in Kapitel 4 gezeigt wird.

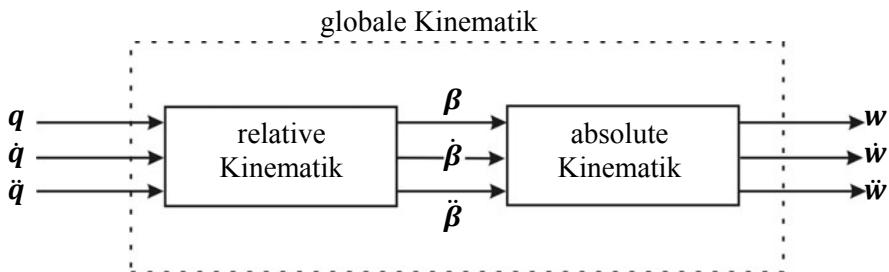


Abb. 3.27: Die globale Kinematik komplexer Mehrkörpersysteme

Beispiel: Doppelquerlenker-Radaufhängung

Am Beispiel der Doppelquerlenker-Radaufhängung, die in der Fahrwerkstechnik eine wichtige Rolle spielt, soll die in Abschnitt 3.4.3 unter der Überschrift *topologische Methode* vorgestellte Vorgehensweise zur kinematischen Analyse von Mehrkörpersystemen mit kinematischen Schleifen noch etwas näher ausgeführt werden (Abb. 3.28 und Abb. 3.29).

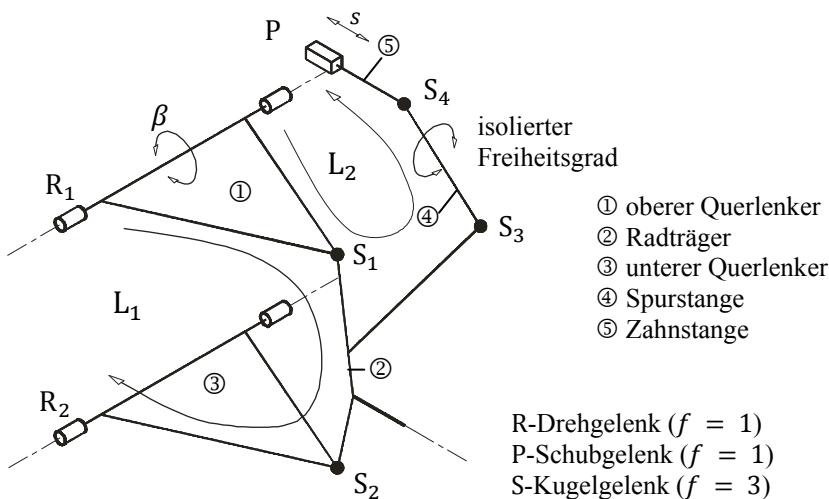


Abb. 3.28: Doppelquerlenker-Radaufhängung – Struktur

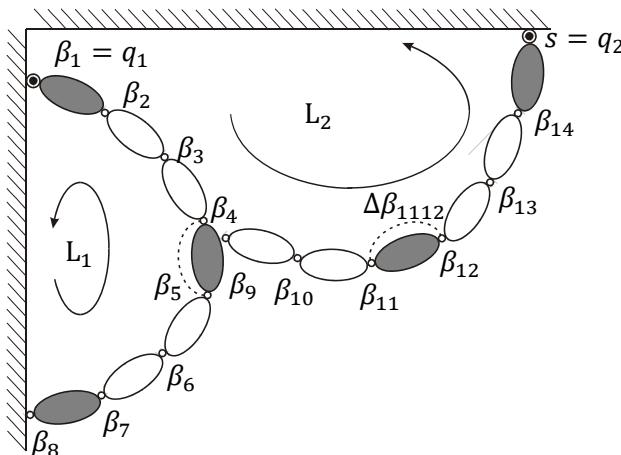


Abb. 3.29: Relativkinematik der Doppelquerlenker-Radaufhängung

Die topologische Struktur des Systems besteht aus zwei unabhängigen kinematischen Schleifen L_1 und L_2 , die über das Drehgelenk R_1 (Drehwinkel β_1) bzw. das Kugelgelenk S_1 (Kugelwinkel $\beta_2, \beta_3, \beta_4$) des oberen Querlenkers miteinander gekoppelt sind. Man erkennt, dass die Schleife L_1 , die auch den Radträger enthält, dem in Abschnitt 3.5.2 und 3.5.3 vor gestellten räumlichen Gelenkviereck entspricht, wobei der Radträger – sowohl oben als auch unten – über jeweils ein Kugelgelenk mit den Querlen-

kern verbunden ist. Das ist notwendig, weil darüber später die von der Einfederung β_1 unabhängige Lenkbewegung s in das System eingeleitet werden kann. Betrachtet man das räumliche Gelenkviereck der Schleife L_1 separat, so erkennt man, dass diese Schleife zwei Freiheitsgrade besitzt, einen für die Einfederung des Radträgers und einen zweiten unabhängigen Freiheitsgrad, der einer isolierten Drehung des Radträgers um die Verbindungslinie zwischen oberem und unterem Kugelgelenk der Querlenker entspricht, die jedoch für die Einleitung der Lenkbewegung über den Lenkmechanismus gemäß Abb. 3.28 benötigt wird.

In ähnlicher Weise kann die zweite kinematische Schleife L_2 der Doppelquerlenkerachse aufbereitet und anschließend mit der Schleife L_1 über lineare Gleichungen in den Variablen $\beta_2, \beta_3, \beta_4$ des Kugelgelenks S_1 (Abb. 3.28 bzw. Abb. 3.29) – entsprechend der Koppelungen der Schleifen an diesen Gelenken – zu dem bereits gezeigten Blockschaltbild für die Berechnung der Relativkinematik verknüpft werden (Abb. 3.30). Ein wichtiger Vorteil dieser Vorgehensweise, die in ähnlicher Weise auf eine große Zahl weiterer, technisch interessanter kinematischen Schleifen übertragen werden kann, ist u.a., dass nur diejenigen kinematischen Größen berechnet werden müssen, die für den weiteren Verlauf der Berechnung erforderlich sind. So werden etwa die Winkel an den Kugelgelenken im vorliegenden Beispiel nicht benötigt. Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass im vorliegenden Beispiel der Berechnungsablauf für das gesamte System in explizit-rekursiver Form durchgeführt werden kann. (Hiller et al. 1986, 87, 88), (Woernle 1988) und (Schnelle 1990).

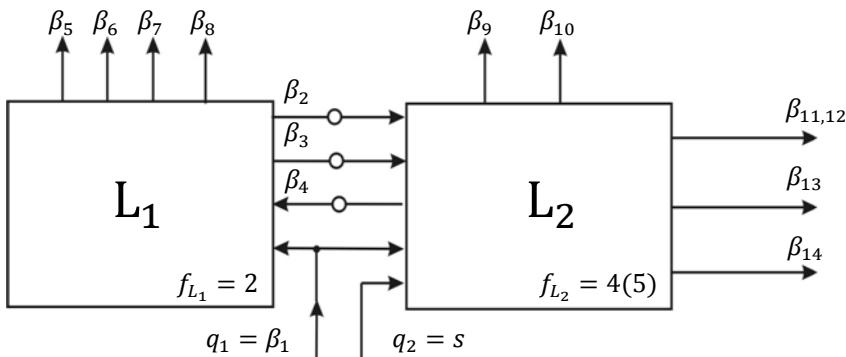


Abb. 3.30: Blockschaltbild der Relativkinematik der DoppelquerlenkerRadaufhängung

Bemerkung:

Bei den späteren Anwendungen (insbesondere in Kapitel 6 und Kapitel 12) wird für Blockschaltbilder die bereits in Abb. 3.22 angedeutete, vereinfachte Symbolik verwendet, um das nichtlineare Übertragungsverhalten innerhalb der jeweiligen kinematischen Schleifen zu unterstreichen. Im Falle der Doppelquerlenker-Radaufhängung wird also aus (Abb. 3.30) die (Abb. 3.31).

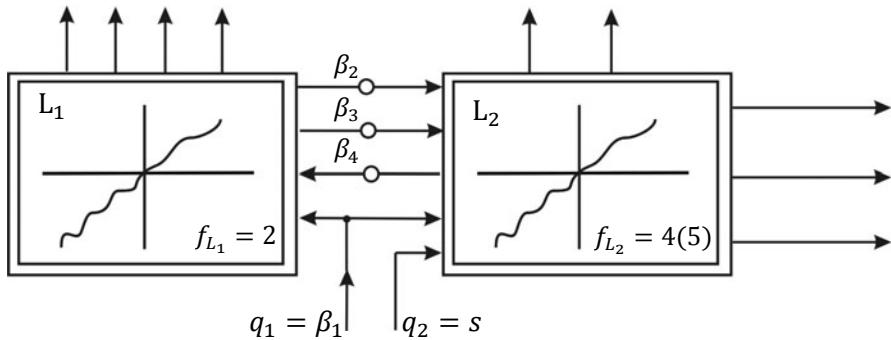


Abb. 3.31: Relativkinematik der Doppelquerlenker-Radaufhängung

4 Bewegungsgleichungen komplexer Mehrkörpersysteme

In diesem Kapitel werden zunächst einige Methoden aus der klassischen Mechanik zur Aufstellung von Bewegungsgleichungen in kurzer Form zusammengestellt (Abschnitt 4.1 bis 4.4). Alle diese Methoden können im Prinzip auch zur Modellierung der hier betrachteten Fahrzeuge, die als komplexe Mehrkörpersysteme angesehen werden können, verwendet werden. Allerdings entscheidet über die praktische Verwendbarkeit einer Methode letztendlich der damit verbundene Modellierungs- und Rechenaufwand, wobei die Bewegungsgleichungen für die hier betrachteten großen Systeme mit vielen Körpern und vielen kinematischen Schleifen mit Hilfe des Computers numerisch oder symbolisch erstellt werden sollen. Dieser Aufwand wird zum einen bestimmt von der Zahl der beschreibenden Koordinaten und von ihrer geometrischen Bedeutung; er wird weiterhin bestimmt von der Formulierung der Bindungsgleichungen, d.h. von der Modellierung der Kinematik des Systems, die sich direkt in der Anzahl der erforderlichen Rechenoperationen niederschlägt.

In Abschnitt 4.5 wird dann über das d'ALEMBERTsche Prinzip für starre Körper eine Methode zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen für Mechanismen und komplexe Mehrkörpersysteme vorgestellt, die sich an der kinematischen Struktur des Systems orientiert. Durch eine geeignete Aufbereitung der Bindungsgleichungen (s. Kapitel 3) lässt sich die Zahl der notwendigen Rechenoperationen gegenüber anderen Methoden stark reduzieren. Die Umsetzung dieser Methode, sowie ihre praktische Realisierung auf dem Computer wird dann in Kapitel 4.6 näher erläutert, s. auch (Hiller 1983), (Hiller et al. 1986, 87, 88), (Kecskeméthy 1993) und (Hiller 1995).

4.1 Fundamentalgleichung der Dynamik für Punktmassen

Gegeben ist ein System, bestehend aus

N Massenpunkten m_i , $i = 1, \dots, N$,

deren Lage im Koordinatensystem $K = \{O; x, y, z\}$ durch die Ortsvektoren \mathbf{r}_i beschrieben wird, mit

$$\mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{z}_i \end{bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{y}_i \\ \ddot{z}_i \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Auf die Massenpunkte wirken die eingeprägten Kräfte \mathbf{F}_i . Vorhandene Bindungen im System können durch Reaktionskräfte \mathbf{R}_i ersetzt werden. Das System von Bewegungsgleichungen lautet damit:

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.3)$$

Da diese Reaktionskräfte \mathbf{R}_i auf den, mit den Bindungen verträglichen virtuellen Verschiebungen $\delta \mathbf{r}_i$, keine virtuelle Arbeit δA leisten s. (Schiehlen und Eberhard 2004) oder (Hiller 1983), folgt wegen

$$\delta A = - \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (4.4)$$

die sogenannte *Fundamentalgleichung der Dynamik*:

$$\sum_{i=1}^N [\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i] \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (4.5)$$

Aus der Fundamentalgleichung für Punktmassen, die relativ einfach auf Systeme von starren Körpern erweitert werden kann (vgl. Abschnitt 4.5), lassen sich u.a. ableiten:

- das Prinzip von d'ALEMBERT,
- die LAGRANGEschen Gleichungen erster und zweiter Art,
- die HAMILTONschen Gleichungen,
- die APPELLschen Gleichungen.

In Kapitel 4.3 und Kapitel 4.4 werden die LAGRANGEschen Gleichungen erster und zweiter Art kurz besprochen; das Prinzip von d'ALEMBERT für starre Körper (Abschnitt 4.5) bildet die Basis für die später ausführlich zu behandelnde computergestützte Methode zur Aufstellung der Bewegungs-

gleichungen von Mehrkörpersystemen. Da in den hier betrachteten Mehrkörpersystemen im Wesentlichen nur holonome Bindungen auftreten, werden die APPELlschen Gleichungen nicht weiter erörtert. Dasselbe gilt für die HAMILTONschen Gleichungen, die primär für holonome Systeme aufgestellt worden sind. Dagegen wird in Kapitel 4.2 noch das für holonome und nichtholonome Systeme geltende JOURDAINsche Prinzip vorgestellt werden.

4.2 Das JOURDAINsche Prinzip

Für ein mechanisches System von Punktmasse gilt – ähnlich der Fundamentalgleichung aus dem vorigen Abschnitt – die Gleichung (Schiehlen und Eberhard 2004):

$$\sum_{i=1}^N [\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i] \cdot \delta \mathbf{v}_i = 0. \quad (4.6)$$

Diese Beziehung, die sich auch sinngemäß auf Systeme von starren Körpern erweitern lässt, sagt aus, dass die virtuelle Leistung der Reaktionskräfte dieses Systems verschwindet. Damit ist eine große Ähnlichkeit mit der Fundamentalgleichung der Dynamik (Gl. (4.5)) bzw. dem d'ALEMBERTschen Prinzip für Punktmasse zu erkennen; an Stelle der virtuellen Verschiebungen treten hier allerdings die virtuellen Geschwindigkeitsänderungen der Punktmasse. Bei nichtholonom Systemen müssen für die Berechnung der Reaktionskräfte die implizit auftretenden holonomen Bindungen noch um die entsprechenden Ausdrücke für die nichtholonom Bindungen ergänzt werden.

4.3 LAGRANGEsche Gleichungen erster Art für Punktmasse

Ausgehend von der Fundamentalgleichung der Dynamik Gl. (4.5) werden nachfolgend die LAGRANGEschen Gleichungen erster Art für Punktmasse angegeben. Dazu sei ein System gegeben mit

- N Massenpunkten m_i, \mathbf{r}_i ,
- g geometrischen Bindungen

$$f_\alpha(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, g, \quad (4.7)$$

- k kinematischen Bindungen

$$\phi_\beta = \sum_{i=1}^N \mathbf{l}_{i\beta}(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \cdot \mathbf{v}_i + d_\beta(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = 0, \quad (4.8)$$

$$\beta = 1, \dots, k.$$

Das System besitzt also $f = 3N - g - k$ Freiheitsgrade. Unter Verwendung der LAGRANGEschen Multiplikatoren $\lambda_\alpha, \mu_\beta$ lauten dann die LAGRANGEschen Gleichungen erster Art:

$$\begin{aligned} m_i \mathbf{a}_i &= \mathbf{F}_i + \sum_{\alpha=1}^g \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_i} + \sum_{\beta=1}^k \mu_\beta \mathbf{l}_{i\beta}, \quad i = 1, \dots, N, \\ f_\alpha(t; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) &= 0, \quad \alpha = 1, \dots, g, \\ \sum_{i=1}^N \mathbf{l}_{i\beta} \cdot \mathbf{v}_i + d_\beta &= 0, \quad \beta = 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Das ist ein System von $(3N + g + k)$ Gleichungen für die $(3N + g + k)$ Unbekannten:

$$x_i, y_i, z_i, \lambda_\alpha, \mu_\beta. \quad (4.10)$$

Die Reaktionskräfte \mathbf{R}_i des Systems erhält man aus Gl. (4.9) zu:

$$\mathbf{R}_i = \sum_{\alpha=1}^g \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_i} + \sum_{\beta=1}^k \mu_\beta \mathbf{l}_{i\beta}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.11)$$

Bemerkung: Unter Verwendung des Bewegungswinders $(\mathbf{v}_i, \boldsymbol{\omega}_i)$ lassen sich Impuls- und Drallsatz für den starren Körper formulieren. Auf diesem Weg können dann die LAGRANGEschen Gleichungen erster Art auch für Systeme von starren Körpern angeschrieben werden.

Vorteile der LAGRANGEschen Gleichungen erster Art:

- Sie gelten für holonome und nichtholonome Systeme.
- Die Reaktionskräfte lassen sich einfach berechnen.

Nachteil der LAGRANGEschen Gleichungen erster Art:

- Obwohl das System nur $f = 3N - g - k$ Freiheitsgrade besitzt, sind $3N + g + k$ Gleichungen zu lösen. Das gilt auch dann, wenn die

Reaktionskräfte nicht benötigt werden, weil nur die Bewegung des Systems von Interesse ist.

4.4 LAGRANGEsche Gleichungen zweiter Art für starre Körper

Durch Einführung der f unabhängigen verallgemeinerten Koordinaten (entsprechend der Zahl der Freiheitsgrade)

$$q_1, q_2, \dots, q_f \quad (4.12)$$

können aus der Fundamentalgleichung der Dynamik die LAGRANGEschen Gleichungen zweiter Art für *holonome Systeme* gewonnen werden:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, \dots, f. \quad (4.13)$$

Hierbei sind

T : die kinetische Energie des Systems,

Q_j : die verallgemeinerten (eingeprägten) Kräfte.

Für die kinetische Energie des starren Körpers gilt dabei:

$$T = T_{trans} + T_{rot} = \frac{1}{2} m v_s^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\Theta}_S \boldsymbol{\omega}, \quad (4.14)$$

v_s : Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes S,

$\boldsymbol{\omega}$: Winkelgeschwindigkeit des starren Körpers,

$\boldsymbol{\Theta}_S$: Trägheitstensor bezüglich S.

Falls das gewählte körperfeste Koordinatensystem ein Hauptachsensystem ist, so gilt für die Rotationsenergie:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} (A \omega_x^2 + B \omega_y^2 + C \omega_z^2), \quad (4.15)$$

mit

$$\boldsymbol{\Theta}_S = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

und den Hauptträgheitsmomenten A, B, C.

Vorteile der LAGRANGEschen Gleichungen zweiter Art:

- kleinstmögliche Zahl f von Gleichungen,
- für die Aufstellung sind nur die kinetische Energie T und die verallgemeinerten Kräfte Q_j erforderlich.

Nachteil der LAGRANGEschen Gleichungen zweiter Art:

- Der Aufwand zur Aufstellung der kinetischen Energie bei Mechanismen und komplexen Mehrkörpersystemen wird sehr groß.

Bemerkung: Die Bewegungsgleichungen für gebundene Systeme können auch gewonnen werden, indem die LAGRANGEschen Gleichungen zweiter Art zunächst für ein freies System angeschrieben werden, das dann über LAGRANGEsche Multiplikatoren um die Bindungsgleichungen erweitert wird. Man erhält wie bei LAGRANGE erster Art ein erweitertes System mit $(f + g)$ Gleichungen. Diese Methode bildet die Basis für einige Rechenprogramme zur Untersuchung von Mehrkörpersystemen.

4.5 Das d'ALEMBERTsche Prinzip

Man geht wieder von der Fundamentalgleichung der Dynamik für Punktmasse aus. Fasst man in Gl. (4.5) die Glieder „ $-m_i \mathbf{a}_i$ “ als Trägheitskräfte auf, so verkörpert diese Beziehung bereits das d'ALEMBERTsche Prinzip für Punktmasse. Die Erweiterung auf starre Körper geschieht einfach, indem man wieder den Bewegungswinder für starre Körper $(\mathbf{v}_i, \boldsymbol{\omega}_i)$ (Impuls- und Drallsatz) heranzieht. Für ein System von n_B starren Körpern erhält man damit die Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{n_B} [(m_i \ddot{\mathbf{r}}_{S_i} - \mathbf{F}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_{S_i} + (\boldsymbol{\Theta}_{S_i} \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\Theta}_{S_i} \boldsymbol{\omega}_i - \mathbf{T}_i) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_i] = 0, \quad (4.16)$$

mit

- $m_i, \boldsymbol{\Theta}_{S_i}$: Masse und Trägheitstensor für Körper „ i “,
 $\ddot{\mathbf{r}}_{S_i}$: Beschleunigung des Massenzentrums von Körper „ i “,
 $\boldsymbol{\omega}_i, \dot{\boldsymbol{\omega}}_i$: Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung von Körper „ i “,
 $\mathbf{F}_i, \mathbf{T}_i$: eingeprägte Kräfte und Momente am Körper „ i “,
 $\delta \mathbf{r}_{S_i}, \delta \boldsymbol{\varphi}_i$: virtuelle Verschiebungen.

In Gl. (4.16) stehen die absoluten virtuellen Verschiebungen der Körper „ i “, die aufgrund der Bindungen des Systems nicht unabhängig sind. Es ist

nun das Ziel, durch Einführung von f unabhängigen verallgemeinerten Koordinaten – entsprechend der Zahl der Freiheitsgrade des gesamten Systems q_1, \dots, q_f über die zugehörigen unabhängigen virtuellen Verschiebungen $\delta q_1, \dots, \delta q_f$ aus Gl. (4.16) folgende Beziehung abzuleiten:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{b} = \mathbf{Q}. \quad (4.17)$$

Hierbei ist

- \mathbf{q} : $[f \times 1]$ - Vektor der verallgemeinerten Koordinaten,
- \mathbf{M} : $[f \times f]$ - verallgemeinerte Massenmatrix,
- \mathbf{b} : $[f \times 1]$ - Vektor der verallgemeinerten Kreiselkräfte,
- \mathbf{Q} : $[f \times 1]$ - Vektor der verallgemeinerten eingeprägten Kräfte.

Über die Kinematik muss zunächst zwischen den absoluten, abhängigen Koordinaten und den unabhängigen Koordinaten ein Zusammenhang hergestellt werden. Dabei werden die Anteile von Translationsbewegung einerseits und Drehbewegung des Körpers „ i “ andererseits getrennt betrachtet. Um den Zusammenhang zwischen den vektoriellen Größen von Translation und Drehung mit den unabhängigen Koordinaten zu ermöglichen, muss auf eine Koordinatendarstellung übergegangen werden. Als Bezugssystem für die nachfolgenden Betrachtungen wird das Inertialsystem $K_E = (O_E; x_E, y_E, z_E)$ zugrunde gelegt. Damit lassen sich die folgenden allgemeinen Zusammenhänge angeben

$$\begin{aligned} \delta {}_E \mathbf{r}_{S_i} &= {}_E \mathbf{J}_{S_i} \delta \mathbf{q}, & {}_E \ddot{\mathbf{r}}_{S_i} &= {}_E \mathbf{J}_{S_i} \ddot{\mathbf{q}} + {}_E \mathbf{a}_{S_i}, \\ \delta {}_E \boldsymbol{\varphi}_i &= {}_E \mathbf{J}_{\varphi_i} \delta \mathbf{q}, & {}_E \dot{\boldsymbol{\omega}}_i &= {}_E \mathbf{J}_{\varphi_i} \ddot{\mathbf{q}} + {}_E \mathbf{a}_{\varphi_i}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

mit den JACOBI-Matrizen (ausgedrückt im System K_E)

$${}_E \mathbf{J}_{S_i} = \frac{\partial {}_E \mathbf{r}_{S_i}}{\partial \mathbf{q}}, \quad {}_E \mathbf{J}_{\varphi_i} = \frac{\partial {}_E \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial \mathbf{q}}. \quad (4.19)$$

Dann lauten die einzelnen Elemente der Bewegungsgleichungen:

- Massenmatrix:

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{n_B} [{}_E \mathbf{J}_{S_i}^T {}_E \mathbf{J}_{S_i} m_i + {}_E \mathbf{J}_{\varphi_i}^T {}_E \boldsymbol{\Theta}_{S_i} {}_E \mathbf{J}_{\varphi_i}]. \quad (4.20)$$

- Verallgemeinerte Kreiselkräfte:

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n_B} \left\{ {}_E J_{S_i}^T {}_E \mathbf{a}_{S_i} m_i + {}_E J_{\varphi_i}^T [{}_E \boldsymbol{\Theta}_{S_i} {}_E \mathbf{a}_{\varphi_i} + {}_E \boldsymbol{\omega}_i \times ({}_E \boldsymbol{\Theta}_{S_i} {}_E \boldsymbol{\omega}_i)] \right\}. \quad (4.21)$$

- Verallgemeinerte eingeprägte Kräfte:

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^{n_B} [{}_E J_{S_i}^T {}_E \mathbf{F}_i + {}_E J_{\varphi_i}^T {}_E \mathbf{T}_i]. \quad (4.22)$$

- Unbekannt sind hierbei immer noch die *JACOBI-Matrizen*

$${}_E \mathbf{J}_{S_i} = \frac{\partial {}_E \mathbf{r}_{S_i}}{\partial \mathbf{q}}, \quad {}_E \mathbf{J}_{\varphi_i} = \frac{\partial {}_E \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial \mathbf{q}} \quad (4.23)$$

- und die verallgemeinerten Beschleunigungsterme

$${}_E \mathbf{a}_{S_i} = \sum_{j=1}^f \sum_{k=1}^f \frac{\partial^2 {}_E \mathbf{r}_{S_i}}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (4.24)$$

$${}_E \mathbf{a}_{\varphi_i} = \sum_{j=1}^f \sum_{k=1}^f \frac{\partial^2 {}_E \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k. \quad (4.25)$$

Die Auswertung von Massenmatrix, verallgemeinerten Kreiselkräften und verallgemeinerten eingeprägten Kräften ist Gegenstand des folgenden Abschnitts. Die Auswertung wird jedoch nicht über die hier angegebenen Ausdrücke (Gln. (4.19), (4.24), (4.25)) erfolgen, da deren analytische Berechnung sehr aufwendig ist. Insbesondere der Rechenaufwand bei der Bestimmung der zweiten Ableitungen (Gln. (4.24) und (4.25)) wächst bei zunehmender Komplexität des Mehrkörpersystems und hier insbesondere wegen der kinematischen Schleifen und daraus resultierender zunehmender Komplexität des Bindungsgleichungssystems rapide an. Unter Verwendung der globalen Kinematik von komplexen Mehrkörpersystemen mit kinematischen Schleifen (relative Kinematik und absolute Kinematik) kann die Zahl der notwendigen Rechenoperationen gegenüber der herkömmlichen Methode sehr stark reduziert werden. Außerdem sei noch vermerkt, dass die Auswertung obiger Ausdrücke wiederum nicht von vorne herein an ein Koordinatensystem gebunden ist, sondern problemangepasst in den jeweils günstigsten Koordinatensystemen erfolgen kann. Demgegenüber musste für die Aufstellung der Beziehungen Gln. (4.19), (4.24) und (4.25) ein Koordinatensystem eingeführt werden. Damit ist man aber bereits festgelegt, mit den daraus resultierenden Einschränkungen.

4.6 Computergestütztes Aufstellen der Bewegungsgleichungen

Die Schwierigkeit bei der Herleitung der dynamischen Gleichungen komplexer Mehrkörpersysteme liegt hauptsächlich in der Einarbeitung der Bindungsgleichungen in den allgemeinen Formalismus. Hier spielt wieder die Kinematik eine zentrale Rolle, die geeignet aufbereitet werden muss. Weitere Problemstellungen, etwa die Bestimmung der eingeprägten Kräfte bzw. der Reaktionskräfte werden durch eine entsprechend aufbereitete Kinematik ebenfalls vereinfacht. Dies soll jedoch in diesem Zusammenhang nicht näher behandelt werden.

4.6.1 Kinematische Differentiale der Absolutkinematik

Vor der Aufstellung der dynamischen Gleichungen ist es günstig, die kinematische Analyse mit Beziehungen zur Bestimmung von partiellen Ableitungen zu ergänzen. Dabei werden insbesondere die Zusammenhänge zwischen den ersten und zweiten Differentialen der verallgemeinerten Koordinaten \mathbf{q} und den entsprechenden Differentialen der Absolutkoordinaten aller Körper „ i “, die zunächst in

$$\mathbf{w}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{s_i} \\ \boldsymbol{\varphi}_i \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

zusammengefasst werden können, benötigt. Aus der Betrachtung der Funktionen

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{w}_i(\mathbf{q}) \quad (4.27)$$

folgt für die ersten und zweiten Zeitableitungen:

$$\dot{\mathbf{w}}_i = \mathbf{J}_{\mathbf{w}_i} \dot{\mathbf{q}} , \quad (4.28)$$

$$\ddot{\mathbf{w}}_i = \mathbf{J}_{\mathbf{w}_i} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{a}_{\mathbf{w}_i} . \quad (4.29)$$

Die $[6 \times f]$ -JACOBI-Matrizen $\mathbf{J}_{\mathbf{w}_i}$ sowie die $[6 \times 1]$ -Vektoren $\mathbf{a}_{\mathbf{w}_i}$ sind noch unbekannt. Sie können durch Betrachtung analytischer Funktionen $\mathbf{w}_i(\mathbf{q})$ jeweils durch entsprechende partielle Ableitungen bestimmt werden:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{w}_i} = \frac{\partial \mathbf{w}_i}{\partial \mathbf{q}} , \quad (4.30)$$

$$\alpha_{w_i} = \sum_{j=1}^f \sum_{k=1}^f \frac{\partial^2 {}_E w_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k . \quad (4.31)$$

Die Bereitstellung von analytischen Ableitungen ist jedoch bei dem hochimpliziten Charakter der Bindungsgleichungen von komplexen Mehrkörpersystemen äußerst aufwendig. Sogar die Behandlung mit symbolischen Formelmanipulatoren (z. B. MATHEMATICA, MAPLE) kann problematisch sein, da die Zwischenergebnisse derart umfangreich sind, dass sie nachträglich praktisch nicht mehr zusammengefasst werden können. Deshalb wird eine alternative Lösungsmöglichkeit betrachtet, bei der keine analytischen Ableitungen durchgeführt werden, sondern diese auf kinematischem Weg erzeugt werden.

Erste Ableitungen der Absolutkoordinaten der Körper

Mit der Bereitstellung der globalen Kinematik für allgemeine komplexe Mehrkörpersysteme können, bei vorgegebener Position w_i , die Zeitableitungen \dot{w}_i der Absolutkoordinaten aller Körper für beliebige Werte der verallgemeinerten Geschwindigkeiten \dot{q} mit Hilfe elementar-kinematischer Ausdrücke angegeben werden (siehe Abschnitt 3.5). Speziell lassen sich Pseudo-Eingangsgeschwindigkeiten $\tilde{w}_i^{(j)}$ für besondere, dimensionslose Pseudo-Geschwindigkeitender verallgemeinerten Koordinaten:

$$\tilde{q}^{(j)} = e^{(j)} , \quad e^{(j)} = \begin{bmatrix} 0, \dots, 0, \underset{j}{\overset{1}{\check{1}}}, 0, \dots, 0 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

bestimmen, wobei die $[f \times 1]$ - Einheits-Vektoren als j -tes Element eine „1“, sonst nur Nullen besitzen. Da die tatsächlichen Zeitableitungen \dot{w}_i Linearkombinationen der verallgemeinerten Geschwindigkeiten \dot{q}_j sind, diese aber wiederum unabhängig voneinander sind, folgt:

$$\dot{w}_i = \sum_j \tilde{w}_i^{(j)} \dot{q}_j . \quad (4.33)$$

Der Vergleich von Gl. (4.33) mit Gl. (4.28) liefert schließlich die einfache Regel:

$$j\text{-te Spalte } |J_{w_i}| = \tilde{w}_i^{(j)} , \quad (4.34)$$

d.h. dass die einzelnen Spalten der gesuchten JACOBI-Matrizen gewissermaßen aus den Ausdrücken der vorab durchgeföhrten Kinematikanalyse (siehe insbesondere Abschnitt 3.5) gezielt herausgefiltert werden können.

Damit steht also eine Methode zur Verfügung, die eine besonders effiziente Berechnung der gesuchten partiellen Ableitungen in den JACOBI-Matrizen erlaubt. Man bezeichnet sie als *kinematische Differentiale der ersten Art* (Kecskeméthy 1993).

Zweite Ableitungen

Bei gegebener Position und Geschwindigkeit des Systems können die Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{w}}_i$ aller Körper ebenfalls für beliebige Werte der verallgemeinerten Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{q}}$ mit einfachen kinematischen Mitteln bestimmt werden (siehe Abschnitt 3.5). Speziell lassen sich auch die Pseudo-Eingangsbeschleunigungen $\tilde{\mathbf{w}}_i$ für verschiedene verallgemeinerte Beschleunigungen, d.h. hier speziell für $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ bestimmen. Aus Gl. (4.29) erhält man dann unmittelbar:

$$\mathbf{a}_{w_i} = \tilde{\mathbf{w}}_i . \quad (4.35)$$

Die Gln. (4.34) und (4.35) beinhalten alle benötigten Zusammenhänge zwischen den Differentialen der verallgemeinerten Koordinaten und den Absolutkoordinaten der Körper. Sie sind allein durch elementar-kinematische Ausdrücke – hauptsächlich unter Nutzung der Gesetze der Relativkinematik – bestimmbar. Sie werden deshalb als *kinematische Differentiale der zweiten Art* bezeichnet (Kecskeméthy 1993).

Kinematische Differentiale

Die Zeitableitungen der zusammengefassten Absolutkoordinaten können nun in ihre translatorischen und rotatorischen Anteile $\dot{\mathbf{s}}_i, \ddot{\mathbf{s}}_i$, bzw. $\omega_i, \dot{\omega}_i$ aufgespaltet werden. Die jeweiligen Zusammenhänge lauten entsprechend:

$$\dot{\mathbf{r}}_{S_i} = \sum_j \tilde{\mathbf{r}}_{S_i}^{(j)} \dot{q}_j , \quad \ddot{\mathbf{r}}_{S_i} = \sum_j \tilde{\mathbf{r}}_{S_i}^{(j)} \ddot{q}_j + \tilde{\mathbf{r}}_{S_i} , \quad (4.36)$$

$$\omega_i = \sum_j \tilde{\omega}_i^{(j)} \dot{q}_j , \quad \dot{\omega}_i = \sum_j \tilde{\omega}_i^{(j)} \ddot{q}_j + \tilde{\omega}_i . \quad (4.37)$$

Aus der Darstellung in den Gln. (4.36) und (4.37) wird ein weiterer Vorteil klar: während beim analytischen Weg die Zusammenhänge zwischen den Differentialen nur durch die Ableitungen einer bestimmten Komponentendarstellung aller Vektoren aufstellbar sind, gelingt es auf kinematischem Wege, die Zusammenhänge mit *physikalischen* Vektoren darzustellen, die unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems sind. Der Übergang auf Komponentendarstellung kann beliebig *hinausgezögert* werden, d. h. die

Wahl des Koordinatensystems kann zur Verringerung des Rechenaufwandes jedem auszuwertenden Term *angepasst* werden. Dies ermöglicht die Formulierung der Bewegungsgleichungen allgemeiner komplexer Mehrkörpersysteme in einer äußerst kompakten und effizienten Form.

4.6.2 Bewegungsgleichungen

Für die Dynamik eines Systems aus n_B starren Körpern wurde in Abschnitt 4.4 das d'ALEMBERTsche Prinzip angegeben:

$$\sum_{i=1}^{n_B} [(m_i \ddot{\mathbf{r}}_{S_i} - \mathbf{F}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_{S_i} + (\boldsymbol{\Theta}_{S_i} \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\Theta}_{S_i} \boldsymbol{\omega}_i - \mathbf{T}_i) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_i] = 0, \quad (4.38)$$

mit den Größen

- $m_i, \boldsymbol{\Theta}_{S_i}$: Masse und Trägheitstensor
- $\ddot{\mathbf{r}}_{S_i}$: Beschleunigung des Massenzentrums,
- $\boldsymbol{\omega}_i, \dot{\boldsymbol{\omega}}_i$: Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung,
- $\mathbf{F}_i, \mathbf{T}_i$: eingeprägte Kräfte und Momente,
- $\delta \mathbf{r}_{S_i}, \delta \boldsymbol{\varphi}_i$: virtuelle Verschiebungen der Translation und Rotation

jeweils für Körper „ i “.

Zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen aus Gl. (4.38) müssen die abhängigen virtuellen Verschiebungen $\delta \mathbf{r}_{S_i}, \delta \boldsymbol{\varphi}_i$ sowie die Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{r}}_{S_i}, \dot{\boldsymbol{\omega}}_i$ in Abhängigkeit der virtuellen Verschiebungen und der Beschleunigungen der unabhängigen verallgemeinerten Koordinaten ausgedrückt werden. Unter Beachtung der Tatsache, dass für die virtuellen Verschiebungen dieselben Transformationsregeln wie für die Geschwindigkeiten gelten, ergibt sich aus Gl. (4.36) und Gl. (4.37):

$$\delta \ddot{\mathbf{r}}_{S_i} = \sum_{j=1}^f \tilde{\mathbf{r}}_{S_i}^{(j)} \delta q_j, \quad \ddot{\mathbf{r}}_{S_i} = \sum_{j=1}^f \tilde{\mathbf{r}}_{S_i}^{(j)} \ddot{q}_j + \tilde{\mathbf{r}}_{S_i}, \quad (4.39)$$

$$\delta \dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \sum_{j=1}^f \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(j)} \delta q_j, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \sum_{j=1}^f \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(j)} \ddot{q}_j + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i. \quad (4.40)$$

Einsetzen der Gln. (4.39) und (4.40) in Gl. (4.38) liefert, unter Berücksichtigung der Unabhängigkeit der virtuellen Verschiebungen δq_j , die Bewegungsgleichungen in der minimalen Form:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{b} = \mathbf{Q} . \quad (4.41)$$

Die Koeffizienten der verallgemeinerten $[f \times f]$ -Massenmatrix \mathbf{M} sowie des $[f \times 1]$ -Vektors der verallgemeinerten Kreisel- und Zentrifugalkräfte \mathbf{b} sowie des $[f \times 1]$ -Vektors der verallgemeinerten eingeprägten Kräfte \mathbf{Q} ergeben sich dabei wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} M_{j,k} &= \sum_{i=1}^{n_B} \left[m_i \tilde{\mathbf{r}}_{S_i}^{(j)} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_{S_i}^{(k)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(j)} \cdot (\boldsymbol{\Theta}_{S_i} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(k)}) \right] \\ b_j &= \sum_{i=1}^{n_B} \left[m_i \tilde{\mathbf{r}}_{S_i}^{(j)} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_{S_i} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(j)} \cdot (\boldsymbol{\Theta}_{S_i} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\Theta}_{S_i} \boldsymbol{\omega}_i) \right] \\ Q_j &= \sum_{i=1}^{n_B} \left[\tilde{\mathbf{r}}_{S_i}^{(j)} \cdot \mathbf{F}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(j)} \cdot \mathbf{T}_i \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.42)$$

Die Gln. (4.42) können bei bekannter globaler Kinematik gemäß Abschnitt 3.5 unmittelbar ausgewertet werden. Dabei kann die Auswertung einerseits auf rein numerischer Basis erfolgen, d. h. die kinematischen Differentiale werden ohne Rücksicht auf redundante Operationen direkt durch entsprechende Wiederholungen der globalen Kinematik mit geeigneten Eingängen bestimmt. Andererseits können bei der Bildung der kinematischen Differentiale die redundanten Operationen durch analytische Aufbereitung eliminiert werden. Dann erhält man die Bewegungsgleichungen in zusammengefasster, symbolischer Form. Der numerische Zusammenhang hat den Vorteil einer sehr schnellen Realisierung (etwa zu einmaligen Simulationen), während der symbolische Zugang eine optimierte Fassung der Bewegungsgleichungen (z. B. für Variantenkonstruktionen) liefert. Beiden Darstellungen ist jedoch gemeinsam, dass die Darstellung von Gl. (4.42) unabhängig von Koordinatendarstellungen ist. Damit können die einzelnen Terme, je nach Anwendung, in jeweils günstig gewählten Komponentendarstellungen ausgewertet werden (Abb. 4.1).

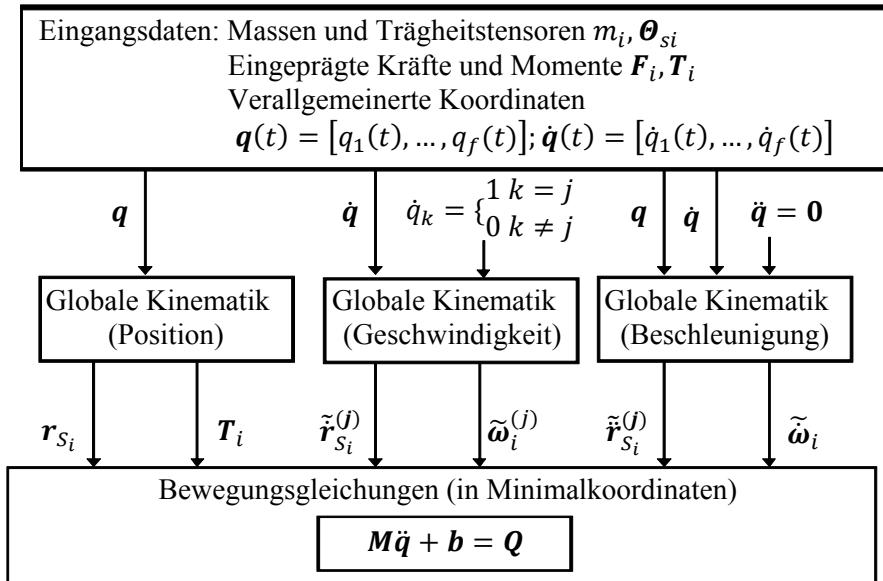


Abb. 4.1: Bewegungsgleichungen komplexer Mehrkörpersysteme mit Hilfe *kinematischer Differentiale*

4.6.3 Dynamik einer räumlichen Mehrkörperschleife

Die in der Folge exemplarisch behandelte Mehrkörperschleife in Abb. 4.2 besitzt ein Kugelgelenk und vier Drehgelenke mit den Einheitsvektoren $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ und \mathbf{u}_4 für die jeweiligen Drehachsen. Alle Körper, mit Ausnahme des Koppelkörpers (Massenmittelpunkt S_m) und dem ruhenden Gestell, sind als masselose Körper modelliert, um die Dynamik zu vereinfachen. Die Schleife enthält sieben natürliche Koordinaten: die vier relativen Winkel $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ an den vier Drehgelenken und drei weitere Winkel am Kugelgelenk S_1 , die jedoch in diesem Zusammenhang nicht benötigt werden. Das System besitzt einen Freiheitsgrad, für den eine skalare Bewegungsgleichung aufgestellt werden kann. Grundsätzlich kann jede Koordinate als verallgemeinerte Koordinate gewählt werden. Sowohl wegen der Nähe dieses Beispiels zu technischen Anwendungen als auch um Singularitäten zu vermeiden, wählt man sinnvollerweise die Koordinate $\beta_1 = q$ als Eingang. Die Kinematik des Systems, d.h. die nichtlinearen Gleichungen für Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung als Funktion der Eingangsvariablen β_1 und ihrer Ableitungen, werden nachfolgend aufgestellt (Hiller 1995).

„Kern“-System impliziter Gleichungen

Um einen impliziten Kern aus Zwangsgleichungen minimaler Ordnung zu erhalten, wählt man ein charakteristisches Gelenkpaar mit möglichst vielen Freiheitsgraden aus (Woernle 1988). In diesem Beispiel können die beiden Drehgelenke R_2, R_3 sich senkrecht schneidenden Achsen \mathbf{u}_2 und \mathbf{u}_3 als ein Kardangelenk mit zwei Freiheitsgraden interpretieren. Das zweite Gelenk des charakteristischen Gelenkpaares ist das Kugelgelenk S_1 mit drei Gelenkkoordinaten. Kardangelenk und Kugelgelenk bilden die charakteristische Gelenkpaarung der Schleife. Als charakteristischen Bindungsparameter erhält man deren (skalaren) Abstand (Abb. 4.2):

$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{d} = d^2. \quad (4.43)$$

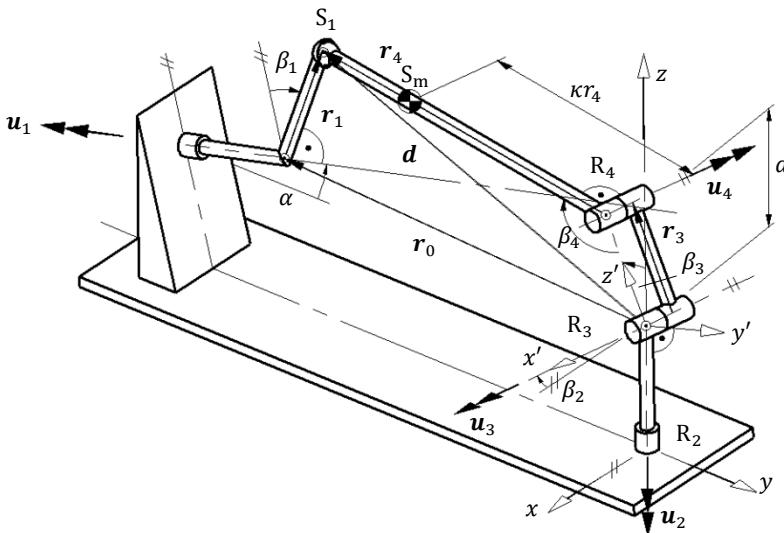


Abb. 4.2: Räumliche Mehrkörperschleife

Der Vektor \mathbf{d} lässt sich einerseits bezüglich des *unteren* Segments als $\mathbf{d} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1$, andererseits bezüglich des *oberen* Segments als $\mathbf{d} = \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4$ darstellen. Daraus ergeben sich zwei Ausdrücke für den Abstand d^2 , die identisch sein müssen. Quadrieren der entsprechenden Terme mit den Projektionen

$$\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}_1 = (r_1 a \cos \alpha) \cos \beta_1, \quad \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_4 = -(r_3 r_4) \cos \beta_4, \quad (4.44)$$

liefert nach Gleichsetzen die explizite Beziehung für den Winkel β_4 :

$$\cos \beta_4 = -C_1 \cos \beta_1 + C_2, \quad (4.45)$$

$$C_1 = \frac{r_1 a \cos \alpha}{r_3 r_4}, \quad C_2 = \frac{r_3^2 + r_4^2 - r_0^2 - r_1^2}{2r_3 r_4}. \quad (4.46)$$

Die Gl.(4.45) ergibt für die Funktion $\beta_4(\beta_1)$ zwei symmetrische Lösungen, wovon nur eine mit der Anfangsstellung der kinematischen Schleife verträglich ist.

Komplementäre Winkel

Die komplementären Variablen sind in diesem Fall die Winkel β_2 und β_3 , die auf einfache Weise aus den Projektionen

$$\cos \beta_2 = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{u}_3, \quad \sin \beta_2 = \mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{u}'_3 \times \mathbf{e}_x), \quad (4.47)$$

$$\cos \beta_3 = -\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{e}'_z, \quad \sin \beta_3 = \mathbf{u}_3 \cdot (\mathbf{e}'_z \times \mathbf{u}_2) \quad (4.48)$$

berechnet werden können. Hier können die Einheitsvektoren \mathbf{u}_3 und \mathbf{e}'_z mit Hilfe bereits bekannter Vektoren ausgedrückt werden: Für \mathbf{u}_3 erhält man zwei mögliche Lösungen:

$$\mathbf{u}_3 = \pm \frac{\mathbf{d} \times \mathbf{u}_2}{|\mathbf{d} \times \mathbf{u}_2|}. \quad (4.49)$$

Für \mathbf{e}'_z erhält man:

$$\mathbf{e}'_z = \frac{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}'_z)\mathbf{d} - [\mathbf{u}_3 \cdot (\mathbf{d} \times \mathbf{e}'_z)] \cdot (\mathbf{d} \times \mathbf{u}_3)}{d^2}, \quad (4.50)$$

wobei sich die Projektionen $\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}'_z$ und $\mathbf{u}_3 \cdot (\mathbf{d} \times \mathbf{e}'_z)$ im $(x, y, z)'$ System bestimmen lassen. Die explizite Auswertung von Gl. (4.47) bis Gl. (4.50) liefert:

$$\cos \beta_2 = \pm \frac{b \cos \alpha + r_1 \cos \beta_1 \sin \alpha}{K_1(\beta_1)}, \quad (4.51)$$

$$\sin \beta_2 = \pm \frac{r_1 \sin \beta_1}{K_1(\beta_1)}, \quad (4.52)$$

$$\cos \beta_3 = K_5(\beta_1, \beta_2, \beta_4), \quad (4.53)$$

$$\sin \beta_3 = -K_3(\beta_1, \beta_2, \beta_4) \sin \beta_2 - K_4(\beta_1, \beta_2, \beta_4) \cos \beta_2 \quad (4.54)$$

mit den Abkürzungen

$$K_1(\beta_1) = \sqrt{[(b \cos \alpha + r_1 \cos \beta_1 \sin \alpha)^2 + r_1^2 \sin^2 \beta_1]}, \quad (4.55)$$

$$K_2(\beta_4) = r_4^2 + r_3^2 - 2r_3 r_4 \cos \beta_4, \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} K_3(\beta_1, \beta_2, \beta_4) &= \frac{r_1 \sin \beta_1 (r_4 \cos \beta_4 - r_3)}{K_2(\beta_4)} \\ &+ \frac{r_4 \sin \beta_4}{K_2(\beta_4)} (a \sin \beta_2 - b \sin \alpha \sin \beta_2 + r_1 \sin \beta_2 \cos \beta_1 \cos \alpha), \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} K_4(\beta_1, \beta_2, \beta_4) &= \frac{(r_4 \cos \beta_4 - r_3)(b \cos \alpha + r_1 \cos \beta_1 \sin \alpha)}{K_2(\beta_4)} \\ &+ \frac{r_4 \sin \beta_4}{K_2(\beta_4)} (a \cos \beta_2 - b \sin \alpha \cos \beta_2 + r_1 \cos \beta_2 \cos \alpha), \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} K_5(\beta_1, \beta_2, \beta_4) &= \frac{(r_3 - r_4 \cos \beta_4)(a - b \sin \alpha + r_1 \cos \beta_1 \cos \alpha)}{K_2(\beta_4)} \\ &+ \frac{r_4 \sin \beta_4}{K_2(\beta_4)} (b \cos \alpha \cos \beta_2 + r_1 \sin \beta_1 \sin \beta_2 + r_1 \cos \beta_1 \cos \beta_2 \sin \alpha). \end{aligned} \quad (4.59)$$

Alle Vektoren können nun bezüglich jedes beliebigen Koordinatensystems dargestellt werden. Die Positionskinematik ist somit vollständig.

Zeitliche Ableitungen der relativen Winkel

Für die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\beta}_4$ folgt aus der Ableitung von Gl. (4.45) und (4.46) sofort:

$$\dot{\beta}_4 = D_{41}\dot{\beta}_1, \quad D_{41} = -C_1 \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_4}. \quad (4.60)$$

Hier wird der Koeffizient D_{41} für $\sin \beta_4 = 0$, d. h. für parallele Vektoren \mathbf{r}_3 und \mathbf{r}_4 , singulär. Dieses kann jedoch im vorliegenden Fall ausgeschlossen werden. Die Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\beta}_2$ und $\dot{\beta}_3$ könnten durch die Ableitung der Gl. (4.47) bis (4.48) bestimmt werden. Es ist jedoch bequemer, diese Werte mit Hilfe der Geschwindigkeit des Vektors \mathbf{d} zu bestimmen. Zwei Bestimmungsgleichungen für diesen Vektor wurden schon im vorhergehenden Schritt aufgestellt. Aus der Gleichheit der entsprechenden Ableitungen folgt dann:

$$(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{r}_1) \dot{\beta}_1 = (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{d}) \dot{\beta}_2 + (\mathbf{u}_3 \times \mathbf{d}) \dot{\beta}_3 + (\mathbf{u}_4 \times \mathbf{r}_4) \dot{\beta}_4, \quad (4.61)$$

In Gl. (4.61) sind die zwei unbekannten Größen $\dot{\beta}_2$ und $\dot{\beta}_3$ enthalten. Unter Beachtung, dass die Einheitsvektoren \mathbf{u}_3 und \mathbf{u}_4 senkrecht zum Einheitsvektor \mathbf{u}_2 sind, erhält man aus Gl. (4.61) durch Projektion auf \mathbf{u}_3 bzw. \mathbf{u}_2 zwei unabhängige skalare Gleichungen für $\dot{\beta}_2$ und $\dot{\beta}_3$. Die entsprechenden Skalarprodukte führen zu:

$$\dot{\beta}_2 = D_{21} \dot{\beta}_1, \quad \dot{\beta}_3 = D_{31} \dot{\beta}_1 + D_{34} \dot{\beta}_4. \quad (4.62)$$

Mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} D_{21} &= \frac{\mathbf{u}_3 \cdot (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{r}_1)}{\mathbf{u}_3 \cdot (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{d})}, & D_{34} &= -\frac{\mathbf{u}_2 \cdot (\mathbf{u}_4 \times \mathbf{r}_4)}{\mathbf{u}_2 \cdot (\mathbf{u}_3 \times \mathbf{d})} \\ D_{31} &= \frac{\mathbf{u}_2 \cdot (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{r}_1)}{\mathbf{u}_2 \cdot (\mathbf{u}_3 \times \mathbf{d})}, \end{aligned} \quad (4.63)$$

oder in skalaren Größen ausgedrückt:

$$\begin{aligned} D_{21} &= \frac{\mathbf{r}_1 (\cos \beta_1 \cos \beta_2 + \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \alpha)}{\mathbf{r}_1 (\cos \beta_1 \cos \beta_2 \sin \alpha + \sin \beta_1 \sin \beta_2) + b \cos \beta_2 \sin \alpha}, \\ D_{31} &= \frac{\mathbf{r}_1 \sin \beta_1 \cos \alpha}{\mathbf{r}_3 \sin \beta_3 + \mathbf{r}_4 \sin(\beta_4 - \beta_3)}, \\ D_{34} &= \frac{\mathbf{r}_4 \sin(\beta_3 - \beta_4)}{\mathbf{r}_3 \sin \beta_3 + \mathbf{r}_4 \sin(\beta_4 - \beta_3)}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Diese Koeffizienten werden für $\mathbf{u}_2 \cdot (\mathbf{u}_3 \times \mathbf{d}) = 0$, d.h. wenn der Abstandsvektor \mathbf{d} parallel zu \mathbf{u}_2 ist, singulär. Auch diese besondere Konfiguration lässt sich jedoch im vorliegenden Fall ausschließen. Mit der gewählten Eingangsvariablen β_1 ist damit eine singularitätsfreie Simulation der Kinematik und Dynamik dieser Mehrkörperschleife gewährleistet. Wegen den Gln. (4.62) können keine weiteren unabhängigen Bedingungen für die Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\beta}_2$ und $\dot{\beta}_3$ aufgestellt werden. Durch Projektion von Gl. (4.61) auf die Richtung des Vektors \mathbf{d} erhält man nur die Bedingung:

$$\mathbf{d} \cdot (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{r}_1) \dot{\beta}_1 = \mathbf{d} \cdot (\mathbf{u}_4 \times \mathbf{r}_4) \dot{\beta}_4, \quad (4.65)$$

die äquivalent zu Gl. (4.60) ist. Dies kann nach Einsetzen von $\mathbf{d} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1$ in die linke Seite, bzw. von $\mathbf{d} = \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4$ in die rechte Seite von Gl. (4.61) gezeigt werden. Für die Winkelbeschleunigung erhält man durch die Ableitung von Gl. (4.60):

$$\ddot{\beta}_4 = D_{41}\ddot{\beta}_1 - E_4, \quad E_4 = \frac{C_1 \cos \beta_1 (\dot{\beta}_2)^2 + \cos \beta_4 (\dot{\beta}_4)^2}{\sin \beta_4}. \quad (4.66)$$

Die Winkelbeschleunigungen $\ddot{\beta}_2$ und $\ddot{\beta}_3$ könnten entsprechend durch Ableitung der Gl. (4.62) bestimmt werden. Einfacher ist jedoch die Ableitung von Gl. (4.61) mit nachfolgender Wiederholung der Projektionen, die schon zur Bestimmung der Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\beta}_2$ und $\dot{\beta}_3$ benutzt wurden. Die Differentiation von Gl. (4.61) führt zu:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{r}_1)\ddot{\beta}_1 + (\mathbf{u}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1)\dot{\beta}_1 \\ = (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{d})\ddot{\beta}_2 + (\mathbf{u}_2 \times \dot{\mathbf{d}})\dot{\beta}_2 + (\mathbf{u}_3 \times \mathbf{d})\ddot{\beta}_3 \\ + (\dot{\mathbf{u}}_3 \times \mathbf{d})\dot{\beta}_3 + (\mathbf{u}_3 \times \dot{\mathbf{d}})\dot{\beta}_3 + (\mathbf{u}_4 \times \mathbf{r}_4)\ddot{\beta}_4 \\ + (\dot{\mathbf{u}}_4 \times \mathbf{r}_4)\dot{\beta}_4 + (\mathbf{u}_4 \times \dot{\mathbf{r}}_4)\dot{\beta}_4. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Skalarmultiplikation von Gl. (4.67) mit \mathbf{u}_3 bzw. \mathbf{u}_2 liefert:

$$\begin{aligned} \ddot{\beta}_2 &= D_{21}\ddot{\beta}_1 + E_2, \\ \ddot{\beta}_3 &= D_{31}\ddot{\beta}_1 + D_{34}\ddot{\beta}_4 + E_3. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Die Koeffizienten E_2 und E_3 hängen von Spatprodukten aus Ortsvektoren und Geschwindigkeiten ab. Nach der Elimination der verschwindenden Terme $\mathbf{u}_2 \cdot (\dot{\mathbf{u}}_3 \times \mathbf{d})$ und $\mathbf{u}_2 \cdot (\dot{\mathbf{u}}_4 \times \mathbf{r}_4)$ erhält man:

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{\mathbf{u}_3 \cdot (\mathbf{u}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1)\dot{\beta}_1 - \mathbf{u}_3 \cdot (\dot{\mathbf{u}}_4 \times \mathbf{r}_4)\dot{\beta}_4 - \mathbf{u}_3 \cdot (\dot{\mathbf{u}}_3 \times \mathbf{d})\dot{\beta}_3 - \mathbf{u}_3 \cdot (\mathbf{u}_2 \times \dot{\mathbf{d}})\dot{\beta}_2}{\mathbf{u}_3 \cdot (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{d})}, \\ E_3 &= \frac{\mathbf{u}_2 \cdot (\mathbf{u}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1)\dot{\beta}_1 - \mathbf{u}_2 \cdot (\dot{\mathbf{u}}_4 \times \dot{\mathbf{r}}_4)\dot{\beta}_4 - \mathbf{u}_2 \cdot (\dot{\mathbf{u}}_3 \times \mathbf{d})\dot{\beta}_3}{\mathbf{u}_2 \cdot (\mathbf{u}_3 \times \mathbf{d})}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Die auftretenden Geschwindigkeitsvektoren können in Abhängigkeit der Relativgeschwindigkeiten $\dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2, \dot{\beta}_3, \dot{\beta}_4$ dargestellt werden:

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{r}_1)\dot{\beta}_1, \quad \dot{\mathbf{u}}_3 = -\dot{\mathbf{u}}_4 = (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3)\dot{\beta}_2, \quad (4.70)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_4 = (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{r}_4)\dot{\beta}_2 + (\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_4)[\dot{\beta}_3 - \dot{\beta}_4]. \quad (4.71)$$

Die explizite Auswertung der auftretenden Spatprodukte im jeweils geeigneten Koordinatensystem liefert:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_3 \cdot (\mathbf{u}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1)\dot{\beta}_1 &= r_1 \dot{\beta}_1^2 (\sin \beta_1 \cos \beta_2 - \cos \beta_1 \sin \beta_2 \sin \alpha), \\ \mathbf{u}_3 \cdot (\dot{\mathbf{u}}_4 \times \mathbf{r}_4)\dot{\beta}_4 &= -r_4 \cos(\beta_4 - \beta_3) \dot{\beta}_2 \dot{\beta}_4 \\ \mathbf{u}_3 \cdot (\dot{\mathbf{u}}_3 \times \mathbf{d})\dot{\beta}_3 &= \dot{\beta}_2 \dot{\beta}_3 (r_4 \cos(\beta_4 - \beta_3)) - r_3 \cos \beta_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_3 \cdot (\mathbf{u}_2 \times \dot{\mathbf{d}}) \dot{\beta}_2 &= r_1 \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 (\sin \beta_1 \cos \beta_2 \sin \alpha - \sin \beta_2 \cos \beta_1) \\
\mathbf{u}_3 \cdot (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{d}) &= -r_1 \cos \beta_1 \cos \beta_2 \sin \alpha - b \cos \beta_2 \cos \alpha - r_1 \sin \beta_1 \sin \beta_2 , \\
\mathbf{u}_2 \cdot (\mathbf{u}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1) \dot{\beta}_1 &= \dot{\beta}_1^2 r_1 \cos \beta_1 \cos \alpha , \\
\mathbf{u}_2 \cdot (\mathbf{u}_4 \times \dot{\mathbf{r}}_4) \dot{\beta}_4 &= r_4 \dot{\beta}_4 (\dot{\beta}_3 + \dot{\beta}_4) \cos(\beta_4 - \beta_3) , \\
\mathbf{u}_2 \cdot (\mathbf{u}_3 \times \dot{\mathbf{d}}) \dot{\beta}_3 &= r_1 \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 (\cos \beta_1 \sin \beta_2 - \cos \beta_2 \sin \beta_1 \sin \alpha) , \\
\mathbf{u}_2 \cdot (\mathbf{u}_3 \times \mathbf{d}) &= r_3 \sin \beta_3 + r_4 \sin(\beta_4 - \beta_3) .
\end{aligned}$$

Absolute Kinematik

Für die Bestimmung der Bewegungsgleichungen ist nur die absolute Kinematik der massebehafteten Körper notwendig. So wird im Folgenden also nur die absolute Geschwindigkeit und Beschleunigung des Massenmittelpunktes S_m , sowie die absolute Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung desselben Körpers betrachtet. Für die entsprechenden Ableitungen erhält man:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{u}_2 \dot{\beta}_2 + \mathbf{u}_3 [\dot{\beta}_3 - \dot{\beta}_4] , \quad (4.72)$$

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{d}} - [1 - \kappa] \dot{\mathbf{r}}_4 = (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{r}_1) \dot{\beta}_1 - [1 - \kappa] (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_4) , \quad (4.73)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{u}_2 \ddot{\beta}_2 + \mathbf{u}_3 [\ddot{\beta}_3 - \ddot{\beta}_4] + \boldsymbol{a}_\varphi , \quad (4.74)$$

$$\ddot{\mathbf{s}} = (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{r}_1) \ddot{\beta}_1 - [1 - \kappa] (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_4) + \boldsymbol{a}_s . \quad (4.75)$$

Die Beschleunigungsterme \boldsymbol{a}_s und \boldsymbol{a}_φ lassen sich mit den vorher definierten Geschwindigkeiten beschreiben als

$$\boldsymbol{a}_\varphi = (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3) [\dot{\beta}_3 - \dot{\beta}_4] \dot{\beta}_2 , \quad (4.76)$$

$$\boldsymbol{a}_s = (\mathbf{u}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1) \dot{\beta}_1 + [1 - \kappa] (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_4) . \quad (4.77)$$

Die Auswertung der entsprechenden Vektorausdrücke lässt sich am einfachsten in Komponenten durchführen. Man erhält z. B. für die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ in Komponentenschreibweise:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \cos \beta_2 (\dot{\beta}_3 - \dot{\beta}_4) \\ -\sin \beta_2 (\dot{\beta}_3 - \dot{\beta}_4) \\ -\dot{\beta}_2 \end{pmatrix} . \quad (4.78)$$

Kinematische Differentiale

Da das System nur einen Freiheitsgrad besitzt, müssen nur einspaltige JACOBI-Matrizen aufgestellt werden. Hierfür müssen lediglich die im vorherigen Abschnitt bereits aufgestellten Geschwindigkeitsterme nochmals für den speziellen Eingang $\tilde{\beta}_1 = 1$ formuliert werden. Aus den entsprechenden Gleichungen erhält man:

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\beta}_4 = D_{41} \\ \tilde{\beta}_2 = D_{21} \\ \tilde{\beta}_3 = D_{31} + D_{34}\tilde{\beta}_4 \end{array} \right\}, \quad (4.79)$$

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{u}_2\tilde{\beta}_2 + \mathbf{u}_3[\tilde{\beta}_3 - \tilde{\beta}_4] \\ \tilde{\mathbf{s}} = (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{r}_1) - [1 - \kappa](\tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_4) \end{array} \right\}. \quad (4.80)$$

Für die Pseudo-Beschleunigungen (das heißt die Beschleunigungen für die spezielle Beschleunigungsvorgabe $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$) erhält man analog:

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\beta}_4 = -E_4 \\ \tilde{\beta}_2 = E_2 \\ \tilde{\beta}_3 = D_{34}\tilde{\beta}_4 + E_3 \end{array} \right\}, \quad (4.81)$$

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{u}_2\tilde{\beta}_2 + \mathbf{u}_3[\tilde{\beta}_3 - \tilde{\beta}_4] + \mathbf{a}_\varphi \\ \tilde{\mathbf{s}} = [1 - \kappa](\tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_4) + \mathbf{a}_s \end{array} \right\}. \quad (4.82)$$

Mit diesen Ausdrücken kann die Bewegungsgleichung nun in geschlossener Form aufgestellt werden.

Bewegungsgleichungen

Aus dem d'ALEMBERTschen Prinzip folgt für dieses Beispiel die skalare Bewegungsgleichung:

$$(m\ddot{\mathbf{s}} + mge_z) \cdot \delta\mathbf{s} + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Theta}_S \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Theta}_S \dot{\boldsymbol{\omega}}) \cdot \delta\boldsymbol{\varphi} = 0, \quad (4.83)$$

wobei $\boldsymbol{\Theta}_S$ den Trägheitstensor bezüglich des Massenmittelpunktes S_m bezeichnet. Mit den im vorherigen Schritt abgeleiteten kinematischen Differentialen können die in Gl. (4.83) auftretenden virtuellen Verschiebungen und Beschleunigungen als lineare Funktionen der virtuellen Verschiebung bzw. der Beschleunigung der verallgemeinerten Koordinate $q = \beta_1$ dargestellt werden:

$$\left. \begin{array}{l} \delta s = \tilde{s} \delta q \\ \dot{s} = \tilde{s} \ddot{q} + \tilde{\dot{s}} \\ \delta \varphi = \tilde{\omega} \delta q \\ \ddot{\omega} = \tilde{\omega} \ddot{q} + \tilde{\ddot{\omega}} \end{array} \right\} \quad (4.84)$$

Einsetzen von Gl. (4.84) in Gl. (4.83) führt schließlich zur expliziten Form der in diesem Fall skalaren Bewegungsgleichung:

$$M \ddot{\beta}_1 + b = Q . \quad (4.85)$$

Dabei ergibt sich für die Masse M , die verallgemeinerte Zentripetal- und CORIOLISkraft b und die verallgemeinerte Kraft Q :

$$\left. \begin{array}{l} M = m \tilde{s} \cdot \tilde{s} + (\Theta_S \tilde{\omega}) \cdot \tilde{\omega} \\ b = m \tilde{s} \cdot \tilde{s} + (\Theta_S \tilde{\omega} + \omega \times \Theta_S \omega) \cdot \tilde{\omega} \\ Q = -m g e_z \cdot \tilde{s} \end{array} \right\} . \quad (4.86)$$

Die Auswertung von Gl. (4.86) kann in jedem Koordinatensystem durchgeführt werden, da die entsprechenden Ausdrücke nur *physikalische* Darstellungen der Positions-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren beinhalten. Diese Form ist daher für physikalische Interpretationen günstiger.

5 Kinematik und Dynamik des Fahrzeugaufbaus

Basierend auf den Kapiteln 3 und 4, in welchen die Methoden zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen von allgemeinen komplexen Mehrkörpersystemen beschrieben wurden, erfolgt in diesem Kapitel die spezielle Formulierung zur Berechnung der Kinematik und Dynamik des Fahrzeugaufbaus. Dabei fungiert der Fahrzeugaufbau, bestehend aus Fahrgestell und Karosserie, als Grundkörper für die übrigen Fahrzeugkomponenten wie z.B. Vorder- und Hinterradaufhängungen oder Antriebsstrang.

5.1 Fahrzeugfestes Referenzsystem

Das Fahrgestell und die Karosserie des Fahrzeugs werden als ein starrer Körper aufgefasst. Torsionen oder sonstige Verformungen der Karosserie werden nicht berücksichtigt. Das Fahrgestell kann sich frei im Raum bewegen. Zur Lagebeschreibung wird ein fahrzeugfestes Koordinatensystem $K_V = \{O_V; x_V, y_V, z_V\}$ eingeführt. Der fahrgestellfeste Bezugspunkt O_V liegt in der Fahrzeugmittelebene auf Höhe des Radmittelpunktes zwischen den Vorderrädern (vgl. DIN 70000 (FAKRA (1994))). Die x -Achse zeigt in Fahrzeulgängsrichtung nach vorn, die y -Achse in Fahrzeugquerrichtung nach links und die z -Achse nach oben. Zur räumlichen Lagebeschreibung des Fahrgestells verwendet man die drei Komponenten ${}^E x_V$, ${}^E y_V$, ${}^E z_V$ des Ortsvektors r_V in den Koordinaten des Inertialsystems sowie die drei KARDAN-Winkel ψ_V (Gierwinkel), θ_V (Nickwinkel), und φ_V (Wankwinkel). Die Abb. 5.1 zeigt die Lage der verwendeten Koordinatensysteme. Die Orientierung des Fahrzeugsystems gegenüber dem Inertialsystem ist durch die drei Kardanwinkel eindeutig festgelegt. Man geht von einer Ausgangslage aus, in der das Inertialsystem und das Fahrzeugsystem die gleiche Orientierung besitzen. Dann lässt man das Fahrzeug nacheinander drei Drehungen um bestimmte Achsen ausführen. Jeder Teildrehung entspricht ein Kardanwinkel. Die Drehungsfolge der Kardanwinkel lautet:

- Das x_E, y_E, z_E -System geht durch Drehung um die z_E -Achse mit dem Gierwinkel ψ_V in das x_1, y_1, z_1 -System mit $z_1 = z_E$ über.
- Das x_1, y_1, z_1 -System geht durch Drehung um die y_1 -Achse mit dem Nickwinkel θ_V in das x_2, y_2, z_2 -System mit $y_2 = y_1$ über.
- Das x_2, y_2, z_2 -System geht durch Drehung um die x_2 -Achse mit dem Wankwinkel φ_V in das x_V, y_V, z_V -System mit $x_V = x_2$ über.

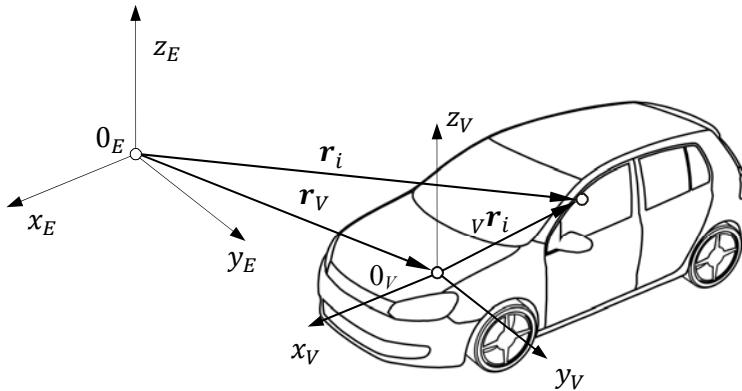


Abb. 5.1: Koordinatensysteme zur Beschreibung des Fahrzeugaufbaus

Die Transformation der Koordinaten eines beliebigen, in Koordinaten des Fahrzeugsystems gegebenen Vektors v_r_i (Abb. 5.1) in das Inertialsystem, erfolgt dann nach der Beziehung:

$$\overset{E}{v}r_i = \overset{E}{T}_V \overset{V}{v}r_i, \quad (5.1)$$

mit

$\overset{E}{v}r_i$ Vektor in Koordinaten des Inertialsystems,

$\overset{V}{v}r_i$ Vektor in Koordinaten des Fahrzeugsystems,

$\overset{E}{T}_V$ Transformationsmatrix Fahrzeug → Inertialsystem.

Die Ermittlung der Transformationsmatrix aus den Kardanwinkeln wird in (Hiller 1983) beschrieben. Man erhält, wobei der Index „ V “ an den Kardanwinkeln der Übersicht wegen weggelassen wurde:

$$\overset{E}{T}_V = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & s\varphi s\theta c\psi - c\varphi s\psi & c\varphi s\theta c\psi + s\varphi s\psi \\ c\theta s\psi & s\varphi s\theta s\psi + c\varphi c\psi & c\varphi s\theta s\psi - s\varphi c\psi \\ -s\theta & s\varphi c\theta & c\varphi c\theta \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

Die umgekehrte Transformation vom Inertial- ins Fahrzeugsystem erfolgt ganz entsprechend mit der transponierten Transformationsmatrix $\overset{V}{T}_E$

(vgl. auch Kapitel 2). Diese umgekehrte Transformation ist im vorliegenden Fall von großer Bedeutung, da alle Vektoren und Tensoren für die Berechnung der Bewegungsgleichungen in Komponenten des Fahrzeugsystems angegeben werden.

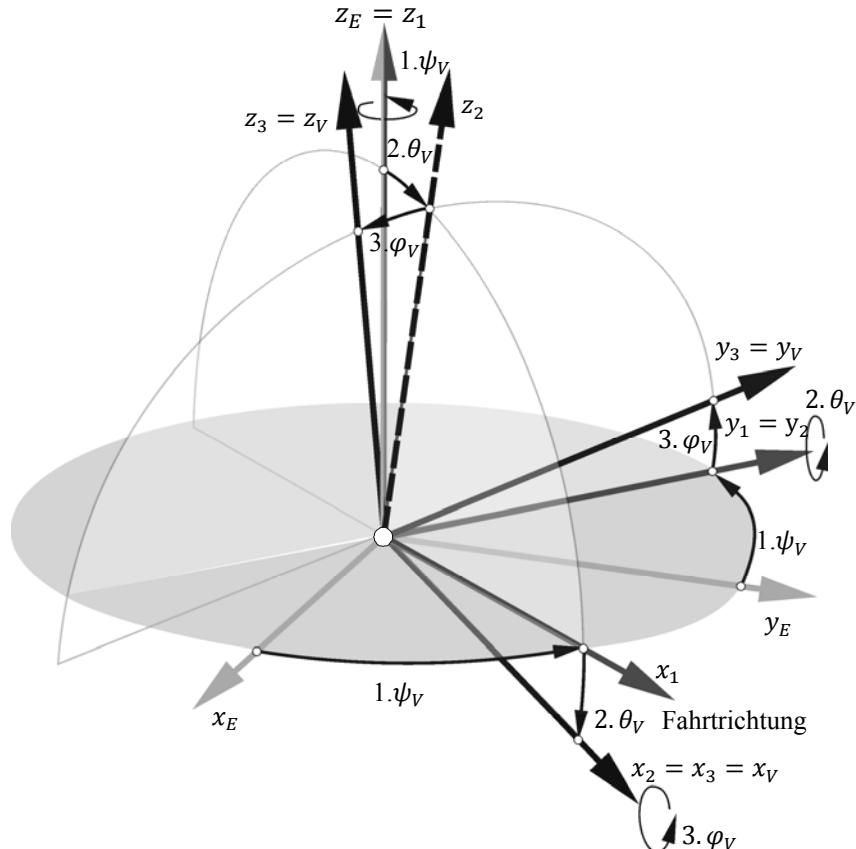


Abb. 5.2: Zur Definition der Kardanwinkel

Durch die Kardanwinkel kann nicht nur die räumliche Drehung des Fahrzeugs beschrieben werden, sondern auch seine Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung, wenn man die entsprechenden zeitlichen Ableitungen der Kardanwinkel hinzunimmt. Dies führt auf die *kinematischen KARDAN-Gleichungen* (Hiller 1983). Hier werden die für die Kinematik benötigten Gleichungen für die Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung des Fahrzeugs in Komponenten des Fahrzeugsystems angegeben:

$${}^V \boldsymbol{\omega}_V = \begin{bmatrix} -s\theta & 0 & 1 \\ \cos\theta s\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \cos\theta \cos\varphi & -s\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} {}^V \dot{\boldsymbol{\omega}}_V &= \begin{bmatrix} -s\theta & 0 & 1 \\ \cos\theta s\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \cos\theta \cos\varphi & -s\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -\cos\theta \dot{\theta} & 0 & 0 \\ -s\theta s\varphi \dot{\theta} + \cos\theta \cos\varphi \dot{\varphi} & -s\varphi \dot{\varphi} & 0 \\ -s\theta \cos\varphi \dot{\theta} - s\theta \cos\varphi \dot{\varphi} & -\cos\varphi \dot{\varphi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Der linke obere Index bezeichnet dabei das Koordinatensystem in dem die Komponenten angegeben werden, der rechte untere Index „ V “ besagt, dass es sich um die Bewegung des Fahrzeugsystems handelt (s. auch Abschnitt *Nomenklatur und Bezeichnungen*). Steht ein Index links unten, so bezeichnet er bei Relativbewegungen das Bezugssystem; für den Fall, dass das Bezugssystem gleich dem Inertialsystem ist, wird er weggelassen. Mit der Winkelgeschwindigkeit und der Winkelbeschleunigung des Fahrzeugs lassen sich nun die Absolutgeschwindigkeiten und -beschleunigungen beliebiger fahrzeugfester Punkte angeben:

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_V + \boldsymbol{\omega}_V \times {}_V \mathbf{r}_i, \quad (5.5)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \ddot{\mathbf{r}}_V + \dot{\boldsymbol{\omega}}_V \times {}_V \mathbf{r}_i + \boldsymbol{\omega}_V \times (\boldsymbol{\omega}_V \times {}_V \mathbf{r}_i). \quad (5.6)$$

Bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen des Fahrzeugmodells benötigt man im Wesentlichen kinematische Ausdrücke wie Geschwindigkeiten oder Beschleunigungen, die als *physikalische* Vektoren in beliebigen Koordinatensystemen angegeben werden dürfen. Es bietet sich beim hier diskutierten Fahrzeugmodell an, alle Vektoren im Fahrzeugsystem anzugeben. Zahlreiche Ortsvektoren sind in ihm konstant, andere (z.B. im Bereich der Radaufhängungen) können durch einfache Transformation ins Fahrzeugsystem überführt werden.

5.2 Kinematische Analyse des Fahrgestells

In diesem Abschnitt wird zunächst beschrieben, wie die Verbindung zwischen Baumstruktur und Schleifenstruktur bei der Aufstellung der Gleichungen zur Modellierung der Radaufhängungen ausgenutzt werden kann

(vgl. Kapitel 3). Als Beispiel dient das Modell einer Hinterradaufhängung mit Mehrfachlenkern.

5.2.1 Einbindung der Radaufhängungs-Kinematik

Bei der Einzelanalyse von Radaufhängungen werden Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung beliebiger Radaufhängungspunkte bei ruhendem Fahrzeug bestimmt. Es handelt sich also um Geschwindigkeiten und Beschleunigungen relativ zum Fahrzeug, die mit dem linken unteren Index „ V “ bezeichnet werden. Abb. 5.3 zeigt das zugehörige Schema der Abhängigkeiten des Vektors $\nu \mathbf{r}_T$ vom Fahrzeugreferenzsystem zu einem Punkt T des Radträgers, unter Nutzung der in Abschnitt 3.4 eingeführten Gelenkkörper-Darstellung.

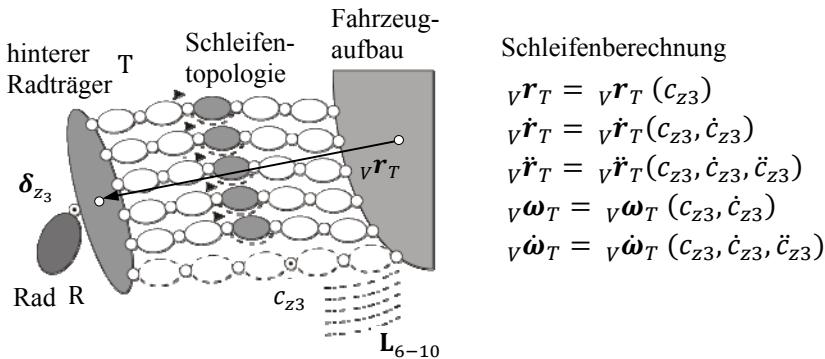


Abb. 5.3: Einzelanalyse am Beispiel einer Hinterradaufhängung

Gegenstand der im vorigen Abschnitt vorgestellten Einzelanalyse der Karosseriekinematik war die Berechnung von Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung von beliebigen Fahrgestellpunkten relativ zum Inertialsystem. Das zugehörige Schema ist in Abb. 5.4 wiedergegeben. Bei der Behandlung des Gesamtsystems wird nun die Schleife an den Baum *angehängt*. Man bekommt die Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung der Radaufhängungspunkte relativ zum Inertialsystem aus den bekannten Formeln für die Relativbewegung zweier Körper:

Führungsbewegung

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_V \quad + \nu \mathbf{r}, \quad (5.7)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_V + \boldsymbol{\omega}_V \times \nu \mathbf{r} \quad + \nu \dot{\mathbf{r}}, \quad (5.8)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_V + \dot{\boldsymbol{\omega}}_V \times {}_V\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}_V \times (\boldsymbol{\omega}_V \times {}_V\mathbf{r}) \quad + 2\boldsymbol{\omega}_V \times {}_V\dot{\mathbf{r}} + {}_V\ddot{\mathbf{r}}, \quad (5.9)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_V \quad + {}_V\boldsymbol{\omega}, \quad (5.10)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_V + \boldsymbol{\omega}_V \times {}_V\boldsymbol{\omega} \quad + {}_V\dot{\boldsymbol{\omega}}. \quad (5.11)$$

Die Gln. (5.7) bis (5.11) zeigen, dass die Kinematik im Inertialsystem – die für die Bewegungsgleichungen des Gesamtfahrzeugs benötigt wird – in einfacher Form aus der bekannten Schleifenkinematik und der sehr einfachen Kinematik der offenen Kette *Fahrgestell* gewonnen werden kann. Man kann verallgemeinernd sagen, dass es bei Systemen, die eine Kombination aus Schleifen- und Baumstruktur beinhalten, stets angebracht ist, zunächst Schleifen und Baum getrennt zu betrachten und dann anschließend die Verbindung herzustellen (s. Abb. 5.5).

Inertialsystem E Fahrgestell V Berechnung der Baumstruktur

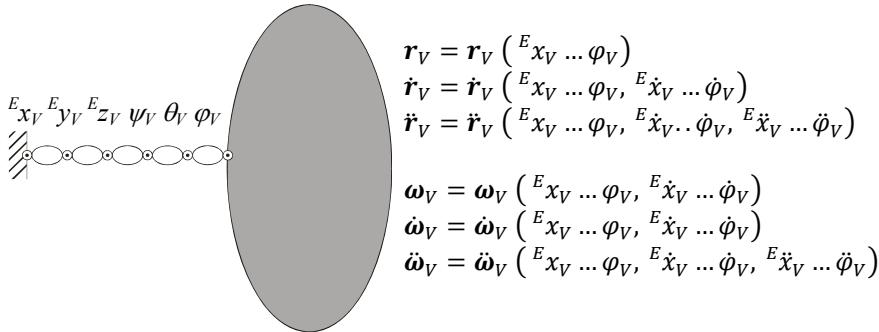


Abb. 5.4: Schema der Fahrgestell-Kinematik

Für die Bewegungsgleichungen werden neben der realen Geschwindigkeit sogenannte *Pseudo*-Geschwindigkeiten (s. Kapitel 4) benötigt. Hierbei werden alle Freiheitsgrade bis auf einen eingefroren und dieser eine wird mit der Geschwindigkeit „1“ beaufschlagt. Die Gln. (5.8) und (5.9) lassen erkennen, dass die Berechnung der Pseudo-Geschwindigkeit vereinfacht werden kann, je nachdem, ob der betrachtete Freiheitsgrad der Baumbewegung oder der Schleifenbewegung zugeordnet ist. Im Fall der Baumbewegung ist der letzte Term in (5.8) und (5.9) null, im Fall der Schleifenbewegung sind alle vorderen Terme null, da die entsprechenden Freiheitsgrade die Geschwindigkeit *null* aufweisen.

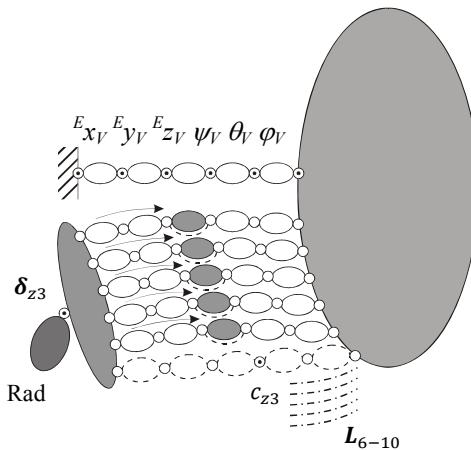


Abb. 5.5: Kombination von Fahrgestell- und Radaufhangungskinematik

5.2.2 Bewegungsgleichungen

Für die Dynamik eines Systems aus n_B starren Körpern wurde in Kapitel 4 das d'ALEMBERTsche Prinzip angewendet:

$$\sum_{i=1}^{n_B} [(m_i \ddot{\mathbf{r}}_{S_i} - \mathbf{F}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_{S_i} + (\boldsymbol{\Theta}_{S_i} \boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\Theta}_{S_i} \boldsymbol{\omega}_i - \mathbf{T}_i) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_i] = 0, \quad (5.12)$$

mit

- $m_i, \boldsymbol{\Theta}_{S_i}$: Masse und Trägheitstensor,
- $\ddot{\mathbf{r}}_{S_i}$: Beschleunigung des Massezentrums,
- $\boldsymbol{\omega}_i, \dot{\boldsymbol{\omega}}_i$: Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung,
- $\mathbf{F}_i, \mathbf{T}_i$: eingeprägte Kräfte und Momente,
- $\delta \mathbf{r}_{S_i}, \delta \boldsymbol{\varphi}_i$: virtuelle Verschiebungen,

jeweils für Körper „ i “. Die Trägheitstensoren und Momente müssen bezüglich der jeweiligen Körperschwerpunkte angegeben werden. Zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen aus Gl. (5.12) müssen die abhängigen virtuellen Verschiebungen $\delta \mathbf{r}_{S_i}, \delta \boldsymbol{\varphi}_i$ sowie die Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{r}}_{S_i}, \dot{\boldsymbol{\omega}}_i$ in Abhängigkeit von den virtuellen Verschiebungen und der Beschleunigungen der unabhängigen verallgemeinerten Koordinaten ausgedrückt werden. Unter Beachtung, dass für die virtuellen Verschiebungen dieselben Transformationsregeln wie für die Geschwindigkeiten gelten, ergibt sich:

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^f \tilde{\mathbf{r}}_{S_i}^{(j)} \delta q_j, \quad \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^f \tilde{\mathbf{r}}_{S_i}^{(j)} \ddot{q}_j + \tilde{\mathbf{r}}_{S_i}, \quad (5.13)$$

$$\delta \boldsymbol{\varphi}_i = \sum_{j=1}^f \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(j)} \delta q_j, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \sum_{j=1}^f \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(j)} \ddot{q}_j + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i. \quad (5.14)$$

Einsetzen von (5.13) und (5.14) in (5.12) liefert, unter Berücksichtigung der Unabhängigkeit der virtuellen Verschiebungen δq_j , die Bewegungsgleichungen in der minimalen Form:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{b} = \mathbf{Q}. \quad (5.15)$$

Die Koeffizienten der verallgemeinerten $[f \times f]$ -Massenmatrix \mathbf{M} sowie des $[f \times 1]$ -Vektors der verallgemeinerten Kreiselkräfte \mathbf{b} und des $[f \times 1]$ -Vektors der verallgemeinerten eingeprägten Kräfte \mathbf{Q} ergeben sich dabei aus:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{j,k} &= \sum_{i=1}^{n_B} [m_i \tilde{\mathbf{r}}_{S_i}^{(j)} \tilde{\mathbf{r}}_{S_i}^{(k)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(j)} (\boldsymbol{\Theta}_{S_i} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(k)})], \\ \mathbf{b}_j &= \sum_{i=1}^{n_B} [m_i \tilde{\mathbf{r}}_{S_i}^{(j)} \tilde{\mathbf{r}}_{S_i} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(j)} (\boldsymbol{\Theta}_{S_i} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\Theta}_{S_i} \boldsymbol{\omega}_i)], \\ \mathbf{Q}_j &= \sum_{i=1}^{n_B} [\tilde{\mathbf{r}}_{S_i}^{(j)} \mathbf{F}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(j)} \mathbf{T}_i]. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Die Gln. (5.16) können bei bekannter globaler Kinematik gemäß Abschnitt 4.6 unmittelbar ausgewertet werden.

6 Modellierung und Analyse von Radaufhängungen

Die Radführungen oder Radaufhängungen haben im Laufe der über hundertjährigen Geschichte des Kraftfahrzeugs eine beachtenswerte Entwicklung durchgemacht. Durch die Einführung immer raffinierterer kinematischer Strukturen gelang es, exakte und reproduzierbare Radbewegungen zu erzeugen. Mit zunehmender Kenntnis des Schwingungsverhaltens des Fahrzeugs und der fahrdynamischen Vorgänge rückten die Feinheiten der Bewegungsgeometrie in den Vordergrund, so dass heute eine Vielzahl von Radführungsvarianten mit unterschiedlichsten Zielsetzungen und Eigenschaften zur Verfügung stehen. Durch den Einsatz computergestützter Verfahren ist heute die wunschgemäße Auslegung des Fahrwerkes möglich, um bei sicherem Fahrverhalten zugleich höchsten Fahrkomfort zu erreichen.

6.1 Funktion von Radaufhängungssystemen

Die Definition einer Radachse im ursprünglichen Sinne der Fahrzeugtechnik beinhaltet die starre Verbindung der beiden gegenüberliegenden und jeweils unabhängig voneinander drehbar gelagerten Räder. Über die Achse werden die Räder mit dem Aufbau verbunden. Diese Definition gilt für alle Starr- und Halbstarrachsen (vgl. Abschnitt 6.2), weil hier die Räder unmittelbar auf der Achse gelagert sind und sich mit dieser mit bewegen. Bei Einzelradaufhängungen besteht diese Verbindung nicht mehr. Das Rad wird auf einem Radträger drehbar gelagert, und der Radträger wird als Koppelglied einer kinematischen Kette mit mehreren Verbindungsstangen (Lenkern) mit der Achse verbunden. Es ist nicht klar definiert, ob die Achse auch die Lenker und den Radträger umfasst oder ob diese eine neue Baugruppe bilden. In diesem Buch wird die Kombination aus Lenker und Radträger als Radaufhängung bezeichnet.

Die wesentliche Aufgabe von Radaufhängungen besteht in der Verbindung des Fahrzeugaufbaus mit den Rädern, um so das Tragen des Aufbaus über den Fahrweg zu ermöglichen. Die Radaufhängung gibt dem Rad pri-

mär eine vertikal ausgerichtete Bewegungsmöglichkeit, welche das Rad in gewissen Grenzen dem Verlauf von Fahrbahnunebenheiten folgen lässt. Mit Hilfe eines Feder- und Dämpferelementes werden die daraus resultierenden Aufbaubewegungen reduziert und der Fahrkomfort und die Fahrsicherheit gewährleistet. Handelt es sich um eine Vorderradaufhängung, so wird über einen speziellen Lenker der Radaufhängung, die sogenannte Spurstange, üblicherweise auch die Lenkbewegung auf das Rad übertragen.

- 1 Rad
- 2 Radträger
- 3 Dreieckslenker
- 4 Querlenker
- 5 Zugstrebe
- 6 Spurstange
- 7 Lenkung
- 8 Schraubenfeder
- 9 Dämpfer
- 10 Gelenkwelle

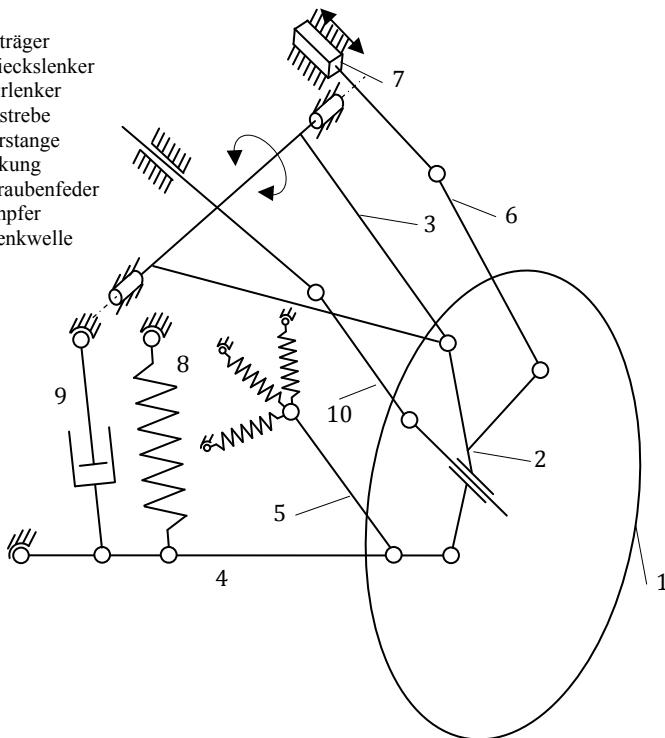


Abb. 6.1: Wesentliche Elemente einer Einzelaufhängung (schematische Darstellung)

Des Weiteren nimmt die Radaufhängung über die Gestaltung ihrer Geometrie sowie über die Federung und die Dämpfung Einfluss auf die Stellung des Rades relativ zur Fahrbahn. So lassen sich fahrdynamische Eigenschaften des Fahrzeuges gezielt beeinflussen. Bei der Abstimmung dieser Eigenschaften muss ein Kompromiss eingestellt werden, da sich die Forderungen nach gutem Fahrverhalten und hohem Komfort meist widerspre-

chen. Eine wesentliche Bedeutung kommt hierbei auch den oft gummielastisch ausgeführten Lagerungen der fahrzeugseitigen Lenkeranbindungen zu. Darüber erhält der Mechanismus der Radaufhängung ein gewisses nachgiebiges Verhalten. Die richtige Auslegung der Quer- und Längsstiffigkeit (Elasto-Kinematik) ist von besonderer Bedeutung für die Beeinflussung des Spur- und Sturzwinkelverlaufes unter Last und somit bei der Abstimmung insbesondere von schnellen Fahrzeugen. Nicht jedes Radaufhängungssystem, welches die kinematischen Anforderungen der Bewegungsgeometrie des Rades erfüllt, bietet die gleichen Potentiale zur elasto-kinematischen Abstimmung (vgl. Abschnitt 6.2).

In Abb. 6.1 ist schematisch die Mehrlenkerausführung einer Radaufhängung dargestellt. Ziffer (1) ist das Rad mit dem Reifen welches über das Radlager drehbar am Radträger (2) gelagert ist. Im Allgemeinen trägt der Radträger auch die Bremsvorrichtung. Der Radträger fungiert gleichzeitig als Koppel einer räumlichen kinematischen Kette aus Dreieckslenker (3) und Querlenker (4). Die Zugstrebbe (5) stützt den Querlenker gegenüber dem Fahrzeug an einem zur Geräusch- und Schwingungsisolation elastisch ausgeführten Lager ab. Mit Hilfe der Spurstange (6), die mit der fahrzeugseitig gelagerten Lenkung (7) verbunden ist, kann die Orientierung des Radträgers verstellt werden. Die Schraubenfeder (8) und der Dämpfer (9) stützen den Querlenker gegenüber der Karosserie ab. Über die Gelenkwelle (10) wird schließlich das Antriebsmoment auf das Rad übertragen (vgl. Kapitel 8).

6.2 Typen von Radaufhängungen

In der Kraftfahrzeugtechnik wird eine Vielzahl unterschiedlicher Radaufhängungen eingesetzt. Unabhängig vom Typ der jeweiligen Radaufhängung wird angestrebt, die Räder so am Fahrzeugaufbau zu führen, dass das Potential der Reifen in allen Fahrsituationen möglichst gut genutzt wird. Neben der Funktion spielen auch die Gesichtspunkte Gewicht, Raumbedarf und Kosten eine entscheidende Rolle bei der Fahrwerksgestaltung. So kommen je nach Fahrzeugklasse und den sich daraus ergebenden Anforderungen hinsichtlich Komfort, Fahrsicherheit und Kosten sowie konstruktiven Gesichtspunkten, angetriebene oder nicht angetriebene, gelenkte oder nicht gelenkte Achse.

Im Laufe der Jahrzehnte haben sich für die Gestaltung von Radaufhängungen drei grundsätzlich verschiedene Konzepte entwickelt:

- Starrachsen als die älteste bekannte Radaufhängungsbauart,

- Verbundlenkerachsen (Halbstarrachsen), die speziell als nicht angetriebene Hinterachsen Verwendung finden,
- Einzelradaufhängungen, bei welchen folgende Formen unterschieden werden:
 - Einzelradaufhängungen mit einer Lenkerebene und
 - Einzelradaufhängungen mit mehr als einer Lenkerebene.

Typische Einzelradaufhängungen mit einer Lenkerebene sind Längslenker-, Querlenker- und Schräglengerachsen; typische Vertreter der Einzelradaufhängungen mit mehr als einer Lenkerebene sind Doppelquerlenkerachsen sowie Federbein- und Dämpferbeinachsen nach dem McPherson-Prinzip. Auch Mehrlenkerachsen, bei welchen einzelne Lenkerebenen nicht mehr eindeutig zu identifizieren sind, zählen zur Gruppe der Einzelradaufhängungen mit mehr als einer Lenkerebene.

Im folgenden Abschnitt werden nun einige praktische Ausführungen der zuvor genannten Achskonzepte vorgestellt. Angefügt ist jeweils eine kurze kinematische Beschreibung mit den wesentlichen Charakteristika wie Anzahl kinematischer Schleifen, Anzahl von Körpern und Gelenken sowie der daraus folgenden Anzahl der Freiheitsgrade. Außerdem werden Vorteile und Nachteile bei den praktischen Eigenschaften des jeweiligen Achskonzeptes erläutert.

6.2.1 Starrachsen

Die feste Verbindung zweier Räder über eine quer liegende Achse bezeichnet man als Starrachse (vgl. Abb. 6.2). Dabei können sich die beiden gegenüberliegenden Räder gegenseitig beeinflussen. Dieses Konzept stammt ursprünglich von den Kutschen. Heute werden Starrachsen bei Pkw als Vorderachsen nur noch sehr selten eingesetzt. Lediglich bei Geländefahrzeugen bewährt sich die Starrachse wegen ihrer guten Gelände-gängigkeit. Häufiger wird sie vor allem als angetriebene Hinterachse im Nutzfahrzeubereich eingesetzt. In Abb. 6.3 ist das Starrkörpermodell einer Starrachse dargestellt und In Tabelle 6.1 sind die zugehörigen Modellcharakteristika und Eigenschaften dieser Achsbauart aufgelistet.



Abb. 6.2: Angetriebene starre Hinterachse der Mercedes G-Klasse (mit freundlicher Genehmigung der Daimler AG, 2009)

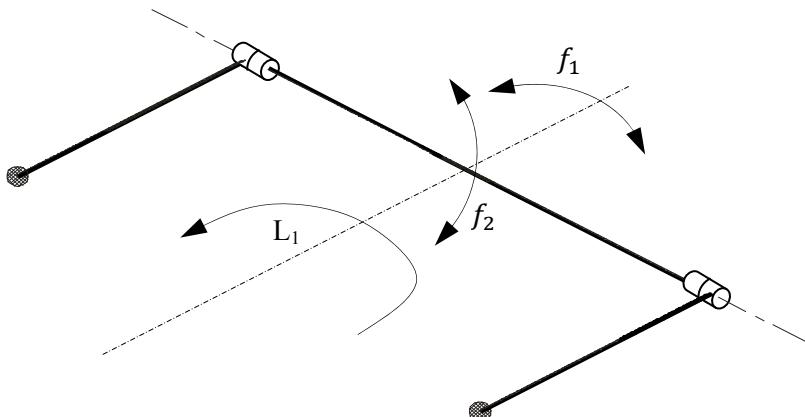


Abb. 6.3: Starrkörpermodell der Hinterachse der Mercedes G-Klasse

Tabelle 6.1: Modellcharakteristika und Eigenschaften der Starrachse

Modell	Vorteile	Nachteile
3 Körper	einfache Konstruktion	großer Raumbedarf
2 Drehgelenke	kostengünstig	hohes Gewicht
2 Kugelgelenke	keine Spurweitenänderung	kinematische Kopplung von rechter und linker Seite und daher große Sturzänderung

$$\begin{aligned} & 3 \times 6 = 18 \text{ Bewegungsgleichungen} \\ & 2 \times 5 + 2 \times 3 = 16 \text{ Bindungen} \end{aligned}$$

2 Freiheitsgrade: Freiheitsgrade der Achse (Federn f_1 , Wanken f_2)
1 kinematische Schleife L_1

6.2.2 Verbundlenkerachsen

Die zu den Halbstarrachsen zählende Verbundlenkerachse zeichnet sich im Gegensatz zu einer Starrachse dadurch aus, dass Relativbewegungen zwischen den Rädern über die Torsion des Achskörpers ermöglicht werden. Dieser wird gezielt mit elastischen Eigenschaften versehen, so dass die Verbundlenkerachse Eigenschaften von Starrachse und Einzelradaufhängung vereint. Die beiden Radträger werden auf den biege- und torsionssteifen Längslenkern befestigt, die wiederum in Querrichtung mit einem biegeweichen aber torsionsweichen Profil (Achsträger) verbunden werden (Abb. 6.4). In Abb. 6.5 ist das Starrkörpermodell einer Verbundlenkerachse dargestellt und in Tabelle 6.2 sind die zugehörigen Modellcharakteristika und Eigenschaften dieser Achsbauart aufgelistet.

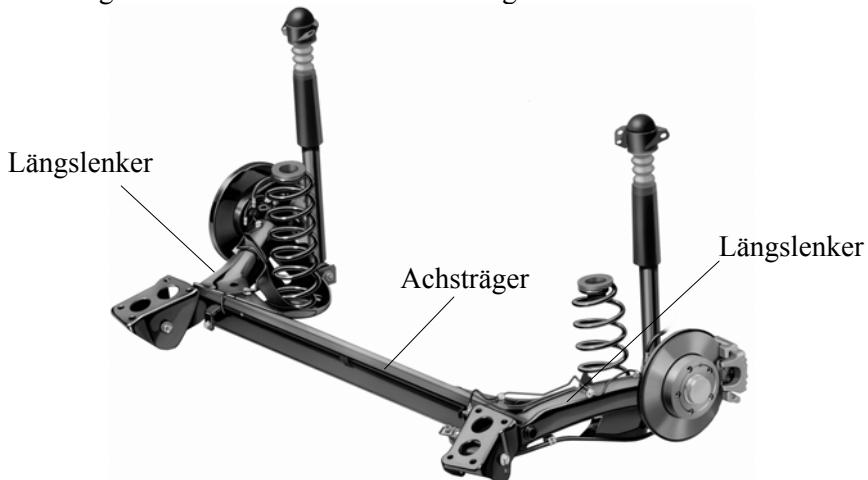


Abb. 6.4: Nicht angetriebene Verbundlenkerachse des Golf IV (mit freundlicher Genehmigung der Volkswagen AG, 1997)

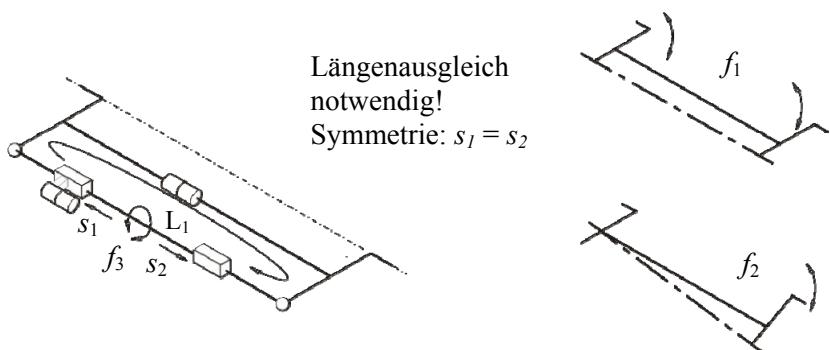


Abb. 6.5: Starrkörpermodell einer Verbundlenkerachse

Tabelle 6.2: Modellcharakteristika und Eigenschaften der Verbundlenkerachse

Modell	Vorteile	Nachteile
4 Körper	geringer Raumbedarf	Antrieb schwer realisierbar
1 Drehgelenk mit Torsionsfeder	Stabilisatorwirkung durch Querträger	Lenkung schwer realisierbar
2 Kugelgelenke	geringes Gewicht	eingeschränktes fahrdynamisches Optimierungspotential
1 Schubgelenk	gute Wankkompensation	
1 Drehschubgelenk		
	4×6=24 Bewegungsgleichungen	
	2×5+2×3+1×4=20 Bindungen	
	4 Freiheitsgrade: zwei Freiheitsgrade der Achse (beidseitiges Federn f_1 , einseitiges Federn f_2), isolierte Drehung f_3 und Längenausgleich s_1, s_2	
	1 kinematische Schleife L_1	

6.2.3 Längslenkerachsen

Die zu den Einzelradaufhängungen mit nur einem Lenker zählende Längslenker-Radaufhängung besteht aus einer einzigen Verbindung zwischen Radträger und Aufbau. Der Lenker ist dabei fest mit dem Radträger verbunden und mit einem Drehgelenk am Aufbau befestigt. Je nach Ausrichtung der Lenkerdrehachse unterscheidet man zwischen Quer- und Schräglenger (Abschnitt 6.2.4) und der Längslenker-Radaufhängung (Abb. 6.6).



Abb. 6.6: Nicht angetriebene Längslenker-Hinterachse der Mercedes A-Klasse (Mödinger et al. 1997)

Längslenkerachsen haben nur einen Längslenker pro Rad, der die Aufnahme von Längs- und Querkräften übernimmt und den Radträger um eine quer zur Fahrzeulgängsrichtung liegende Drehachse schwingen lässt. Zur Verbesserung der Komforteigenschaften werden die Lenker üblicherweise

in Längsrichtung elastisch am Aufbau gelagert. In Abb. 6.7 ist das Starrkörpermodell einer Längslenkerradaufhängung dargestellt und in Tabelle 6.3 sind die zugehörigen Modellcharakteristika und Eigenschaften dieser Radaufhängung aufgelistet.

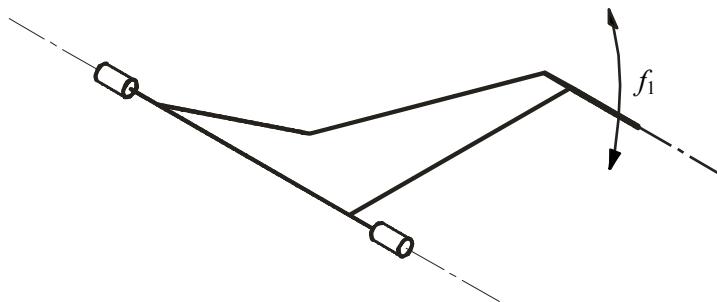


Abb. 6.7: Starrkörpermodell einer Längslenkerradaufhängung

Tabelle 6.3: Modellcharakteristika und Eigenschaften der Längslenkerradaufhängung

Modell	Vorteile	Nachteile
1 Körper	sehr geringer Raumbedarf	Einschränkung bei der Auslegung der Achskinematik
1 Drehgelenk	einfache Bauart geringe ungefederte Massen Spurweite, Vorspur und Sturz konstant beim einseitigen Federn	keine Wankkomensation Niedriges Momentanzentrum, damit starkes Wanken schlechte Längsfederung
	1×6=6 Bewegungsgleichungen 1×5=5 Bindungen 1 Freiheitsgrad pro Radaufhängung (f_1) keine kinematischen Schleifen	

6.2.4 Schräglengerachsen

Die schräge Anordnung eines einzelnen Lenkers ermöglicht eine gute Aufnahme von Längs- und Querkräften, wenn dieser durch zwei Lagerpunkte mit einer schräg zur Fahrzeulgängsrichtung liegenden Drehachse mit dem Aufbau verbunden wird (Abb. 6.8). Hierdurch lassen sich die Vorteile von Längs- und Querlenker-Radaufhängungen vereinigen ohne große Nachteile zu haben. In Abb. 6.9 ist das Starrkörpermodell einer Schräglenkerradaufhängung dargestellt und in Tabelle 6.4 sind die zugehö-

rigen Modellcharakteristika und Eigenschaften dieser Radaufhängung aufgelistet.

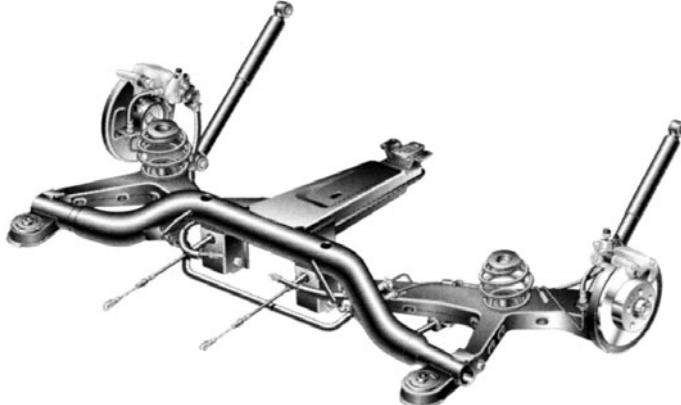


Abb. 6.8: Nicht angetriebene Schräglengerachse des Volkswagen Sharan (Schuster et al. 1995)

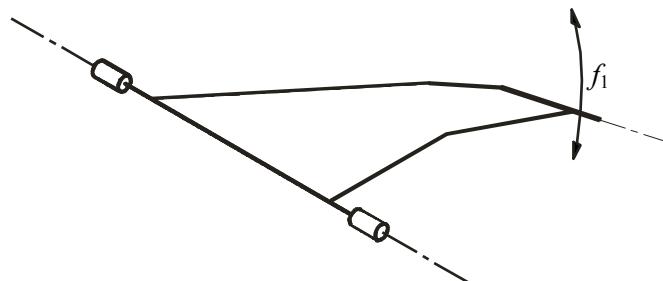


Abb. 6.9: Starrkörpermodell einer Schräglenkerradaufhängung

Tabelle 6.4: Modellcharakteristika und Eigenschaften der Schräglenkerradaufhängung

Modell	Vorteile	Nachteile
1 Körper	relativ einfacher Aufbau	Möglichkeiten zu elasto-kinematischen Abstimmung eingeschränkt
1 Drehgelenk	Gute Eignung für Antrieb Wankkompensation möglich	
	1×6=6 Bewegungsgleichungen 1×5=5 Bindungen 1 Freiheitsgrad pro Radaufhängung (f_1) keine kinematischen Schleifen	

6.2.5 Doppelquerlenkerachsen

Wird ein Radträger nur mit quer liegenden Lenkern geführt, so muss ein Lenker oberhalb und einer unterhalb der Radmitte positioniert sein. Zusätzlich muss ein Spurlenker vorhanden sein, um das Lenken zu verhindern bzw. um es definiert zu ermöglichen (vergleiche Abb. 6.10). Eine solche Anordnung wird als Doppelquerlenker-Radaufhängung bezeichnet. In Abb. 6.11 übernimmt die über Kugelgelenke gelagerte Spurstange die Übertragung der Lenkkräfte auf den Radträger. Hierdurch entsteht im Starrkörpermodell der isolierte Freiheitsgrad f_3 . In Tabelle 6.5 sind die Modellcharakteristika und Eigenschaften der Doppelquerlenkerradaufhängung aufgelistet.



Abb. 6.10: Gelenkte, angetriebene Doppelquerlenker-Vorderachse des VW Tuareg (mit freundlicher Genehmigung der Volkswagen AG, 2002)

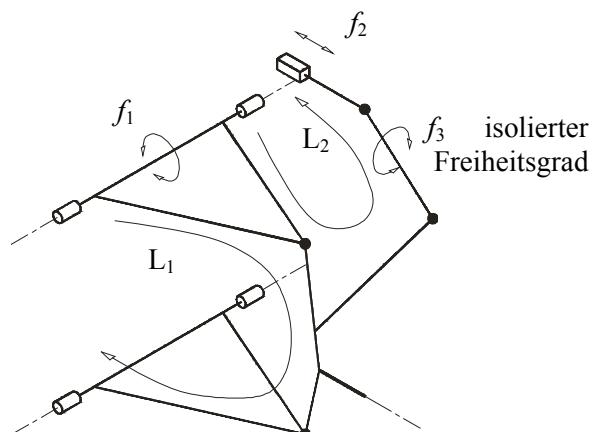


Abb. 6.11: Starrkörpermodell einer Doppelquerlenker-Radaufhängung

Tabelle 6.5: Modellcharakteristika und Eigenschaften der Doppelquerlenker-Radaufhängung

Modell	Vorteile	Nachteile
5 Körper	Raderhebungskurven (Spurweite, Vorspur, Sturz) weitgehend frei gestaltbar	Großer Raumbedarf
2 Drehgelenke	sehr gut für Antrieb geeignet	aufwändige Konstruktion
1 Schubgelenk		Längsfederung und
4 Kugelgelenke		elastokinematische Abstimmung aufwändig
	$5 \times 6 = 30$ Bewegungsgleichungen	
	$2 \times 5 + 1 \times 5 + 4 \times 3 = 27$ Bindungen	
	3 Freiheitsgrade pro Radaufhängung (Federn f_1 , Lenken f_2 , isolierter Freiheitsgrad f_3)	
	2 kinematische Schleifen L_1 und L_2	

6.2.6 Radaufhängungen nach dem McPherson-Prinzip

Bei Radaufhängungen nach dem McPherson-Prinzip werden grundsätzlich die zwei Bauformen Feder- und Dämpferbein unterschieden. Wenn der Dämpfer den Freiraum in der Schraubenfeder ausnutzt und gleichzeitig die beiden Enden der Feder abstützt, so spricht man von einem Federbein (siehe Abb. 6.12). Ist die Feder dagegen nicht auf dem Dämpfer montiert sondern separat angebracht, so handelt es sich um ein Dämpferbein. Wesentliches Merkmal von Feder- und Dämpferbeinen ist, dass ein stehender Dämpfer (Zweirohdämpfer) fest mit dem Radträger verbunden wird und die Kolbenstange des Dämpfers aufbauseitig drehbar gelagert wird. So entsteht ein Drehschubgelenk, welches die Lenk- und Federbewegung des Radträgers ermöglicht. Zur Vervollständigung der Radaufhängung werden dann noch zwei weitere Lenker benötigt. Einer fungiert dabei als Spurlenker und wird mit der Lenkung verbunden und ein weiterer dient in der unteren Ebene, meist in der Form eines Dreiecksquerlenkers, zur Führung des Rades (Abb. 6.13). In Tabelle 6.6 sind die Modellcharakteristika und Eigenschaften der Mcpherson-Radaufhängung aufgelistet.

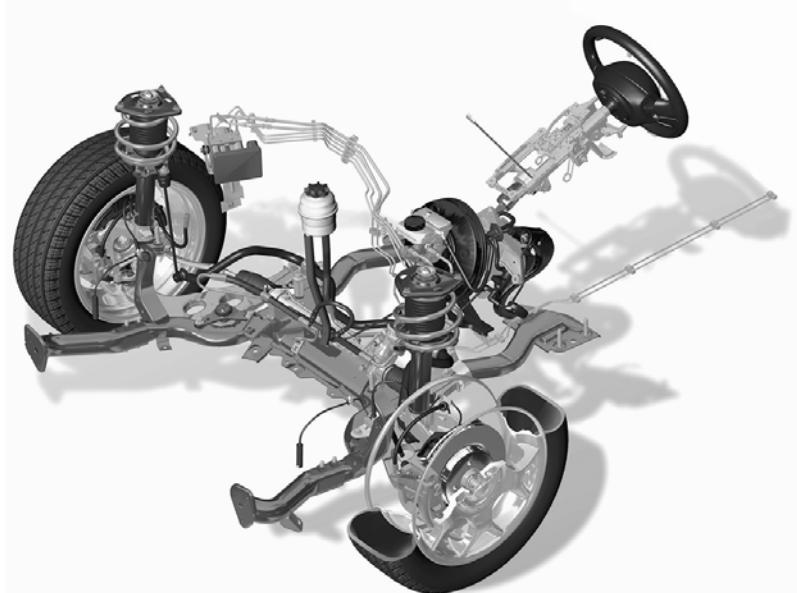


Abb. 6.12: Angetriebene McPherson Federbeinachse des Mini mit Lenkanlage
(mit freundlicher Genehmigung der BMW Group, 2001)

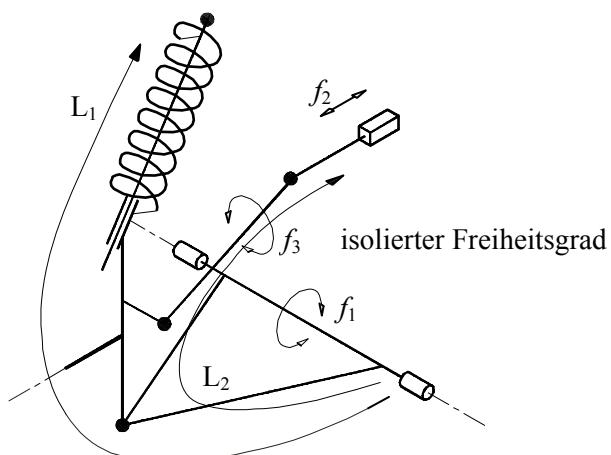


Abb. 6.13: Starrkörpermodell einer McPherson-Federbein-Radaufhängung

Tabelle 6.6: Modellcharakteristika und Eigenschaften der McPherson-Radaufhängung

Modell	Vorteile	Nachteile
5 Körper	geringer Bauaufwand	Biegemoment im Dämpfer
1 Drehgelenk	geringer Platzbedarf	verschlechtert Ansprechverhalten
2 Schubgelenke	geringe ungefederte Massen	große Bauhöhe
4 Kugelgelenke	gut für Antrieb geeignet $5 \times 6 = 30$ Bewegungsgleichungen $1 \times 5 + 2 \times 5 + 4 \times 3 = 27$ Bindungen	
	3 Freiheitsgrad pro Radaufhängung (Federn f_1 , Lenken f_2 , isolierter Freiheitsgrad f_3) 2 kinematische Schleifen L_1 und L_2	

6.2.7 Mehrlenkerachsen

Die Verwendung von vier oder mehr Lenkern zur Aufhängung eines Rades ist nur möglich, wenn keiner der Lenker fest mit dem Radträger verbunden wird. Das bedeutet, dass jeder der Lenker mittels eines beweglichen Gelenkes am Radträger befestigt werden muss. Zur Ausnutzung des gesamten kinematischen Gestaltungspotentials kommen fünf voneinander unabhängige Lenker zum Einsatz. Die Verwendung eines Trapezlenkers anstelle von zwei unten liegenden Zwei-Punkt-Lenkern führt auf eine so genannte Integrallenker-Radaufhängung (Abb. 6.14).

Tabelle 6.7: Modellcharakteristika und Eigenschaften der Integral IV-Lenkerachse

Modell	Vorteile	Nachteile
7 Körper	gute kinematische Gestaltungsmöglichkeiten	hoher Bauaufwand
1 Drehgelenk	präzise Radaufhängung	hohe Kosten
1 Schubgelenk	elastokinematisch gut abstimmbar	
9 Kugelgelenke	gute Längs- und Querfederung möglich	
	$7 \times 6 = 42$ Bewegungsgleichungen $1 \times 5 + 1 \times 5 + 9 \times 3 = 37$ Bindungen	
	5 Freiheitsgrade pro Radaufhängung (Federn f_1 , 4 isolierte Freiheitsgrade f_2, f_3, f_4, f_5) 4 kinematische Schleifen L_1, L_2, L_3 und L_4	

Hier wird mittels eines senkrechten Zusatzlenkers (Integrallenker), der den Radträger auf dem Trapezlenker abstützt, eine Aufnahme der Längs-

kraftmomente realisiert (Abb. 6.15). In Tabelle 6.7 sind die Modellcharakteristika und Eigenschaften der Integral-IV-Lenkerradaufhängung aufgelistet.

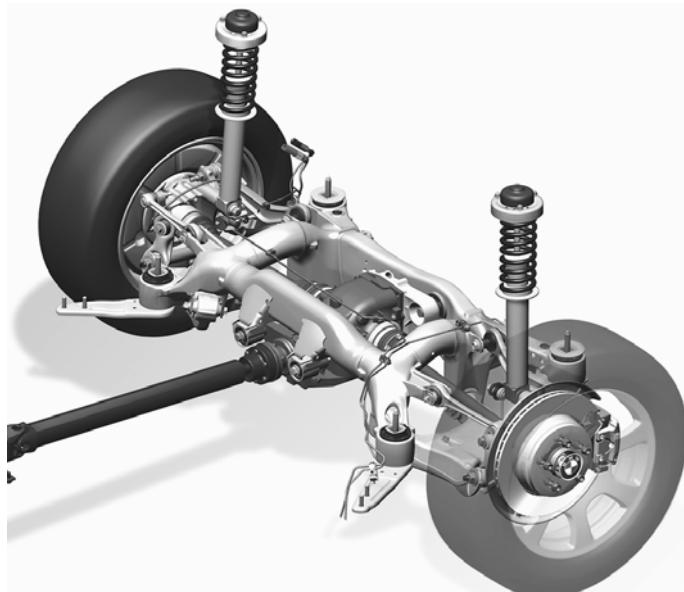


Abb. 6.14: Angetriebene Integral-IV-Lenkerachse des BMW 5er (mit freundlicher Genehmigung der BMW Group, 2003)

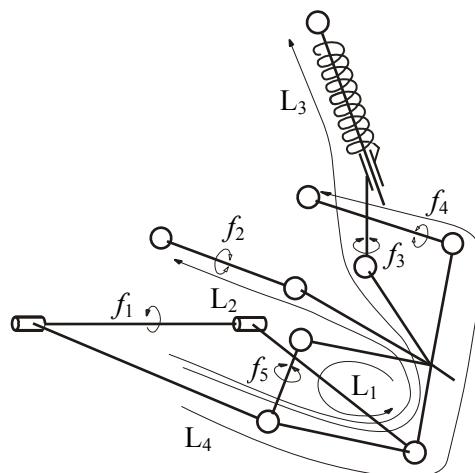


Abb. 6.15: Starrkörpermodell einer Integral-IV-Lenkerachse

6.3 Kenngrößen von Radaufhängungen

Zur Bewertung der Eigenschaften von Radaufhängungen ist es sinnvoll, einige allgemein gültige Begriffe und Kenngrößen zu verwenden. Die DIN 70020 aus dem Jahre 1993 legt hierzu Größen fest, die sich für die Beschreibung der Stellung des Rades im Raum bewährt haben.

Als *Sturz* bezeichnet man den Winkel γ zwischen der Radebene und der Ebene, welche parallel zur Fahrzeugmittelachse und senkrecht auf der Standebene des Fahrzeugs steht (Abb. 6.16). Der Sturzwinkel wird als positiv angenommen, wenn das Rad oben vom Fahrzeug weg geneigt ist.

Die *Spurweite* s ist der Abstand zwischen den Radaufstandspunkten einer Achse. Als weitere bedeutende Kenngröße insbesondere bei Abbremsmanövern beschreibt die *Spur* des Fahrzeuges die Differenz des Abstandes ($B - C$) der Felgenhörner (Abb. 6.17). Eine *positive Spur* liegt vor, wenn das Rad vorn zur Fahrzeugmitte geneigt ist ($B > C$). Falls $B < C$ ist, spricht man von einer *Nachspur*. Der *Vorspurwinkel* δ_{VS} ist der Winkel zwischen Fahrzeug-Längsachse und *Reifenmittelebene*.

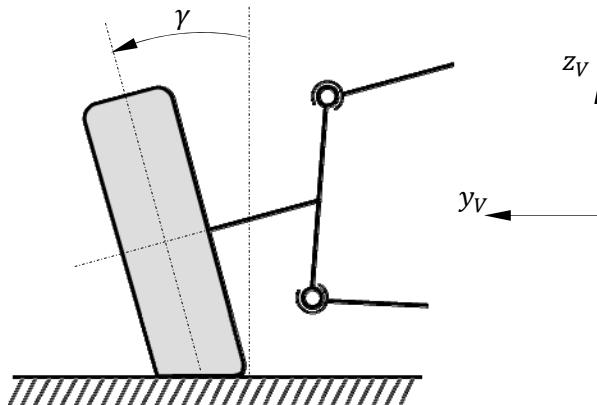


Abb. 6.16: Definition des Sturzwinkels γ

Als *Lenkrollhalbmesser* r_r wird der Abstand der Schnittlinie der Radmittelebene mit der Standebene vom Schnittpunkt der Lenkachse mit der Standebene bezeichnet (Abb. 6.18). Wenn sich der Schnittpunkt A außerhalb der Radebene befindet ist der *Lenkrollhalbmesser negativ*.

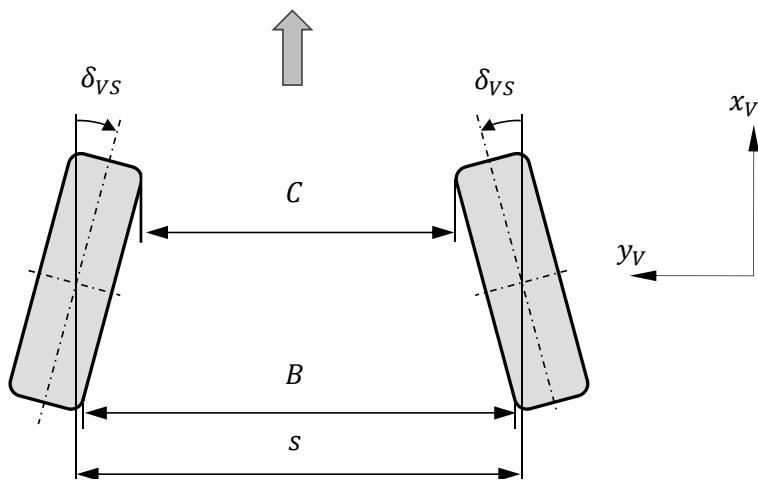


Abb. 6.17: Definition der Spurweite s / der Spur

A innerhalb der Spur $s: r_r > 0$
A außerhalb der Spur $s: r_r < 0$

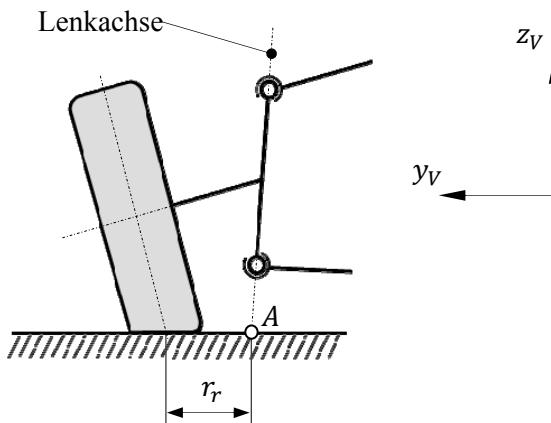


Abb. 6.18: Definition des Lenkrollhalbmessers r_r

Der Winkel zwischen einer Ebene senkrecht zur Standebene des Fahrzeugs sowie parallel zur Längsachse und der Lenkachse (Schraubachse des Radträgers) wird als Spreizungswinkel σ bezeichnet (Abb. 6.19).

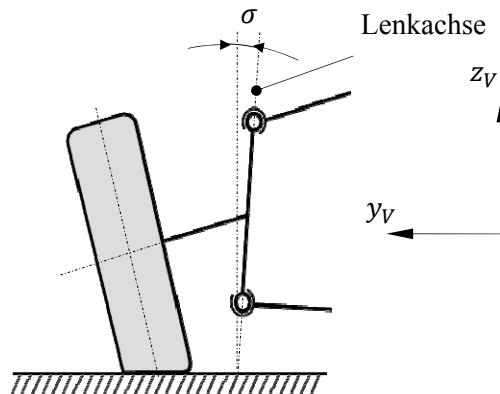


Abb. 6.19: Definition des Spreizungswinkels σ

Die Definition von Vor- bzw. Nachlauf kann Abb. 6.20 entnommen werden. Liegt der Punkt D in Fahrtrichtung vor Punkt E, so liegt Vorlauf vor, anderenfalls Nachlauf. Die Erläuterung der nachfolgenden Definitionen bezieht sich nun darauf, dass Nachlauf vorliegt, was fast immer der Fall ist.

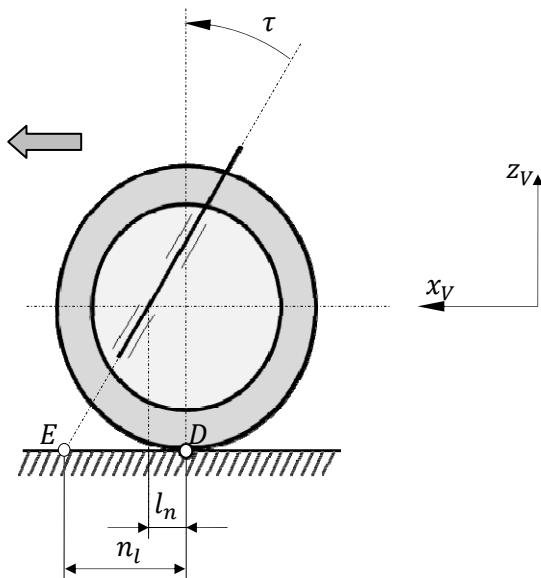


Abb. 6.20: Definition von Vorlauf und Nachlauf

Als *Nachlaufwinkel* τ bezeichnet man den Winkel zwischen der Lenkachse (Schraubachse des Radträgers) und der Senkrechten durch die Radmitte.

Die *Nachlaufstrecke* n_l ist der Abstand zwischen dem Schnittpunkt von Lenkachse und Standebene (Punkt E) und dem Schnittpunkt der Standebene mit der Senkrechten durch die Radmitte (Punkt D). Schließlich bezeichnet man den Abstand zwischen dem Schnittpunkt der Lenkachse mit der horizontalen Radmittenebene und der Senkrechten durch die Radmitte als *Nachlaufversatz* l_n .

6.4 Eindimensionale Viertelfahrzeugmodelle

Um Möglichkeiten und Grenzen mechanischer Systeme abschätzen zu können, hat sich der Einsatz theoretischer Rechenverfahren bewährt. Durch eine geeignete Reduktion des Modells lassen sich Rechenaufwand und Interpretierbarkeit der Ergebnisse optimieren. So kann es zur theoretischen Untersuchung von Fahrzeugschwingungen in vertikaler Richtung ausreichen ein vereinfachtes Schwingungsersatzsystem zu verwenden. Der Einfluss von Aufbaufederung und -dämpfung, Radmasse und Reifenfederung auf Komfort, Fahrsicherheit und Federweg lässt sich mit einem Viertelfahrzeugmodell in einfacher Weise beurteilen. Das Fahrzeugsatzsystem besteht hierbei aus einem Zweimassensystem, das mit einem Reifenmodell gekoppelt ist (Abb. 6.21). Diese Modellreduktion ist bei einem Pkw zulässig, weil die Koppelmassen gegenüber der Aufbauteilmasse meist sehr klein sind. Obwohl sich somit nur geringe gegenseitige Beeinflussungen der Schwingungen ergeben, sind folgende Einschränkungen zu beachten:

- Bei der Komfortbewertung bleiben die Auswirkungen von Nick- und Wankschwingungen unberücksichtigt.
- Bei der Beurteilung der Fahrsicherheit können die Auswirkungen der Radlastschwankungen auf die Querdynamik des Fahrzeugs nicht untersucht werden. Hierfür ist die Verwendung eines komplexeren Reifenmodells notwendig, wie es zum Beispiel in Abschnitt 7.4 beschrieben wird.

Das ebene Viertelfahrzeugmodell ist in Abb. 6.21 dargestellt. Es besteht aus der Radmasse m_R und der anteiligen Aufbaumasse m_A . Die Massen sind über eine Feder (Federsteifigkeit c_A) und einen dazu parallelen Dämpfer (Dämpfungskonstante d_A) miteinander gekoppelt. Der Kontakt zur Fahrbahn wird über den Reifen hergestellt, welcher durch die Federsteifigkeit c_R modelliert wird. Die Dämpfung des Reifen kann in der Regel vernachlässigt werden

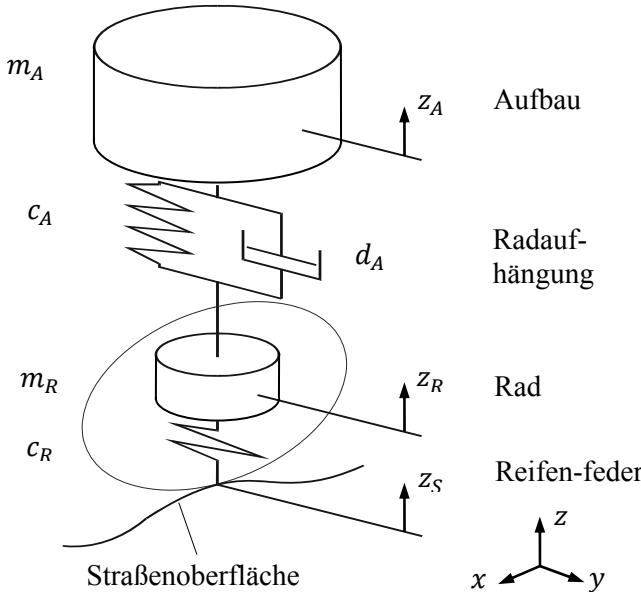


Abb. 6.21: Ebenes Viertelfahrzeugmodell

Die das Impulssätze für das System in z-Richtung lauten:

$$\text{Aufbau: } m_A \ddot{z}_A + d_A(\dot{z}_A - \dot{z}_R) + c_A(z_A - z_R) = 0 , \quad (6.1)$$

$$\text{Rad: } m_R \ddot{z}_R - d_A(\dot{z}_A - \dot{z}_R) - c_A(z_A - z_R) + c_R z_R = c_R z_S . \quad (6.2)$$

Zur Beurteilung von Ergebnissen wird ein Vergleichssystem benötigt. Beispielhaft können die Fahrzeugdaten in Tabelle 6.8, die sich an einem Serienfahrzeug der Oberklasse orientieren, verwendet werden.

Tabelle 6.8: Daten des passiven Referenzmodells

Parameter		Zahlenwert	Einheit
Radmasse	m_R	48	kg
Aufbaumasse (Anteil)	m_A	401	kg
Radfedersteifigkeit	c_R	235000	N/m
Aufbaufedersteifigkeit	c_A	28426	N/m
Aufbaudämpfung	d_A	2836	Ns/m

Um eine höhere Aussagegüte des Viertelfahrzeugmodells zu erhalten, kann man die anteilige Aufbaumasse durch Aufteilung der halben Aufbaumasse auf drei Punktmassen $m_{A,v}$ (Vorderachse), $m_{A,h}$ (Hinterachse) und m_K (Koppelmasse) ermitteln (Abb. 6.22). Aus den Bedingungen für

den Erhalt der Aufbaumasse $m_{A,ges}$, des Massenmittelpunktes S_A und des Massenträgheitsmomentes $\theta_y = m_A i_y^2$ (Trägheitsradius i_y),

$$m_{A,v} + m_{A,h} + m_K = m_{A,ges}, \quad (6.3)$$

$$m_{A,v} l_v + m_{A,h} l_h = 0, \quad (6.4)$$

$$m_{A,v} l_v^2 + m_{A,h} l_h^2 = m_A i_y^2, \quad (6.5)$$

ergeben sich die drei Ersatzmassen

$$m_{A,v} = m_{A,ges} \frac{i_y^2}{l_v l}, \quad m_{A,h} = m_{A,ges} \frac{i_y^2}{l_h l}, \quad (6.6)$$

$$m_k = m_{A,ges} \left(1 - \frac{i_y^2}{l_h l_v} \right). \quad (6.7)$$

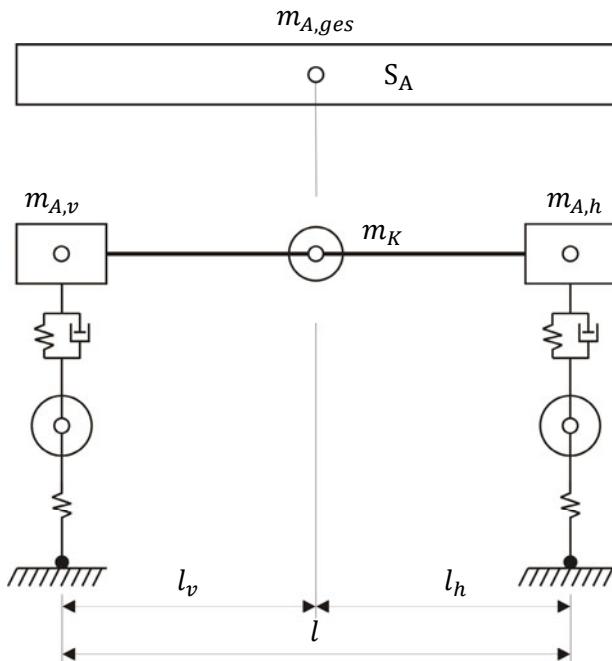


Abb. 6.22: Zur Herleitung der anteiligen Aufbaumasse

Für die radbezogene, anteilige Aufbaumasse m_A des Viertelfahrzeugmodells wird dann $m_A = \frac{1}{2} m_{A,v}$ (Vorderrad) bzw. $m_A = \frac{1}{2} m_{A,h}$ (Hinterrad) gesetzt.

Eine weitere Verfeinerung des Viertelfahrzeugmodells ist möglich durch die Berücksichtigung der kinematischen Übersetzung der Radaufhängungskräfte, wie sie in Abb. 6.23 dargestellt ist. Die kinematische Übersetzung λ ergibt sich aus der Einfederung z_s am Reifenaufstandspunkt und der Längenänderung z_r der Aufbaufederung:

$$\lambda(z_s) = \frac{dz_r}{dz_s} = \frac{\dot{z}_r}{\dot{z}_s}. \quad (6.8)$$

Aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit lässt sich ein Zusammenhang zwischen der Kraft F_s am Reifenaufstandspunkt und der Federkraft F_r wie folgt herleiten:

$$F_s \delta z_s = F_r \delta z_r = F_r \frac{dz_r}{dz_s} \delta z_s \rightarrow F_s = \frac{dz_r}{dz_s} F_r = \lambda F_r. \quad (6.9)$$

Damit berechnet sich die auf den Einfederweg z_s des Reifenaufstandspunkts bezogene Federsteifigkeit c_s :

$$c_s = \frac{dF_s}{dz_s} = \frac{d(\lambda F_r)}{dz_s} = \frac{d\lambda}{dz_s} F_r + \lambda \frac{dF_r}{dz_s} = \underbrace{\frac{d\lambda}{dz_s} F_r}_{c_A} + \lambda \underbrace{\frac{dF_r}{dz_r} \frac{dz_r}{dz_s}}_{\lambda}, \quad (6.10)$$

$$c_s = \frac{d\lambda}{dz_s} F_r + \lambda^2 c_A. \quad (6.11)$$

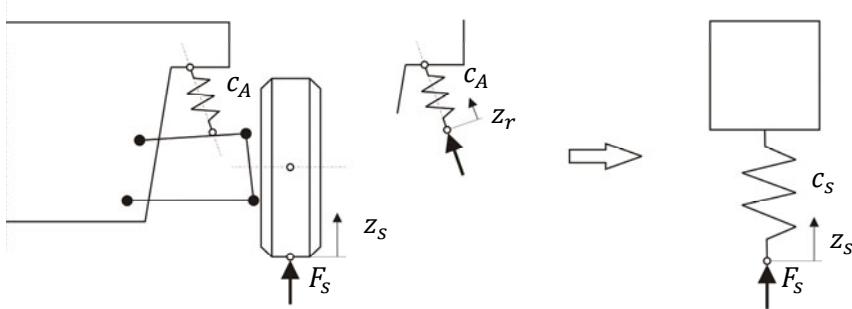


Abb. 6.23: Kinematische Übersetzung der Radaufhängungskräfte

6.5 Räumliches Modell einer McPherson-Radaufhängung

Die Verwendung von radführenden Feder- oder Dämpferbeinen nach dem McPherson-Prinzip ist im Automobilbau sehr verbreitet. Dämpferbeinachsen unterscheiden sich von Federbeinachsen dadurch, dass die Feder nicht

auf dem Dämpferrohr sondern auf dem Querlenker abgestützt wird. Man findet McPherson-Radaufhängungen bei Personenwagen von der Kleinwagenklasse bis zur oberen Mittelklasse sowie in Vans und Kleintransportern (Beispiele : Fiat Punto, Ford Fiesta, VW Golf, Opel Vectra, Porsche Boxter, VW Sharan, Mercedes-Benz Sprinter). Die Bauart zeichnet sich durch einen geringen Raumbedarf und günstige Eigenschaften der Radführung aus. Die Kinematik der McPherson-Radaufhängung ist Gegenstand vieler Untersuchungen, z.B. (Cronin 1981) oder (Schmidt 1987). Am Beispiel dieser Radaufhängung werden die Vorteile des hier beschriebenen Verfahrens gegenüber anderen Ansätzen deutlich. Es gelingt, explizit auflösbare kinematische Gleichungen in einer kompakten Form aufzustellen.

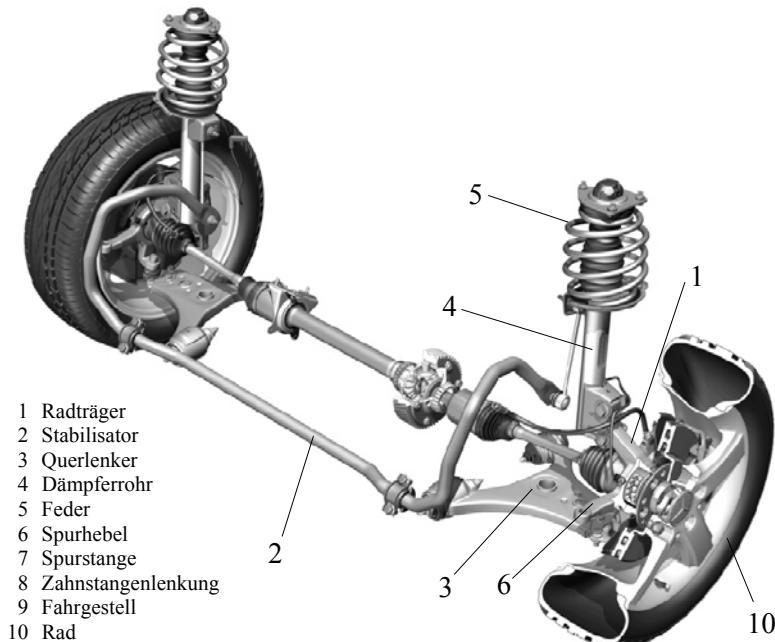


Abb. 6.24: McPherson-Federbein-Vorderachse der Mercedes B-Klasse (mit freundlicher Genehmigung der Daimler AG, 2009)

6.5.1 Kinematische Analyse

In Abb. 6.24 ist die Federbeinachse der Mercedes B-Klasse dargestellt. Der Radträger (1), auf dem das Rad (10) drehbar gelagert ist, ist fest mit der unteren Hälfte des Stoßdämpferrohrs (4) verbunden. Die Dämpferachse gleitet in einer radträgerfesten Führung und ist am oberen Ende über ein Kugelgelenk am Fahrgestell gelagert. An der äußeren Hülle der Dämpf-

ferführung stützt sich die Feder (5) gegen den Aufbau ab. Am unteren Teil der Feder greift als ein weiteres Kraftelement der Stabilisator (2) an. Die Führung des Radträgers wird zusätzlich vom Querlenker (3) übernommen, der drehbar am Fahrgestell (9) gelagert ist. Zwischen Querlenker und Radträger befindet sich ein weiteres Kugelgelenk. Der Radträger kann sich damit bei der Lenkbewegung um die Verbindungslinie der Kugelgelenke drehen. Die Lenkbewegung wird über eine Spurstange (7) mit Kugelgelenken an den Enden in den Spurhebel (6), der Teil des Radträgers (1) ist, eingeleitet. Am fahrzeugseitigen Kugelgelenk der Spurstange kann die Lenkbewegung zum Beispiel durch eine Drehbewegung (Schneckenrollen- und Kugelmutterhydrolenkungen) oder eine Längsbewegung (Zahnstangenlenkung (8)) erzeugt werden.

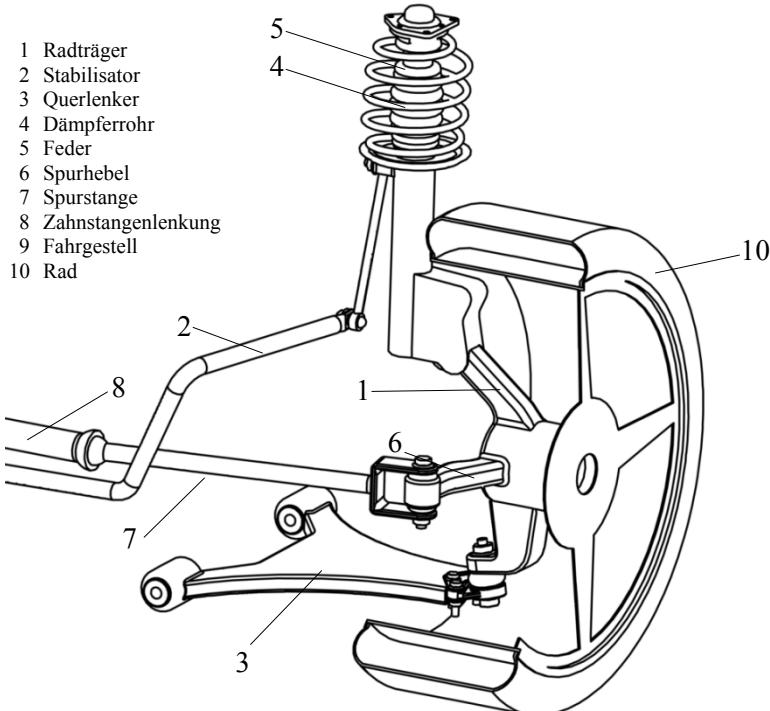


Abb. 6.25: Mehrkörpermodell einer McPherson-Radaufhängung

Ausgehend von der oben beschriebenen Struktur des realen Systems wird das in Abb. 6.25 gezeigte Mehrkörpermodell entworfen. Es enthält dieselben Elemente wie die in Abb. 6.24 dargestellte Vorderachse. Zusätzlich wurden zur Modellierung des Lenkmechanismus auch noch die Spurstange (7) und die Zahnstange (8) hinzugefügt. Da die Feder und der

Dämpfer keine Bestandteile des kinematischen Modells sind, werden diese weggelassen.

Aus dem in Abb. 6.25 dargestellten Modell der McPherson-Radaufhängung wird nun ein Ersatzsystem als Mehrkörpermodell hergeleitet, welches nur noch aus starren Körpern und Gelenken besteht und die Grundlage für die weiteren kinematischen Analysen bildet. In der hier gewählten Modellierung ist die fahrzeugseitige Querlenkerlagerung durch ein Drehgelenk mit einem rotatorischen Freiheitsgrad ausgeführt. Damit lässt sich das Starrkörpermodell wie in Abb. 6.26 darstellen.

Ersetzt man zur Elimination des isolierten Freiheitsgrades der Spurstange ihr radträgerseitiges Kugelgelenk durch ein Kardangelenk (zwei Drehgelenke mit einem virtuellen Zwischenkörper) und die übrigen im Modell auftretenden Kugelgelenke durch je drei Drehgelenke mit zwei virtuellen Zwischenkörpern, so erhält man die in Abb. 6.27 dargestellte Systemtopologie. Die Anzahl der unabhängigen kinematischen Schleifen n_L ergibt sich durch Auszählen der vorhandenen Gelenke und Körper (ohne Grundkörper), wobei alle Gelenke über Elementargelenke ausgedrückt sind.

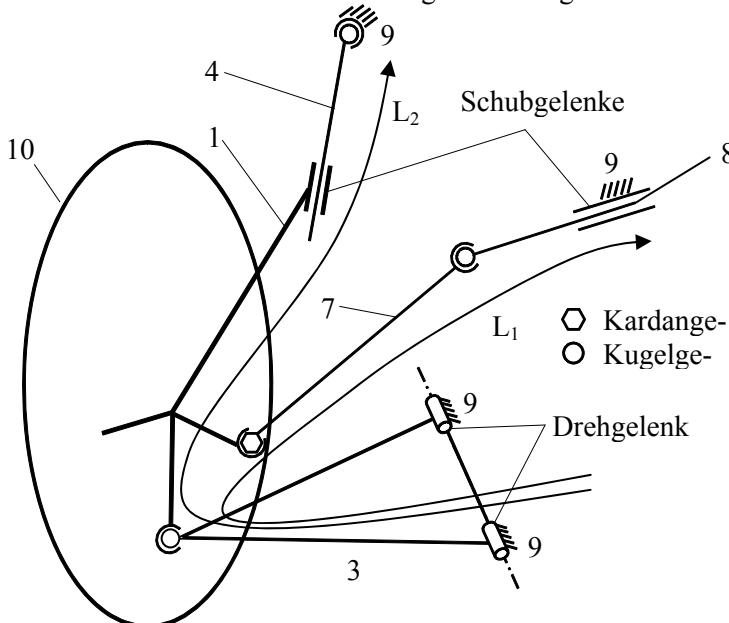


Abb. 6.26: Starrkörpermodell der McPherson-Radaufhängung - Strukturbild

Ohne Berücksichtigung des Rades gilt:

$$\begin{aligned} \text{Anzahl Gelenke } n_G &= 14 \\ \text{Anzahl Körper } n_B &= 12 \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\text{Anzahl Schleifen } n_L = n_G - n_B \quad n_L = 2$$

Die Schleife L_1 führt über den Querlenker (3), den Radträger (1) und das Dämpferrohr (4) zurück zum Fahrgestell (9). Nach Zusammenfassung der beiden Gelenk-Koordinaten des isolierten Freiheitsgrades (zwei Kugelgelenke in der Schleife) verbleiben 7 Koordinaten, also eine verallgemeinerte Koordinate α als Eingang und sechs, zunächst unbekannte Koordinaten als Ausgang. Damit kann die Schleife L_1 aufgelöst werden.

Die Schleife L_2 beinhaltet den Lenkmechanismus (7 und 8). Sie enthält (ohne isolierten Freiheitsgrad) 10 Gelenk-Koordinaten, also vier Eingänge. Drei der Gelenk-Koordinaten (vier minus eines isolierten Freiheitsgrads) sind auch in der Schleife L_1 enthalten, also bereits bekannt. Der vierte Eingang muss dann die zweite verallgemeinerte Koordinate des Gesamtsystems sein, hier die Verschiebung s der Zahnstange. Damit ist auch die zweite Schleife auflösbar und der Lösungsfluss liegt fest: Man erkennt, dass es sich um ein explizit auflösbares System handelt.

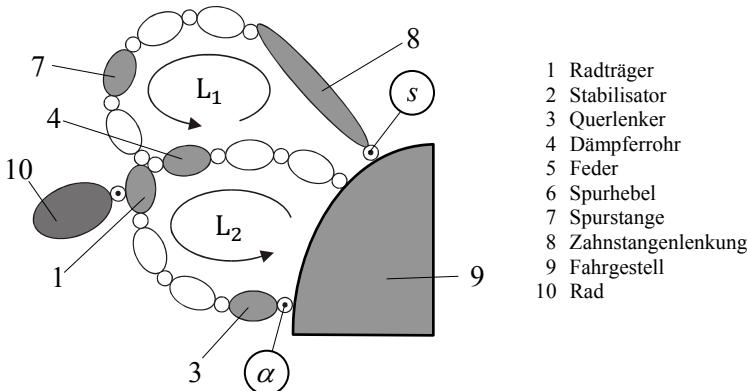


Abb. 6.27: Gelenk-Körper-Darstellung der McPherson-Radaufhängung

Zur übersichtlichen Darstellung des zuvor beschriebenen expliziten Lösungsflusses lassen sich auch die in Kapitel 3 vorgestellten kinematischen Transformatoren verwenden. In Abb. 6.28 ist die Verknüpfung der beiden Schleifen für den günstigsten Lösungsfluss als Blockschaltbild dargestellt. Im nachfolgenden Abschnitt ist die Vorgehensweise zur expliziten Bestimmung von Lage, Geschwindigkeit und Beschleunigung der Radaufhängung in Abhängigkeit von den beiden verallgemeinerten Gelenkkoordinaten α und s beschrieben. Dazu wird zunächst dass nichtlineare Übertragungsverhalten der Schleifen L_1 und L_2 mit Hilfe der Methode des *charakteristischen Gelenkpaares* (Woernle 1988) analysiert (s. auch Kapi-

tel 3). Die zeitlichen Ableitungen – *Geschwindigkeit* und *Beschleunigung* – werden anschließend berechnet.

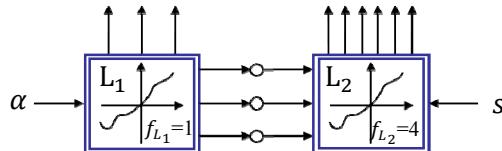


Abb. 6.28: Blockschaltbild der McPherson-Radaufhängung mit explizitem Lösungsfluss

6.5.2 Explizite Lösung

Position

Die Schleife L_1 wird an den beiden Kugelgelenken aufgeschnitten und in ein oberes und ein unteres Segment aufgeteilt (Abb. 6.29). Das obere Segment enthält den Radträger und das Dämpferbein, das untere Segment besteht aus dem Fahrgestell und dem Querlenker. Die Aufgabe besteht in der Ermittlung des Abstandes d der Punkte R_1 und F_2 in beiden Segmenten. Im unteren Segment sind die fahrgestellfesten Punkte F_1 und F_2 und die Querlenkerachse \mathbf{u}_1 gegeben. Damit gelingt die Ermittlung des Verbindungsvektors $\mathbf{r}_{1,2}$ der Punkte R_1 und F_2

$$\mathbf{r}_{1,2} = \mathbf{f}_2 - \mathbf{r}_{F,1} = \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1 - \mathbf{r}_{1,1}. \quad (6.13)$$

Der Vektor $\mathbf{r}_{1,1}$ entsteht aus der Drehung des Vektors $\mathbf{r}_{1,10}$ mit dem Winkel α um die Achse \mathbf{u}_1 . Der Vektor $\mathbf{r}_{1,10}$ beschreibt die Querlenkerstellung für $\alpha = 0$. Man kann diese Bezugsrichtung beliebig wählen, der Vektor muss lediglich mit der Achse \mathbf{u}_1 einen konstruktiv gegebenen Winkel (hier 90°) einschließen und einen ebenso gegebenen Abstand von ihr haben. Man erhält

$$\mathbf{r}_{1,1} = \mathbf{T}(\mathbf{u}_1, \alpha) \mathbf{r}_{1,10}. \quad (6.14)$$

Alle Vektoren aus (6.13) und (6.14) können in Komponenten des Fahrzeugsystems angeschrieben werden. Damit ergibt sich als Bindungsparameter das Quadrat d_u^2 des gesuchten Abstands im unteren Segment

$$d_u^2 = {}_{F}\mathbf{r}_{1,2}^T {}_{F}\mathbf{r}_{1,2}. \quad (6.15)$$

Im oberen Segment ist der Abstand d_0 von der Hilfsgröße h abhängig. Man erhält hier die folgende Vektorbeziehung, die in Komponenten des Radträgersystems K_R aufgestellt werden kann:

$$\mathbf{r}_{1,2} = \mathbf{p}_2 + h\mathbf{u}_2 , \quad (6.16)$$

$$d_0^2 = {}_R\mathbf{r}_{1,2}^T {}_R\mathbf{r}_{1,2} . \quad (6.17)$$

Das Gleichsetzen von (6.15) und (6.17) liefert eine Gleichung, welche nach der unbekannten Gelenkkoordinate h aufgelöst werden kann. Damit ist die Verschiebung des Dämpferbeins in seiner Führung bekannt. Außerdem liegt mit der Lage der Punkte R_1 und F_2 die momentane Lenkachse fest, welcher der Einheitsvektor \mathbf{u}_R (Abb. 6.30) zugeordnet wird. Die Position der Schleife L_1 ist damit bekannt.

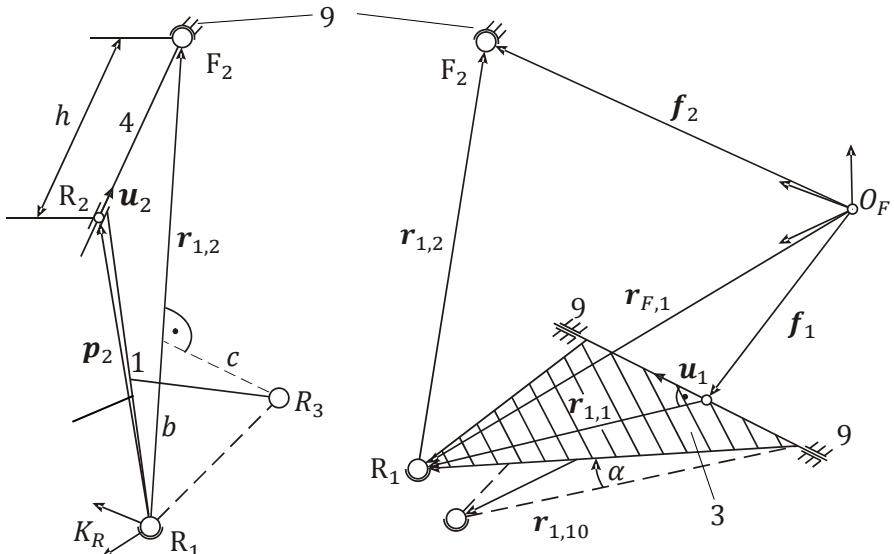


Abb. 6.29: Zerlegung der Schleife L_1 in zwei Segmente

Die Schleife L_2 wird nun ebenfalls in zwei Segmente zerlegt, wobei das obere Segment hier nur die Spurstange ist, deren Länge bekannt ist. Damit ist der Bindungsparameter d_0^2 unmittelbar gegeben. Im unteren Segment kann zunächst die Lage des Zahnstangen-Endpunktes E_1 als Funktion der verallgemeinerten Koordinate s (Zahnstangenverschiebung) angegeben werden zu:

$$\mathbf{r}_{F,E_1} = \mathbf{f}_3 + s \mathbf{u}_4 . \quad (6.18)$$

Die Lage des Punktes R_3 resultiert aus der Drehung des Radträgers mit dem unbekannten Winkel φ um die momentane Lenkachse \mathbf{u}_3 . Hier ist die Konstruktion der Ausgangslage - gegeben durch den Vektor $\mathbf{p}_{3,0}$ - nicht ganz einfach. Im radträgerfesten System K_R können nach der Auflösung

der ersten Schleife durch Projektion des Radträgerpunktes R_3 auf die momentane Lenkachse (gegeben durch $\mathbf{r}_{1,2}$) die Strecken b und c errechnet werden (Abb. 6.29). Damit kann im Fahrzeugsystem ein mit der Geometrie verträglicher Vektor $\mathbf{p}_{3,0}$ konstruiert werden. Man beschafft sich zunächst einen Einheitsvektor \mathbf{u}_5 , der auf der Lenkachse senkrecht steht, z.B.

$$\mathbf{u}_5 = \frac{\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{F,1}}{\|\mathbf{u}_3 \times \mathbf{r}_{F,1}\|}. \quad (6.19)$$

Damit ergibt sich weiter:

$$\mathbf{p}_{30} = b \mathbf{u}_3 + c \mathbf{u}_5, \quad (6.20)$$

$$\mathbf{r}_{F,3} = \mathbf{r}_{F,1} + \mathbf{T}(\mathbf{u}_3, \varphi) \mathbf{p}_{30}, \quad (6.21)$$

$$d_u^2 = (\mathbf{r}_{F,3} - \mathbf{r}_{F,E_1})^T (\mathbf{r}_{F,3} - \mathbf{r}_{F,E_1}). \quad (6.22)$$

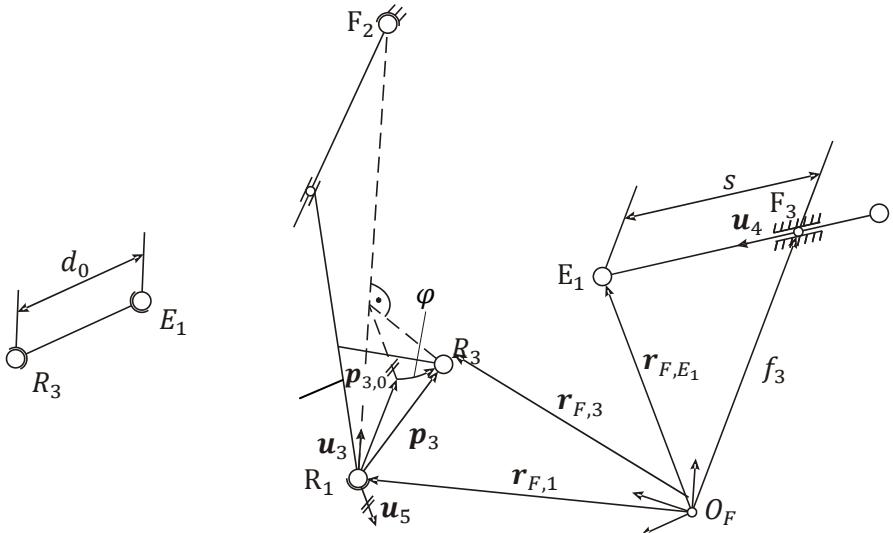


Abb. 6.30: Zerlegung der Schleife L_2 in zwei Segmente

Gleichsetzen von d_u^2 mit der gegebenen Größe d_0^2 ergibt eine explizit auflösbare Gleichung für den unbekannten Winkel φ . Dieser ist selbst nicht von Interesse, dient jedoch zur Bestimmung des Ortsvektors $\mathbf{r}_{F,3}$ nach Gl. (6.21). Damit ist die Ermittlung der Position erledigt. Die Lage der Punkte R_1 , F_2 und R_3 ist nun sowohl in Komponenten des Fahrzeugsystems als auch in Komponenten des Radträgersystems gegeben. Die Ermittlung der

Transformationsmatrix ${}^F\mathbf{T}_R$ zwischen den beiden Systemen kann dann entsprechend Abschnitt 2.2 erfolgen.

Geschwindigkeiten

Bei bekannter Position wird nun jede Schleife an einem Kugelgelenk aufgeschnitten. Dann wird die Geschwindigkeit des Gelenkpunktes von beiden Seiten her bestimmt und gleichgesetzt. Die entstehende Vektorgleichung wird durch günstige Projektionen aufgelöst. In der Schleife L₁ soll die Geschwindigkeit ${}_F\mathbf{v}_{F_2}$ des Gelenkpunktes F₂ (Abb. 6.29) relativ zum Fahrzeug aufgestellt werden. Von der Fahrzeugseite aus ergibt sich unmittelbar:

$${}_F\mathbf{v}_{F_2} = 0. \quad (6.23)$$

Auf dem zweiten Weg erhält man die Geschwindigkeit ${}_F\mathbf{v}_{F_2}$ für die Relativbewegung von Körpern:

$$\begin{aligned} {}_F\mathbf{v}_{F2} &= {}_F\mathbf{v}_{R1} + {}_F\boldsymbol{\omega}_R \times \mathbf{r}_{1,2} + {}_R\mathbf{v}_{F2} \\ &= \dot{\alpha}\mathbf{u}_1 \times \mathbf{r}_{1,1} + {}_F\boldsymbol{\omega}_R \times \mathbf{r}_{1,2} + \dot{h}\mathbf{u}_2. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Durch Gleichsetzen von (6.23) und (6.24) und Bildung des Skalarproduktes mit dem Vektor $\mathbf{r}_{1,2}$ erhält man die unbekannte Geschwindigkeit \dot{h} :

$$\dot{h} = -\frac{(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{r}_{1,1})\mathbf{r}_{1,2}}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{r}_{1,2}} \dot{\alpha}. \quad (6.25)$$

Das Vektorprodukt von $\mathbf{r}_{1,2}$ mit beiden Seiten der Gl. (6.24) führt auf denjenigen Anteil $({}_F\boldsymbol{\omega}_R)_s$ der Radträger-Winkelgeschwindigkeit, der senkrecht auf dem Vektor $\mathbf{r}_{1,2}$ steht (der restliche Anteil kann aus der ersten Schleife nicht bestimmt werden):

$$({}_F\boldsymbol{\omega}_R)_s = -\frac{\mathbf{r}_{1,2} \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{r}_{1,1})}{\mathbf{r}_{1,2} \cdot \mathbf{r}_{1,2}} \dot{\alpha} - \frac{(\mathbf{r}_{1,2} \times \mathbf{u}_2)}{\mathbf{r}_{1,2} \cdot \mathbf{r}_{1,2}} \dot{h}. \quad (6.26)$$

Die Berechnung der Geschwindigkeiten in der zweiten Schleife erfolgt analog (siehe Abb. 6.30). Hier wird die Geschwindigkeit ${}_F\mathbf{v}_{R_3}$ des Gelenkpunktes R₃ relativ zum Fahrgestell auf zwei Wegen ermittelt und gleichgesetzt. Die Betrachtung der Radträgerbewegung liefert:

$${}_F\mathbf{v}_{R_3} = {}_F\mathbf{v}_{R_1} + (({}_F\boldsymbol{\omega}_R)_s + \dot{\phi}\mathbf{u}_3) \times \mathbf{p}_3. \quad (6.27)$$

Die Geschwindigkeit ${}_F\mathbf{v}_{R_1}$ des Punktes R_1 und die senkrecht auf der Lenkachse stehende Komponente $({}_F\boldsymbol{\omega}_R)_S$ der Winkelgeschwindigkeit des Radträgers sind bereits bekannt, gesucht wird die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$, mit der sich der Radträger um die momentane Lenkachse dreht. Für die Geschwindigkeit ${}_F\mathbf{v}_{R_3}$ gilt außerdem, wenn man sie über die Zahnstangen- und Spurstangenbewegung ermittelt:

$${}_F\mathbf{v}_{R_3} = \dot{s} \mathbf{u}_4 + {}_F\boldsymbol{\omega}_S \times (\mathbf{r}_{F,3} - \mathbf{r}_{F,E_1}). \quad (6.28)$$

Hier ist die Translationsgeschwindigkeit \dot{s} der Zahnstange als Eingangsgröße gegeben, die Winkelgeschwindigkeit ${}_F\boldsymbol{\omega}_S$ der Spurstange ist unbekannt, man kann wieder nur ihre senkrecht auf der Spurstange stehende Komponente $({}_F\boldsymbol{\omega}_S)_S$ bestimmen. Nach Gleichsetzen von (6.27) und (6.28) erhält man analog zu oben:

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{s} \mathbf{u}_4 - {}_F\mathbf{v}_{R_1} - ({}_F\boldsymbol{\omega}_R)_S \times \mathbf{p}_3}{(\mathbf{u}_3 \times \mathbf{p}_3)(\mathbf{r}_{F,3} - \mathbf{r}_{F,E_1})}. \quad (6.29)$$

Damit ist die Winkelgeschwindigkeit ${}_F\boldsymbol{\omega}_R$ des Radträgers relativ zum Fahrgestell vollständig bekannt:

$${}_F\boldsymbol{\omega}_R = ({}_F\boldsymbol{\omega}_R)_S + \dot{\varphi} \mathbf{u}_3. \quad (6.30)$$

Für die Winkelgeschwindigkeit der Spurstange gilt schließlich:

$$({}_F\boldsymbol{\omega}_S)_S = \frac{(\mathbf{r}_{F,3} - \mathbf{r}_{F,1}) \times ({}_F\mathbf{v}_{R_1} + {}_F\boldsymbol{\omega}_R \times \mathbf{p}_3 - \dot{s} \mathbf{u}_4)}{(\mathbf{r}_{F,3} - \mathbf{r}_{F,E_1})(\mathbf{r}_{F,3} - \mathbf{r}_{F,E_1})}. \quad (6.31)$$

Damit sind die Geschwindigkeiten aller Körper relativ zum Fahrgestell bekannt. Mit den Beziehungen der Relativbewegungen kann - falls benötigt - die Geschwindigkeit im Inertialsystem bestimmt werden. Die zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen benötigten kinematischen Differentielle (siehe Abschnitt 4.6.1) ergeben sich unmittelbar aus den Gln. (6.23) bis (6.31), wenn man sie mit Hilfe der Pseudo-Eingangsgeschwindigkeiten auswertet:

$$a) \dot{\alpha} = 1, \quad \dot{s} = 0, \quad b) \dot{\alpha} = 0, \quad \dot{s} = 1. \quad (6.32)$$

Beschleunigungen

Für die Berechnung der Beschleunigungen wird dieselbe Vorgehensweise wie bei den Geschwindigkeiten angewandt. Die aufgeschnittenen Schlei-

fen sind in Abb. 6.29 und Abb. 6.30 dargestellt. In der Schleife L₁ wird die Beschleunigung ${}_F\boldsymbol{\alpha}_{F_2}$ des Gelenkpunktes F₂ auf zwei Arten bestimmt:

$${}_F\boldsymbol{\alpha}_{F_2} = 0, \quad (6.33)$$

$${}_F\boldsymbol{\alpha}_{F_2} = \ddot{\alpha} \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{r}_{1,1} + \dot{\alpha}^2 \boldsymbol{u}_1 \times (\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{r}_{1,1}) + {}_F\boldsymbol{\alpha}_R \times \boldsymbol{r}_{1,2} + 2 {}_F\boldsymbol{\omega}_R \times \dot{h} \boldsymbol{u}_2 + {}_F\boldsymbol{\omega}_R \times ({}_F\boldsymbol{\omega}_R \times \boldsymbol{r}_{1,2}) + \ddot{h} \boldsymbol{u}_2. \quad (6.34)$$

Aus den Gln. (6.33) und (6.34) wird die Beschleunigung \ddot{h} am Dämpferrohr und die auf der Lenkachse senkrechte Winkelbeschleunigungskomponente $({}_F\dot{\alpha}_R)_s$ des Radträgers ermittelt. Die Beschleunigung ${}_F\boldsymbol{\alpha}_{R_3}$ des Punktes R₃ in der zweiten Schleife erhält man erneut auf zwei Wegen:

$${}_F\boldsymbol{\alpha}_{R_3} = \ddot{\alpha} \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{r}_{1,1} + \dot{\alpha}^2 \boldsymbol{u}_1 \times (\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{r}_{1,1}) + (({}_F\boldsymbol{\alpha}_R)_s + \ddot{\phi} \boldsymbol{u}_3) \times \boldsymbol{p}_3 + {}_F\boldsymbol{\omega}_R \times ({}_F\boldsymbol{\omega}_R \times \boldsymbol{p}_3), \quad (6.35)$$

$${}_F\boldsymbol{\alpha}_{R_3} = \ddot{s} \boldsymbol{u}_4 + {}_F\boldsymbol{\alpha}_R \times (\boldsymbol{r}_{F_3} - \boldsymbol{r}_{F,E_1}) + {}_F\boldsymbol{\omega}_S \times ({}_F\boldsymbol{\omega}_S \times (\boldsymbol{r}_{F_3} - \boldsymbol{r}_{F,E_1})). \quad (6.36)$$

Aus (6.35) und (6.36) erhält man über die Größe $\ddot{\phi}$ die Winkelbeschleunigung ${}_F\ddot{\alpha}_R$ des Radträgers und die senkrechte Komponente $({}_F\ddot{\alpha}_F)_s$ die Winkelbeschleunigung der Spurstange. Damit ist die Ermittlung der Beschleunigungen vollständig. Für die Aufstellung der Bewegungsgleichungen werden die Beziehungen (6.33) bis (6.36) mit den speziellen verallgemeinerten Beschleunigungen

$$\ddot{\alpha} = 0, \quad \ddot{s} = 0 \quad (6.37)$$

ausgewertet. Die kinematische Analyse der McPherson-Radaufhängung ist damit abgeschlossen. Es fällt besonders ins Auge, dass die Bindungsgleichungen des Gesamtsystems explizit auflösbar sind, also keine iterative Ermittlung von Unbekannten notwendig war. Hierdurch unterscheidet sich dieses Verfahren wesentlich von dem Ansatz, den (Schmidt und Wolz 1987) wählen. Sie stellen die Bindungsgleichungen durch einen Schnitt an einem Körper (*Körperverdopplung*) und nicht durch die Betrachtung eines *charakteristischen Gelenkpaares* (Woernle 1988) auf und erhalten damit zwar einheitliche und gut formalisierbare, aber eben nur numerisch auflösbare Bindungsgleichungen. Dadurch ergibt sich eine wesentlich höhere Rechenzeit, die bei Simulationsanwendungen unerwünscht ist.

Weiter fällt auf, dass sämtliche Gleichungen zur Ermittlung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen in Vektorform aufgestellt wurden.

Neben der besonders übersichtlichen Darstellung hat dies den Vorteil, dass der Übergang auf Komponentendarstellungen erst ganz zuletzt bei der numerischen Auswertung erfolgen kann. Man ist damit in der Wahl des Bezugssystems für jeden einzelnen Term völlig frei.

6.6 Räumliches Modell einer Fünfpunkt-Hinterradaufhängung

Die Fünfpunkt- oder Raumlenker-Radaufhängung, wie sie zum Beispiel bei der Daimler AG als Hinterradaufhängung in der Mittel- und Oberklasse eingesetzt wird, ist in Abb. 6.31 dargestellt. Diese Radaufhängung stellt eine Baueinheit dar, die sich in ihren Kinematikkennwerten genau einstellen lässt. Die Vorteile einer solchen Aufhängung liegen besonders in den guten kinematischen Gestaltungsmöglichkeiten, der präzisen Radführung, der guten elasto-kinematischen Abstimmbarkeit und der guten Längs- und Querfederung. Der sehr hohe Bauaufwand und die dadurch entstehenden Kosten bilden die wesentlichen Nachteile dieser Bauart.

Am Beispiel dieser Radaufhängung werden im Folgenden im Gegensatz zu Abschnitt 6.5.2 die Vorteile des impliziten Lösungsverfahrens verdeutlicht.

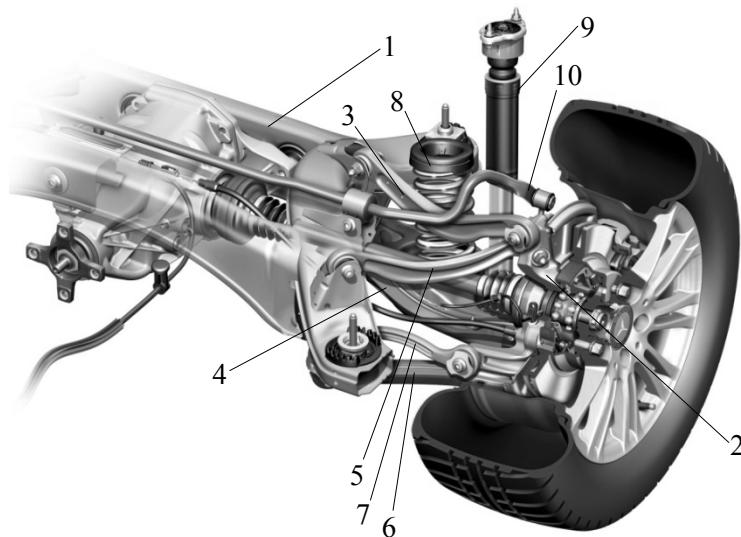


Abb. 6.31: Hinterachse der Mercedes E-Klasse (mit freundlicher Genehmigung der Daimler AG, 2009)

6.6.1 Kinematische Analyse

Als Grundbaustein erkennt man in Abb. 6.31 den Fahrschemel (1), welcher biegesteif, jedoch torsionsweich ausgeführt ist. Dieser Fahrschemel wird über vier Gummilager mit der Bodengruppe verbunden. Die Lager übernehmen gleichzeitig einen Teil der Geräuschdämpfung. Der Radträger (2) wird nun über fünf räumlich angeordnete Querlenker (3-7) mit dem Schebel verbunden. Jeder Querlenker ist mit je einem, teilweise elastisch gelagerten Dreh- oder Kugelgelenk am Fahrgestell und am Radträger befestigt. Die Gelenke werden durch Gummibuchsen gegen unerwünschte Vibratiorionen gedämpft. An einem dieser Lenker, dem Federlenker (4), stützen sich der Stoßdämpfer (8) und die Schraubenfeder (9) ab und gleichzeitig ist der Stabilisator (10) daran befestigt. Die speziellen kinematischen Eigenschaften einer solchen Aufhängung werden nun durch die unterschiedlichen Längen der fünf Querlenker erreicht. Der Radträger (2) wird durch die Sturzstrebe (3) und den Federlenker (4) in Querrichtung geführt, während die Zugstrebe(5) und die Schubstrebe (6) vor allem die Längsausrichtung der Radträgers definieren. Mit der Lage der Spurstange (7) kann man die kinematische Vorspuränderung ausschalten oder bestimmen. Im Hinblick auf die Verwendung der Fünfpunkt-Radaufhängung an einer gelenkten Achse könnte genau dieser Lenker mit der Lenkstange verbunden werden.

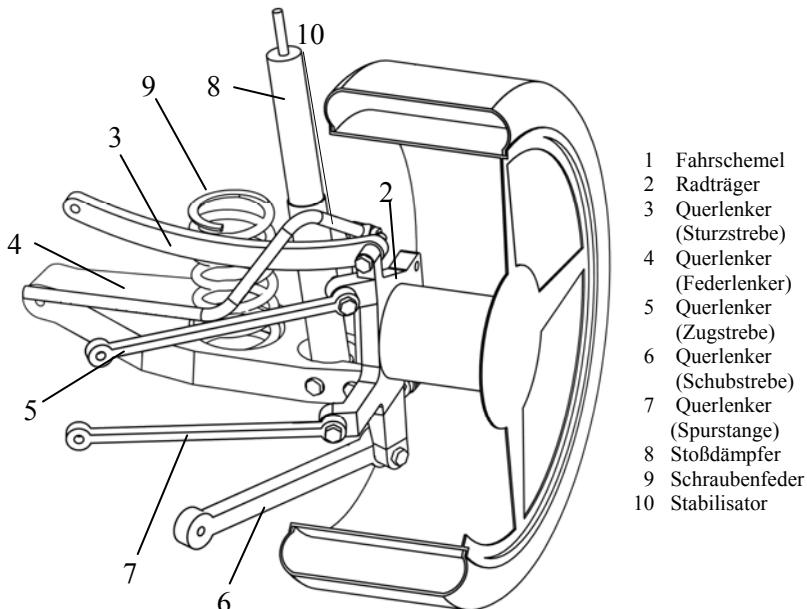


Abb. 6.32: Mehrkörpermodell der Fünfpunkt-Radaufhängung

Ausgehend von der zuvor beschriebenen Struktur des realen Systems wird das in Abb. 6.32 gezeigte Mehrkörpermodell entworfen. Es enthält dieselben wesentlichen Elemente wie das in Abb. 6.31 gezeigte reale Radaufhängungssystem. Allerdings sind die Feder und der Dämpfer keine Bestandteile des kinematischen Modells. Diese können beim Schritt der Abstraktion vom realen zum Mehrkörpermodell weggelassen werden. Zur besseren Veranschaulichung wurden sie aber mit in Abb. 6.32 aufgenommen.

Aus dem in Abb. 6.32 dargestellten Modell der Fünfpunkt-Radaufhängung wird nun ein Ersatzmodell hergeleitet. Dieses Mehrkörpermodell besteht nur noch aus starren Körpern und Gelenken und bildet die Grundlage für alle folgenden Betrachtungen der Radaufhängung. Durch geeignete Vereinfachung erhält man das in Abb. 6.33 abgebildete Starrkörpermodell.

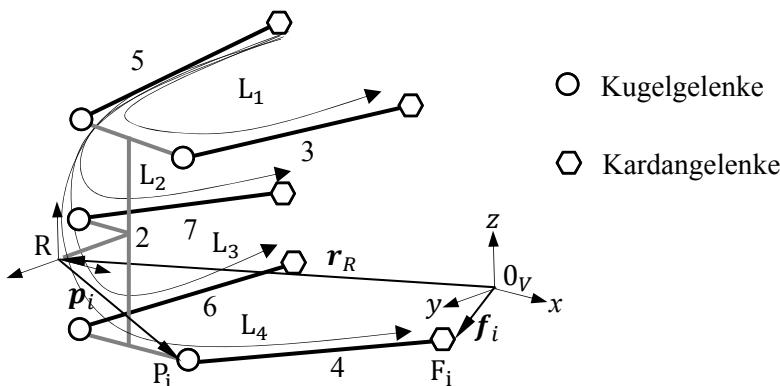


Abb. 6.33: Starrkörpermodell der Fünfpunkt-Radaufhängung

Im Starrkörpermodell werden die Gummibuchsen, welche die Lagerung der fünf Querlenker übernehmen, durch ideale Kugelgelenke ersetzt. Die Querlenker werden als einfache Stäbe modelliert. Auf den Stabilisator wird ganz verzichtet, da er keinen Einfluss auf das kinematische Verhalten der Aufhängung ausübt. Die Massen der einzelnen Bauteile werden im Rahmen dieser Betrachtung nicht berücksichtigt bzw. dem Radträger zugeschlagen.

Aus dem hergeleiteten Starrkörpermodell wird nun eine Gelenk-Körper-Darstellung entwickelt. Da die fünf Lenker an beiden Enden mit einem Kugelgelenk (je 3 Freiheitsgrade) an die Struktur angeschlossen sind, besitzen sie je einen sogenannten isolierten Freiheitsgrad, nämlich die Drehung um die eigene Längsachse. Da diese Bewegung auf das kinematische Verhalten der gesamten Achse keinen Einfluss hat, werden alle fahrzeugseitigen Kugelgelenke durch Kardangelenke (je 2 Freiheitsgrade) ersetzt.

Dadurch bleibt die globale Kinematik der Achse erhalten, die isolierten Freiheitsgrade der fünf Lenker sind aber eliminiert. Somit ergibt sich eine Gelenk-Körper-Darstellung, wie sie aus der Abb. 6.34 ersichtlich ist.

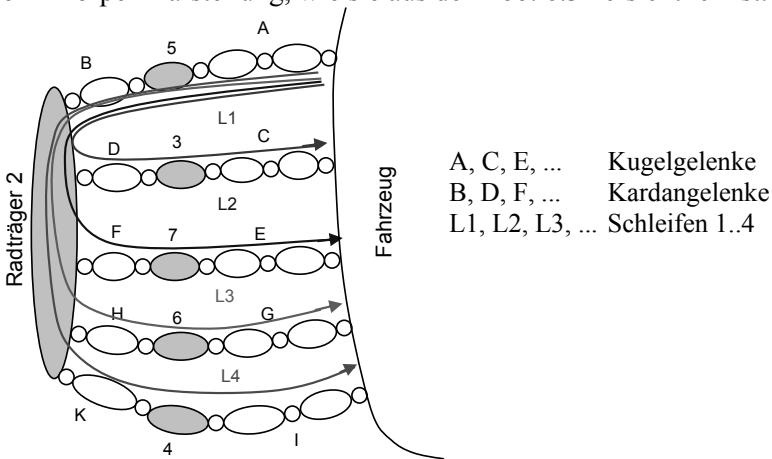


Abb. 6.34: Gelenk-Körper-Darstellung (Topologie) der Fünfpunkt-Radaufhängung

Die Anzahl der unabhängigen kinematischen Schleifen n_L erhält man durch Auszählen der vorhandenen Gelenke und Körper (ohne Grundkörper \equiv Fahrzeugaufbau). Es gilt:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Anzahl Gelenke } n_G & n_G = 10 \\
 \text{Anzahl Körper } n_B & n_B = 6 \\
 \text{Anzahl Schleifen } n_L = n_G - n_B & n_L = 4
 \end{array} \quad (6.38)$$

Die Anzahl der Freiheitsgrade f der Radaufhängung wird nun mit Hilfe des Grübler-Kutzbach-Kriteriums (s. Abschnitt 3.3) berechnet (ohne isolierte Freiheitsgrade):

$$f = \sum_i^{n_G} f_{G_i} - 6n_L = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 2 - 6 \cdot 4 = 1, \quad (6.39)$$

wobei f_{G_i} die Anzahl der Freiheitsgrade des Gelenkes „ i “ beschreibt. Die hier betrachtete Fünfpunkt-Radaufhängung besitzt also genau einen Freiheitsgrad, welcher der vertikalen Einfederung entspricht. Es liegt nahe, diesem Freiheitsgrad eine verallgemeinerte Koordinate zuzuordnen, zum Beispiel die Vertikalauslenkung des Radträgers. Im Hinblick auf einen günstigen Lösungsfluss zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen ist es allerdings hilfreich, wenn die verallgemeinerte Koordinate einer Gelenk-

koordinate zugeordnet wird. Deshalb wird hier zur Herleitung des im nachfolgenden Abschnitt beschriebenen Lösungsflusses ein Gelenkwinkel als verallgemeinerte Koordinate q_{allg} ausgewählt.

6.6.2 Implizite Lösung

Um eine übersichtliche Darstellung des Vorgehens beim Lösen der kinematischen Schleifen zu erhalten, wird an dieser Stelle die Relativkinematik des Systems durch Verknüpfungen von kinematischen Transformatoren (s. Abschnitt 3.5) entwickelt. Jede Schleife wird dabei durch eine Black-Box dargestellt, und diese werden dann untereinander entsprechend verknüpft. Für Einzelheiten dieser Vorgehensweise sei auf (Kecskemethy 1993) verwiesen. Die benötigten lokalen Schleifenfreiheitsgrade f_L berechnen sich zu:

$$\begin{aligned} \text{Allgemein: } f_{L_i} &= n_G(L_i) - 6, \\ \text{Schleife 1 } f_{L_1} &= 10 - 6 = 4, \\ \text{Schleife 2 } f_{L_2} &= 10 - 6 = 4, \\ \text{Schleife 3 } f_{L_3} &= 10 - 6 = 4, \\ \text{Schleife 4 } f_{L_4} &= 10 - 6 = 4. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Jeder kinematische Transformator benötigt demnach 4 Eingangsgrößen. Die Schwierigkeit besteht nun darin, diese Transformatoren möglichst geschickt miteinander zu verknüpfen, so dass möglichst wenig implizite Bindungsgleichungen entstehen. Die Anzahl der Koppelungsbedingungen zwischen den vier Schleifen an den einzelnen Gelenken (Abb. 6.34) errechnet sich wie folgt:

Anzahl Koppelbedingungen am Gelenk G_i :

$$\begin{aligned} p_i &= n_L(G_i) - n_B(G_i) + 1 \\ p_A &= 4 - 2 + 1 = 3, & p_F &= 1 - 2 + 1 = 0, \\ p_B &= 4 - 2 + 1 = 3, & p_G &= 1 - 2 + 1 = 0, \\ p_C &= 1 - 2 + 1 = 0, & p_H &= 1 - 2 + 1 = 0, \\ p_D &= 1 - 2 + 1 = 0, & p_I &= 1 - 2 + 1 = 0, \\ p_E &= 1 - 2 + 1 = 0, & p_K &= 1 - 2 + 1 = 0. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Im Gelenk A und B sind also alle Schleifen miteinander gekoppelt. Daraus ergibt sich das in Abb. 6.35 dargestellte, zunächst noch vereinfachte Blockschaltbild.

Durch Bestimmung des Lösungsflusses und durch Festlegung von entsprechenden Pseudoeingängen \tilde{q}_1 , \tilde{q}_2 , und \tilde{q}_3 , sowie unter Beachtung der verallgemeinerten Koordinate $q_{allg.}$, kann das in Abb. 6.36 dargestellte Blockschaltbild hergeleitet werden. Danach verbleiben für die Auflösung dieses Gleichungssystems – neben der Lösung des rekursiv-expliziten Teils – die Lösung von drei impliziten Kerngleichungen.

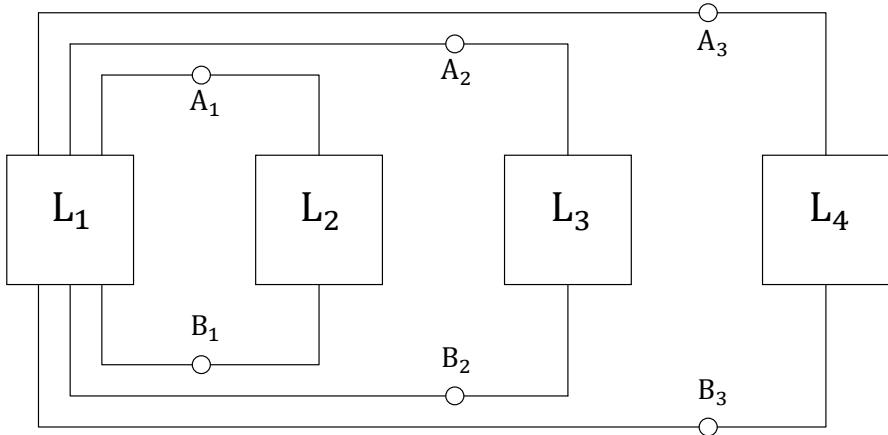


Abb. 6.35: Erstes einfaches Blockschaltbild

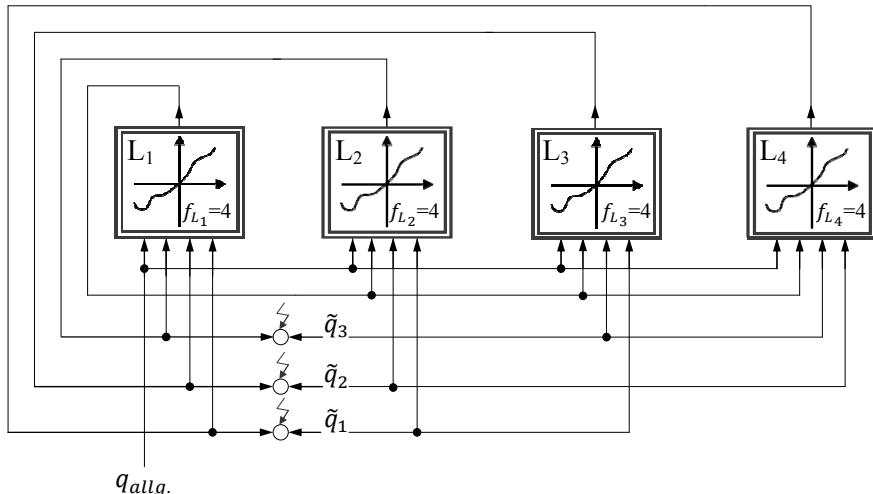


Abb. 6.36: Blockschaltbild der Fünfpunkt-Radaufhängung mit drei impliziten Gleichungen

Position

Die Fünfpunktradaufhängung besteht aus sechs Starrkörpern (Abb. 6.34). Der Radträger hat im nicht geführten Zustand sechs Freiheitsgrade im Raum. Die fünf Lenker benötigen jeweils nur fünf Koordinaten, da die Rotationen um ihre Längsachsen nicht betrachtet werden. Von den damit verbleibenden 31 Körperkoordinaten ist jedoch nur eine unabhängig (die oben erwähnte verallgemeinerte Koordinate $q_{allg.}$, die für die unabhängige Einfederung der Radaufhängung benötigt wird); die übrigen 30 werden durch Lösen der Zwangsgleichungen, die sich aus den geometrischen Bindungen des Systems ergeben, berechnet. Fasst man die 31 Körperkoordinaten zum $[31 \times 1]$ -Vektor \mathbf{w} zusammen, so lautet das entsprechende implizite Gleichungssystem:

$$g_i(\mathbf{w}, q_{allg.}) = 0, \quad i = 1, \dots, 31. \quad (6.42)$$

Eine der 31 Gleichungen beschreibt die Zuordnung der verallgemeinerten Koordinate $q_{allg.}$ zur entsprechenden Körperkoordinate des Radträgers, d.h. der z-Koordinaten des Punktes R in Abb. 6.33. Die übrigen 30 Koordinaten sind geometrische Bindungen, denen die Körper genügen müssen. Diese Bindungen können beispielsweise die 25 Gelenkfreiheitsgrade (vgl. Abb. 6.34) und die fünf vorgegebenen Längen der Querlenker liefern.

Man ist nun bestrebt, die Ordnung des impliziten Gleichungssystems (6.42) zu reduzieren und soweit wie möglich explizite kinematische Zusammenhänge zu verwenden. Dies gelingt durch die Einführung von n_s Hilfsvariablen $\beta_i, i = 1, \dots, n_s$, die zum Vektor $\boldsymbol{\beta}$ zusammengefasst werden. Die Hilfsvariablen sind relative Koordinaten, und sie sind so zu wählen, dass man alle Körperkoordinaten $w_k, k = 1, \dots, 31$ explizit aus $\boldsymbol{\beta}$ berechnen kann. Damit reduziert sich die Ordnung des zu lösenden impliziten Gleichungssystems auf die Anzahl n_s der Hilfsvariablen. Gl. (6.42) lautet dann umgeschrieben:

$$g_i(\boldsymbol{\beta}, q_{allg.}) = 0, \quad i = 1, \dots, n_s, \quad (6.43)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}(\boldsymbol{\beta}, t). \quad (6.44)$$

Durch dieses Einschalten von relativen *Zwischengrößen* wird die *globale Kinematik* in zwei Teile zerlegt. Die Zuordnungen zwischen verallgemeinerten Koordinaten und Hilfsvariablen werden in der *relativen Kinematik* zusammengefasst, die explizite Abhängigkeit $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\boldsymbol{\beta}, t)$ entspricht der *absoluten Kinematik*. Es verbleiben schließlich, wie bereits im Blockschaltbild von Abb. 6.36 dargestellt, die drei iterativ zu lösenden Kerngleichungen. An dieser Stelle soll jedoch noch ein etwas anderer Zugang ge-

zeigt werden, der auf Schnelle 1990 zurückgeht. Hierbei tragen die Bindungsungleichungen der speziellen Struktur der Radaufhängung mit fünf *gleichartigen* Lenkern \mathbf{l}_i Rechnung. Man wählt beispielsweise die sechs Lagekoordinaten des Radträgers – die drei Komponenten des Ortsvektors \mathbf{r}_R (Abb. 6.33) und die drei Kardanwinkel ψ , θ und φ seiner endlichen Verdrehung relativ zum Fahrgestell – als Hilfsvariablen. Damit gilt:

$$n_s = 6.$$

Aus dieser Wahl der verallgemeinerten Koordinaten folgt sofort die erste Bindungsungleichung:

$$g_1(\boldsymbol{\beta}, q_{allg.}) = r_{R,z} - q_{allg.} = 0. \quad (6.45)$$

Die fünf noch fehlenden Bindungsungleichungen erhält man aus der Forderung, dass der Abstand zwischen zusammengehörenden Lenkerlagern gleich der jeweiligen konstanten Lenkerlänge sein muss.

$$g_{i+1}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{l}_i(\boldsymbol{\beta})^T \mathbf{l}_i(\boldsymbol{\beta}) - l_i^2 = 0 \quad i = 1, \dots, 5. \quad (6.46)$$

Die Vektoren \mathbf{l}_i bekommt man dabei explizit in Abhängigkeit von den Hilfsvariablen. Es gilt nach Abb. 6.33:

$$\mathbf{l}_i(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{r}_R(\boldsymbol{\beta}) + \mathbf{p}_i(\boldsymbol{\beta}) - \mathbf{f}_i. \quad (6.47)$$

Die numerische Lösung der Gln. (6.45) und (6.46) ergibt schließlich die gesuchte Beziehung $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(q_{allg.})$.

Geschwindigkeiten und Beschleunigungen

Entsprechend kann man auch die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{l}}_i(\boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}})$ explizit errechnen. Hier gilt:

$$\dot{\mathbf{l}}_i(\boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}) = \dot{\mathbf{r}}_R(\boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}) + \boldsymbol{\omega}_{R,F}(\boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}) \times \mathbf{p}_i(\boldsymbol{\beta}). \quad (6.48)$$

Die Zeitableitung der Bindungsungleichung (6.46) lautet:

$$\dot{g}_{i+1}(\boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}) = 2\dot{\mathbf{l}}_i(\boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}})^T \mathbf{l}_i(\boldsymbol{\beta}) = 0, \quad i = 1, \dots, 5. \quad (6.49)$$

Man kann also die *Geschwindigkeit der Bindung* \dot{g}_{i+1} explizit aus den Hilfsvariablen und deren Geschwindigkeiten ermitteln. Dies macht man sich bei der partiellen Ableitung von \dot{g}_{i+1} zunutze. Die Gl. (6.49) wird dazu - gemäß dem Prinzip der *kinematischen Differentiale* - aus Kapitel 4 mit einem speziellen $\tilde{\boldsymbol{\beta}}^{(j)}$ ausgewertet:

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}^{(j)} = (0 \ 0 \ \dots \underset{\uparrow}{1} \ \dots \ 0). \quad (6.50)$$

j

Man erhält damit in expliziter Form die partielle Ableitung:

$$\frac{\partial g_{i+1}}{\partial \beta_j} = \tilde{g}_{i+1}^{(j)} = \dot{g}_{i+1}^{(j)} \left(\boldsymbol{\beta}, \tilde{\boldsymbol{\beta}}^{(j)} \right). \quad (6.51)$$

Die so entstehenden Bindungen der Geschwindigkeiten lassen sich zu einem linearen Gleichungssystem zusammenfassen:

$$\mathbf{J}_\beta \dot{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{V} \dot{q}_{allg.} = \mathbf{0}. \quad (6.52)$$

Hier tritt die JACOBI-Matrix \mathbf{J}_β mit $\mathbf{J}_{\beta_{i,j}} = \frac{\partial g_i}{\partial \beta_j}$ und die (konstante) Verteilungsmatrix \mathbf{V} auf. Ganz entsprechend kann man für die Beschleunigung vorgehen und erhält:

$$\mathbf{J}_\beta \ddot{\boldsymbol{\beta}} + \dot{\mathbf{J}}_\beta \dot{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{V} \ddot{q}_{allg.} = \mathbf{0}. \quad (6.53)$$

Die Auflösung von (6.52) und (6.53) ergibt:

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{J}_\beta^{-1} \mathbf{V} \dot{q}_{allg.}, \quad (6.54)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{J}_\beta^{-1} (\mathbf{V} \ddot{q}_{allg.} - \dot{\mathbf{J}}_\beta \dot{\boldsymbol{\beta}}). \quad (6.55)$$

Damit ist die relative Kinematik gelöst.

6.6.3 Simulationsergebnisse des räumlichen Viertelfahrzeugmodells

Jeder Typ von Radaufhängung hat sein, von der jeweiligen Bauart abhängiges, charakteristisches Verhalten beim Ein- und Ausfedern des Rades. Die wichtigsten kinematischen Größen der Radbewegung und damit der Radposition gegenüber der Straße sind die *Sturz- und Spurwinkeländerung* der federnden Achse. Da die Hinterachse die Stabilität des Fahrzeuges bestimmt, führen zu große Spurwinkeländerungen zu einem unangenehmen Nachlenkeffekt der Achse. Deshalb sollte der Spurwinkel über dem gesamten Federweg möglichst neutral bleiben oder nur geringe Änderungen aufweisen. Der Sturzwinkel sollte sich so einstellen, dass zwischen dem Reifen und der Straße immer ein möglichst günstiger Kontakt herrscht. Mithilfe der zuvor beschriebenen Kinematikgleichungen lassen sich nun die charakteristischen Größen der Radaufhängung Beispielhaft für ein

räumliches Viertelfahrzeug mit einer Fünfpunkt-Radaufhängung berechnen.

Radmittelpunkttrajektorie

Zur ersten visuellen Überprüfung der Ergebnisse der in den vorstehenden Abschnitten analysierten Fünfpunkt-Hinterradaufhängung ist die Aufzeichnung der Radmittelpunkttrajektorie hilfreich. In Abb. 6.37 ist die Radtrajektorie in den drei Ebenen $z - x$, $z - y$ und $x - y$ im fahrzeugfesten Koordinatensystem dargestellt.

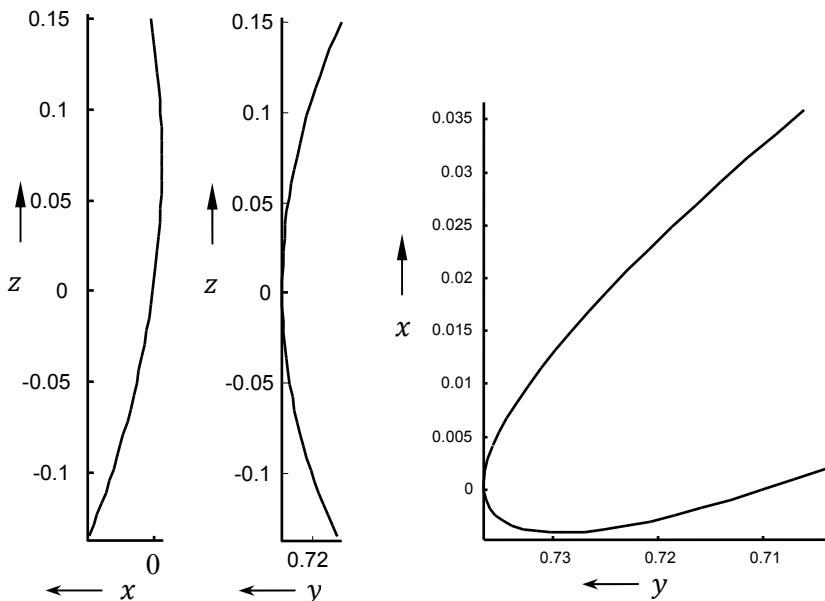


Abb. 6.37: Radmittelpunkttrajektorie der Fünfpunkt-Radaufhängung W124

Spur- und Sturzwinkelkurven

Die Spur- und Sturzwinkel (siehe Abschnitt 6.3) berechnen sich aus der Ausrichtung der Radnormalen bezüglich des fahrzeugfesten Koordinatensystems, wie in Abb. 6.38 dargestellt.

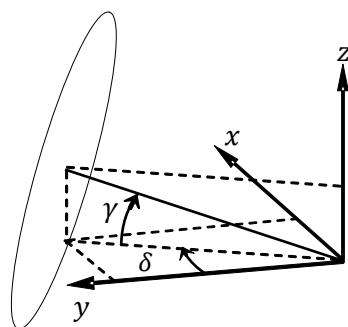


Abb. 6.38: Spur- und Sturzwinkeldefinition und Berechnung

Der Sturz und der Spurwinkel berechnen sich damit wie folgt:

$$\text{Sturzwinkel: } \gamma = -\arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \quad (6.56)$$

$$\text{Spurwinkel: } \delta = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right). \quad (6.57)$$

Einfederung [mm]

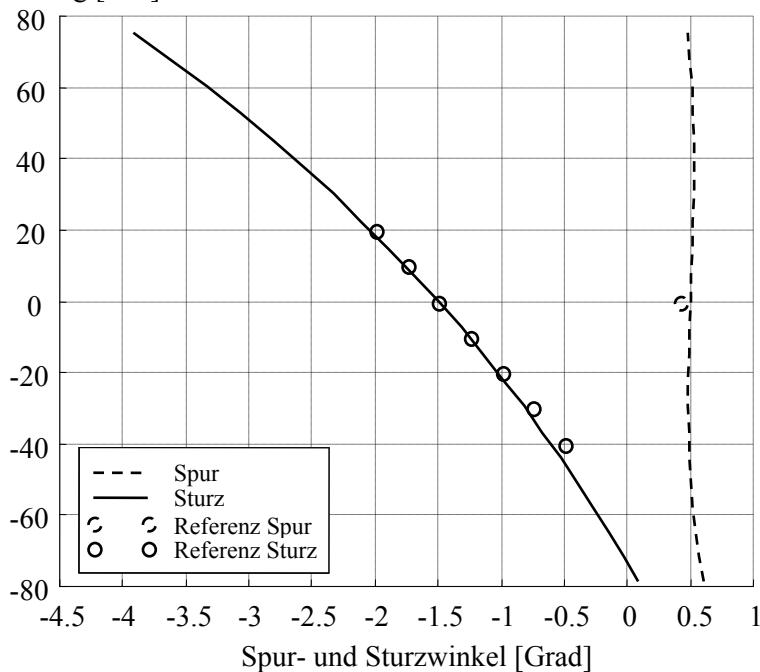


Abb. 6.39: Spur- und Sturzwinkelkurve einer Fünfpunkt-Radaufhängung

In Abb. 6.39 sind die berechneten Sturz- und Spurwinkelkurven einer Fünfpunkt-Radaufhängung in Abhängigkeit vom Einfederweg aufgezeichnet. Zusätzlich sind in diesem Diagramm auch Referenzpunkte aus einer entsprechenden, real gemessenen Sturzkurve abgebildet. Die Abweichungen zwischen Messung und Berechnung begründen sich in der Elastokinematik, welche in der hier vorgestellten Modellierung vernachlässigt wurde. Die Sturz- und die Spuränderung an der Radaufhängung lassen sich mithilfe einer geeigneten Animationssoftware, wie auch in Abb. 6.40 dargestellt, visualisieren.

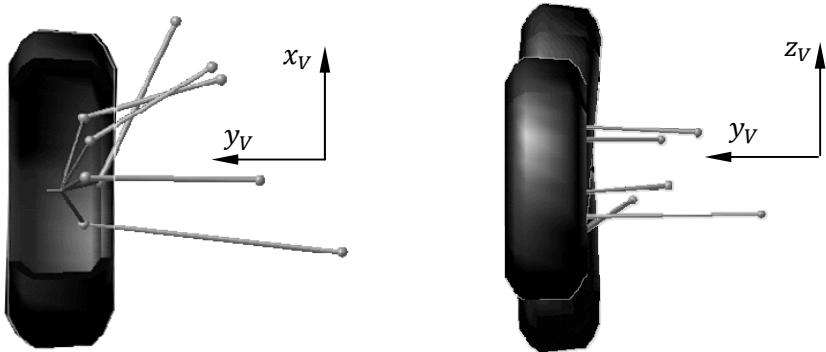


Abb. 6.40: Radstellungen bei +/- 80mm Ein- / Ausfederung: (links die kaum sichtbare Spurwinkeländerung; rechts die Sturzwinkeländerung)

Simulation der Dynamik eines Achsprüfstandes

Abschließend soll hier noch beispielhaft die dynamische Simulation eines Achsprüfstandes, wie in Abb. 6.41 dargestellt, gezeigt werden. Das Rad wird dabei durch eine höhenverstellbare Platte zu einer erzwungenen Schwingung der Radaufhängung angeregt. Die Amplitude der Radbewegung ist größer als die Anregungsamplitude, eine Phasenverschiebung zwischen der Boden- und Radbewegung ist praktisch nicht feststellbar (siehe Abb. 6.42). Die in der Einschwingphase auftretenden Bereiche verschwindender Bodenkraft bedeuten, dass das Rad abgehoben hat, also kein Bodenkontakt vorliegt (vergleiche Abb. 6.43 und Abb. 6.44).

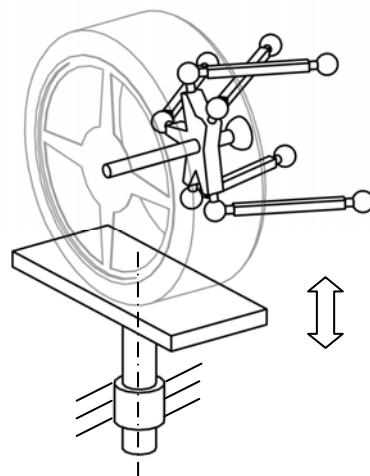


Abb. 6.41: Das Viertelfahrzeugmodell auf dem Achsprüfstand

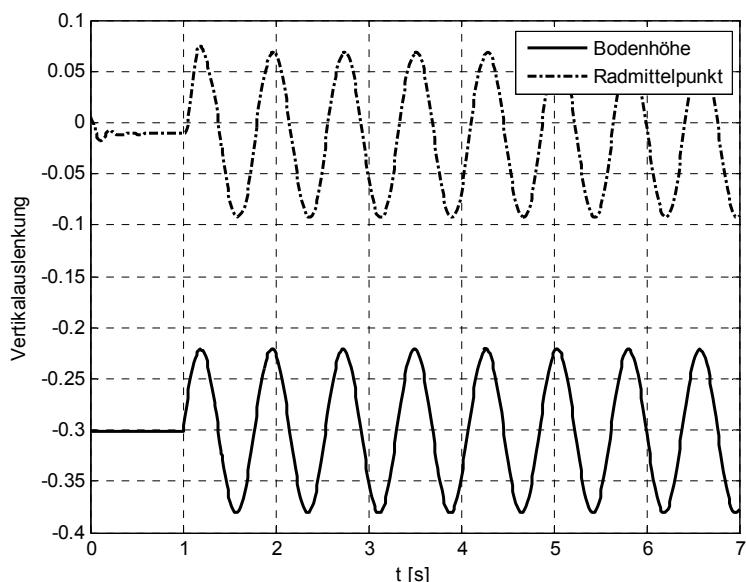


Abb. 6.42: Vertikalauslenkung der Bodenplatte und der Radnabe

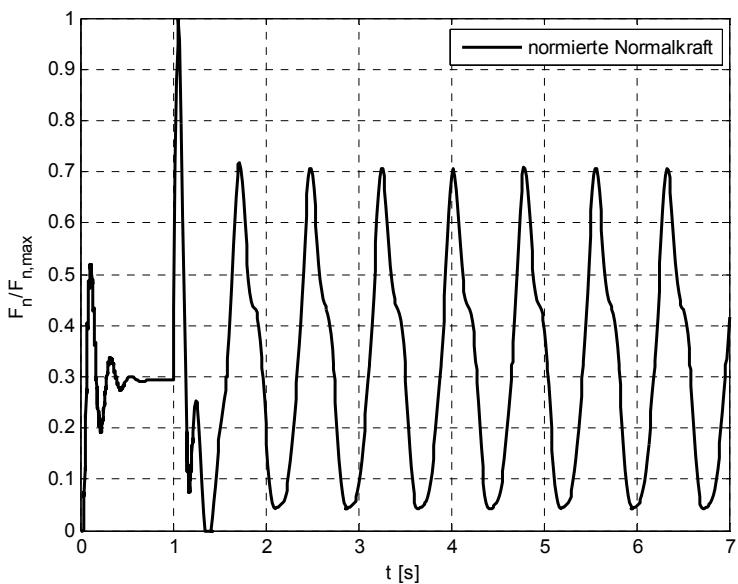


Abb. 6.43: Normierte Reifenaufstandskraft (Normalkraft)

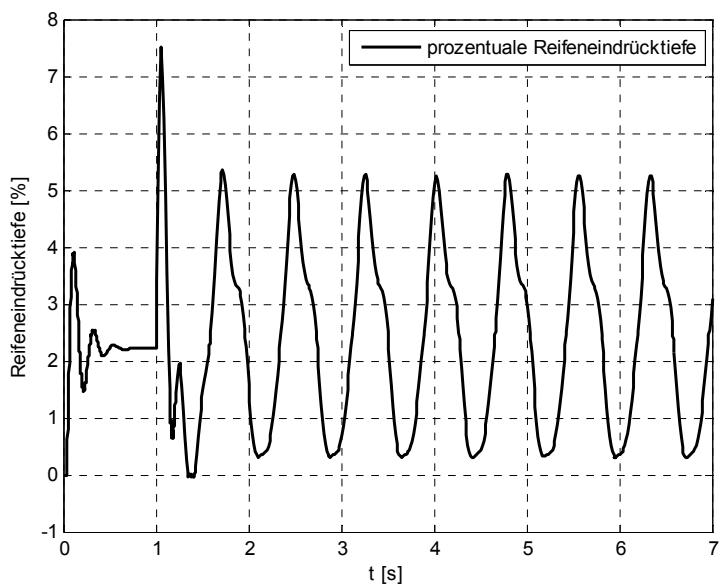


Abb. 6.44: Relative Eindrücktiefe des Reifens

7 Modellierung des Rad-Straße-Kontaktes

Die hinreichend genaue Erfassung der Wechselwirkung zwischen Reifen und Fahrbahn ist für die Beschreibung und Beurteilung der Dynamik von Kraftfahrzeugen von entscheidender Bedeutung. Der Kontakt Straße-Fahrzeug ist, abgesehen von aerodynamischen Maßnahmen, die einzige Möglichkeit, die Bewegung des Fahrzeugs aktiv zu beeinflussen. Dabei werden sämtliche Kräfte und Momente über die jeweils postkartengroßen sogenannten Reifen-Latsche auf das Fahrzeug übertragen.

Unter dem *Rad* werden im Folgenden die sich um die Raddrehachse drehenden Teile des Fahrwerks verstanden. Dazu gehören neben der als starr angenommenen Felge, die drehenden Bestandteile der Bremse sowie ggf. Teile der Antriebswelle und des Antriebsstrangs sowie der *Reifen*. Das Rad ist im Radträger mit einem Drehgelenk befestigt. Räder haben drei grundsätzliche Funktionen, die sich, je nach Anwendung, in der Modellierung der Reifenkräfte niederschlagen müssen:

- die Aufnahme der Radlasten und den Schutz der übrigen Fahrzeugkomponenten und der Fahrzeuginsassen gegen Stoßbelastungen,
- die Übertragung der Beschleunigungs- und Bremskräfte und
- der Querkräfte bei der Kurvenfahrt.

Physikalisch bedeutet dies eine Übertragung von Kräften und Momenten in allen drei Raumrichtungen. Dabei ist das Rad zwei funktional getrennten Teilsystemen des Kraftfahrzeugs zuzuordnen. Es ist einerseits Teil der Radaufhängung und andererseits des Antriebsstrangs. In beiden Funktionsbereichen ist es das letzte Glied der Wirkungskette und damit die unmittelbare Schnittstelle zur Fahrbahnoberfläche.

Moderne Reifen sind produkttechnisch gesehen aufwendig gestaltete viskoelastische Gebilde und stellen modellierungstechnisch im Kraftfahrzeug Kraftelemente mit komplexen nichtlinearen und dynamischen Systemeigenschaften dar. Der Komplexitätsgrad von Reifenmodellen zur Anwendung in Fahrzeugmodellen reicht daher von einfachen linearen bis hin zu – unter Umständen und abhängig von der Anwendung – sehr komplexen nichtlinearen Ansätzen. Dieses Kapitel behandelt zunächst die Erstellung geeigneter mathematischer Modelle zur Beschreibung der Übertragung

gungseigenschaften von Reifen, ohne dabei physikalisch zu sehr in die Tiefe zu gehen. Hierfür wird auf die umfangreiche Literatur zu diesem Thema verwiesen. In (Ammon 1997) werden die grundlegenden mathematischen Eigenschaften von Reifen behandelt. In (Pacejka 2005) findet man eine umfangreiche Einführung zu mathematischen Reifenmodellen sowie eine Übersicht über Methoden zur Messung der benötigten Daten. Aufbau, Historie und grundlegende Eigenschaften von Reifen und Rädern sind in (Reimpell und Sponagel 1986) oder in (Leister 2009) beschrieben. Umfangreiche Informationen zusammen mit der Beschreibung bekannter Reifenmodelle des Autors findet man in (Gipser 2010).

Während bei Fahrdynamikmodellen die Kennlinien von Reifen häufig zunächst auf einem Prüfstand gemessen und danach im Modell möglichst genau nachgebildet werden (empirischer Ansatz), basiert die physikalische Modellbildung auf der Kenntnis der genauen Entstehungsmechanismen der Reifenkräfte, was im Gegensatz zum Fahrdynamikmodell sehr lange Rechenzeiten erfordert. Ein weiterer Unterschied besteht darin, dass Fahrdynamikmodelle zur Nachbildung stationärer und instationärer Reifeneigenschaften im fahrdynamischen Frequenzbereich bis 20 Hz geeignet sind (Modellierung niederfrequenter Kräfte und Verformungen). Im Gegensatz dazu vermögen Komfortmodelle die Darstellung hochdynamischer Fahrzustände von 80 Hz und mehr (z. B. Vibrationen auf unebenem Untergrund). Dadurch ist auch eine Vorhersage von nicht messtechnisch gestützten Betriebspunkten möglich. Je nach Aufgabenstellung ist das Reifenmodell auszuwählen, das den besten Kompromiss aus Rechenzeit und Leistungsfähigkeit erzielt.

7.1 Aufbau des Reifens

Der Grundaufbau eines *Gürtelreifens* ist in Abb. 7.1 dargestellt. Relevant für die mathematische Beschreibung in der Fahrzeugdynamik sind die folgenden Bestandteile des Reifens:

- Der *Laufstreifen* (1) besteht aus Gummi und enthält das Laufstreifenprofil bestehend aus Profilstollen und Profilrillen.
- Die *Karkasse* (2) besteht aus zugfesten, mit Gummi ummantelten Fäden, die z.B. aus Kunstseide, Nylon und Rayon bestehen. Die Karkasse verleiht dem Reifen zusammen mit dem Luftdruck seine Festigkeit. Sie verläuft quer zur Laufrichtung radial von *Wulstring* (4) zu *Wulstring*.

- Der *Gürtel* (3) ist heute normalerweise ein Lagenverbund aus Stahl, der im Laufflächenbereich auf der Karkasse aufliegt. Er umschließt den Reifen radial von außen und verleiht der Lauffläche ihre Steifigkeit.
- Die beiden *Wulstringe* (4) sorgen für den festen Sitz des Reifens auf dem Rad und garantieren mit dem umschließenden Gummi die Dichtung zwischen Reifen und Felge.

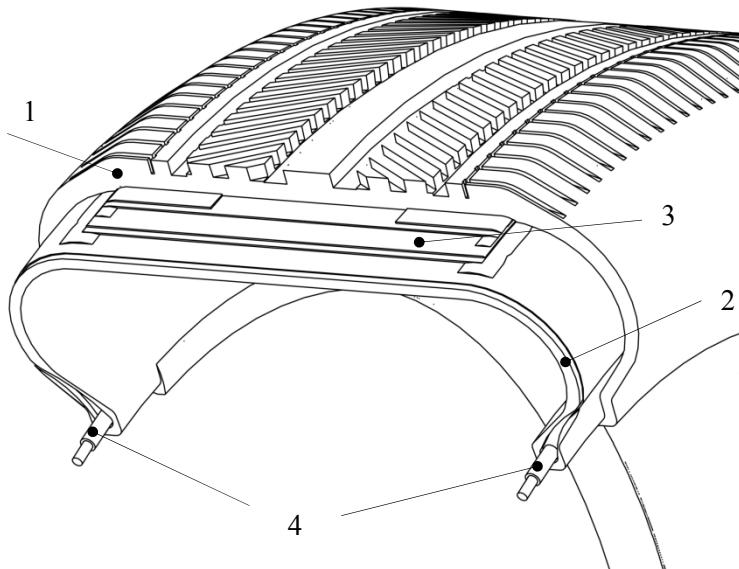


Abb. 7.1: Grundaufbau eines Gürtelreifens

Während Umfang und Tiefgang der heute verfügbaren Reifenmodelle sehr unterschiedlich sind, greifen sämtliche Modelle auf kinematische Größen als Eingangsparameter zur Berechnung der Reifenkräfte zurück. Aus diesem Grund wird die Bereitstellung dieser Eingangsgrößen in Abschnitt 7.4 im Detail beschrieben.

7.2 Kraftwirkung zwischen Rad und Straße

Das Vorgehen bei der Integration der Radkräfte in ein Simulationsmodell auf der Basis eines Mehrkörpersystems erfolgt in mehreren Schritten:

- *Position und Geschwindigkeit des Kontaktpunktes:* Diese Größen werden aus den gemäß Kapitel 5 und 6 bekannten kinematischen Lage- und

Geschwindigkeitsgrößen von Radträger und Rad bestimmt. Dazu werden die in den Kapiteln 2 und 3 behandelten Methoden angewandt.

- *Kinematisches Reifenmodell*: Aus den kinematischen Größen werden nun unter Verwendung der bekannten Fahrbahndaten die Schlupfgrößen in Längs- und Querrichtung sowie ggf. der Bohrschlupf berechnet.
- *Physikalisches Reifenmodell*: Im letzten Schritt werden ausgehend von den Schlupfgrößen unter Verwendung eines physikalischen oder mathematischen Reifenmodells die auf die Lauffläche des Reifens wirkenden Kräfte und ggf. Momente berechnet.

7.3 Stationäre Reifenkontaktkräfte

Die Kraftübertragung zwischen Reifen und Fahrbahn erfolgt über die Radaufstandsfläche (Latsch). Diese bildet sich unter der Radlast im Kontaktbereich zwischen Reifen und Fahrbahnoberfläche aus. Hier ist zu beachten, dass aufgrund des Reifenprofils nur der Profilstollenanteil der Lauffläche im direkten Kontakt mit der Fahrbahn steht. Im Rahmen der Modellierung des Fahrzeugs als Mehrkörpersystem, werden die Kraftwirkungen zwischen Reifen und Fahrbahn durch resultierende (Einzel-) Kontaktkräfte und Momente beschrieben. Bei diesen handelt es sich im Allgemeinen um eingeprägte Kräfte und Momente, d.h. sie lassen sich in Abhängigkeit von Lage- und Geschwindigkeitsgrößen bestimmen. Gemäß Abb. 7.3 kann man die Kontaktkraft in drei Komponenten zerlegen, s. Tabelle 7.1.

Tabelle 7.1: Komponenten der Kontaktkraft am Reifen

Bezeichnung	Kraftbezeichnung	Formelzeichen
Längsrichtung,	Längskraft,	F_x
Umfangsrichtung	Umfangskraft	
Querrichtung,	Querkraft, Seitenkraft,	F_y
Lateralrichtung	Lateralkraft	
Hochrichtung	Vertikalkraft, Hochkraft, Reifen-aufstandschaft	F_z

Die Zerlegung der Kräfte in die verschiedenen Raumrichtungen wird dabei auf ein *radträgerfestes Koordinatensystem* bezogen, d.h. das zugrundeliegende Koordinatensystem macht die Eigendrehung des Rades um seine Drehachse *nicht* mit. Entsprechend wird auch die aktuelle Geschwindigkeit v des Radmittelpunktes in eine Längskomponente $v_x = v \cos\alpha$ und eine Querkomponente $v_y = v \sin\alpha$ aufgeteilt.

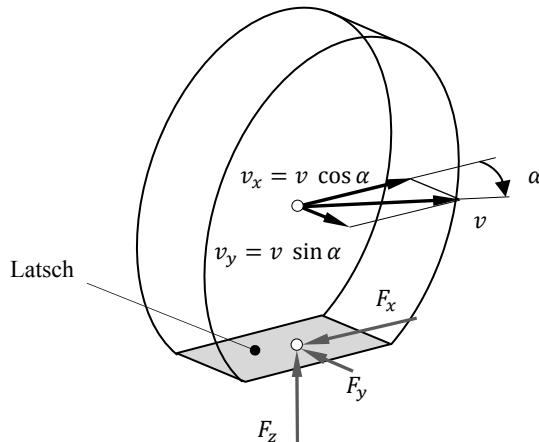


Abb. 7.2: Kontaktkräfte zwischen Straße und Reifen

In z-Richtung liegt eine einseitige Kraftwirkung vor, da nur Druckkräfte übertragen werden. Die zur Fahrbahn parallelen Kraftkomponenten in Längs- und Querrichtung werden im Wesentlichen kraftschlüssig durch Reibung übertragen. Sie sind daher, abhängig von der jeweils vorliegenden Materialpaarung Reifen/Fahrbahn, hinsichtlich ihrer Größe beschränkt.

7.3.1 Reifen unter Vertikallast

Der Reifen ist physikalisch gesehen in vertikaler Richtung überwiegend eine Luftfeder. Durch die Radlast F_z bildet sich im Kontaktbereich mit der Fahrbahn eine Kontaktfläche (Latsch) aus. Beim stehenden Rad ergibt sich eine statische Einfederung von

$$\Delta r = r_0 - r_{stat} \quad (7.1)$$

mit dem Konstruktionsradius des Reifens r_0 und dem sogenannten statischen Radradius r_{stat} , s. Abb. 7.3. Dabei ist die vertikale Flächenpressung p_z symmetrisch im Latsch verteilt. Aus den Radien r_{stat} und r_0 lässt sich eine grobe Näherung für die Latschlänge L berechnen. Gemäß Abb. 7.4 erhält man mit der Reifeneinfederung $|\Delta r| = |r_0 - r_{stat}| \ll r_0$ die Gl.:

$$\left(\frac{L}{2}\right)^2 = r_0^2 - (r_0 - \Delta r)^2 \approx 2r_0\Delta r \Rightarrow L \approx 2\sqrt{2}r_0\Delta r. \quad (7.2)$$

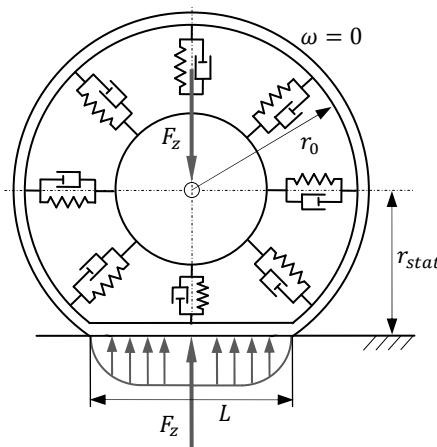


Abb. 7.3: Stillstehender Reifen unter Normallast

Die Radlast F_z hängt hauptsächlich von der Reifeneinfederung $r_0 - r_{stat}$ ab. Die Verformungen des Reifens führen zu einer schwach progressiven Federkennlinie, s. (Ammon 1997):

$$F_z = \begin{cases} c_z \Delta r + c_{z,3} \Delta r^3 & \text{für } \Delta r \geq 0 \\ 0 & \text{für } \Delta r < 0 \end{cases} \quad (7.3)$$

Dabei ist der progressive Radlastanteil normalerweise klein gegenüber dem linearen Anteil. Für normale Anwendungen reicht es daher aus, eine um den Betriebspunkt linearisierte Form der Gl. (7.3) zu verwenden. Zu beachten ist allerdings, dass der Fall $F_z = 0$ (abheben eines Rades) durchaus eintreten kann und daher mit berücksichtigt werden muss.

7.3.2 Rollwiderstand

Im Folgenden wird eine einfache Modellvorstellung zur prinzipiellen Erklärung der grundlegenden für die Fahrdynamik relevanten Effekte für das rollende Rad verwendet, s. Abb. 7.4. Dabei ist der Gurtel des Reifens über Feder-Dämpfer-Elemente mit der Felge verbunden. Die Dämpfer berücksichtigen die Dämpfungseigenschaften des Reifengummis. Sie führen zu einer geschwindigkeitsabhängig vergrößerten Pressung in dem in Rollrichtung vorderen Latschbereich und zu einer verkleinerten Pressung im hinteren Latschbereich. Der Betrag der resultierenden Normalkraft F_z ändert sich aufgrund des Abrollens fast nicht. Daher gibt auch beim rollenden Rad der statische Reifenradius r_{stat} den Abstand zwischen der als eben gedachten Radaufstandsfläche und der Radachse an. Aufgrund der nach

vorne verlagerten Flächenpressung verschiebt sich jedoch der fiktive Angriffspunkt der Normalkraft um den Betrag e aus der Latschmitte in Rollrichtung. Daher ergibt sich aus dem Momentengleichgewicht des beschleunigungsfreien rollenden Rades

$$F_x r_{stat} - F_z e = 0 \quad (7.4)$$

die Rollwiderstandskraft

$$F_R = F_x = \frac{e}{r_{stat}} F_z. \quad (7.5)$$

Diese Rollwiderstandskraft muss durch den Fahrzeugantrieb wieder ausgeglichen werden.

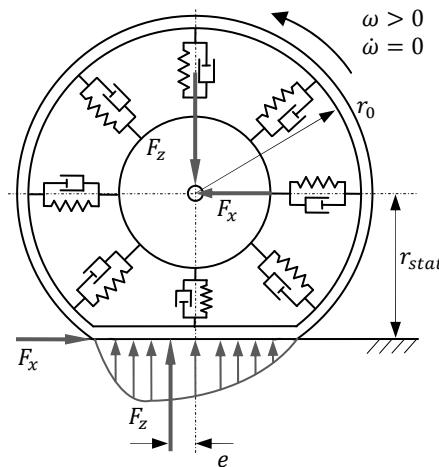


Abb. 7.4: Erklärung des Rollwiderstandes

7.3.3 Reifen unter Umfangskraft

Kraftschlußbeiwert

Für die Übertragung von Umfangskräften im Latsch sind grundsätzlich zwei physikalische Effekte verantwortlich (Gillespie 1992), s. Abb. 7.5:

- *Kraftschluß durch Adhäsionsreibung in der Latschfläche:* Oberflächenadhäsion entsteht aufgrund der intermolekularen Bindungs Kräfte zwischen Reifengummi und dem Material der Fahrbahnoberfläche. Während dieser Effekt die Krafterzeugung zwischen Reifen und Fahrbahn auf trockenen Fahrbahnen dominiert, reduziert sich er sich auf nassen Fahrbahnen erheblich.

- *Hysteresereibung*: Diese führt zu Formschluß durch Verzahnungseffekte zwischen Reifenlatsch und Fahrbahnoberfläche. Diese Effekte sind auf das viskoelastische Werkstoffverhalten von Gummi zurückzuführen. Die große Dämpfung des Gummiwerkstoffes im Latsch führt zu einem hohen Hysteresereibungskoeffizienten. Dieser Effekt wird durch Wasser auf der Straßenoberfläche weitaus weniger beeinträchtigt.

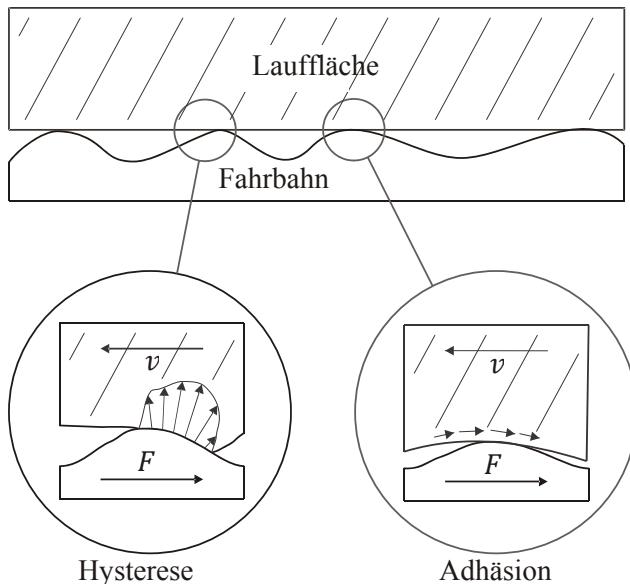


Abb. 7.5: Beschreibung der Kraftwirkung zwischen Straße und Reifen

Beide Effekte hängen von kleinen Relativbewegungen der Kontaktpartner Lauffläche und Fahrbahn im Latsch ab. Das Verhältnis zwischen Umfangskraft F_x und Normalkraft F_z wird als Kraftschlußbeiwert in Umfangsrichtung

$$\mu = \frac{F_x}{F_z} \quad (7.6)$$

bezeichnet. Die Entstehung von Umfangskräften lässt sich durch Scherdeformationen des Laufstreifens in Verbindung mit dem Reibungsverhalten zwischen Lauffläche und Fahrbahn beschreiben. Dies erfordert jedoch eine makroskopische Beschreibung dieser Scherdeformationen, die sich z.B. in einen Mehrkörpersystemformalismus geeignet einbinden lässt. Die Kine-

matik der Scherdeformationen wird durch den Begriff Umfangsschlupf erfasst.

Umfangsschlupf (Längsschlupf)

Der Umfangsschlupf ist eine kinematische Größe, welcher den Bewegungszustand eines angetriebenen, gebremsten oder antriebsfrei rollenden Rades kennzeichnet. Dabei wird das Rad als Starrkörper betrachtet. Man spricht daher auch von *Starrkörperschlupf*.

Bei der ebenen Bewegung eines starren Rades werden grundsätzlich die beiden Bewegungszustände

- reines kinematisches Rollen ohne Gleiten und
- kombiniertes Rollen und Gleiten (Wälzen)

unterschieden, s. Tabelle 7.2. Bei Fahrzeugreifen ist der zweite Fall relevant. Zunächst wird die Bewegung eines ebenen Rades mit den Kenngrößen

- Radradius r ,
- Geschwindigkeit v des Radmittelpunktes,
- Geschwindigkeit v_p des (fiktiven) Radaufstandspunktes,
- Winkelgeschwindigkeit ω des Rades

untersucht. Bei einem ideal rollenden Rad würde die Geschwindigkeit v_p der Lauffläche verschwinden. Bei einem realen Rad (Reifen) ist dies nicht der Fall. Die Abweichung, bezogen auf die Radgeschwindigkeit wird als Schlupf bezeichnet. Nachfolgend wird zwischen Antriebsschlupf s_A und Bremsschlupf s_B unterschieden. Dazu wird der Betrag der Relativgeschwindigkeit im gedachten Radaufstandspunkt P auf den jeweils größeren Wert der beiden Größen v bzw. ωr bezogen. Am angetriebenen Rad ergibt sich somit der Antriebsschlupf ($v < \omega r$)

$$s_A = \frac{v_p}{\omega r} = \frac{\omega r - v}{\omega r} \quad (7.7)$$

und am gebremsten Rad der Bremsschlupf ($v > \omega r$):

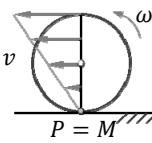
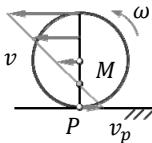
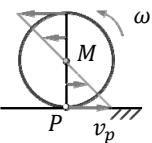
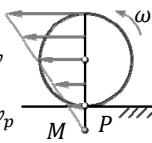
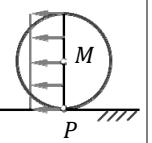
$$s_B = \frac{v_p}{v} = \frac{v - \omega r}{v} . \quad (7.8)$$

Zusammengefasst kann man auch schreiben:

$$s_{A,B} = \frac{|v_p|}{\max(v, \omega r)} = \frac{|v - \omega r|}{\max(v, \omega r)}. \quad (7.9)$$

Der Schlupf wird häufig in Prozent angegeben, d.h. z.B. $s_A = 90\%$ statt $s_A = 0,9$. Die hier verwendete Schlupfdefinition stellt sicher, dass der Schlupf in den Extremfällen blockiertes Rad ($v \neq 0, \omega = 0$) und durchdrehendes Rad ($v = 0, \omega \neq 0$) jeweils den Wert Eins annimmt. Damit wird der Schlupf auf das Intervall $[0, 1]$ normiert. Eine gesonderte Betrachtung erfordert allerdings noch der Fall des Anfahrens und der Bewegung bei sehr niedriger Geschwindigkeit. Dies wird in (Schuster 1999) ausführlich behandelt. In der Literatur sind auch andere Definitionen des Schlupfes üblich, s. z.B. (Rill 2004) und (Schuster 1999). Dies ist bei der Verwendung von Simulationssoftware zu beachten. Insbesondere gilt dies für die Grenzfälle blockierter oder durchdrehender Räder. Allen Definitionen ist jedoch gemeinsam, dass der Schlupf des rollenden Rades Null ist.

Tabelle 7.2: Starrkörperschlupf

$v = \omega r$	$v < \omega r$		$v > \omega r$	
rollendes Rad	angetriebenes Rad	durchdrehendes Rad	gebremstes Rad	blockiertes Rad
				
kein Schlupf	Antriebsschlupf		Bremsschlupf	
$s_A = 0$ $s_B = 0$	$s_A = \frac{v_p}{\omega r}$ $= \frac{\omega r - v}{\omega r}$	$s_A = 1$	$s_B = \frac{v_p}{v}$ $= \frac{v - \omega r}{v}$	$s_B = 1$

Im Folgenden wird diese Schlupfdefinition auf Räder mit Gürtelreifen angewandt. Hierzu wird zunächst mit Hilfe des aus Messungen bestimmbarer Abrollumfangs der dynamische Radhalbmesser definiert.

Abrollumfang und dynamischer Reifenradius

Das Abrollen eines Rades mit Gürtelreifen unterscheidet sich ganz wesentlich vom Abrollen eines Diagonalreifens, der heute aber bei PKW keine Rolle mehr spielt. Der Gürtel eines Gürtelreifens verhält sich durch die verglichen mit dem umgebenden Gummi nahezu undehnabaren Stahlfäden wie ein undehnbares Band in der äußeren Reifenstruktur. Auch unter extremen Lastzuständen bleiben die Längsdehnungen des Gürteles unter 1% (Reimpell und Sponagel 1986). Es ist daher gerechtfertigt, den Abrollumfang U im normalen Betriebsbereich als konstant anzunehmen. Der Abrollumfang U wird bei einer Umdrehung des Rades auf der Fahrbahn abgewickelt. Nach DIN 70020, Teil 5 wird er an dem mit einer Geschwindigkeit von $v = 60 \text{ km/h}$ geschleppten Rad ohne Antriebs- und Bremskräfte gemessen und in Reifiantabellen angegeben. Der Abrollumfang U definiert den dynamischen Reifenradius

$$r_{dyn} = \frac{U}{2\pi} . \quad (7.10)$$

Damit ist r_{dyn} der Radius eines *gedachten* radfesten Kreises, der beim Abrollen über eine Umdrehung gerade den gemessenen Abrollumfang U liefert. Da der längssteife Gürtel nicht an der Oberfläche, sondern im Unterbau des Laufstreifens liegt, ist der dynamische Radradius r_{dyn} kleiner als der Fertigungsradius r_0 der Lauffläche. Bei Gürtelreifen liegt der dynamische Radradius r_{dyn} näher am Konstruktionsradius r_0 als am statischen Radradius r_{stat} . Der Zusammenhang zwischen den Radien r_0 , r_{stat} , r_{dyn} lässt sich durch eine einfache geometrische Betrachtung abschätzen. Dazu vergleicht man die Ablauflänge einer gedachten starren Scheibe mit dem Radius r_{dyn} mit der halben Latschlänge $L/2$:

$$U = r_{dyn}\alpha = r_0 \sin \alpha \rightarrow r_{dyn} = r_0 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \approx r_0 \left(1 - \frac{\alpha^2}{6}\right) \quad (7.11)$$

Berücksichtigt man nun noch die geometrische Beziehung (s. Abb. 7.3)

$$r_{stat} = r_0 \cos \alpha \approx r_0 \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) \rightarrow \frac{\alpha^2}{2} \approx \left(1 - \frac{r_{stat}}{r_0}\right) \quad (7.12)$$

und setzt diese Beziehung in Gl.(7.13) ein, so erhält man

$$r_{dyn} \approx r_0 \left(1 - \frac{\alpha^2}{6}\right) \approx r_0 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{r_{stat}}{3r_0}\right) = \frac{2}{3}r_0 + \frac{1}{3}r_{stat} . \quad (7.13)$$

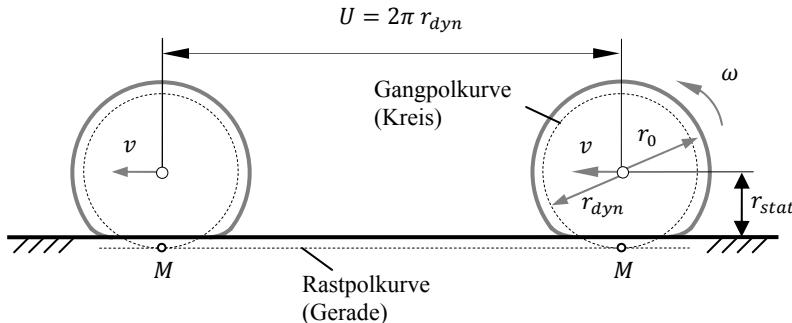


Abb. 7.6: Zur Definition des dynamischen Reifenradius

Der radfeste Kreis mit Radius r_{dyn} ist damit die Gangpolkurve der Bewegung. Die fahrbahnfeste Gerade auf der er gedanklich abrollt entspricht der Rastpolkurve. Der momentane Berührpunkt M von Gang- und Rastpolkurve ist der Momentanpol. Man beachte, dass die Rastpolkurve unter der Fahrbahnoberfläche liegt. In Tabelle 7.3 sind einige Beispiele für statische und dynamische Reifenhalbmesser angegeben (Reimpell und Sponagel 1986).

Tabelle 7.3: Beispiele für statische und dynamische Reifenhalbmesser

Reifen	r_0 [mm]	r_{stat} [mm]	U [mm]	r_{dyn} [mm]
185/65R15	311	284	1895	302
195/65R15	318	290	1935	308
205/65R15	324	294	1975	315

Der Unterschied zwischen statischem und dynamischem Halbmesser ist nicht, bzw. nur unwesentlich auf eine Aufweitung des Reifengürtels durch Fliehkräfte zurück zu führen, die vergleichsweise gering ist.

Umfangsschlupf eines Rades mit Gürtelreifen

Ab jetzt wird das Abrollen des Rades mit dem Radius r_{dyn} als schlupffrei vorausgesetzt, d.h. es gilt $s_{A,B} = 0$. Dabei wird in Kauf genommen, dass diese Normierung des Schlupfes natürlich nicht absolut korrekt ist, da der dynamische Reifenradius nur für die Geschwindigkeit gilt, mit welcher der Versuch durchgeführt wurde. Der Vorteil ist jedoch, dass sich der Zustand *schlupffrei* einfach und nachvollziehbar bei einem einzigen Normversuch festlegen lässt, ohne die kontaktmechanischen Vorgänge im Latsch mit

einbeziehen zu müssen. Weiterhin lassen sich dadurch die Schlupfdefinitionen des starren Rades direkt übertragen:

$$\text{Antriebsschlupf } (v < \omega r_{dyn}): \quad s_A = \frac{\omega r_{dyn} - v}{\omega r_{dyn}} \quad (7.14)$$

$$\text{Bremsschlupf } (v > \omega r_{dyn}): \quad s_B = \frac{v - \omega r_{dyn}}{v} \quad (7.15)$$

Zusammengefasst kann man schreiben:

$$s_{A,B} = \frac{|v - \omega r_{dyn}|}{\max(v, \omega r_{dyn})}. \quad (7.16)$$

Im Hinblick auf die Veranschaulichung und anschließende Formalisierung der Umfangskraftentstehung am gebremsten bzw. angetriebenen Rad wird dieses kinematische Ersatzmodell des schlupffrei abrollenden Rades so erweitert, dass das Abrollen des Laufstreifens auf der Fahrbahn sichtbar und beschreibbar wird. Der Gürtel mit dem Laufstreifen wird hierzu als umfangsteifes geschlossenes Band mit dem Umfang $U = 2\pi r_{dyn}$ angesehen, s. (Ammon 1997). Vergleichbar mit der Laufkette eines Kettenfahrzeugs wird dieses Band im oberen Bereich auf der dort als starre Radscheibe *materialisierten* Gangpolkurve mit Radius r_{dyn} und im Latschbereich durch eine gedachte Führungsplatte parallel zur Fahrbahn geführt (Latschlänge L , Einlaufpunkt E, Auslaufpunkt A). Da die Radscheibe im unteren Bereich die Führungsplatte, den umlaufenden Gürtel und die Fahrbahn durchdringen würde, muss sie dort wieder *entmaterialisiert* werden.

Der vom Gürtel getragene Laufstreifen wird durch elastische Biegeelemente bzw. Profilstollenelemente (*Bürstenmodell*) repräsentiert. Der Radmittelpunkt hat die Geschwindigkeit v , die Radscheibe hat die Winkelgeschwindigkeit ω . Der Gürtel läuft damit mit der Längsgeschwindigkeit ωr_{dyn} um. Der Gürtelabschnitt \overline{EA} hat wegen der angenommenen Undehnbarkeit des Gürtels im Latsch die absolute Geschwindigkeit (Gleitgeschwindigkeit):

$$v_p = v - \omega r_{dyn}. \quad (7.17)$$

Die schlupffreie Bewegung des Rades mit Gürtelreifen wird damit durch dieses Modell plausibel wiedergegeben:

- *Schlupffreie Bewegung*: $v = \omega r_{dyn} \rightarrow v_p = 0$: Der Gürtelabschnitt \overline{EA} ist in Ruhe. Es treten keine Scherungen bzw. Gleitbewegungen der Profilelemente auf

- *Angetriebenes Rad:* $v < \omega r_{dyn} \rightarrow v_p < 0$: Es liegt *Antriebsschlupf* entsprechend (7.14) vor. Die Profilelemente im Latsch werden nach vorne geschert.
- *Gebremstes Rad:* $v > \omega r_{dyn} \rightarrow v_p > 0$: Es liegt *Bremsschlupf* entsprechend (7.15) vor. Die Profilelemente werden nach hinten geschert.

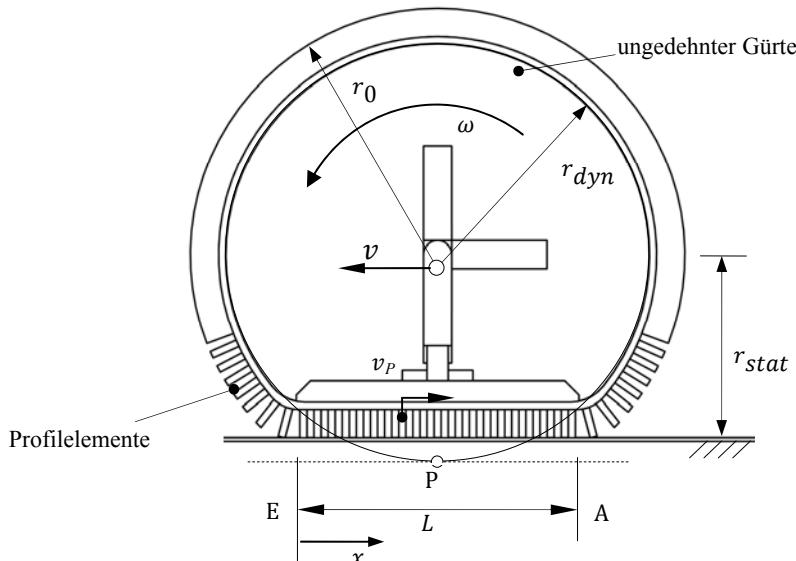


Abb. 7.7: Mechanisches Ersatzmodell für einen Gürtelreifen (nach Ammon 1997)

Kraftübertragung in Umfangsrichtung

Um das Prinzip der Entstehung von Umfangskräften zu erläutern, wird zunächst die Bewegung eines einzelnen Profilelements durch den Latschbereich \overline{EA} untersucht. Exemplarisch wird der Fall des angetriebenen Rades betrachtet: $v < \omega r_{dyn}$. Die Betrachtungen gelten sinngemäß auch für das gebremste Rad.

Bewegung und Scherverformung der Profilelemente

Man beobachtet zunächst ein einzelnes Profilelement auf dessen *Weg* durch den Latsch. Das Profilelement erreiche zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ im Einlaufpunkt E ($x = 0$) die Kontaktzone \overline{EA} . Es wird in der Folge mit der konstanten (beschleunigungsfreie Bewegung des Rades) Umfangsge-

schwindigkeit $\omega r_{dyn} > v$ des Gürtels durch den Latsch transportiert. Zu einem Zeitpunkt t befindet es sich damit im Latsch an der Stelle

$$x = \omega r_{dyn} t. \quad (7.18)$$

Eine naheliegende Annahme ist nun, dass das betrachtete Profilelement beim Einlauf in die Kontaktfläche zum Zeitpunkt $t = 0$ und auch eine gewisse Zeit danach an der Fahrbahn haftet. Da der Gürtelabschnitt \overline{EA} die Absolutgeschwindigkeit $v_P = \omega r_{dyn} - v$ entgegen der Fahrtgeschwindigkeit v besitzt, wird das Element um die Strecke $\hat{u}(t)$ in horizontaler Richtung verformt:

$$\hat{u}(t) = v_P t = (\omega r_{dyn} - v)t. \quad (7.19)$$

Wenn man nun die Zeit t entsprechend (7.18) durch x ausdrückt und den Antriebsschlupf s_A aus (7.14) einsetzt, so ergibt sich eine bezüglich x linear mit der Steigung s_A zunehmende Verformung des Elements in Richtung des Einlaufpunktes E:

$$u(x) = (\omega r_{dyn} - v) \frac{x}{\omega r_{dyn}} = s_A x \quad (7.20)$$

Das Element erreicht den Auslaufpunkt A ($x = L$) nach der Verweildauer im Latsch

$$T = \frac{L}{\omega r_{dyn}} \quad (7.21)$$

und erfährt dort die maximale Verformung

$$u_{max} = u(L) = s_A L. \quad (7.22)$$

Tangentialspannungen an den Profilelementen

Wird linear-elastisches Verhalten für die Verformung des Profilelements vorausgesetzt, so überträgt ein Profilelement der Länge dx und der Breite dy eine Schubspannung, die proportional zur Verformung $u(x)$ ist:

$$\tau_x(x) = k u(x) \quad (7.23)$$

mit einer entsprechenden Konstante k . Die Konstante hängt ab

- vom Schubmodul des Gummimaterials,
- der Höhe des Laufstreifens und
- der Profilgestaltung.

Die Annahme einer über die ganze Latschfläche kontinuierlichen Spannungsverteilung berücksichtigt keinerlei Reifenprofil und ist daher nur eine Näherung.

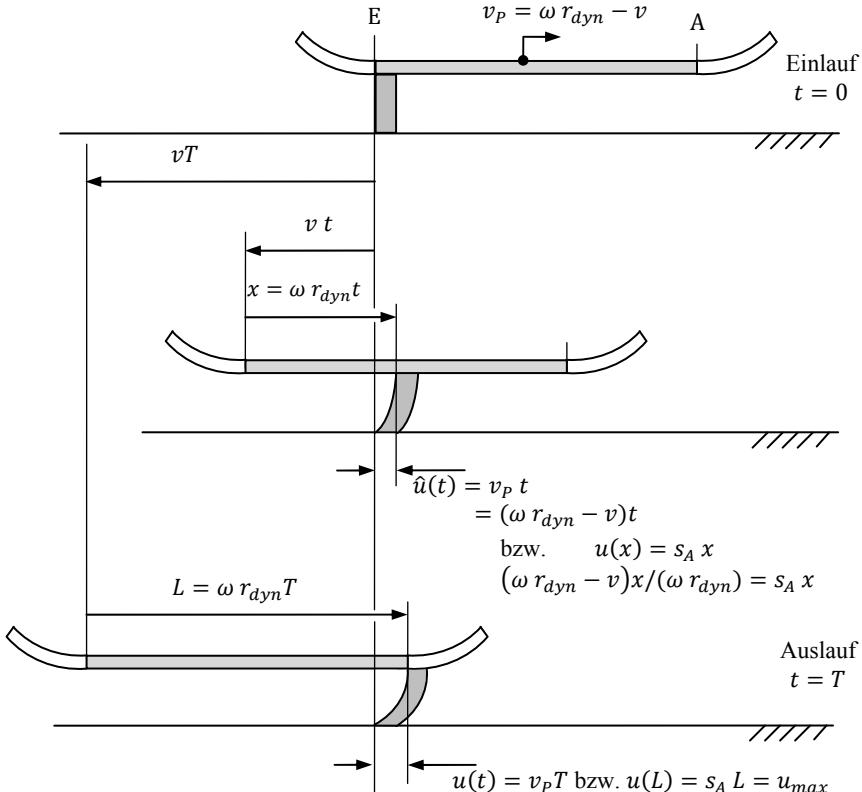


Abb. 7.8: Weg eines Profilelements im Laufstreifen

Die durch die Gesamtheit aller Profilelemente in der Aufstandsfläche A übertragene, resultierende Umfangskraft F_x lautet unter der Annahme einer konstanten Latschbreite b

$$F_x = \int_A \tau_x(x) dA = \int_0^L \tau_x(x) b dx = \frac{1}{2} kbL^2 s_A \quad (7.24)$$

und ist damit proportional zu der Dreiecksfläche unter dem Tangentialspannungsverlauf. Die Beziehungen (7.23) und (7.24) gelten nur dann, wenn die Profilelemente über die gesamte Latschlänge L auf der Fahrbahn haften. Dies gilt allerdings nicht allgemein, da durch die Reibungsverhältnisse bedingte Abweichungen berücksichtigt werden müssen.

Kraftschluß durch COULOMBSche Reibung

Für den Kraftschluß zwischen den Profilelementen und der Fahrbahn wird Coulombsche Reibung angenommen. Die Normaldruckverteilung $p_Z(x)$ sei über die Latschbreite b konstant und zu den Punkten E und A hin abfallend. Die resultierende Vertikalkraft (Radlast) lautet dann

$$F_Z = \int_A p_Z(x) dA = \int_0^L p_Z(x)b dx. \quad (7.25)$$

Für die Tangentialspannung $\tau_x(x)$ gilt die Haftbedingung mit dem Haftreibkoeffizienten μ_H :

$$\tau_x(x) \leq \tau_{xH}(x) \quad \text{mit} \quad \tau_{xH}(x) = \mu_H p_Z(x). \quad (7.26)$$

Überschreitet die Tangentialspannung an einer Stelle x die Haftgrenze, so beginnt das Profilelement an dieser Stelle zu gleiten. Es stellt sich daher statt der Haftreibspannung eine Gleitreibspannung

$$\tau_{xG}(x) = \mu_G p_Z(x) \quad (7.27)$$

mit dem Gleitreibkoeffizienten μ_G ein. Bei der Reibpaarung Gummi-Asphalt gilt in der Regel

$$\mu_G < \mu_H \rightarrow \tau_{xG}(x) < \tau_{xH}(x) = \mu_H p_Z(x). \quad (7.28)$$

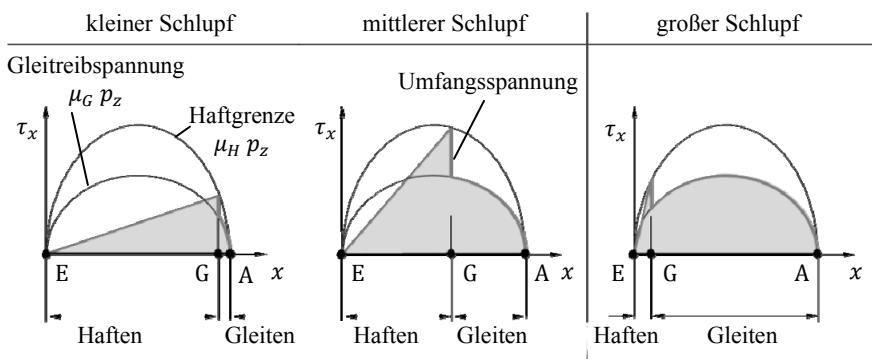


Abb. 7.9: Umfangsspannung im Schlupfbereich nach (Ammon 1997)

Der Kontaktbereich \overline{EA} wird damit in eine Haftzone \overline{EG} und eine Gleitzone \overline{GA} aufgeteilt. Mit zunehmendem Schluß s_A wandert die Haftgrenze G vom Auslaufpunkt A nach links. Die resultierende übertragene Umfangskraft entspricht weiterhin der Fläche unter dem resultierenden Tangentialspannungsverlauf, s. Abb. 7.9.

Schlupfkurve

Die übertragene Umfangskraft F_x kann nun in Abhängigkeit vom Umfangsschlupf $s_{A,B}$ dargestellt werden. Dabei ergibt sich in der Regel immer ein ähnlicher Verlauf, der allerdings abhängig vom Reifen hinsichtlich Maximum und Steigung unterschiedlich ist.

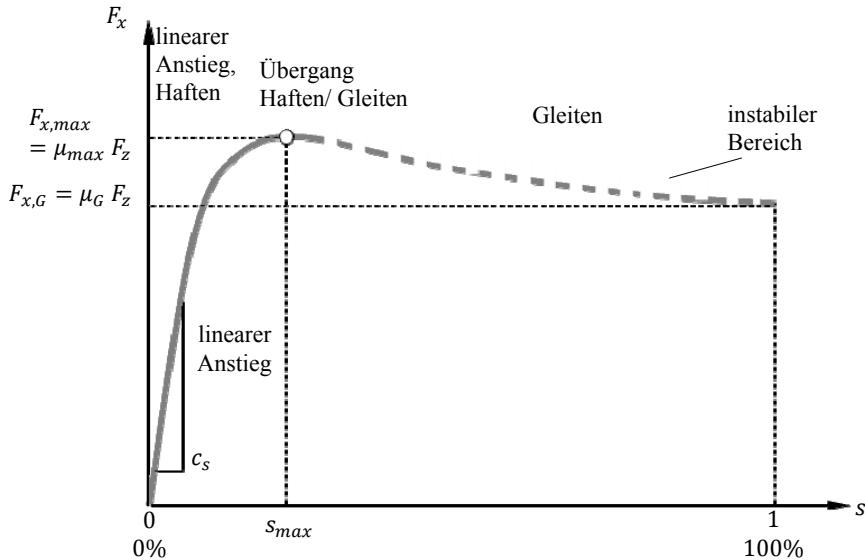


Abb. 7.10: Typischer Verlauf der Umfangskraft

Der typische Verlauf dieser Schlupf-Kraft-Kurve lässt sich nach der Vorarbeit in diesem Kapitel wie folgt erklären:

- Für *kleine Schlupfwerte* erstreckt sich der Haftbereich über nahezu die gesamte Latschlänge. Die Umfangskraft F_x steigt daher zunächst wegen der getroffenen Annahmen und gemäß Gl. (7.24) linear an. Es gilt also

$$F_x = c_s s \quad (7.29)$$

mit der *Umfangssteifigkeit* des Reifens

$$c_s = \frac{1}{2} k b L^2. \quad (7.30)$$

Wenn der Längsschlupf weiter zunimmt, vergrößert sich der Gleitbereich überproportional und die zwischen Fahrbahn und Reifen auftretende Kraft $F_x(s)$ überschreitet die maximal mögliche Kraft $F_{x,max}$. Dieser Maximalwert definiert dann den maximalen Kraftschlußbeiwert

$$\mu_{max} = \frac{F_{x,max}}{F_z}. \quad (7.31)$$

Dieser maximale Kraftschlußbeiwert μ_{max} ist deutlich kleiner als der Haftkoeffizient μ_H der Materialpaarung Gummi-Fahrbahn, der unter optimalen Bedingungen bis zu 2 betragen kann. Es gilt also stets:

$$\mu_{max} < \mu_H. \quad (7.32)$$

Der Grund hierfür ist, dass der maximale Wert der Haftriebung im Latsch nur in der Übergangszone zwischen Haft- und Gleitreibung erreicht werden kann. Bei noch größeren Schlupfwerten s fällt die übertragene Umfangskraft F_x auf den Wert $F_{x,G}$, der bei reinem Gleiten auftritt. Das ist der Fall, wenn das Rad entweder beim Bremsen blockiert oder beim Anfahren durchdreht. Der Kraftschlußbeiwert entspricht dann dem Gleitreibungskoeffizienten

$$\mu_G = \frac{F_{x,G}}{F_z}. \quad (7.33)$$

Charakteristisch für die Umfangsschlupfkurve sind:

- die Anfangssteigung $c_s = \left[\frac{dF_x}{ds} \right]_{s=0}$,
- der Schlupfwert s_{max} und die zugehörige größte Schlupfkraft $F_{x,max}$,
- sowie die Gleitkraft $F_{x,G} = \mu_G F_z$.

Wenn keine Seitenkräfte übertragen werden müssen, so wird die Umfangsschlupfkurve durch die folgenden Einflußgrößen bestimmt:

- *Konstruktive Reifenparameter (Material, Bauart, Abmessungen).* Einen maßgeblichen Einfluss hat die Schersteifigkeit des Laufstreifens. Mit zunehmender Steifigkeit verschiebt sich s_{max} hin zu kleineren Schlupfwerten, wobei in der Regel die Überhöhung μ_{max}/μ_G zunimmt, ihre Breite jedoch abnimmt. Die charakteristische Grundform der Schlupfkurve wird wesentlich schon durch Material, Aufbau und die Abmessungen des Reifens selbst festgelegt. Die beiden weiteren, von äußeren Einflussgrößen, die Radlast F_z und die Kraftschlußbeiwerte μ_{max} und μ_G verzerrn die Grundform in unterschiedlicher Weise.
- Die *Radlast F_z* : Die Vergrößerung der Radlast F_z führt im Wesentlichen zu einer Umskalierung der Ordinate der Schlupfkurve, d.h. der Ort des Maximums bleibt erhalten. Dies erklärt sich einerseits daraus, dass sich mit zunehmender Radlast F_z auch die Einfederung f und damit auch die

Latschlänge L vergrößert, was wiederum zu einer größeren Schersteifigkeit des Latsches und damit zu einer Vergrößerung der Anfangssteigung c_s von $F_x(s)$ führt. Andererseits bleiben die Kraftschlußbeiwerte μ_{max} und μ_G im Wesentlichen gleich. Dadurch vergrößern sich die Grenzwerte der übertragbaren Umfangskräfte proportional zu F_z . Bis hin zur statischen Betriebsradlast verändern sich $F_{x,max}$ bzw. $F_{x,G}$ nahezu proportional zu F_z . Bei weiter zunehmender Radlast nehmen sich $F_{x,max}$ bzw. $F_{x,G}$ nur noch schwach degressiv mit F_z zu. Dies ist auf eine Verschlechterung des Reibkraftschlusses durch Deformationen der Reifenstruktur zurückzuführen. Aufgrund dieser näherungsweisen Proportionalität zwischen F_x und F_z wird häufig das Verhältnis F_x/F_z über dem Schlupf s aufgetragen.

- *Maximaler Kraftschlußbeiwert μ_{max} und Gleitreibkoeffizient μ_G :* Wenn μ_{max} und μ_G proportional verändert werden, so werden Abszisse und Ordinate entsprechend einer zentrischen Streckung bezüglich des Koordinatenursprungs skaliert. Die Anfangssteigung von $F_x(s)$ wird überwiegend von der Schersteifigkeit des Laufstreifens bestimmt und bleibt daher erhalten. Der Grenzwert $F_{x,max}$ verschiebt sich hingegen in Richtung größerer Schlupfwerte, s. Abb. 7.11.

Ein grundsätzliches Problem bei der Modellierung des Reifenverhaltens ist, dass die Reifenparameter bereits in normalen Fahrsituationen in weiten Grenzen variieren.

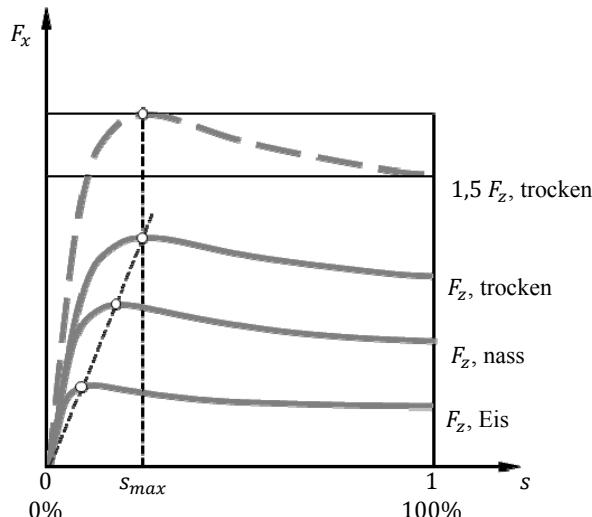


Abb. 7.11: Abhängigkeit des Kraftschlusses von Radlast und Reibbeiwert

7.3.4 Reifen unter Seitenkraft

Schräglaufwinkel und Querschlupf

Ein frei rollendes Rad (keine Umfangskraft) das mit einer Seitenkraft F_y beaufschlagt wird, erhält eine Geschwindigkeitskomponente quer zur Rollrichtung. Zwischen der Bewegungsrichtung des Radmittelpunktes und einem Vektor der einerseits in der Querschnittfläche des Rades liegt und andererseits parallel zur Fahrbahn ist, stellt sich dann der sogenannte Schräglauwinkel α ein. Damit gilt gemäß Abb. 7.2:

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} \quad \text{bzw.} \quad \sin \alpha = \frac{v_y}{v}. \quad (7.34)$$

Seitenkraft

Die Größe $\tan \alpha$ wird auch als Querschlupf oder Schräglau, der Winkel α als Schräglauwinkel bezeichnet. Im normalen Fahrbetrieb ist $|\alpha| < 12^\circ$ und Schräglauwinkel und Querschlupf können in guter Näherung gleichgesetzt werden (Ersoy und Heißing 2007). Grundsätzlich kann man davon ausgehen, dass der Laufstreifen in Längs- und Querrichtung ähnliche Deformationseigenschaften aufweist, so dass die beschriebenen Modellvorstellungen sich gut auch auf die Übertragung von Seitenkräften anwenden lassen. Wenn man wieder davon ausgeht, dass ein in den Latsch einlaufendes Profilelement zunächst wieder an der Fahrbahn haftet, dann wird dieses Element beim Durchlaufen des Laufstreifens zunehmend seitlich deformiert, s. Abb. 7.12. Bei kleinen Schräglauwinkeln haftet das Element bis zum Auslauf aus dem Laufstreifen und die Tangentialspannung in Reifenquerrichtung nimmt nahezu linear zum hinteren Latschrand hin zu. Die Seitenkraft F_y ist proportional zur Fläche unter dem Verlauf der Tangentialspannung, daher gilt:

$$\begin{aligned} F_y &= \int_A \tau_y(x) dA = \int_0^{L \cos \alpha} k_\alpha x \tan \alpha b dx \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} b k_\alpha L^2}_{c_\alpha} \sin \alpha \cos \alpha = c_\alpha \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \quad (7.35)$$

mit der Schräglauwsteifigkeit des Reifens c_α . Die Konstante k_α beschreibt die Materialeigenschaften des Laufstreifens. Für kleine Schräglauwinkel α gilt dann

$$F_y = \left[\frac{dF_y}{d\alpha} \right]_{\alpha=0} \alpha = c_\alpha \alpha . \quad (7.36)$$

In Analogie zu den Verhältnissen bei der Umfangskraft steigt also auch hier die Querkraft zunächst proportional zum Schräglaufwinkel α an. Bei größeren Schräglauwinkeln werden die Auslenkungen der Laufflächen-elemente und damit die Tangentialspannungen zum hinteren Latschrand hin so groß, dass der Grenzwert der Haftreibung überschritten wird und Gleiten eintritt. Ähnlich wie bei der Umfangskraft-Übertragung unterteilt sich die Latschfläche in einen Haft- und einen Gleitbereich. Die Seitenkraft steigt dann nicht mehr linear, sondern degressiv mit dem Schräglaufwinkel an. Mit zunehmendem α breitet sich der Gleitbereich im Latsch nach vorne aus, bis er (theoretisch) bei $\alpha = 90^\circ$ die gesamte Lauffläche erfasst.

Reifennachlauf und Rückstellmoment

Aufgrund der in Richtung Latschauslauf zunehmenden Tangentialspannungen in der Lauffläche greift die resultierende Querkraft im Abstand n_R hinter der Mitte der Lauffläche an, s. Abb. 7.13. Dies führt zu einem Drehmoment, das versucht, den Schräglauf zu verkleinern. Insgesamt ergibt sich ein entgegen dem Schräglaufwinkel α wirkendes Rückstellmoment

$$M_z = n_R F_y . \quad (7.37)$$

Dabei bezeichnet n_R den sogenannten Reifennachlauf. Das Rückstellmoment M_z nimmt für kleine Schräglauwinkel α zunächst linear zu:

$$M_z = c_{M,\alpha} \alpha \quad \text{mit} \quad c_{M,\alpha} = n_R c_\alpha = \text{const} . \quad (7.38)$$

Mit der Latschlänge L kann man aufgrund der dreiecksförmigen Spannungsverteilungen (womit die resultierende Kraft im Schwerpunkt des Dreiecks angreift) im Latsch im linearen Bereich, also für kleine Schräglauwinkel, den Nachlauf abschätzen

$$n_R \approx \frac{1}{6} L . \quad (7.39)$$

Mit zunehmendem Gleitbereich wandert der Schwerpunkt der Fläche unter dem Tangentialspannungsverlauf in Richtung Latschmitte. Damit gilt $n_R \rightarrow 0$ und das Rückstellmoment geht für große Schräglauwinkel wieder gegen Null, s. Abb. 7.14. Im Extremfall wird n_R sogar negativ und auch das Rückstellmoment kann sein Vorzeichen wechseln.

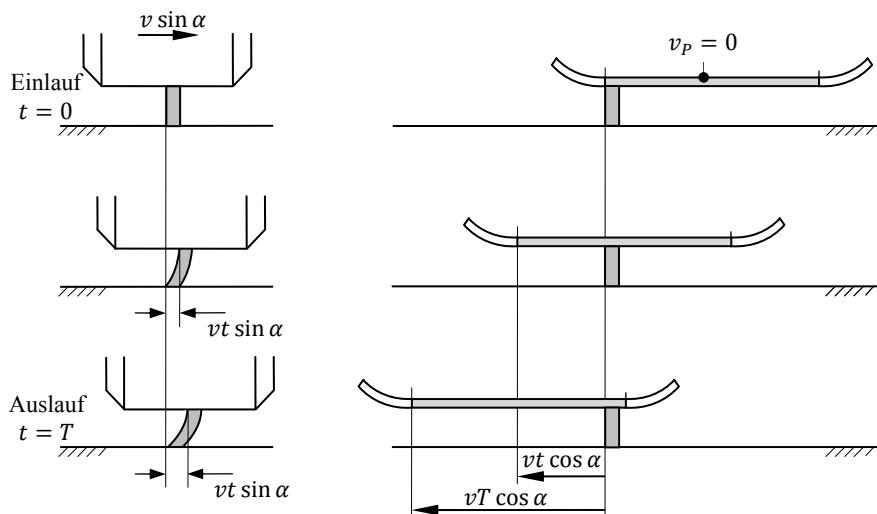


Abb. 7.12: Übertragung von Seitenkräften

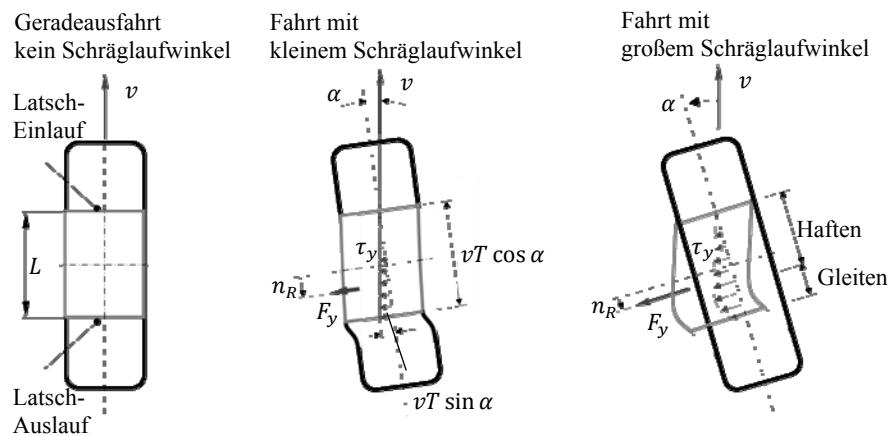


Abb. 7.13: Rad unter Seitenkraft nach (Zomotor 1991)

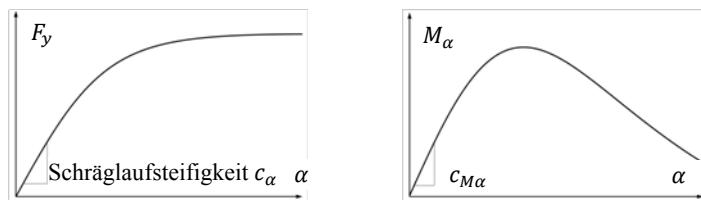


Abb. 7.14: Querkraft und Rückstellmoment

7.3.5 Einfluss des Radsturzes auf die Reifenseitenkraft

Der in Kapitel 6 eingeführte Sturzwinkel γ hat einen, wenn auch kleinen, Einfluss auf die Reifenseitenkraft. Zur Abschätzung seines Beitrags zur Querkraft betrachtet man ein Rad, welches unter dem Sturzwinkel γ rollt. Die auf diesen Sturzwinkel zurückzuführende Seitenkraft sei $F_{y,\gamma}$. Ihre Entstehung wird in Abb. 7.15 erläutert. Ein frei unter einem Sturzwinkel γ rollendes Rad würde sich ohne weitere Beeinflussung auf einer Kreisbahn um die gedachte Kegelspitze O bewegen. Das Rad wird durch die Radführung jedoch zu einer Bewegung in x-Richtung gezwungen. Dies erfordert eine Seitenkraft $F_{y,\gamma}$ sowie ein Lenkmoment $M_{z,\gamma}$, welche versuchen, das Rad in die Kreisbahn zu drehen. Für kleine Sturzwinkel $|\gamma| < 5^\circ$ nehmen die Sturzseitenkraft und das durch den Sturz verursachte Lenkmoment annähernd linear mit dem Sturzwinkel zu und man erhält in erster Näherung:

$$F_{y,\gamma} = -c_\gamma \gamma, \quad (7.40)$$

$$M_{z,\gamma} = -c_{M,\gamma} \gamma. \quad (7.41)$$

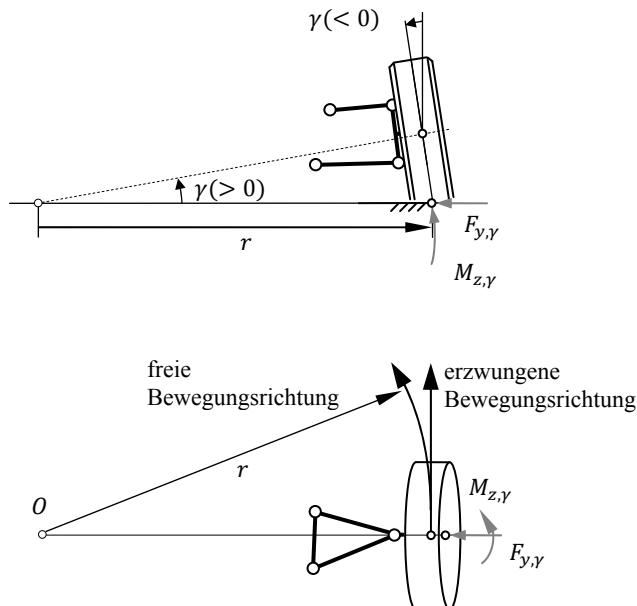


Abb. 7.15: Entstehung der Sturz-Seitenkraft

Die durch den Sturz verursachten Kräfte und Momente sind sehr viel kleiner als die durch den Schräglauf verursachten Kräfte und Momente.

7.3.6 Einfluss der Radlast auf die Radkräfte in der Lauffläche

Im Normalbetriebsbereich besteht eine näherungsweise lineare Abhängigkeit zwischen den Radkräften F_x und F_y in der Lauffläche und der aktuellen Vertikalkraft F_z . Beim Überschreiten der konstruktiven Betriebslast $F_{z,B}$ nimmt das Horizontalkraftpotential jedoch schwach degressiv mit der Radlast zu, da die Reibungsbindung des Gummis im Kontaktbereich mit steigender Anpresskraft abnimmt. Diesen Effekt kann man z.B. durch die Einführung einer effektiven Radlast (s. z.B. Ammon 1997)

$$F_{z,eff} = F_z \left(1 - e_z \left(\frac{F_z}{F_{z,B}} \right)^2 \right), \quad (7.42)$$

berücksichtigen, die an Stelle der aktuellen tatsächlichen Radlast F_z zur Berechnung der Radhorizontalkräfte herangezogen wird. Dazu muss noch der vom Reifen abhängige in Gl. (7.42) enthaltene positive Degressionsparameter e_z bestimmt werden.

7.3.7 Grundsätzliche Struktur der Radkräfte

Ammon hat in (Ammon 1997) vorgeschlagen, die Beschreibungsgleichungen für Umfangs- und Querkräfte folgendermaßen zu gliedern:

$$F_x = \mu_{max,0} F_{z,eff} f(\xi), \quad \xi = \frac{s}{s_{max,0} \mu_{max,0}}, \quad (7.43)$$

$$F_y = \mu_{max,0} F_{z,eff} g(\eta), \quad \eta = \frac{\alpha}{\alpha_{max,0} \mu_{max,0}}. \quad (7.44)$$

Dabei bezeichnet der Index 0 bei Reibkoeffizient und Radlast den normalen Betriebszustand, d.h. die Verhältnisse in der Umgebung des Normalarbeitsbereichs und es wird $F_{z,eff}$ wie in Gl. (7.42) mit $F_{z,0} = F_{z,B}$ verwendet. Die Funktionen f und g kennzeichnen typische Kurvenverläufe, wie sie in den Abb. 7.10 und Abb. 7.14 dargestellt wurden. Diese Funktionen hängen durch die Transformation der Schlupfgrößen nur von den Eigenschaften des Reifens, wie Schersteifigkeit, Geometrie und konstruktivem Aufbau ab. Die ersten beiden Faktoren spiegeln den Einfluss der Umwelt, wie z.B. die Beschaffenheit der Straßenoberfläche und den Einfluss der Radlast wider.

7.3.8 Überlagerung von Umfangs- und Seitenkräften

Reine Längskräfte oder reine Seitenkräfte werden nur bei reiner Geradeausfahrt oder bei Kurvenfahrten mit konstanter Geschwindigkeit übertragen. Bei allgemeinen Fahrzuständen überlagern sich Längs- und Querschlupf, d.h. es tritt mit der Umfangskraft F_x gleichzeitig eine Querkraft F_y auf. Die resultierende Kraft muss jedoch gemäß des COULOMBSchen Reibungsgesetzes stets die Bedingung

$$\sqrt{F_x^2 + F_y^2} \leq \mu_{max} F_z \quad (7.45)$$

erfüllen. Anschaulich lässt sich das durch den Kammschen Kreis erläutern, wenn die maximal möglichen Kraftschlusskoeffizienten μ_{max} in Umfangs- und in Querrichtung übereinstimmen, s. Abb. 7.16. Daraus ergeben sich folgende Schlussfolgerungen:

- Die maximal übertragbare Seitenkraft ist bei gleichzeitigem Auftreten einer Längskraft kleiner. Dies bedeutet für reale Fahrzustände, dass Beschleunigen oder Bremsen die maximal möglichen Querkräfte in einer Kurve reduziert und umgekehrt.
- Wirkt auf einen Reifen bei einer gegebenen Seitenkraft F_y zusätzlich eine Umfangskraft F_x , so vergrößern sich der Schräglaufwinkel α und der Längsschlupf s .

In der Realität weichen die Seitenkraft-Umfangskraft-Kennlinien von den idealen Kennlinien ab:

- Die Grenzkurve der maximal übertragbaren Horizontalkraft ist eine Ellipse, da bei realen Reifen in der Regel der Haftgrenzwert in Längsrichtung $\mu_{max,x} F_z$ etwas größer ist als der Haftgrenzwert in Querrichtung $\mu_{max,y} F_z$.
- Die Schlupfkraftkurven für Antreiben und Bremsen sind in der Regel nicht exakt symmetrisch.
- Bei vielen Reifen tritt aufgrund von Asymmetrien im Reifenaufbau auch bei verschwindendem Schräglaufwinkel α eine Seitenkraft F_y auf, bzw. für die Seitenkraft $F_y = 0$ ist ein kleiner Schräglaufwinkel $\alpha \neq 0$ erforderlich.

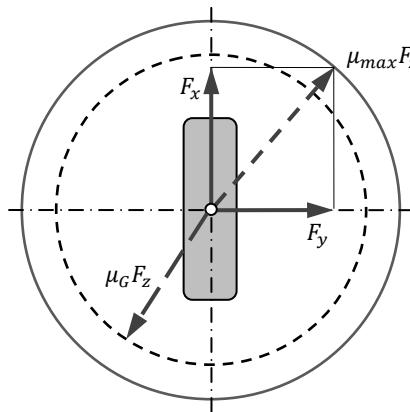


Abb. 7.16: Gleichzeitige Übertragung von Seiten- und Längskräften – Kamscher Kreis

Um die Überlagerungseffekte bei Fahrzuständen zu berücksichtigen, bei denen sowohl Umfangs- als auch Längsschlupf auftreten (Bremsen, Beschleunigen in der Kurve, etc.), definiert man aus dem Längsschlupf s und dem Querschlupf α eine absolute Schlupfgröße

$$s_a = \sqrt{s^2 + \tan^2 \alpha} = \frac{\sqrt{v_p^2 + v_y^2}}{|\bar{v}|} \quad (7.46)$$

mit der Wirkrichtung

$$\psi_a = \arctan \frac{\tan \alpha}{s} = \arctan \frac{v_y}{v_p} \quad (7.47)$$

mit

$$|\bar{v}| = \max(v, \omega r_{dyn}). \quad (7.48)$$

Für die (absolute) Reifenkraft in die durch den Winkel ψ_a vorgegebene Richtung erhält man dann:

$$F_{\psi_a}(s_a) = \sqrt{\frac{s^2 F_x^2(s_a) + \tan^2 \alpha F_y^2(s_a)}{s_a}}. \quad (7.49)$$

Die resultierenden Horizontalkomponenten der Reifenkraft werden nun auf die Koordinatenrichtungen des Radträgers verteilt:

$$F_{a,x} = F_{\psi_a}(s_a) \cos \psi_a = \frac{s}{s_a} F_{\psi_a}(s_a), \quad (7.50)$$

$$F_{a,y} = F_{\psi_a}(s_a) \sin \psi_a = \frac{\tan \alpha}{s_a} F_{\psi_a}(s_a).$$

In Abb. 7.17 und Abb. 7.18 sind prinzipielle Verläufe der Längs- und Querkräfte für unterschiedliche Schräglauwinkel schematisch dargestellt.

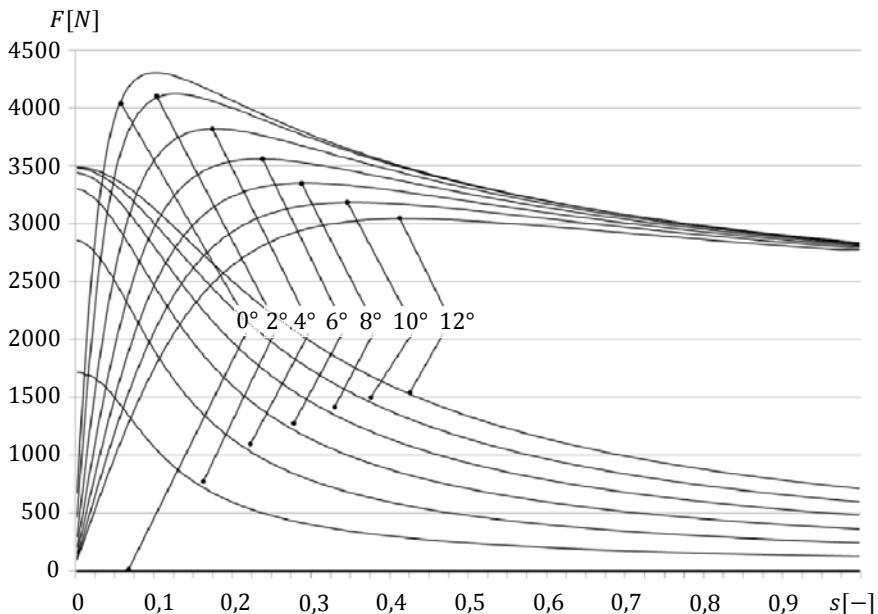


Abb. 7.17: Überlagerung von Längs- und Querkräften (schematische Darstellung).

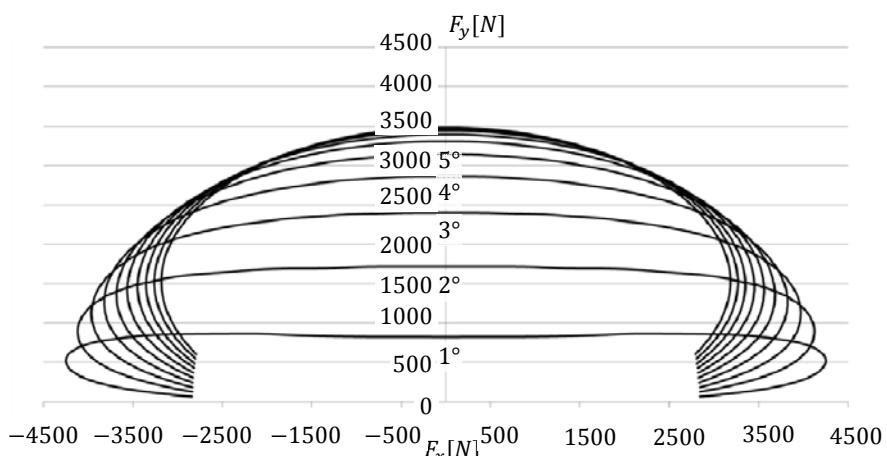


Abb. 7.18: Längs- und Querkräfte bei Kurvenfahrt (schematische Darstellung).

7.4 Reifenmodelle

Die Modellierung der Reifenkräfte erfordert vor allem dann besondere Sorgfalt, wenn neben dem stationären auch das instationäre Verhalten der Reifen erfasst werden soll. Man unterscheidet allgemein drei Arten von Reifenmodellen:

- mathematische Modelle,
- physikalische Modelle
- und Mischformen davon.

Im Folgenden werden zunächst Modelle betrachtet, welche die physikalischen Eigenschaften durch eine rein mathematische Beschreibung wiedergeben. Dabei geht man von bekannten, das heißt gemessenen Eigenschaften aus, welche in einem Kennfeld abgespeichert werden. Die Weiterverarbeitung kann nun entweder mit Hilfe einer Approximation durch algebraische Funktionen (*Magic Formula*, (Pacejka 1985)) oder durch eine Interpolation (Schieschke 1987) geschehen. Diese Art der Modellierung ist für die Simulation von Fahrmanövern, bei denen die Anregungsfrequenzen deutlich unterhalb der Gürteleigenfrequenzen liegen, meist ausreichend. Probleme treten jedoch dann auf, wenn eine größere Anzahl von Einflussgrößen berücksichtigt werden soll, da in diesem Fall umfangreiche Kennfelder abzuspeichern und auszuwerten sind. Außerdem ist es praktisch unmöglich, einzelne Parameter zu verändern, ohne die gesamten Kennfelder neu anlegen zu müssen.

Eine weitere Hauptgruppe bildet die Gruppe der physikalischen Modelle. Hierbei unterscheidet man die folgenden wesentlichen Typen:

- FE (Finite Element)-Modelle (Gipser 1987),
- Modelle zur Untersuchung von Membranschwingungen (Böhm 1985),
- stationäre Modelle (z.B. HSRI-Modell),
- instationäre Modelle, z.B. Kreisringmodelle (Schulze 1987) oder das Latschmatrixmodell (Schnelle 1990).

Die beiden erstgenannten Modelle dienen oftmals zur Untersuchung des Deformationsverhaltens des Reifens im Rahmen von Komfort- und Schwingungsuntersuchungen. Im Rahmen der Fahrdynamiksimulation ist man jedoch meist nur an den zwischen den Reifen und der Fahrbahn auftretenden Kräften und Momenten und nicht an den Verformungen selbst interessiert. Aus Gründen einer vertretbaren Rechenzeit werden daher diese Modelle trotz der heute zur Verfügung stehenden Rechnerleistungen

nicht in der Fahrdynamiksimulation eingesetzt. Bei stationären Modellen wird lediglich die Felge als masse- bzw. trägheitsbehaftet betrachtet, der Gürtel wird nicht als separater Körper modelliert. Diese Modelle sind wie die Kennlinienmodelle vorwiegend zur Simulation stationärer Fahrmanöver geeignet. Um den Anwendungsbereich dieser Modelle auszuweiten, werden oftmals PT_1 -Glieder zur Nachbildung des zeitlich verzögerten Aufbaus der Tangentialkräfte eingesetzt. Treten jedoch Anregungen im Bereich der Gürteleigenfrequenzen von etwa 30 bis 50 Hz auf (z.B. durch den Einsatz elastischer Bauteile in den Radaufhängungen oder durch die Pulsation des Bremsdrucks bei ABS-geregelten Bremsvorgängen) und ergeben sich hierdurch Rückwirkungen auf das Fahrzeug, muss die Eigen-dynamik des Gürtels berücksichtigt werden. Dazu wird der Gürtel als massebehafteter, starrer Kreisring modelliert. Dann ergeben sich jedoch bei niedrigen Geschwindigkeiten (unterhalb von etwa 10 m/s) hochgradig instationäre Transportvorgänge in der Kontaktfläche zwischen Reifen und Fahrbahn, die eine gesonderte Beschreibung erfordern.

Nach diesen einleitenden Betrachtungen wird im weiteren Verlauf dieses Kapitels ein kinematisches Modell für den Rad-Straße-Kontakt erläutert, welches auf folgenden Grundgedanken basiert:

- Die Kontakt-Geometrie Reifen/Fahrbahn wird durch einen Ersatz-Mechanismus beschrieben und kann mit einfachen Ausdrücken elegant berechnet werden.
- Einfache Reifenmodelle, welche die Längskraft und die Querkraft ohne Berücksichtigung der Eigendynamik des Gürtels als Funktionen von Schlupf und Schräglauft bestimmen, können auf diese Größen zugreifen.
- Für aufwendigere Reifenmodelle, die instationäre Vorgänge erfassen, kann der Latsch diskretisiert werden. Auch für diese Modelle stehen die erforderlichen kinematischen Größen der Latschfläche zur Verfügung.

7.4.1 Die Kontaktpunkt-Geometrie

In diesem Abschnitt wird vorausgesetzt, dass die Position und Orientierung des Rades im Raum bekannt ist. Dazu berechnet man die Position und Geschwindigkeit des Rades ausgehend vom Fahrzeugaufbau, s. Abb. 7.19. Die Position des Radträgers wird beschrieben durch den Punkt B und durch das in Kapitel 6 eingeführte radträgerfeste Koordinatensystem. Diese Größen sind durchweg aus der Fahrzeugkinematik bekannt. Gesucht sind jetzt die Lage- und Geschwindigkeitsgrößen der Rad-Straße-Kontaktzone, die in diesem Fall durch einen Kontaktpunkt A und die Ori-

entierung einer Tangentialebene an die Straßenoberfläche im Punkt A gegeben ist.

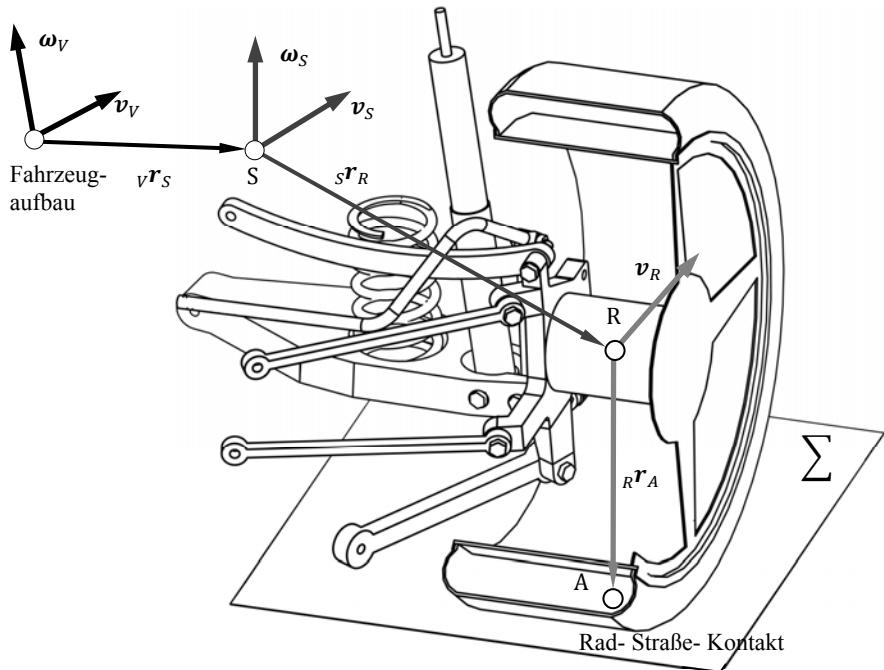


Abb. 7.19: Berechnung der Position und Geschwindigkeit des Radträgers ausgängig vom Fahrzeugaufbau

Abb. 7.20 zeigt eine schematische Darstellung, in der die Radmittelebene als flache Scheibe angesehen wird. Die Fahrbahn wird lokal durch die Tangentialebene Σ beschrieben. Dies ist für die Beschreibung normaler Fahrbahnen ohne Stufen oder andere Einzelhindernisse vollkommen ausreichend.

Gegeben seien der Fahrbahnnormalenvektor n_s und der Radnormalenvektor n_R sowie die Position des Radmittelpunktes R, ausgedrückt durch den Ortsvektor im Inertialsystem. Die Position des Rades wird dabei, wie in den vorangegangenen Kapitel beschrieben, durch die entsprechenden geometrischen und kinematischen Beziehungen ausgehend vom Fahrzeugchassis über die Radaufhängung und den Radträger beschrieben. Mit diesen Größen kann nun die Lage des Radaufstandspunktes A bestimmt werden. Dieser Punkt ist gegeben als Berührpunkt einer starren Scheibe (Mittelpunkt R, Radius zunächst unbekannt) mit der Fahrbahnebene Σ . Der

Verbindungsvektor von R nach A muss sowohl auf der Radachse \mathbf{n}_R als auch auf dem Einheitsvektor \mathbf{n}_L in Längsrichtung der Radscheibe senkrecht stehen.

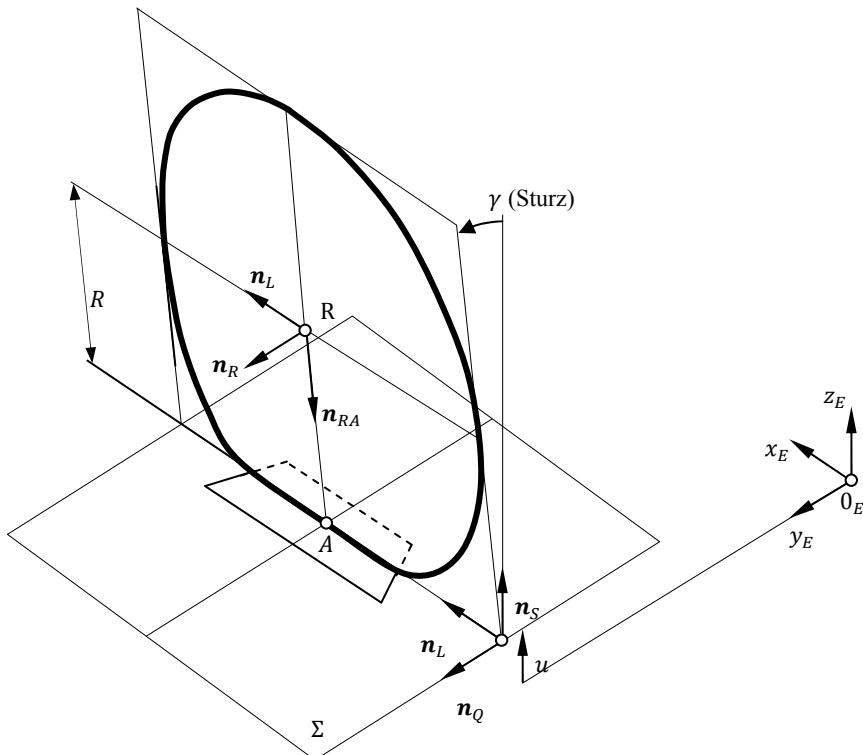


Abb. 7.20: Einheitsvektoren am Rad

Es ist für das Verständnis hilfreich, sich ein entsprechendes mechanisches Ersatzmodell für die Vektoren am Rad zu schaffen (vgl. Abb. 7.22). Es besteht aus einem im Radträger R drehbar gelagerten Winkelstück W_1 , dessen unterer Ast senkrecht auf der Drehachse steht. Dieser untere Ast liegt damit immer in der Radfläche. Über ein Schubgelenk ist er mit einem zweiten, auf dem Boden aufliegenden Winkelstück W_2 verbunden. Dieses ist wiederum rechtwinklig, so dass die Verbindungsleitung von R und A wie gefordert nicht nur in der Radebene liegt, sondern auch senkrecht auf der Längsrichtung \mathbf{n}_L steht. Dabei zeigt die auf dem Boden befindliche Platte P immer in Richtung von \mathbf{n}_L . Der mittlere Reifenradius R , also die Länge der Strecke \overline{AR} , entspricht der Verschiebung des Schubgelenks. Bei gegebener Position und Orientierung des Radträgers R richten sich die Winkel-

stücke so aus, dass zwischen dem Stab von W_2 und der Fahrbahn Linienberührung herrscht. Die auf der Fahrbahn liegende Platte P, welche die Latschfläche darstellt, kann sich relativ zum Winkelstück W_2 um diesen Stab drehen. Die hier vorliegende kinematische Struktur kann auch als kinematische Kette mit sechs Gelenkfreiheitsgraden interpretiert werden, welche die räumliche Lage des Radträgers relativ zur Fahrbahn ausdrückt. Die Berechnung der Vektoren dieses Systems erfolgt nun sukzessive:

Aufspannen eines Dreibeins $\{R; \mathbf{n}_R, \mathbf{n}_L, \mathbf{n}_{RA}\}$ in der Radfläche

Der Einheitsvektor in Rollrichtung des Rades ergibt sich zu

$$\mathbf{n}_L = \frac{\mathbf{n}_R \times \mathbf{n}_S}{\| \mathbf{n}_R \times \mathbf{n}_S \|}. \quad (7.51)$$

Der Einheitsvektor von R nach A lautet:

$$\mathbf{n}_{AR} = \mathbf{n}_R \times \mathbf{n}_L. \quad (7.52)$$

Für den Einheitsvektor quer zur Rollrichtung erhält man noch:

$$\mathbf{n}_Q = \mathbf{n}_S \times \mathbf{n}_L. \quad (7.53)$$

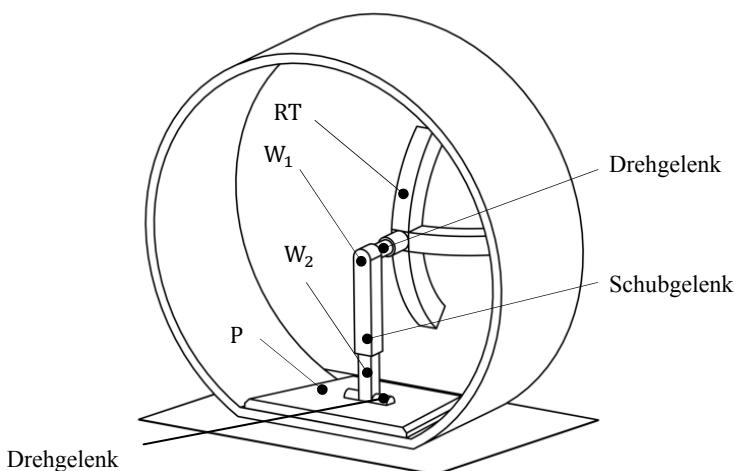


Abb. 7.21: Mechanisches Ersatzmodell der Radgeometrie (Schnelle 1990)

Ermittlung des aktuellen Radradius R

Man bildet den Ortsvektor zum Punkt A im Inertialsystem. Seine Projektion auf die Fahrbahnnormalenvektoren \mathbf{n}_R gibt die Höhe der Fahrbahn (genauer gesagt die Höhe des Punktes A und damit der Tangentialebene Σ) im Inertialsystem an. Diese ist bekannt und habe den Wert u . Damit erhält man:

$$R = \frac{u - \mathbf{b} \mathbf{n}_S}{\mathbf{n}_{AR} \mathbf{n}_S}. \quad (7.54)$$

Mit dem Ortsvektor \mathbf{r}_R des Radmittelpunktes R liegt auch der Ortsvektor zum \mathbf{r}_A Punkt A fest:

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_R + R \mathbf{n}_{AR}. \quad (7.55)$$

Außerdem ist die Position der beiden Winkelstücke W_1 und W_2 durch die Einheitsvektoren \mathbf{n}_{RA} , \mathbf{n}_L und \mathbf{n}_Q bekannt. Es liegen nun zwei Koordinatensysteme vor, und zwar ein radträgerfestes definiert durch $\{R; \mathbf{n}_L, \mathbf{n}_R, \mathbf{n}_{RA}\}$ sowie ein latschfestes definiert durch $\{A; \mathbf{n}_L, \mathbf{n}_Q, \mathbf{n}_S\}$. Damit kann der *Sturzwinkel* γ zwischen der Radebene und der vertikalen Ebene eingeführt werden. Er genügt folgenden einfachen Beziehungen und beschreibt die relative Verdrehung der Koordinatensysteme

$$\cos \gamma = \mathbf{n}_R \mathbf{n}_Q, \quad \sin \gamma = -\mathbf{n}_R \mathbf{n}_S. \quad (7.56)$$

Iterative Kontaktpunkt-Ermittlung bei unebener Fahrbahn

Ist die Fahrbahn uneben, so kann man nicht von einem konstanten Fahrbahnnormalenvektor \mathbf{n}_S ausgehen. Dieser ist vielmehr vom Ort – also vom Ortsvektor \mathbf{r}_A – abhängig. Bei Beschränkung auf schwach gekrümmte Fahrbahnen ist jedoch der Kontaktspunkt nach wie vor eindeutig definiert und auch die Richtungen lassen sich bezüglich einer Tangentialebene mit guter Näherung in derselben Weise angeben. Die Ermittlung des Ortsvektors erfolgt in diesem Fall iterativ in der folgenden Weise:

- Als Startwert für \mathbf{r}_A wird die Projektion der Radmitte R auf die Fahrbahn (in Richtung der Schwerkraft) gewählt.
- Der Fahrbahnnormalenvektor \mathbf{n}_S wird an dieser Stelle gebildet (er ist aus dem Fahrbahnverlauf gegeben).
- Mit diesem Vektor \mathbf{n}_S wird gemäß (7.51) bis (7.55) die Kontakt-Punkt-Geometrie aufgebaut. Auch die Fahrbahnhöhe u ist Bestandteil der Iteration, da auch sie vom Ort abhängt.

- Der aus (7.55) folgende Wert für \mathbf{r}_A ist eine verbesserte Schätzung. Mit ihm wird neu begonnen. Die Iteration wird fortgesetzt, bis die Differenz zweier aufeinanderfolgender Werte von \mathbf{r}_A innerhalb einer vorher festgelegten Iterationsschranke liegt. An dieser Stelle ist es allerdings nicht angebracht allzu große Genauigkeitsansprüche zu stellen, da die hier gemachten Fehler immer in Relation zu den bei der Modellierung des Reifens ohnehin gemachten Vereinfachungen zu setzen sind.

7.4.2 Kontakt-Geschwindigkeiten

Gegeben ist die Absolutgeschwindigkeit \mathbf{v}_R des Radmittelpunktes R und die Absolut-Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_R$ des Radträgers. Es bietet sich an, diese beiden Größen jeweils in Komponenten der beiden oben erwähnten Koordinatensysteme zu zerlegen, s. Abb. 7.22:

$$\mathbf{v}_{RL} = (\mathbf{v}_R \cdot \mathbf{n}_L)\mathbf{n}_L = v_{RL}\mathbf{n}_L, \quad (7.57)$$

$$\mathbf{v}_{Rn} = (\mathbf{v}_R \cdot \mathbf{n}_R)\mathbf{n}_{RA} = v_{RA}\mathbf{n}_{RA}, \quad (7.58)$$

$$\mathbf{v}_{RA} = (\mathbf{v}_R \cdot \mathbf{n}_{RA})\mathbf{n}_{RA} = v_{RA}\mathbf{n}_{RA}, \quad (7.59)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{RL} = (\boldsymbol{\omega}_R \cdot \mathbf{n}_L)\mathbf{n}_L = \omega_{RL}\mathbf{n}_L, \quad (7.60)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{Rn} = (\boldsymbol{\omega}_R \cdot \mathbf{v}_L)\mathbf{n}_R = \omega_{Rn}\mathbf{n}_R, \quad (7.61)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{RA} = (\boldsymbol{\omega}_R \cdot \mathbf{n}_{AR})\mathbf{n}_L = \omega_{RA}\mathbf{n}_{AR}. \quad (7.62)$$

Der Kontaktpunkt A und der Latsch (dargestellt durch die Platte P, s. Abb. 7.22) weisen ebenfalls sechs Geschwindigkeiten auf, und zwar:

- Die Längs- und die Quergeschwindigkeit von A:

$$\mathbf{v}_L = v_L \mathbf{n}_L, \quad (7.63)$$

$$\mathbf{v}_Q = v_Q \mathbf{n}_Q. \quad (7.64)$$

- Die Winkelgeschwindigkeit des Latsches um die Vertikale:

$$\boldsymbol{\omega}_Q = \omega_Q \mathbf{n}_S. \quad (7.65)$$

- Die Sturzänderungsgeschwindigkeit:

$$\boldsymbol{\omega}_L = -\dot{\gamma} \mathbf{n}_L. \quad (7.66)$$

- Die Radiusänderung am Rad:

$$\dot{R} \mathbf{n}_{RA}. \quad (7.67)$$

- Die Relativdrehung zwischen Latsch und Radträger:

$$\boldsymbol{\omega}_n = \omega_n \mathbf{n}_R. \quad (7.68)$$

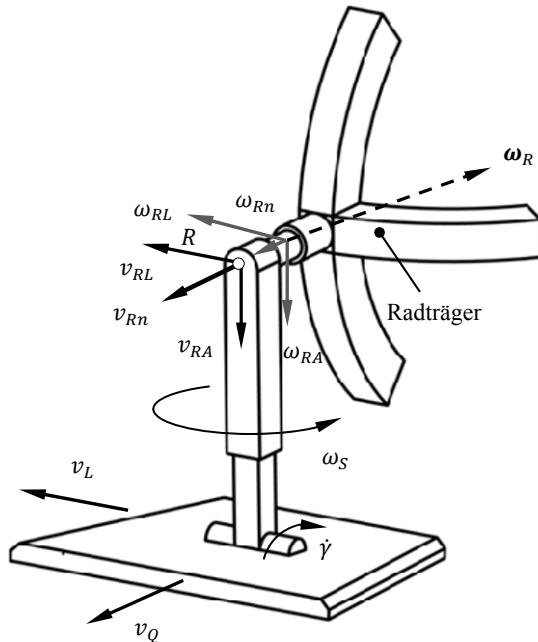


Abb. 7.22: Geschwindigkeiten des Rad-Straße-Kontaktes

Aus der Lage und den beiden bekannten Geschwindigkeiten \mathbf{v}_R und $\boldsymbol{\omega}_R$ sind nun die vollständige Bewegung des Punktes A und des Latsches – dargestellt durch die in Gleichung (7.63) bis Gleichung (7.68) vorkommenden Geschwindigkeiten – zu ermitteln. Man berechnet dazu die Geschwindigkeit des Radmittelpunktes B und die Winkelgeschwindigkeit des Radträgers *von unten*, das heißt von der Fahrbahn aus. Sind die Geschwindigkeiten (7.63) bis (7.68) bekannt, so liegen mit ihnen \mathbf{v}_R und $\boldsymbol{\omega}_R$ eindeutig fest. Nun projiziert man diese, wie oben gezeigt, auf die Achsen des oberen Dreibeins und erhält einfache Ausdrücke, die sich in Matrixform zusammenfassen lassen:

$$\begin{bmatrix} \omega_s \\ v_L \\ \omega_n \\ \dot{\gamma} \\ v_Q \\ \dot{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\cos\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R\tan\gamma & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tan\gamma & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R/\cos\gamma & 1/\cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R\tan\gamma & -\tan\gamma & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{RA} \\ v_{RL} \\ \omega_{Rn} \\ \omega_{RL} \\ v_{Rn} \\ v_{RA} \end{bmatrix} \quad (7.69)$$

Diese Beziehungen enthalten lediglich den Radradius R und den Sturzinkel γ , die beide aus der Berechnung der Position bekannt sind. Die kinematische Aufbereitung macht das analytische Differenzieren von Ortsvektoren und Drehtensoren vollkommen überflüssig. Interessant ist auch die teilweise entkoppelte Struktur von Gleichung (7.69). Es gelingt also, die Position und Geschwindigkeit der Rad-Straße-Kontaktpunkte auf einfache Weise zu bestimmen. Welche dieser Größen anschließend in dem verwendeten Reifenmodell weiter genutzt werden (können), hängt von der Art und der Beschreibungstiefe des Modells ab.

7.4.3 Berechnung der Schlupfgrößen

Aus den in Abschnitt 7.4.2 berechneten Größen lassen sich nun die zur Berechnung der horizontalen Reifenkräfte erforderlichen Schlupfgrößen berechnen. Der Schlupf s wird aus folgenden Beziehungen mit den in den vorherigen Abschnitten hergeleiteten Größen und der aktuellen Radwinkelgeschwindigkeit $\dot{\rho}$ ermittelt:

$$s_{A,B} = \frac{|v_L - \dot{\rho} r_{dyn}|}{\max(v_L, \dot{\rho} r_{dyn})}. \quad (7.70)$$

$$\tan \alpha = \frac{v_Q}{v_L}. \quad (7.71)$$

Damit sind die Eingangsgrößen für unterschiedlichste Reifenmodelle vorhanden. In diesem Buch werden im nächsten Abschnitt zwei dieser Reifenmodelle besprochen.

7.4.4 Magic Formula Modelle

Eines der meist genutzten Reifenmodelle ist das sogenannte *Magic Formula* Modell, das von (Pacejka 2002 et al.), (Pacejka und Bakker 1993) und (Pacejka 2006) entwickelt wurde. Das Magic Formula Reifenmodell ist eine rein mathematische Beschreibung des Ein- und Ausgangsverhaltens des

Rad-Bodenkontakte unter quasi-stationären Bedingungen. Der Modellierungsansatz gestattet es, die Charakteristika von Seitenführungskraft, Bremskraft und Rückstellmoment des Reifens mathematisch zu erfassen.

Die Magic Formula Modelle wurden entwickelt, um mittels mathematischer Funktionen die in diesem Kapitel beschrieben Kraftgrößen mit den Starrköperschlupfen zu verknüpfen, d.h.

- die Umfangskraft F_x mit dem Umfangsschlupf s ,
- die Querkraft F_y mit dem Schräglaufwinkel α und
- das Rückstellmoment M_z mit dem Schräglaufwinkel α .

Diese Zusammenhänge werden bei quasistatischen Rollen- oder Fahrversuchen ermittelt und durch mathematische Funktionen approximiert. Pacejka und Bakker schlugen vor, die oben diskutierten typischen Kraftfunktionen durch eine Kombination von Sinus- und Arkustangens-Funktionen zu approximieren. Die Formeln sind in der Lage, Umfangskraft, Längskraft und Rückstellmoment als Funktion der Längs- und Querschlupfe mit hoher Genauigkeit zu beschreiben. Die Beschreibung ist jedoch auf stationäre Zustandseigenschaften begrenzt. Die Abb. 7.23 zeigt die Grundformen dieser Beschreibungsfunktionen. Die Anforderungen an die Beschreibungsfunktionen sind:

- die Beschreibung aller stationären Reifenzustandseigenschaften,
- leichte Beschaffbarkeit der Daten,
- Möglichkeit einer gewissen physikalischen Interpretation der Zusammenhänge,
- hohe Genauigkeit
- und einfache Auswertbarkeit.

Als geeignete Beschreibungsfunktion kann z.B. (Pacejka 2006):

$$y(x) = D \sin(C \arctan(Bx - E(Bx - \arctan Bx))) \quad (7.72)$$

$$Y(X) = y(x) + S_v \quad (7.73)$$

$$x = X + S_h \quad (7.74)$$

gewählt werden.

Dabei repräsentiert $Y(X)$ entweder die Umfangskraft, die Querkraft oder das Rückstellmoment. Die Variable X steht entweder für den Längsschlupf

s oder den Schräglauwinkel α . Die verwendeten Parameter lassen sich nun wie in Tabelle 7.4 und Abb. 7.25 angegeben interpretieren.

Tabelle 7.4: Interpretation der Magic Formula Parameter

Parameter	Interpretation
D	maximale Kraft, bzw. maximales Moment
C	beeinflusst die Form der Kurve – Strecken in x-Richtung
E	zusätzliche Dehnung oder Kompression der Kennlinien
BCD	Steigung der Kennlinien bei Nullschlupf (Steifigkeit)
S_v	Vertikalverschiebung der Kennlinien
S_h	Horizontalverschiebung der Kennlinien

Zwischen den Parametern und typischen Merkmalsgrößen der Kurven (s. Abb. 7.23) gelten die Zusammenhänge:

$$C = 1 \pm \left(\frac{2}{\pi} - \arcsin \frac{y_a}{D} \right), \quad (7.75)$$

$$E = \frac{Bx_m - \tan(\frac{\pi}{2C})}{Bx_m - \arctan(Bx_m)}. \quad (7.76)$$

Entsprechende Datensätze können beispielhaft der Literatur (z.B. Bakker et al. 1987 und 1989) entnommen werden. Bei der Erstellung realistischer Fahrzeugmodelle müssen die Parameter für die verwendeten Reifen aus Messdaten durch Approximation gewonnen werden (Pacejka 2006). Das grundsätzliche Aussehen der Basiskurven (7.72) - (7.74) kann Abb. 7.23 entnommen werden. Es ist allerdings zu beachten, dass es sich hier um rein stationäre Beschreibungen der Reifenkräfte handelt, die Verzögerung beim Aufbau der tatsächlichen Reifenkräfte durch die endliche Geschwindigkeit des Rades wird hier noch nicht berücksichtigt, s. Abschnitt 7.5.

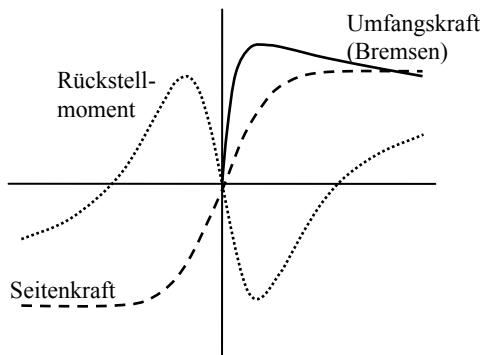


Abb. 7.23: Charakteristische Reifenkennlinien aus dem Magic Formula Ansatz

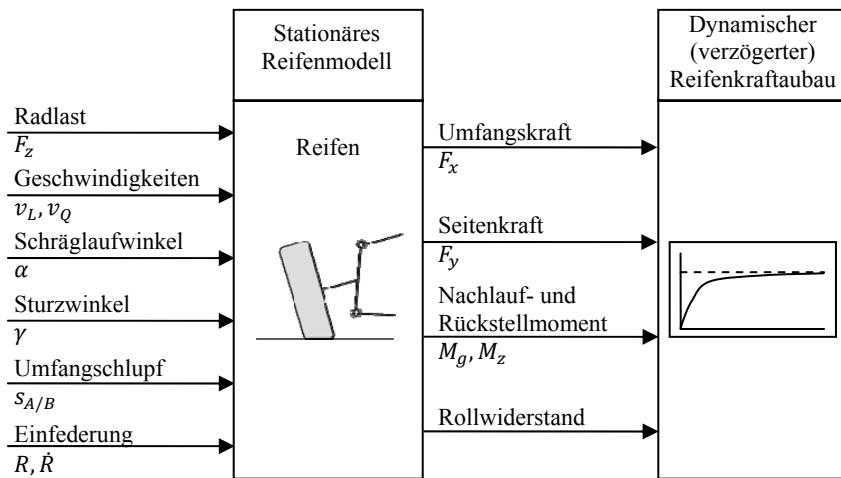


Abb. 7.24: Ein- und Ausgangsgrößen von Reifenmodellen

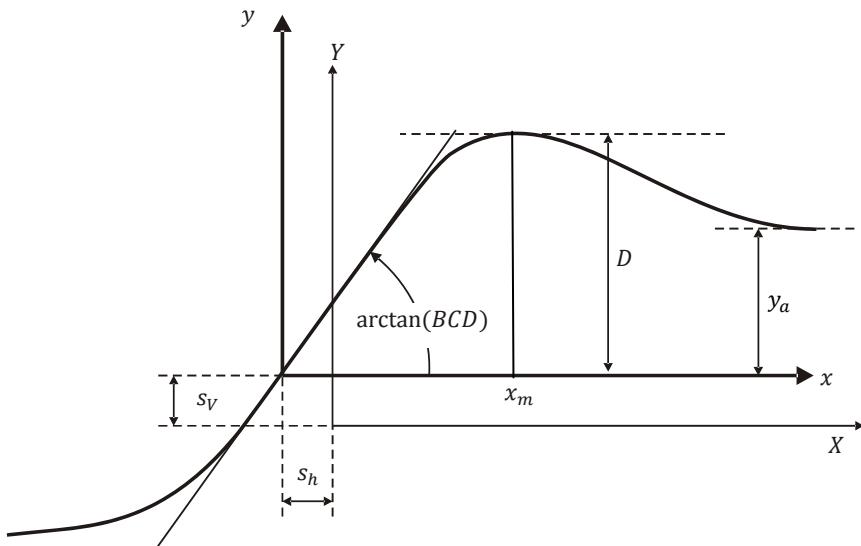


Abb. 7.25: Interpretation der Magic Formula Koeffizienten

7.4.5 Magic Formula Modelle für überlagerten Schlupf

Auch werden sind die Umfangs- und Schräglaufkraftverläufe nicht unabhängig voneinander angenommen. Um die gegenseitige Abhängigkeit abzubilden, verwendet (Pacejka 2006) Gewichtungskurven, welche die gegenseitige Abhängigkeit der Kraftverläufe realisieren. Es handelt sich

dabei um *Abminderungskurven*, die dafür sorgen, dass die Kräfte in Längs- und Querrichtung so miteinander verrechnet werden, dass sich insgesamt wieder die Reibungsbedingungen zwischen Reifen und Fahrbahn richtig abgebildet werden. Ein typischer Ansatz für die Seitenkraft ist z.B.

$$F_y = G_{ys} F_{yo} + S_{Vys} \quad (7.77)$$

mit der Querkraft F_{yo} für den längsschlupffreien Fall, dem Kraftversatz S_{Vys} und der Gewichtungsfunktion

$$G_{ys} = \frac{\cos [C_{ys} \arctan(B_{ys}(s + S_{Hys}))]}{\cos [C_{ys} \arctan(B_{ys}S_{Hys})]}. \quad (7.78)$$

Die Gewichtungsfunktion G_{ys} hat dabei die Eigenschaft für $s = 0$ den Wert Eins anzunehmen und mit steigendem s gegen Null abzufallen. Für eine detaillierte Diskussion und die Angabe des kompletten Formelsatzes sei auf (Pacejka 2006) verwiesen.

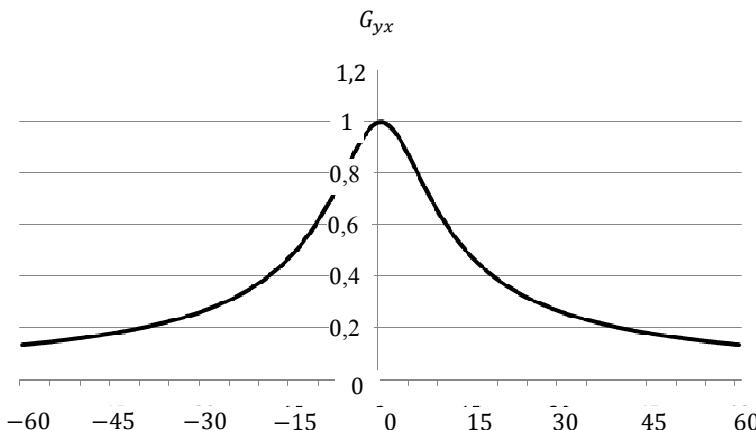


Abb. 7.26: Abminderungsfunktion nach Pacejka (2006)

7.4.6 HSRI-Reifenmodell

Gemäß der Ausführungen in Abschnitt 7.4.1 bis 7.4.3 kann der Bewegungszustand des Latsches in Abhängigkeit des Sturzwinkels sowie der Winkel- und Translationsgeschwindigkeit des Radträgers bzw. des Radmittelpunktes bestimmt werden. Dies ermöglicht dann die Berechnung von Reifenschräglau und Schlupf. Sind diese Größen bekannt, so können die dynamischen Reifenkräfte zum Beispiel mithilfe des HSRI-Reifenmodells

(Highway Safety Research Institute), welches von (Dugoff et al. 1969) entwickelt wurde, berechnet werden. Es wurde von (Uffelmann 1980) um die Berücksichtigung von Radlastschwankungen ergänzt, während (Wiegner 1973) die Reifenrückstellmomente hinzufügte. Dieses physikalische Modell ermöglicht die Bestimmung der Reifenlängs- und Reifenquerkraft, in dem es die im Latsch entstehenden Verformungen approximiert. Diese Verformungen sind in Abb. 7.13 dargestellt. Hier ist zu erkennen, dass sich bei Überschreitung der Kraftschlussgrenze ein Gleitgebiet ausbildet, während der vordere Teil des Latsches noch haftet, vgl. auch die Abschnitte 7.3.3 und 7.3.4. Die geometrische Form des Gleit- und Haftbereiches wird nun durch die in Abb. 7.27 dargestellte trapezförmige Fläche approximiert.

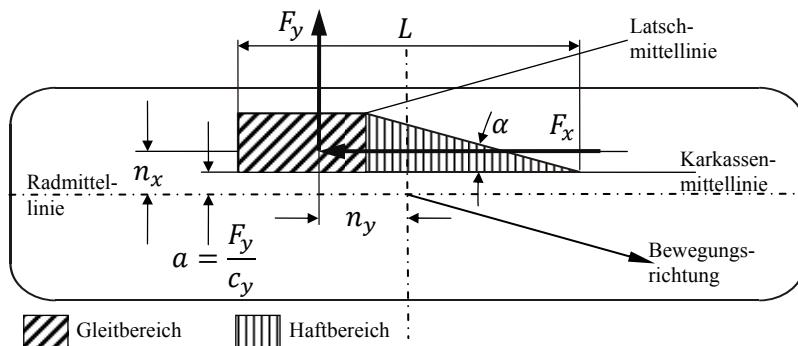


Abb. 7.27: Ableitung des HSRI Modells durch trapezförmige Approximation der Latschfläche mit Haft- und Gleitbereich

Die trapezförmige Fläche ergibt sich durch Parallelverschiebung der Karkasse (Gürtel bei heutigen Radialreifen) gegenüber der Radmittellinie im Latsch und durch Aufteilung in einen Gleit- und Haftbereich (vgl. Abb. 7.14). Dabei entsteht die Auslenkung des Reifenprofils im Haftbereich durch den Schräglaufwinkel und im Gleitbereich durch Parallelverschiebung gegenüber der Karkassenmittellinie. Unter der Annahme einer konstanten Flächenpressung über den gesamten Latsch kann davon ausgegangen werden, dass die Reifenlängskraft F_x und die Reifenquerkraft F_y im Flächenschwerpunkt der approximierten Trapezfläche angreifen (vgl. Abb. 7.27). Zur Ermittlung des Bewegungszustandes im Latsch (Gleiten oder Haften) muss zunächst die Gleitgeschwindigkeit bestimmt werden:

$$v_G = v_P \sqrt{s_{A,B}^2 + \tan^2 \alpha}, \quad (7.79)$$

wobei v_p die Geschwindigkeit in Latschlängsrichtung gemäß Abb. 7.7 und $s_{A,B}$ den Schlupf laut Tabelle 7.2 bezeichnet. Mithilfe der Gleitgeschwindigkeit und dem Haftreibungskoeffizienten μ_0 lässt sich der Haftreibbeiwert zwischen Fahrbahn und Reifen berechnen:

$$\mu = \mu_0 (1 - k_R \tanh (\alpha v_G)^2), \quad (7.80)$$

dabei sind die Kraftschlussfaktoren k_R und α von der Beschaffenheit der Fahrbahn abhängig. Unter Verwendung der Umfangssteifigkeit c_s und der Schräglauftsteifigkeit c_α (s. Gln. (7.30) und (7.36)) erhält man damit die wesentliche dimensionslose Kenngröße \bar{s}_R :

$$\bar{s}_R = \frac{\sqrt{(c_s s_{A,B})^2 + (c_\alpha \tan \alpha)^2}}{\mu F_z (1 - s_{A,B})}. \quad (7.81)$$

Ist nun $\bar{s}_R \leq 0,5$ dann liegt kein Gleiten sondern ausschließlich Haften im Latsch vor. Für die Längs- und die Querkraft gelten die folgenden Gleichungen:

$$F_x = c_s s_{A,B}, \quad (7.82)$$

$$F_y = c_\alpha \tan \alpha. \quad (7.83)$$

Ist andererfalls $\bar{s}_R > 0,5$ so liegt Gleiten und Haften in der Latschfläche vor (s. Abb. 7.27), und die Reifenkräfte berechnen sich wie folgt:

$$F_x = \frac{c_s s_{A,B} (\bar{s}_R - 0,25)}{\bar{s}_R^2 (1 - s_{A,B})}, \quad (7.84)$$

$$F_y = \frac{c_\alpha \tan \alpha (\bar{s}_R - 0,25)}{\bar{s}_R^2 (1 - s_{A,B})}. \quad (7.85)$$

Zur Berechnung des Rückstellmoments im Reifenlatsch werden noch die in Abb. 7.27 dargestellten Hebelarme n_x und n_y benötigt, welche ebenfalls abhängig von der Kenngröße \bar{s}_R berechnet werden. Bei reinem Haften ($\bar{s}_R \leq 0,5$) sind die Hebelarme über die Position des Flächenschwerpunkts des dreieckigen Haftungsbereiches definiert:

$$n_x = \frac{2}{3} L \tan \alpha + \frac{F_y}{c_y}, \quad (7.86)$$

$$n_y = \frac{1}{6} (1 + 2 \bar{s}_R (0,5 - \bar{s}_R)), \quad (7.87)$$

wobei die Reifenseitensteifigkeit c_y näherungsweise aus der vertikalen Reifensteifigkeit c_z berechnet werden kann:

$$c_y \approx \frac{c_z}{2}. \quad (7.88)$$

Bei Gleiten und Haften ($\bar{s}_R > 0,5$) erhält man die Hebelarme n_x und n_y wie folgt:

$$n_x = \frac{L}{2} \tan \alpha \left(\left(\frac{\bar{s}_R - \frac{1}{3}}{\bar{s}_R \left(\bar{s}_R - \frac{1}{4} \right)} \right) + \frac{F_y}{c_y} \right), \quad (7.89)$$

$$n_y = \frac{L}{2} \left(\frac{12 - \frac{1}{\bar{s}_R^2}}{12 - \frac{3}{\bar{s}_R}} - 1 \right) \left(\frac{1 - (\bar{s}_R - 0,5)}{C_{Korrektur}} \right). \quad (7.90)$$

Damit ergibt sich das Rückstellmoment im Latsch über das Momentengleichgewicht:

$$M_z = F_y n_y - F_x n_x. \quad (7.91)$$

Der Einfluss des Sturzes kann vereinfachend linearisiert entsprechend den Gln. (7.40) und (7.41) hinzugefügt werden. Somit sind mit Hilfe dieser teilweise empirisch gewonnenen Beziehungen die Reifenkräfte auch bis hin zum Stillstand des Fahrzeugreifens zuverlässig beschrieben.

7.5 Instationäres Reifenverhalten

Alle bisherigen Betrachtungen hatten zur Voraussetzung, dass der Bewegungszustand des Rades stationär oder wenigstens quasistationär angenommen werden konnte. Herunter gebrochen auf die eingeführten Parameter bedeutet dies, dass die Größen Umfangsschlupf, Schräglauwinkel, Sturz sowie Radkräfte und -momente zeitlich konstant bleiben oder sich wenigstens nur sehr langsam ändern.

Bei der Untersuchung einer Vielzahl fahrdynamischer Vorgänge sind diese Voraussetzungen jedoch nicht oder nur unzureichend erfüllt. Dies gilt insbesondere für Manöver wie z.B. Lenkwinkelsprung, ABS-Bremsungen und ESP-Eingriffe. In diesen Fällen ändern sich Umfangsschlupf $s(t)$ und Schräglauwinkel $\alpha(t)$ sehr schnell mit der Zeit. In die-

sen Fällen muss berücksichtigt werden, dass sich die Reifenkräfte $F_x(t)$, $F_y(t)$ und -momente $M_z(t)$ nur zeitlich verzögert aufbauen können. Der Grund dafür ist, dass der Kraftaufbau einhergeht mit der Bewegung des Reifens.

Im einfachsten Fall wird der Kraftaufbau über der Zeit durch ein Verzögerungsglied erster Ordnung berücksichtigt. Damit verhält sich der Kraftaufbau wie ein regelungstechnisches PT_1 -Glied. Der zeitliche Aufbau der Kräfte kann in erster Näherung wie folgt beschrieben werden (Heißing 2008):

$$T_x \frac{dF_x}{dt} + dF_x = F_{x,stat} \quad (7.92)$$

für die Reifenumfangskraft und

$$T_y \frac{dF_y}{dt} + dF_y = F_{y,stat} \quad (7.93)$$

für die Reifenseitenkraft. Die Zeitkonstanten T_x und T_y in (7.92) und (7.93) ergeben sich zu:

$$T_x = \frac{c_s}{c_x v_x}, \quad T_y = \frac{c_\alpha}{c_y v_x}. \quad (7.94)$$

Dabei wurden die folgenden Parameter verwendet:

- die Umfangssteifigkeit

$$c_s = \left[\frac{dF_x}{ds} \right]_{s=0}, \quad (7.95)$$

- die Schräglaufstefigkeits

$$c_\alpha = \left[\frac{dF_y}{d\alpha} \right]_{\alpha=0} \quad (7.96)$$

- sowie die (statische) Reifenlängssteifigkeit und Seitensteifigkeit c_x bzw. c_y , die Längsgeschwindigkeit v_x und die statischen Reifenkräfte $F_{x,stat}$ und $F_{y,stat}$ bei s bzw. bei α .

Die Einlauflängen

$$\sigma_s = \frac{c_s}{c_x}, \quad (7.97)$$

$$\sigma_\alpha = \frac{c_\alpha}{c_y} \quad (7.98)$$

charakterisieren die Wegabhängigkeit des Aufbaus der Radkräfte. Die Einlaufwinkel beschreiben dabei gerade den Weg, den der Reifen zurücklegen muss, um ca. zwei Drittel der dynamischen Reifenkraft aufzubauen.

8 Modellierung des Antriebsstranges

In den Kapiteln 5 bis 7 wurden die für ein räumliches Gesamtfahrzeugmodell wichtigsten Subsysteme Fahrgestell, Radaufhängungen, sowie Reifen und Räder modelliert und ihre Funktionsweise an Beispielen erläutert. Ein weiteres wichtiges Subsystem ist der *Antriebsstrang* eines Personenkraftwagens, da er zur detaillierten Berechnung der Antriebsdynamik, wie sie z.B. zur Auslegung einer Antriebs-Schlupf-Regelung (ASR), eines Anti-Blockiersystems (ABS) oder einer elektronischen Stabilitätskontrolle (ESP) benötigt wird, einen entscheidenden Beitrag liefert. (Dagegen kann die Dynamik des Antriebsstrangs – abgesehen von ihrem Beitrag zum Massenträgheitsmoment des Fahrzeuges – bei der Auslegung einer reinen ABS-Bremsung vernachlässigt werden.)

8.1 Antriebskonzepte

Prinzipiell unterscheidet man bei Personenkraftwagen (wie in den Abb. 8.1 bis 8.3 schematisch dargestellt) welche drei Antriebskonzepte Frontantrieb, Heckantrieb und Allradantrieb, die hier am Beispiel verbreiteter Fahrzeugmodelle illustriert werden.

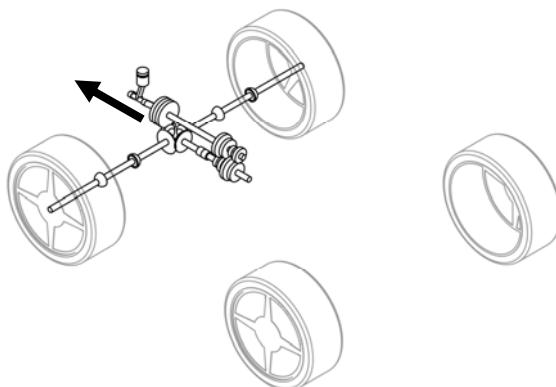


Abb. 8.1: Frontgetriebenes Fahrzeug, z.B. VW Golf VI

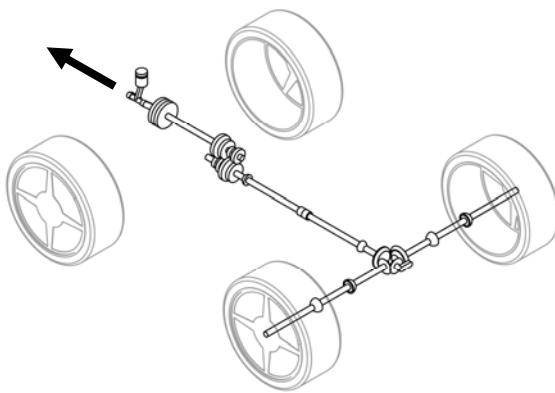


Abb. 8.2: Heckgetriebenes Fahrzeug, z.B. BMW – 5er Baureihe

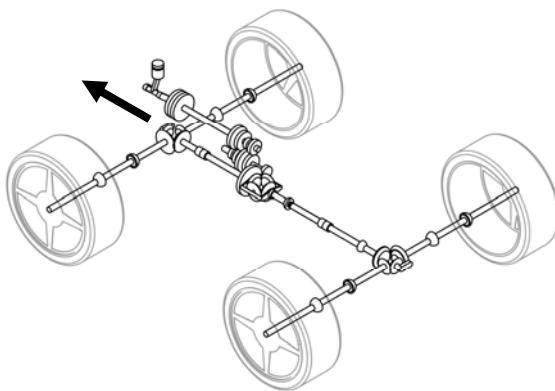


Abb. 8.3: Allradgetriebenes Fahrzeug, z.B. AUDI A5 Coupé quattro

Die allgemeine Vorgehensweise zur Modellierung eines Antriebsstranges wird im Folgenden am Beispiel des frontgetriebenen Fahrzeugs exemplarisch dargestellt.

8.2 Modellbildung

In den folgenden Abschnitten werden die wesentlichen Aspekte der Modellierung des Antriebseinflusses auf das Fahrverhalten eines Fahrzeugs behandelt. Neben der Behandlung der Bewegung des Motorblocks und der

Erstellung eines geeigneten Modells des Antriebsstranges soll dabei insbesondere die Modellierung der Gleichlaufgelenke der Antriebswelle beschrieben werden.

8.2.1 Bewegungen des Motorblocks

Der Motorblock liefert einen wesentlichen Bestandteil zur Dynamik des Antriebsstranges. Ziel dieses Abschnittes ist es, die räumliche Bewegung des Motorblocks zu beschreiben. Hierbei ist sowohl eine *inertiale* (d.h. raumfeste) als auch eine *relative* (d.h. fahrzeugfeste) Beschreibung der Bewegung möglich.

Bei der *inertialen* Beschreibung wird die Bewegung des Motorblocks mit Hilfe der drei unabhängigen Translations- und der drei unabhängigen Rotationsfreiheitsgrade des Motorblocks relativ zum Inertialsystem „*E*“ beschrieben. Der Vorteil dieser Methodik besteht darin, dass die Elemente der Massenmatrix und die Kreiselterme bezüglich der Bewegungen des Fahrgestells und des Motorblocks entkoppelt sind. Die Kopplung beider Bewegungen resultiert ausschließlich aus den Kräften der elastischen Motorlager; man spricht in diesem Falle von einer *Kraftkopplung*. Allerdings sind für die Beschreibung der Motorblockbewegung immer sechs Freiheitsgrade notwendig. Dazu müssten die Lager in allen sechs Koordinaten vermessen werden, was nur über einen sehr hohen Messaufwand möglich wäre. Ein weiterer Nachteil dieser Vorgehensweise besteht darin, dass es unmöglich ist, einzelne Freiheitsgrade abzuschalten, da der Motor im Raum eine allgemeine Lage annehmen kann.

Bei der *relativen* Beschreibung wird die Bewegung des Motorblocks durch eine beliebige (maximal sechs), aber frei wählbare Anzahl von Freiheitsgraden relativ zum Fahrzeug beschrieben, die sich an der jeweiligen technischen Realisierung der Motorlagerung orientiert. Jedoch sind in diesem Falle die Elemente der Massenmatrix und die Kreiselterme, die den Freiheitsgraden des Fahrgestells und des Motorblocks zugeordnet sind, nicht mehr entkoppelt; man spricht von einer *Massenkopplung*.

Untersuchungen der Bewegungen des Motorblocks im Falle eines frontgetriebenen Fahrzeuges mit quereingebautem Motor haben gezeigt, dass dieser im Wesentlichen eine Hubbewegung in Richtung der vertikalen Fahrzeugachse und eine Nickbewegung um eine zu den Antriebswellen parallele Achse ausführt. Alle übrigen Bewegungen sind im Vergleich zu diesen Hauptbewegungen klein. Dieses Ergebnis führt dazu, dass die relative Beschreibung der Bewegung des Motorblocks mit eben diesen beiden Freiheitsgraden der *inertialen* Beschreibung vorzuziehen ist (Schmitz 1994).

8.2.2 Modell des Antriebsstranges

Abb. 8.4 zeigt das verwendete kinematische Modell des hier betrachteten Antriebsstranges. Die Übertragungselemente Abtriebswelle und Gelenkwelle zwischen Motorblock und Rad sind hier nur für die linke Fahrzeugseite dargestellt. Für die rechte Fahrzeugseite existiert ein topologisch gleichwertiges System. Erkennbar sind die Subsysteme Motorgehäuse, Kurbelwelle, Kupplung, Getriebe, Ausgleichsgetriebe (Differential), Abtriebswelle und Gelenkwelle mit Gleichlaufgelenken. Unmittelbar hinter dem äußeren Gleichlaufgelenk schließen sich die bereits in den vorigen Kapiteln behandelten Subsystemen auftretenden Körper Radträger und Rad an.

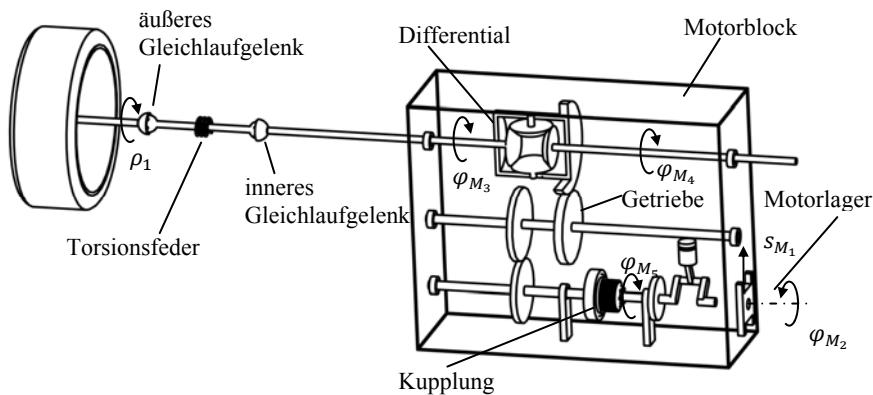


Abb. 8.4: Modell des Antriebsstranges eines frontgetriebenen PKW

Das vorliegende Modell des Antriebsstranges basiert auf folgenden Grundüberlegungen:

- Im realen System wird der Motorblock durch zwei konventionelle Elastomerlager und ein Hydrolager abgestützt. Die Anordnung der Lager erlaubt dem Motorblock im Wesentlichen eine Hub- und Nickbewegung. Diese spezielle Bewegungsform wird berücksichtigt, indem die Motorlagerung durch ein Schub- und ein Drehgelenk mit eben diesen beiden Freiheitsgraden modelliert wird. Die Rückstell- und Dämpfungskräfte der Motorlager werden in der Dynamik durch entsprechende Kraftelemente berücksichtigt. Weitere Einzelheiten zum Motorlager (allgemein) sind im Abschnitt 8.2.3 zu finden.
- Das vom Verbrennungsmotor auf die Kurbelwelle übertragene Drehmoment stellt die Eingangsgröße für den Antriebsstrang dar.

- Die Kupplung überträgt das Antriebsmoment auf das Getriebe. Die Modellierung der Kupplung als torsionselastisches Bauteil führt hier auf einen weiteren Freiheitsgrad. Die Rückstellmomente können aus der zugeordneten nichtlinearen Kupplungskennlinie ermittelt werden.
- Im Getriebe werden Drehzahl und Drehmoment gewandelt. Das nachgeschaltete Ausgleichsgetriebe (Differential) verteilt das Drehmoment gleichmäßig auf die linke und rechte Abtriebswelle.
- Die Gelenkwellen übertragen die Drehbewegung gleichförmig auf die beiden Vorderräder (Schmelz 1988), (Schütz 1971) und werden wie die Kupplung als torsionselastische Bauteile modelliert. Daraus resultieren zwei weitere Freiheitsgrade. Auf die Modellierung der Gelenkwellen soll im Abschnitt 8.2.4 noch näher eingegangen werden.
- Schaltvorgänge werden zunächst nicht berücksichtigt.
- Im Getriebe werden weder Flankenspiel noch Reibungseinflüsse betrachtet.

Daraus ergibt sich zu dem späteren Gesamtfahrzeugmodell über dieses Antriebsstrangmodell ein Beitrag von $f = 5$ zusätzlichen Freiheitsgraden mit den Koordinaten:

s_{M_1} :	Hubkoordinate des Motorblockes,
φ_{M_2} :	Nickwinkel des Motorblockes,
φ_{M_3} :	Drehwinkel der linken Abtriebswelle,
φ_{M_4} :	Drehwinkel der rechten Abtriebswelle,
φ_{M_5} :	Drehwinkel der Kurbelwelle.

Das Fahrzeugmodell für den VW Golf besitzt damit z. B. insgesamt $f = 21$ Freiheitsgrade, wie in Kapitel 12 noch gezeigt wird.

8.2.3 Motorlager

Steigende Komfortansprüche haben die Auslegung des Motorlagers zu einem ausgedehnten Arbeitsgebiet in der Automobilindustrie gemacht. Aufbau, Eigenschaften, Aufgaben und Optimierungsmöglichkeiten von Motorlagern werden in der Literatur vielfach beschrieben, z.B. bei (Johnson und Subhedary 1979), (Mitschke 1987), (Bathelt et al. 1989). Inhalt der folgenden Ausführungen sind Ansätze zur Modellierung des Motorlagers innerhalb eines räumlichen Fahrzeugmodells (Schmitz 1994).

Kinematisches Ersatzsystem

Während die Getriebewellen innerhalb des Motorblockes um feste Achsen rotieren, kann der Motorblock aufgrund seiner in allen Richtungen elastischen Lagerungen eine allgemeine räumliche Bewegung relativ zum Fahrzeug ausführen. Je nach Konstruktionsprinzip ist der Motorblock an drei bis fünf Lagerstellen mit dem Fahrzeugaufbau verbunden (Demant et al. 1990)

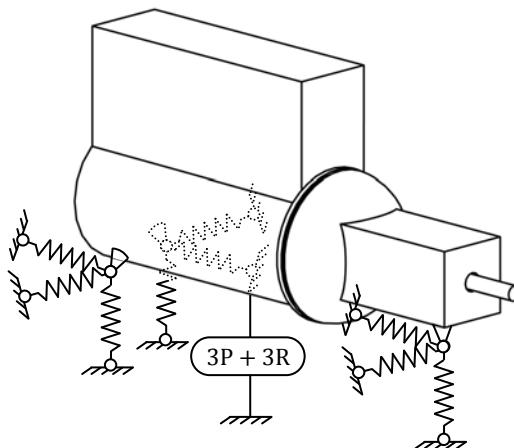


Abb. 8.5: Motorblock mit dreiwertigen Lagerungen

Bei dieser Vorgehensweise ist die Bestimmung der Parameter der Motorlager allerdings ausgesprochen schwierig. Jedes Lager muss einzeln in seinen Achsrichtungen vermessen werden. Zudem sind die Federkonstanten in Quer- und Längsrichtung des Fahrzeuges sehr hoch, woraus steife Differentialgleichungen und somit eine geringe Rechenzeiteffizienz bei der Verwendung von numerischen Integrationsverfahren mit einer variablen Schrittweite resultieren.

Hier wird ein anderer Weg, basierend auf einer von (Schnelle 1990) entwickelten Vorgehensweise zur Modellierung elastischer Lager, beschritten. Ziel ist es, von den möglichen Bewegungen des Motorblockes nur die relevanten zu berücksichtigen und somit eine Verringerung der Anzahl der benötigten Koordinaten und Parameter zu bewirken.

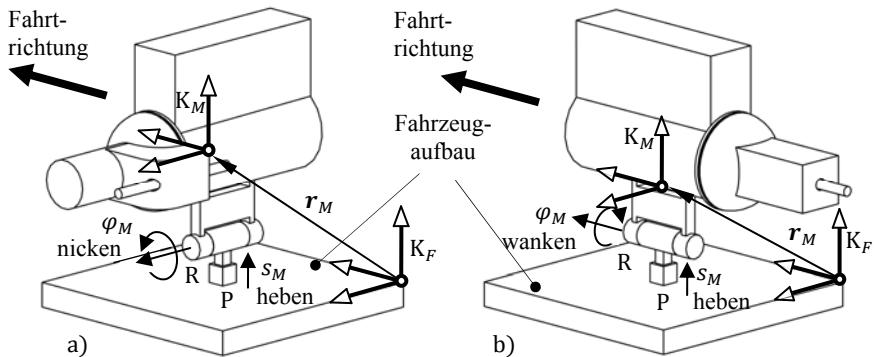


Abb. 8.6: Kinematisches Ersatzmodell eines Motorlagers mit reduzierter Anzahl von Koordinaten:
 a) quer eingebauter Motor,
 b) längs eingebauter Motor

Messungen zeigen, dass einige Bewegungen des Motorblockes relativ zum Fahrzeugaufbau dominieren. Dies sind die Drehungen um Achsen parallel zu den Abtriebswellen des Getriebes, da in diesen Richtungen das Motormoment übertragen wird, und die Hubbewegung, die durch eine unebene Fahrbahn angeregt wird. In Abb. 8.6 sind die aus je einem Drehgelenk (R) bzw. einem Schubgelenk (P) aufgebauten kinematischen Modelle der Motorlagerung eines Fahrzeuges mit quer und längs eingebautem Motor dargestellt. Geeignete Kraftgesetze, wie sie in Kapitel 9 behandelt werden, lassen sich direkt in den Gelenkkoordinaten formulieren.

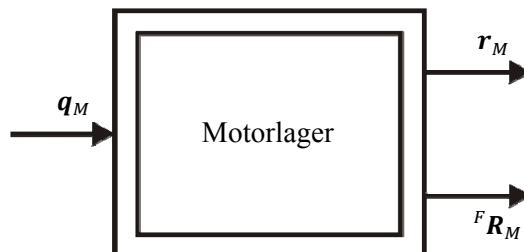


Abb. 8.7: Motorlagerung als kinematischer Transformator

Wählt man die Gelenkkoordinaten des kinematischen Ersatzsystems s_{M_1}, φ_{M_2} , als verallgemeinerte Koordinaten \mathbf{q}_M für die Bewegung des Motorblockes, so folgt dessen räumliche Bewegung relativ zum Fahrgestell durch unmittelbare Anwendung der Beziehungen der Vorwärtskinematik. Das Übertragungsverhalten kann durch den in Abb. 8.7 dargestellten kinematischen Transformator symbolisiert werden. Dabei bezeichnet

\mathbf{r}_M den Ortsvektor zum Referenzpunkt des Motorblocks und ${}^F\mathbf{R}_M$ die Kraft auf den Motorblock.

Hydrolager

Die Auslegung des Motorlagers beeinflusst sowohl das mechanische als auch das akustische Schwingungsverhalten eines Fahrzeuges. Dies führt aufgrund der gestiegenen Ansprüche an den Fahrkomfort zu einem Zielkonflikt. Einerseits sollte die Lagerung möglichst großvolumig und weich sein, um eine gute Schallisolation zu gewährleisten. Andererseits führt eine weiche Lagerung bei Anregungen geringer Frequenz und hoher Amplitude, wie sie beispielsweise durch Fahrbahnunebenheiten verursacht werden, zu großen Amplituden in der Vertikalbewegung des Motorblockes. Das Schütteln der relativ großen Motormasse überträgt sich über den Fahrzeugaufbau auf die Insassen. Man bezeichnet diesen Effekt auch als Motorstücken oder Engine Shake (Dödlbacher 1982).

Zur Lösung dieses Zielkonfliktes setzen die Fahrzeughersteller Hydrolager ein, die eine definierte Abhängigkeit der Dämpfung und Steifigkeit von der Anregungsfrequenz aufweisen. Die Abb. 8.8 zeigt den Aufbau eines Hydrolagers und die zugehörige Frequenzabhängigkeit der dynamischen Steifigkeit und des Verlustwinkels.

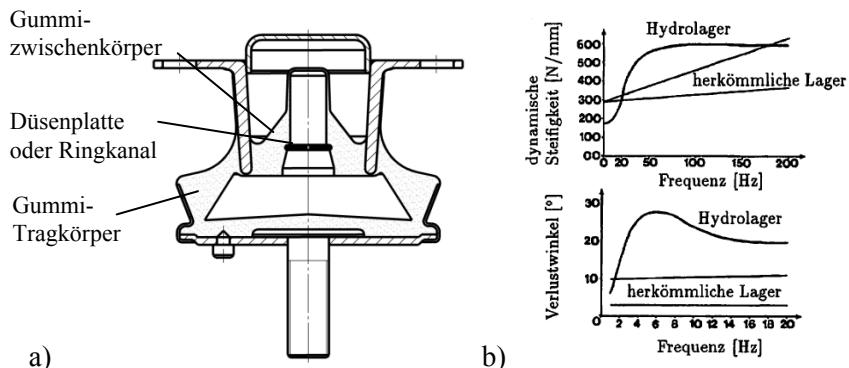


Abb. 8.8: Hydrolager eines Porsche 944 (vgl. Freund und von Sivers 1981):

- Aufbau,
- Wirkungsdiagramme

Die Modellierung des dynamischen Verhaltens von Hydrolagern wird in zahlreichen Arbeiten behandelt, z.B. (Holzemer 1985), (Freudenberg und Freudenberg 1988). Hauptaspekt ist die exakte Beschreibung der Strömung durch den Ringkanal bzw. die Düsenplatte. Das in

Abb. 8.9 a dargestellte mechanische Ersatzsystem bildet in guter Näherung das dynamische Verhalten eines Hydrolagers ab s. (Bösenberg und van den Boom 1979), (Zamow und Witte 1988).

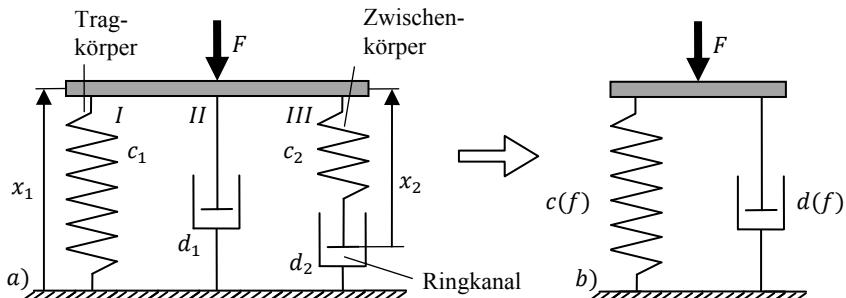


Abb. 8.9: Hydrolager:

- a) mechanisches Ersatzsystem,
- b) Interpretation als Parallelschaltung einer frequenzabhängigen Steifigkeit und Dämpfung

Die Kraftelemente in den Strängen I und III können unmittelbar mit den Körpern des Hydrolagers identifiziert werden. Dieses Teilsystem ist für das grundlegende Lagerverhalten verantwortlich. Häufig weisen auch realisierte Hydrolager einen unerwünschten Anstieg der dynamischen Steifigkeit im Bereich hoher Frequenzen auf (Göhlich und Köder 1992). Eine zusätzlich parallel geschaltete Dämpfung d_1 berücksichtigt diesen Effekt. Das Lagerverhalten wird im Zeitbereich durch die Differentialgleichungen

$$F = c_1 x_1 + d_1 \dot{x}_1 + c_2 x_2 , \quad (8.1)$$

$$d_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = c_2 x_2 \quad (8.2)$$

beschrieben. Die Berücksichtigung des Hydrolagers im Gesamtfahrzeugmodell bewirkt eine ungerade Systemordnung, d. h. eine ungerade Anzahl von Differentialgleichungen erster Ordnung (s. (Schielen und Eberhard 2004)). Transformiert man das System in den Frequenzbereich und identifiziert die Übertragungsfunktion mit der Übertragungsfunktion des Systems aus Abb. 8.9

$$\frac{F(j\omega)}{X_1(j\omega)} \stackrel{!}{=} c(\omega) + j\omega d(\omega) , \quad (8.3)$$

so erhält man die frequenzabhängige Steifigkeit und Dämpfung

$$c(\omega) = \Re \left\{ \frac{F(j\omega)}{X_1(j\omega)} \right\}, \quad d(\omega) = \frac{1}{\omega} \Im \left\{ \frac{F(j\omega)}{X_1(j\omega)} \right\}. \quad (8.4)$$

Die dynamische Steifigkeit und der Verlustwinkel folgen aus

$$c_{dyn} = \left| \frac{F(j\omega)}{X_1(j\omega)} \right|, \quad \phi = \arg \left(\frac{F(j\omega)}{X_1(j\omega)} \right) \quad (8.5)$$

Die Abb. 8.10 a zeigt das dynamische Verhalten des Hydrolagermodells im Vergleich zu einem herkömmlichen Gummi-Metall-Motorlager, das als Parallelschaltung einer Feder und eines Dämpfers mit konstanten Kenngrößen modelliert ist. Es ergibt sich eine gute Übereinstimmung mit den Messergebnissen aus Abb. 8.8 b. Darüber hinaus ist in Abb. 8.10 b die Frequenzabhängigkeit der Steifigkeit und der Dämpfung eines Hydrolagers wiedergegeben. Die verwendeten Systemdaten sind Tabelle 8.1 zu entnehmen.

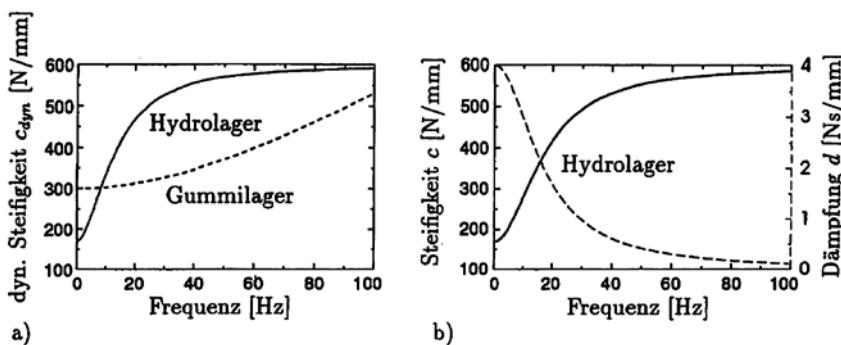


Abb. 8.10: Dynamisches Verhalten eines Hydrolagers (Schmitz 1994)

Tabelle 8.1: Systemdaten zu Abb. 8.10

Hydro-lager	Gummilager
$c_1 = 170$	N/mm
$c_2 = 430$	N/mm
$d_1 = 0$	Ns/mm
$d_2 = 4$	Ns/mm
$c_1 = 300$	N/mm
$d_1 = 0.7$	Ns/mm

8.2.4 Modellierung der Gleichlaufgelenke

Gleichlaufgelenke werden in Kraftfahrzeugen mit Frontantrieb eingesetzt, um eine nahezu gleichförmige Übertragung der Drehbewegung von der Abtriebswelle auf die Räder zu gewährleisten. Darin unterscheiden sie sich grundsätzlich von Kardangelenken, welche die Winkelgeschwindigkeiten deutlich ungleichförmiger übertragen. Die Ungleichförmigkeit zwischen Eingangs- und Ausgangswinkelgeschwindigkeit ist umso größer, je größer der Beugungswinkel der Kardanwelle ist (Schmelz 1988; Schütz 1971).

Im Rahmen dieses Abschnittes werden der Einfluss des Antriebsstranges auf das Fahrverhalten sowie die Bewegungsübertragung im Antriebsstrang untersucht. Deshalb ist eine exakte Modellierung der Gleichlaufgelenke besonders wichtig. Das innere, differentialseitige Gleichlaufgelenk ist als Verschiebegelenk ausgebildet, d.h. es lässt Verschiebungen in Achsrichtung zu, während das äußere, radseitige Gleichlaufgelenk als Festlager ausgelegt ist (Abb. 8.11).

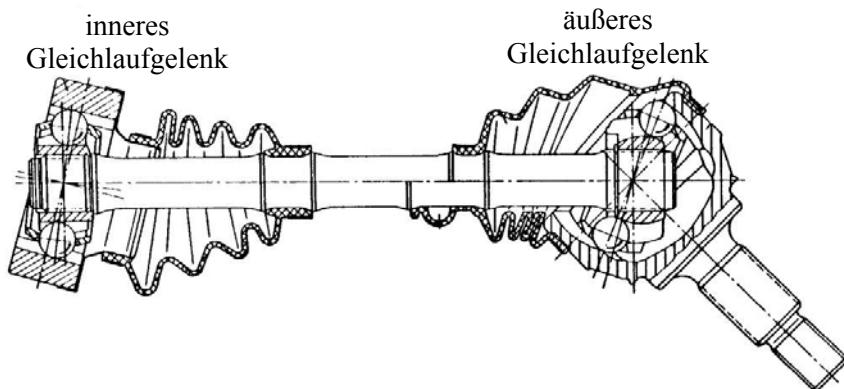


Abb. 8.11: Gelenkwelle eines frontgetriebenen Fahrzeugs

Die Abb. 8.12 zeigt das verwendete kinematische Modell des Gleichlaufgelenks (vgl. (Hunt 1990)), während in Abb. 8.13 die gesamte Gelenkwelle mit dem inneren, motorseitigen, sowie dem äußeren, radseitigen Gleichlaufgelenk dargestellt ist. Die kinematische Topologie der Gleichlaufgelenke ist dabei identisch.

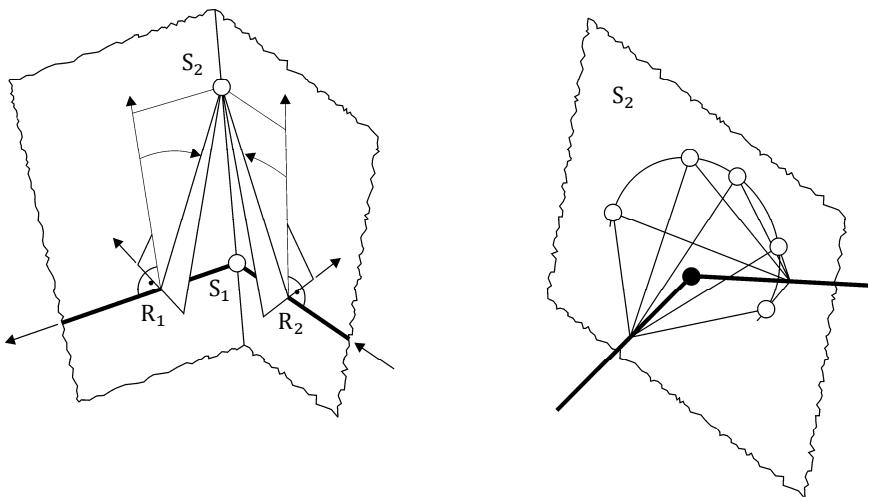


Abb. 8.12: Kinematisches Modell eines Gleichlaufgelenks (Schmitz 1994)

Gemäß Abb. 8.13, werden die beiden Wellen durch das Kugelgelenk S_1 verbunden. Die Übertragung der Winkelgeschwindigkeit erfolgt über den dargestellten Mechanismus (kinematische Schleife), bestehend aus zwei Drehgelenken R_1 , R_2 und dem Kugelgelenk S_2 . Das Gelenk S_2 bewegt sich dabei in der winkelhalbierenden Ebene zwischen den beiden Wellen. Die gesamte Gelenkwelle besteht aus drei Einzelwellen, welche durch die beiden bereits erwähnten Gleichlaufgelenke zusammengehalten werden.

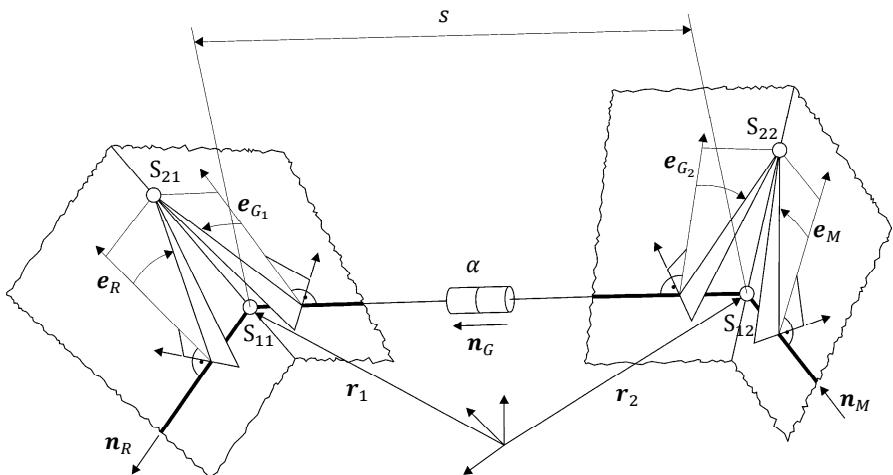


Abb. 8.13: Modell der Gelenkwelle

Der Differenzwinkel α und die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\alpha}$ werden im Folgenden berechnet. Nach (Schmitz 1994) folgt für die Einheitsvektoren \mathbf{e}_{G_1} und \mathbf{e}_R aus geometrischen Betrachtungen:

$$\mathbf{e}_{G_1} = \mathbf{e}_R - \frac{\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{n}_G}{1 + \mathbf{n}_R \cdot \mathbf{n}_G} (\mathbf{n}_R + \mathbf{n}_G), \quad (8.6)$$

$$\mathbf{e}_{G_2} = \mathbf{e}_M - \frac{\mathbf{e}_M \cdot \mathbf{n}_G}{1 + \mathbf{n}_M \cdot \mathbf{n}_G} (\mathbf{n}_M + \mathbf{n}_G), \quad (8.7)$$

Für den Differenzwinkel α ergeben sich die Beziehungen:

$$\cos \alpha = \mathbf{e}_{G_1} \cdot \mathbf{e}_{G_2}, \quad (8.8)$$

$$\sin \alpha = (\mathbf{n}_G \times \mathbf{e}_{G_2}) \cdot \mathbf{e}_{G_1}. \quad (8.9)$$

Zur Berechnung der Differenzwinkelgeschwindigkeit $\dot{\alpha}$ wird zunächst die Winkelgeschwindigkeit senkrecht zur Gelenkwelle berechnet:

$$\boldsymbol{\omega}_{\perp} = \frac{(\dot{\mathbf{e}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_1) \times \mathbf{n}_G}{s}. \quad (8.10)$$

Für die Winkelgeschwindigkeiten parallel zur Gelenkwelle $\boldsymbol{\omega}_{1\parallel}$ (linke Seite) und $\boldsymbol{\omega}_{2\parallel}$ (rechte Seite) folgt dann

$$\boldsymbol{\omega}_{1\parallel} = (\boldsymbol{\omega}_R - \boldsymbol{\omega}_{\perp}) \cdot \frac{\mathbf{n}_R + \mathbf{n}_G}{1 + \mathbf{n}_R \cdot \mathbf{n}_G}, \quad (8.11)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{2\parallel} = (\boldsymbol{\omega}_M - \boldsymbol{\omega}_{\perp}) \cdot \frac{\mathbf{n}_M + \mathbf{n}_G}{1 + \mathbf{n}_M \cdot \mathbf{n}_G} \quad (8.12)$$

womit die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\alpha}$ berechnet werden kann.

$$\dot{\alpha} = \boldsymbol{\omega}_{1\parallel} - \boldsymbol{\omega}_{2\parallel} \quad (8.13)$$

8.3 Modell des Motors

In Abb. 8.14 ist der Wirkungszusammenhang verschiedener Komponenten zur Nachbildung eines realen Motormomentenverlaufs prinzipiell dargestellt. Der wesentliche Bestandteil des Motormodells ist das statische Kennfeld, das für gegebene Kurbelwellendrehzahl n und Drosselklappenstellung α^* das stationäre Motormoment M^* liefert. Die verzögerte Drosselklappenstellung α^* wird hierbei aus der unverzögerten Drosselklappen-

stellung α_{Gas} (Fahrerwunsch) und einem nachfolgendem Verzögerungsglied erster Ordnung PT_1 samt Totzeitglied T_t erhalten.

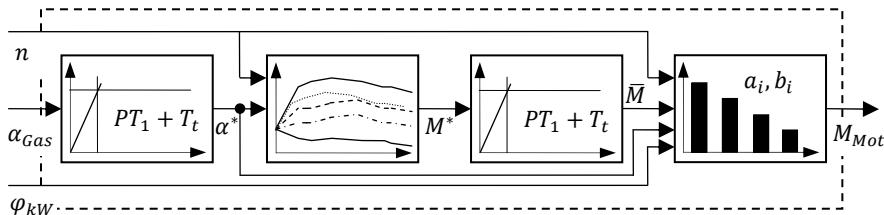


Abb. 8.14: Zur Ergänzung des Motormomentes

Das dynamische Verhalten des Motors wird berücksichtigt, indem das stationäre Motormoment M^* durch die Reihenschaltung eines Verzögerungsgliedes erster Ordnung PT_1 mit einem Totzeitglied T_t verzögert wird. Das PT_1 Glied umfasst die Saugrohrdynamik des Motors, während durch die Totzeit T_t die Zeitverzögerung zwischen der Füllung des Zylinders und der Abgabe des Momentes beschrieben wird. Die Zeitkonstante des PT_1 Gliedes hängt im Wesentlichen von der Saugrohrlänge ab. Die Totzeit entspricht in etwa einer halben Kurbelwellenumdrehung. Aus diesem verzögerten mittleren Motormoment \bar{M} erhält man zusammen mit der Motordrehzahl n und dem Kurbelwellenwinkel φ_{KW} sowie der verzögerten Drosselklappenstellung α^* durch eine Fourierreihen-entwicklung nach Gl. (8.14) eine gute Näherung des periodischen Antriebsmoments M_{Mot} des verwendeten Verbrennungsmotors.

$$M_{Mot}(\alpha, n, \varphi_{KW}) = \bar{M} + \sum_{i=1}^N a_i(n, \alpha^*) \cos(i z_p \varphi_{KW}) + b_i(n, \alpha^*) \sin(i z_p \varphi_{KW}). \quad (8.14)$$

Darin beschreiben a_i und b_i die Fourierkoeffizienten und z_p einen, die Motorbauart charakterisierenden Faktor (für einen Viertaktmotor gilt $z_p = 0,5$). Die Fourier-Koeffizienten werden in Abhängigkeit der Kurbelwellendrehzahl n sowie der Drosselklappenstellung α^* durch doppelte lineare Interpolation zwischen den Stützstellen an den vier Eckpunkten berechnet, siehe auch Abb. 8.15 (links). Der Verlauf des erhaltenen Motormomentes M_{Mot} ist in Abb. 8.15 (rechts) dargestellt.

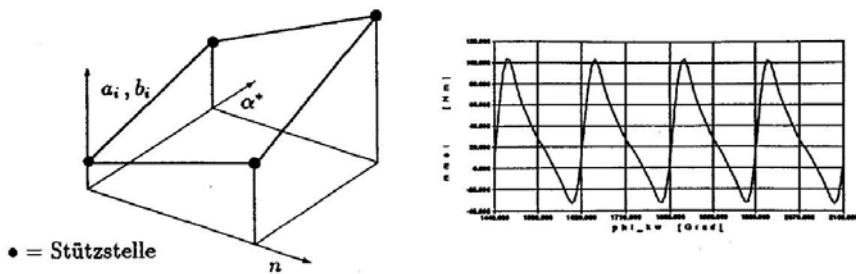


Abb. 8.15: Fourier-Koeffizienten und erzeugte Schwingung

8.4 Relativkinematik des Antriebsstranges

In dem in Abb. 8.4 dargestellten Modell des Antriebsstranges existiert eine unabhängige kinematische Schleife L_1 , welche in Abb. 8.16 dargestellt ist. Eine topologisch gleichwertige Schleife L_2 existiert auch für die rechte Fahrzeughälfte. Mit Hilfe der hier verwendeten Methoden für kinematische Schleifen (Woernle 1988) lassen sich die Gleichungen für die Relativkinematik für L_1 einfach – und im vorliegenden Fall explizit lösbar – herleiten. Zusätzlich zu den Schleifen L_1 und L_2 ist eine kinematische Be- trachtung von Schaltgetriebe und Differential erforderlich.

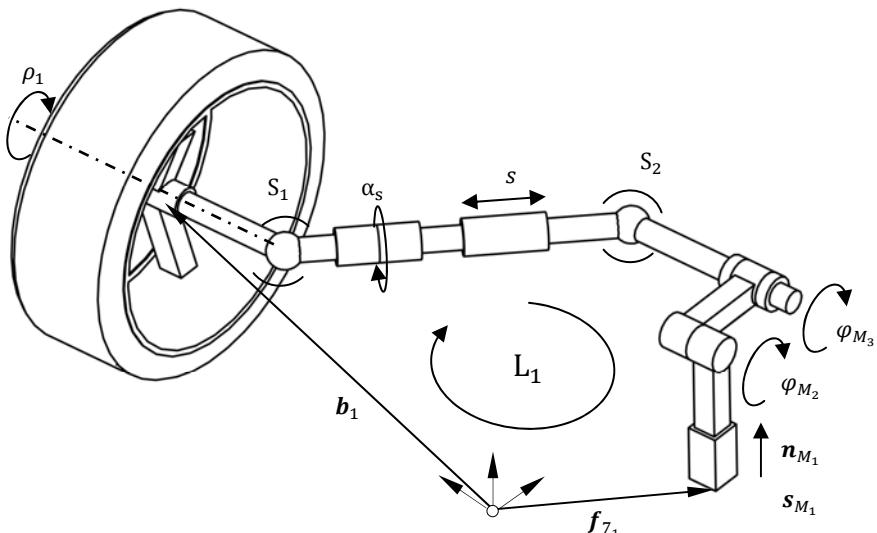


Abb. 8.16: Die kinematische Schleife L_1 .

Das Ausgleichsgetriebe (Differential) im Antriebsstrang ermöglicht es, dass sich die beiden Vorderräder, z.B. bei Kurvenfahrt, unterschiedlich schnell drehen können. Ausgleichsgetriebe ohne Sperrwirkung, wie sie üblicherweise in frontangetriebenen Fahrzeugen eingesetzt werden, übertragen das Drehmoment gleichmäßig auf beide Fahrzeugseiten (Lorenz 1986), (Zomotor 1987). Das in Abb. 8.17 dargestellte Ausgleichsgetriebe besteht aus dem Tellerrad, den beiden Ausgleichskegelräden und den beiden Abtriebskegelräden.

Für das Tellerrad ergibt sich die kinematische Beziehung

$$\dot{\varphi}_T = \frac{1}{2}(\dot{\varphi}_{M_3} + \dot{\varphi}_{M_4}). \quad (8.15)$$

Zwischen dem Ausgleichsgetriebe und der Kupplung befindet sich das Schaltgetriebe, welches die Aufgabe hat, Drehmoment und Drehzahl zu wandeln. Abb. 8.18 zeigt das Getriebe eines VW-Golf II. Es sind zwei Übersetzungen zu unterscheiden. Die Übersetzung i_G ist die Übersetzung zwischen den Getriebewellen I und II in den einzelnen Gängen

$$i_G = -\frac{\dot{\varphi}_I}{\dot{\varphi}_{II}}, \quad (8.16)$$

während die Achsübersetzung i_D die Konstante Übersetzung zwischen der Getriebewelle I und der Tellerradwelle darstellt (Bosch 1995)

$$i_D = -\frac{\dot{\varphi}_{II}}{\dot{\varphi}_I}. \quad (8.17)$$

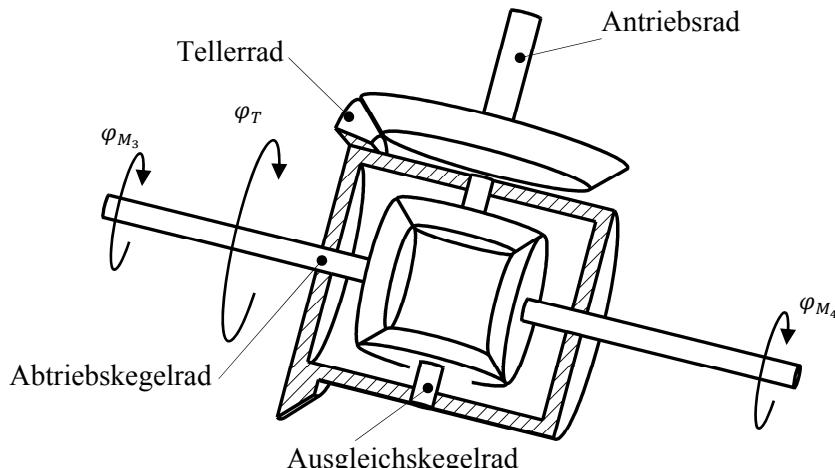


Abb. 8.17: Ausgleichsgetriebe eines frontgetriebenen PKW.

In den Gln. (8.16) und (8.17) werden die Geschwindigkeiten relativ zum Motorblock eingesetzt. Damit ergibt sich die Gesamtübersetzung

$$i_{Ges} = i_G \cdot i_D \quad (8.18)$$

aus welcher sich die kinematischen Zusammenhänge zwischen Getriebewelle I bzw. Getriebewelle II und den Abtriebskegelräder ergeben. Nun können auch der Differenzdrehwinkel $\Delta\beta_K$ und die Differenzwinkelgeschwindigkeit $\Delta\dot{\beta}_K$ des Drehgelenkes bestimmt werden, welches die elastische Verdrehung der Kupplung beschreibt

$$\Delta\beta_K = \varphi_I - \varphi_{M_5}, \quad (8.19)$$

$$\Delta\dot{\beta}_K = \dot{\varphi}_I - \dot{\varphi}_{M_5}. \quad (8.20)$$

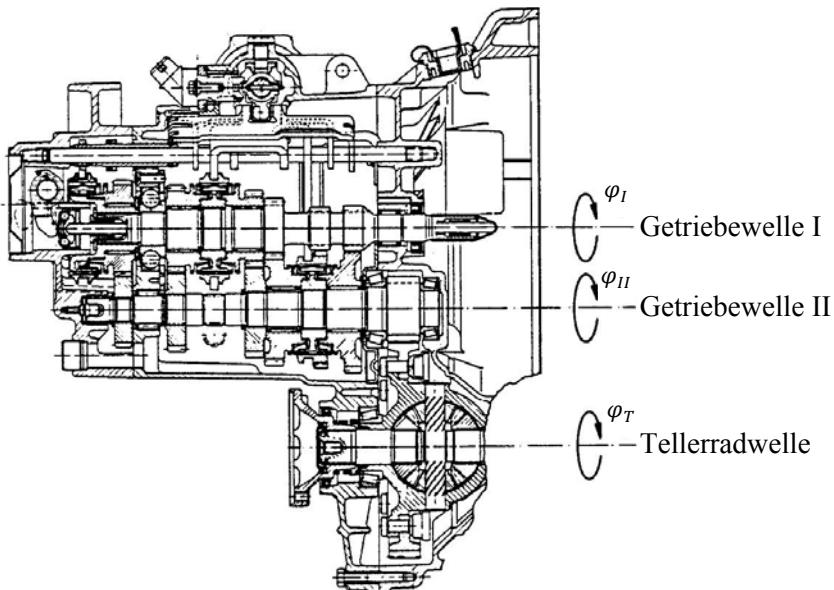


Abb. 8.18: Schaltgetriebe VW Golf II.

8.5 Absolutkinematik des Antriebsstranges

Ziel der Absolutkinematik ist es, mit Hilfe der in der Relativkinematik hergeleiteten Beziehungen die absoluten Positionen, Geschwindigkeiten

und Beschleunigungen der einzelnen massebehafteten Körper innerhalb des Antriebsstranges zu ermitteln.

Die hier betrachteten massebehafteten Körper sind:

- Gelenkwellen rechts und links,
- Abtriebswellen rechts und links,
- Motorgehäuse,
- Getriebewellen I und II sowie Differentialtellerrad und
- Kurbelwelle.

Mit Hilfe der Zusammenhänge der Relativkinematik lässt sich zunächst der Bewegungszustand aller Körper relativ zum fahrzeugfesten Koordinatensystem „V“ bestimmen. Anschließend können dann die Absolutgeschwindigkeiten und -beschleunigungen relativ zum raumfesten Inertialsystem ermittelt werden (vgl. Abschnitt 5.2).

8.6 Bewegungsgleichungen

Zur Ermittlung der Bewegungsgleichungen des betrachteten Systems ist zunächst eine Betrachtung der eingeprägten Kräfte erforderlich. Auf den Antriebsstrang wirken als eingeprägte Kräfte bzw. Momente die Gewichtskräfte der einzelnen Körper, die Federkräfte und -momente in den elastischen Lagern und in der Kupplung, sowie das Motormoment. Die Federkräfte und -momente bewirken in der Dynamik eine Kopplung der Bewegungen der einzelnen Körper. Diese Rückstellkräfte und -momente werden in den Drehgelenken der beiden Gelenkwellen, in dem translatorischen und dem rotatorischen Motorlager sowie in der Kupplung durch Feder-Dämpfer-Systeme mit entsprechenden Kennlinien (Kapitel 9) berücksichtigt.

Ausgehend von der *globalen Kinematik* (Abschnitt 3.5), die aus Relativkinematik und Absolutkinematik besteht, können nun die Bewegungsgleichungen der Systeme aufgestellt werden. Die Bewegungsgleichungen werden hierbei, wie in Abschnitt 4.6 beschrieben und wie bereits für weitere Fahrzeugkomponenten in den vorhergehenden Kapiteln gezeigt, mit Hilfe der Methode der kinematischen Differentiale in Minimalform aufgestellt, wobei sich eine Verringerung des Rechenzeitaufwandes durch eine geschickte Auswertung der Elemente der Bewegungsgleichungen erzielen lässt. Ausführliche Betrachtungen zur Dynamik des Antriebsstranges, sowie deren Einfluss auf die Fahrdynamik sind für die unterschiedlichen An-

triebsarten (Heck-, Front- und Allradantrieb) in (Schmitz 1994) zu finden; Sie sollen aber aus Platzgründen hier nicht weiter ausgeführt werden. Der Einfluss des Antriebsstranges auf die Belegung der Massenmatrix eines frontgetriebenen Gesamtfahrzeuges ist in Abb. 8.19 exemplarisch dargestellt und wird in Kapitel 12 näher erläutert.

\times : Massenmatrixelement, das durch den Antriebstrang beeinflusst wird

*: Massenmatrixelement, das durch Antriebstrang nicht beeinflusst wird

0: Massenmatrixelement des Antriebstranges = 0

Abb. 8.19: Einfluss des Antriebstranges auf die Besetzung der Massenmatrix

8.7 Diskussion von Simulationsergebnissen

Als Beispiel für ein Simulationsergebnis wird am betrachteten Fahrzeug ein Lenkwinkelsprung in Fahrtrichtung diskutiert. Das Lenkrad wird dazu schlagartig um 12° nach rechts verdreht (vergleiche Abb. 14.1). Diese Auslenkung wird dann konstant gehalten. Abb. 8.20 zeigt die Verläufe der Winkelgeschwindigkeiten des linken und rechten Hinterrades als Funktion der Zeit.

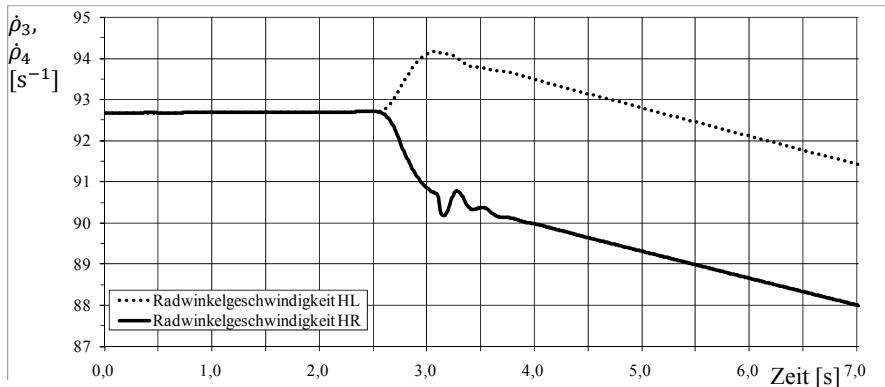


Abb. 8.20: Winkelgeschwindigkeit des rechten und linken Hinterrades.

Während die Winkelgeschwindigkeit des linken Hinterrades ansteigt, sinkt die Winkelgeschwindigkeit des rechten Hinterrades aufgrund des kleineren Kurvenradius ab. Im weiteren Verlauf verringern sich die Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\rho}_3$ und $\dot{\rho}_4$ der beiden Räder aufgrund des Kurvenwiderstandes. Die Zeitverläufe der Drehwinkelgeschwindigkeiten $\dot{\phi}_{M_3}(t)$ und $\dot{\phi}_{M_4}(t)$ zeigen ein den Radwinkelgeschwindigkeiten sehr ähnliches Verhalten (Abb. 8.21). Aufgrund der im Vergleich zu den Rädern geringeren Trägheitsmomente im Antriebsstrang zeigt sich hier ein etwas stärkeres Schwingungsverhalten im Zeitraum nach der Ausführung des Lenkwinkel-sprunges.

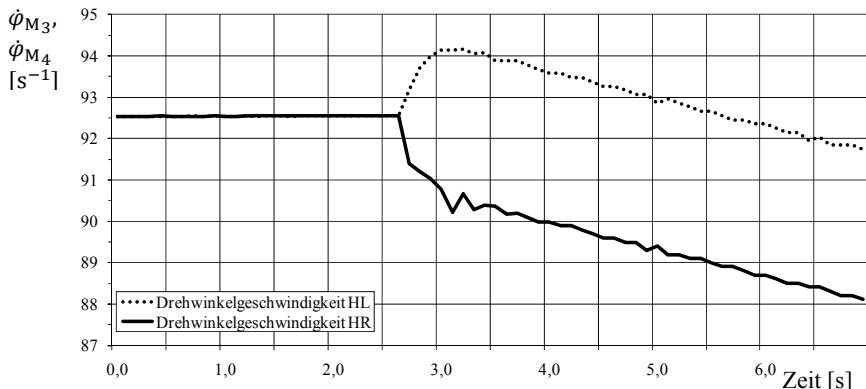


Abb. 8.21: Zeitverläufe der Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\phi}_{M_3}(t)$ und $\dot{\phi}_{M_4}(t)$.

9 Kraftkomponenten

Kraftkomponenten können im Kraftfahrzeug als aktive oder als passive Elemente auftreten. Einige passive Kraftkomponenten sind am Beispiel einer Radaufhängung in Abb. 9.1 dargestellt. Die Anforderungen an Kraftkomponenten des Fahrwerks wachsen stetig und sind teilweise widersprüchlich, s. Abb. 9.2. Die Realisierung von Sicherheits- und Komfortfunktionen erfordert daher häufig den Ersatz der passiven durch aktive Komponenten. So lässt sich z.B. das Fahrverhalten nachhaltig durch eine Aktuierung des üblichen passiven Stabilisators beeinflussen, s. Kapitel 14.

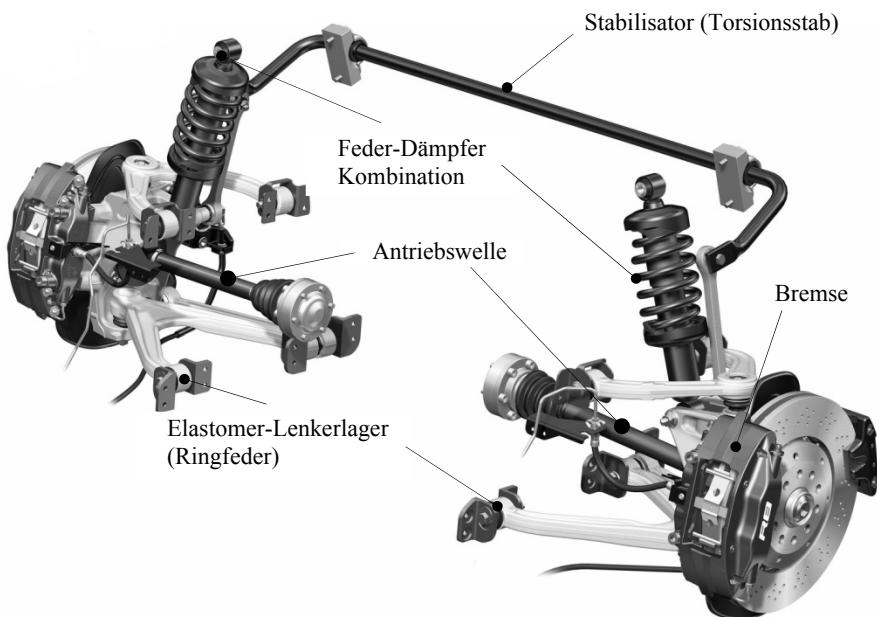


Abb. 9.1: Kraftelemente an den Radaufhängungen (mit freundlicher Genehmigung der Audi AG)

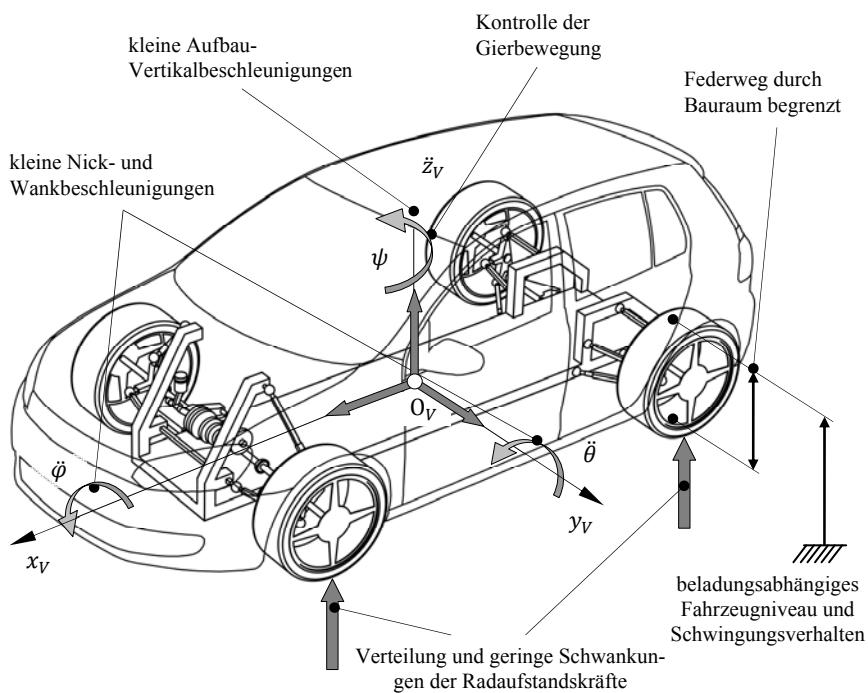


Abb. 9.2: Anforderung an das Fahrwerk

9.1 Kräfte und Momente in Mehrkörpersystemen

Die Simulation und Analyse von Kraftfahrzeugmodellen hängt ganz wesentlich von der Art und dem zeitlichen Verhalten der wirkenden Kräfte ab. In der Mechanik unterscheidet man zunächst nach der grundsätzlichen Ausprägung der Kräfte (Schiehlen 1992):

- äußere und innere Kräfte und Momente,
- eingeprägte und Reaktionskräfte und -momente,
- Oberflächen- und Volumenkräfte.

Die *Kategorisierung I* hängt von der *Systemabgrenzung* des jeweils betrachteten Systems ab. Die von außen auf das betrachtete System einwirkenden Kräfte und Momente werden als äußere Kräfte bezeichnet. Die im Inneren eines Systems wirkenden Kräfte werden dann als innere Kräfte bezeichnet. Durch eine Veränderung der Systemabgrenzung (freischnei-

den) werden innere zu äußeren Kräften des neu abgegrenzten Systems. An den durch das Freischneiden entstehenden Schnittufern treten nach dem Gegenwirkungsprinzip (actio gleich reactio) zwei äußere Kräfte auf, deren Betrag gleich, deren Richtung jedoch entgegengesetzt ist.

Die *Kategorisierung 2* bezieht sich auf die *Ursache* der Kräfte. Eingeprägte Kräfte lassen sich durch ein physikalisches Kraftgesetz in Abhängigkeit von den Lage- und Geschwindigkeitsgrößen beschreiben. Bei Systemen mit Coulombscher Reibung sind allerdings weitergehende Betrachtungen erforderlich, da hier im Allgemeinen die eingeprägten Reibungskräfte von den Reaktionskräften (Normalkräften) abhängen (Schramm 1986). Beispiele für eingeprägte Kräfte bei Fahrzeugsystemen sind die Gewichtskräfte, Feder- und Dämpferkräfte, aber auch z.B. die Gaskräfte in den Kolben des Verbrennungsmotors, die Luftkräfte und insbesondere auch die Reifenkräfte.

Beispiele für *Reaktionskräfte* sind die in den Gelenken auftretenden Kräfte. Die Normalkräfte von der Straße auf die Räder wären Reaktionskräfte bei einer Modellierung des Rades und der Straßenoberfläche als Starrkörper. Bei einer Modellierung des Rades mit elastischem Reifen sind sie jedoch ebenfalls eingeprägte Kräfte.

Die *Kategorisierung 3* bezieht sich auf die *Verteilung* der Kräfte. Oberflächenkräfte sind flächenhaft und Volumenkräfte räumlich verteilt. Beispiele für Oberflächenkräfte in Kraftfahrzeugen sind die Luftkräfte aber genau genommen auch die Kräfte zwischen Straßenoberfläche und dem Laufstreifen des Rades. Zu den Volumenkräften bei Fahrzeugen zählen selbstverständlich alle Gewichtskräfte aber auch z.B. elektrische und magnetische Feldkräfte.

Eine weitere Unterscheidung ergibt sich aus dem zeitlichen Verlauf der Kräfte. Man unterscheidet Kräfte mit deterministischem und Kräfte mit stochastischem Zeitverlauf. *Deterministische Kräfte* sind durch ihre Zeitfunktion eindeutig bestimmt. *Stochastische Kräfte* haben einen regellosen Zeitverlauf und müssen mit Hilfe statistischer Methoden beschrieben werden (Smith 2003).

9.1.1 Reaktionskräfte

Zur weiteren Analyse der Reaktionskräfte betrachtet man zunächst nochmals die Impuls- und Drallsätze für die Komponenten des betrachteten Mehrkörpersystems (vgl. Kapitel 4):

$$m_i \ddot{\mathbf{s}}_i = \mathbf{F}_i^e + \mathbf{F}_i^z, \quad i = 1, \dots, n_B, \quad (9.1)$$

$$\boldsymbol{\Theta}_{S_i} \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\Theta}_{S_i} \boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{T}_i^e + \mathbf{T}_i^z, \quad i = 1, \dots, n_B. \quad (9.2)$$

Auf der jeweils rechten Seite der Gln. (9.1) und (9.2) wurden die resultierenden Kräfte auf den jeweiligen Körper K_i in die resultierenden eingeprägten Kräfte und Momente \mathbf{F}_i^e und \mathbf{T}_i^e sowie die Reaktionskräfte und -momente \mathbf{F}_i^z und \mathbf{T}_i^z aufgeteilt. Ähnlich wie sich die *lokalen* Geschwindigkeiten durch die verallgemeinerten Geschwindigkeiten

$$\dot{\mathbf{s}}_i = \mathbf{J}_{s_i} \dot{\mathbf{q}}, \quad \boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{J}_{\phi_i} \dot{\mathbf{q}}, \quad i = 1, \dots, n_B, \quad (9.3)$$

ausdrücken lassen, so lassen sich auch die *lokalen* Reaktionskräfte in Abhängigkeit von den verallgemeinerten Reaktionskräften

$$\mathbf{Z} = [Z_1 \quad \dots \quad Z_r]^T, \quad r = 6n_B - f, \quad (9.4)$$

darstellen:

$$\mathbf{F}_i^z = \mathbf{F}_i^z(\mathbf{Z}), \quad \mathbf{T}_i^z = \mathbf{T}_i^z(\mathbf{Z}), \quad i = 1, \dots, n_B. \quad (9.5)$$

Die formelmäßigen Zusammenhänge in Gl. (9.5) ergeben sich in der Regel aus den Lagerkräften auf die einzelnen Körper. Dabei wählt man für die verallgemeinerten Reaktionskräfte zweckmäßigerweise die natürlichen Lagerkräfte, d.h. die Lagerkräfte in den gesperrten Lagerrichtungen, s. Kapitel 3 und 4 sowie (Schramm 1985, 1986a und 1986b) und (Schiehlen und Eberhard 2004). Dies ist allerdings nur dann erforderlich, wenn die Lagerkräfte, z.B. zur Abschätzung der inneren Lasten des Systems benötigt werden. Wenn, wie üblich, nur das Bewegungsverhalten des Systems untersucht werden soll, ist die Berücksichtigung von Gl. (9.5) nicht erforderlich, da die Reaktionskräfte sowohl bei der Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit als auch bei der Anwendung des Prinzips von Jourdain entfallen, s. Kapitel 4.

9.1.2 Eingeprägte Kräfte

Die eingeprägten Kräfte in Fahrzeugsystemen hängen – wie schon erwähnt – von den Lage- und Geschwindigkeitsgrößen sowie weiteren Parameter des Systems und ggf. noch explizit von der Zeit ab:

$$\mathbf{F}_i^e = \mathbf{F}_i^e(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad \mathbf{T}_i^e = \mathbf{T}_i^e(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad i = 1, \dots, n_B. \quad (9.6)$$

Erforderlich ist also für jeden Körper und jede eingeprägte Kraft sowohl die Angabe der Wirkrichtung der Kraft, als auch die Angabe eines entsprechenden Kraftgesetzes.

9.2 Betriebsbremse

Eine unverzichtbare Fahrzeugkomponente ist die Betriebsbremse, die heute überwiegend als Scheibenbremse ausgeführt wird, (Burckhardt 1991), (Bill und Breuer 2006). Genauere Modelle von Scheibenbremsen wurden vor allem für die Nachbildung von Störgeräuschen wie dem Bremsenquietschen (*squeal*, $f = 1 - 15 \text{ kHz}$) oder dem Bremsenbrummen (*groan*, $f = 200 - 500 \text{ Hz}$) erstellt, (Gouya und Nishiaki 1990), (Samie und Sheridan 1990) oder (Shi 1996). Da hierbei der Einfluss der Strukturdynamik dominiert, kommen hauptsächlich FE-Modelle zum Einsatz. Bei fahrdynamischen Untersuchungen spielt dies normalerweise keine Rolle, so dass sich in diesem Fall die Modellierung erheblich vereinfacht.

Nachfolgend wird der konstruktive Aufbau und die Modellierung einer Scheibenbremse erläutert, s. Abb. 9.3. Der genaue konstruktive Aufbau und Hinweise zur Auslegung kann (Burckhardt 1991) oder (Bill und Breuer 2006) entnommen werden. Eine gängige Bauform ist die Graugussbremsscheibe mit außen umgreifendem Bremssattel, wobei sich die Bremssättel in Fest- und Schwimmsättel unterteilen lassen, s. Abb. 9.3.

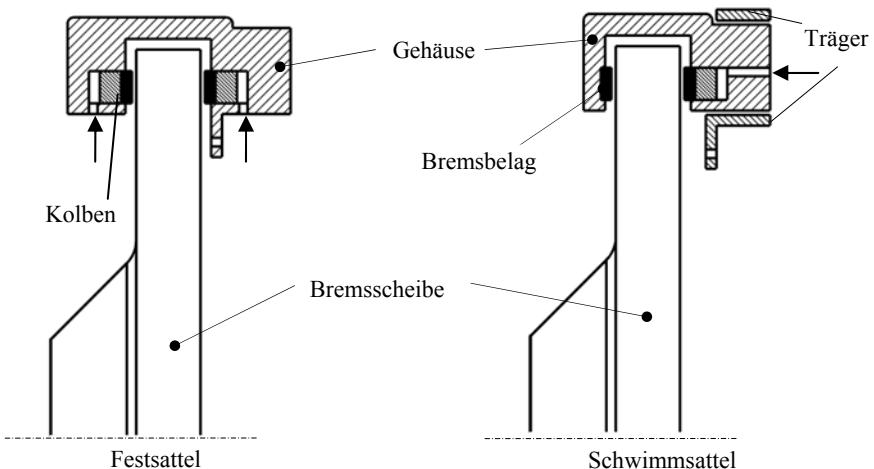


Abb. 9.3: Aufbau einer Scheibenbremse

Beispielhaft wird die Modellbildung einer Festsattelbremse betrachtet. Der Schwerpunkt der Modellierung liegt auf der Umformung des Bremsdrucks in ein Bremsmoment an der Bremsscheibe. Bei gegebenem Bremsdruck p_B ergibt sich das Bremsmoment M_B an der rotierenden Bremsscheibe zu

$$M_B = p_B A_K r_B \mu_G(p_B, T_B). \quad (9.7)$$

Dabei bezeichnet A_K die wirksame Kontaktfläche zwischen Bremsbelag und Bremsscheibe und r_B den Abstand zwischen der Achsmitte und der Bremsbelagmitte. Der Gleitreibungskoeffizient μ_G ist von dem wirkenden Bremsdruck p_B und der Belagtemperatur T_B abhängig. Nach (Burkhardt 1991) und (Schuster 1998) lassen sich diese Zusammenhänge durch eine Näherung beschreiben. Vernachlässigt man die Gleitgeschwindigkeit, so steigt der Reibwert mit zunehmender Temperatur T_B bis zum einem Maximum bei der optimalen Temperatur $T_{B,opt}$ an und fällt danach wieder ab. Mathematisch lässt sich dieser Zusammenhang annähernd durch eine Parabel darstellen:

$$\mu_G(T_B) = \mu_{G,max} \left[1 - c_P \left(\frac{T_B - T_{B,opt}}{T_{B,opt}} \right)^2 \right]. \quad (9.8)$$

Die Größe c_P stellt dabei eine dimensionslose Materialkonstante dar, welche das Temperaturverhalten der Werkstoffpaarung zwischen Bremsscheibe und -belag abbildet. Ganz ähnlich kann auch die Abhängigkeit des Reibwertes vom Bremsdruck approximiert werden:

$$\mu_G(p_B) = \mu_{G,p_B=0} \left[1 - c_T \left(\frac{p_B}{p_B^*} \right)^2 \right]. \quad (9.9)$$

Dabei ist c_T eine weitere dimensionslose Materialkonstante, $\mu_{G,p_B=0}$ der Reibkoeffizient bei $p_B = 0$, und p_B^* ist der maximale Bremsdruck. Die Gleichung für den Reibbeiwert ergibt sich somit aus den Gln. (9.8) und (9.9) in erster Näherung:

$$\begin{aligned} & \mu_G(p_B, T_B) \\ &= \mu_{G,p_B=0} \left[1 - c_T \left(\frac{p_B}{p_B^*} \right)^2 \right] \cdot \mu_{G,max} \left[1 - c_P \left(\frac{T_B - T_{B,opt}}{T_{B,opt}} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (9.10)$$

9.3 Luftkräfte

Luftkräfte und Luftpomente haben bei mittleren und höheren Geschwindigkeiten nicht nur einen erheblichen Einfluss auf die Fahrleistungen und den Verbrauch von Automobilen sondern auch auf das dynamische Verhalten. Der Luftwiderstand lässt sich grundsätzlich drei physikalischen Effekten zurechnen, (Schiehlen und Popp 1993):

- Der Formwiderstand entsteht durch die Turbulenz der Luftströmung am Fahrzeugheck. Dieser Effekt beträgt ca. 85% des Gesamtwiderstandes.
- Der Reibungswiderstand (Oberflächenwiderstand) entsteht durch die Scherströmung an der Karosserie und hängt von deren Oberfläche ab (Anteil ca. 10%).
- Der Innenwiderstand entsteht, weil ein Teil der Strömung durch die Karosserie hindurch geht (Anteil ca. 5%). Diese Luftströmung dient der Kühlung des Motors und der Belüftung des Fahrgastraums.

Die Luftkräfte werden zum größten Teil durch turbulente Strömungen verursacht. Sie sind proportional zum Staudruck:

$$p_L = \frac{1}{2} \rho_L v_L^2, \quad (9.11)$$

mit der Luftdichte ρ_L und der Anströmgeschwindigkeit v_L . Mit der effektiven Querschnittsfläche A des Fahrzeugs, einem dimensionslosen Beiwert c_W erhält man für die Luftwiderstandskraft

$$F_W = c_W A p_L. \quad (9.12)$$

Wenn nun neben der Anströmgeschwindigkeit durch den Fahrtwind auch der Umgebungswind berücksichtigt werden soll, so muss mit der tatsächlichen Relativgeschwindigkeit gerechnet werden. In Abb. 9.4 sind Relativgeschwindigkeit und Anströmwinkel dargestellt. Dabei sei die Richtung der Umgebungswindgeschwindigkeit durch den Winkel τ_W gegeben. Die Relativgeschwindigkeit erhält man dann durch Anwendung des Cosinussatzes:

$$v_R = \sqrt{v_L^2 + v_W^2 + 2v_L v_W \cos \tau_W}. \quad (9.13)$$

Für den Anströmwinkel ergibt sich dann:

$$\tau_R = \arcsin \left(\frac{v_W}{v_R} \sin \tau_W \right). \quad (9.14)$$

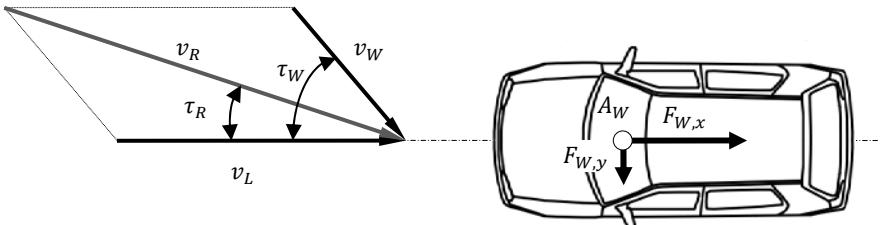


Abb. 9.4: Ermittlung der Relativgeschwindigkeit

Durch die Schräganströmung entstehen neben einer Seitenkraft auch eine Veränderung der Längskraft sowie aerodynamische Auftriebskräfte. Insgesamt ergeben sich die folgenden Kraftkomponenten (Haken 2008):

Luftwiderstand (Längskraft):

$$F_{Wx} = c_x A_W \frac{\rho}{2} v_R^2 . \quad (9.15)$$

Seitenkraft (Querkraft):

$$F_{Wy} = c_y A_W \frac{\rho}{2} v_R^2 . \quad (9.16)$$

Auftrieb (Hochkraft):

$$F_{Wz} = c_z A_W \frac{\rho}{2} v_R^2 . \quad (9.17)$$

Bemerkungen:

- Für den Anströmwinkel $\tau_R = 0$ wird in Gl. (9.15) wieder $c_x = c_w$.
- Der Einfachheit halber wird in den Gln. (9.16) und (9.17) als Querschnittsfläche A_W eingesetzt, obwohl dies in diesen Fällen physikalisch nicht begründet werden kann.
- Die Beiwerte c_x, c_y und c_z sind abhängig vom Anströmwinkel τ_R .

Tabelle 9.1: Beispiele für Luftwiderstandsbeiwerte

Fahrzeugtyp	Luftwiderstandsbeiwert c_w
PKW	0,2 – 0,4
LKW	0,6 – 1,0
Bus	0,6 – 0,7
Motorrad	0,6

9.4 Feder- und Dämpferkomponenten

9.4.1 Federelemente

Abb. 9.5 zeigt zwei Körper K_i und K_j , die in den Punkten $P_{i,l}$ und $P_{j,l}$ durch ein Federelement verbunden sind. Wenn man die Ortsvektoren von einem Referenzsystem zu den Angriffspunkten mit $\mathbf{r}_{P_{i,l}}$ und $\mathbf{r}_{P_{j,l}}$ bezeichnet und entsprechend die Ortsvektoren vom jeweiligen Referenzpunkt der Körper mit $_i\mathbf{r}_{P_{i,l}}$ bzw. $_j\mathbf{r}_{P_{j,l}}$ und den Abstandsvektor mit

$${}_{i,l}\mathbf{r}_{j,l} = \mathbf{r}_{P_{j,l}} - \mathbf{r}_{P_{i,l}}, \quad (9.18)$$

so ergibt sich für die Federkraft auf den Körper K_i :

$$\mathbf{F}_l = \frac{{}_{i,l}\mathbf{r}_{j,l}}{|{}_{i,l}\mathbf{r}_{j,l}|} f(|{}_{i,l}\mathbf{r}_{j,l}|) = \mathbf{u}_l f(u) = \mathbf{u}_l (f(u_{l_0}) + f(\Delta u_l)), \quad (9.19)$$

wobei der Einheitsvektor die Richtung der Kraft \mathbf{F}_l auf den Körper K_i und $f(u)$ mit $u_l = |{}_{i,l}\mathbf{r}_{j,l}|$, das Kraftgesetz beschreibt. Gl. (9.19) gilt für beliebige Kraftgesetze, solange sich das Kraftgesetz alleine in Abhängigkeit von der Auslenkung u angeben lässt. Der Ausdruck $f(u_{l_0})$ in Gl. (9.19) entspricht der sogenannten ungespannten Federlänge, während $f(\Delta u_l)$ mit $\Delta u_l = u_l - u_{l_0}$ den variablen Anteil der Federkraft beschreibt. Man erhält:

$$\mathbf{F}_l = \mathbf{u}_l (f(u_{l_0}) + f(\Delta u_l)) = \mathbf{F}_{l_0} + \mathbf{F}_l(\Delta u_l), \quad (9.20)$$

mit der Federvorspannung \mathbf{F}_{l_0} und dem variablen Kraftanteil $\mathbf{F}_l(\Delta u)$. Auf den Körper K_j wirkt eine Kraft mit gleichem Betrag aber umgekehrten Vorzeichens. Zusätzlich zur Federkraft ergibt sich noch ein Drehmoment, das z.B. bezüglich des Bezugspunktes des Körpers K_i lautet:

$$\mathbf{T}_{i,l} = {}_i\mathbf{r}_{P_{i,l}} \times \mathbf{F}_{i,l}. \quad (9.21)$$

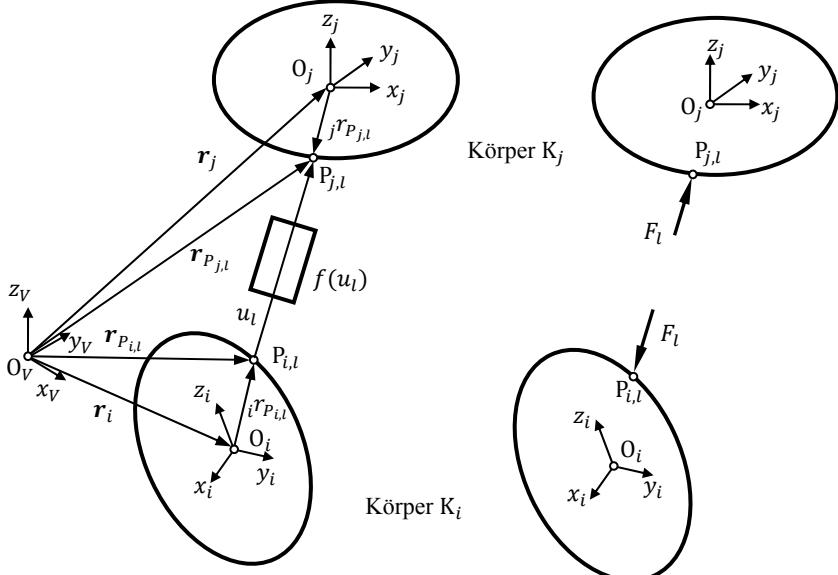


Abb. 9.5: Kraftelemente zwischen zwei Körpern

Das Drehmoment auf den Körper K_j erhält man entsprechend, wenn man i durch j ersetzt. Ein typisches Kraftgesetz $f(\Delta u_l)$ zeigt Abb. 9.6. Dort wird

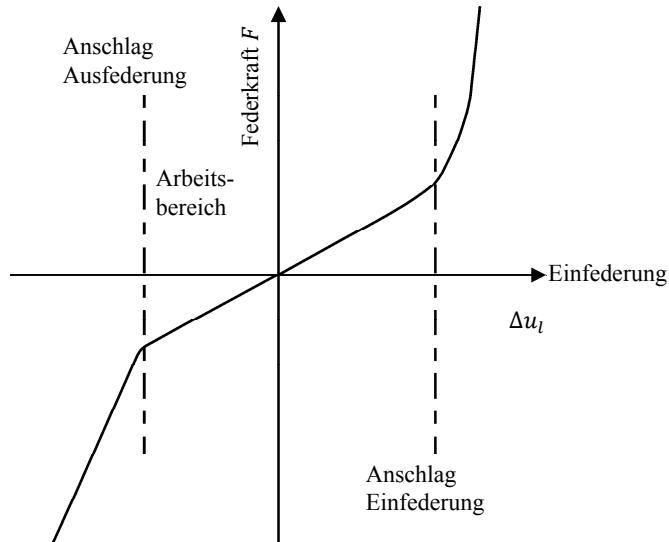


Abb. 9.6: Typische Kennlinie einer Aufbaufeder

ein Kraftgesetz dargestellt, das im Mittelbereich einen leicht progressiven Verlauf hat und in den Randbereichen durch stark progressives Verhalten Anschläge modelliert.

9.4.2 Dämpferelemente

Die Kraft eines Dämpferelementes wird beschrieben in Abhängigkeit von der Verschiebungsgeschwindigkeit v_l . Diese berechnet sich aus der zeitlichen Veränderung des Abstandes der Punkte $P_{i,l}$ und $P_{j,l}$ und anschließende Projektion auf den Richtungsvektor \mathbf{u}_l zu:

$$\begin{aligned} v_l &= \mathbf{u}_{l,i,l}^T \dot{\mathbf{r}}_{j,l} = \mathbf{u}_l^T \left({}_j \dot{\mathbf{r}}_{P_{j,l}} - {}_i \dot{\mathbf{r}}_{P_{i,l}} \right) \\ &= \mathbf{u}_l^T \left(\dot{\mathbf{r}}_j + \boldsymbol{\omega}_j \times {}_j \mathbf{r}_{P_{j,l}} - \dot{\mathbf{r}}_i - \boldsymbol{\omega}_i \times {}_i \mathbf{r}_{P_{i,l}} \right). \end{aligned} \quad (9.22)$$

Für die Dämpferkraft erhält man dann

$$\mathbf{F}_l = \mathbf{u}_l g(v). \quad (9.23)$$

Ein typisches Kraftgesetz für einen Aufbaudämpfer zeigt Abb. 9.7.

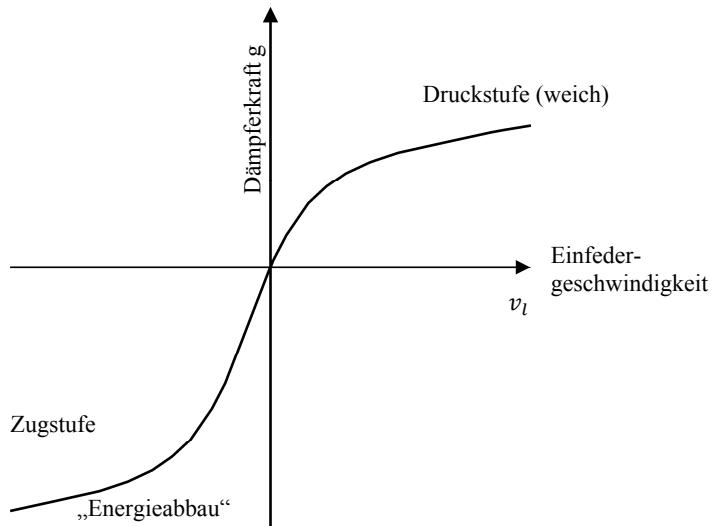


Abb. 9.7: Typische Kennlinie eines Aufbaudämpfers

9.4.3 Parallel geschaltete Kraftelemente

Bei parallel geschalteten Kraftelementen lassen sich die Kräfte einfach addieren.

9.4.4 In Reihe geschaltete Kraftelemente

In der Fahrzeugtechnik werden Kraftelemente häufig auch in Reihe geschaltet, um eine elastische Lagerung von Dämpfern zu erreichen und damit z.B. den Fahrkomfort des Fahrwerks zu verbessern oder geeignete Motorlagerungen zu realisieren. Das entsprechende Ersatzmodell zeigt Abb. 9.8. Die Gesamtverschiebung der Endpunkte des Kraftelementes werde mit w , die der Feder wieder mit u beschrieben. Dann erhält man aus dem Kräftegleichgewicht im Verbindungspunkt Q der Feder und des Dämpfers:

$$f(u) = g(\dot{w} - \dot{u}). \quad (9.24)$$

Diese Beziehung entspricht einer Differentialgleichung erster Ordnung für die Federauslenkung u :

$$\ddot{u} = \dot{w} - g^{-1}(f(u)), \quad (9.25)$$

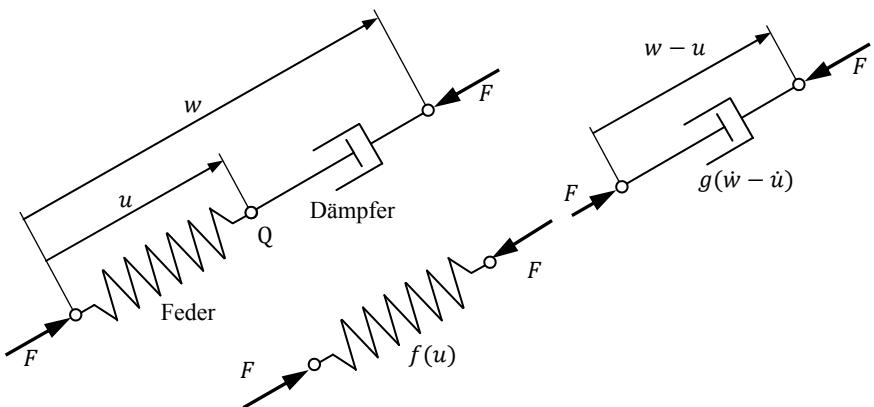


Abb. 9.8: Reihenschaltung von Feder- und Dämpferelementen

Den Eingang dieser Differentialgleichung bildet die Verschiebungsgeschwindigkeit \dot{w} des kombinierten Elements. Diese kann leicht aus den kinematischen Größen der Endpunkte berechnet werden. Den Ausgang der Gleichung bildet die Länge u des Federelementes. Die Dynamik des Kraftelements wird beschrieben durch die aus den Kennlinien der Teilelemente gebildete Funktion $g^{-1}(f(u))$. Diese Kombination von Feder- und Dämpferelementen besitzt eine Eigendynamik. Durch die zusätzliche Feder werden die Kraftspitzen, die beim Einsatz eines Dämpfers alleine auftreten würden, heraus gefiltert.

9.5 Stabilisatoren

Stabilisatoren werden zur Erhöhung des Fahrkomforts durch eine Reduzierung des Wankwinkels bei Kurvenfahrt und zur Verbesserung des Fahrverhaltens durch eine positive Beeinflussung des Eigenlenkverhaltens des Fahrwerks eingesetzt, (Ammon 1997). Ihre Wirkungsweise beruht auf einer Erhöhung der Wanksteifigkeit des Fahrzeugs durch eine Kraftkopplung zwischen den beiden Rädern einer Achse bei unterschiedlichen Einfederwegen. Daraus resultiert eine Reduktion der Normalkraftunterschiede an der betreffenden Achse.

9.5.1 Passive Stabilisatoren

Der Stabilisator ist meist als U-förmig gebogene Drehstabfeder ausgeführt. Diese ist in Gummihülsen A, A' drehbar am Fahrzeugaufbau gelagert. Ihre

Enden B, B' sind mit den beiden Seiten der Radaufhängungen der betreffenden Achse verbunden, s. Abb. 9.9. Bei unterschiedlicher Einfederung der beiden Räder erfahren die Hebel unterschiedlich große Auslenkungen, die in einer Verdrehung des Torsionsstabes und damit im Aufbau eines entsprechenden Torsionsmomentes resultieren. Die Verbindung mit der

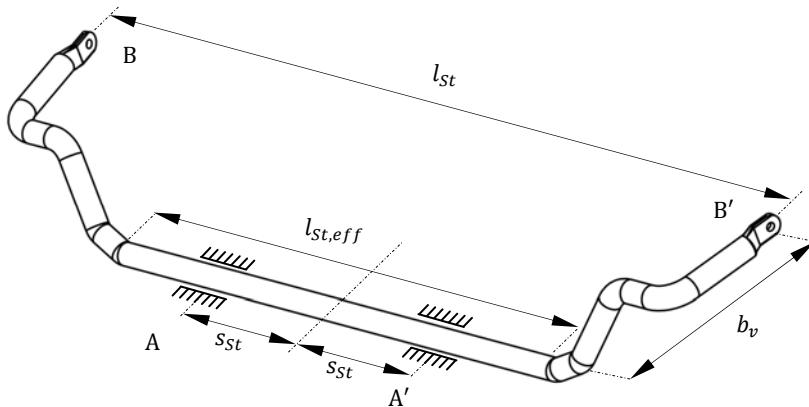


Abb. 9.9: Passiver Stabilisator

Radaufhängung erfolgt entweder über Gummibuchsen oder über Pendelstützen, s. Abb. 9.10. Zur Modellierung des Stabilisators als Kraftelement eines Mehrkörpersystemmodells wird hier die Torsionselastizität der Drehstabfeder in einem Drehgelenk konzentriert angenommen, welches in der Richtung der Torsionsachse des Stabilisators angeordnet ist. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Verbiegung der Hebel des Stabilisators gegenüber der Torsion vernachlässigbar ist.

Da die Masse des Stabilisators im Vergleich zu den übrigen Körpern der Radaufhängung klein ist, wird sie hier vernachlässigt, d.h. der Stabilisator wird als masseloses Kraftelement modelliert. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, so muss eine Modellierung als massebehaftetes Subsystem erfolgen, (Frik 1994). Sonst gehen nur die vom Stabilisator hervorgerufenen Kräfte als eingeprägte Kräfte in die Bewegungsgleichungen ein. Diese Annahmen führen zu der Modellierung in Abb. 9.10. Es wird nun weiterhin angenommen, dass jede Stabilisatorhälfte über ein Drehgelenk mit dem Fahrzeugaufbau verbunden ist. Damit kann der für die Ermittlung des Torsionselementes erforderliche Torsionswinkel durch Differenzbildung der Einfederwinkel der beiden Stabilisatorhälften gebildet werden.

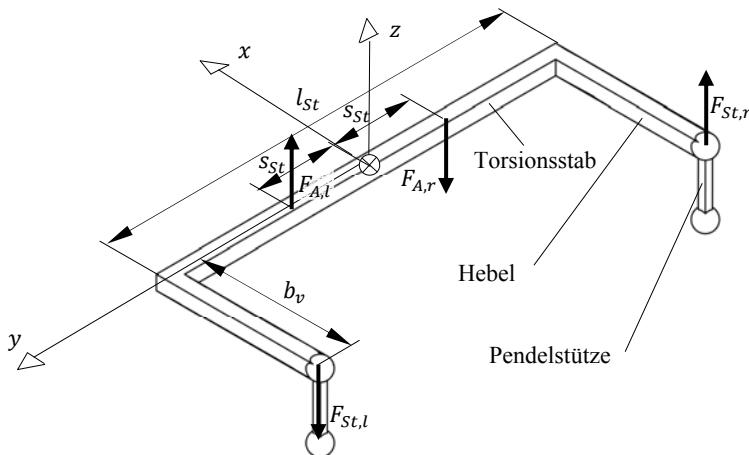


Abb. 9.10: Modellierung eines passiven Stabilisators

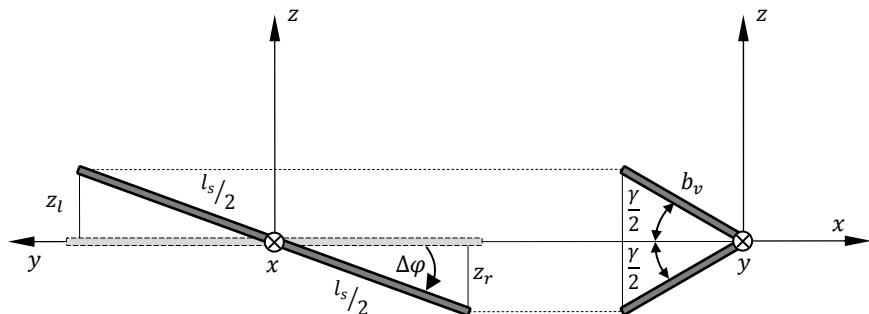


Abb. 9.11: Modellierung eines passiven Stabilisators

Für das Drehmoment des Torsionsstabs ergibt sich mit dem Torsionswinkel γ die Formel:

$$M_{St} = c_{St}\gamma. \quad (9.26)$$

Dabei wurde die Torsionsfederkonstante

$$c_{St} = \frac{GJ_T}{l_{St,eff}} \quad (9.27)$$

eingeführt. In Gl. (9.27) steht G für den Schubmodul des Federmaterials, J_T ist das polare Flächenträgheitsmoment des Federstabquerschnitts und $l_{St,eff}$ die effektive (Torsions-)Länge des Drehstabes. Für die maßgeblichen Vertikalverschiebungen der Kraftangriffspunkte an den Radaufhängungen ergeben sich die Zusammenhänge, s. Abb. 9.11:

$$z_r = -z_l = -b_v \sin \frac{\gamma}{2}, \quad z_r = -z_l = -\frac{l_{st}}{2} \sin \Delta\varphi. \quad (9.28)$$

Aus den Gln. (9.28) erhält man den Zusammenhang zwischen der Torsion des Torsionsstabs und der Querneigung des Fahrzeugs:

$$\gamma = 2 \arcsin \left(\frac{l_{st}}{2b_v} \sin \Delta\varphi \right) \approx \frac{l_{st}}{b_v} \Delta\varphi \quad (9.29)$$

und damit das Torsionsmoment des Stabilisators in Abhängigkeit von der Querneigung des Fahrzeugs relativ zur Fahrbahn:

$$M_{st} = c_{st} \gamma \approx \frac{l_{st}}{b_v} c_{st} \Delta\varphi. \quad (9.30)$$

Die Kräfte auf die Radaufhängungen und die Kräfte auf den Aufbau berechnen sich durch die Auswertung der Kräfte- und Momentengleichgewichte auf den Stabilisator zu:

$$F_{st,l} = F_{st,r} = \frac{l_{st}}{2b_v^2} c_{st} \Delta\varphi, \quad (9.31)$$

$$F_{A,l} = F_{A,r} = \frac{l_{st}}{2s_{st}} F_{st,l} = \frac{l_{st}^2}{4s_{st}b_v^2} c_{st} \Delta\varphi. \quad (9.32)$$

Damit ergibt sich das resultierende Stabilisatormoment auf den Aufbau:

$$M_{st,A} = -s_{st}(F_{A,l} + F_{A,r}) = -\frac{l_{st}}{2b_v^2} c_{st} \varphi. \quad (9.33)$$

9.5.2 Aktive Stabilisatoren

Zur Realisierung einer Wankstabilisierung und zur Beeinflussung der Fahrdynamik werden seit einigen Jahren als Stellglieder auch aktive Stabilisatoren eingesetzt, (Ötgen 2005). Dazu werden im Prinzip passive Stabilisatoren zweigeteilt und die freien Enden dann über einen in der Regel elektrischen Aktuator wieder miteinander verkoppelt, s. Abb. 9.12. Mit diesem Aktuator wird statt des passiven, von der Torsion des Stabilisators abhängigen Schnittmoments, ein aktives Drehmoment $M_{st,A}$ eingeprägt, das sich über die Pendelstütze am Radträger abstützt und durch die Reaktionskräfte ein Drehmoment um die Fahrzeuglängsachse in den Fahrzeugaufbau einleitet. Damit ist eine Wankstabilisierung realisierbar und durch Aufteilung der eingeprägten Momente auf die Vorder- und Hinterachse das

Eigenlenkverhalten eines Fahrzeugs beeinflussbar. Der Aktuator kann bei der Modellierung in der Regel als ideal angenommen werden, wobei die eingeprägten Drehmomente als Stellgrößen natürlich beschränkt sind.

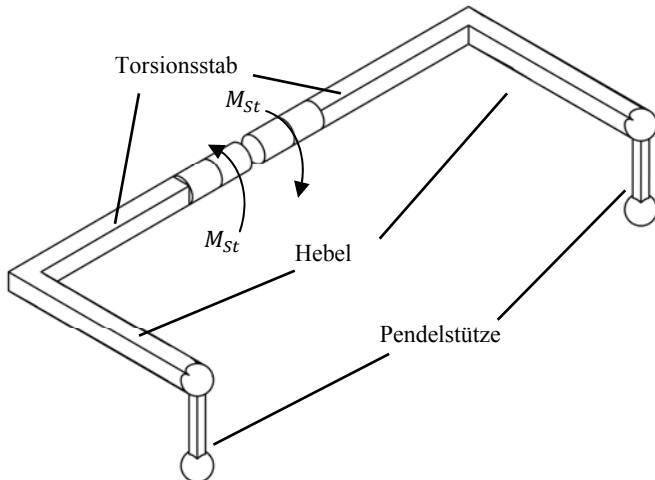


Abb. 9.12: Modellierung eines aktiven Stabilisators

Ein Beispiel für die Realisierung eines aktiven Stabilisators in einem Serienfahrzeug zeigt Abb. 9.13.

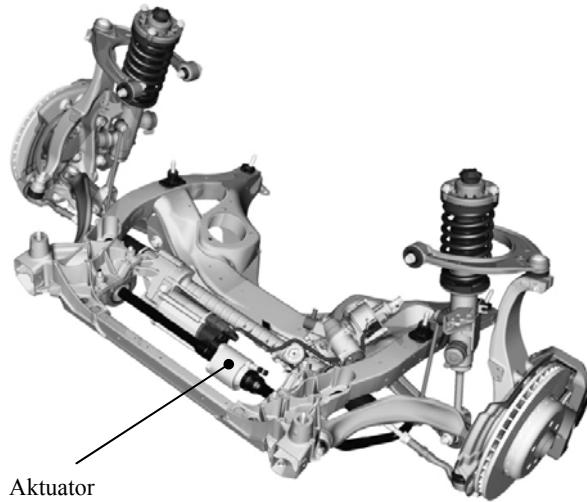


Abb. 9.13: Doppelquerlenker-Vorderachse mit integriertem Stabilisator, 5er Serie
(mit freundlicher Genehmigung der BMW Group)

9.6 Gummi-Verbund-Elemente

Gummi-Verbund-Elemente haben bei der Auslegung moderner Radaufhängungssysteme wichtige Funktionen. Neben der Entkopplung von Fahr gestell und Radaufhängung hinsichtlich der Übertragung von Körperschall und Vibrationen und der Dämpfung von Resonanzerscheinungen ist für die Fahrdynamik die gezielte Beeinflussung der Radaufhängungskinematik unter Last von Bedeutung. Aufgrund der hohen Kräfte, die z.B. beim Abbremsen auftreten, ist die Berücksichtigung solcher Elemente für eine Vielzahl von Anwendungen unverzichtbar. Prinzipiell erschwert jedoch die komplexe geometrische Form von Gummilagern die Modellbildung. Daher kommt bei der Beschreibung derartiger Elemente häufig die Methode der Finiten Elemente zum Einsatz (Mohr-Matuschek 1992, Gaul und Zastrau 1989). Außerdem ergeben sich bei statischer Belastung bereits deutliche Hystereseffekte, (Gobel 1974).

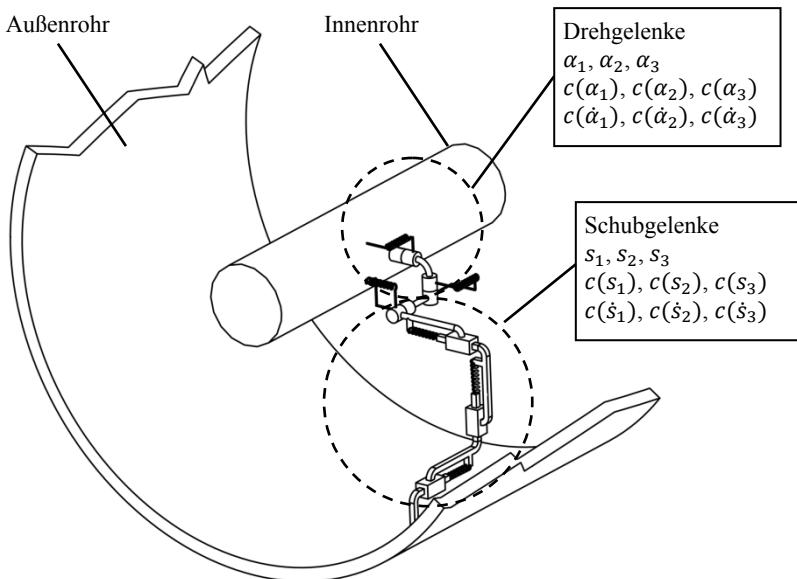


Abb. 9.14: Modell eines elastischen Lagers

Die Simulation wird darüber hinaus durch das komplexe Materialverhalten des Gummi-Werkstoffes erschwert. So ist z.B. das dynamische Verhalten der Gummielemente insbesondere im Bereich höherer Frequenzen stark frequenzabhängig, (Nicolin und Dellmann 1985). Um trotzdem zu handhabbaren Modellen in der Mehrkörpersimulation zu kommen, wird in der

Regel auf einfache mehrdimensionale Kennlinienmodelle zurückgegriffen. So wird z.B. bei (Schuster 1998) ein sechsdimensionales Element zur Abbildung von drei translatorischen und drei rotatorischen Steifigkeiten und Dämpfungseigenschaften erstellt, Abb. 9.14.

Das verwendete Modell hat drei rotatorische und drei translatorische Freiheitsgrade, die je nach Anwendung wahlweise blockiert oder freigeschaltet werden können, um die jeweils relevanten elastischen Effekte abzubilden. Die Steifigkeits- und Dämpfungskenntlinien $c(\alpha_i)$, $c(s_i)$ sowie $d(\dot{\alpha}_i)$ und $d(\dot{s}_i)$ müssen aus Messungen gewonnen werden, Abb. 9.15. In Abb. 9.15 ist anhand der Kräfte in x- und y-Richtung auch zu erkennen, wie sich die Form des Lagers auf die resultierenden Steifigkeiten auswirkt. Bei hochfrequenten Anregungen sind derartige einfache Modelle jedoch nur eingeschränkt anwendbar. Der dort auftretende Versteifungseffekt von Gummilagern bei hochfrequenten Anregungen ist bei den in diesem Buch betrachteten Problemstellungen aus der Fahrzeugdynamik von untergeordneter Bedeutung.

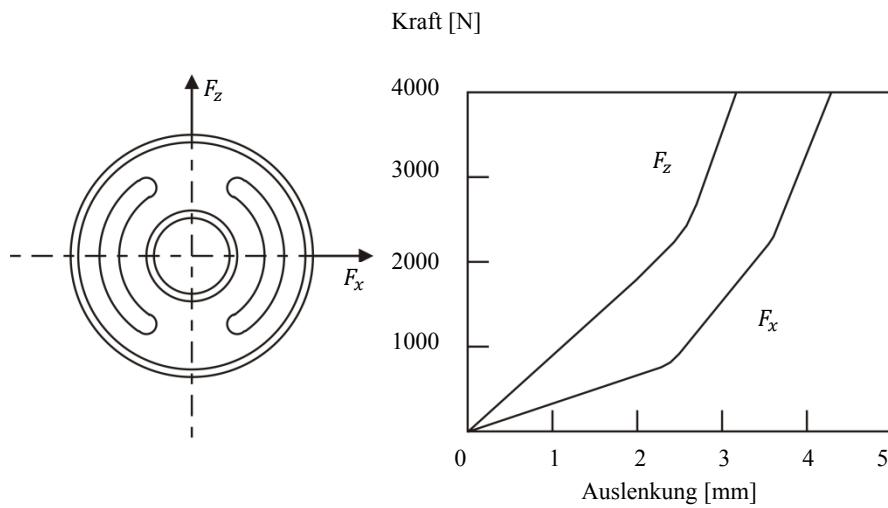


Abb. 9.15: Elastisches Lager und Lagerkräfte, (nach Reimpell 1986)

10 Einspurmodelle

Einspurmodelle gestatten es, ohne großen Modellierungs- und Parametrierungsaufwand bereits zu aussagekräftigen Ergebnissen im Rahmen einer Simulation des Fahrverhaltens von Kraftfahrzeugen zu kommen. In diesem Kapitel werden daher einige lineare und nichtlineare Einspurmodelle beschrieben.

10.1 Lineares Einspurmodell

Das klassische lineare Einspurmodell (Riekert und Schunk 1940), gestattet es, die Querdynamik eines Kraftfahrzeugs näherungsweise, aber gleichwohl physikalisch plausibel, zu beschreiben, s. (Abb. 10.1).

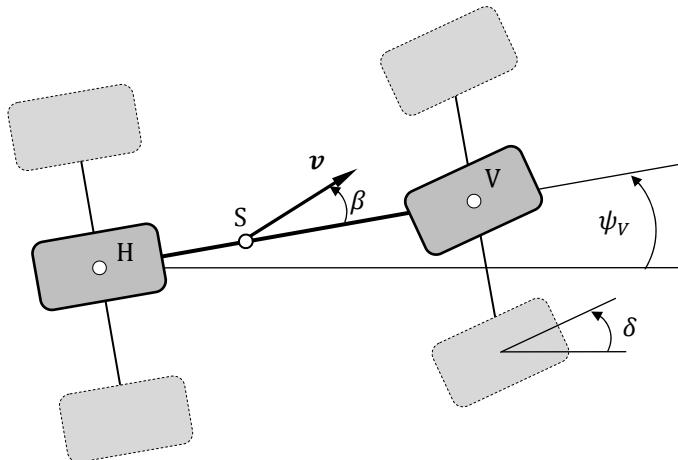


Abb. 10.1: Lineares Einspurmodell

Die Modellierung beruht auf einer Reihe vereinfachender Annahmen:

- Die Geschwindigkeit des Fahrzeugschwerpunktes wird längs seiner Bahnkurve als konstant angenommen.
- Alle Hub-, Wank- und Nickbewegungen werden vernachlässigt.

- Die Fahrzeugmasse wird im Massenmittelpunkt S zusammengefasst.
- Die Vorder- und Hinterräder werden achsweise zu jeweils einem Rad zusammengefasst. Die gedachten Radaufstandspunkte V und H, an denen die Reifenkräfte angreifen, liegen jeweils in der Achsmitte.
- Die Reifennachläufe und die Rückstellmomente infolge der Schräglauwinkel der Reifen werden vernachlässigt.
- Die Radlastverteilung zwischen Vorder- und Hinterachse bleibt stets konstant.
- Die Umfangskräfte an den Reifen, die sich aus der Bedingung konstanter Geschwindigkeit ergeben, werden vernachlässigt.

Die beiden ersten Annahmen führen zu vier Zwangsbedingungen für die sechs Starrkörperfreiheitsgrade des Modells. Somit verbleiben als Bewegungsmöglichkeiten noch der Gierwinkel ψ_V , der nur in der Form der Giergeschwindigkeit $\dot{\psi}_V$ auftritt, und der Schwimmwinkel β . Der Schwimmwinkel bezeichnet die Abweichung der Richtung der Schwerpunktsgeschwindigkeit von der Fahrzeuglenkachse. Der Lenkwinkel δ der Vorderachse dient als Eingangsgröße. Dieses stark idealisierte Fahrzeugmodell ist bereits gut geeignet, um die grundsätzlichen fahrdynamischen Zusammenhänge in einem Querbeschleunigungsbereich von

$$a_y \leq 0,4g \approx 4 \frac{m}{s^2} \quad (10.1)$$

bei trockener Fahrbahn zu untersuchen (Ammon 1997).

10.1.1 Bewegungsgleichungen des linearen Einspurmodells

Zur Erstellung der Bewegungsgleichungen ist es zweckmäßig, zunächst die Kinematik des als Starrkörper modellierten Fahrzeugs aufzubereiten. Dazu beschreibt man die Kinematik des Fahrzeugs in der x_E, y_E -Ebene des Inertialsystems $K_E = \{O_E; x_E, y_E, z_E\}$, s. Abb. 10.2. Speziell im quasistationären Fall, d.h. für sehr kleine Schwerpunktgeschwindigkeiten v , bewegen sich sämtliche Punkte des Fahrzeugs auf einer Kreisbahn um den Krümmungskreismittelpunkt K_A . Dieser fällt in diesem Fall mit dem Momentanpol M der Bewegung zusammen. Der zur Durchführung dieser Bewegung erforderliche Lenkwinkel ist, unter der Annahme kleiner Lenkbewegungen und großer Kurvenradien relativ zu den Abmessungen des Fahrzeugs, gegeben durch:

$$\tan \delta_A = \frac{l}{\sqrt{\rho_M^2 - l_h^2}} \xrightarrow{|\delta_A| \ll 1, l_h \ll \rho_M} \delta_A \approx \frac{l}{\rho_M}. \quad (10.2)$$

Der Lenkwinkel δ_A der Vorderräder in Gl. (10.2) wird als *Ackermannwinkel* bezeichnet.

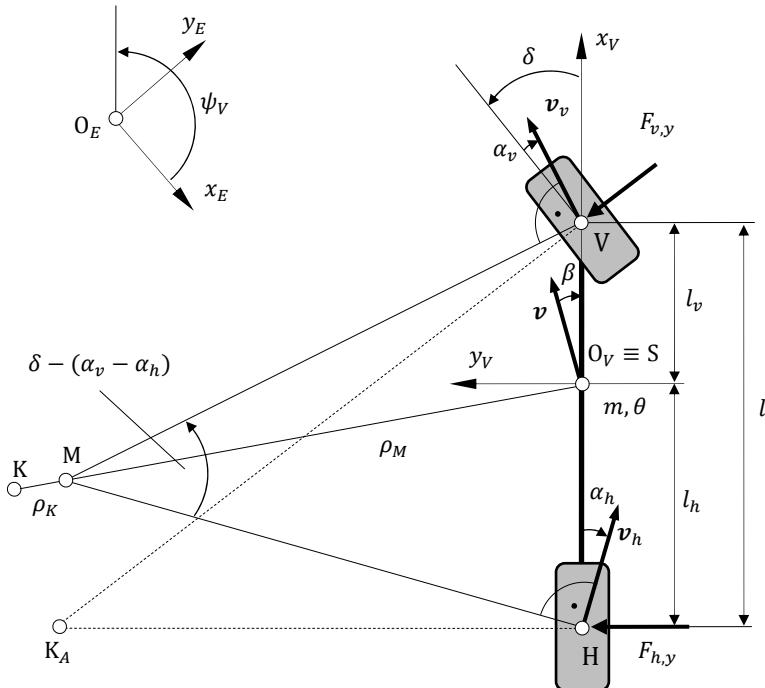


Abb. 10.2: Mathematische Beschreibung des linearen Einspurmodells

Im allgemeinen Fall ergibt sich für die Fahrzeuggeschwindigkeit gemäß (Abb. 10.2) im fahrzeugfesten Koordinatensystem $K_V = \{O_V; x_V, y_V, z_V\}$:

$${}^V \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v \cos \beta \\ v \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10.3)$$

Die Beschleunigung des Fahrzeugschwerpunktes S, dargestellt im Koordinatensystem K_V , ist dann:

$$\begin{aligned}
 {}^v\boldsymbol{a} &= \frac{d^v\boldsymbol{v}}{dt} + {}^v\boldsymbol{\omega} \times {}^v\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -v \sin \beta \dot{\beta} \\ v \cos \beta \dot{\beta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi}_V \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v \cos \beta \\ v \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -v(\dot{\psi}_V + \dot{\beta}) \sin \beta \\ v(\dot{\psi}_V + \dot{\beta}) \cos \beta \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{10.4}$$

Aufgrund der Annahme konstanter Längsgeschwindigkeit $v = const$ handelt es sich bei der Beschleunigung \boldsymbol{a} um eine reine Normalbeschleunigung \boldsymbol{a}_n quer zum Fahrzeug ($\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{v} = 0$). Ihr Betrag ergibt sich zu:

$$a_n = |\boldsymbol{a}_n| = v(\dot{\psi}_V + \dot{\beta}). \tag{10.5}$$

Aus Abb. 10.2 entnimmt man, dass der Krümmungsradius ρ_K der Bahnkurve des Schwerpunktes der Beziehung

$$\rho_K = \frac{v}{(\dot{\psi}_V + \dot{\beta})} \tag{10.6}$$

genügt. Für die folgenden Betrachtungen wird die Beschleunigung des Schwerpunktes quer zur Fahrzeuggeschwindigkeit benötigt. Diese ergibt sich für kleine Schwimmwinkel β mit Gl. (10.6) zu:

$$a_y = v(\dot{\psi}_V + \dot{\beta}) \cos \beta \approx v(\dot{\psi}_V + \dot{\beta}) = \frac{v^2}{\rho_K}. \tag{10.7}$$

Die Berechnung der horizontalen Reifenkräfte erfordert noch die Geschwindigkeiten der Radaufstandspunkte. Diese berechnen sich gemäß Abb. 10.2 zu:

$$\begin{aligned}
 {}^v\boldsymbol{v}_v &= {}^v\boldsymbol{v} + {}^v\boldsymbol{\omega} \times {}^v_S\boldsymbol{r}_v \\
 &= \begin{bmatrix} v \cos \beta \\ v \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos \beta \\ v \sin \beta + l_v \dot{\psi}_V \\ 0 \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{10.8}$$

an den Vorder- und

$$\begin{aligned}
 {}^v\boldsymbol{v}_h &= {}^v\boldsymbol{v} + {}^v\boldsymbol{\omega} \times {}^v_S\boldsymbol{r}_h \\
 &= \begin{bmatrix} v \cos \beta \\ v \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi}_V \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -l_h \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos \beta \\ v \sin \beta - l_h \dot{\psi}_V \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{10.9}$$

an den Hinterrädern. Dabei bezeichnen $s\mathbf{r}_V$ und $s\mathbf{r}_H$ die Ortsvektoren vom Massenmittelpunkt S des Fahrzeugs zum vorderen Radaufstandspunkt V, bzw. zum hinteren Radaufstandspunkt H. Die aktuelle Geschwindigkeit \mathbf{v}_v des Vorderrades lässt sich auch durch den Schwimmwinkel β und den Lenkwinkel δ im fahrzeugfesten Koordinatensystem K_V ausdrücken:

$${}^v\mathbf{v}_v = \begin{bmatrix} v \cos \beta \\ v \sin \beta + l_v \dot{\psi}_V \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_v \cos(\delta - \alpha_v) \\ v_v \sin(\delta - \alpha_v) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10.10)$$

Die ersten beiden Komponenten in Gl. (10.10) liefern für kleine Lenkwinkel δ eine Beziehung für den vorderen Schräglauwinkel α_v :

$$\begin{aligned} \tan(\delta - \alpha_v) &= \frac{v \sin \beta + l_v \dot{\psi}_V}{v \cos \beta} \approx \beta + l_v \frac{\dot{\psi}_V}{v} \\ \Rightarrow \alpha_v &= \delta - \beta - l_v \frac{\dot{\psi}_V}{v}. \end{aligned} \quad (10.11)$$

Dieses Vorgehen lässt sich an der Hinterachse entsprechend anwenden:

$${}^v\mathbf{v}_h = \begin{bmatrix} v \cos \beta \\ v \sin \beta - l_h \dot{\psi}_V \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_h \cos \alpha_h \\ -v_h \sin \alpha_h \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10.12)$$

Aus der ersten und zweiten Komponente dieser Vektorgleichung erhält man dann:

$$\begin{aligned} -\tan \alpha_h &= \frac{v \sin \beta - l_h \dot{\psi}}{v \cos \beta} \approx \beta - l_h \frac{\dot{\psi}_V}{v}, \\ \Rightarrow \alpha_h &\approx -\beta + l_h \frac{\dot{\psi}_V}{v}. \end{aligned} \quad (10.13)$$

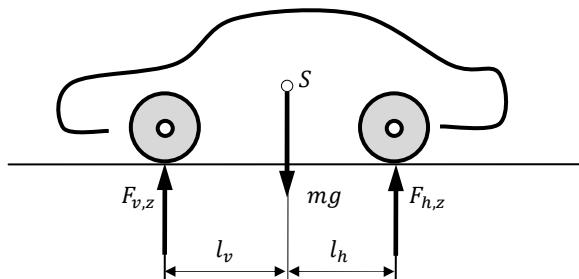


Abb. 10.3: Radlasten am linearen Einspurmodell

Für die Aufstellung der Bewegungsgleichungen werden neben der Beschreibung der Kinematik noch die auf das Fahrzeug wirkenden Kräfte benötigt. Die Normalkräfte auf die Räder ergeben sich unter Berücksichtigung der Lage des Massenmittelpunktes des Fahrzeugs zu (Abb. 10.3):

$$F_{v,z} = mg \frac{l_v}{l} \quad \text{und} \quad F_{h,z} = mg \frac{l_h}{l}. \quad (10.14)$$

Die Reifenkräfte lassen sich nach Kapitel 7 unter Annahme eines linearen Zusammenhangs zwischen Querkraft und Schräglauwinkel berechnen:

$$F_{v,y} = c_{\alpha,v} \alpha_v \quad \text{und} \quad F_{h,y} = c_{\alpha,h} \alpha_h, \quad (10.15)$$

mit den Schräglauwinkelsteifigkeiten $c_{\alpha,v}$ und $c_{\alpha,h}$, (s. Abb. 10.4).

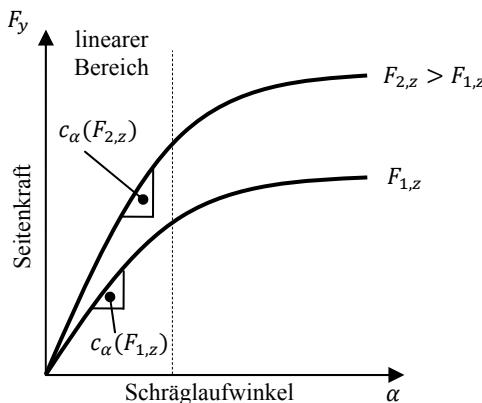


Abb. 10.4: Abhängigkeit der Rad-Seitenkraft vom Schräglauwinkel

In Abb. 10.4 ist erkennbar, dass die Schräglauwinkelsteifigkeiten Funktionen der Radlasten sind. Dies wird später in Abschnitt 10.3 näher beleuchtet. Mit Hilfe der Beschleunigungen (10.4) und Abb. 10.4 ergibt der Impulssatz in Querrichtung

$$mv(\dot{\psi}_V + \dot{\beta})\cos\beta = \cos\delta F_{v,y} + F_{h,y}. \quad (10.16)$$

Entsprechend erhält man für den Drallsatz um die Hochachse

$$\theta\ddot{\psi}_V = F_{v,y} \cos\delta l_v - F_{h,y} l_h. \quad (10.17)$$

Ersetzt man nun noch die Ausdrücke für die Reifenquerkräfte durch die in (10.15) sowie (10.11) und (10.13) gegebenen Beziehungen und setzt $\cos\beta \approx 1$, $\cos\delta \approx 1$ für $|\beta|, |\delta| \ll 1$, so erhält man schließlich die beiden Bewegungsgleichungen für das lineare Einspurmodell:

$$mv\dot{\beta} + (mv^2 + c_{\alpha,v}l_v - c_{\alpha,h}l_h) \frac{\dot{\psi}_V}{v} + (c_{\alpha,v} + c_{\alpha,h})\beta = c_{\alpha,v}\delta, \quad (10.18)$$

$$\theta\ddot{\psi}_V + (c_{\alpha,v}l_v^2 + c_{\alpha,h}l_h^2) \frac{\dot{\psi}_V}{v} + (c_{\alpha,v}l_v - c_{\alpha,h}l_h)\beta = c_{\alpha,v}l_v\delta. \quad (10.19)$$

Mit der Substitution

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\psi}_V \\ \beta \end{bmatrix} \quad (10.20)$$

ergibt sich schließlich die Zustandsnormalform

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{v} \frac{c_{\alpha,v}l_v^2 + c_{\alpha,h}l_h^2}{\theta} & -\frac{c_{\alpha,v}l_v - c_{\alpha,h}l_h}{\theta} \\ -1 - \frac{1}{v^2} \frac{c_{\alpha,v}l_v - c_{\alpha,h}l_h}{m} & -\frac{1}{v} \frac{c_{\alpha,v} + c_{\alpha,h}}{m} \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{c_{\alpha,v}l_v}{\theta} \\ \frac{1}{v} \frac{c_{\alpha,v}}{m} \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} \delta \\ u \end{bmatrix}}_u. \quad (10.21)$$

mit dem $[2 \times 1]$ -Zustandsvektor \mathbf{x} , der $[2 \times 2]$ -Systemmatrix A , der $[2 \times 1]$ -Steuermatrix B und dem $[1 \times 1]$ -Eingangsvektor u . Damit lässt sich das lineare Einspurmodell als dynamisches System mit dem entsprechenden Übertragungsverhalten auffassen, (Abb. 10.5). Die Darstellung (10.21) ist eine geeignete Basis für grundlegende fahrdynamische Untersuchungen. Dies wird im Folgenden beispielhaft gezeigt. Für ausführlichere Analysen sei z.B. auf (Willumeit 1998) verwiesen.

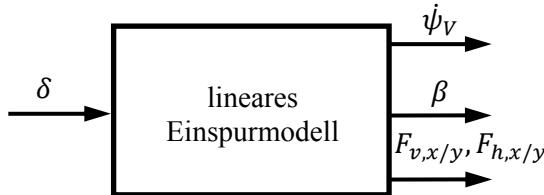


Abb. 10.5: Lineares Einspurmodell als dynamisches System

10.1.2 Stationäres Lenkverhalten und Kreisfahrt

Für die Kurvenfahrt auf einem Kreis mit dem konstanten Radius ρ sind der Lenkwinkel δ sowie die Giergeschwindigkeit $\dot{\psi}_V$ und der Schwimmwinkel β jeweils konstant, d.h. es gilt:

$$\delta = const, \dot{\delta} = 0, \quad (10.22)$$

$$\dot{\psi}_V = \text{const}, \ddot{\psi}_V = 0, \quad (10.23)$$

$$\beta = \text{const}, \dot{\beta} = 0, \quad (10.24)$$

$$\rho_K = \frac{v}{\dot{\psi}_V + \dot{\beta}} = \frac{v}{\dot{\psi}_V} = \rho. \quad (10.25)$$

Mit den zusätzlichen Bedingungen (10.22) - (10.25) ergibt sich durch Einsetzen in (10.16) und (10.17) sowie Berücksichtigung von (10.15) nach einiger Zwischenrechnung die Beziehung:

$$\alpha_v - \alpha_h = \frac{mv^2}{\rho l} \left(\frac{l_h}{c_{\alpha,v}} - \frac{l_v}{c_{\alpha,h}} \right) = \underbrace{\frac{m}{l} \left(\frac{l_h c_{\alpha,h} - l_v c_{\alpha,v}}{c_{\alpha,v} c_{\alpha,h}} \right)}_{EG} \frac{v^2}{\rho}. \quad (10.26)$$

Der als *EG* gekennzeichnete Ausdruck in Gl. (10.26) wird als *Eigenlenkgradient* bezeichnet und charakterisiert das typische Fahrverhalten eines gegebenen Kraftfahrzeugs bei Lenkbewegungen. Damit lassen sich z.B. die folgenden praktischen Aufgabenstellungen lösen:

- Welchen *Lenkradwinkel* $\delta_H = i_L \delta$ mit dem Übersetzungsverhältnis i_L muss der Fahrer einstellen, damit das Fahrzeug mit der Geschwindigkeit v auf einer Kreisbahn mit Radius ρ fährt?
- Welche Fahrrößen stellen sich stationär ein, wenn aus der Geradeausfahrt ein Lenkradwinkel δ_H aufgebracht wird?
- Was geschieht im Übergangsbereich (instationäres Lenkverhalten)?

Um die erste Frage zu beantworten, berechnet man zunächst noch den Schwimmwinkel und den Lenkwinkel für eine gegebene Kreisbahn mit dem Radius ρ . Aus dem Schräglauwinkel des Hinterrades (10.13) lässt sich durch Umformung der Schwimmwinkel des Fahrzeugs berechnen:

$$\beta = l_h \frac{\dot{\psi}_V}{v} - \alpha_h = \frac{l_h}{\rho} - \frac{m}{c_{\alpha,h}} \frac{l_v}{l} \frac{v^2}{\rho}. \quad (10.27)$$

Der für die Kreisbahn notwendige Lenkwinkel ergibt sich aus dem Schräglauwinkel des Vorderrades (10.11) zu:

$$\begin{aligned} \delta = l_v \frac{\dot{\psi}_V}{v} + \alpha_v + \beta &= \frac{l}{\rho} + \alpha_v - \alpha_h \\ &= \frac{l}{\rho} + \underbrace{\frac{m}{l} \left(\frac{l_h c_{\alpha,h} - l_v c_{\alpha,v}}{c_{\alpha,v} c_{\alpha,h}} \right)}_{EG} \frac{v^2}{\rho} = \delta_A + EG \cdot a_y. \end{aligned} \quad (10.28)$$

Der in Gl. (10.28) auftretende Summand δ_A ist der *Ackermannwinkel* (vergleiche Gl. (10.2)). Mit zunehmender Geschwindigkeit v vergrößert oder verkleinert sich der für eine gegebene Kreisbahn notwendige Lenkwinkel, je nach Vorzeichen des Eigenlenkgradienten EG , s. (Abb. 10.6). Ist der erforderliche Lenkwinkel größer als der Ackermannwinkel ($EG > 0$), so spricht man von *untersteuerndem Fahrverhalten*, im Fall ($EG < 0$) von *übersteuerndem Fahrverhalten*. Der Fall $EG = 0$ kennzeichnet ein *neutrales Fahrverhalten*.

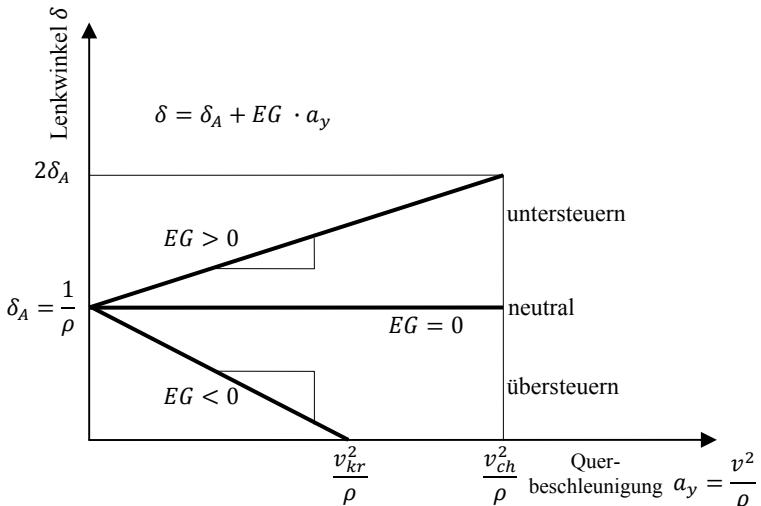


Abb. 10.6: Eigenlenkgradient im linearen Bereich

Aus (10.28) kann man noch die Beziehung

$$EG \cdot a_y = \alpha_v - \alpha_h \quad (10.29)$$

ablesen, d.h. das Eigenlenkverhalten hängt von der Differenz der Schräglauwinkel an Vorder- und Hinterrädern ab. Jetzt lassen sich auch die anderen Fahrrgrößen berechnen. Es ergeben sich die Giergeschwindigkeit

$$\dot{\psi}_V = \frac{v}{\rho} = \text{const}, \quad (10.30)$$

die Radlasten

$$F_{v,y} = m \frac{l_v}{l} \frac{v^2}{\rho} , \quad F_{h,y} = m \frac{l_h}{l} \frac{v^2}{\rho} \quad (10.31)$$

und die Schräglauwinkel

$$\alpha_v = \frac{F_{v,y}}{c_v} = \frac{m}{c_{\alpha,v}} \frac{l_v v^2}{l \rho}, \quad \alpha_h = \frac{F_{h,y}}{c_h} = \frac{m}{c_{\alpha,h}} \frac{l_h v^2}{l \rho}. \quad (10.32)$$

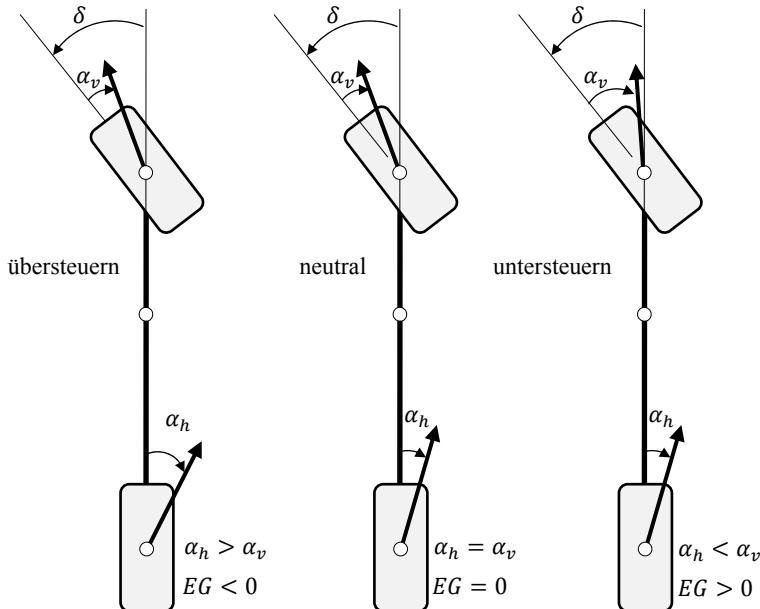


Abb. 10.7: Eigenlenkverhalten des linearen Einspurmodells

Wird nun aus der Geradeausfahrt heraus ein Lenkwinkel δ aufgebracht, so stellt sich eine Giergeschwindigkeit von

$$\dot{\psi}_{V,stat} = \frac{v}{\rho} = \frac{v}{l + EG \cdot v^2} \delta_{stat} \quad (10.33)$$

ein. Das bedeutet, dass die Giergeschwindigkeit abhängig vom Eigenlenkgradienten unterschiedliche Werte annimmt. Man bezeichnet

$$\frac{\dot{\psi}_V}{\delta} = \frac{v}{l + EG \cdot v^2} \quad (10.34)$$

als *Gierverstärkfaktor* bei der Geschwindigkeit v . Dieser Faktor ist klein für große Eigenlenkgradienten (untersteuerndes Fahrzeug) und groß für kleine (negative) Eigenlenkgradienten (übersteuerndes Fahrzeug). Für

$$EG = -\frac{l}{v^2} < 0 \quad (10.35)$$

wird der Nenner in (10.34) zu Null und der Gierverstärkungsfaktor unendlich. In der Realität bedeutet dies, dass das Fahrzeug instabil wird (genauer: den linearen Bereich verlässt), da bereits beliebig kleine Lenkeinschläge bei der linearen Betrachtungsweise zu unendlichen Giergeschwindigkeiten führen würden. Die Geschwindigkeit

$$v_{kr} = \sqrt{-\frac{l}{EG}}, \quad (10.36)$$

bei der dies eintritt (man beachte $EG < 0$), wird als *kritische Geschwindigkeit* bezeichnet. Umgekehrt lässt sich für positive Eigenlenkgradienten das Maximum der Gierverstärkung berechnen. Durch Differentiation von (10.34) nach der Geschwindigkeit v erhält man:

$$\frac{d}{dv} \left(\frac{\dot{\psi}_V}{\delta} \right) = \frac{l - EG \cdot v^2}{(l + EG \cdot v^2)^2} = 0 \Rightarrow v_{ch}^2 = \frac{l}{EG}. \quad (10.37)$$

Die Geschwindigkeit v_{ch} , bei welcher der Gierverstärkungsfaktor sein Maximum erreicht, wird als *charakteristische Geschwindigkeit* bezeichnet. Sie lässt sich interpretieren als die Fahrgeschwindigkeit, bei der das Fahrzeug am empfindlichsten auf Lenkeinschläge reagiert. Typische Werte für v_{ch} liegen zwischen 65 und 100 km/h.

10.1.3 Instationäres Lenkverhalten - Fahrstabilität

Zur Untersuchung der Fahrstabilität bei Geradeausfahrt wird in Gleichung (10.21) der Lenkwinkel gleich Null gesetzt. Damit erhält man die *lineare, homogene Zustandsgleichung*:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x} \end{bmatrix}}_A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{v} \frac{c_{\alpha,v} l_v^2 + c_{\alpha,h} l_h^2}{\theta} & -\frac{c_{\alpha,v} l_v - c_{\alpha,h} l_h}{\theta} \\ -1 - \frac{1}{v^2} \frac{c_{\alpha,v} l_v - c_{\alpha,h} l_h}{m} & -\frac{1}{v} \frac{c_{\alpha,v} + c_{\alpha,h}}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x \end{bmatrix}, \quad (10.38)$$

oder kürzer geschrieben

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x} \end{bmatrix}}_A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{v} a_{11} & -a_{12} \\ -1 - \frac{1}{v^2} a_{21} & -\frac{1}{v} a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x \end{bmatrix}, \quad (10.39)$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{c_{\alpha,v} l_v^2 + c_{\alpha,h} l_h^2}{\theta}, \quad a_{12} = \frac{c_{\alpha,v} l_v - c_{\alpha,h} l_h}{\theta}, \\ a_{21} &= \frac{c_{\alpha,v} l_v - c_{\alpha,h} l_h}{m}, \quad a_{22} = \frac{c_{\alpha,v} + c_{\alpha,h}}{m}. \end{aligned} \quad (10.40)$$

Damit ergibt sich für die charakteristische Gleichung der Systemmatrix \mathbf{A} das Polynom

$$\begin{aligned} \det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) &= \lambda^2 + \frac{1}{v}(a_{11} + a_{22})\lambda - a_{12} + \frac{1}{v^2}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ &= \lambda^2 + a_1\lambda + a_2. \end{aligned} \quad (10.41)$$

Das lineare System (10.38) ist bekanntlich stabil, wenn beide Koeffizienten des charakteristischen Polynoms positiv sind. Dies ist für a_1 ganz offensichtlich immer erfüllt. Aus der Bedingung für a_2 folgt

$$\begin{aligned} a_2 &= -a_{12} + \frac{1}{v^2}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \\ &= \frac{c_{\alpha,v}c_{\alpha,h}l^2}{m\theta v^2} \left(1 + \frac{c_{\alpha,h}l_h - c_{\alpha,v}l_v}{c_{\alpha,v}c_{\alpha,h}l^2} mv^2 \right) > 0. \end{aligned} \quad (10.42)$$

Diese Bedingung ist für beliebige Geschwindigkeiten v erfüllt, falls gilt:

$$c_{\alpha,h} l_h > c_{\alpha,v} l_v. \quad (10.43)$$

Im anderen Fall gilt eine Einschränkung für die Geschwindigkeit:

$$v^2 < \frac{1}{m} \frac{c_{\alpha,v} c_{\alpha,h} l^2}{c_{\alpha,v} l_v - c_{\alpha,h} l_h}. \quad (10.44)$$

Die rechte Seite der Ungleichung (10.44) entspricht aber gerade der früher berechneten kritischen Geschwindigkeit v_{kr} . Das bedeutet, dass übersteuernde Fahrzeuge ab einer bestimmten Geschwindigkeit instabil werden können, wohingegen dies für untersteuernde Fahrzeuge nicht möglich ist.

10.2 Nichtlineares Einspurmodell

Das im vorigen Abschnitt behandelte Einspurmodell gestattet bereits einen aussagekräftigen Einblick in das typische *Eigenverhalten* eines Kraftfahrzeugs. Allerdings beinhaltet es weder eine Beschreibung des Antriebsstrangs, noch lässt sich das Verhalten bei größeren Lenkbewegungen oder höheren Querbeschleunigungen beschreiben. Deshalb wird nachfolgend ein erweitertes Modell vorgestellt, welches auch mit Einschränkungen die Beschreibung des nichtlinearen Fahrzeugverhaltens gestattet.

10.2.1 Kinetik des nichtlinearen Einspurmodells

Das nichtlineare Einspurmodell (Abb. 10.8 und Abb. 10.9) besteht aus

- der Fahrzeugkarosserie als Starrkörper, mit den translatorischen Freiheitsgraden x_V , y_V und der Drehung ψ_V um die Hochachse ;
 - jeweils einem *fiktiven* Vorder- und Hinterrad (Indizes v und h), gekennzeichnet durch Raddrehzahl und Reifenkräfte;
 - einem vorgegebenen Lenkwinkel (Spurwinkel) δ an der Vorderachse. Dieser ergibt sich mit der *Lenkübersetzung* i_L aus dem Lenkradwinkel δ_H zu $\delta = i_L \delta_H$;
 - der Beschreibung der Radantriebsmomente $M_{A,v}$ und $M_{A,h}$ als Funktion des *Motormomentes* M_M und der aktuellen, vom gewählten Gang abhängigen, *Getriebeübersetzung* $i_G(G)$. Das Motormoment ist eine Funktion der *Motordrehzahl* ω_M und der *Fahrpedalstellung* $p_F(t)$. Das Gesamtantriebsmoment $M_A = M_{A,v} + M_{A,h}$ kann über den Verteilungsfaktor ξ_a beliebig (zeitvariabel) auf Vorder- und Hinterachse verteilt werden, was die Simulation eines vierradgetriebenen Fahrzeugs ermöglicht;
 - der Beschreibung des Luftwiderstands;
 - der Vorgabe der Bremsmomente $M_{B,v}$ und $M_{B,h}$ an den Rädern als Funktionen der Bremspedalstellung $p_B(t)$. Die Bremskraftverteilung ξ_b kann wie ξ_a ebenfalls beliebig vorgegeben werden.

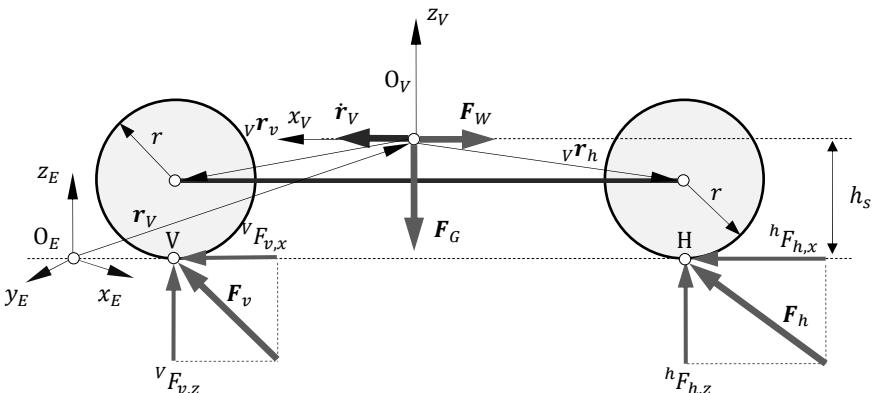


Abb. 10.8: Nichtlineares Einspurmodell - Seitenansicht

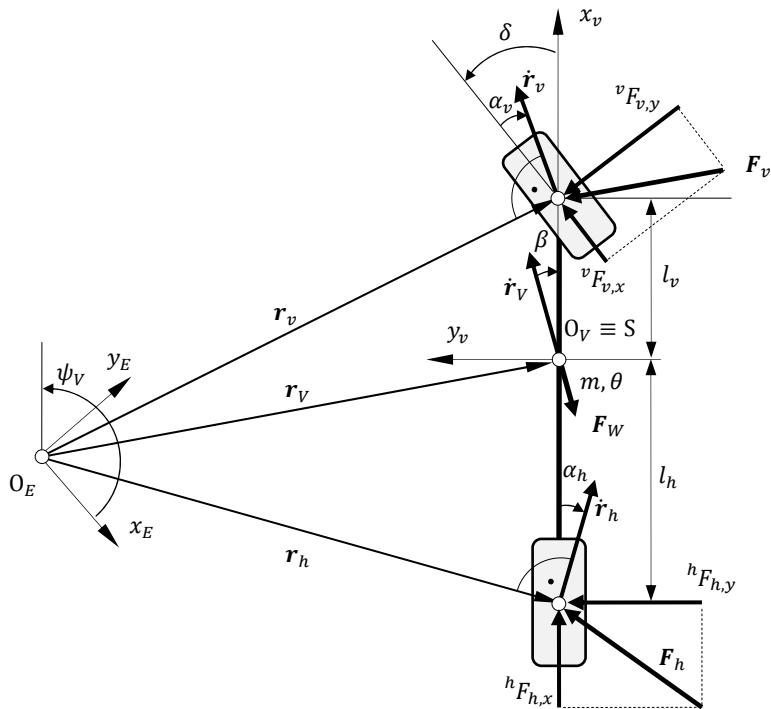


Abb. 10.9: Nichtlineares Einspurmodell - Draufsicht

Zur Erstellung der Bewegungsgleichungen setzt man zunächst den Impulsatz für den als Starrkörper angenommenen Aufbau an:

$$m\ddot{\mathbf{r}}_V = \mathbf{F}_v + \mathbf{F}_h + \mathbf{F}_W + \mathbf{F}_G. \quad (10.45)$$

Die Beschleunigung des Fahrzeugaufbaus ergibt sich durch zweimaliges zeitliches Differenzieren des Ortsvektors \mathbf{r}_V zum Massenmittelpunkt S des Fahrzeugs im Inertialsystem K_E :

$$\mathbf{r}_V = \begin{bmatrix} x_V \\ y_V \\ h_S \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{r}}_V = \begin{bmatrix} \dot{x}_V \\ \dot{y}_V \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_V = \begin{bmatrix} \ddot{x}_V \\ \ddot{y}_V \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10.46)$$

Die Kräfte auf Vorder- und Hinterrad sowie die Gewichtskraft seien in Koordinaten des *Inertialsystems* gegeben durch:

$$\mathbf{F}_v = \begin{bmatrix} F_{v,x} \\ F_{v,y} \\ F_{v,z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_h = \begin{bmatrix} F_{h,x} \\ F_{h,y} \\ F_{h,z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix}. \quad (10.47)$$

Als einzige weitere äußere Kraft tritt die Luftwiderstandskraft auf:

$$\mathbf{F}_W = \frac{1}{2} c_w \rho_L A |\dot{\mathbf{r}}_V| \dot{\mathbf{r}}_V = \begin{bmatrix} F_{W,x} \\ F_{W,y} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} c_w \rho_L A \dot{x}_V \sqrt{\dot{x}_V^2 + \dot{y}_V^2} \\ \frac{1}{2} c_w \rho_L A \dot{y}_V \sqrt{\dot{x}_V^2 + \dot{y}_V^2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (10.48)$$

mit dem Luftwiderstandsbeiwert c_w , der Luftdichte ρ_L und der Stirnfläche A des Fahrzeugs. In diesem Fall wird nur der Fahrtwind entgegen der Trajektorie des Fahrzeugschwerpunktes berücksichtigt. Sollen auch Seitenwindeinflüsse oder Vertikalkräfte berücksichtigt werden, so muss Gl. (10.48) entsprechend erweitert werden, wie in Kapitel 9 erläutert. Aus Gl. (10.45) zusammen mit den Gln. (10.46) - (10.48) ergibt sich schließlich der vollständige Impulssatz in Koordinaten des Inertialsystems zu:

$$\begin{bmatrix} m\ddot{x}_V \\ m\ddot{y}_V \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{v,x} + F_{h,x} - F_{W,x} \\ F_{v,y} + F_{h,y} - F_{W,y} \\ F_{v,z} + F_{h,z} - mg \end{bmatrix}. \quad (10.49)$$

Entsprechend erhält man den Drallsatz des Fahrzeugs bezüglich seines Massenmittelpunktes zunächst in allgemeiner Form zu:

$$\boldsymbol{\theta}_V \dot{\boldsymbol{\omega}}_V + \boldsymbol{\omega}_V \times (\boldsymbol{\theta}_V \cdot \boldsymbol{\omega}_V) = {}_V \mathbf{r}_V \times \mathbf{F}_v + {}_V \mathbf{r}_H \times \mathbf{F}_h. \quad (10.50)$$

Mit der Trägheitsmatrix im *fahrzeugfesten* Koordinatensystem

$$\boldsymbol{\Theta}_V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_{zz} \end{bmatrix}, \quad (10.51)$$

den Vektoren für die Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung

$${}^V \boldsymbol{\omega}_V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi}_V \end{bmatrix}, \quad {}^V \dot{\boldsymbol{\omega}}_V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\psi}_V \end{bmatrix} \quad (10.52)$$

und den Vektoren zu den Kraftangriffspunkten der Radkräfte

$${}^V \mathbf{r}_V = \begin{bmatrix} l_v \\ 0 \\ -h_s \end{bmatrix}, \quad {}^V \mathbf{r}_H = \begin{bmatrix} -l_h \\ 0 \\ -h_s \end{bmatrix}, \quad (10.53)$$

vereinfacht sich schließlich die Vektorgleichung (10.50) für das Gesamtfahrzeug zu der skalaren Gleichung:

$$\theta_{zz} \ddot{\psi}_V = l_v {}^V F_{v,y} - l_h {}^V F_{h,y}. \quad (10.54)$$

10.2.2 Reifenkräfte

Zur Auswertung der Gln. (10.49) und (10.54) sind noch die Reifenkräfte in den *radfesten* Koordinatensystemen erforderlich, die zunächst nur stationär und linear mit Schräglauftsteifigkeiten $c_{s,v/h}$ und $c_{\alpha,v/h}$ und den Schlupfgrößen $s_{v/h}$ und $\alpha_{v/h}$ zu

$$\begin{bmatrix} {}^v F_{v,x,stat} \\ {}^v F_{v,y,stat} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{s,v} s_v \\ c_{\alpha,v} \alpha_v \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} {}^h F_{h,x,stat} \\ {}^h F_{h,y,stat} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{s,h} s_h \\ c_{\alpha,h} \alpha_h \end{bmatrix} \quad (10.55)$$

berechnet werden. Die Kraftkomponenten in (10.55) sind später noch in das Inertialsystem bzw. das fahrzeugfeste Koordinatensystem zu transformieren. Dieser Ansatz wird in Abschnitt 10.3 wieder aufgegriffen, wobei dort berücksichtigt wird, dass die vier Koeffizienten $c_{s,v}$, $c_{s,h}$, $c_{\alpha,v}$ und $c_{\alpha,h}$ im allgemeinen nichtlinear von den Radlasten abhängen. Alternativ zu (10.55) ist auch eine, insbesondere im Bereich höherer Querbeschleunigungen, genauere Beschreibung über eine (vereinfachte) *Magic Formula* (s. Kapitel 7) möglich, die hier zunächst weiterverfolgt wird, s. z.B. (Gipser 1999), (Orend 2007).

Der Übersichtlichkeit wegen werden hier nur die Beziehungen für die Vorderachse angegeben. Die entsprechenden Beziehungen für die Hinterachse ergeben sich, indem jeweils der Index „ v “ durch „ h “ ersetzt wird. Ein vereinfachter *Magic Formula*-Ansatz für die Reifenkräfte lautet:

$$\begin{bmatrix} F_{v,x,stat} \\ F_{v,y,stat} \end{bmatrix} = F_{v,z,eff} \begin{bmatrix} \mu_{v,x} \sin \left(c_{v,x} \arctan \left(b_{v,x} \frac{s_{v,a}}{\mu_{v,x}} \right) \right) \\ \mu_{v,y} \sin \left(c_{v,y} \arctan \left(b_{v,y} \frac{s_{v,a}}{\mu_{v,y}} \right) \right) \end{bmatrix}, \quad (10.56)$$

mit der effektiven Radlast

$$F_{v,z,eff} = F_{v,z} \left(1 - e_z \left(\frac{F_{v,z}}{F_{v,z,0}} \right)^2 \right). \quad (10.57)$$

Die Gln. (10.56) und (10.57) enthalten zunächst die Reibungsbeiwerte $\mu_{v,x}$ und $\mu_{v,y}$, die Reifenparameter $c_{v,x}$, $c_{v,y}$, $c_{h,x}$, $c_{h,y}$ und $b_{v,x}$, $b_{v,y}$, $b_{h,x}$, $b_{h,y}$ sowie die variablen Radlasten ${}^v F_{v,z}$ und ${}^h F_{h,z}$. Der degressive Verlauf der Abhängigkeit der horizontalen Reifenkräfte von den Radlasten wird hier mit dem Degressionsparameter e_z berücksichtigt. Des Weiteren sind die Schlupfgrößen s_v , α_v und s_h , α_h als Eingangsgrößen enthalten, für deren Berechnung die Geschwindigkeiten der Radmittelpunkte benötigt werden. Diese ergeben sich aus den kinematischen Beziehungen im Inertialsystem:

$$\begin{aligned}
& \dot{\mathbf{r}}_v = \dot{\mathbf{r}}_V + \boldsymbol{\omega}_V \times \mathbf{T}_V(\psi_V)^V \mathbf{r}_v \\
&= \begin{bmatrix} \dot{x}_V \\ \dot{y}_V \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi}_V \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \psi_V & -\sin \psi_V & 0 \\ \sin \psi_V & \cos \psi_V & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_v \\ 0 \\ -(h_s - r) \end{bmatrix} \\
&\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_v \\ \dot{y}_v \\ \dot{z}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_V - l_v \dot{\psi}_V \sin \psi_V \\ \dot{y}_V + l_v \dot{\psi}_V \cos \psi_V \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \quad (10.58)$$

und

$$\begin{aligned}
& \dot{\mathbf{r}}_h = \dot{\mathbf{r}}_V + \boldsymbol{\omega}_V \times \mathbf{T}_V(\psi)_V^V \mathbf{r}_h \\
&= \begin{bmatrix} \dot{x}_V \\ \dot{y}_V \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi}_V \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \psi_V & -\sin \psi_V & 0 \\ \sin \psi_V & \cos \psi_V & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_h \\ 0 \\ -(h_s - r) \end{bmatrix} \\
&\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_h \\ \dot{y}_h \\ \dot{z}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_V + l_h \dot{\psi}_V \sin \psi_V \\ \dot{y}_V - l_h \dot{\psi}_V \cos \psi_V \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \quad (10.59)$$

Zur Berechnung der Schlupfwerte werden die Geschwindigkeiten allerdings in den radfesten Koordinatensystemen benötigt. Dafür ergibt sich, wenn man die Verdrehungen der Räder gegenüber dem fahrzeugfesten Koordinatensystem berücksichtigt:

$${}^v \dot{\mathbf{r}}_v = \begin{bmatrix} {}^v \dot{x}_v \\ {}^v \dot{y}_v \\ {}^v \dot{z}_v \end{bmatrix} = {}^v \mathbf{T}_E \dot{\mathbf{r}}_v = \begin{bmatrix} c(\psi_V + \delta) & s(\psi_V + \delta) & 0 \\ -s(\psi_V + \delta) & c(\psi_V + \delta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_v \\ \dot{y}_v \\ \dot{z}_v \end{bmatrix}, \quad (10.60)$$

$${}^h \dot{\mathbf{r}}_h = \begin{bmatrix} {}^h \dot{x}_h \\ {}^h \dot{y}_h \\ {}^h \dot{z}_h \end{bmatrix} = {}^h \mathbf{T}_E \dot{\mathbf{r}}_h = \begin{bmatrix} c \psi_V & s \psi_V & 0 \\ -s \psi_V & c \psi_V & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_h \\ \dot{y}_h \\ \dot{z}_h \end{bmatrix}. \quad (10.61)$$

Bemerkung: In den folgenden Gln. (10.62) bis (10.67) werden die Reifenkräfte an der Vorderachse angegeben. An der Hinterachse ist jeweils der Index „ v “ durch den Index „ h “ zu ersetzen. Mit den Komponenten der Geschwindigkeitsvektoren (10.60) und (10.61) erhält man nach Subtraktion der Rollgeschwindigkeiten $r\dot{\rho}_v$ und Normierung die Längs- und Querschlupfe vorne:

$$s_v = \frac{{}^v \dot{x}_v - r\dot{\rho}_v}{\max(|r\dot{\rho}_v|, |{}^v \dot{x}_v|)}, \quad (10.62)$$

$$\alpha_v = -\frac{v \dot{y}_v}{|r \dot{\rho}_v|}. \quad (10.63)$$

Nun wird, wie in Kapitel 7 beschrieben, der normierte Gesamtschlupf

$$s_{v,a} = \sqrt{s_v^2 + \tan^2 \alpha_v} \quad (10.64)$$

an der Vorder- und der Hinterachse berechnet. Aus Gl. (10.56) und dem Wirkrichtungswinkel

$$\psi_v = \arctan \frac{\alpha_v}{s_v} \quad (10.65)$$

der resultierenden Reifenkräfte ergeben sich aus (10.56) bis (10.65) zunächst der Betrag der Reifenkraft:

$$F_{\psi_v}(s_{v,a}) = \sqrt{\frac{s_v^2 F_{v,x,stat}^2 + \alpha_v^2 F_{v,y,stat}^2}{s_{v,a}}} \quad (10.66)$$

und daraus die Reifenkräfte im radfesten Koordinatensystem:

$$\begin{bmatrix} {}^v F_{v,x,stat} \\ {}^v F_{v,y,stat} \end{bmatrix} = F_{\psi_v}(s_{a,v}) \begin{bmatrix} \cos \psi_v \\ \sin \psi_v \end{bmatrix} = \frac{1}{s_{v,a}} F_{\psi_v}(s_{a,v}) \begin{bmatrix} s_v \\ \alpha_v \end{bmatrix}. \quad (10.67)$$

Zur Berücksichtigung der Einlaufzeit der Reifen bei einer schnellen Kurs- oder Geschwindigkeitsänderung ist gemäß Kapitel 7 ein Zusatz zu den Gleichungen (10.56) erforderlich. Hierzu werden geeignete Zeitkonstanten $T_{v,x}$ und $T_{v,y}$ gewählt, um ein PT_1 -Verhalten nachzubilden. Als Bestimmungsgleichung für die dynamischen Reifenkräfte \mathbf{F}_v und \mathbf{F}_h auf der Grundlage der schon bekannten quasistatischen Kräfte $\mathbf{F}_{v,stat}$ und $\mathbf{F}_{h,stat}$ ergeben sich die Differentialgleichungen erster Ordnung, hier exemplarisch für die Vorderachse angeschrieben:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} {}^v \dot{F}_{v,x} \\ {}^v \dot{F}_{v,y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{T_{v,x}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_{v,y}} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} {}^v F_{v,x,stat} \\ {}^v F_{v,y,stat} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^v F_{v,x} \\ {}^v F_{v,y} \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{c_{v,x} |r \dot{\rho}_v|}{c_{s,v}} & 0 \\ 0 & \frac{c_{v,y} |r \dot{\rho}_v|}{c_{\alpha,v}} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} {}^v F_{v,x,stat} \\ {}^v F_{v,y,stat} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^v F_{v,x} \\ {}^v F_{v,y} \end{bmatrix} \right). \end{aligned} \quad (10.68)$$

Dabei wurden die Zeitkonstanten für die x - und y -Richtung nach Kapitel 7 gemäß

$$\frac{1}{T_{v,x}} = \frac{c_{v,x}|r\dot{\rho}_v|}{c_{s,v}}, \quad \frac{1}{T_{v,y}} = \frac{c_{v,y}|r\dot{\rho}_v|}{c_{\alpha,v}} \quad (10.69)$$

berechnet.

Durch das Momentengleichgewicht um den Fahrzeugmassenmittelpunkt S sowie das Kräftegleichgewicht in z -Richtung des Inertialsystems ergeben sich die Radlasten und damit die Radaufstands Kräfte vorne und hinten:

$$^V F_{v,z} = \frac{l_h}{l} mg - \frac{h_s}{l} (^V F_{v,x} + ^V F_{h,x}), \quad (10.70)$$

$$^V F_{h,z} = \frac{l_v}{l} mg + \frac{h_s}{l} (^V F_{v,x} + ^V F_{h,x}). \quad (10.71)$$

Schließlich werden noch die Drallsätze für die Vorder- und Hinterräder, jeweils bezüglich der Radmittelpunkte, benötigt:

$$\theta_v \ddot{\rho}_v = M_{A,v} - \text{sign}(\dot{\rho}_v) M_{B,v} - r ^V F_{v,x}, \quad (10.72)$$

$$\theta_h \ddot{\rho}_h = M_{A,h} - \text{sign}(\dot{\rho}_h) M_{B,h} - r ^h F_{h,x}. \quad (10.73)$$

10.2.3 Antriebs- und Bremsmomente

Für das Modell wird eine beliebige Aufteilung der Antriebsmomente $M_{A,v}$ und $M_{A,h}$ zwischen Vorder- und Hinterachse modelliert. Die Eingendynamik des Antriebsstrangs wird nicht berücksichtigt. Mit einem dimensionslosen Verteilungsfaktor $0 \leq \xi_a \leq 1$ erhält man die Aufteilung:

$$M_{A,v} = (1 - \xi_a) M_A = M_A - M_{A,h}, \quad (10.74)$$

$$M_{A,h} = \xi_a M_A. \quad (10.75)$$

Damit liegt für $\xi_a = 0$ Front- und für $\xi_a = 1$ Heckantrieb vor. Für $0 < \xi_a < 1$ erhält man einen Allradantrieb mit variabler Achsaufteilung. Für die Berechnung des Antriebsmomentes M_A wird zunächst eine Näherung für die Motordrehzahl berechnet:

$$\omega_M = i_D i_G (G)((1 - \xi_a)\dot{\rho}_v + \xi_a \dot{\rho}_h), \quad 0 \leq \xi_a \leq 1. \quad (10.76)$$

Die Triebstrangparameter i_D und i_G bezeichnen dabei die Übersetzung des Zentraldifferentials bzw. des Getriebes. Damit lässt sich für die Auswer-

tung von (10.72) und (10.73) das Gesamtantriebsmoment M_A in Abhängigkeit vom Motormoment M_M angeben:

$$M_A = i_D i_G(G) M_M(\omega_M, p_F). \quad (10.77)$$

Das Motormoment wird aus dem zweidimensionalen Momentenkennfeld des Motors interpoliert, (Abb. 10.10). Neben der Motordrehzahl ω_M tritt dabei noch die dimensionslose Eingangsgröße Fahrpedalstellung $0 \leq p_F \leq 1$ auf. Die Fahrpedalstellung wird als Anregungsfunktion $p_F(t)$ interpretiert.

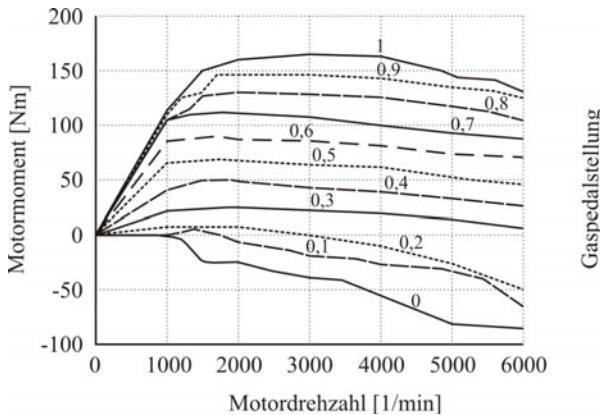


Abb. 10.10: Schematische Darstellung eines Motorkennfelds, abhängig von Drehzahl und Gaspedalstellung

Ganz entsprechend werden noch die Bremsmomente:

$$M_{B,v} = (1 - \xi_b) M_B(p_B) = M_B(p_B) - M_{B,h}, \quad (10.78)$$

$$M_{B,h} = \xi_b M_B(p_B) \quad (10.79)$$

berechnet. Hier ist $0 \leq \xi_b \leq 1$ wieder ein dimensionsloser Aufteilungsparameter und $p_B(t)$ die Bremspedalstellung in Abhängigkeit von der Zeit, s. Abb. 10.11.

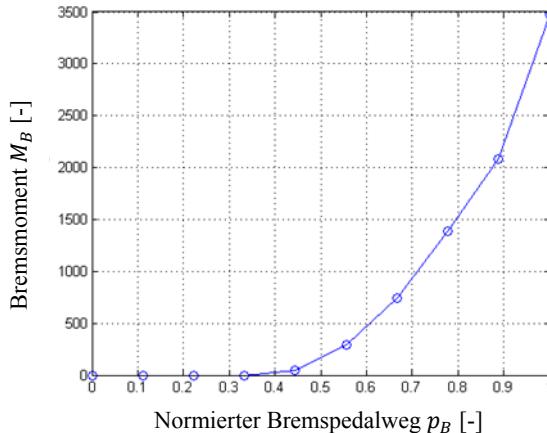


Abb. 10.11: Bremsmoment in Abhängigkeit von der Bremspedalstellung

10.2.4 Bewegungsgleichungen

Nach den Vorarbeiten in den vorangegangenen Abschnitten lassen sich nun die vollständigen Bewegungsgleichungen des nichtlinearen Einspurmodells angeben.

- Impulssatz:

$$\begin{bmatrix} m\ddot{x}_V \\ m\ddot{y}_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{v,x} + F_{h,x} - F_{W,x} \\ F_{v,y} + F_{h,y} - F_{W,y} \end{bmatrix}, \quad (10.80)$$

mit

$$F_{W,x} = \frac{1}{2} c_w \rho_L A \dot{x}_V \sqrt{\dot{x}_V^2 + \dot{y}_V^2}, \quad (10.81)$$

$$F_{W,y} = \frac{1}{2} c_w \rho_L A \dot{y}_V \sqrt{\dot{x}_V^2 + \dot{y}_V^2},$$

$$F_{v,x} = \cos(\psi_V + \delta) {}^v F_{v,x} + \sin(\psi_V + \delta) {}^v F_{v,y}, \quad (10.82)$$

$$F_{v,y} = -\sin(\psi_V + \delta) {}^v F_{v,x} + \cos(\psi_V + \delta) {}^v F_{v,y},$$

$$F_{h,x} = \cos \psi_V {}^h F_{h,x} + \sin \psi_V {}^h F_{h,y}, \quad (10.83)$$

$$F_{h,y} = -\sin \psi_V {}^h F_{h,x} + \cos \psi_V {}^h F_{h,y}.$$

- Drallsatz im fahrzeugfesten Koordinatensystem für den Aufbau:

$$\theta_{zz} \ddot{\psi}_V = l_v {}^v F_{v,y} - l_h {}^v F_{h,y}. \quad (10.84)$$

mit

$$\begin{aligned} {}^v F_{v,y} &= \sin \delta {}^v F_{v,x} + \cos \delta {}^v F_{v,y}, \\ {}^v F_{h,y} &= {}^h F_{h,y}. \end{aligned} \quad (10.85)$$

- Drallsätze für die Vorder- und Hinterachse:

$$\theta_v \ddot{\rho}_v = M_{A,v} - M_{B,v} \operatorname{sign}(\dot{\rho}_v) - r {}^v F_{v,x}, \quad (10.86)$$

$$\theta_h \ddot{\rho}_h = M_{A,h} - M_{B,h} \operatorname{sign}(\dot{\rho}_h) - r {}^h F_{h,x}. \quad (10.87)$$

- Dynamische Reifenkräfte:

$$\begin{bmatrix} {}^v \dot{F}_{v,x} \\ {}^v \dot{F}_{v,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_{v,x}|r\dot{\rho}_v|}{c_{s,v}} & 0 \\ 0 & \frac{c_{v,y}|r\dot{\rho}_v|}{c_{\alpha,v}} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} {}^v F_{v,x,stat} \\ {}^v F_{v,y,stat} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^v F_{v,x} \\ {}^v F_{v,y} \end{bmatrix} \right), \quad (10.88)$$

$$\begin{bmatrix} {}^h \dot{F}_{h,x} \\ {}^h \dot{F}_{h,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_{h,x}|r\dot{\rho}_h|}{c_{s,h}} & 0 \\ 0 & \frac{c_{h,y}|r\dot{\rho}_h|}{c_{\alpha,h}} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} {}^h F_{h,x,stat} \\ {}^h F_{h,y,stat} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^h F_{h,x} \\ {}^h F_{h,y} \end{bmatrix} \right). \quad (10.89)$$

10.2.5 Zustandsgleichungen

Man überführt nun noch die Bewegungsgleichungen in die Darstellung im Zustandsraum:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{u}), \quad (10.90)$$

mit dem Zustandsvektor

$$\boldsymbol{x} = [x_V, y_V, \psi_V, \dot{x}_V, \dot{y}_V, \dot{\psi}_V, \dot{\rho}_v, \dot{\rho}_h, {}^v F_{v,x}, {}^v F_{v,y}, {}^h F_{h,x}, {}^h F_{h,y}]^T \quad (10.91)$$

und dem Anregungsvektor

$$\boldsymbol{u} = [\delta_H, p_F, p_B, G]^T. \quad (10.92)$$

Neben den Fahr- und Bremspedalstellungen p_F und p_B treten als Anregungen noch der Lenkradwinkel δ_H und der ganzzahlige Gangwahlparameter

G auf. Damit lässt das nichtlineare Einspurmodell entsprechend Abb. 10.12 als dynamisches System darstellen.

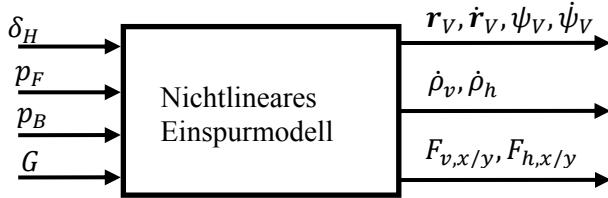


Abb. 10.12: Nichtlineares Einspurmodell als dynamisches System

Ausgeschrieben lauten die Gln. (10.90) bis (10.92):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_V \\ \dot{y}_V \\ \dot{\psi}_V \\ \ddot{x}_V \\ \ddot{y}_V \\ \ddot{\psi}_V \\ \ddot{\rho}_v \\ \ddot{\rho}_h \\ {}^v\dot{F}_{v,x} \\ {}^v\dot{F}_{v,y} \\ {}^v\dot{F}_{h,x} \\ {}^v\dot{F}_{h,y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_V \\ \dot{y}_V \\ \dot{\psi}_V \\ \frac{1}{m}(F_{v,x} + F_{h,x} - F_{w,x}) \\ \frac{1}{m}(F_{v,y} + F_{h,y} - F_{w,y}) \\ \frac{1}{\theta_{zz}}(l_v {}^vF_{v,y} - l_h {}^vF_{h,y}) \\ \frac{1}{\theta_v}(M_{A,v} - M_{B,v}\text{sign}(\dot{\rho}_v) - r {}^vF_{v,x}) \\ \frac{1}{\theta_h}(M_{A,h} - M_{B,h}\text{sign}(\dot{\rho}_h) - r {}^hF_{h,x}) \\ \frac{c_{v,x}|r\dot{\rho}_v|}{c_{s,v}}({}^vF_{v,x,stat} - {}^vF_{v,x}) \\ \frac{c_{v,y}|r\dot{\rho}_v|}{c_{\alpha,v}}({}^vF_{v,y,stat} - {}^vF_{v,y}) \\ \frac{c_{h,x}|r\dot{\rho}_h|}{c_{s,h}}({}^hF_{h,x,stat} - {}^hF_{h,x}) \\ \frac{c_{h,y}|r\dot{\rho}_h|}{c_{\alpha,h}}({}^hF_{h,y,stat} - {}^hF_{h,y}) \end{bmatrix}}_{f(x,t,u)} \quad (10.93)$$

10.3 Lineares Wankmodell

Die in diesem Kapitel bisher behandelten Einspurmodelle gestatten aufgrund ihrer Modellierung keine Beschreibung von Effekten, die aus unterschiedlichen Radlasten, z.B. bei Kurvenfahrten resultieren. Derartige Effekte sind bei den in diesem Buch in den Kapiteln 11 und 12 beschriebenen räumlichen Modellierungen natürlich enthalten. Es ist jedoch durchaus möglich, z.B. für Echtzeitanwendungen oder einfache Grundsatzuntersuchungen, entsprechende Effekte auch bei den bisher besprochenen Einspurmodellen zu berücksichtigen. Allerdings gelten dabei die folgenden Einschränkungen:

- Änderungen der Fahrwerksgeometrie infolge von Kräften werden nicht berücksichtigt. Das bedeutet, dass sämtliche Gleichgewichtsbedingungen für die Ausgangsgeometrie formuliert werden.
- Die Wankwinkel und die Lenkwinkel der Vorderräder werden als klein angenommen.
- Die Trägheitskraft ma_y senkrecht zur Bewegungsrichtung wird als äußere Kraft im Schwerpunkt des Aufbaus angenommen. Fliehkraftanteile der Räder oder von Komponenten der Radaufhängungen werden nicht berücksichtigt.
- Die Aufbaumasse m_A wird gleich der Gesamtfahrzeugmasse m gesetzt.

Dazu werden sogenannte lineare Wankmodelle für kleine Wankwinkel φ eingeführt. Bei einem linearen Wankmodell werden Vorder- und Hinterachse zu einer Achse zusammengefasst und aus der Wankachse entsteht der Wankpol W , der auf der Höhe des Achsmittelpunktes angenommen wird (s. Abb. 10.15), (Ammon 1997) und (Ötgen 2005), Abb. 10.13 bis Abb. 10.16. Als Reaktion auf das Wankmoment, welches aus der Querbeschleunigung a_y des Aufbaus resultiert, werden durch Aufbaufedern, -dämpfer und Stabilisatoren Kräfte $A_{l,v}, A_{r,v}, A_{l,h}, A_{r,h}$, erzeugt, die der Wankbewegung entgegen wirken. Die bezüglich der Wankbewegung stationären Kräfte $W_{v,y}, W_{v,z}, W_{h,y}, W_{h,z}$, des Aufbaus auf die Radachsen werden über *virtuelle Drehlager* übertragen und ergeben sich aus den quasistationären Gleichgewichtsbedingungen. Da der Schwerpunkt in der Regel nicht auf demselben Niveau wie der Wankpol liegt, ist der Wankwinkel, der sich bei Kurvenfahrt einstellt, abhängig von der Querbeschleunigung.

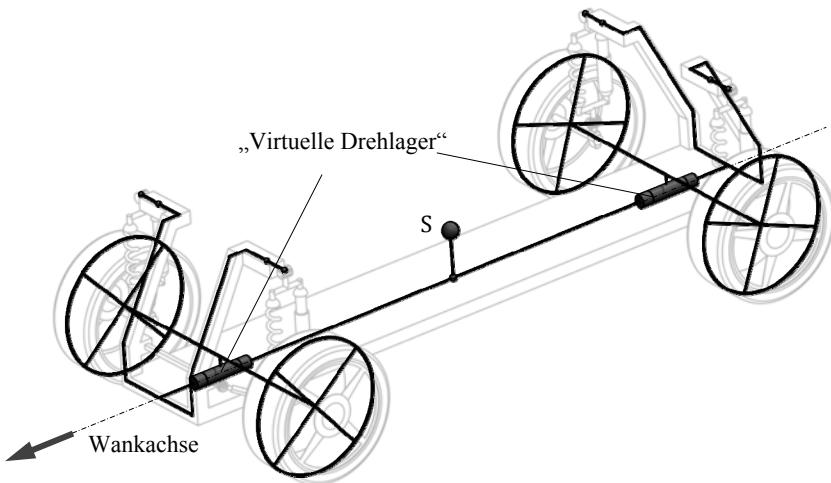


Abb. 10.13: Wankmodell – schematische Darstellung

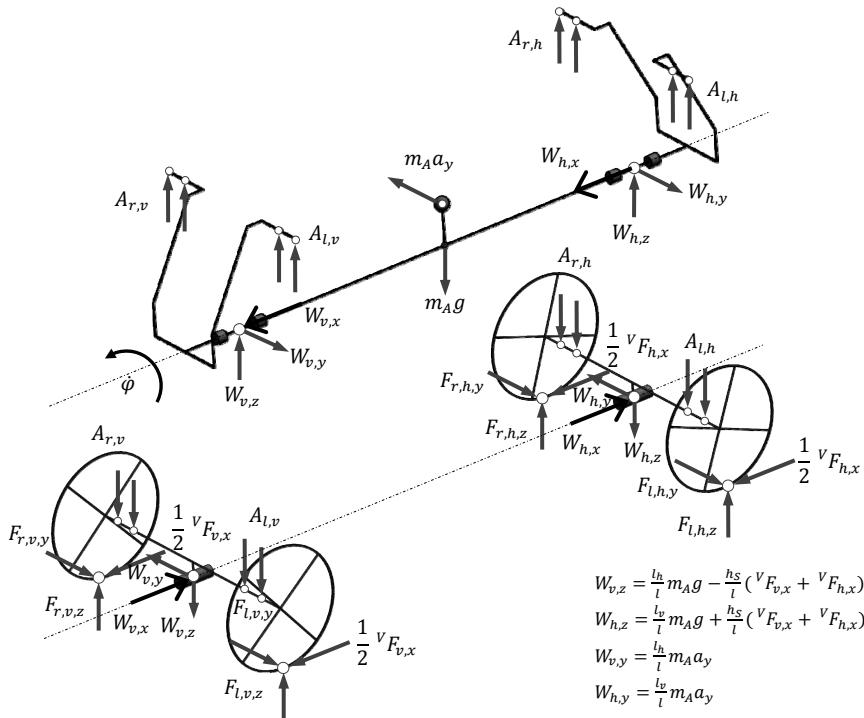


Abb. 10.14: Wankmodell – Freischnittdiagramm

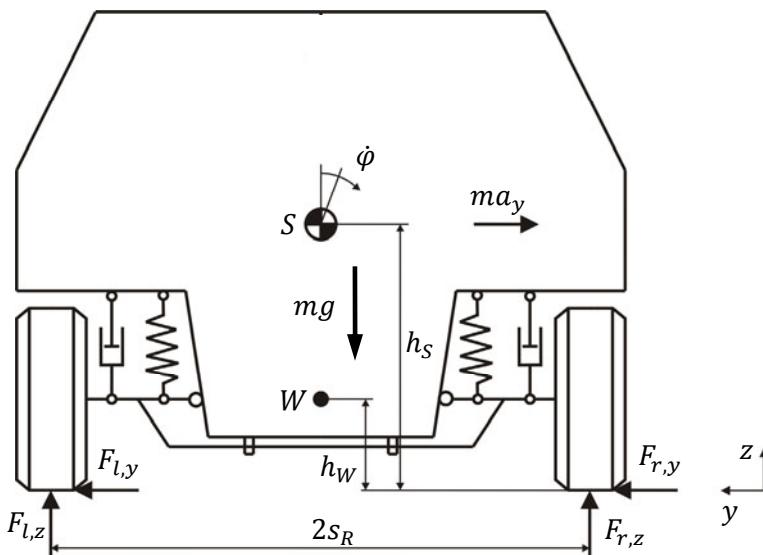


Abb. 10.15: Lineares Wankmodell – Kräfte vorne und hinten zusammengefasst

10.3.1 Bewegungsgleichung für das Wanken des Aufbaus

Das Momentengleichgewicht für das Gesamtfahrzeug um den Wankpol W führt mit den jeweiligen Summen der Radvertikal- und Querkräfte links und rechts $F_{l,z}, F_{r,z}$ und $F_{l,y}, F_{r,y}$ der Fahrzeuggesamtmasse m , dem Trägheitsmoment θ_{xx} um die Wankachse, der Schwerpunkthöhe h_S und der Radspurweite $2s_R$ zu der Beziehung:

$$0 = (h_S - h_W) \cdot ma_y + h_W(F_{l,y} + F_{r,y}) + s_R(F_{l,z} - F_{r,z}). \quad (10.94)$$

Berücksichtigt man noch das (quasistationäre) Kräftegleichgewicht in Querrichtung

$$F_{l,y} + F_{r,y} = ma_y, \quad (10.95)$$

so vereinfacht sich Gl. (10.94) zu

$$0 = h_S \cdot ma_y + s_R(F_{l,z} - F_{r,z}). \quad (10.96)$$

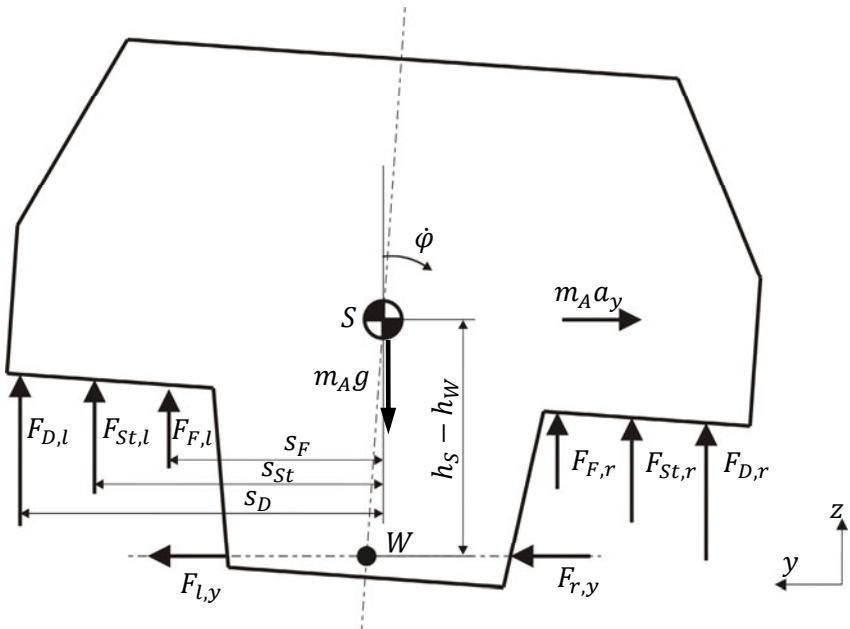


Abb. 10.16: Beschreibung der Wankdynamik des Aufbaus

Da bei der Herleitung der Gl. (10.96) das Erstarrungsprinzip angewandt wurde, lassen sich so die Radaufstandskräfte wegen der resultierenden statischen Unbestimmtheit nicht für die einzelnen Räder ermitteln. Hierzu müssen noch die durch die Radaufhängungen bewirkten Elastizitäten berücksichtigt werden. Dazu wird der Fahrzeugaufbau freigeschnitten, (Abb. 10.16). Der Drallsatz für den Aufbau bezüglich des Wankpols ergibt die Bewegungsgleichung für den Aufbau:

$$\begin{aligned} \theta_A \ddot{\varphi} &= (h_S - h_W) \cos \varphi \cdot m_A a_y \\ &+ s_{F,v}(F_{F,l,v} - F_{F,r,v}) + s_{F,h}(F_{F,l,h} - F_{F,r,h}) \\ &+ s_{D,v}(F_{D,l,v} - F_{D,r,v}) + s_{D,h}(F_{D,l,h} - F_{D,r,h}) \\ &+ s_{St,v}(F_{St,l,v} - F_{St,r,v}) + s_{St,h}(F_{St,l,h} - F_{St,r,h}). \end{aligned} \quad (10.97)$$

Dabei bedeutet h_W die Wankpolhöhe und $s_{F,(v/h)}$, $s_{D,(v/h)}$ und $s_{St,(v/h)}$ den Abstand der Feder-, Dämpfer- und Stabilisatorangriffspunkte von der Mittelebene des als symmetrisch angenommenen Fahrzeugaufbaus. Aufgrund der als klein angenommenen Wankwinkel φ kann die Verschiebung des Schwerpunktes und der Angriffspunkte der Achsquerkräfte vernachlässigt werden.

Für die resultierenden Feder- und Dämpferkräfte auf der linken und rechten Seite ergeben sich nun unter der Annahme linearer Kraftelemente für die Vorderachse die Beziehungen:

$$F_{F,l,v} = -c_{F,v} s_{F,v} \sin \varphi \approx -c_{F,v} s_{F,v} \varphi , \quad (10.98)$$

$$F_{F,r,v} = c_{F,v} s_{F,v} \sin \varphi \approx c_{F,v} s_{F,v} \varphi , \quad (10.99)$$

$$F_{D,l,v} = -d_v s_{D,v} \cos \varphi \dot{\varphi} \approx -d_v s_{D,v} \dot{\varphi} , \quad (10.100)$$

$$F_{D,r,v} = d_v s_{D,v} \cos \varphi \dot{\varphi} \approx d_v s_{D,v} \dot{\varphi} . \quad (10.101)$$

Die entsprechenden Beziehungen für die Hinterachse erhält man, indem man in den Gln. (10.98) - (10.101) jeweils den Index „v“ durch „h“ ersetzt. Die Kräfte der Stabilisatoren ergeben sich aus dem Drehmoment der Torsionsstäbe mit den Torsionssteifigkeiten $c_{St,v}$ und $c_{St,h}$, den Stabilisatorlängen $l_{St,v}$ und $l_{St,h}$ sowie den Stabilisatorhebeln $b_{St,v}$ und $b_{St,h}$ näherungsweise zu (vgl. auch Kapitel 9):

$$F_{St,l,v} = -\frac{c_{St,v}}{b_v} \arcsin\left(\frac{l_{St,v}}{2b_v} \sin \varphi\right) \approx -\frac{1}{2} \frac{c_{St,v} l_{St,v}}{b_{St,v}^2} \varphi , \quad (10.102)$$

$$F_{St,r,v} = \frac{c_{St,v}}{b_v} \arcsin\left(\frac{l_{St,v}}{2b_v} \sin \varphi\right) \approx \frac{1}{2} \frac{c_{St,v} l_{St,v}}{b_{St,v}^2} \varphi . \quad (10.103)$$

Auch hier ergeben sich wieder die Formeln für die Hinterachse, indem der Index „v“ durch „h“ ersetzt wird. Mit Hilfe der Gln. (10.98) bis (10.103) lässt sich Bewegungsgleichung (10.97) jetzt schreiben als

$$\begin{aligned} & \theta_A \ddot{\varphi} + 2(s_{D,v}^2 d_v + s_{D,h}^2 d_h) \dot{\varphi} \\ & + 2 \left(s_{F,v}^2 c_{F,v} + \frac{c_{St,v} l_{St,v} s_{St,v}}{2b_{St,v}^2} + s_{F,h}^2 c_{F,h} + \frac{c_{St,h} l_{St,h} s_{St,h}}{2b_{St,h}^2} \right) \varphi \\ & = m_A a_y (h_S - h_W) . \end{aligned} \quad (10.104)$$

Die Gl. (10.104) entspricht einer Schwingungsgleichung für den Aufbau um den als konstant angenommenen Wankpol. Als Anregung wirkt lediglich die Trägheitskraft (Zentrifugalkraft) des Aufbaus. Diese zusätzliche Gleichung kann beim linearen und mit Einschränkungen auch beim nicht-linearen Einsturzmodell verwendet werden, um die dynamischen Radvertikalkräfte aller vier Räder zu berechnen. Dies ermöglicht insbesondere Untersuchungen von Lastwechselreaktionen bei Kurvenfahrt, einschließlich der Auswirkung der Kurvenkräfte auf das Über- und Untersteuerverhalten

von Fahrzeugen. Darüber hinaus lässt sich mit derartigen Modellen auch der Einfluss von passiven und aktiven Stabilisatoren auf das Fahrverhalten von Kraftfahrzeugen untersuchen, s. Kapitel 14.

Die Trägheiten und Massen sowie alle Längenabmessungen in Gl. (10.104) liegen in der Regel für ein zu untersuchendes Fahrzeug vor. Hingegen müssen die Steifigkeiten und Dämpfungen z.B. durch Fahrversuche und anschließende Parameteridentifizierungsverfahren ermittelt werden. Dies kann entweder experimentell oder auch durch *virtuelle* Versuche mit einem komplexeren Fahrzeugmodell erfolgen, s. z.B. (Ötgen 2005).

Insgesamt ergibt sich nun das in Abb. 10.17 dargestellte dynamische Modell, wobei zu beachten ist, dass im Block Reifenmodell die Radkräfte in Horizontalrichtung zunächst für alle vier Reifen berechnet werden und anschließend achsweise addiert werden müssen.

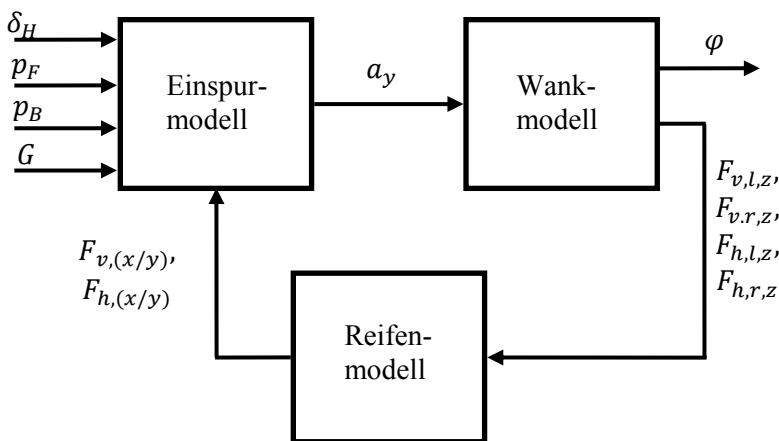


Abb. 10.17: Nichtlineares Einspurmodell mit linearer Wankdynamik als dynamisches System

10.3.2 Dynamische Radlasten

Mit Hilfe der dynamischen Radlasten können in einem Reifenmodell, welches den degressiven Einfluss der Radlast berücksichtigt, die Schräglauftsteifigkeiten der Reifen bestimmt werden, um damit die Reifenquerkräfte für ein Einspurmodell zu berechnen. Zur Berechnung der Radlasten werden zunächst die Zentrifugalkräfte entsprechend der Lage des Schwerpunktes auf die Vorder- und Hinterachse verteilt und anschließend die Gleichgewichtsbedingungen unter dem Einfluss der Trägheitskräfte und der Radaufhängung angesetzt, s. Abb. 10.14 und Abb. 10.16. Um die Be-

rechnung übersichtlicher zu gestalten, werden die Kräfte und Momente auf die Vorder- und Hinterachse zusammengefasst, wobei bei den Momenten die unterschiedlichen Angriffspunkte der Teilkräfte zu beachten sind:

$$A_{l,v} = F_{F,l,v} + F_{D,l,v} + F_{St,l,v}, \quad (10.105)$$

$$A_{r,v} = F_{F,r,v} + F_{D,r,v} + F_{St,r,v}, \quad (10.106)$$

$$A_{l,h} = F_{F,l,h} + F_{D,l,h} + F_{St,l,h}, \quad (10.107)$$

$$A_{r,h} = F_{F,r,h} + F_{D,r,h} + F_{St,r,h}, \quad (10.108)$$

$$\begin{aligned} M_{A,v} &= s_{F,v}(F_{F,l,v} - F_{F,r,v}) + s_{D,v}(F_{D,l,v} - F_{D,r,v}) \\ &\quad + s_{St,v}(F_{St,l,v} - F_{St,r,v}), \end{aligned} \quad (10.109)$$

$$\begin{aligned} M_{A,h} &= s_{F,h}(F_{F,l,h} - F_{F,r,h}) + s_{D,h}(F_{D,l,h} - F_{D,r,h}) \\ &\quad + s_{St,h}(F_{St,l,h} - F_{St,r,h}). \end{aligned} \quad (10.110)$$

Für die Gleichgewichtsbedingungen erhält man:

- Kräftegleichgewicht in vertikaler Richtung an der *Vorderachse*:

$$F_{l,v,z} + F_{r,v,z} = \frac{l_h}{l}mg - \frac{h_s}{l}({}^vF_{v,x} + {}^vF_{h,x}) + A_{l,v} + A_{r,v}. \quad (10.111)$$

- Kräftegleichgewicht in vertikaler Richtung an der *Hinterachse*:

$$F_{l,h,z} + F_{r,h,z} = \frac{l_v}{l}mg + \frac{h_s}{l}({}^vF_{v,x} + {}^vF_{h,x}) + A_{l,h} + A_{r,h}. \quad (10.112)$$

- Kräftegleichgewicht in lateraler Richtung an der *Vorderachse*:

$$F_{l,v,y} + F_{r,v,y} = \frac{l_h}{l}ma_y. \quad (10.113)$$

- Kräftegleichgewicht in lateraler Richtung an der *Hinterachse*:

$$F_{l,h,y} + F_{r,h,y} = \frac{l_v}{l}ma_y. \quad (10.114)$$

- Momentengleichgewicht um den Wankpol an der *Vorderachse*:

$$(F_{r,v,z} - F_{l,v,z})s_r + (F_{r,v,y} + F_{l,v,y})h_W = M_{A,v}. \quad (10.115)$$

- Momentengleichgewicht um den Wankpol an der *Hinterachse*:

$$(F_{r,h,z} - F_{l,h,z})s_r + (F_{r,h,y} + F_{l,h,y})h_W = M_{A,h}. \quad (10.116)$$

Die Gln. (10.111) - (10.116) lassen sich einfach nach den Radlasten auflösen und man erhält:

$$\begin{aligned} F_{l,v,z} &= -\frac{1}{2s_R}M_{A,v} + \frac{l_h}{2l}m\left(g - \frac{h_W}{s_R}a_y\right) - \frac{h_s}{2l}\left({}^vF_{v,x} + {}^vF_{h,x}\right) \\ &\quad + A_{l,v}, \end{aligned} \quad (10.117)$$

$$\begin{aligned} F_{r,v,z} &= \frac{1}{2s_R}M_{A,v} + \frac{l_h}{2l}m\left(g + \frac{h_W}{s_R}a_y\right) - \frac{h_s}{2l}\left({}^vF_{v,x} + {}^vF_{h,x}\right) \\ &\quad + A_{r,v}, \end{aligned} \quad (10.118)$$

$$\begin{aligned} F_{l,h,z} &= -\frac{1}{2s_R}M_{A,h} + \frac{l_v}{2l}m\left(g - \frac{h_W}{s_R}a_y\right) + \frac{h_s}{2l}\left({}^vF_{v,x} + {}^vF_{h,x}\right) \\ &\quad + A_{l,h}, \end{aligned} \quad (10.119)$$

$$\begin{aligned} F_{r,h,z} &= \frac{1}{2s_R}M_{A,h} + \frac{l_v}{2l}m\left(g + \frac{h_W}{s_R}a_y\right) + \frac{h_s}{2l}\left({}^vF_{v,x} + {}^vF_{h,x}\right) \\ &\quad + A_{r,h} \end{aligned} \quad (10.120)$$

und entsprechend die Summen der resultierenden Seitenkräfte an der Vorder- und Hinterachse:

$$F_{l,v,y} + F_{r,v,y} = \frac{l_h}{l}ma_y, \quad (10.121)$$

$$F_{l,h,y} + F_{r,h,y} = \frac{l_v}{l}ma_y. \quad (10.122)$$

10.3.3 Beeinflussung des Eigenlenkverhaltens

Ein Einspurmodell mit ergänzter linearer Wankdynamik lässt sich z.B. anwenden, um die Einfluss von Stabilisatoren auf die Fahrdynamik zu erklären. Hierzu wird der Einfluss der berechneten Vertikalkraftverteilung auf die Radhorizontalkräfte untersucht.

$$\begin{bmatrix} {}^vF_{v,x,stat} \\ {}^vF_{v,y,stat} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{v,x}({}^vF_{v,z})s_v \\ c_{v,y}({}^vF_{v,z})\alpha_v \end{bmatrix}. \quad (10.123)$$

Die entsprechenden Beziehungen für die Hinterachse ergeben sich aus Gl. (10.123), indem der Index „*v*“ wieder durch „*h*“ ersetzt wird.

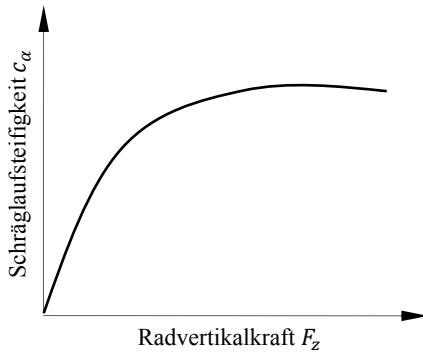


Abb. 10.18: Abhängigkeit der Schräglaufsteifigkeit von der Radvertikalkraft (qualitative Darstellung)

Für die folgenden Betrachtungen benoigt man noch eine Beschreibung des nichtlinearen Zusammenhangs zwischen den Radvertikalkrften an den Rern und den Schräglaufsteifigkeiten, s. Abb. 10.18. Dies kann z.B. mittels einer nerungsweisen Beschreibung des Zusammenhangs durch ein Polynom erfolgen, (ttgen 2005):

$$c_{(v/h),y} = \sum_{k=1}^n c_{k,(v/h)} F_{(v/h),z}^k. \quad (10.124)$$

Die (ebenfalls nichtlineare) Abhängigkeit der Langssteifigkeiten von den Radvertikalkrften soll hier nicht betrachtet werden.

Für die folgenden Betrachtungen werden zunächst die Seitenfhrungskrfte im quasistatischen Fahrzustand auf die Vorder- und die Hinterachse verteilt. Aus Gl. (10.95) und dem Momentengleichgewicht um den Massenmittelpunkt S des Fahrzeugs ergibt sich für die resultierenden Seitenfhrungskrfte an der Vorder- bzw. die Hinterachse:

$$F_{(v/h),y} = F_{(v/h),l,y} + F_{(v/h),r,y} = \frac{ma_y l_{(v/h)}}{l}. \quad (10.125)$$

Die nachfolgenden Überlegungen werden beispielhaft für die Hinterachse angestellt. Um die Kraft $F_{h,y}$ über die beiden Hinterrer aufzubringen, muss sich an der Hinterachse der, für beide Seiten gleich angenommene, Schräglaufwinkel α_h einstellen. Der sich einstellende Schräglaufwinkel hängt (vgl. Gl. (10.15)) gemäß

$$\alpha_h = \frac{F_{h,y}}{c_{\alpha,h}} \quad (10.126)$$

von der Schräglaufstifigkeit $c_{\alpha,h}$ ab, die ihrerseits (vgl. Abb. 10.4) eine degressive Funktion der Radlast ist. Die Radlast setzt sich zusammen aus der statischen Radlast und der Radlaständerung $\Delta F_{h,z}$ in der Kurve. Für das kurveninnere (Index „ i “) und das kurvenäußere (Index „ a “) Rad ergeben sich die Radlasten:

$$F_{h,z,i} = \frac{l_v}{2l} mg - \Delta F_{h,z}, \quad F_{h,z,a} = \frac{l_v}{2l} mg + \Delta F_{h,z}. \quad (10.127)$$

Daraus resultieren Seitenführungskräfte:

$$F_{h,y,i} = c_{\alpha,h}(F_{h,z,i})\alpha_h, \quad F_{h,y,a} = c_{\alpha,h}(F_{h,z,a})\alpha_h. \quad (10.128)$$

Aufgrund des degressiven Verlaufs der Schräglaufstifigkeiten als Funktion der Radlast ist der Verlust des kurveninneren Rades an Seitenführungskraft größer als der Gewinn des kurvenäußeren Rades, d.h. es gilt:

$$F_{h,y,i} + F_{h,y,a} < F_{h,y}. \quad (10.129)$$

Als Konsequenz muss sich ein neuer Schräglaufwinkel $\bar{\alpha}_h > \alpha_h$ einstellen, so dass wieder gilt:

$$F_{h,y,i} + F_{h,y,a} = \left(c_{\alpha,h}(F_{h,z,i}) + c_{\alpha,h}(F_{h,z,a}) \right) \bar{\alpha}_h = F_{h,y}. \quad (10.130)$$

Dieser physikalische Effekt bietet eine Möglichkeit, die Eigendynamik eines Fahrzeugs über eine Änderung der Radlastverteilung an der Vorder- und der Hinterachse zu beeinflussen. Hierzu können die Kraftanteile der Stabilisatoren in den Gln. (10.117) bis (10.120) genutzt werden, indem die Stabilisatorsteifigkeiten entweder passiv entsprechend vorgegeben oder sogar aktiv während des Betriebs verändert werden. Eine Veränderung der Eigenfahrdynamik eines Fahrzeugs kann demnach gemäß Gl. (10.29) z.B. dadurch erfolgen, dass die Stabilisatorsteifigkeit an der Vorderachse erhöht oder umgekehrt die Stabilisatorsteifigkeit an der Hinterachse verringert wird. Alternativ könnte z.B. natürlich auch die Aufbaufedersteifigkeit der Vorderachse erhöht oder die Spurweite der Vorderachse verkleinert werden. Ein aktiver Eingriff in das Fahrverhalten durch einen aktiven Stabilisator wird in Kapitel 14 erläutert.

11 Zweispurmodelle

In diesem Kapitel wird anhand überschaubarer Modelle gezeigt, wie auf der Basis der klassischen technischen Mechanik bereits brauchbare realitätsnahe Modellierungen erstellt werden können. Der Leser soll dadurch bei der Generierung eigener einfacherer Modelle unterstützt werden. Die in diesem Kapitel vorgestellten Zweispurmodelle ersetzen jedoch nicht die in Kapitel 12 behandelten komplexen Gesamtfahrzeugmodelle.

11.1 Zweispurmodell ohne Radaufhängungskinematik

In diesem Abschnitt werden die Bewegungsgleichungen für ein einfaches räumliches Zweispurmodell ohne Achskinematik erstellt. Grundlage ist das in Abb. 11.1 dargestellte Ersatzmodell.

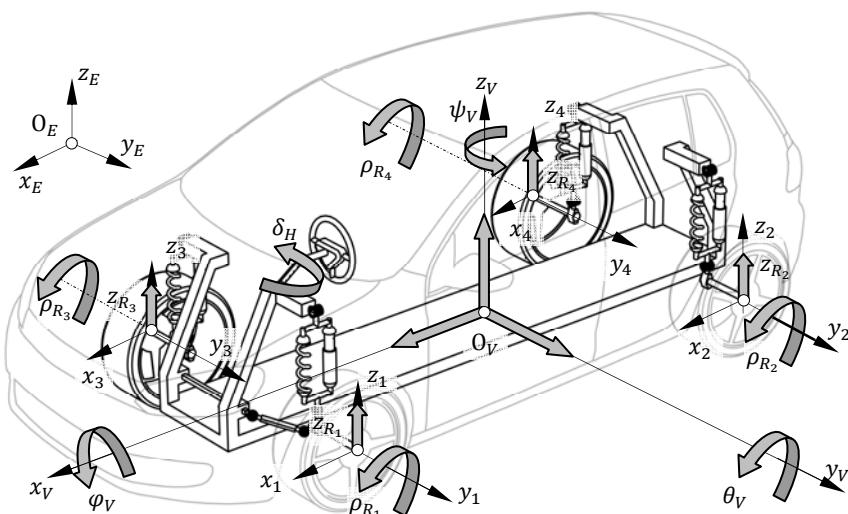


Abb. 11.1: Freiheitsgrade des räumlichen Zweispurmodells ohne Achskinematik

Dieses Fahrzeugmodell ist dadurch gekennzeichnet, dass keinerlei kinematische Radaufhängung modelliert wird, d.h. die Räder sind lediglich über Feder- und Dämpferkräfte, also eingeprägte Kräfte, mit dem Fahrzeugaufbau verbunden. Weiterhin wird angenommen, dass die Radmittelpunkte sich relativ zum Aufbau nur senkrecht zur Straße bewegen können. Dies bedeutet, dass sich mit diesem Modell weder der Einfluss von Sturzänderungen noch der von anderen räumlichen Bewegungen der Räder untersuchen lässt. Für erste prinzipielle Untersuchungen oder auch für ein einfaches Fahrsimulatormodell ist die Modellierung jedoch durchaus ausreichend. Im Einzelnen berücksichtigt das Modell die in Tabelle 11.1 beschriebenen Freiheitsgrade des Fahrzeugs. Ein allgemeineres Fahrzeugmodell, das in einem gewissen Rahmen an komplexe Radaufhängungen angepasst werden kann, wird in Abschnitt 11.2 behandelt.

Tabelle 11.1: Freiheitsgrade des einfachen räumlichen Fahrzeugmodells

Bezeichnung	Beschreibung
x_V, y_V, z_V	Koordinaten des Massenmittelpunktes des Fahrzeugaufbaus im Inertialsystem
$\psi_V, \theta_V, \varphi_V$	Kardanwinkel des Fahrzeugaufbaus
$\rho_{R_i}, i = 1, \dots, 4$	Rotation des i-ten Rades um seine Drehachse
$z_{R_i}, i = 1, \dots, 4$	Vertikalbewegung des i-ten Rades im fahrzeugfesten Koordinatensystem

Das Fahrzeugmodell besitzt damit $f = 14$ Freiheitsgrade. Zur Beschreibung der räumlichen Bewegung des Fahrzeugaufbaus definiert man ein ortsfestes Koordinatensystem (Inertialsystem)

$$K_E = \{O_E; x_E, y_E, z_E\} \quad (11.1)$$

sowie ein fahrzeugfestes Koordinatensystem

$$K_V = \{O_V; x_V, y_V, z_V\}. \quad (11.2)$$

Für die Beschreibung der Bewegung des Fahrzeugaufbaus relativ zum Inertialsystem werden die Drehungen um die drei Kardanwinkel $\theta_V, \psi_V, \varphi_V$ gewählt. Die mathematische Beschreibung erfolgt durch die Transformationsmatrix (Drehmatrix) ${}^E T_V$, welche die Drehung vom fahrzeugfesten Koordinatensystem in das Inertialsystem beschreibt:

$$\begin{aligned} {}^E T_V &= T_z(\psi_V) \cdot T_y(\theta_V) \cdot T_x(\varphi_V) = \\ &\begin{bmatrix} c \theta_V c \psi_V & s \varphi_V s \theta_V c \psi_V - c \varphi_V s \psi_V & c \varphi_V s \theta_V c \psi_V + s \varphi_V s \psi_V \\ c \theta_V s \psi_V & s \varphi_V s \theta_V s \psi_V + c \varphi_V c \psi_V & c \varphi_V s \theta_V s \psi_V - s \varphi_V c \psi_V \\ -s \theta_V & s \varphi_V c \theta_V & c \varphi_V c \theta_V \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11.3)$$

Für die Winkelgeschwindigkeit des Fahrzeugaufbaus relativ zum Inertialsystem und dargestellt in Koordinaten des fahrzeugfesten Koordinatensystems ergibt sich (kinematische Kardangleichungen, s. Abschnitt 2.5.5):

$${}^V_E \boldsymbol{\omega}_V = \begin{bmatrix} \omega_{V,x} \\ \omega_{V,y} \\ \omega_{V,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_V - \dot{\psi}_V \sin \theta_V \\ \dot{\theta}_V \cos \varphi_V + \dot{\psi}_V \cos \theta_V \sin \varphi_V \\ -\dot{\theta}_V \sin \varphi_V + \dot{\psi}_V \cos \theta_V \cos \varphi_V \end{bmatrix} = \mathbf{T}_\omega \begin{bmatrix} \dot{\psi}_V \\ \dot{\theta}_V \\ \dot{\phi}_V \end{bmatrix}, \quad (11.4)$$

mit der $[3 \times 3]$ -Matrix

$$\mathbf{T}_\omega = \begin{bmatrix} -\sin \theta_V & 0 & 1 \\ \cos \theta_V \sin \varphi_V & \cos \varphi_V & 0 \\ \cos \theta_V \cos \varphi_V & -\sin \varphi_V & 0 \end{bmatrix}. \quad (11.5)$$

Entsprechend beschreibt man die räumliche Bewegung der einzelnen Räder, ohne deren Eigendrehung um die Radachse, mit den Drehmatrizen ${}^E \mathbf{T}_{R_i}, i = 1, \dots, 4$ relativ zum ortsfesten Koordinatensystem K_E . Für die (gelenkten) Vorderräder ergibt sich:

$${}^E \mathbf{T}_{R_1} = {}^E \mathbf{T}_{R_3} = \mathbf{T}_z(\psi_V + \delta) = \begin{bmatrix} c(\psi_V + \delta) & -s(\psi_V + \delta) & 0 \\ s(\psi_V + \delta) & c(\psi_V + \delta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (11.6)$$

Hier wird vereinfachend angenommen, dass der Lenkeinschlag beider Räder stets gleich ist und linear vom als Zeitfunktion vorgegebenen Lenkradwinkel δ_H abhängt:

$$\delta_1 = \delta_3 = \delta = i_L \cdot \delta_H(t). \quad (11.7)$$

Für die Hinterräder (keine Lenkung, d.h. $\delta_2 = \delta_4 = 0$) gilt entsprechend:

$${}^E \mathbf{T}_{R_2} = {}^E \mathbf{T}_{R_4} = \mathbf{T}_z(\psi_V) = \begin{bmatrix} c \psi_V & -s \psi_V & 0 \\ s \psi_V & c \psi_V & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (11.8)$$

Weiterhin wird noch die Verdrehung der radfesten Koordinatensysteme K_{R_i} relativ zum fahrzeugfesten Koordinatensystem K_V benötigt. Für die Vorderachse ergibt sich:

$$\begin{aligned} {}^V \mathbf{T}_{R_1} &= {}^V \mathbf{T}_{R_3} = \mathbf{T}_x^T(\varphi_V) \cdot \mathbf{T}_y^T(\theta_V) \cdot \mathbf{T}_z(\delta) \\ &= \begin{bmatrix} c \delta \cos \theta_V & -s \delta \cos \theta_V & -s \theta_V \\ s \varphi_V \sin \theta_V \cos \delta + c \varphi_V \sin \delta & -s \varphi_V \sin \theta_V \cos \delta + c \varphi_V \sin \delta & s \varphi_V \cos \theta_V \\ c \varphi_V \sin \theta_V \cos \delta - s \varphi_V \sin \delta & -c \varphi_V \sin \theta_V \cos \delta - s \varphi_V \sin \delta & c \varphi_V \cos \theta_V \end{bmatrix} \quad (11.9) \end{aligned}$$

und für die nicht gelenkte Hinterachse

$$\begin{aligned} {}^V \mathbf{T}_{R_2} &= {}^V \mathbf{T}_{R_4} = \mathbf{T}_x^T(\varphi_V) \cdot \mathbf{T}_y^T(\theta_V) \\ &= \begin{bmatrix} c \theta_V & 0 & -s \theta_V \\ s \varphi_V s \theta_V & c \varphi_V & s \varphi_V c \theta_V \\ c \varphi_V s \theta_V & -s \varphi_V & c \varphi_V c \theta_V \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (11.10)$$

11.1.1 Impuls- und Drallsätze

Der Impulssatz für den Fahrzeugaufbau lautet:

$$m_V \ddot{\mathbf{r}}_V = \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_i + \mathbf{G} + \mathbf{F}_W = \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_i - m_V g \mathbf{e}_z + \mathbf{F}_W. \quad (11.11)$$

Dabei erfasst \mathbf{F}_i den Vektor der zwischen den Radaufhängungen und dem Fahrzeugaufbau übertragenen Kräfte. Das sind einerseits die horizontalen Reaktionskräfte und andererseits die eingeprägten Kräfte der Aufbaufedern und -dämpfer in den Anlenkpunkten A_i , s. Abb. 11.2. Der Vektor \mathbf{e}_z bezeichnet den Einheitsvektor in positiver Richtung der z -Achse des umweltfesten Koordinatensystems, wobei angenommen wird, dass die Wirkrichtung der Gravitationskraft entgegen \mathbf{e}_z gerichtet ist. Der Vektor \mathbf{F}_W fasst sämtliche Luftwiderstands- und Windkräfte zusammen.

In Komponenten geschrieben, ergibt sich, dargestellt im fahrzeugfesten Koordinatensystem:

$$m_V \ddot{v}_x = \sum_{i=1}^4 F_{i_x} + m_V g (\mathbf{e}_z)_x + F_{W_x}, \quad (11.12)$$

$$m_V \ddot{v}_y = \sum_{i=1}^4 F_{i_y} + m_V g (\mathbf{e}_z)_y + F_{W_y}, \quad (11.13)$$

$$m_V \ddot{v}_z = \sum_{i=1}^4 F_{i_z} + m_V g (\mathbf{e}_z)_z + F_{W_z}. \quad (11.14)$$

Dabei bedeuten $(\mathbf{e}_z)_{x/y/z}$ die Koordinaten des Einheitsvektors transformiert in das fahrzeugfeste Koordinatensystem. Die Kräfte auf den Fahrzeugaufbau an den Anlenkpunkten A_i der vier Einzelradaufhängungen ergeben sich jeweils zu:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{F_i} + \mathbf{F}_{D_i} + \mathbf{F}_{H_i}. \quad (11.15)$$

Die Wirkung des Stabilisators wird später als eingeprägtes Drehmoment berücksichtigt. Die Bedeutung der einzelnen Kraftkomponenten kann Tabelle 11.2 entnommen werden.

Tabelle 11.2: Kräfte zwischen Rädern und Aufbau

Kraft	Bedeutung für Rad „i“
\mathbf{F}_{H_i}	Horizontalkräfte auf den Aufbau (Reaktionskräfte in der x -, y -Ebene)
\mathbf{F}_{F_i}	Kräfte der Aufbaufedern
\mathbf{F}_{D_i}	Kräfte der Aufbaudämpfer

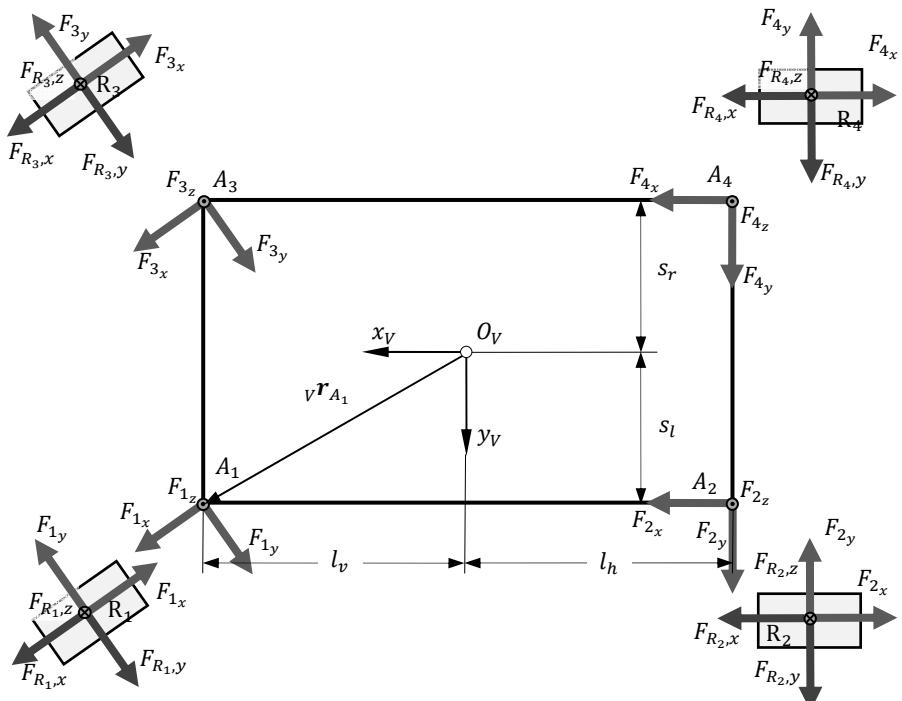


Abb. 11.2: Freigeschnittenes räumliches Zweispurmodell – Draufsicht

Der Drallsatz des Fahrzeugaufbaus bezüglich seines Massenmittelpunktes lautet im aufbaufesten (fahrzeugfesten) Koordinatensystem:

$$\Theta_V \dot{\omega}_V + \omega_V \times (\Theta_V \omega_V) = \sum_{i=1}^4 v \cdot r_{A_i} \times \mathbf{F}_i + \mathbf{r}_W \times \mathbf{F}_W + \mathbf{T}_{St,v} + \mathbf{T}_{St,h}, \quad (11.16)$$

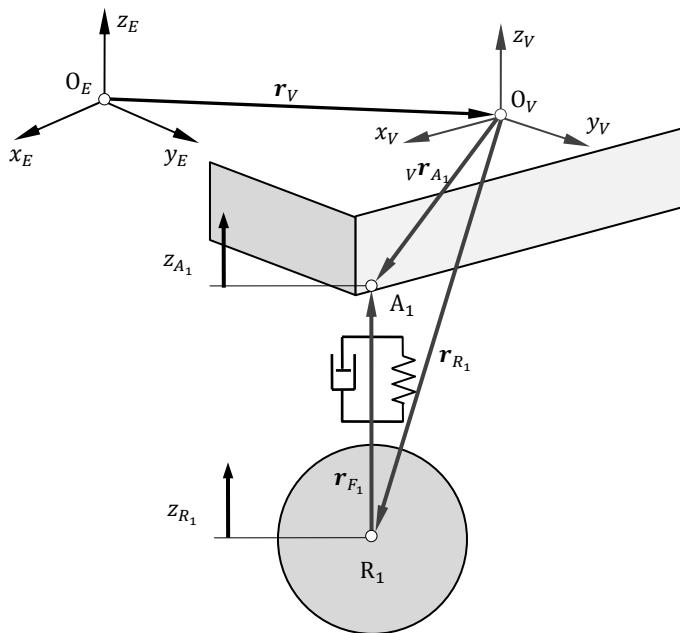


Abb. 11.3: Ortsvektoren der Radaufhängung

wobei

$$\boldsymbol{\theta}_V = \begin{bmatrix} \theta_{V,xx} & 0 & 0 \\ 0 & \theta_{V,yy} & 0 \\ 0 & 0 & \theta_{V,zz} \end{bmatrix} = \text{const} \quad (11.17)$$

die Trägheitsmatrix des Aufbaus bezüglich des aufbaufesten Koordinaten- systems bezeichnet. Der Einfachheit halber wurden dabei die Deviationsmomente vernachlässigt. Die übrigen Größen von Gl. (11.16) werden in Tabelle 11.3 und Abb. 11.4 erläutert.

Tabelle 11.3: Physikalische Größen des Drallsatzes

Formelzeichen	Bedeutung
ω_V	Absolute Winkelgeschwindigkeit des Aufbaus
$v \mathbf{r}_{A_i}$	Ortsvektor vom Aufbaumassenmittelpunkt O_V zum Anlenkpunkt A_i
$T_{St,v}, T_{St,h}$	Drehmoment durch Stabilisatoren vorne (v) und hinten (h)
\mathbf{F}_i	Kräfte von den Rädern auf den Aufbau
\mathbf{r}_W	Ortsvektor vom Aufbaumassenmittelpunkt zum Angriffspunkt der resultierenden Luftkräfte

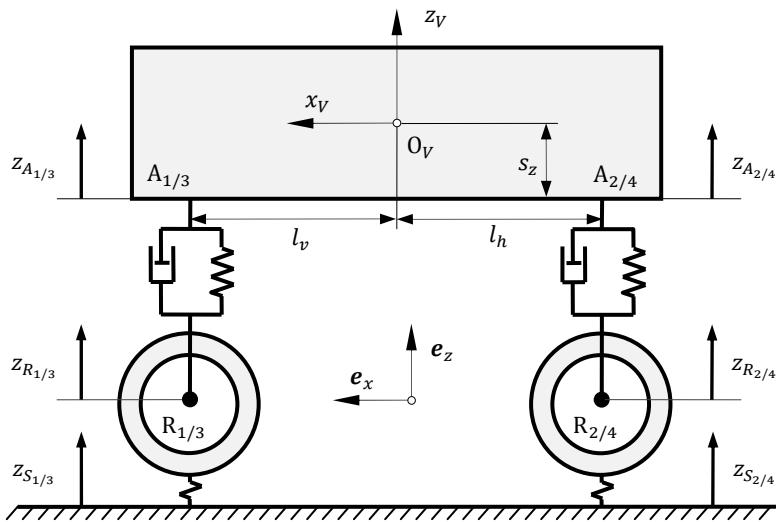


Abb. 11.4: Räumliches Zweispurmodell – Seitenansicht

11.1.2 Feder- und Dämpferkräfte

Zur Aufstellung der vollständigen Bewegungsgleichungen des Systems verbleibt nun noch die Berechnung der eingeprägten Kräfte, siehe auch Kapitel 9.

Feder- und Dämpferkräfte

Für die Federkräfte zwischen den Rädern und dem Aufbau gelten gemäß Kapitel 9 die Beziehungen:

$$\mathbf{F}_{F_i} = \underbrace{f_i(l_{F_i})}_{\substack{\text{Kraft-} \\ \text{gesetz}}} \frac{\mathbf{l}_{F_i}}{\underbrace{l_{F_i}}_{\substack{\text{Kraft-} \\ \text{richtung}}}} = f_i(l_{F_i}) \mathbf{u}_{F_i}, \quad (11.18)$$

mit dem Federkraftgesetz $f_i(l_{F_i})$. Weiterhin ist

$${}^V \mathbf{l}_{F_i} = {}^V \mathbf{r}_{A_i} - {}^V \mathbf{r}_{R_i} = {}^V \mathbf{T}_E \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (z_{A_i} - z_{R_i} + l_{stat}), \quad (11.19)$$

mit der aktuellen Federlänge $l_{F_i} = |\mathbf{l}_{F_i}|$ und der Federlänge l_{stat} im Ruhezustand. Für die spätere Berechnung der resultierenden Dreh-

momente werden noch die Ortsvektoren der Kraftangriffspunkte der Feder- und Dämpferkräfte am Aufbau benötigt:

$${}^V \mathbf{r}_{A_1} = \begin{bmatrix} l_v \\ s_l \\ -s_z \end{bmatrix}, \quad {}^V \mathbf{r}_{A_2} = \begin{bmatrix} -l_h \\ s_l \\ -s_z \end{bmatrix}, \quad {}^V \mathbf{r}_{A_3} = \begin{bmatrix} l_v \\ -s_r \\ -s_z \end{bmatrix}, \quad {}^V \mathbf{r}_{A_4} = \begin{bmatrix} -l_h \\ -s_r \\ -s_z \end{bmatrix}. \quad (11.20)$$

Damit erhält man bei Annahme einer linearen Federkennlinie z.B. für die Federkraft vorne links:

$$\begin{aligned} {}^V \mathbf{F}_{F_1} = & - \left(c_{a_1} \underbrace{(z_{A_1} - z_{R_1})}_{\Delta l_{F_1}} + \underbrace{c_{a_1}(l_{stat} - l_0)}_{\frac{l_h}{l_v + l_h} \frac{s_r}{s_l + s_r} mg} \right) {}^V \mathbf{T}_E \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ & -(c_{a_1} \Delta l_{F_1} + F_{Fstat_1}) {}^V \mathbf{T}_E \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (11.21)$$

mit der ungespannten Federlänge l_0 . Entsprechend berechnet sich die Dämpferkraft zu:

$${}^V \mathbf{F}_{D_1} = -d_{a_1} \Delta l_{F_1} {}^V \mathbf{T}_E \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (11.22)$$

mit

$$\Delta l_{F1} = \dot{z}_{A_1} - \dot{z}_{R_1}. \quad (11.23)$$

Stabilisatorkräfte

Der Stabilisator soll hier als lineares Kraftelement an den Achsen modelliert werden, s. Kapitel 9. Mit der Drehfederkonstante $c_{St,h}$ ergibt sich daher z.B. für das Drehmoment auf den Aufbau an der Hinterachse:

$$M_{St,h} = (s_l + s_r) F_{St,h} = c_{St,h} \left((z_{A_2} - z_{R_2}) - (z_{A_4} - z_{R_4}) \right). \quad (11.24)$$

11.1.3 Impuls- und Drallsätze der Räder

Die Impulssätze für die Räder, angeschrieben in vertikaler Richtung des umweltfesten Koordinatensystems, lauten:

$$m_{R_i} \ddot{z}_{R_i} = F_{R_i,z} - F_{i,z} - m_R g. \quad i = 1, \dots, 4 \quad (11.25)$$

Entsprechend erhält man die Drallsätze für die Räder:

$$\theta_{R_i} \dot{\rho}_{R_i} = M_{A,R_i} - M_{B,R_i} - r_{R_i} F_{R_i,x}. \quad i = 1, \dots, 4 \quad (11.26)$$

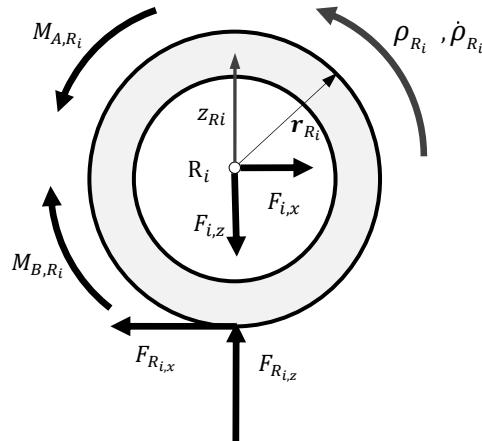


Abb. 11.5: Kräfte und Momente an den Rädern

11.1.4 Rad-Strasse-Kontakt

Zur Berechnung der Reifenkräfte \mathbf{F}_{R_i} werden die Koordinaten der Straßenkontaktpunkte sowie die Absolutgeschwindigkeiten der Radmittelpunkte benötigt:

$${}^V \mathbf{r}_{R_i} = {}^V \mathbf{r}_{A_i} + {}^V \mathbf{T}_E \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(z_{A_i} - z_{R_i} + l_{stat_i}) \end{bmatrix}, i = 1, \dots, 4, \quad (11.27)$$

$${}^V \mathbf{v}_{R_i} = \begin{bmatrix} {}^V \dot{x}_{R_i} \\ {}^V \dot{y}_{R_i} \\ {}^V \dot{z}_{R_i} \end{bmatrix} = {}^V \mathbf{v}_V + {}^V \boldsymbol{\omega}_V \times {}^V \mathbf{r}_{R_i} + {}^V \mathbf{T}_E \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\dot{z}_{A_i} - \dot{z}_{R_i}) \end{bmatrix}, i = 1, \dots, 4. \quad (11.28)$$

Die Berechnung des Umfangsschlupfes erfordert allerdings die Kenntnis der Geschwindigkeit des Rades im radfesten Koordinatensystem:

$${}^{R_i} \mathbf{v}_{R_i} = {}^{R_i} \mathbf{T}_V {}^V \mathbf{v}_{R_i}. \quad (11.29)$$

Gemäß Kapitel 7 ergibt sich daraus der Radumfangsschlupf (Längsschlupf):

$$s_i = \frac{^R_i \dot{x}_{R_i} - r \dot{\rho}_{R_i}}{\max(|r \dot{\rho}_{R_i}|, |^R_i \dot{x}_{R_i}|)} \quad (11.30)$$

sowie der Schräglauwinkel

$$\alpha_i = -\arctan\left(\frac{^R_i \dot{y}_{R_i}}{\max(|r \dot{\rho}_{R_i}|, |^R_i \dot{y}_{R_i}|)}\right). \quad (11.31)$$

Zum Abschluss müssen noch die Radkräfte

$${}^V \mathbf{F}_{R_i} = {}^V \mathbf{T}_{R_i} \begin{bmatrix} F_{R_i,x} \\ F_{R_i,y} \\ F_{R_i,z} \end{bmatrix} \quad (11.32)$$

auf das Rad $R_i, i = 1, \dots, 4$ berechnet werden. Zur Auswertung von Gl. (11.32) sind die Kraftkomponenten $F_{R_i,x}$ und $F_{R_i,y}$ aus dem entsprechenden Reifenkraftmodell zu berechnen und dann in das fahrzeugfeste Koordinatensystem zu transformieren. Die Komponente $F_{R_i,z}$ ergibt sich dagegen aus der Reifenfederkraft zu

$$\begin{aligned} F_{R_1,z} &= \max(c_R(z_{R,1} - z_{S,1} + l_{R,stat}) + F_{St,v}, 0), \\ F_{R_2,z} &= \max(c_R(z_{R,2} - z_{S,2} + l_{R,stat}) + F_{St,h}, 0), \\ F_{R_3,z} &= \max(c_R(z_{R,3} - z_{S,3} + l_{R,stat}) - F_{St,v}, 0), \\ F_{R_4,z} &= \max(c_R(z_{R,4} - z_{S,4} + l_{R,stat}) - F_{St,h}, 0). \end{aligned} \quad (11.33)$$

Für die stationären Reifenkräfte, dargestellt im radfesten Koordinatensystem, wird mit

$$\begin{bmatrix} F_{R_i,x,stat} \\ F_{R_i,y,stat} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{x_i} \sin\left(c_x \arctan\left(b_x \frac{s_i}{\mu_x}\right)\right) \\ \mu_{y_i} \sin\left(c_y \arctan\left(b_y \frac{\alpha_i}{\mu_y}\right)\right) \end{bmatrix} F_{R_i,z,eff}, \quad (11.34)$$

mit

$$F_{R_i,z,eff} = F_{R_i,z} \left(1 - e_z \left(\frac{F_{R_i,z}}{F_{R_i,z,0}}\right)^2\right) \quad (11.35)$$

eine vereinfachte Version der Magic Formula (s. Kapitel 7) verwendet. Hier sind die Eingangsgrößen wieder die Schlupfgrößen (11.30) und (11.31) sowie die Radlasten $F_{R_i,z}$ und die Reibungsbeiwerte μ_{x_i/y_i} . Die Anpassung der Kraftverläufe an einen bestimmten Reifen erfolgt über die konstanten Parameter $c_{x/y}, b_{x/y}$ für die Quer- und Längsstefigkeit sowie

c_z für die Vertikalsteifigkeit des Reifens. Weiterhin wird noch der ebenfalls konstante Parameter e_z zur näherungsweisen Abbildung der degressiven Abhängigkeit der Reifenkräfte von der Radlast benötigt.¹

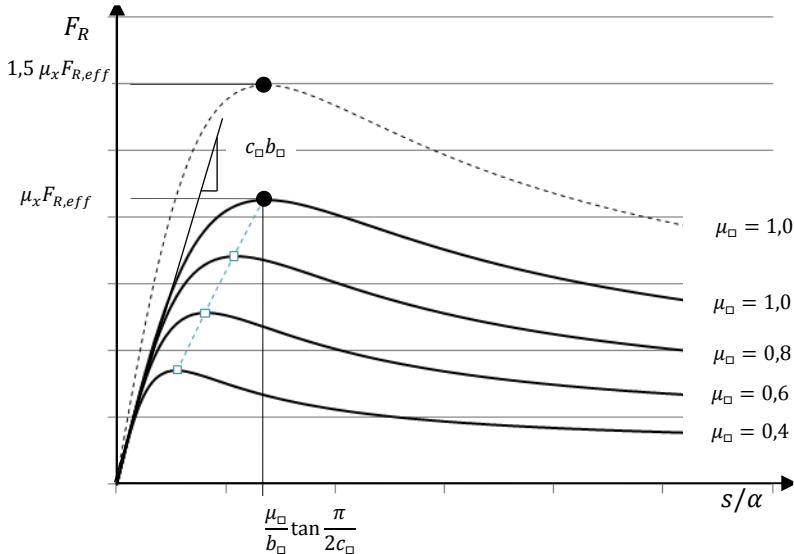


Abb. 11.6: Vereinfachtes Magic-Formula-Modell
 $- c_\square, b_\square = \text{const}, \mu_\square, F_{R,eff}$ variiert

Die aus dem vereinfachten Magic-Formula-Modell erstellten Kurven sind beispielhaft in Abb. 11.6 dargestellt.

Die dynamischen Reifenkräfte berechnen sich dann aus der Formel:

$$\begin{bmatrix} \dot{F}_{R_i,x} \\ \dot{F}_{R_i,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_{x_i}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_{y_i}} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} F_{R_i,x,\text{stat}} \\ F_{R_i,y,\text{stat}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{R_i,x} \\ F_{R_i,y} \end{bmatrix} \right), \quad (11.36)$$

mit den reziproken Zeitkonstanten:

$$\frac{1}{T_{x_i/y_i}} = \frac{|r\dot{\rho}_{R_i}|}{s_{x_i/y_i}}. \quad (11.37)$$

Für die Windkräfte erhält man die Beziehung

¹ Hier steht „,i“ jeweils für x bzw. y

$$F_W = \frac{1}{2} c_W \varrho A \dot{r}_V \| \dot{r}_V \|_2 = \frac{1}{2} c_W \varrho_L A \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (11.38)$$

wobei wieder nur der Einfluss des Fahrtwindes (d.h. entgegengesetzt parallel zur Trajektorie des Massenmittelpunktes des Aufbaus) berücksichtigt wird. Sollen z.B. auch der Einfluss des Seitenwindes berücksichtigt werden, so muss die Geschwindigkeit \dot{r}_V entsprechend angepasst werden, s. Kapitel 9.

11.1.5 Antriebsstrang

Die Modellbildung des Antriebsstrangs kann Abb. 11.7 entnommen werden. In diesem Fall wird, anders als in Kapitel 8, eine eindimensionale Modellierung gewählt. Gleichfalls wird vereinfachend auf die Einführung elastischer Elemente vollständig verzichtet.

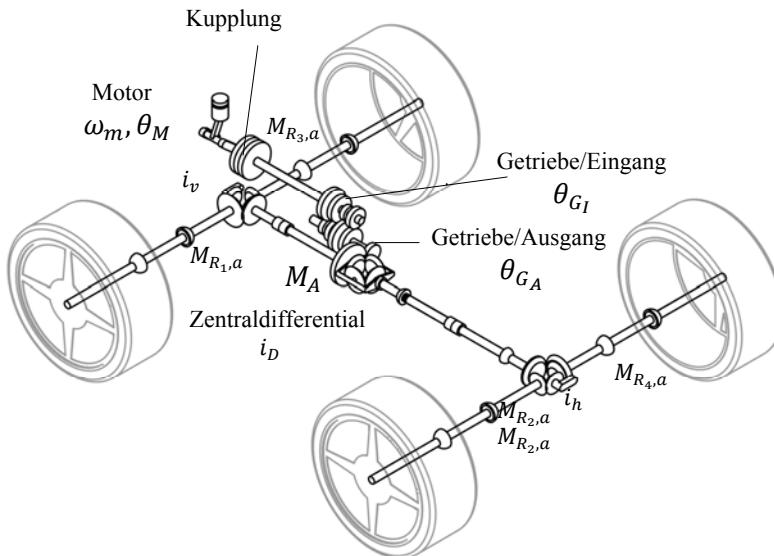


Abb. 11.7: Antriebsstrang – Beispiel Allradantrieb

Für die Angabe der Antriebsmomente an der Vorder- und der Hinterachse wird zunächst die Motordrehzahl benötigt. Diese ergibt sich durch eine einfache kinematische Betrachtung unter Berücksichtigung der Größen

- i_D : Übersetzungsverhältnis Zentralgetriebe,

- $i_G(G)$: gangabhängige Getriebeübersetzung,
- i_v, i_h : Differentialübersetzung vorne/hinten,
- $\xi_a, \bar{\xi}_a$: Aufteilung der Antriebsmoment auf Vorder- und Hinterachse mit $0 \leq \xi_a \leq 1, \bar{\xi}_a = 1 - \xi_a$,
- θ_M : Trägheitsmoment des Motors,
- θ_{G_I} : Trägheitsmoment der motorseitigen Getriebewellen,
- θ_{G_A} : Trägheitsmoment der antriebsseitigen Getriebewellen

zu

$$\omega_M = i_D i_G(G) \left(\bar{\xi}_a i_v \left(\frac{\dot{\rho}_{R_1} + \dot{\rho}_{R_3}}{2} \right) + \xi_a i_h \left(\frac{\dot{\rho}_{R_2} + \dot{\rho}_{R_4}}{2} \right) \right). \quad (11.39)$$

Daraus erhält man durch die Auswertung des Momentenkennfelds $M_M(\omega_m, p_f)$ und der Winkelbeschleunigung $\alpha_M = \dot{\omega}_M$ des Motors das vom Motor auf die Kupplung wirkende Antriebsmoment zu:

$$M_K = M_M - \theta_M \alpha_M \quad (11.40)$$

und damit nach etwas Rechnung das Gesamtantriebsmoment auf die Räder

$$M_A = (i_v \bar{\xi}_a + i_h \xi_a) i_D \left[i_G M_K - \frac{1}{i_G} (\theta_{G_I} i_G^2 + \theta_{G_A}) \alpha_M \right]. \quad (11.41)$$

Die Antriebsmomente auf die einzelnen Räder ergeben sich damit zu:

$$\begin{aligned} M_{R_1,a} &= M_{R_3,a} = \frac{1}{2} i_v \bar{\xi}_a i_D \left[i_G M_K - \frac{1}{i_G} [\theta_{G_I} i_G^2 + \theta_{G_A}] \alpha_M \right], \\ M_{R_2,a} &= M_{R_4,a} = \frac{1}{2} i_h \xi_a i_D \left[i_G M_K - \frac{1}{i_G} [\theta_{G_I} i_G^2 + \theta_{G_A}] \alpha_M \right]. \end{aligned} \quad (11.42)$$

Die Antriebsmomente setzen sich jeweils aus einem Anteil zusammen, der lediglich aus dem (übersetzten) Motormoment besteht und einem Anteil, welcher die Drehträgheiten des Antriebsstranges bis zum Zentraldifferential umfasst. Die Trägheiten der vier Antriebswellen werden jeweils voll, die der Kardanwelle jeweils anteilig den Drehträgheiten der Räder zugeschlagen.

Kupplung

Die Gl. (11.42) gilt zunächst nur bei geschlossener Kupplung. Ist die Kupplung geöffnet, dann wird kein Drehmoment übertragen und die Drehzahlen der beiden Kupplungsscheiben unterscheiden sich voneinander. Während des Ein- und Auskuppelvorgangs wird ein vom Anpressdruck

und weiteren Größen abhängiges Drehmoment übertragen, während sich die Drehzahlen der Kupplungsscheiben einander annähern. Sobald die Drehzahlen der Kupplungsscheiben nicht mehr fest gekoppelt sind, erhöht sich die Zahl der Freiheitsgrade. Da die Schaltvorgänge nur sehr kurz sind und eine detaillierte Berücksichtigung dieser Effekte nicht Gegenstand der hier gesuchten einfachen Modellierung sein soll, wird auf diese verzichtet. Stattdessen soll stark vereinfachend angenommen werden, dass die Drehzahlen der beiden Kupplungsscheiben stets gleich bleiben und lediglich das übertragene Drehmoment $M_M - \theta_M \alpha_M$ sich abhängig von einem Parameter, der die Kupplungsbetätigung wiedergibt, verändert:

$$M_{K\xi} = (M_M - \theta_M \alpha_M)(1 - \xi_K), \quad 0 \leq \xi_K \leq 1. \quad (11.43)$$

Für $\xi_K = 0$ ist die Kupplung geschlossen (Pedal nicht betätigt) und für $\xi_K = 1$ geöffnet (Pedal voll durchgetreten). Ersetzt man nun M_K in den Gln. (11.41) und (11.42) durch $M_{K\xi}$, so wird auch ein einfacher Schaltvorgang möglich, indem ein zeitlicher Verlauf für ξ_K vorgegeben wird.

11.1.6 Bremssystem

Auch die Bremsmomente werden variabel auf die Vorder- und Hinterachse verteilt:

$$\begin{aligned} M_{B,h} &= \xi_b M_B, \\ M_{B,v} &= (1 - \xi_b) M_B = M_B - M_{B,h}. \end{aligned} \quad (11.44)$$

Für die Bremsmomente auf die einzelnen Räder ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} M_{B,R_1} &= M_{B,R_3} = \frac{1}{2} M_{B,v}, \\ M_{B,R_2} &= M_{B,R_4} = \frac{1}{2} M_{B,h}. \end{aligned} \quad (11.45)$$

11.1.7 Bewegungsgleichungen

Mit den Vorarbeiten in den Abschnitten 11.1.1 bis 11.1.6 lassen sich nun die vollständigen Bewegungsgleichungen des Zweispurmodells angeben:

$$m \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} F_{R_i,x} \\ F_{R_i,y} \\ F_{R_i,z} \end{bmatrix} - \frac{1}{2} c_W \rho A \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix}, \quad (11.46)$$

$$\boldsymbol{\theta}_V \dot{\boldsymbol{\omega}}_V + \boldsymbol{\omega}_V \times (\boldsymbol{\theta}_V \boldsymbol{\omega}_V) = \sum_{i=1}^4 \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \mathbf{r}_W \times \mathbf{F}_W, \quad (11.47)$$

$$\theta_{R_i} \ddot{\rho}_{R_i} = M_{a,R_i} - M_{b,R_i} \text{sign}(\dot{\rho}_{R_i}) - r F_{R_i,x}, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (11.48)$$

$$m_{R_i} \ddot{z}_{R_i} = F_{R_i,z} - F_{i,z} - m_{R_i} g, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (11.49)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{F}_{R_i,x} \\ \dot{F}_{R_i,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{|r\dot{\rho}_{R_i}|}{s_x} & 0 \\ 0 & \frac{|r\dot{\rho}_{R_i}|}{s_y} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} F_{R_i,x,\text{stat}} \\ F_{R_i,y,\text{stat}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{R_i,x} \\ F_{R_i,y} \end{bmatrix} \right), \quad i = 1, \dots, 4 \quad (11.50)$$

$$\mathbf{x}_A = [x \ y \ z \ \psi_V \ \theta_V \ \varphi_V \ | \ v_x \ v_y \ v_z \ \omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T, \quad (11.51)$$

$$\mathbf{x}_{RR} = [\rho_{R_1} \ \rho_{R_2} \ \rho_{R_3} \ \rho_{R_4} \ | \ \dot{\rho}_{R_1} \ \dot{\rho}_{R_2} \ \dot{\rho}_{R_3} \ \dot{\rho}_{R_4}]^T, \quad (11.52)$$

$$\mathbf{x}_{RZ} = [z_{R_1} \ z_{R_2} \ z_{R_3} \ z_{R_4} \ | \ \dot{z}_{R_1} \ \dot{z}_{R_2} \ \dot{z}_{R_3} \ \dot{z}_{R_4}]^T, \quad (11.53)$$

$$\mathbf{x}_{RF} = [F_{x_1} \ F_{y_1} \ F_{x_2} \ F_{y_2} \ F_{x_3} \ F_{y_3} \ F_{x_4} \ F_{y_4}]^T, \quad (11.54)$$

$$\mathbf{x} = [x_A \ x_{RR} \ x_{RZ} \ x_{RF}]^T. \quad (11.55)$$

Der Erregervektor \mathbf{u} ist wieder, wie in Kapitel 10:

$$\mathbf{u} = [\delta_H \ p_F \ p_B \ G]^T. \quad (11.56)$$

Dabei ist δ_H der Lenkradwinkel. Die Stellung des Fahrpedals p_F und des Bremspedals p_B sei jeweils auf einen Wertebereich zwischen 0 und 1 normiert. Die Eingangsgröße G definiert die eingelegte Getriebestufe mit den Vorwärtsgängen 1, ..., 5, dem Rückwärtsgang -1 und dem Leerlauf 0. Damit lauten die Zustandsgleichungen des räumlichen Zweispurmodells:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}), \quad (11.57)$$

mit dem $[36 \times 1]$ -Vektor \mathbf{x} , dem $[4 \times 1]$ -Vektor \mathbf{u} und der Zeit t .

11.2 Zweispurmodell mit kinematischen Radaufhängungen

Das nachfolgend beschriebene Fahrzeugmodell ergänzt das im vorigen Abschnitt beschriebene Modell um eine Radaufhängungskinematik. Dazu werden an der Vorder- und an der Hinterachse Radträger modelliert, die durch jeweils eine räumliche Radaufhängung geführt werden, s. Abb. 11.8.

11.2.1 Freiheitsgrade des Zweispurmodells

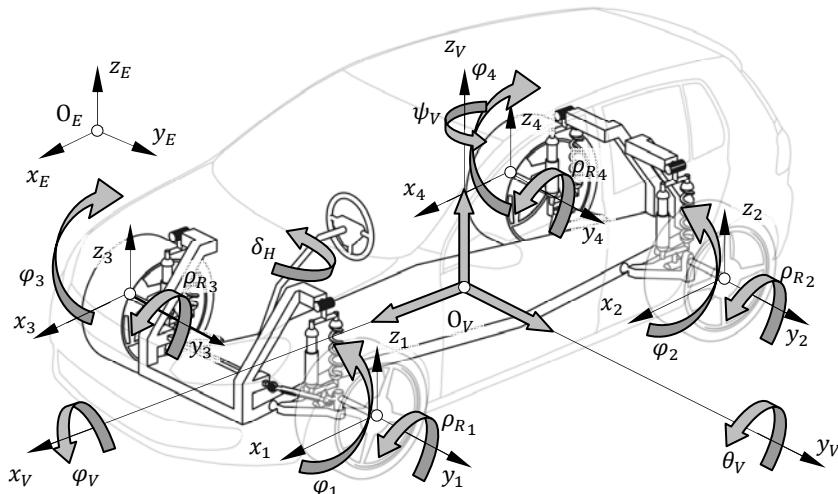


Abb. 11.8: Freiheitsgrade des einfachen räumlichen Zweispurmodells

Für die Radaufhängungen wird lediglich festgelegt, dass sich deren Bewegung jeweils durch eine verallgemeinerte Koordinate $\varphi_i, i = 1, \dots, 4$ beschreiben lässt. Diese Koordinate beschreibt typischerweise die (räumliche) Einfederbewegung des Rads. Die konstruktive Ausführung der Radaufhängung wird zunächst offen gelassen, d.h. die Kinematik von Radträger und Rad muss später jeweils in Abhängigkeit von φ_i ausgedrückt werden. Zusätzlich wird jeweils noch eine Lenkbewegung $\delta_i, i = 1, \dots, 4$ berücksichtigt, die als Zeitfunktion vorgegeben wird. Dabei entsprechen die Lenkwinkel an der Vorderachse den durch den Lenkradwinkel und die im allgemeinen Fall nichtlineare Lenkübersetzung vorgegebenen Winkeln:

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta = \frac{1}{l_L} \delta_H(t). \quad (11.58)$$

Statt Gl. (11.58) kann natürlich auch ein nichtproportionaler Zusammenhang in Abhängigkeit vom Lenkeinschlag sowie ein realistischeres Lenksystem mit $\delta_1 \neq \delta_2$ berücksichtigt werden, ohne dass dies die folgenden Überlegungen beeinflusst, s. Abschnitt 11.2.9. An der Hinterachse können die Lenkwinkel entweder konstant angenommen werden oder zur Beschreibung einer aktiven Hinterradlenkung genutzt werden.

Die Beschreibung der Radeigendrehungen erfolgt durch jeweils einen Einheitsvektor $\mathbf{u}_{R_i}, i = 1, \dots, 4$, s. Abb. 11.9, welcher die Raddrehachse relativ zum Radträger definiert sowie durch die Drehwinkel $\rho_{R_i}, i = 1, \dots, 4$ und die zugehörigen Radwinkelgeschwindigkeiten $\dot{\rho}_{R_i}, i = 1, \dots, 4$. Man beachte, dass durch diese Festlegung erreicht wird, dass Radträger und Räder sich hinsichtlich ihrer Orientierung im Raum und den entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten lediglich durch die Radeigendrehung unterscheiden. Aus diesem Grund werden, abgesehen vom Trägheitsmoment bezüglich der Raddrehachse, sämtliche Trägheitsmomente der Räder den jeweiligen Radträgern zugeschlagen. Das Modell besteht damit zunächst aus 9 Körpern, s. Tabelle 11.4, wenn man die Lenker und anderen Bauteile der Radaufhängungen gegenüber den dominierenden Massen und Trägheiten von Radträger und Rad jeweils vernachlässigt.

Tabelle 11.4: Körper $K_i, i = 1, \dots, 9$

Körper	Beschreibung	Masse	Trägheitstensor im körperfesten Koordinatensystem, bezogen auf den jeweiligen Massenmittelpunkt
K_1	Aufbau	m_V	Θ_V
K_2, \dots, K_5	Radträger	m_{T_i}	Θ_{T_i}
K_6, \dots, K_9	Räder	m_{R_i}	Θ_{R_i}

Das Modell berücksichtigt die in Tabelle 11.5 und Tabelle 11.6 zusammengestellten verallgemeinerten Koordinaten und verallgemeinerten Geschwindigkeiten.

Tabelle 11.5: Verallgemeinerte Koordinaten $q_i, i = 1, \dots, 14$

Bezeichnung	Beschreibung
x, y, z	Koordinaten des Massenmittelpunktes des Fahrzeugaufbaus im Inertialsystem
$\psi_V, \theta_V, \varphi_V$	Kardanwinkel zur Beschreibung des Fahrzeugaufbaus relativ zum Inertialsystem
$\varphi_i, i = 1, \dots, 4$	Einfederbewegung des Radträgers relativ zum Fahrzeugaufbau
$\rho_{R_i}, i = 1, \dots, 4$	Drehwinkel der Räder um ihre jeweilige radträgerfeste Drehachse \mathbf{u}_{R_i}

Das betrachtete Fahrzeugmodell besitzt damit insgesamt $f = 14$ Freiheitsgrade.

Bemerkungen:

- Die Lenkbewegung wird hier nicht als Freiheitsgrad sondern als Eingangsgröße $\delta_H(t)$ behandelt.
- Die Eingabegrößen entsprechen im Wesentlichen denen, die auch für das nichtlineare Einspurmodell und das einfache räumliche Zweispurmodell eingeführt wurden, s. Tabelle 11.7.

Tabelle 11.6: Verallgemeinerte Geschwindigkeiten $z_i, i = 1, \dots, 14$

Bezeichnung	Beschreibung
v_x, v_y, v_z	Koordinaten der Translationsgeschwindigkeit im fahrzeugfesten Koordinatensystem
$\omega_x, \omega_y, \omega_z$	Koordinaten der Drehgeschwindigkeiten im fahrzeugfesten Koordinatensystem
$\dot{\varphi}_i, i = 1, \dots, 4$	Einfedergeschwindigkeiten der Radträger
$\dot{\rho}_{R_i}, i = 1, \dots, 4$	Drehgeschwindigkeiten der Räder um ihre jeweilige radträgerfeste Drehachse \mathbf{u}_{R_i}

Tabelle 11.7: Eingangsgrößen

Bezeichnung	Beschreibung
p_F	Normierte Fahrpedalstellung ($0 \leq p_F \leq 1$)
p_B	Normierte Bremspedalstellung ($0 \leq p_B \leq 1$)
G	Eingelegter Gang
$\delta_H(t)$	Lenkradwinkel
$\delta_2(t), \delta_4(t)$	Lenkwinkel der Hinterräder

11.2.2 Kinematik des Fahrzeugaufbaus

Translation

Der Ortsvektor vom Ursprung des Inertialsystems O_E zum Massenmittelpunkt des O_V Fahrzeugaufbaus lautet:

$${}^E\mathbf{r}_1 = {}^E\mathbf{r}_V = [x_V \quad y_V \quad z_V]^T. \quad (11.59)$$

Damit ergibt sich die absolute Translationsgeschwindigkeit des Aufbaus dargestellt in Koordinaten des Inertialsystems zu:

$${}^E \boldsymbol{\nu}_1 = {}^E \boldsymbol{\nu}_V = \begin{bmatrix} \dot{x}_V \\ \dot{y}_V \\ \dot{z}_V \end{bmatrix} = {}^E \boldsymbol{T}_V \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}. \quad (11.60)$$

Die Matrix ${}^E \boldsymbol{T}_V$ (s. Gl. (11.63)) vermittelt die Transformation vom fahrzeugsfesten Koordinatensystem ins Inertialsystem. Hier ist zu beachten, dass die verallgemeinerten Geschwindigkeiten die Geschwindigkeiten in den Koordinatenrichtungen des *aufbaufesten* Koordinatensystems sind. Durch nochmaliges Differenzieren von Gl. (11.60) erhält man die Translationsbeschleunigung des Aufbaus relativ zum Inertialsystem:

$${}^E \boldsymbol{a}_1 = {}^E \boldsymbol{a}_V = \begin{bmatrix} \ddot{x}_V \\ \ddot{y}_V \\ \ddot{z}_V \end{bmatrix} = {}^E \boldsymbol{T}_V \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix}. \quad (11.61)$$

Die JACOBImatrix der Translation des Aufbaus gibt man zweckmäßigerverweise im aufbaufesten Koordinatensystem als $[3 \times 14]$ - Blockmatrix an, um die Zuordnung der durch die Matrixbereiche beschriebenen verallgemeinerten Geschwindigkeiten zu den einzelnen Baugruppen des Fahrzeugs zu kennzeichnen:

$$\boldsymbol{J}_{Tra_1} = \boldsymbol{J}_{T_V} = \left[\underbrace{(\boldsymbol{I}_{[3 \times 3]} | \boldsymbol{0}_{[3 \times 3]})}_{\text{Aufbau}} \mid \underbrace{\boldsymbol{0}_{[3 \times 4]}}_{\text{Radträger}} \mid \underbrace{\boldsymbol{0}_{[3 \times 4]}}_{\text{Radträger}} \right]. \quad (11.62)$$

Rotation

Wie in Abschnitt 11.1 wird zunächst die Drehmatrix benötigt, welche die Orientierung des aufbaufesten Koordinatensystems relativ zum Inertialsystem beschreibt (s. auch Gl. (11.3)):

$${}^E \boldsymbol{T}_V = \boldsymbol{T}_z(\psi_V) \cdot \boldsymbol{T}_y(\theta_V) \cdot \boldsymbol{T}_x(\varphi_V). \quad (11.63)$$

Daraus ergibt sich, wie in Abschnitt 11.1, die Winkelgeschwindigkeit des Aufbaus relativ zum Inertialsystem, dargestellt im aufbaufesten Koordinatensystem (s. Gln. (11.4) und (11.5)):

$${}^V_E \boldsymbol{\omega}_1 = {}^V_E \boldsymbol{\omega}_V = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_V - \dot{\psi}_V s\theta_V \\ \dot{\theta}_V c\phi_V + \dot{\psi}_V c\theta_V s\phi_V \\ -\dot{\theta}_V s\phi_V + \dot{\psi}_V c\theta_V c\phi_V \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}_\omega \begin{bmatrix} \dot{\psi}_V \\ \dot{\theta}_V \\ \dot{\phi}_V \end{bmatrix}. \quad (11.64)$$

Für die Beschleunigung des Aufbaus relativ zum Inertialsystem erhält man, dargestellt im aufbaufesten Koordinatensystem, aus Gl. (11.64) die

verallgemeinerten Beschleunigungen des Fahrzeugaufbaus in Abhängigkeit von den verallgemeinerten Koordinaten:

$${}^V_E \boldsymbol{\alpha}_1 = {}^V_E \boldsymbol{\alpha}_V = [\dot{\omega}_x \quad \dot{\omega}_y \quad \dot{\omega}_z]^T. \quad (11.65)$$

Aus Gleichung (11.64) ergibt sich desweiteren die JACOBImatrix der Rotation für den Fahrzeugaufbau mit der gleichen Blockaufteilung wie bei der Translation:

$$\mathbf{J}_{Rot_1} = \mathbf{J}_{Rot_V} = \left[\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0}_{[3 \times 3]} & \mathbf{I}_{[3 \times 3]} \end{pmatrix}}_{\text{Aufbau}} \mid \underbrace{\mathbf{0}_{[3 \times 4]}}_{\text{Radträger}} \mid \underbrace{\mathbf{0}_{[3 \times 4]}}_{\text{Rad}} \right]. \quad (11.66)$$

Zusammenhang zwischen verallgemeinerten Geschwindigkeiten und verallgemeinerten Koordinaten

Für die folgenden Betrachtungen werden die verallgemeinerten Koordinaten und die verallgemeinerten Geschwindigkeiten zu jeweils einem $[14 \times 1]$ -Vektor zusammengefasst:

$$\mathbf{q} = [x \ y \ z \ \varphi_V \ \theta_V \ \psi_V \mid \varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3 \ \varphi_4 \mid \rho_{R_1} \ \rho_{R_2} \ \rho_{R_3} \ \rho_{R_4}]^T, \quad (11.67)$$

$$\mathbf{z} = [v_x \ v_y \ v_z \ \omega_x \ \omega_y \ \omega_z \mid \dot{\varphi}_1 \ \dot{\varphi}_2 \ \dot{\varphi}_3 \ \dot{\varphi}_4 \mid \dot{\rho}_{R_1} \ \dot{\rho}_{R_2} \ \dot{\rho}_{R_3} \ \dot{\rho}_{R_4}]^T. \quad (11.68)$$

Man benötigt nun noch den Zusammenhang zwischen verallgemeinerten Geschwindigkeiten und verallgemeinerten Koordinaten. Es ist offensichtlich, dass die Relation zwischen verallgemeinerten Geschwindigkeiten und verallgemeinerten Koordinaten, außer beim Fahrzeugaufbau, trivial ist. Beim Fahrzeugaufbau sind jedoch die Beziehungen (11.60) und (11.64) zu berücksichtigen. Zusammengefasst erhält man mit der Blockdiagonalmatrix $\mathbf{K}(\mathbf{q})$ den Zusammenhang:

$$\mathbf{z} = \mathbf{K}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} {}^V_T_E & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^T_\omega & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{[4 \times 4]} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{[4 \times 4]} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}. \quad (11.69)$$

Für die spätere Lösung der Bewegungsgleichungen benötigt man auch noch die Umkehrung dieser Beziehung, die aufgrund der Zusammensetzung von $\mathbf{K}(\mathbf{q})$ leicht berechnet werden kann:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{z}, \quad (11.70)$$

sofern die Matrix ${}^T_\omega$ invertierbar ist. Dies ist dann der Fall, wenn die kinematischen KARDAN-Gleichungen (11.64) invertierbar sind, also für

$\theta \neq 90^\circ$, und man erhält die inverse Matrix zu:

$$\mathbf{T}_\omega^{-1} = \frac{1}{c \theta_V} \begin{bmatrix} 0 & s \theta_V & c \varphi_V \\ 0 & c \theta_V c \varphi_V & -c \theta_V s \varphi_V \\ c \theta_V & s \theta_V s \varphi_V & s \theta_V c \varphi_V \end{bmatrix}. \quad (11.71)$$

11.2.3 Allgemeine Kinematik der Radaufhängungen

Translation

Zunächst wird jeweils ein fahrzeugfester Bezugspunkt $A_i, i = 1, \dots, 4$ für die vier Einzelradaufhängungen durch die Angabe jeweils eines Ortsvektors vom Massenmittelpunkt O_V des Aufbaus zum Punkt A_i beschrieben, s. Abb. 11.9:

$${}^V r_{A_i} = [x_{A_i} \ y_{A_i} \ z_{A_i}]^T, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (11.72)$$

Diese Vektoren sind jeweils konstant im fahrzeugfesten Koordinatensystem und bewegen sich daher mit diesem mit.

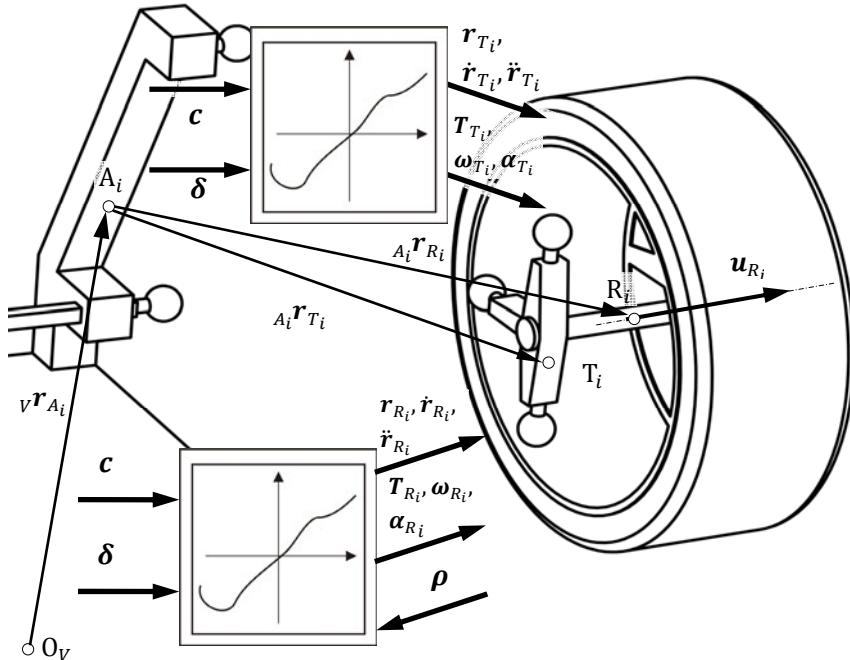


Abb. 11.9: Zweispurmodell mit allgemeiner Radaufhängung

Die Anbindung der Radaufhängung erfolgt nun gemäß Abb. 11.9, d.h. jedem Radträger wird eine verallgemeinerte Koordinate φ_i zugeordnet, die z.B. eine allgemeine Einfederbewegung beschreibt oder den Drehwinkel eines Lenkers. Als zusätzliche Eingabegröße wird ein Winkel δ_i verwendet, der als Zeitfunktion vorgegeben wird. Damit werden die Vektoren der verallgemeinerten Koordinaten für die vier Radaufhängungen

$$\boldsymbol{c} = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3 \quad \varphi_4]^T \quad (11.73)$$

und die vier Räder des Fahrzeugs definiert:

$$\boldsymbol{\rho} = [\rho_{R1} \quad \rho_{R2} \quad \rho_{R3} \quad \rho_{R4}]^T. \quad (11.74)$$

Weiterhin treten als zeitabhängige Funktionen noch die Lenkwinkel

$$\boldsymbol{\delta} = [\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3 \quad \delta_4]^T \quad (11.75)$$

auf.

Gesucht sind nun die Lage-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsgrößen der Radträger und der Räder relativ zum Inertialsystem in Abhängigkeit von den Vektoren \boldsymbol{c} , $\boldsymbol{\rho}$ und $\boldsymbol{\delta}$. Dabei ist zu beachten, dass es sich bei den Komponenten der Vektoren \boldsymbol{c} und $\boldsymbol{\rho}$ um verallgemeinerte Koordinaten handelt, während die in dem Vektor $\boldsymbol{\delta}$ enthaltenen vorgegebene Funktionen der Zeit darstellen:

- *Translatorische* Größen relativ zum Inertialsystem:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{T_i} &= \mathbf{r}_{T_i}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{\delta}), \\ \mathbf{v}_{T_i} &= \dot{\mathbf{r}}_{T_i}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{\delta}, \dot{\boldsymbol{c}}, \dot{\boldsymbol{\delta}}), \\ \mathbf{a}_{T_i} &= \ddot{\mathbf{r}}_{T_i}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{\delta}, \dot{\boldsymbol{c}}, \ddot{\boldsymbol{\delta}}, \ddot{\boldsymbol{c}}, \ddot{\boldsymbol{\delta}}). \end{aligned} \quad (11.76)$$

- *Rotatorische* Größen relativ zum Inertialsystem:

$$\begin{aligned} {}^E\mathbf{T}_{T_i} &= {}^E\mathbf{T}_{T_i}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{\delta}), \\ \boldsymbol{\omega}_{T_i} &= \boldsymbol{\omega}_{T_i}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{\delta}, \dot{\boldsymbol{c}}, \dot{\boldsymbol{\delta}}), \\ \boldsymbol{\alpha}_{T_i} &= \boldsymbol{\dot{\omega}}_{T_i} = \boldsymbol{\dot{\omega}}_{T_i}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{\delta}, \dot{\boldsymbol{c}}, \ddot{\boldsymbol{\delta}}, \ddot{\boldsymbol{c}}, \ddot{\boldsymbol{\delta}}). \end{aligned} \quad (11.77)$$

Diese Zusammenhänge werden nachfolgend unter Verwendung der kineamatischen Transformatoren, s. Kapitel 3, zunächst allgemein verwendet und dann in Abschnitt 11.2.4 explizit für den Fall eines einfachen Schräglenkerns hergeleitet. Für den Ortsvektor \mathbf{r}_{T_i} zum Massenmittelpunkt T_i des Radträgers *relativ zum Inertialsystem* erhält man:

$$\mathbf{r}_{T_i} = \mathbf{r}_V + {}_V\mathbf{r}_{T_i}, \quad (11.78)$$

mit dem Ortsvektor des Radträgers ${}_V\mathbf{r}_{T_i}$ relativ zum Fahrzeugaufbau und dem Ortsvektor \mathbf{r}_V des Aufbaumassenmittelpunktes. Der Ortsvektor ${}_V\mathbf{r}_{T_i}$ setzt sich zusammen aus dem fahrzeugfesten Ortsvektor ${}_V\mathbf{r}_{A_i}$ vom Aufbaumassenmittelpunkt O_V zum Bezugspunkt A_i der Radaufhängung sowie dem Ortsvektor ${}_{A_i}\mathbf{r}_{T_i}$ von A_i zum Massenmittelpunkt T_i des Radträgers:

$${}_V\mathbf{r}_{T_i}(\mathbf{c}, \boldsymbol{\delta}) = \underbrace{{}_V\mathbf{r}_{A_i}}_{\text{const.}} + {}_{A_i}\mathbf{r}_{T_i}(\mathbf{c}, \boldsymbol{\delta}). \quad (11.79)$$

Damit ergeben sich die *Relativgeschwindigkeiten des Radträgers gegenüber dem Aufbau* zu:

$${}_V\mathbf{v}_{T_i} = {}_V\dot{\mathbf{r}}_{T_i} = \frac{\partial {}_{A_i}\mathbf{r}_{T_i}}{\partial \mathbf{c}} \dot{\mathbf{c}} + \frac{\partial {}_{A_i}\mathbf{r}_{T_i}}{\partial \boldsymbol{\delta}} \dot{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{H}_{Tra_c, T_i} \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{H}_{Tra_\delta, T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}} \quad (11.80)$$

und die *Relativbeschleunigungen* zu

$${}_V\mathbf{a}_{T_i} = {}_V\ddot{\mathbf{r}}_{T_i} = \mathbf{H}_{Tra_c, T_i} \ddot{\mathbf{c}} + \dot{\mathbf{H}}_{Tra_c, T_i} \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{H}_{Tra_\delta, T_i} \ddot{\boldsymbol{\delta}} + \dot{\mathbf{H}}_{Tra_\delta, T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}}, \quad (11.81)$$

mit den *translatorischen* $[3 \times 4]$ -JACOBImatrizen \mathbf{H}_{Tra_c, T_i} und $\mathbf{H}_{Tra_\delta, T_i}$ sowie deren zeitlichen Ableitungen. Die partiellen Ableitungen bzw. die JACOBImatrizen hängen von der eingesetzten Radaufhängung ab und lassen sich z.B. mit den in Kapitel 6 beschriebenen Methoden (kinematische Transformatoren) oder auch durch direkte kinematische Betrachtungen (Abschnitt 11.2.4) berechnen.

Für die Relativkinematik der *Rotation* benötigt man zunächst die Drehmatrix ${}^V\mathbf{T}_{T_i}(\mathbf{c}, \boldsymbol{\delta})$, welche die räumliche Orientierung des Radträgers gegenüber dem Aufbau beschreibt. Daraus erhält man die Winkelgeschwindigkeit

$${}_V\boldsymbol{\omega}_{T_i} = \mathbf{H}_{Rot_c, T_i} \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{H}_{Rot_\delta, T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}} \quad (11.82)$$

und die Winkelbeschleunigung

$${}_V\boldsymbol{\alpha}_{T_i} = {}_V\ddot{\boldsymbol{\omega}}_{T_i} = \mathbf{H}_{Rot_c, T_i} \ddot{\mathbf{c}} + \dot{\mathbf{H}}_{Rot_c, T_i} \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{H}_{Rot_\delta, T_i} \ddot{\boldsymbol{\delta}} + \dot{\mathbf{H}}_{Rot_\delta, T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}}, \quad (11.83)$$

mit den *rotatorischen* $[3 \times 4]$ -JACOBImatrizen \mathbf{H}_{Rot_c, T_i} und $\mathbf{H}_{Rot_\delta, T_i}$ sowie deren zeitlichen Ableitungen.

Aufbauend auf den Gln. (11.80) bis (11.83) lassen sich die *absoluten* Geschwindigkeiten und Beschleunigungen angeben:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_{T_i} &= \dot{\boldsymbol{r}}_{T_i} = \underbrace{\dot{\boldsymbol{r}}_V + \boldsymbol{\omega}_V \times {}_V \boldsymbol{r}_{T_i}}_{\text{Führungsbewegung}} + \underbrace{{}_V \dot{\boldsymbol{r}}_{T_i}}_{\text{Relativbewegung}} \\
&= \boldsymbol{v}_V + \boldsymbol{\omega}_V \times {}_V \boldsymbol{r}_{T_i} + \mathbf{H}_{Tra_c, T_i} \dot{\boldsymbol{c}} + \mathbf{H}_{Tra_\delta, T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}} \\
&= \underbrace{[\mathbf{I}_{[3 \times 3]} \mid -{}_V \tilde{\boldsymbol{r}}_{T_i} \mid \mathbf{H}_{Tra_c, T_i} \mid \mathbf{0}_{[3 \times 4]}]}_{J_{Tra, T_i}} \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_V \\ \boldsymbol{\omega}_V \\ \dot{\boldsymbol{c}} \\ \dot{\boldsymbol{\delta}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}} + \underbrace{\mathbf{H}_{Tra_\delta, T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}}}_{\bar{\boldsymbol{v}}_{T_i}} \\
&= J_{Tra, T_i} \mathbf{z} + \bar{\boldsymbol{v}}_{T_i}
\end{aligned} \tag{11.84}$$

und

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{T_i} &= \ddot{\boldsymbol{r}}_{T_i} = \boldsymbol{a}_V + \boldsymbol{\alpha}_V \times {}_V \boldsymbol{r}_{T_i} + \boldsymbol{\omega}_V \times {}_V \dot{\boldsymbol{r}}_{T_i} + \mathbf{H}_{Tra_c, T_i} \ddot{\boldsymbol{c}} + \dot{\mathbf{H}}_{Tra_c, T_i} \dot{\boldsymbol{c}} \\
&\quad + \mathbf{H}_{T_\delta, T_i} \ddot{\boldsymbol{\delta}} + \dot{\mathbf{H}}_{T_\delta, T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}} \\
&\quad + \boldsymbol{\omega}_V \times (\boldsymbol{\omega}_V \times {}_V \boldsymbol{r}_{T_i} + \underbrace{\mathbf{H}_{Tra_c, T_i} \dot{\boldsymbol{c}} + \mathbf{H}_{Tra_\delta, T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}}}_{{}_V \boldsymbol{v}_{T_i}}) \\
&= J_{Tra, T_i} \dot{\mathbf{z}} + \bar{\boldsymbol{a}}_{T_i} \\
&+ \underbrace{2(\boldsymbol{\omega}_V \times {}_V \boldsymbol{v}_{T_i}) + \dot{\mathbf{H}}_{Tra_c, T_i} \dot{\boldsymbol{c}} + \mathbf{H}_{Tra_\delta, T_i} \ddot{\boldsymbol{\delta}} + \dot{\mathbf{H}}_{Tra_\delta, T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}} + \boldsymbol{\omega}_V \times (\boldsymbol{\omega}_V \times {}_V \dot{\boldsymbol{r}}_{T_i})}_{\bar{\boldsymbol{a}}_{T_i}} \\
&= J_{Tra, T_i} \dot{\mathbf{z}} + \bar{\boldsymbol{a}}_{T_i}.
\end{aligned} \tag{11.85}$$

Dabei wurden die translatorischen $[3 \times 14]$ - JACOBImatrizen

$$J_{Tra, T_i} = J_{Tra, T_i}(\boldsymbol{q}) \tag{11.86}$$

und die Restbeschleunigungsvektoren $\bar{\boldsymbol{a}}_{T_i}$ für die Radträger eingeführt. Analog ergeben sich für die absoluten Drehgeschwindigkeiten, bzw. die absoluten Drehbeschleunigungen die Beziehungen:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_{T_i} &= \boldsymbol{\omega}_V + {}_V \boldsymbol{\omega}_{T_i} = \boldsymbol{\omega}_V + \mathbf{H}_{Rot_c, T_i} \dot{\boldsymbol{c}} + \mathbf{H}_{Rot_\delta, T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}} \\
&= \underbrace{[\mathbf{0}_{[3 \times 3]} \mid \mathbf{I}_{[3 \times 3]} \mid \mathbf{H}_{Rot_c, T_i} \mid \mathbf{0}_{[3 \times 4]}]}_{J_{Rot, T_i}} \mathbf{z} + \underbrace{\mathbf{H}_{Rot_\delta, T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}}}_{\bar{\boldsymbol{\omega}}_{T_i}} \\
&= J_{Rot, T_i} \mathbf{z} + \bar{\boldsymbol{\omega}}_{T_i}
\end{aligned} \tag{11.87}$$

und

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}_{T_i} &= \boldsymbol{\alpha}_V + {}_V \boldsymbol{\alpha}_{T_i} = \boldsymbol{\alpha}_V + \boldsymbol{\omega}_V \times {}_V \boldsymbol{\omega}_{T_i} + {}_V \dot{\boldsymbol{\omega}}_{T_i} \\
&= \boldsymbol{\alpha}_V + \boldsymbol{\omega}_V \times (\mathbf{H}_{Rot_c, T_i} \dot{\boldsymbol{c}} + \mathbf{H}_{Rot_\delta, T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}}) + \mathbf{H}_{Rot_c, T_i} \ddot{\boldsymbol{c}} + \dot{\mathbf{H}}_{Rot_c, T_i} \dot{\boldsymbol{c}} + \mathbf{H}_{Rot_\delta, T_i} \ddot{\boldsymbol{\delta}} \\
&\quad + \dot{\mathbf{H}}_{Rot_\delta, T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}}
\end{aligned} \tag{11.88}$$

$$\begin{aligned}
 &= J_{Rot,T_i} \dot{\mathbf{z}} + \underbrace{\omega_V \times {}_V \boldsymbol{\omega}_{T_i} + \dot{\mathbf{H}}_{Rot_c,T_i} \dot{\mathbf{c}} + \dot{\mathbf{H}}_{Rot_\delta,T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}} + \mathbf{H}_{Rot_\delta,T_i} \ddot{\boldsymbol{\delta}}}_{\bar{\alpha}_{T_i}} \\
 &= J_{Rot,T_i} \dot{\mathbf{z}} + \bar{\alpha}_{T_i}.
 \end{aligned}$$

Die entsprechenden translatorischen kinematischen Größen für die Räder erhält man einfach, wenn man in den Gln. (11.78) bis (11.81) und Gln. (11.84) bis (11.85) jeweils den Index T_i durch R_i ersetzt. Bei der Rotation muss hingegen neben der Anpassung der Indizes auch noch die Rotation der Räder um ihre Drehachse ergänzt werden. Dafür erhält man:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\omega}_{R_i} &= \boldsymbol{\omega}_V + {}_V \boldsymbol{\omega}_{R_i} = \boldsymbol{\omega}_V + \mathbf{H}_{Rot_c,T_i} \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{H}_{Rot_\rho,R_i} \dot{\boldsymbol{\rho}} + \mathbf{H}_{Rot_\delta,T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}} \\
 &= \underbrace{[\mathbf{0}_{[3 \times 3]} | \mathbf{I}_{[3 \times 3]} | \mathbf{H}_{Rot_c,T_i} | \mathbf{H}_{Rot_\rho,R_i}]}_{J_{Rot,R_i}} \mathbf{z} + \underbrace{\mathbf{H}_{Rot_\delta,T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}}}_{\bar{\omega}_{R_i}}
 \end{aligned} \quad (11.89)$$

$$= J_{Rot,R_i} \mathbf{z} + \bar{\boldsymbol{\omega}}_{R_i}$$

und

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\alpha}_{R_i} &= \boldsymbol{\alpha}_V + {}_V \boldsymbol{\alpha}_{R_i} = \boldsymbol{\alpha}_V + \boldsymbol{\omega}_V \times {}_V \boldsymbol{\omega}_{R_i} + {}_V \dot{\boldsymbol{\omega}}_{R_i} \\
 &= \boldsymbol{\alpha}_V + \boldsymbol{\omega}_V \times (\mathbf{H}_{Rot_c,T_i} \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{H}_{Rot_\rho,R_i} \dot{\boldsymbol{\rho}} + \mathbf{H}_{Rot_\delta,T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}}) + \mathbf{H}_{Rot_c,T_i} \ddot{\mathbf{c}} \\
 &\quad + \dot{\mathbf{H}}_{Rot_c,T_i} \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{H}_{Rot_\rho,R_i} \ddot{\boldsymbol{\rho}} + \dot{\mathbf{H}}_{Rot_\rho,R_i} \dot{\boldsymbol{\rho}} + \mathbf{H}_{Rot_\delta,T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}} + \dot{\mathbf{H}}_{Rot_\delta,T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}} \\
 &= J_{Rot,R_i} \dot{\mathbf{z}} \\
 &\quad + \underbrace{\boldsymbol{\omega}_V \times {}_V \boldsymbol{\omega}_{R_i} + \dot{\mathbf{H}}_{Rot_c,T_i} \dot{\mathbf{c}} + \dot{\mathbf{H}}_{Rot_\rho,R_i} \dot{\boldsymbol{\rho}} + \dot{\mathbf{H}}_{Rot_\delta,T_i} \dot{\boldsymbol{\delta}} + \mathbf{H}_{Rot_\delta,T_i} \ddot{\boldsymbol{\delta}}}_{\bar{\alpha}_{R_i}}
 \end{aligned} \quad (11.90)$$

$$= J_{Rot,R_i} \dot{\mathbf{z}} + \bar{\alpha}_{R_i}.$$

Um eine einfache Schreibweise für die Bewegungsgleichungen zu ermöglichen, werden die JACOBImatrizen der Translation und der Rotation noch durchnummerniert:

$$\text{Aufbau} \quad J_{Tra_1} = J_{Tra_V}, \quad J_{Rot_1} = J_{Rot_V}, \quad (11.91)$$

$$\text{Radträger} \quad J_{Tra_{1+i}} = J_{Tra,T_i}, \quad J_{Rot_{1+i}} = J_{Rot,T_i}, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (11.92)$$

$$\text{Räder} \quad J_{Tra_{5+i}} = J_{Tra,R_i}, \quad J_{Rot_{5+i}} = J_{Rot,R_i}, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (11.93)$$

11.2.4 Radaufhängung mit Schräglenkern

Die in Abschnitt 11.2.3 abgeleiteten kinematischen Beziehungen gelten unabhängig von der Art der betrachteten Radaufhängung. Es sind lediglich, basierend auf den in den vorangegangenen Kapiteln hergeleiteten Methoden, die Übertragungsgesetze für die in Abb. 11.9 dargestellten Ein- und Ausgangsgrößen zu berechnen. Dies wird im Folgenden anhand einer einfachen Schräglenger-Radaufhängung demonstriert, s. Abb. 11.10. Zu deren Beschreibung dienen Einheitsvektoren $\mathbf{u}_{S_i}, i = 1, \dots, 4$, welche die fahrzeugfesten Drehachsen der Schräglenger definieren:

$${}^V\mathbf{u}_{S_i} = [u_{S_i,x} \ u_{S_i,y} \ u_{S_i,z}]^T, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (11.94)$$

Die Orientierung der Schräglenger wird dann wieder festgelegt durch jeweils eine Drehmatrix, welche die Orientierung des schräglengerfesten Koordinatensystems relativ zum aufbaufesten Koordinatensystem beschreibt. Die hier betrachtete Radaufhängung lässt sich durch unabhängige Drehungen um zwei räumliche Achsen beschreiben. Aus diesem Grund bietet sich eine Beschreibung der Kinematik durch Drehzeiger an (s. Kapitel 3). Man erhält für die Verdrehung des Schräglengers um eine fahrzeugfeste Drehachse:

$${}^V\mathbf{T}_{S_i} = \mathbf{u}_{S_i}\mathbf{u}_{S_i}^T + (\mathbf{I} - \mathbf{u}_{S_i}\mathbf{u}_{S_i}^T) \cos \varphi_{S_i} + \tilde{\mathbf{u}}_{S_i} \sin \varphi_{S_i}. \quad (11.95)$$

Dabei bezeichnet $\varphi_{S_i}, i = 1, \dots, 4$ den Schwenkwinkel des i -ten Schräglengers um seine Drehachse. Mit den Bezeichnungen von Abschnitt 11.2.3 gilt dann

$$\varphi_i := \varphi_{S_i}, i = 1, \dots, 4 \quad (11.96)$$

und damit

$$\mathbf{c} := [\varphi_{S_1} \ \varphi_{S_2} \ \varphi_{S_3} \ \varphi_{S_4}]^T. \quad (11.97)$$

Weiterhin benötigt man noch jeweils einen schräglengerfesten Ortsvektor vom jeweiligen Bezugspunkt $A_i, i = 1, \dots, 4$ der Schräglengerdrehachse zum Bezugspunkt L_i der zugehörigen Lenkachse

$${}^{A_i}{}^S_i \mathbf{r}_{L_i} = [x_{L_i} \ y_{L_i} \ z_{L_i}]^T \quad i = 1, \dots, 4 \quad (11.98)$$

sowie jeweils einen schräglengerfesten Einheitsvektor

$${}^{S_i} \mathbf{u}_{L_i} = [u_{L_i,x} \ u_{L_i,y} \ u_{L_i,z}]^T \quad i = 1, \dots, 4 \quad (11.99)$$

zur Beschreibung der Lenkachsen der Räder. Die erforderliche Drehmatrizen zur Festlegung der Verdrehungen δ_i , $i = 1, \dots, 4$ der Räder zu den Schräglenkern lautet dann gemäß Kapitel 3:

$${}^{S_i} \mathbf{T}_{T_i} = \mathbf{u}_{L_i} \mathbf{u}_{L_i}^T + (\mathbf{I} - \mathbf{u}_{L_i} \mathbf{u}_{L_i}^T) \cos \delta_i + \tilde{\mathbf{u}}_{L_i} \sin \delta_i . \quad (11.100)$$

Es verbleibt noch die Beschreibung der Massenmittelpunkte T_i und R_i , $i = 1, \dots, 4$ der Radträger bzw. der Räder. Die Punkte T_i werden relativ zum Bezugspunkt der Lenkachse beschrieben durch einen radträgerfesten Ortsvektor vom Bezugspunkt L_i der Lenkachse zum Bezugspunkt T_i des Radträgers, s. Abb. 11.11:

$${}^{T_i} \mathbf{r}_{T_i} = [x_{T_i} \ y_{T_i} \ z_{T_i}]^T, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (11.101)$$

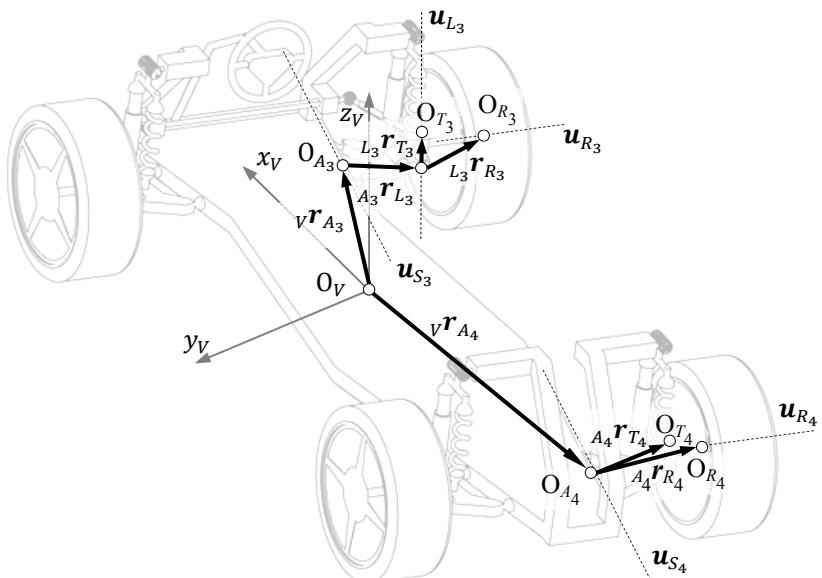


Abb. 11.10: Bezeichnungen am räumlichen Zweispurmodell mit Schräglenkern

Die Translation des Rades wird beschrieben durch einen radträgerfesten Ortsvektor vom Bezugspunkt L_i der jeweiligen Lenkachse zum Bezugspunkt R_i des Rades:

$${}^{T_i} \mathbf{r}_{R_i} = [x_{R_i} \ y_{R_i} \ z_{R_i}]^T, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (11.102)$$

Die Raddrehachse ist fest im Radträger verankert und kann wieder durch einen Einheitsvektor beschrieben werden:

$${}^T_i \mathbf{u}_{R_i} = [u_{R_i,x} \quad u_{R_i,y} \quad u_{R_i,z}]^T, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (11.103)$$

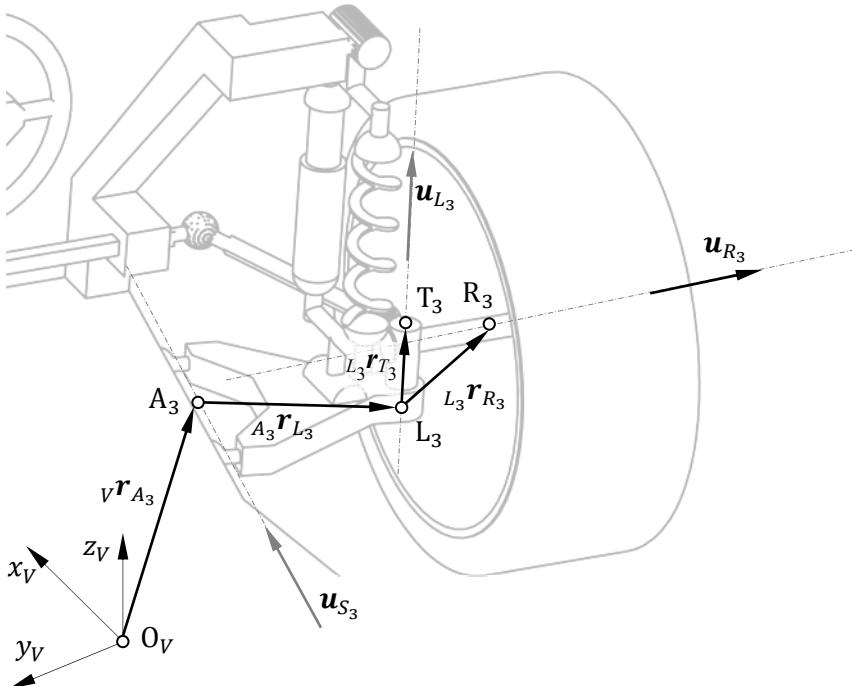


Abb. 11.11: Radaufhängung Zweispurmodell mit Schrägleinkern

Translation

Nach dieser Vorarbeit lässt sich jetzt der Ortsvektor vom Massenmittelpunkt des Aufbaus zum Massenmittelpunkt des Radträgers angeben, s. Abb. 11.11:

$$v \mathbf{r}_{T_i} = v \mathbf{r}_{A_i} + {}_{A_i} \mathbf{r}_{L_i} + {}_{L_i} \mathbf{r}_{T_i}, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (11.104)$$

Damit lassen sich die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Radträger *relativ zum Aufbau* berechnen:

$$\begin{aligned}
 {}_V \boldsymbol{v}_{T_i} &= \boldsymbol{\omega}_{S_i} \times ({}_{A_i} \boldsymbol{r}_{L_i} + {}_{L_i} \boldsymbol{r}_{T_i}) + \boldsymbol{\omega}_{L_i} \times {}_{L_i} \boldsymbol{r}_{T_i} \\
 &= \boldsymbol{u}_{S_i} \dot{\phi}_{S_i} \times ({}_{A_i} \boldsymbol{r}_{L_i} + {}_{L_i} \boldsymbol{r}_{T_i}) + \boldsymbol{u}_{L_i} \dot{\delta}_i \times {}_{L_i} \boldsymbol{r}_{T_i} \\
 &= \underbrace{[\tilde{\boldsymbol{u}}_{S_i} {}_{A_i} \boldsymbol{r}_{T_i}]}_{H_{Tra_c, T_i}} \dot{\phi}_{S_i} + \underbrace{[\tilde{\boldsymbol{u}}_{L_i} {}_{L_i} \boldsymbol{r}_{T_i}]}_{H_{Tra_\delta, T_i}} \dot{\delta}_i, \quad i = 1, \dots, 4,
 \end{aligned} \tag{11.105}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
 {}_V \boldsymbol{a}_{T_i} &= \dot{\boldsymbol{\omega}}_{S_i} \times {}_{A_i} \boldsymbol{r}_{T_i} + \boldsymbol{\omega}_{S_i} \times {}_{A_i} \dot{\boldsymbol{r}}_{T_i} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{L_i} \times {}_{L_i} \boldsymbol{r}_{T_i} + \boldsymbol{\omega}_{L_i} \times {}_{L_i} \dot{\boldsymbol{r}}_{T_i} \\
 &= \dot{\boldsymbol{\omega}}_{S_i} \times {}_{A_i} \boldsymbol{r}_{T_i} + \boldsymbol{\omega}_{S_i} \times (\boldsymbol{\omega}_{S_i} \times {}_{A_i} \boldsymbol{r}_{T_i} + \boldsymbol{\omega}_{L_i} \times {}_{L_i} \boldsymbol{r}_{T_i}) \\
 &\quad + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{L_i} \times {}_{L_i} \boldsymbol{r}_{T_i} + \boldsymbol{\omega}_{L_i} \times ((\boldsymbol{\omega}_{S_i} + \boldsymbol{\omega}_{L_i}) \times {}_{L_i} \boldsymbol{r}_{T_i}) \\
 &= [\tilde{\boldsymbol{u}}_{S_i} {}_{A_i} \boldsymbol{r}_{T_i}] \ddot{\phi}_{S_i} + [\tilde{\boldsymbol{u}}_{L_i} {}_{L_i} \boldsymbol{r}_{T_i}] \ddot{\delta}_i \\
 &+ \underbrace{[\tilde{\boldsymbol{u}}_{S_i} (\boldsymbol{u}_{S_i} \dot{\phi}_{S_i} \times {}_{A_i} \boldsymbol{r}_{T_i} + \boldsymbol{u}_{L_i} \dot{\delta}_i \times {}_{L_i} \boldsymbol{r}_{T_i})]}_{H_{Tra_c, T_i}} \dot{\phi}_{S_i} \\
 &\quad + \underbrace{[\boldsymbol{u}_{L_i} \times ((\boldsymbol{u}_{S_i} \dot{\phi}_{S_i} + \boldsymbol{u}_{L_i} \dot{\delta}_i) \times {}_{L_i} \boldsymbol{r}_{T_i})]}_{H_{Tra_\delta, T_i}} \dot{\delta}_i
 \end{aligned} \tag{11.106}$$

$$\begin{aligned}
 &= [\tilde{\boldsymbol{u}}_{S_i} {}_{A_i} \boldsymbol{r}_{T_i}] \ddot{\phi}_{S_i} + [\tilde{\boldsymbol{u}}_{L_i} {}_{L_i} \boldsymbol{r}_{T_i}] \ddot{\delta}_i \\
 &+ [\tilde{\boldsymbol{u}}_{S_i} {}_V \boldsymbol{v}_{T_i}] \dot{\phi}_{S_i} + \tilde{\boldsymbol{u}}_{L_i} ([\tilde{\boldsymbol{u}}_{S_i} \dot{\phi}_{S_i} + \tilde{\boldsymbol{u}}_{L_i} \dot{\delta}_i] {}_{L_i} \boldsymbol{r}_{T_i}) \dot{\delta}_i.
 \end{aligned}$$

Anhand von Gl. (11.106) erkennt man die Zusammenhänge mit den JA-COBImatrizen in Abschnitt 11.2.3:

$$\boldsymbol{H}_{Tra_c, T_i} = \left[\boldsymbol{0}_{[3 \times \dots]} \mid \underbrace{\tilde{\boldsymbol{u}}_{S_i} {}_{A_i} \boldsymbol{r}_{T_i}}_{\text{i-te Spalte}} \mid \boldsymbol{0}_{[3 \times \dots]} \right]_{[3 \times 4]} \tag{11.107}$$

und

$$\boldsymbol{H}_{Tra_\delta, T_i} = \left[\boldsymbol{0}_{[3 \times \dots]} \mid \underbrace{\tilde{\boldsymbol{u}}_{L_i} {}_{L_i} \boldsymbol{r}_{T_i}}_{\text{i-te Spalte}} \mid \boldsymbol{0}_{[3 \times \dots]} \right]_{[3 \times 4]}. \tag{11.108}$$

Entsprechend lassen sich auch die Ableitungen berechnen

$$\dot{\boldsymbol{H}}_{Tra_c, T_i} = \left[\boldsymbol{0}_{[3 \times \dots]} \mid \underbrace{\tilde{\boldsymbol{u}}_{S_i} (\tilde{\boldsymbol{u}}_{S_i} \dot{\phi}_{S_i} {}_{A_i} \boldsymbol{r}_{T_i} + \tilde{\boldsymbol{u}}_{L_i} \dot{\delta}_i {}_{L_i} \boldsymbol{r}_{T_i})}_{\text{i-te Spalte}} \mid \boldsymbol{0}_{[3 \times \dots]} \right]_{[3 \times 4]} \tag{11.109}$$

und

$$\dot{\mathbf{H}}_{Tra_{\delta,T_i}} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{0}_{[3 \times \dots]} & | & \underbrace{\tilde{\mathbf{u}}_{L_i} \left((\tilde{\mathbf{u}}_{S_i} \phi_{S_i} + \tilde{\mathbf{u}}_{L_i} \dot{\delta}_i)_{L_i} \mathbf{r}_{T_i} \right)}_{\text{i-te Spalte}} & | & \mathbf{0}_{[3 \times \dots]} \\ \hline & [3 \times 4] \end{array} \right]. \quad (11.110)$$

Durch die Berücksichtigung der Bewegung des Fahrzeugaufbaus (Führungsbewegung) erhält man die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen gegenüber dem Inertialsystem zu:

$${}_E \mathbf{v}_{T_i} = {}_E \mathbf{v}_V + \boldsymbol{\omega}_V \times {}_V \mathbf{r}_{T_i} + {}_V \mathbf{v}_{T_i} \quad (11.111)$$

und

$$\begin{aligned} {}_E \boldsymbol{\alpha}_{T_i} = {}_E \boldsymbol{\alpha}_V + \boldsymbol{\omega}_V \times {}_V \mathbf{v}_{T_i} + \boldsymbol{\alpha}_V \times {}_V \mathbf{r}_{T_i} + {}_V \boldsymbol{\alpha}_{T_i} \\ + \boldsymbol{\omega}_V \times (\boldsymbol{\omega}_V \times {}_V \mathbf{r}_{T_i} + {}_V \mathbf{v}_{T_i}). \end{aligned} \quad (11.112)$$

Die JACOBI-Matrizen $\mathbf{J}_{Tra_{\delta,T_i}}$ lassen sich dann wieder gemäß Gl. (11.85) berechnen:

$$\mathbf{J}_{Tra_{\delta,T_i}} = [I_{[3 \times 3]} \mid -{}_V \tilde{\mathbf{r}}_{T_i} \mid \mathbf{H}_{Tra_{c,T_i}} \mid \mathbf{0}_{[3 \times 4]}], i = 2, \dots, 5. \quad (11.113)$$

Damit kann man die Translationsbeschleunigungen des Radträgers auch schreiben als

$${}_E \boldsymbol{\alpha}_{T_i} = \mathbf{J}_{Tra_{\delta,T_i}} \dot{\mathbf{z}} + {}_E \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{T_i}, \quad (11.114)$$

mit den translatorischen Restbeschleunigungen des Radträgers, die sich durch einsetzen von (11.106) in (11.112) ergeben zu:

$$\begin{aligned} {}_E \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{T_i} &= 2 \boldsymbol{\omega}_V \times {}_V \mathbf{v}_{T_i} + \dot{\mathbf{H}}_{Tra_{c,T_i}} \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{H}_{Tra_{\delta,T_i}} \ddot{\boldsymbol{\delta}} + \dot{\mathbf{H}}_{Tra_{\delta,T_i}} \dot{\boldsymbol{\delta}} + \boldsymbol{\omega}_V \times \boldsymbol{\omega}_V \times {}_V \mathbf{r}_{T_i} \\ &= 2 {}_E \boldsymbol{\omega}_V \times {}_V \mathbf{v}_{T_i} + [\tilde{\mathbf{u}}_{S_i} {}_V \mathbf{v}_{T_i}] \dot{\phi}_{S_i} + [\tilde{\mathbf{u}}_{L_i} {}_{L_i} \mathbf{r}_{T_i}] \ddot{\delta}_i \\ &\quad + \tilde{\mathbf{u}}_{L_i} ([\tilde{\mathbf{u}}_{S_i} \dot{\phi}_{S_i} + \tilde{\mathbf{u}}_{L_i} \dot{\delta}_i] {}_{L_i} \mathbf{r}_{T_i}) \dot{\delta}_i + \boldsymbol{\omega}_V \times (\boldsymbol{\omega}_V \times {}_V \mathbf{r}_{T_i}). \end{aligned} \quad (11.115)$$

Rotation

Für die absolute Winkelgeschwindigkeit der Radträger erhält man:

$${}_E \boldsymbol{\omega}_{T_i} = {}_E \boldsymbol{\omega}_V + {}_V \boldsymbol{\omega}_{T_i} = {}_E \boldsymbol{\omega}_V + \underbrace{\mathbf{u}_{S_i}}_{\mathbf{H}_{Rot_{c,T_i}}} \dot{\phi}_{S_i} + \underbrace{\mathbf{u}_{L_i}}_{\mathbf{H}_{Rot_{\delta,T_i}}} \dot{\delta}_i. \quad (11.116)$$

Aus Gleichung (11.116) ergibt sich wieder durch Ableiten die absolute Winkelbeschleunigung der Radträger:

$$\begin{aligned}
 {}_E\boldsymbol{\alpha}_{T_i} &= {}_E\boldsymbol{\alpha}_V + {}_V\boldsymbol{\alpha}_{T_i} \\
 &= {}_E\boldsymbol{\alpha}_V + {}_E\boldsymbol{\omega}_V \times {}_V\boldsymbol{\omega}_{T_i} + {}_V\dot{\boldsymbol{\omega}}_{T_i} \\
 &= {}_E\boldsymbol{\alpha}_V + {}_E\boldsymbol{\omega}_V \times {}_V\boldsymbol{\omega}_{T_i} + \mathbf{u}_{S_i}\dot{\phi}_{S_i} + \mathbf{u}_{L_i}\ddot{\delta}_i \\
 &\quad + \underbrace{[\tilde{\mathbf{u}}_{S_i} \mathbf{u}_{L_i}] \dot{\phi}_{S_i}}_{\dot{\mathbf{H}}_{Rot,\delta,T_i[3 \times 4]}} \dot{\delta}_i .
 \end{aligned} \tag{11.117}$$

Auch lassen sich wieder direkt die Zusammenhänge für die JACOBImatrizen ablesen:

$$\mathbf{H}_{Rot_c,T_i} = \left[\mathbf{0}_{[3 \times 4]} \mid \underbrace{\mathbf{u}_{S_i}}_{i-\text{te Spalte}} \mid \mathbf{0}_{[3 \times 4]} \right], \tag{11.118}$$

$$\mathbf{H}_{Rot_\delta,T_i} = \left[\mathbf{0}_{[3 \times 4]} \mid \underbrace{\mathbf{u}_{L_i}}_{i-\text{te Spalte}} \mid \mathbf{0}_{[3 \times 4]} \right], \tag{11.119}$$

$$\mathbf{J}_{Rot,T_i} = [\mathbf{0}_{[3 \times 3]} \mid \mathbf{I}_{[3 \times 3]} \mid \mathbf{H}_{Rot_c,T_i} \mid \mathbf{0}_{[3 \times 4]}], i = 2, \dots, 5. \tag{11.120}$$

Entsprechend lassen sich auch die Ableitungen berechnen:

$$\dot{\mathbf{H}}_{Rot_c,T_i} = \left[\mathbf{0}_{[3 \times 1]} \mid \underbrace{\mathbf{0}}_{i-\text{te Spalte}} \mid \mathbf{0}_{[3 \times 1]} \right] \tag{11.121}$$

und

$$\dot{\mathbf{H}}_{Rot_\delta,T_i} = \left[\mathbf{0}_{[3 \times 1]} \mid \underbrace{[\tilde{\mathbf{u}}_{S_i} \mathbf{u}_{L_i}] \dot{\phi}_{S_i}}_{i-\text{te Spalte}} \mid \mathbf{0}_{[3 \times 1]} \right]. \tag{11.122}$$

Damit kann man die rotatorischen Beschleunigungen des Radträgers auch schreiben als

$${}^V_E\boldsymbol{\alpha}_{T_i} = \mathbf{J}_{R,T_i}\dot{\mathbf{z}} + {}_E\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{T_i}, \tag{11.123}$$

mit den rotatorischen Restbeschleunigungen des Radträgers:

$${}_E\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{T_i} = {}_E\boldsymbol{\omega}_V \times {}_V\boldsymbol{\omega}_{T_i} + \mathbf{u}_{L_i}\ddot{\delta}_i + [\tilde{\mathbf{u}}_{S_i} \mathbf{u}_{L_i}] \dot{\phi}_{S_i} \dot{\delta}_i. \tag{11.124}$$

11.2.5 Kinematik der Räder bei der Schräglenkeraufhängung

Translation

Da sich Lage und Bewegung der Räder jeweils nur bezüglich der Raddréhung um die Nabe sowie durch einen anderen radträgerfesten Bezugspunkt unterscheiden, sind die JACOBImatrizen der Translation ganz ähnlich zu denen der Radträger aufgebaut. Es ist lediglich überall der Vektor ${}_{L_i}\mathbf{r}_{T_i}$ durch den Vektor ${}_{L_i}\mathbf{r}_{R_i}$ zu ersetzen. Damit erhält man entsprechend (11.107), (11.108) und (11.113):

$$\mathbf{H}_{Tra_{c,R_i}} = \left[\mathbf{0}_{[3 \times 4]} \mid \underbrace{\tilde{\mathbf{u}}_{S_i} {}_{A_i}\mathbf{r}_{R_i}}_{i\text{-te Spalte}} \mid \mathbf{0}_{[3 \times 4]} \right] \quad (11.125)$$

und

$$\mathbf{H}_{Tra_{\delta,R_i}} = \left[\mathbf{0}_{[3 \times 4]} \mid \underbrace{\tilde{\mathbf{u}}_{L_i} {}_{L_i}\mathbf{r}_{R_i}}_{i\text{-te Spalte}} \mid \mathbf{0}_{[3 \times 4]} \right] \quad (11.126)$$

sowie

$$\mathbf{J}_{Tra,R_i} = [\mathbf{I}_{[3 \times 3]} \mid -v \tilde{\mathbf{r}}_{R_i} \mid \mathbf{H}_{Tra_{c,R_i}} \mid \mathbf{0}_{[3 \times 4]}], i = 6, \dots, 9. \quad (11.127)$$

Entsprechend lassen sich auch die Ableitungen berechnen:

$$\dot{\mathbf{H}}_{Tra_{c,R_i}} = \left[\mathbf{0}_{[3 \times \dots]} \mid \underbrace{\tilde{\mathbf{u}}_{S_i} (\tilde{\mathbf{u}}_{S_i} \dot{\phi}_{S_i} {}_{A_i}\mathbf{r}_{R_i} + \tilde{\mathbf{u}}_{L_i} \dot{\delta}_i {}_{L_i}\mathbf{r}_{R_i})}_{i\text{-te Spalte}} \mid \mathbf{0}_{[3 \times \dots]} \right], \quad (11.128)$$

$$\dot{\mathbf{H}}_{Tra_{\delta,R_i}} = \left[\mathbf{0}_{[3 \times \dots]} \mid \underbrace{\tilde{\mathbf{u}}_{L_i} ((\tilde{\mathbf{u}}_{S_i} \dot{\phi}_{S_i} + \tilde{\mathbf{u}}_{L_i} \dot{\delta}_i) {}_{L_i}\mathbf{r}_{R_i})}_{i\text{-te Spalte}} \mid \mathbf{0}_{[3 \times \dots]} \right]. \quad (11.129)$$

Damit ergeben sich die Translationsgeschwindigkeiten der Radmittelpunkte zu:

$${}_E\mathbf{v}_{R_i} = {}_E\mathbf{v}_V + \boldsymbol{\omega}_V \times {}_V\mathbf{r}_{R_i} + {}_V\mathbf{v}_{R_i}. \quad (11.130)$$

Entsprechendes gilt auch für die Beschleunigungen:

$$\begin{aligned} {}_V\mathbf{a}_{R_i} = & [\tilde{\mathbf{u}}_{S_i} {}_{A_i}\mathbf{r}_{R_i}] \ddot{\phi}_{S_i} + [\tilde{\mathbf{u}}_{L_i} {}_{L_i}\mathbf{r}_{R_i}] \ddot{\delta}_i + [\tilde{\mathbf{u}}_{S_i} {}_V\mathbf{v}_{R_i}] \dot{\phi}_{S_i} + \tilde{\mathbf{u}}_{L_i} \dot{\delta}_i \cdot \\ & ([\tilde{\mathbf{u}}_{S_i} \dot{\phi}_{S_i} + \tilde{\mathbf{u}}_{L_i} \dot{\delta}_i] \cdot {}_{L_i}\mathbf{r}_{R_i}). \end{aligned} \quad (11.131)$$

Für die Translationsbeschleunigung des Rades relativ zum Inertialsystem ergibt sich:

$${}_E \boldsymbol{a}_{R_i} = {}_E \boldsymbol{a}_V + \boldsymbol{\omega}_V \times {}_V \boldsymbol{v}_{R_i} + {}_V \boldsymbol{a}_{R_i}. \quad (11.132)$$

Damit kann man die Beschleunigungen wieder schreiben als:

$${}_E \boldsymbol{a}_{R_i} = \boldsymbol{J}_{Tra,R_i} \dot{\boldsymbol{z}} + {}_E \bar{\boldsymbol{a}}_{R_i}, \quad (11.133)$$

mit den Restbeschleunigungen der Räder

$$\begin{aligned} {}_E \bar{\boldsymbol{a}}_{R_i} &= 2 {}_E \boldsymbol{\omega}_V \times {}_V \boldsymbol{v}_{R_i} + [\tilde{\mathbf{u}}_{S_i} \cdot {}_V \boldsymbol{v}_{R_i}] \dot{\phi}_{S_i} + [\tilde{\mathbf{u}}_{L_i} \cdot {}_{L_i} \boldsymbol{r}_{R_i}] \ddot{\delta}_i + \\ &\quad \tilde{\mathbf{u}}_{L_i} \cdot ([\tilde{\mathbf{u}}_{S_i} \dot{\phi}_{S_i} + \tilde{\mathbf{u}}_{L_i} \dot{\delta}_i] \cdot {}_{L_i} \boldsymbol{r}_{R_i}) \dot{\delta}_i + \boldsymbol{\omega}_V \times \boldsymbol{\omega}_V \times {}_V \boldsymbol{r}_{R_i}. \end{aligned} \quad (11.134)$$

Rotation

Etwas größere Unterschiede zwischen Radträgern und Rädern ergeben sich bei den rotatorischen Größen, da die Räder sich noch um die Raddrehachse drehen. Die Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigungen der Räder ergeben sich aus (11.116) durch hinzufügen der Radeigendrehungen ω_{R_i} :

$$\begin{aligned} {}_E \boldsymbol{\omega}_{R_i} &= {}_E \boldsymbol{\omega}_V + {}_V \boldsymbol{\omega}_{T_i} + {}_{T_i} \boldsymbol{\omega}_{R_i} \\ &= {}_E \boldsymbol{\omega}_V + \underbrace{\mathbf{u}_{S_i}}_{H_{Rot_{c,T_i}}} \dot{\phi}_{S_i} + \underbrace{\mathbf{u}_{L_i}}_{H_{Rot_{\delta,T_i}}} \dot{\delta}_i + \underbrace{\mathbf{u}_{R_i}}_{H_{Rot_{\rho,R_i}}} \omega_{R_i} \end{aligned} \quad (11.135)$$

bzw.

$$\begin{aligned} {}_E \boldsymbol{\alpha}_{R_i} &= {}_E \boldsymbol{\alpha}_V + {}_V \boldsymbol{\alpha}_{T_i} + {}_{T_i} \boldsymbol{\alpha}_{R_i} \\ &= {}_E \boldsymbol{\alpha}_V + {}_E \boldsymbol{\omega}_V \times {}_V \boldsymbol{\omega}_{T_i} + \mathbf{u}_{S_i} \dot{\phi}_{S_i} + \mathbf{u}_{L_i} \ddot{\delta}_i + \mathbf{u}_{R_i} \dot{\omega}_{R_i} \\ &\quad + \underbrace{[\tilde{\mathbf{u}}_{S_i} \mathbf{u}_{L_i}] \dot{\phi}_{S_i}}_{H_{Rot_{\delta,T_i}}} \dot{\delta}_i + \underbrace{([\tilde{\mathbf{u}}_{S_i} \mathbf{u}_{R_i}] \dot{\phi}_{S_i} + [\tilde{\mathbf{u}}_{L_i} \mathbf{u}_{R_i}] \dot{\delta}_i)}_{H_{Rot_{\rho,R_i}}} \omega_{R_i}. \end{aligned} \quad (11.136)$$

Auch hier erkennt man wieder die Zusammenhänge zwischen den Drehachsen der Schräglenkerradaufhängung und den JACOBI-Matrizen aus Abschnitt 11.2.3:

$$\boldsymbol{H}_{Rot_{c,T_i}} = \left[\mathbf{0}_{[3 \times \dots]} \quad | \quad \underbrace{\mathbf{u}_{S_i}}_{i-\text{te Spalte}} \quad | \quad \mathbf{0}_{[3 \times \dots]} \right], \quad (11.137)$$

$$\mathbf{H}_{Rot_{\delta,T_i}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{[3 \times \dots]} & | & \underbrace{\mathbf{u}_{L_i}}_{i-\text{te Spalte}} & | & \mathbf{0}_{[3 \times \dots]} \end{bmatrix}, \quad (11.138)$$

$$\mathbf{H}_{Rot_{\rho,R_i}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{[3 \times \dots]} & | & \underbrace{\mathbf{u}_{R_i}}_{i-\text{te Spalte}} & | & \mathbf{0}_{[3 \times \dots]} \end{bmatrix}, \quad (11.139)$$

$$\mathbf{J}_{Rot_i} = [\mathbf{0}_{[3 \times 3]} \mid \mathbf{I}_{[3 \times 3]} \mid \mathbf{H}_{Rot_{c,R_i}} \mid \mathbf{H}_{Rot_{\rho,R_i}}], i = 2, \dots, 5. \quad (11.140)$$

Entsprechend lassen sich auch die Ableitungen berechnen:

$$\dot{\mathbf{H}}_{Rot_{c,T_i}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{[3 \times \dots]} & | & \underbrace{\mathbf{0}}_{i-\text{te Spalte}} & | & \mathbf{0}_{[3 \times \dots]} \end{bmatrix}, \quad (11.141)$$

$$\dot{\mathbf{H}}_{Rot_{\delta,T_i}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{[3 \times \dots]} & | & \underbrace{[\tilde{\mathbf{u}}_{S_i} \cdot \mathbf{u}_{L_i}] \dot{\phi}_{S_i}}_{i-\text{te Spalte}} & | & \mathbf{0}_{[3 \times \dots]} \end{bmatrix} \quad (11.142)$$

und

$$\dot{\mathbf{H}}_{Rot_{\rho,R_i}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{[3 \times \dots]} & | & \underbrace{[\tilde{\mathbf{u}}_{S_i} \mathbf{u}_{R_i}] \dot{\phi}_{S_i} + [\tilde{\mathbf{u}}_{L_i} \mathbf{u}_{R_i}] \dot{\delta}_i}_{i-\text{te Spalte}} & | & \mathbf{0}_{[3 \times \dots]} \end{bmatrix}. \quad (11.143)$$

Damit kann man die rotatorischen Beschleunigungen des Rades auch schreiben als:

$${}^V_E \boldsymbol{\alpha}_{R_i} = \mathbf{J}_{Rot,R_i} \dot{\mathbf{z}} + {}_E \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{R_i}, \quad (11.144)$$

mit den rotatorischen Restbeschleunigungen des Rades

$$\begin{aligned} {}_E \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{R_i} = {}_E \boldsymbol{\omega}_V \times {}_V \boldsymbol{\omega}_{R_i} + \mathbf{u}_{L_i} \ddot{\delta}_i + & [\tilde{\mathbf{u}}_{S_i} \mathbf{u}_{L_i}] \dot{\phi}_{S_i} \dot{\delta}_i \\ & + ([\tilde{\mathbf{u}}_{S_i} \mathbf{u}_{R_i}] \dot{\phi}_{S_i} + [\tilde{\mathbf{u}}_{L_i} \mathbf{u}_{R_i}] \dot{\delta}_i) \omega_{R_i}. \end{aligned} \quad (11.145)$$

11.2.6 Radkräfte und –momente

Berechnung des Rad-Straße-Kontaktpunktes

Zur Berechnung der Kontaktgrößen zwischen Rad und Straße lassen sich die in Kapitel 7 hergeleiteten Gleichungen heranziehen. Dazu berechnet

man zunächst die kinematischen Größen der Räder in Abhängigkeit von den verallgemeinerten Variablen und den verallgemeinerten Geschwindigkeiten, wie in den vorigen Abschnitten beschrieben. Für den in Kapitel 7 verwendeten Radnormalenvektor \mathbf{n}_{B_i} auf der Querschnittsfläche des Rades R_i gilt:

$$\mathbf{n}_{B_i} = \mathbf{u}_{R_i} . \quad (11.146)$$

Gleichfalls bekannt ist der Ortsvektor zum Mittelpunkt des i-ten Rades (s. Kapitel 7):

$$\mathbf{b}_i = {}_E\mathbf{r}_V + {}_V\mathbf{r}_{A_i} + {}_{A_i}\mathbf{r}_{R_i} \quad (11.147)$$

sowie aus Abschnitt 11.2.3 die translatorischen und rotatorischen Geschwindigkeiten der Radmittelpunkte \mathbf{v}_{R_i} und $\boldsymbol{\omega}_{R_i}$.

Berechnung der Rad-Straße-Kontaktkräfte – Reifenmodell

Damit lassen sich jetzt gemäß Kapitel 7 die Relativgeschwindigkeiten in den Kontaktpunkten berechnen. Diese können nun wieder benutzt werden, um mit einem beliebigen Reifenmodell, wie z.B. der Magic Formula (s. Kapitel 7), bzw. deren vereinfachter Version, die Reifenkräfte $\mathbf{F}_{R_i}, i = 1, \dots, 4$ zu berechnen.

11.2.7 Aufbaufedern und -dämpfer

Kraftangriffspunkte

Die Kraftangriffspunkte der Aufbaufeder und des Aufbaudämpfers sollen im Rahmen einer Parametrierung des Modells noch frei festlegbar sein. Aus diesem Grund werden für die Feder und den Dämpfer jeweils unterschiedliche Angriffspunkte der Kraftelemente festgelegt. Die aufbaufesten Angriffspunkte seien ${}_V\mathbf{r}_{F,A_i}$ für die Aufbaufedern und ${}_V\mathbf{r}_{D,A_i}$ für die Aufbaudämpfer. Für die entsprechenden Punkte auf dem Radträger gilt:

$${}_V\mathbf{r}_{F,T_i} = {}_V\mathbf{r}_{T_i} + {}_{T_i}\mathbf{r}_{F,T_i}, \quad (11.148)$$

$${}_V\mathbf{r}_{D,T_i} = {}_V\mathbf{r}_{T_i} + {}_{T_i}\mathbf{r}_{D,T_i}. \quad (11.149)$$

Damit erhält man die Differenzvektoren für die Federkraft im fahrzeugfesten Koordinatensystem

$$\Delta\mathbf{r}_{F_i} = {}_V\mathbf{r}_{A_i,F} - {}_V\mathbf{r}_{T_i,F}. \quad (11.150)$$

Für die Berechnung der Dämpferkraft benötigt man noch den Differenzvektor:

$$\Delta \mathbf{r}_{D_i} = {}_V \mathbf{r}_{A_i, D} - {}_V \mathbf{r}_{T_i, D} \quad (11.151)$$

und den Geschwindigkeitsvektor:

$$\Delta_{S_i}^V \mathbf{v}_{D_i} = \left[\tilde{\mathbf{u}}_{S_i} {}^V \mathbf{T}_{S_i} \overset{S_i}{A_i} \mathbf{r}_{D_i} \right] \dot{\phi}_{S_i}, \quad (11.152)$$

mit der Geschwindigkeit

$$\dot{l}_{D_i} = \text{sign}(\dot{\phi}_{S_i}) \left\| \Delta_{S_i}^V \mathbf{v}_{D_i} \right\|_2. \quad (11.153)$$

Kraftgesetze

Für die Federkräfte ergibt sich:

$$\mathbf{F}_{F_i} = \underbrace{f_i(l_{F_i})}_{\substack{\text{Kraft-} \\ \text{gesetz}}} \frac{\Delta {}^V \mathbf{r}_{F_i}}{\underbrace{\Delta l_{F_i}}_{\substack{\text{Kraft-} \\ \text{richtung}}}} = f_i(l_{F_i}) \mathbf{u}_{F_i}. \quad (11.154)$$

Mit der Längenänderung $\Delta l_{F_i} = \left\| \Delta {}^V \mathbf{r}_{F_i} \right\|_2$ erhält man schließlich die Federkraft:

$$\mathbf{F}_{F_i} = c_{F_i} (l_{0F_i} - l_{F_i}) \frac{\mathbf{r}_{F_i}}{l_{F_i}} \quad (11.155)$$

sowie die Dämpferkraft

$${}_V \mathbf{F}_{D_i} = d_i \dot{l}_{D_i} \frac{\Delta {}^V \mathbf{r}_{D_i}}{l_{D_i}}. \quad (11.156)$$

11.2.8 Windkräfte

Es sind jetzt noch gemäß Kapitel 9 die Windkräfte

$$\mathbf{F}_W = -\frac{1}{2} c_W \varrho A \dot{\mathbf{r}}_V \|\dot{\mathbf{r}}_V\|_2 = -\frac{1}{2} c_W \varrho A \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (11.157)$$

mit dem durch den Ortsvektor ${}_V \mathbf{r}_W$ gegebenen fiktiven Kraftangriffspunkt zu berücksichtigen.

11.2.9 Lenkung

In diesem Kapitel soll nur ein sehr einfaches Lenkungsmodell verwendet werden, das keinerlei Lenkelastizitäten abbildet. Zunächst wird davon ausgegangen, dass der vom Fahrer (hier als Zeitfunktion) vorgegebene Lenkwinkel δ_H mit einer konstanten Übersetzung i_L in eine Verschiebung s_H der Zahnstange umgesetzt wird, s. Abb.11.12:

$$\delta_H = i_L s_H . \quad (11.158)$$

Der Zusammenhang zwischen der Verschiebung der Zahnstange und dem Lenkwinkel der Räder ist i.A. nichtlinear, d.h. die Lenkwinkel δ_1 und δ_3 an der Vorderachse sind nichtlineare Funktionen der Zahnstangenverschiebung und damit über die Gl. (11.158) indirekt auch des Lenkradwinkels $\delta_H(t)$:

$$\delta_1 = \bar{\delta}_1(s_H) = \delta_1(\delta_H), \quad \delta_2 = \bar{\delta}_2(s_H) = \delta_2(\delta_H). \quad (11.159)$$

Die Zeitableitungen der Radlenkwinkel erhält man dann durch Zeitdifferenziation von Gl. (11.159):

$$\dot{\delta}_1 = \frac{\partial \bar{\delta}_1}{\partial s_H} \dot{s}_H = \frac{\partial \bar{\delta}_1}{\partial s_H} \frac{1}{i_L} \dot{\delta}_H \quad \ddot{\delta}_1 = \frac{\partial \bar{\delta}_1}{\partial s_H} \frac{1}{i_L} \ddot{s}_H + \frac{\partial^2 \bar{\delta}_1}{\partial s_H^2} \frac{1}{i_L^2} \dot{\delta}_H^2 . \quad (11.160)$$

Die Lenkwinkel δ_2 und δ_4 an der Hinterachse sollen im Folgenden als konstant angenommen werden, d.h. die Hinterachse wird nicht gelenkt.

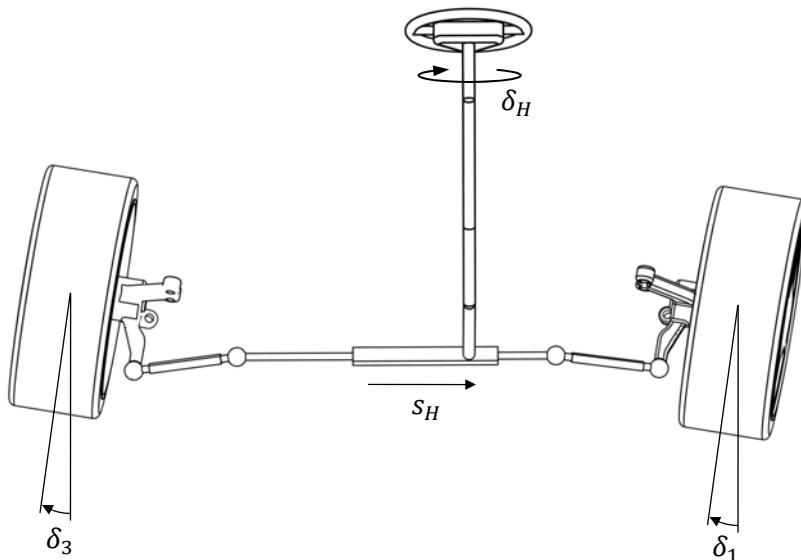


Abb.11.12: Einfaches Lenkungsmodell

11.2.10 Stabilisator

Für die von den Stabilisatoren ausgeübten Kräfte gelten gemäß Kapitel 9 die Beziehungen:

$$\mathbf{F}_{St_3} = -\mathbf{F}_{St_1} = -\frac{l_{St,v}^2}{2s_{St,v}b_{St,v}^2} c_{St,v} \varphi_V \mathbf{e}_z, \quad (11.161)$$

$$\mathbf{F}_{St_4} = -\mathbf{F}_{St_2} = -\frac{l_{St,h}^2}{2s_{St,h}b_{St,h}^2} c_{St,h} \varphi_V \mathbf{e}_z. \quad (11.162)$$

Damit wirkt auf den Aufbau das Drehmoment:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{St} &= (l_{St,v}F_{St,v} + l_{St,h}F_{St,h}) \mathbf{e}_x \\ &= \left(\frac{l_{St,v}}{b_{St,v}^2} c_{St,v} + \frac{l_{St,h}}{b_{St,h}^2} c_{St,h} \right) \varphi_V \mathbf{e}_x \end{aligned} \quad (11.163)$$

um die aufbaufeste x-Achse.

11.2.11 Eingeprägte Kräfte und Momente

Zur Erstellung der Bewegungsgleichungen werden noch die eingeprägten Kräfte und Momente auf den Aufbau benötigt. Die infolge der Radaufhängungen ebenfalls auftretenden Reaktionskräfte zwischen Aufbau und Radträgern brauchen nicht berechnet zu werden, da sie bei der Berechnung der Bewegungsgleichungen aus den NEWTON-EULERschen Gleichungen durch die Anwendung des JOURDAINSchen Prinzips ohnehin herausfallen, s. Kapitel 4.

Eingeprägte Kräfte und Momente auf den Aufbau

$$\mathbf{F}_V^e = \mathbf{F}_W + \sum_{i=1}^4 (\mathbf{F}_{F_i} + \mathbf{F}_{D_i}) - m_V g \mathbf{e}_z, \quad (11.164)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_V^e &= {}_V \mathbf{r}_W \times \mathbf{F}_W \\ &+ \sum_{i=1}^4 ({}_V \mathbf{r}_{A_i,F} \times \mathbf{F}_{F_i} + {}_V \mathbf{r}_{A_i,D} \times \mathbf{F}_{D_i}) + \mathbf{M}_{St}. \end{aligned} \quad (11.165)$$

Eingeprägte Kräfte und Momente auf die Radträger ($i = 1, \dots, 4$)

$$\mathbf{F}_{T_i}^e = -(\mathbf{F}_{F_i} + \mathbf{F}_{D_i} + \mathbf{F}_{St_i}) - m_{T_i} g \mathbf{e}_z, \quad (11.166)$$

$$\mathbf{T}_{T_i}^e = -\left({}_{T_i}\mathbf{r}_{F,T_i} \times \mathbf{F}_{F_i} + {}_{T_i}\mathbf{r}_{D,T_i} \times \mathbf{F}_{D_i}\right) + {}_{T_i}\mathbf{r}_{T_i,St} \times \mathbf{F}_{St_i}. \quad (11.167)$$

Kräfte und Momente auf die Räder ($i = 1, \dots, 4$)

$$\mathbf{F}_{R_i}^e = \mathbf{F}_{R_i} - m_{R_i} g \mathbf{e}_z, \quad (11.168)$$

$$\mathbf{T}_{R_i}^e = {}_{R_i}\mathbf{r}_{R_i,A} \times \mathbf{F}_{R_i} + \left(M_{R_i,A} - M_{R_i,B} \operatorname{sign}(\dot{\rho}_{R_i})\right) \mathbf{u}_{R_i}. \quad (11.169)$$

Die Antriebsmomente $M_{R_i,A}$ und die Bremsmomente $M_{R_i,B}$ werden wieder gemäß der Gln. (11.42) und (11.45) berechnet.

11.2.12 NEWTON-EULERsche Gleichungen

Mit den Vorarbeiten der vorigen Abschnitte ist es jetzt möglich, für alle Körper die NEWTONschen und die EULERschen Gleichungen im fahrzeugfesten Koordinatensystem anzugeben. Die allgemeine Form der NEWTONschen Gleichungen lautet gemäß Kapitel 4:

$$m_i \mathbf{J}_{Tra_i} \dot{\mathbf{z}} + m_i \bar{\mathbf{a}}_i(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t) = \mathbf{F}_i^e + \mathbf{F}_i^r, \quad i = 1, \dots, 9, \quad (11.170)$$

mit dem Vektor der eingeprägten Kräfte \mathbf{F}_i^e und dem Vektor der Reaktionskräfte \mathbf{F}_i^r . Entsprechend erhält man für die EULERschen Gleichungen bezüglich des jeweiligen Massenschwerpunktes:

$$\boldsymbol{\Theta}_i \mathbf{J}_{Rot_i} \dot{\mathbf{z}} + \boldsymbol{\Theta}_i \bar{\mathbf{a}}_i(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t) + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i(\boldsymbol{\Theta}_i \boldsymbol{\omega}_i) = \mathbf{T}_i^e + \mathbf{T}_i^r, \quad i = 1, \dots, 9, \quad (11.171)$$

mit dem Vektor der eingeprägten Momente \mathbf{T}_i^e und dem Vektor der Reaktionsmomente \mathbf{T}_i^r . Man beachte, dass sämtliche Größen in den Gln. (11.170) und (11.171) absolute Größen sind, sich auf die jeweiligen Massenmittelpunkte beziehen und im aufbaufesten Koordinatensystem dargestellt werden müssen. Das bedeutet insbesondere, dass die Trägheitsmatrizen jeweils in das aufbaufeste Koordinatensystem zu transformieren sind:

$${}^V \boldsymbol{\Theta}_{T_i} = {}^V \mathbf{T}_{T_i} \underbrace{{}^{T_i} \boldsymbol{\Theta}_{T_i}}_{\text{const}} {}^V \mathbf{T}_{T_i}^T, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (11.172)$$

$${}^V\boldsymbol{\Theta}_{R_i} = \underbrace{{}^V\mathbf{T}_{R_i}}_{\text{const}} {}^{T_i}\boldsymbol{\Theta}_{R_i} {}^V\mathbf{T}_{R_i}^T, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (11.173)$$

Aus den Gleichungen (11.170) und (11.171) erhält man durch Linksmultiplikation mit den transponierten JACOBImatrizen und anschließendem Aufsummieren über alle Körper gemäß Kapitel 4 die Bewegungsgleichungen des Systems:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^9 \underbrace{[J_{Tra_i}^T m_i J_{Tra_i} + J_{Rot_i}^T {}^V\boldsymbol{\Theta}_i J_{Rot_i}]}_{\text{Massenmatrix } \mathbf{M}(\mathbf{q}, t)} \dot{\mathbf{z}} \\ & + \underbrace{\sum_{i=1}^9 m_i J_{Tra_i}^T \mathbf{a}_i + J_{Rot_i}^T {}^V\boldsymbol{\Theta}_i \mathbf{a}_i + J_{Rot_i}^T \boldsymbol{\omega}_i \times ({}^V\boldsymbol{\Theta}_i \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\omega}_i)}_{\text{Zentrifugal-, Kreisel und Corioliskräfte } \mathbf{b}(\mathbf{z}, \mathbf{q}, t)} \\ & = \underbrace{\sum_{i=1}^9 J_{Tra_i}^T \mathbf{F}_i^e + J_{Rot_i}^T \mathbf{T}_i^e}_{\text{verallg. Kräfte } \mathbf{Q}(\mathbf{z}, \mathbf{q}, t)} + \underbrace{\sum_{i=1}^9 J_{Tra_i}^T \mathbf{F}_i^r + J_{Rot_i}^T \mathbf{T}_i^r}_{0}, = 1, \dots, n_B. \end{aligned} \quad (11.174)$$

Die Bewegungsgleichungen bestehen gemäß Kapitel 4 aus drei Anteilen:

- der $[f \times f]$ -Massenmatrix $\mathbf{M}(\mathbf{q}, t)$,
- dem $[f \times 1]$ -Vektor der verallgemeinerten Zentrifugal-, Kreisel und Corioliskräfte $\mathbf{b}(\mathbf{z}, \mathbf{q}, t)$
- und dem $[f \times 1]$ -Vektor der verallgemeinerten Kräfte $\mathbf{Q}(\mathbf{z}, \mathbf{q}, t)$.

Die Reaktionskräfte entfallen gemäß des JOURDAINSchen Prinzips.

Massenmatrix

Zur einfacheren und übersichtlicheren Darstellung wird die symmetrische $[14 \times 14]$ -Massenmatrix $\mathbf{M}(\mathbf{q}, t)$ separat für die einzelnen Baugruppen berechnet:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{VV} & \mathbf{M}_{V\omega} & \mathbf{M}_{VT} & \mathbf{M}_{VR} \\ & \mathbf{M}_{\omega\omega} & \mathbf{M}_{\omega T} & \mathbf{M}_{\omega R} \\ & \text{symmetrisch} & \mathbf{M}_{TT} & \mathbf{M}_{TR} \\ & & & \mathbf{M}_{RR} \end{bmatrix}, \quad (11.175)$$

mit

$$\mathbf{M}_{VV} = \mathbf{I} \left(m_v + \sum_{i=1}^4 m_{T_i} + m_{R_i} \right), \quad (11.176)$$

$$\mathbf{M}_{V\omega} = - \sum_{i=1}^4 ({}_V \tilde{\mathbf{r}}_{T_i} m_{T_i} + {}_V \tilde{\mathbf{r}}_{R_i} m_{R_i}), \quad (11.177)$$

$$\mathbf{M}_{VT} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{H}_{Tra_c, T_i} m_{T_i} + \mathbf{H}_{Tra_c, R_i} m_{R_i}, \quad (11.178)$$

$$\mathbf{M}_{VR} = \mathbf{0}, \quad (11.179)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\omega\omega} &= {}^V \boldsymbol{\theta}_V \\ &+ \sum_{i=1}^4 ({}^V \boldsymbol{\theta}_{T_i} + {}^V \boldsymbol{\theta}_{R_i} + {}_V \tilde{\mathbf{r}}_{T_i}^T {}_V \tilde{\mathbf{r}}_{T_i} m_{T_i} + {}_V \tilde{\mathbf{r}}_{R_i}^T {}_V \tilde{\mathbf{r}}_{R_i} m_{R_i}), \end{aligned} \quad (11.180)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\omega T} &= \sum_{i=1}^4 (- {}_V \tilde{\mathbf{r}}_{T_i}^T \mathbf{H}_{Tra_c, T_i} m_{T_i} - {}_V \tilde{\mathbf{r}}_{R_i}^T \mathbf{H}_{Tra_c, R_i} m_{R_i} \\ &\quad + ({}^V \boldsymbol{\theta}_{T_i} + {}^V \boldsymbol{\theta}_{R_i}) \mathbf{H}_{Rot_c, T_i}), \end{aligned} \quad (11.181)$$

$$\mathbf{M}_{\omega R} = \sum_{i=1}^4 {}^V \boldsymbol{\theta}_{R_i} \mathbf{H}_{Rot_{\rho}, R_i}, \quad (11.182)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{TT} &= \sum_{i=1}^4 (\mathbf{H}_{Tra_c, T_i}^T \mathbf{H}_{tra_c, T_i} m_{T_i} + \mathbf{H}_{Tra_c, R_i}^T \mathbf{H}_{tra_c, R_i} m_{R_i} + \mathbf{H}_{Rot_c, T_i}^T ({}^V \boldsymbol{\theta}_{T_i} \\ &\quad + {}^V \boldsymbol{\theta}_{R_i}) \mathbf{H}_{Rot_c, T_i}), \end{aligned} \quad (11.183)$$

$$\mathbf{M}_{TR} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{H}_{Rot_c, T_i}^T {}^V \boldsymbol{\theta}_{R_i} \mathbf{H}_{Rot_{\rho}, R_i}, \quad (11.184)$$

$$\mathbf{M}_{RR} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{H}_{Rot_{\rho}, R_i}^T {}^V \boldsymbol{\theta}_{R_i} \mathbf{H}_{Rot_{\rho}, R_i}. \quad (11.185)$$

Man beachte, dass es sich bei den Matrizenprodukten

$$\mathbf{H}_{Tra_c, T_i}^T \mathbf{H}_{Tra_c, T_i} \quad (11.186)$$

um Diagonalmatrizen handelt. Unter Berücksichtigung der Gln. (11.176) bis (11.186) erhält die Massenmatrix die folgende Struktur:

$$\left[\begin{array}{c|ccccc|cccc} \blacksquare & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \blacksquare & 0 & \blacksquare \\ \blacksquare & 0 & 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \text{symmetrisch} & \blacksquare & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \blacksquare & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \blacksquare & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \blacksquare & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \blacksquare & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \blacksquare & 0 & 0 \\ & & & & & & & \blacksquare & 0 \\ & & & & & & & & \blacksquare \\ \end{array} \right]_{[14 \times 14]} \quad (11.187)$$

Vektor der verallgemeinerten Zentrifugal-, Kreisel- und Corioliskräfte

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(\mathbf{q}, \mathbf{z}, t) &= \sum_{i=1}^9 m_i \mathbf{J}_{Tra_i}^T \bar{\mathbf{a}}_i + \mathbf{J}_{Rot_i}^T (\mathbf{\Theta}_i \bar{\mathbf{a}}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i (\mathbf{\Theta}_i \boldsymbol{\omega}_i)) \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_V (\mathbf{\Theta}_V \boldsymbol{\omega}_V) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &+ \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} m_{T_i} \bar{\mathbf{a}}_{T_i} + m_{R_i} \bar{\mathbf{a}}_{R_i} \\ -(m_{T_i} V \tilde{\mathbf{r}}_{T_i}^T \bar{\mathbf{a}}_{T_i} + m_{R_i} V \tilde{\mathbf{r}}_{R_i}^T \bar{\mathbf{a}}_{R_i}) \\ m_{T_i} \mathbf{H}_{Tra_c, T_i}^T \bar{\mathbf{a}}_{T_i} + m_{R_i} \mathbf{H}_{Tra_c, R_i}^T \bar{\mathbf{a}}_{R_i} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{\Theta}_{T_i} \bar{\mathbf{a}}_{T_i} + \mathbf{\Theta}_{R_i} \bar{\mathbf{a}}_{R_i} \\ \mathbf{H}_{Rot_c, T_i}^T \mathbf{\Theta}_{T_i} \bar{\mathbf{a}}_{T_i} + \mathbf{H}_{Rot_p, R_i}^T \mathbf{\Theta}_{R_i} \bar{\mathbf{a}}_{R_i} \\ \mathbf{H}_{Rot_p, R_i}^T \mathbf{\Theta}_{R_i} \bar{\mathbf{a}}_{R_i} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{T_i} (\mathbf{\Theta}_{T_i} \boldsymbol{\omega}_{T_i}) + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{R_i} (\mathbf{\Theta}_{R_i} \boldsymbol{\omega}_{R_i}) \\ \mathbf{H}_{Rot_c, T_i}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{T_i} (\mathbf{\Theta}_{T_i} \boldsymbol{\omega}_{T_i}) + \mathbf{H}_{Rot_c, T_i}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{R_i} (\mathbf{\Theta}_{R_i} \boldsymbol{\omega}_{R_i}) \\ \mathbf{H}_{Rot_p, R_i}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{R_i} (\mathbf{\Theta}_{R_i} \boldsymbol{\omega}_{R_i}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (11.188)$$

Verallgemeinerte Kräfte

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{z}, t) &= \sum_{i=1}^9 \mathbf{J}_{Tra_i}^T \mathbf{F}_i^e + \mathbf{J}_{Rot_i}^T \mathbf{T}_i^e \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{T_1}^e \\ \mathbf{T}_{T_1}^e \\ \mathbf{0}_{[4 \times 1]} \\ \mathbf{0}_{[4 \times 1]} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{T_i}^e \\ -v\tilde{\mathbf{r}}_{T_i}^T \mathbf{F}_{T_i}^e \\ \mathbf{H}_{Tra_c, T_i}^T \mathbf{F}_{T_i}^e \\ \mathbf{0}_{[4 \times 1]} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{T_i}^e \\ -v\tilde{\mathbf{r}}_{R_i}^T \mathbf{T}_{T_i}^e \\ \mathbf{H}_{Tra_c, R_i}^T \mathbf{T}_{T_i}^e \\ \mathbf{0}_{[4 \times 1]} \end{bmatrix} \\
 &\quad + \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{[3 \times 1]} \\ \mathbf{F}_{R_i}^e \\ \mathbf{H}_{Rot_c, T_i}^T \mathbf{F}_{R_i}^e \\ \mathbf{0}_{[4 \times 1]} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{[3 \times 1]} \\ \mathbf{T}_{R_i}^e \\ \mathbf{H}_{Rot_c, T_i}^T \mathbf{T}_{R_i}^e \\ \mathbf{H}_{Rot_p, R_i}^T \mathbf{T}_{R_i}^e \end{bmatrix}. \tag{11.189}
 \end{aligned}$$

11.2.13 Bewegungs- und Zustandsgleichungen

Mit dem $[28 \times 1]$ -Zustandsvektor

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \tag{11.190}$$

und den Zusammenhängen

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{q}, t) \mathbf{z} = \begin{bmatrix} {}^V\mathbf{T}_E^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_\omega^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{4 \times 4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{4 \times 4} \end{bmatrix} \mathbf{z}, \tag{11.191}$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}, t)(\mathbf{Q}(\mathbf{z}, \mathbf{q}, t) - \mathbf{b}(\mathbf{z}, \mathbf{q}, t)) \tag{11.192}$$

ergeben sich schließlich die Zustandsgleichungen des Systems:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{q}, t) \mathbf{z} \\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}, t)(\mathbf{Q}(\mathbf{z}, \mathbf{q}, t) - \mathbf{b}(\mathbf{z}, \mathbf{q}, t)) \end{bmatrix}. \tag{11.193}$$

11.3 Ein einfaches Fahrermodell

Der Schwerpunkt dieses Kapitels liegt auf der Beschreibung von Simulationsmodellen für Fahrzeuge. Um mit den erstellten Simulationsmodellen

tatsächlich komplexere Fahrmanöver, wie z.B. Spurwechsel, Slalomfahrten oder auch Spurhaltungsfahrten durchführen zu können, sind jedoch auch Modelle zur Fahrzeugführung bzw. Fahrermodelle erforderlich. Daher soll in diesem Kapitel ein einfaches Fahrermodell besprochen werden. Ansonsten sei auf die spezielle Fachliteratur zu diesem Thema verwiesen. Hier wird im Folgenden das Konzept eines einfachen Fahrermodells beschrieben, welches auf einem linearen Regler beruht. Das Modell wurde ursprünglich von (Adamski 2001) entwickelt und in das Fahrzeugsimulationssystem FASIM_C++ (Opgeen-Rhein 1998) implementiert.

11.3.1 Reglerkonzept

Für FASIM_C++, s. Kapitel 12, wurde ein einfaches Fahrermodell entwickelt, welches einen Kurs- und einen Geschwindigkeitsregler enthält. Das Modell ist in der Lage, neben der Einregelung der Fahrzeuggeschwindigkeit auch einem vorgegebenen Kurs zu folgen (Opgeen-Rhein 1998). Der Geschwindigkeitsregler wurde dabei der Einfachheit halber als PID-Regler realisiert.

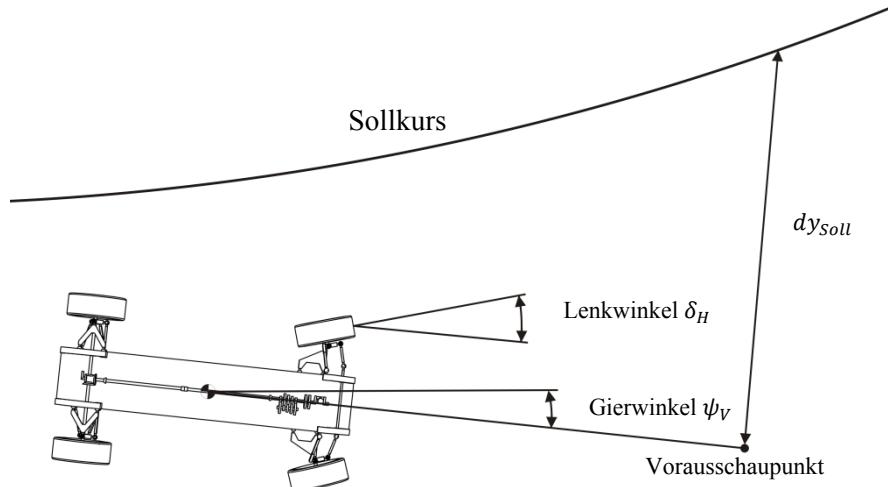


Abb. 11.13: Deichselmodell

Für den Lenkregler wurde ein lineares Prädiktionsmodell zugrunde gelegt. In diesem Modell wird unterstellt, dass der Fahrer so lenkt, dass ein imaginärer Punkt in einer definierten Vorausschauentfernung möglichst mit dem Sichtpunkt zusammenfällt. Physikalisch interpretiert bedeutet das, dass der Fahrer versucht, die Querabweichung in der Vorausschauentfernung zu minimieren. Dieses Modell findet man in der Literatur auch als sogenann-

tes Deichselmodell, Abb. 11.13. Es besteht aus einer antizipatorischen Steuerung und einer kompensatorischen Regelung, Abb. 11.14. Die Steuerung repräsentiert sozusagen die Erfahrung des Fahrers, während die Regelung die Abweichung vom Sollkurs minimiert. Die Reaktionszeit des Fahrers kann durch ein entsprechendes Totzeitglied berücksichtigt werden.

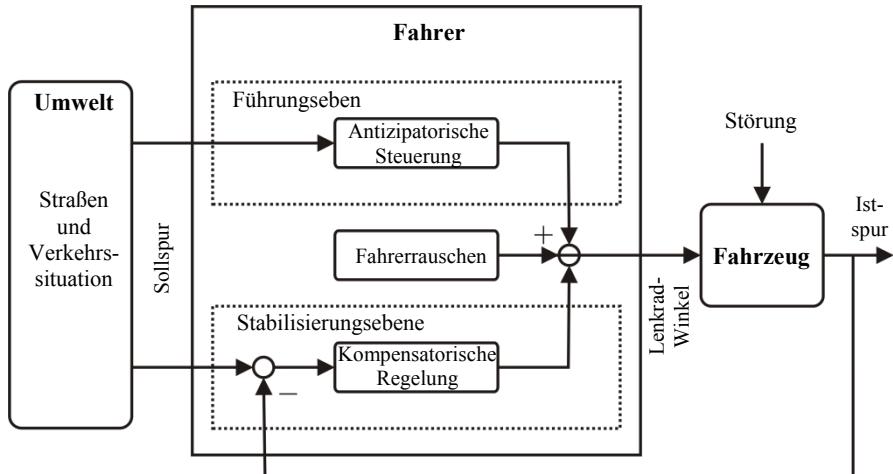


Abb. 11.14: Kursregelung (Dong 1978)

Wie in Abb. 11.15 dargestellt, besteht die Eingangsschnittstelle des Fahrermodells aus dem Gierwinkel und der Position des Fahrzeugs sowie der Sollkurs- und Sollgeschwindigkeitsvorgabe. Die Ausgangsschnittstelle wird durch die Stellgrößen Lenkwinkel und Drosselklappenstellung bestimmt.

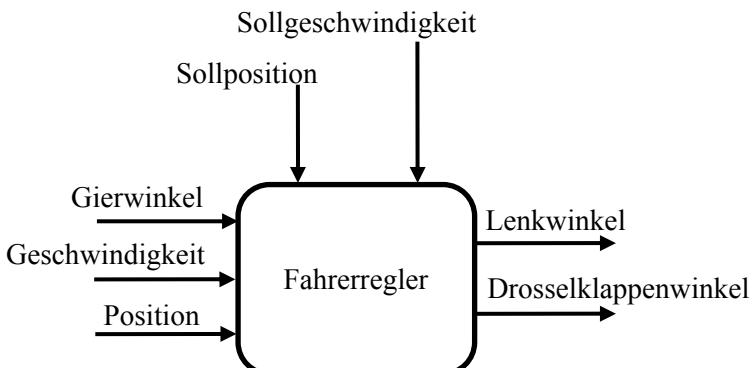


Abb. 11.15: Schnittstellen des Fahrerreglers

Der Lenkwinkel setzt sich zusammen aus einem Steuerungs- und einem Regelungsanteil, s. Abb. 11.16. Der Steuerungsanteil bestimmt die Differenz zwischen der Fahrzeugorientierung (Gierwinkel) und der sich aus der Sollkursvorgabe ergebenden Tangente. Der Regelungsanteil wird von einem PT_2 -Regler berechnet, welcher die Querabweichung des Vorausschaupunktes und des zugehörigen Sollkurspunktes minimieren soll. Die Bestimmung der Regelparameter ist in (Opgen-Rhein 1998) beschrieben.

$$\delta_H = \arctan dy_{soll} - \psi_V, \quad (11.194)$$

mit dem Lenkwinkel (Steuerungsanteil) δ_H , der Tangente des Sollkurses an Fahrzeugposition und dem Gierwinkel ψ_V . Der Regelungsanteil wird von einem PT_2 -Regler berechnet, welcher die Querabweichung des Vorausschaupunktes und des zugehörigen Sollkurspunktes minimieren soll. Die Bestimmung der Regelparameter ist in (Opgen-Rhein 1998) beschrieben.

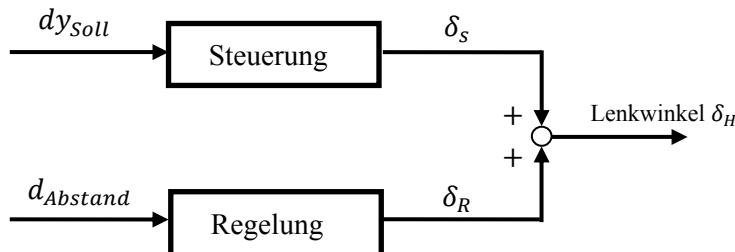


Abb. 11.16: Aufbau des Lenkreglers

11.4 Parametrierung

In Tabelle 11.8 sind exemplarisch einige Werte für die beschriebenen Fahrzeugmodelle angegeben.

Tabelle 11.8: Beispielwerte

Daten für Einspurmodell des Durchschnittsmodells		
m - Fahrzeugmasse	1506,5	kg
θ_{zz} - Trägheitsmoment um Hochachse bzgl. S	2585,6	kNm^2
l - Radstand	2,6897	m
l_v - Abstand Schwerpunkt - Vorderachse	1,1853	m
l_h - Abstand Schwerpunkt - Hinterachse	1,5044	m
s_z - Schwerpunkthöhe	0,54475	m
i_L - Lenkübersetzung	16,3	
c_w -Wert	n.a.	
A - Stirnfläche	2,14	m^2
r_{dyn} - (dynamischer) Reifenradius	0,31075	m
J_r - Trägh.m. Räder pro Achse	1,7	kNm^2

Daten für Zweispurmodell des DM		
m - Fahrzeugmasse	1506,5	kg
θ_{xx} - Trägheitsmoment um die Längsachse bzgl. S	482,7	kNm^2
θ_{yy} - Trägheitsmoment um die Querachse bzgl. S	2394,3	kNm^2
θ_{zz} - Trägheitsmoment um Hochachse bzgl. S	2585,6	kNm^2
l - Radstand	2,6897	m
l_v - Abstand Schwerpunkt – Vorderachse	1,1853	m
l_h - Abstand Schwerpunkt – Hinterachse	1,5044	m
t_f - Spurweite vorne	1492,2	mm
t_r - Spurweite hinten	1487,4	mm
h_s - Schwerpunkthöhe	0,54475	m
i_L - Lenkübersetzung	16,3	–
c_w -Wert	0,33	–
A – Stirnfläche	2,14	m^2
r - (dynamischer) Reifenradius	0,31075	m
θ_r - Trägh.m. Räder pro Achse	1,7	kNm^2
$C_{f,vi}$ - Federsteifigkeiten vorne	34900	N/m
$C_{f,hi}$ - Federsteifigkeiten hinten	32600	N/m
D_{vi} - Dämpfungsmass vorne	4360	Ns/m
D_{hi} - Dämpfungsmass hinten	3870	Ns/m
C_{si} - Stabilisatorsteifigkeit Vorne/Hinten	2882	Nm/rad

12 Räumliche Gesamtfahrzeugmodelle

Um die Bewegungsgleichungen für ein Gesamtfahrzeug aufzustellen zu können, wird in einem ersten Schritt der mechanische Aufbau des realen Fahrzeugs durch ein mechanisches Ersatzsystem, bestehend aus starren Körpern, idealen Gelenken und beliebigen äußeren Kräften (jeweils mit gegebenen Kraftangriffspunkten), mit Hilfe der Methode der Mehrkörpersysteme (MKS) beschrieben. Die Grundgedanken der Modellierung des mechanischen Gesamtsystems Kraftfahrzeug werden erläutert. Die Modellbildung stützt sich dabei auf die Modellierungselemente und Hilfsmittel, wie sie in Kapitel 3, Kapitel 4 sowie den Kapiteln 5 bis 9 zur Beschreibung von Fahrzeugkomponenten eingeführt worden sind. Hierbei kommt einer möglichst genauen Beschreibung der nichtlinearen Kinematik der Radaufhängungen eine besondere Bedeutung zu, da hieraus wesentliche Einflüsse auf das dynamische Verhalten des Gesamtfahrzeugs resultieren (siehe hierzu insbesondere auch Kapitel 6).

12.1 Modellierung eines Gesamtfahrzeugs

Ein sehr wichtiger Aspekt, der später noch näher beleuchtet wird, betrifft die Modularisierung solcher Gesamtfahrzeugmodelle. Darunter ist zu verstehen, dass sowohl mechanische als auch nichtmechanische Subsysteme und Komponenten – wie etwa Radaufhängungen, Antriebsstränge, Räder und Reifen, aber auch die hier nicht näher behandelten elektronischen Elemente, Regler oder ECUs (Electronic Control Unit) – so aufbereitet werden sollen, dass sie auf möglichst „einfache Weise“ gewissermaßen zum jeweilig gewünschten Gesamtfahrzeugmodell, im Sinne eines *mechatronischen Gesamtsystems*, „zusammengeklickt“ werden können.

In den folgenden Abschnitten wird anhand unterschiedlicher Fahrzeugtypen – heck-, front- und allradgetrieben – beginnend mit einem heckgetriebenen Fahrzeug, am Beispiel eines 5er BMW (E60), s. Abb. 12.1, die mechanische Modellbildung im Detail vorgestellt. Hierbei kommt der Kinematik, wie in Kapitel 3 ausführlich erläutert, eine Schlüsselrolle zu. Die für die spätere Aufstellung der Dynamikgleichungen (vgl. Kapitel 4) benötigte

tigten Gleichungen der *globalen Kinematik* setzen sich, wie gezeigt, zusammen aus den Gleichungen der *relativen Kinematik* und den Gleichungen der *absoluten Kinematik*. Während die Gleichungen der Absolutkinematik, wie in Abschnitt 3.5 gezeigt, immer in rekursiver Form aufgestellt werden können, liegen die Verhältnisse bei der Relativkinematik aufgrund der kinematischen Schleifen ungleich komplizierter. Das Hauptaugenmerk bei der sich anschließenden kinematischen Modellbildung liegt daher auf einer geschickten Wahl und Beschreibung dieser kinematischen Schleifen, wie sie besonders in den Radaufhängungen auftreten, um auf diese Weise zu einer expliziten – oder möglichst expliziten – mathematischen Behandlung der Relativkinematik zu gelangen.

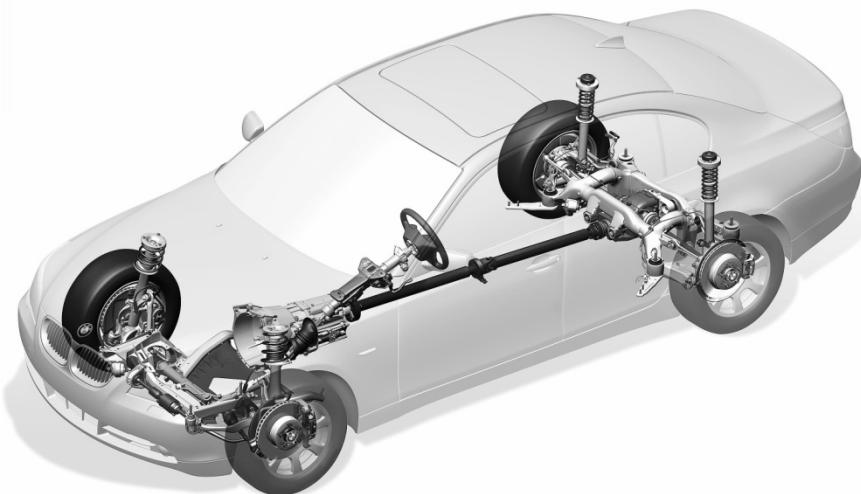


Abb. 12.1: 5er BMW – reales Fahrzeug (mit freundlicher Genehmigung der BMW AG, 2003)

12.1.1 Kinematik eines heckgetriebenen Fahrzeugmodells

Das Fahrgestell bzw. der Fahrzeugaufbau wird als massebehafteter starrer Körper mit vollbesetztem Trägheitstensor modelliert (Kapitel 5). Die Vorderradaufhängungen, hier als Doppelgelenkfederbein-Radaufhängungen, sowie die Hinterradaufhängungen, hier als Integral IV-Radaufhängungen ausgeführt, werden ebenfalls durch Systeme aus starren Körpern dargestellt. Die Räder sind jeweils drehbar auf den Radträgern gelagert. Die Beschreibung des gesamten Fahrzeugs orientiert sich dabei immer am realen Fahrzeug, entsprechend Abb. 12.1. Die Darstellung des Gesamtfahrzeuges als komplexes Mehrkörpersystem ist in Abb. 12.2 wiedergegeben.

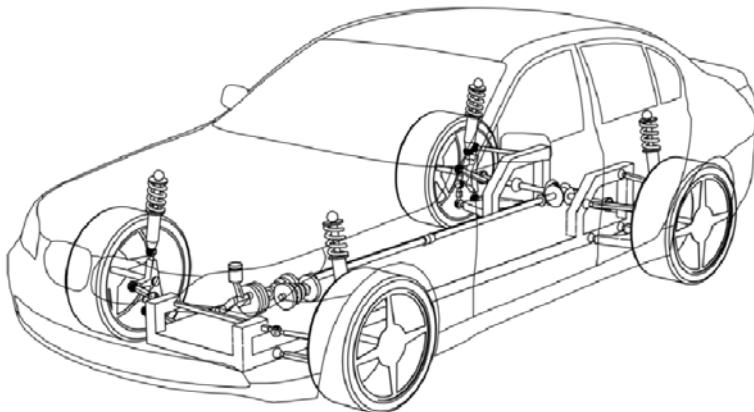


Abb. 12.2: 5er BMW als komplexes Mehrkörpersystem mit Karosserie

Doppelgelenkfederbein-Vorderradaufhängung

Ausgehend von der Darstellung des realen Systems (Abb. 12.3) wird daraus nachfolgend das entsprechende Mehrkörpersystem abgeleitet. Jeder der beiden Radträger – ebenfalls massebehaftet und mit vollbesetztem Trägheitstensor – ist über ein Schubgelenk mit dem Federbein verbunden, welches fahrzeugseitig mit einem Kugelgelenk gelagert ist. Die Gelenkverbindung zwischen dem Radträger und dem Querlenker bzw. der Druckstrebe wird ebenfalls durch je ein Kugelgelenk repräsentiert. Weitere Einzelheiten hierzu sind dem nachfolgenden Strukturbild (Abb. 12.4) zu entnehmen. Die Lenkbewegung des Radträgers wird über Lenk- und Spurstange eingeleitet und seine momentane Lenkachse ergibt sich über die Verbindung des fahrzeugseitigen Kugelgelenkes am Federbein mit dem radträgerseitigen Kugelgelenkes des Querlenkers, (Frik 1994).

Der Lenkmechanismus der Vorderachse wird beim 5er BMW aus zwei Zahnstangen (Abb. 12.3) modelliert, die sich relativ zum Fahrgestell verschieben können und die mit den beiden Spurstangen über Kugelgelenke verbunden sind. Die Verbindung zum Lenkrad erfolgt über das Lenkgetriebe, das hier nicht dargestellt ist. Der zeitlich vorgegebene Ausschlag des Lenkrades definiert eine *Soll*-Auslenkung der linken Zahnstange. Die Lenkbewegung des Radträgers wird über Lenk- und Spurstange eingeleitet und seine momentane Lenkachse ergibt sich – analog zur momentanen Lenkachse des Radträgers bei der McPherson-Radaufhängung (Kapitel 6) – über die Verbindung des fahrzeugseitigen Kugelgelenkes am Federbein mit dem radträgerseitigen Kugelgelenkes des Querlenkers. Die Spurstangen haben Kugelgelenke an ihren Enden. Die dadurch entstehenden freien

Rotationsmöglichkeiten um ihre Längsachsen sind isolierte Freiheitsgrade und werden nicht weiter betrachtet.

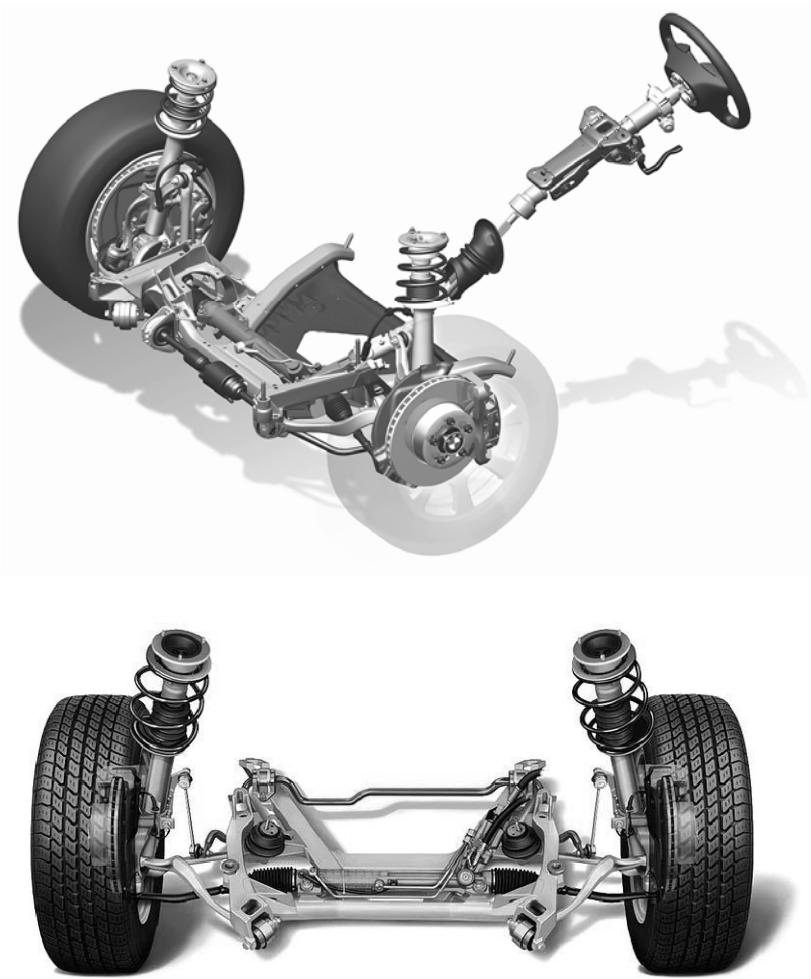


Abb. 12.3: 5er BMW – Doppelgelenkfederbein-Vorderachse mit und ohne Lenkung (mit freundlicher Genehmigung der BMW AG, 2003)

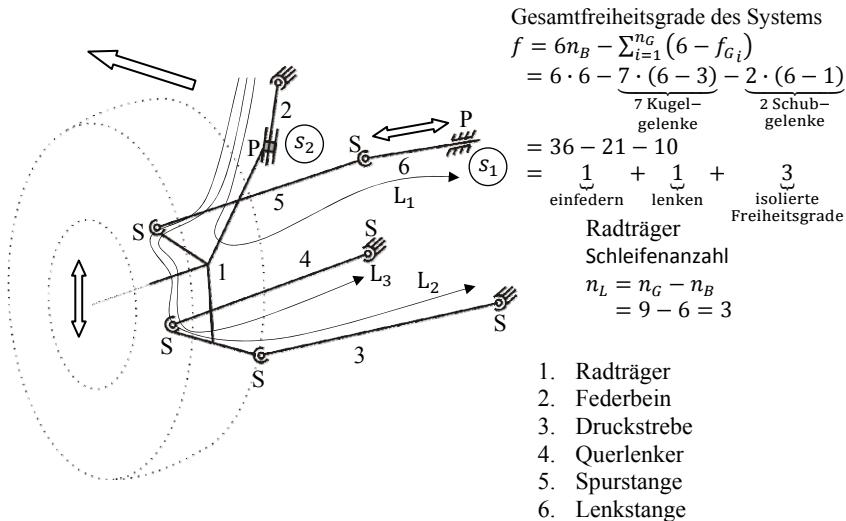


Abb. 12.4: 5er BMW – Doppelgelenkfederbein-Vorderradaufhängung vorne links – Strukturbild

Die beiden Spurstangen, der Lenkmechanismus sowie die Querlenker sind massebehaftet. In einem weiteren Schritt können jetzt für dieses Subsystem Radaufhängung die für solche Systeme typischen geschlossenen kinematischen Schleifen und deren Verkoppelung gekennzeichnet werden. Dies geschieht mit Hilfe der in Kapitel 3 eingeführten Grundlagen. Insbesondere unter Verwendung der Symbolik aus Abschnitt 3.5 ergibt sich die in Abb. 12.5 gezeigte topologische Darstellung der Doppelgelenkfederbein-Vorderradaufhängung.

In einem weiteren Schritt – wieder unter Verwendung der Grundlagen aus Kapitel 3, sowie deren Anwendung auf die kinematische Analyse von Radaufhängungen (Kapitel 6) – kann schließlich das Blockschaltbild für den Lösungsfluss der Relativkinematik dieser Vorderradaufhängung entwickelt werden (Abb. 12.6). Es sei darauf verwiesen, dass die Kinematik auf Grund des gewählten Lösungsansatzes von Kapitel 3 in diesem Beispiel explizit gelöst werden kann.

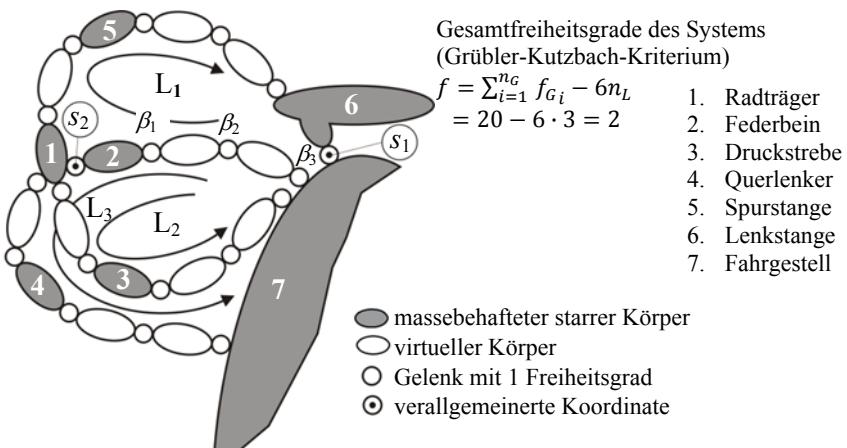


Abb. 12.5: 5er BMW – Doppelgelenkfederbein-Vorderradaufhängung – Topologie

Schleife L₁:

$$f_{L_1} = \sum_{i=1}^{n_G} f_{G_i} - 6n_L = 10 - (6 \cdot 1) = 4$$

Schleife L₂:

$$f_{L_2} = \sum_{i=1}^{n_G} f_{G_i} - 6n_L = 9 - (6 \cdot 1) = 3$$

Schleife L₃:

$$f_{L_3} = \sum_{i=1}^{n_G} f_{G_i} - 6n_L = 9 - (6 \cdot 1) = 3$$

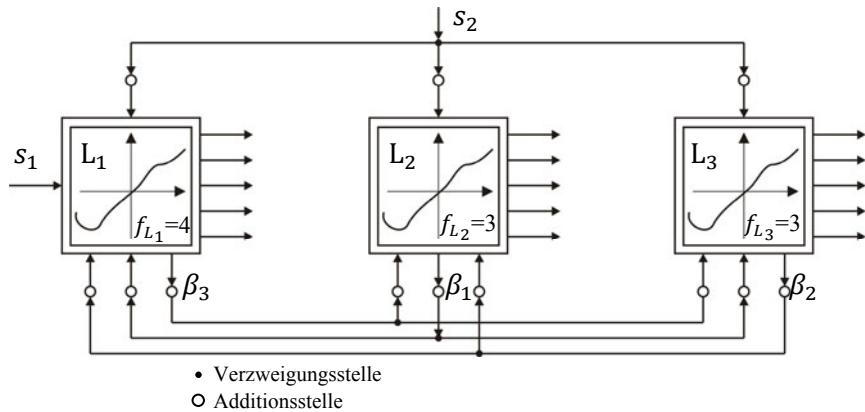


Abb. 12.6: 5er BMW – Doppelgelenkfederbein-Vorderradaufhängung – Blockschaltbild und Lösungsfluss

Integral IV - Hinterachse

Die beiden Hinterräder werden unabhängig voneinander durch zwei Integral IV-Radaufhängungen geführt und bilden eine Integral IV-Hinterachse (Abb. 12.7).

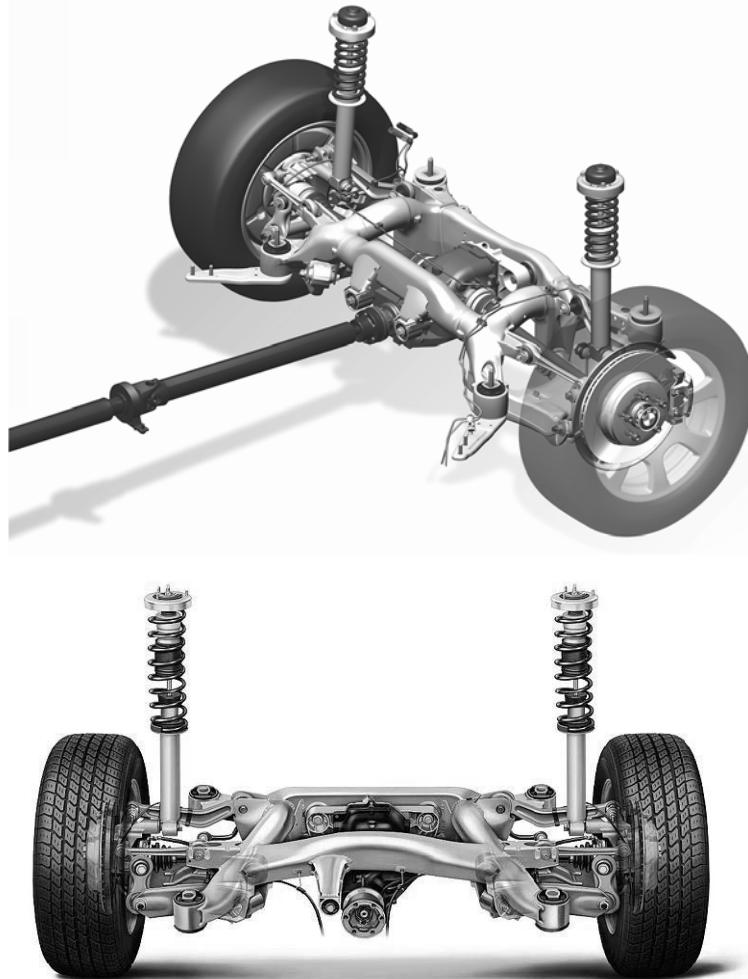


Abb. 12.7: 5er BMW – Integral IV-Hinterachse (mit freundlicher Genehmigung der BMW Group, 2003)

Die Integral IV-Radaufhängung gehört zur Gruppe der Mehrlenkerradaufhängungen. Der Radträger wird über eine Schwinge, den Führungslenker, den Querlenker sowie das Federbein mit Kolbenstange mit dem Fahrzeugaufbau verbunden. Das Besondere ist der zusätzliche, der Abstützung die-

nende Integrallenker, welcher die Schwinge mit dem Radträger verbindet. Den sechs Lagekoordinaten des Radträgers stehen fünf Bindungen gegenüber, so dass ein Freiheitsgrad verbleibt (Einfederbewegung). Das entsprechende Strukturbild des Mehrkörpersystems ist in Abb. 12.8 wiedergegeben, Pichler 1999.

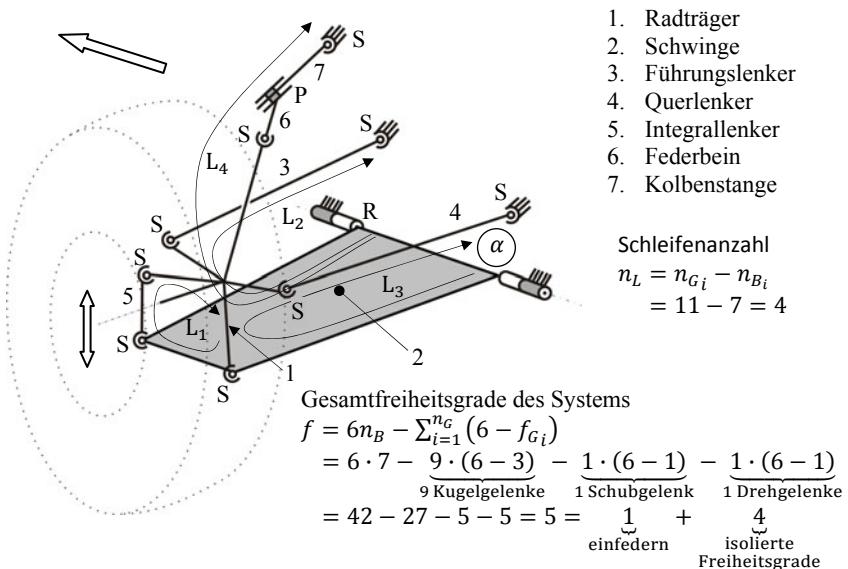


Abb. 12.8: 5er BMW – Integral IV-Hinterradaufhängung hinten links – Strukturbild

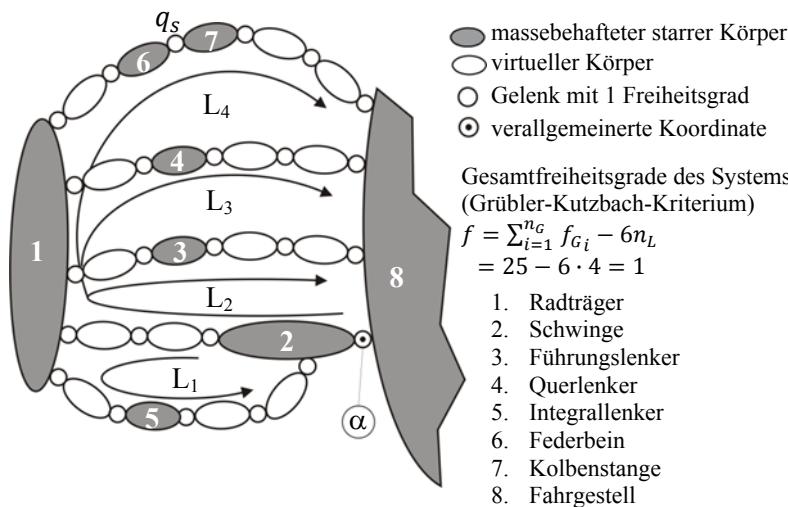


Abb. 12.9: 5er BMW – Integral IV-Hinterradaufhängung – Topologie

Analog zur Vorgehensweise bei der Vorderradachse kann auch hier das entsprechende Topologiebild, sowie das Blockschaltbild samt Lösungsfluss erstellt werden (Abb. 12.9 und Abb. 12.10). Eine vollständig rekursiv explizite Lösung der Relativkinematik ist bei der Integral IV-Aufhängung nicht mehr möglich, sondern an den durch „ \swarrow “ gekennzeichneten Stellen im Blockschaltbild müssen lokal zwei implizite algebraische Gleichungen numerisch gelöst werden, die durch Einführung von zwei sogenannten Pseudoeingängen \tilde{q}_1 und \tilde{q}_2 entstanden sind. Näheres hierzu ist in Hiller et al. 1986, 87, 88 und Hiller 1995 zu finden (siehe auch Kapitel 6).

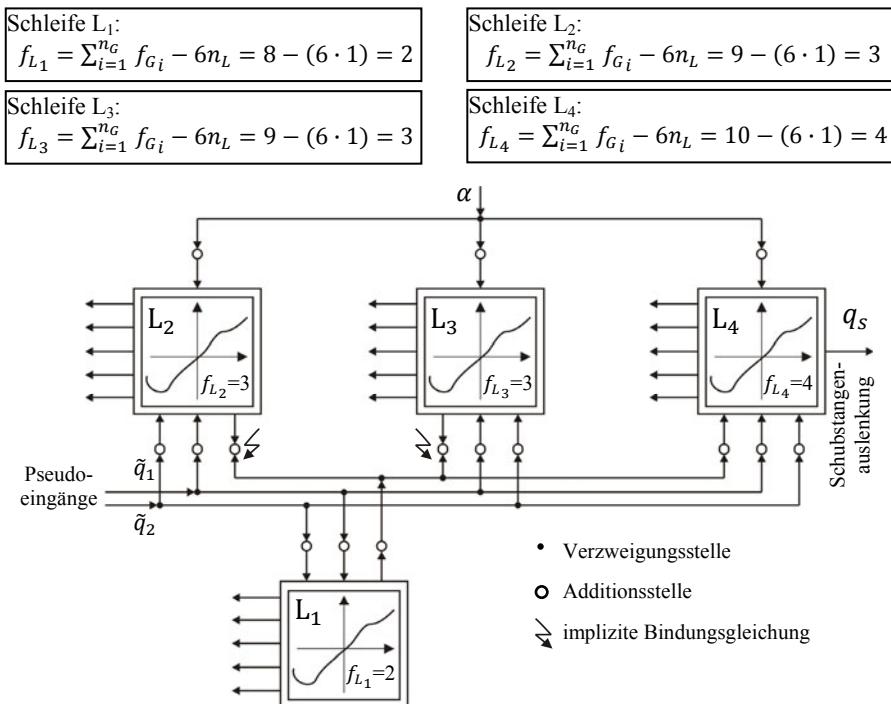


Abb. 12.10: 5er BMW – Integral IV-Hinterradaufhängung – Blockschaltbild und Lösungsfluss

Die Freiheitsgrade des betrachteten Gesamtfahrzeuges gliedern sich wie folgt (Tabelle 12.1): Die Karosserie hat im Raum sechs Freiheitsgrade. Jedes der Vorderräder kann einfedern, was zusammen zwei weiteren Freiheitsgraden entspricht, außerdem entspricht auch die Lenkbewegung einem Freiheitsgrad. Die Hinterräder können jeweils einfedern (zwei Freiheitsgrade). Die nicht angetriebenen Vorderräder sowie die angetriebenen Hinterräder sind mit den beiden weiteren Freiheitsgraden im An-

triebsstrang (relative Verdrehung der Zwischenwelle und relative Verdrehung der Kupplung) im Subsystem *Antriebsstrang* zusammengefasst, (Schmitz 1994). Der hier verwendete Antriebsstrang weicht allerdings vom realen Fahrzeug etwas ab. In dem vorliegenden Modell wird u.a. die Verdrehung der Kupplung und der hinteren Zwischenwelle mit je einem Freiheitsgrad berücksichtigt. Das Motorlager besitzt die beiden Freiheitsgrade der Hub- und der Wankbewegung des Motors relativ zum Fahrzeug (vgl. hierzu auch Kapitel 8). In Tabelle 12.1 sind die Freiheitsgrade und deren Zuordnung zu den Fahrzeugkomponenten noch einmal zusammengefasst.

Tabelle 12.1: Kinematische Struktur des 5er BMW (E60)

Fahrzeugkomponente	Freiheitsgrade	Körper	Schleifen
Fahrgestell	6	1	0
Vorderradaufhängung	$2 \times 1 + 1$	11	2×3
Hinterradaufhängung	2×1	14	2×4
Motorlager	2	1	0
Antriebsstrang (inkl. aller Raddrehungen)	6	12	3
Σ	19	41	17

Auf die zusätzliche Betrachtung der Freiheitsgrade durch die Modellierung des Motorlagers und des Antriebsstranges wird in diesem Abschnitt aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet. Zur näheren Betrachtung der prinzipiellen Vorgehensweise wird auf die Kapitel 7 (Modellierung des Rad-Straße-Kontaktes) und Kapitel 8 (Modellierung des Antriebsstranges) verwiesen. Jedem der dargestellten Freiheitsgrade kann man nun je eine verallgemeinerte Koordinate zuordnen, welche der Beschreibung von Position, Geschwindigkeit sowie Beschleunigung des Gesamtsystems dient. Man spricht hier auch von einer Beschreibung in Minimalkoordinaten.

Um einen Überblick über die topologische Struktur des Fahrzeugmodells zu erhalten, kann man die Gelenke und starren Körper, aus denen sich das Modell zusammensetzt, durch Symbole darstellen, wie bereits in Abschnitt 3.5 gezeigt. Um eine einheitliche Darstellung zu erhalten, bietet es sich an, so genannte mehrwertige Gelenke durch mehrere einwertige Gelenke mit dazwischen liegenden virtuellen – und üblicherweise masselosen – Körpern darzustellen (siehe hierzu auch (Hiller und Kecskeméthy 1987), (Hiller 1990 und Schnelle 1990)).

Im Folgenden wird diese Darstellung für das Gesamtfahrzeugmodell entwickelt. Den sechs Freiheitsgraden, die der Fahrzeugkörper im Raum hat, kann man eine fiktive kinematische Kette zuordnen: Sie besteht aus drei Schubgelenken (für die drei translatorischen Freiheitsgrade) und drei Drehgelenken (für die drei rotatorischen Freiheitsgrade) relativ zum Iner-

tialsystem und ist zwischen Inertialsystem und Fahrzeug angeordnet. Am Fahrzeugkörper sind die vorderen und hinteren Radaufhängungen gelagert. Die Bindung eines hinteren Radträgers an das Fahrgestell erfolgt bei diesem Fahrzeug über die weiter oben beschriebene kinematische Struktur der Integral IV- Radaufhängung. In der hier vorliegenden Darstellung wird angenommen, dass bei den Lenkern, die über zwei Kugelgelenke gelagert sind, eines der Kugelgelenke durch ein Kardangelenk ersetzt wird, um so den sonst auftretenden isolierten Freiheitsgrad an diesem Körper zu vermeiden (Kapitel 3).

Das auf diese Weise entstehende topologische Schema des Gesamtfahrzeugs ist in Abb. 12.11 wiedergegeben. Jedem einwertigen Gelenk (dargestellt durch einen kleinen Kreis) entspricht hier eine Gelenkkoordinate (Winkel oder Verschiebung). Mehrwertige Gelenke, wie Kugel- oder Kardangelenke, werden durch mehrere Einwertige Gelenke mit dazwischenliegenden masselosen Körpern dargestellt, (vgl. Abschnitt 3.5). Von diesen Gelenkkoordinaten sind 21 – entsprechend der Anzahl der Freiheitsgrade des Gesamtsystems – unabhängige verallgemeinerte Koordinaten, alle weiteren Koordinaten sind von ihnen abhängig. Man findet im System 17 kinematische Schleifen, die mit L_1 bis L_{17} bezeichnet werden. Es gibt auch Teilbereiche des Gesamtsystems, die eine Baumstruktur aufweisen und die man als offene Systeme bezeichnet. Dies ist beispielsweise bei den (Vorder-) Rädern und beim Fahrgestell der Fall. Die räumlichen Substrukturen, welche die geschlossenen kinematischen Schleifen enthalten, sind in erster Linie die Radaufhängungen sowie Teile des Antriebsstranges. Auf der Basis einer Untersuchung dieser geschlossenen Schleifen können die kinematischen Gleichungen des Systems günstiger formuliert werden. Ein besonderer Vorteil erwächst aus der Tatsache, dass ein Großteil der hier auftretenden technischen Lösungen (für Radaufhängungen und andere kinematisch geprägte Subsysteme) zu einer expliziten oder weitgehend expliziten Lösungsstruktur für die kinematischen Gleichungen führt (wie bereits weiter oben angedeutet), mit dem angenehmen Nebeneffekt, dass ein Großteil der im System vorhandenen abhängigen Gelenkkoordinaten nicht berechnet werden muss (siehe hierzu Abschnitt 3.5 und 3.6). Hier sei nochmals betont, dass die gesamten Untersuchungen von Radaufhängungskinematiken und Antriebssträngen in (Hiller und Schnelle 1987 und 1988), (Schnelle 1986 und 1990), (Frik 1994, Schmitz 1994), (Hiller 1995, Schuster 1999), (Pichler 1999) und (Bardini 2008) auf Basis dieser methodischen Ansätze erfolgt ist.

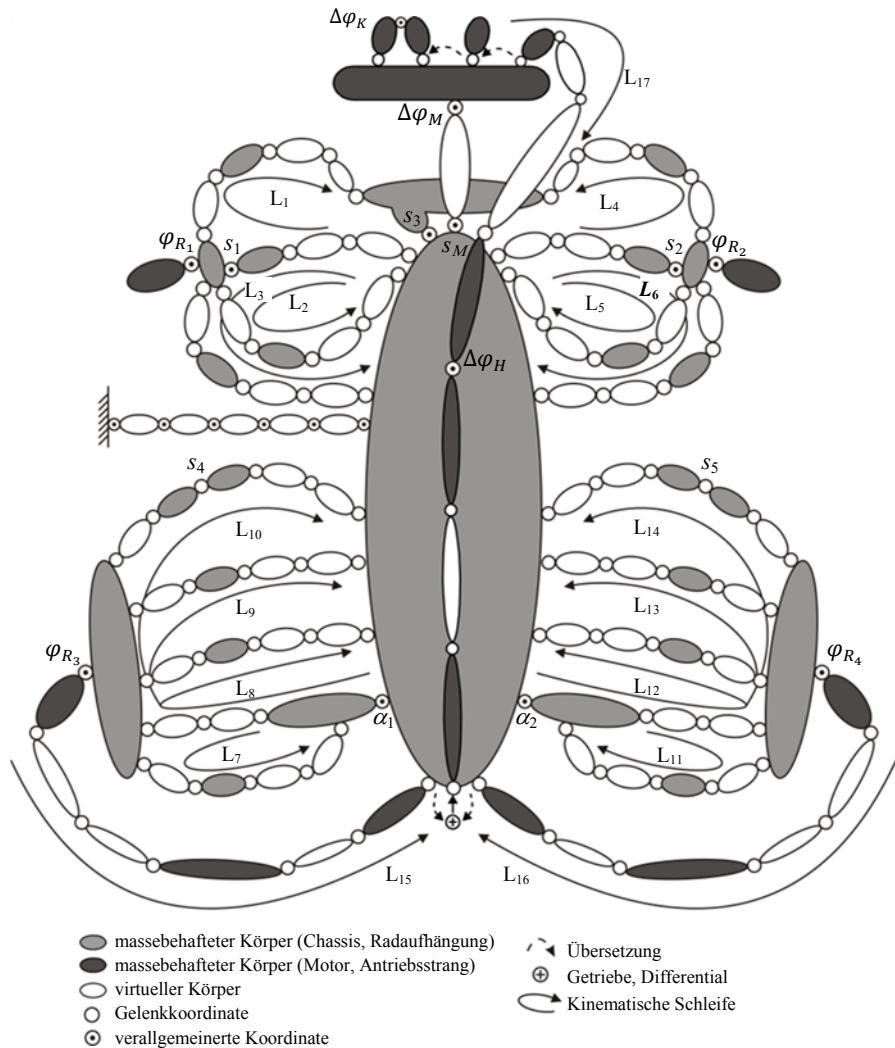


Abb. 12.11: 5er BMW (E60) – Topologie Gesamtfahrzeug

Die in diesem Abschnitt vorgestellten Schritte der Modellbildung zur kinematischen Analyse eines Gesamtfahrzeugs

- Reales Fahrzeug,
- Mehrkörpersystem,
- Topologische Darstellung,

- Einzelanalyse der Fahrzeugkomponenten

sind in Abb. 12.12 noch einmal zusammengefasst und bilden damit die entscheidende Voraussetzung für eine effiziente Aufstellung der dynamischen Gleichungen, wie nachfolgend zu zeigen ist.

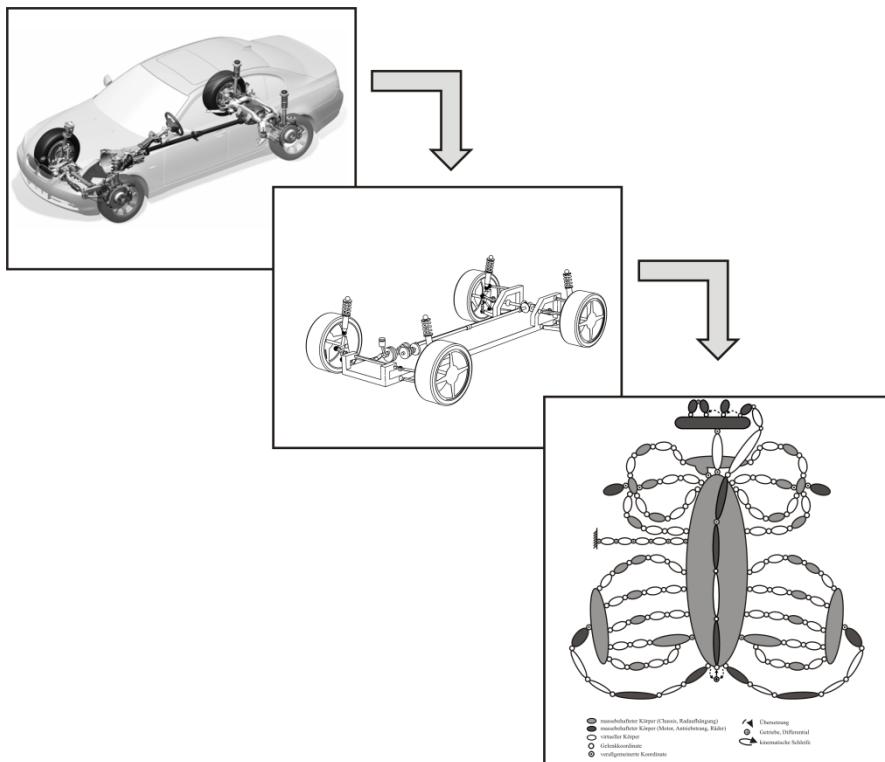


Abb. 12.12: 5er BMW (E60) – Stufen der kinematischen Modellbildung

12.1.2 Kinematik front- und allradgetriebener Gesamtmodelle

Um die aus den verschiedenen Antriebsarten resultierenden Unterschiede in der kinematischen Struktur sowie deren Auswirkung auf die Modellbildung berücksichtigen und vergleichen zu können, werden die ausgeführten Modellierungsschritte am Beispiel des heckgetriebenen Fahrzeuges in den folgenden Teilabschnitten auf ein frontgetriebenes bzw. auf ein allradgetriebenes Fahrzeug übertragen. Die Vorgehensweise ist dabei, abgesehen von einigen Besonderheiten, dieselbe wie in Abschnitt 12.1.1.

Kinematik eines frontgetriebenen Gesamtfahrzeugmodells

Die Modellbildung eines frontgetriebenen PKW erfolgt am Beispiel des VW Golf VI, dessen reale Fahrzeugstruktur in Abb. 12.13 gezeigt ist. Das entsprechende Mehrkörpersystem als Starrkörpermodell ist in Abb. 12.14 wiedergegeben.



Abb. 12.13: VW Golf VI – reales Fahrzeug (ATZ 2008):

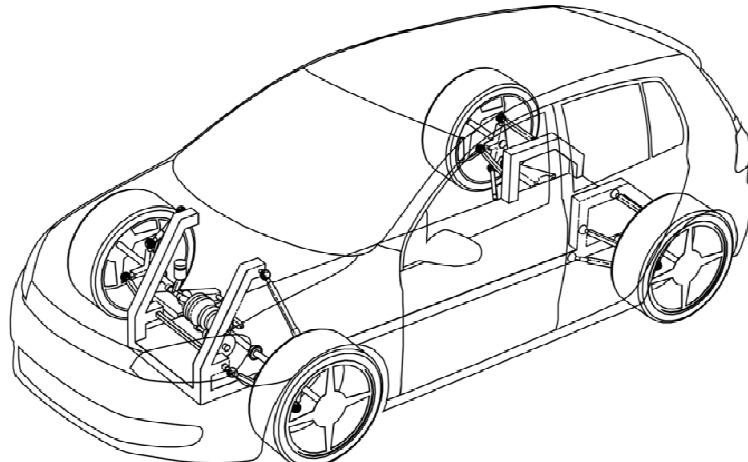


Abb. 12.14: VW Golf VI – Mehrkörpermodell mit Karosserie

Die Vorderradaufhängungen dieses Fahrzeuges sind als McPherson-Federbeinsysteme (Abb. 12.15) ausgeführt, wobei als Besonderheit hier noch die komfortbedingten Nachgiebigkeiten in den hinteren Lagern des unteren Dreieckslenkers mitberücksichtigt werden können. Bei der Beschreibung des Systems durch starre Körper muss dafür ein Ersatzmodell gefunden werden. Es besteht im Wesentlichen aus einem Schubgelenk mit integrierter Feder. Um die kinematische Verträglichkeit zu sichern, wird die Hülse des Schubgelenks über ein Drehgelenk mit dem Fahrzeug verbunden. Diese Ersatzdarstellung erfasst nur eine Richtung einer Nachgiebigkeit. Dies ist ein Unterschied zu anderen Ansätzen, bei denen elastische Lagerungen durch Federn in allen Richtungen beschrieben werden. Der Vorteil ist hier die Beschränkung auf die wesentlichen Freiheitsgrade, was eine zum Teil erhebliche Rechenzeitersparnis zur Folge hat. Allerdings entstehen in dem kinematischen Ersatzmodell jeweils eine weitere kinematische Schleife sowie je ein weiterer Freiheitsgrad im Gesamtsystem. Beide Varianten dieser McPherson-Radaufhängung – mit und ohne elastisches Querlenkerlager – sind in den entsprechenden Modellierungsschritten: Strukturbild, topologische Darstellung und Blockschaltbild mit Lösungsfluss in den Abb. 12.16 bis Abb. 12.21 wiedergegeben und führen für beide Varianten zu einer expliziten Lösung der Relativkinematik.

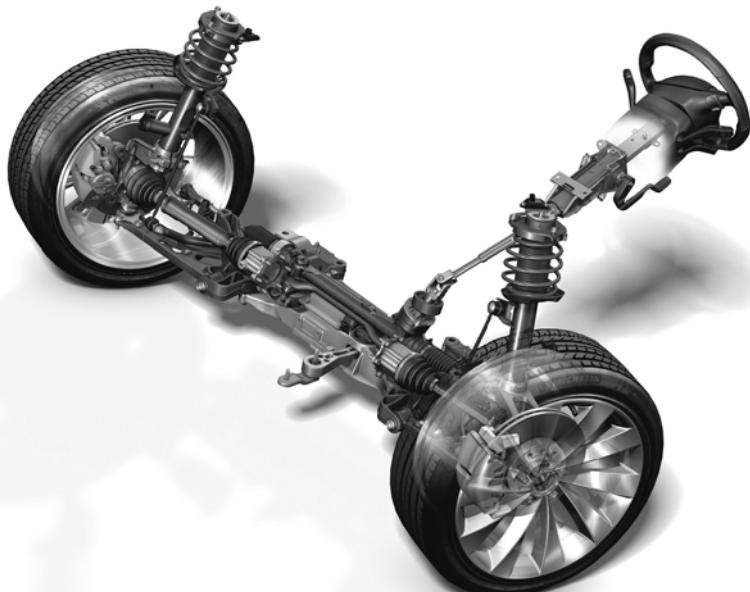
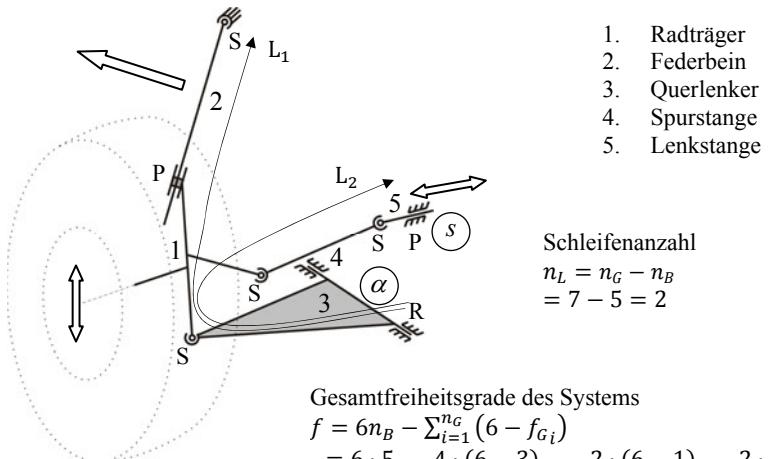


Abb. 12.15: VW Golf VI – McPherson-Federbeinachse (ATZ 2008)



Gesamtfreiheitsgrade des Systems

$$\begin{aligned}
 f &= 6n_B - \sum_{i=1}^{n_G} (6 - f_{G_i}) \\
 &= 6 \cdot 5 - \underbrace{4 \cdot (6-3)}_{4 \text{ Kugelgelenke}} - \underbrace{2 \cdot (6-1)}_{2 \text{ Schubgelenke}} - \underbrace{2 \cdot (6-1)}_{1 \text{ Drehgelenk}} \\
 &= 30 - 12 - 10 - 5 \\
 &= \underbrace{\frac{1}{\text{einfedern}}}_{\text{einfedern}} + \underbrace{\frac{1}{\text{lenken}}}_{\text{lenken}} + \underbrace{\frac{1}{\text{isolierter}}}_{\text{Freiheitsgrade}}
 \end{aligned}$$

Abb. 12.16: VW Golf VI – McPherson-Federbein-Radaufhängung (ohne elastisches Querlenkerlager) – Strukturbild

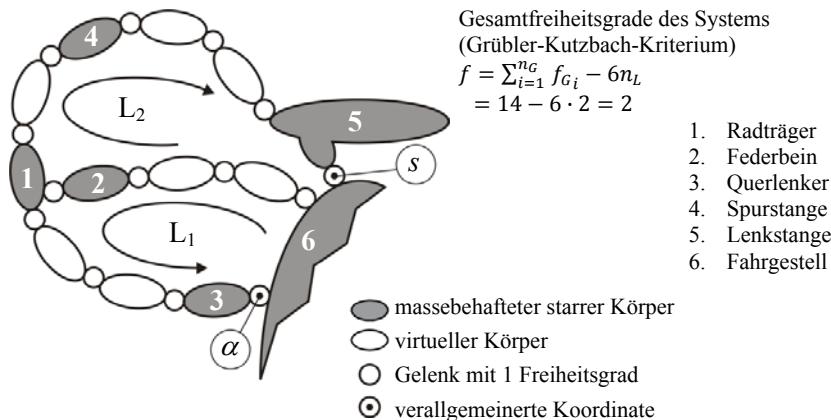


Abb. 12.17: VW Golf VI – McPherson-Federbein-Radaufhängung (ohne elastisches Querlenkerlager) – Topologie

<p>Schleife L₁:</p> $f_{L_1} = \sum_{i=1}^{n_G} f_{G_i} - 6n_L = 8 - (6 \cdot 1)$ $= 8 - 6 = \underbrace{1}_{\text{echter FG}} + \underbrace{1}_{\text{isolierter FG}}$	<p>Schleife L₂:</p> $f_{L_2} = \sum_{i=1}^{n_G} f_{G_i} - 6n_L = 10 - (6 \cdot 1)$ $= 10 - 6 = 4$
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------

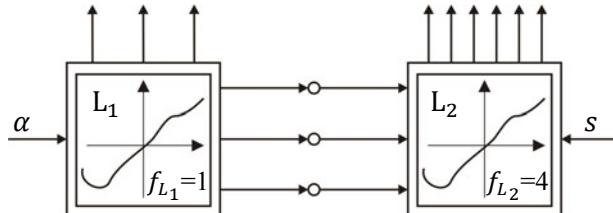


Abb. 12.18: VW Golf VI – McPherson-Federbein-Radaufhängung (ohne elastisches Querlenkerlager) – Blockschaltbild und Lösungsfluss

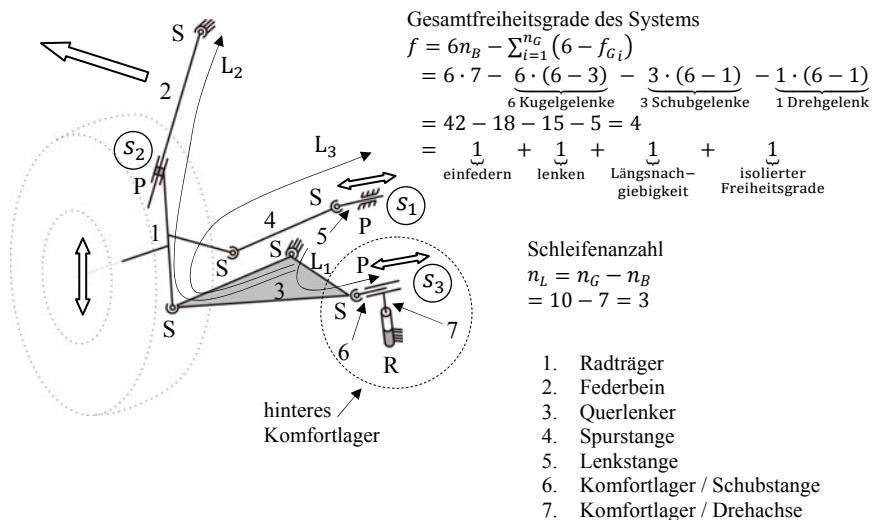


Abb. 12.19: VW Golf VI – McPherson-Federbein-Radaufhängung (mit elastischem Querlenkerlager) – Strukturbild

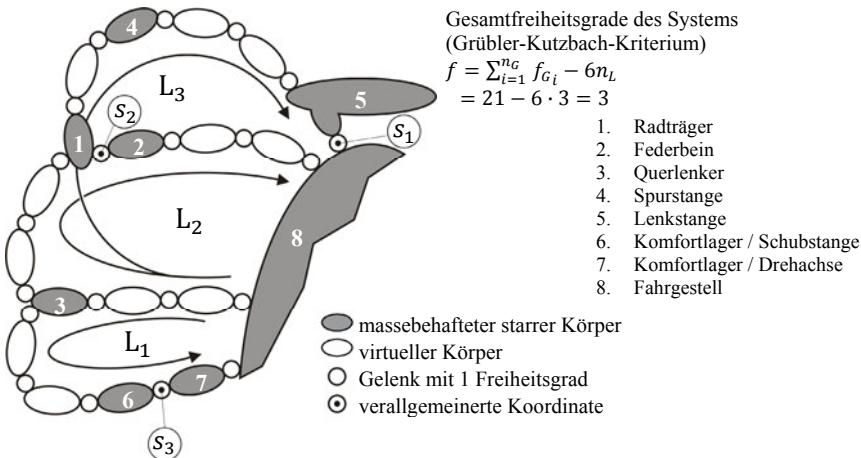


Abb. 12.20: VW Golf VI – McPherson-Federbein-Radaufhängung (mit elastischem Querlenkerlager) – Topologie

Schleife L₁:
 $f_{L_1} = \sum_{i=1}^{n_G} f_{G_i} - 6n_L$
 $= 8 - (6 \cdot 1)$
 $= \underbrace{1}_{\text{echter FG}} + \underbrace{1}_{\text{isolierter FG}}$

Schleife L₂:
 $f_{L_2} = \sum_{i=1}^{n_G} f_{G_i} - 6n_L$
 $= 10 - (6 \cdot 1)$
 $= \underbrace{3}_{\text{echte FG}} + \underbrace{1}_{\text{isolierter FG}}$

Schleife L₃:
 $f_{L_3} = \sum_{i=1}^{n_G} f_{G_i} - 6n_L$
 $= 12 - (6 \cdot 1)$
 $= \underbrace{4}_{\text{echte FG}} + \underbrace{2}_{\text{isolierte FG}}$

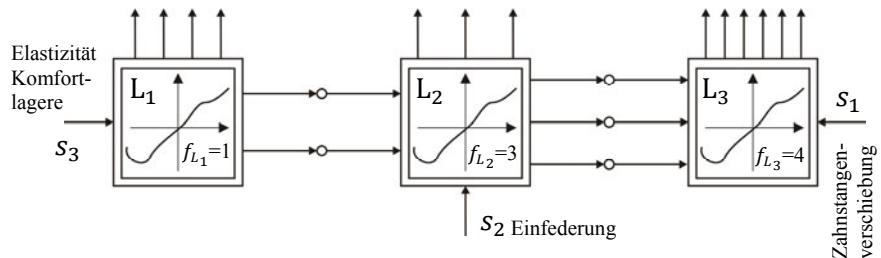


Abb. 12.21: VW Golf VI – McPherson-Federbein-Radaufhängung (mit elastischem Querlenkerlager) – Blockschaltbild und Lösungsfluss

Die Hinterachse des VW Golf VI besteht aus zwei, nach dem Mehrlenkerprinzip ausgeführten Vierlenkerradaufhängungen (Abb. 12.22). Auch hier sind die Modellierungsschritte – Strukturbild, topologische Darstellung und Blockschaltbild mit Lösungsfluss – in den weiteren Abb. 12.23 bis Abb. 12.25 zusammengestellt, wobei – ähnlich wie bei der Integral IV-Aufhängung im vorigen Fahrzeug – an zwei Stellen der Relativkinematik (Abb. 12.25) implizite Gleichungen numerisch gelöst werden müssen.

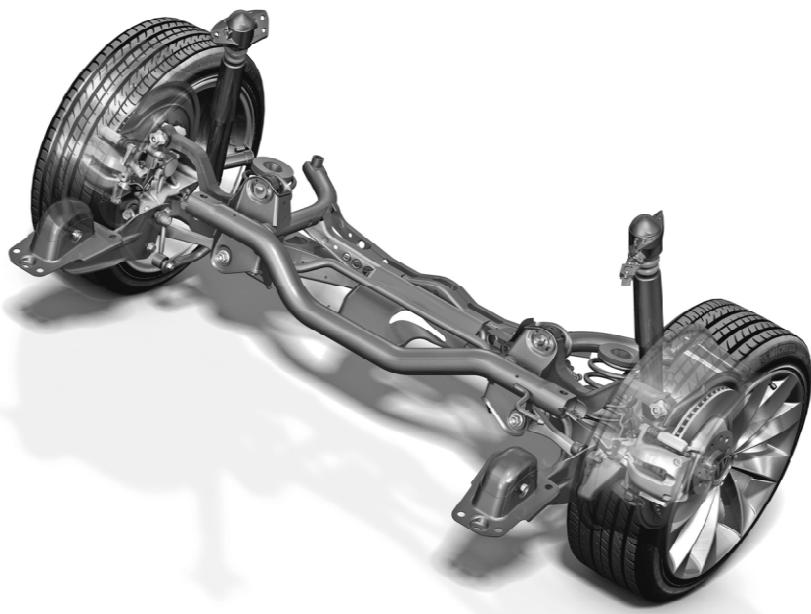


Abb. 12.22: VW Golf VI – Vierlenkerachse (hinten) (ATZ 2008)

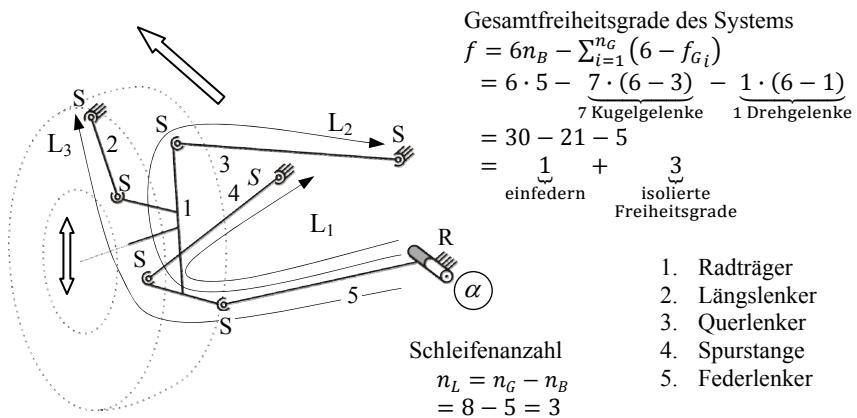


Abb. 12.23: VW Golf VI – Vierlenkerradaufhängung hinten links – Strukturbild

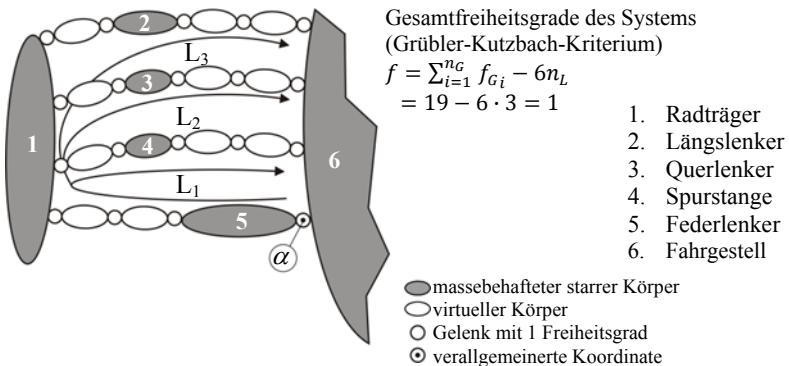


Abb. 12.24: VW Golf VI – Vierlenkerradaufhängung – Topologie

Schleife L₁:
 $f_{L_1} = \sum_{i=1}^{n_G} f_{G_i} - 6n_L$
 $= 9 - (6 \cdot 1) = 3$

Schleife L₂:
 $f_{L_2} = \sum_{i=1}^{n_G} f_{G_i} - 6n_L$
 $= 9 - (6 \cdot 1) = 3$

Schleife L₃:
 $f_{L_3} = \sum_{i=1}^{n_G} f_{G_i} - 6n_L$
 $= 9 - (6 \cdot 1) = 3$

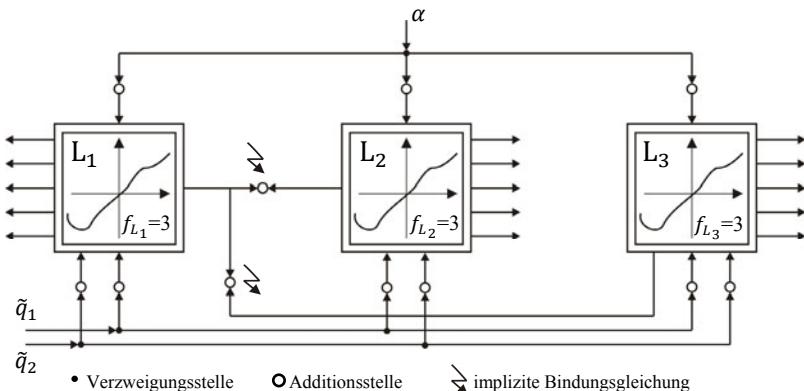


Abb. 12.25: VW Golf VI – Vierlenkerradaufhängung – Blockschaltbild und Lösungsfluss

Das topologische Schema des Gesamtfahrzeugs ist in Abb. 12.26 wiedergegeben.

Die Zusammenstellung der Fahrzeugkomponenten, mit Zahl der Körper, Zahl der kinematischen Schleifen und Zahl der Freiheitsgrade ist aus Tabelle 12.2 zu entnehmen. Hierbei sind allerdings die drei Antriebsstrangfreiheitsgrade aus den Antriebswellen bzw. der Kurbelwelle – gemäß Abschnitt 8.2.2 – nicht berücksichtigt.

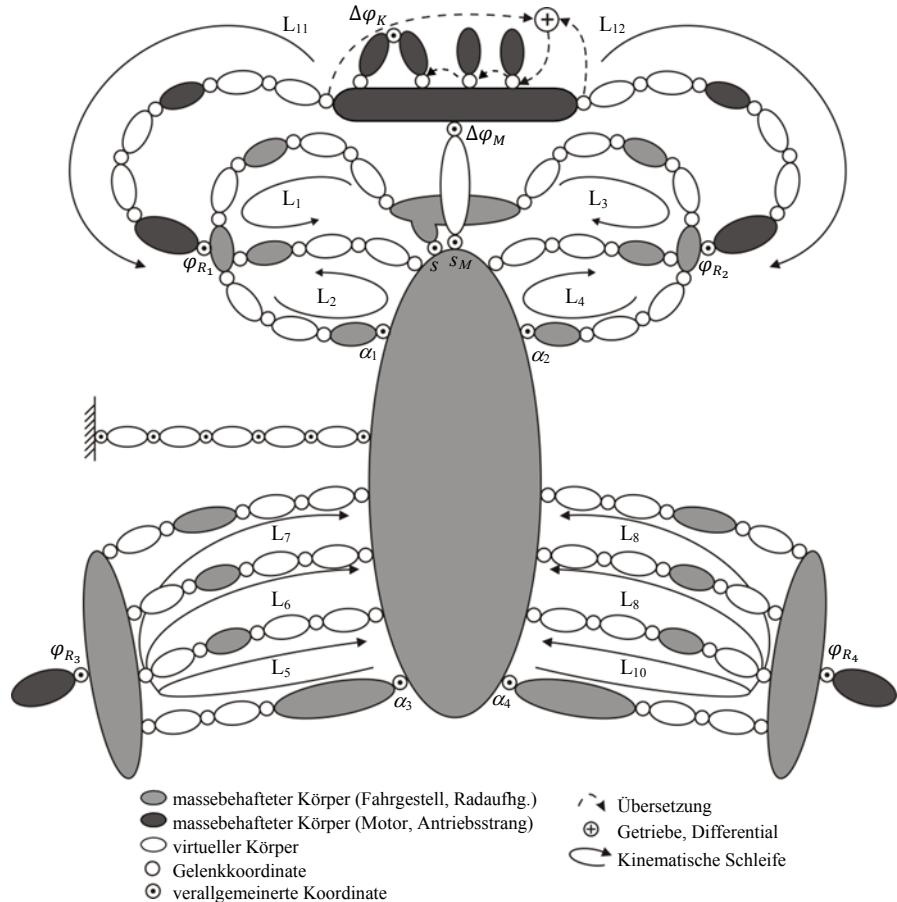


Abb. 12.26: VW Golf VI – Topologie Gesamtfahrzeug

Tabelle 12.2: Kinematische Struktur des VW Golf VI

Fahrzeugkomponente	Freiheitsgrade	Körper	Schleifen
Fahrgestell	6	1	0
Vorderradaufhängung (El. Querlenkerlager)	$2 \times 1 + 1$	13	2×2
Hinterradaufhängung	2×1	0	2×1
Motorlager	2	1	0
Antriebsstrang(inkl. aller Rad-drehungen)	5	15	2
Σ	18(20)	40	12(14)

Die Schritte der Modellbildung zur kinematischen Analyse dieses frontgetriebenen Gesamtfahrzeugs – reales Fahrzeug, Mehrkörpersystem, Topologie und Einzelanalyse der Fahrzeugkomponenten – sind in Abb. 12.27 noch einmal zusammengefasst und dienen, wie im Falle des heckgetriebenen Fahrzeuges, als Voraussetzung für eine effiziente Aufstellung der dynamischen Gleichungen.

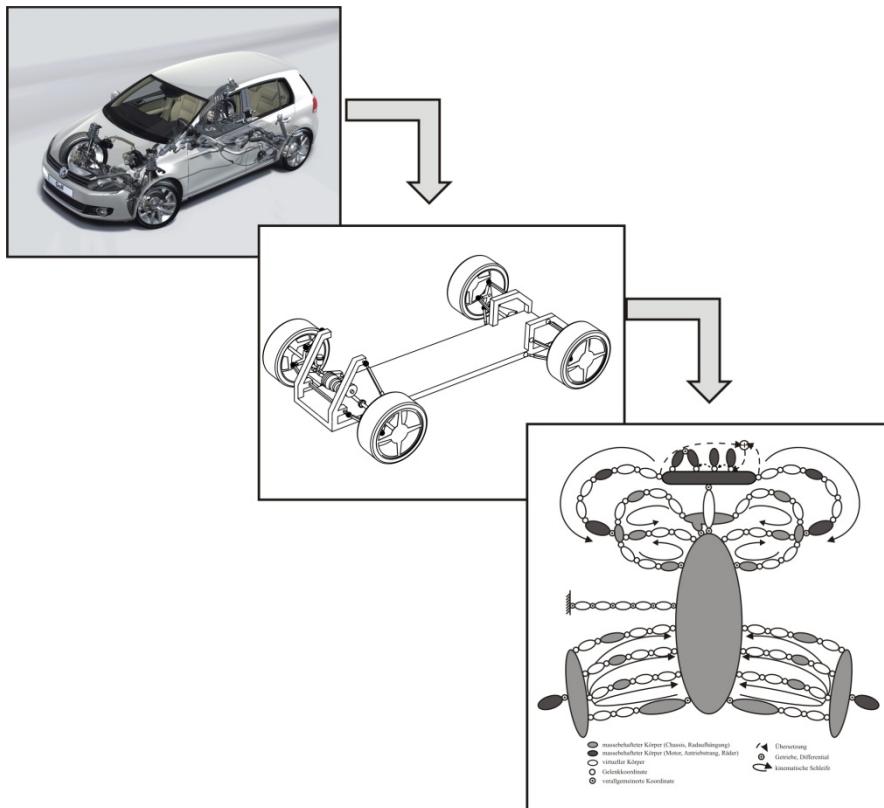


Abb. 12.27: VW Golf VI – Stufen der kinematischen Modellbildung

Kinematik eines allradgetriebenen Gesamtfahrzeugmodells

Die Modellbildung eines allradgetriebenen PKW erfolgt am Beispiel des Audi A5 (8T), dessen reale Fahrzeugstruktur in Abb. 12.28 gezeigt ist. Das entsprechende Mehrkörpersystem als Starrkörpermodell ist in Abb. 12.29 wiedergegeben.



Abb. 12.28: Audi A5 (8T) – reales Fahrzeug (mit freundlicher Genehmigung der Audi AG, 2008)

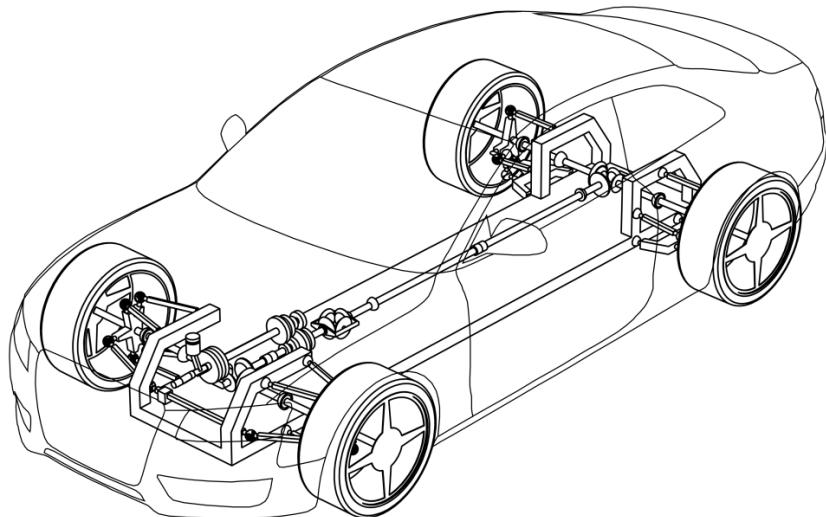


Abb. 12.29: Audi A5 – Mehrkörpermodell mit Karosserie

Die Vorderradaufhängungen dieses Fahrzeuges sind nach dem Mehrlenkerprinzip als Fünflenkersysteme (Abb. 12.30) ausgeführt. Strukturbild,

topologische Darstellung und Blockschaltbild mit Lösungsfluss sind in den Abb. 12.31 bis Abb. 12.33 wiedergegeben.

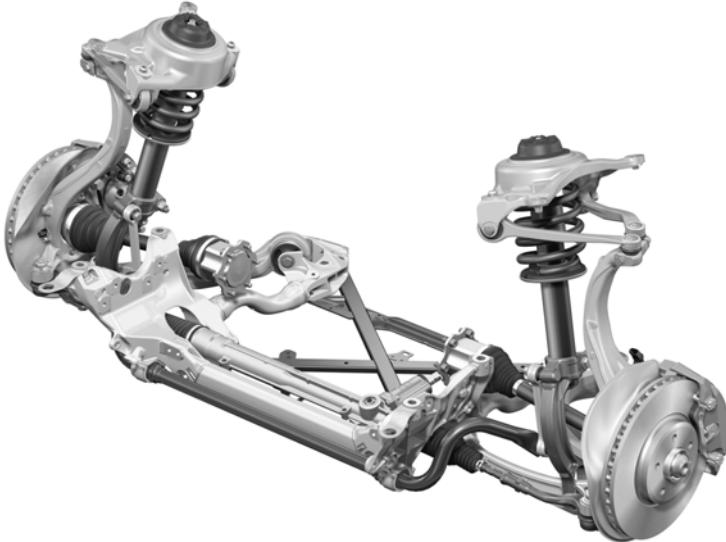


Abb. 12.30: Audi A5 – Fünflenker-Vorderachse (mit freundlicher Genehmigung der Audi AG, 2008)

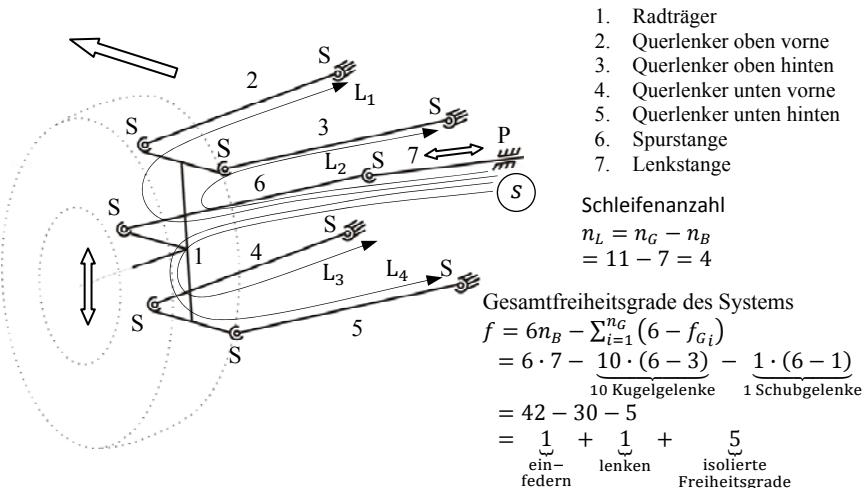
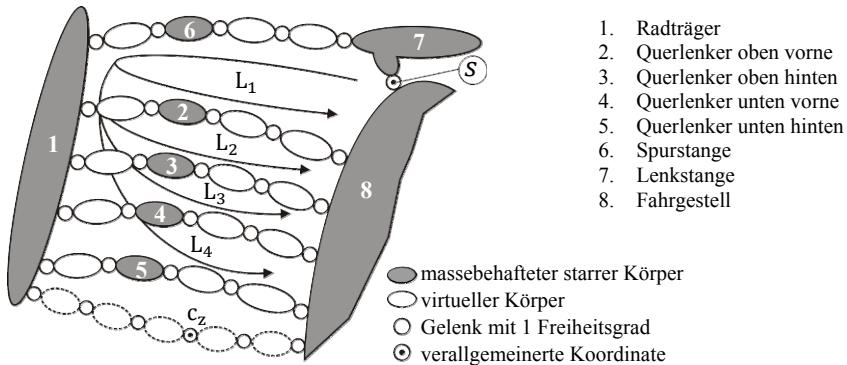


Abb. 12.31: Audi A5 – Fünflenker-Vorderradaufhängung vorne links – Strukturbild

Gesamtfreiheitsgrade des Systems

(Grübler-Kutzbach-Kriterium)

$$f = \sum_{i=1}^{n_G} f_{G_i} - 6n_L = 26 - 6 \cdot 4 = 2$$

**Abb. 12.32:** Audi A5 – Fünflenker-Vorderradaufhängung – TopologieSchleife L₁:

$$f_{L_1} = \sum_{i=1}^{n_G} f_{G_i} - 6n_L = 11 - (6 \cdot 1) = 5$$

Schleife L₂:

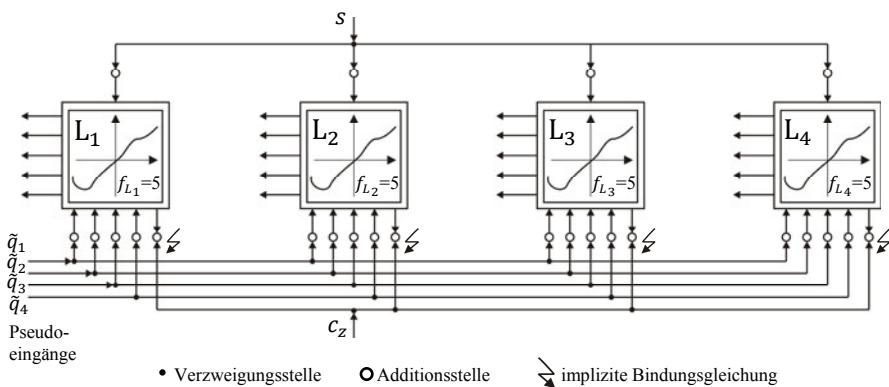
$$f_{L_2} = \sum_{i=1}^{n_G} f_{G_i} - 6n_L = 11 - (6 \cdot 1) = 5$$

Schleife L₃:

$$f_{L_3} = \sum_{i=1}^{n_G} f_{G_i} - 6n_L = 11 - (6 \cdot 1) = 5$$

Schleife L₄:

$$f_{L_4} = \sum_{i=1}^{n_G} f_{G_i} - 6n_L = 11 - (6 \cdot 1) = 5$$

**Abb. 12.33:** Audi A5 – Fünflenker-Vorderradaufhängung – Blockschaltbild und Lösungsfluss

Bemerkung: Da es sich hier um eine Mehrlenker-Radaufhängung handelt, wie sie ausführlich in Abschnitt 6.6 behandelt wurde, soll an dieser Stelle auf die alternative Analyse der Kinematik einer solchen Mehrlenkerachse verwiesen werden, bei der man an Stelle der kinematischen

Transformatoren die gleichartige topologische Struktur der Lenker nutzt (Abschnitt 6.6.2).

Die Hinterachse des Audi A5 besteht aus zwei Trapezlenkerradaufhängungen (Abb. 12.34). Auch hier sind die Modellierungsschritte – Strukturbild, topologische Darstellung und Blockschatzbild mit Lösungsfluss in den weiteren Abb. 12.35 bis Abb. 12.37 zusammengestellt.

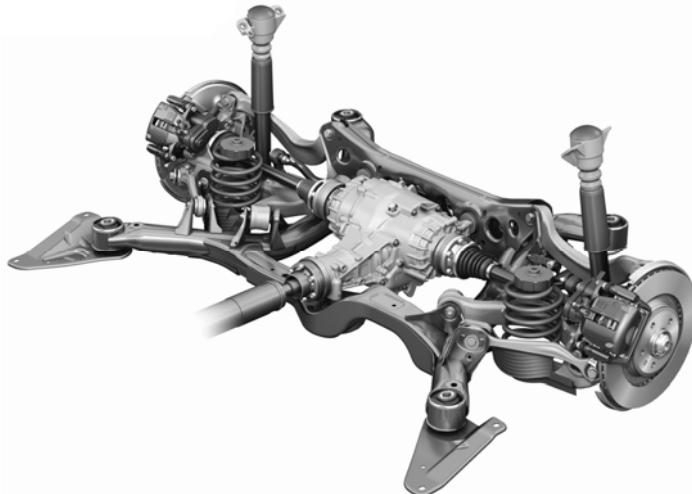


Abb. 12.34: Audi A5 – Trapezlenker-Hinterradaufhängung hinten (mit freundlicher Genehmigung der Audi AG, 2008)

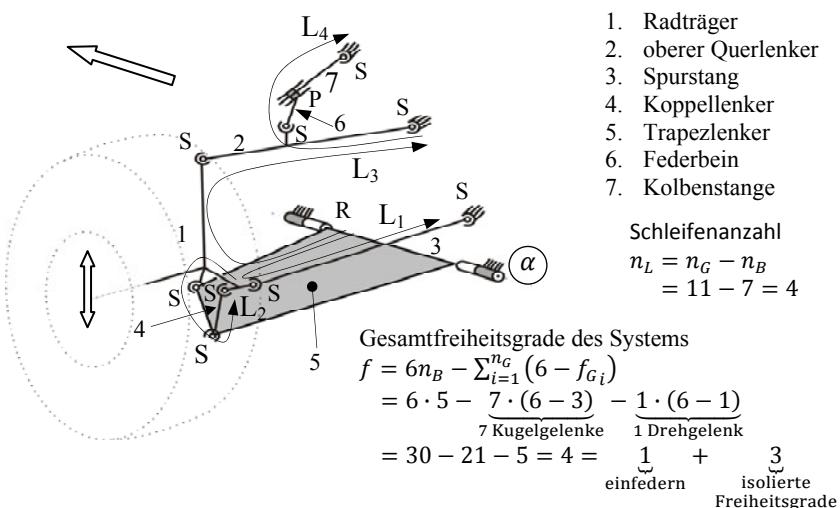


Abb. 12.35: Audi A5 – Trapezlenker-Hinterradaufhängung – Strukturbild

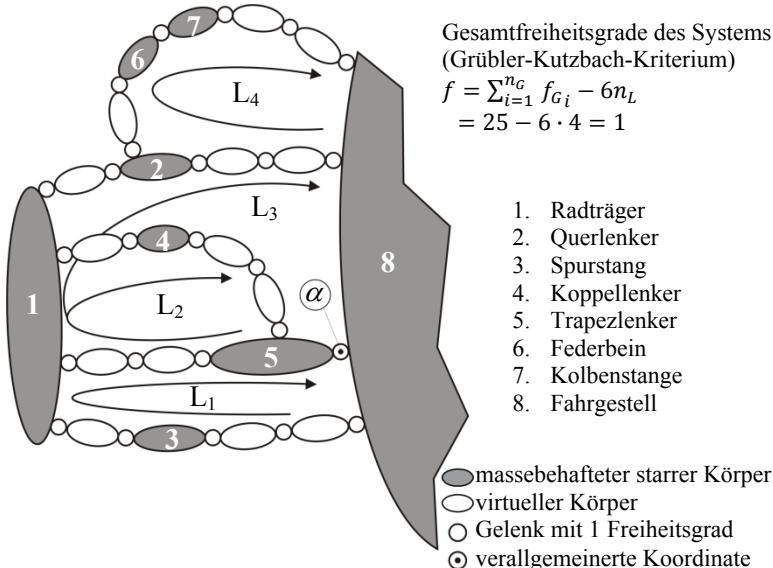


Abb. 12.36: Audi A5 – Trapezlenker-Hinterradaufhängung –Topologie

Schleife L_1 :	$f_{L_1} = \sum_{i=1}^{n_G} f_{G_i} - 6n_L = 9 - (6 \cdot 1) = 3$
Schleife L_3 :	$f_{L_3} = \sum_{i=1}^{n_G} f_{G_i} - 6n_L = 9 - (6 \cdot 1) = 3$

Schleife L_2 :	$f_{L_2} = \sum_{i=1}^{n_G} f_{G_i} - 6n_L = 8 - (6 \cdot 1) = 2$
Schleife L_4 :	$f_{L_4} = \sum_{i=1}^{n_G} f_{G_i} - 6n_L = 9 - (6 \cdot 1) = 3$

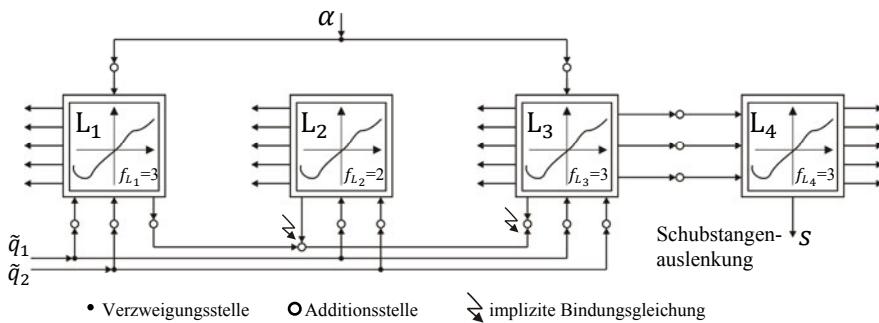


Abb. 12.37: Audi A5 – Trapezlenker-Hinterradaufhängung – Blockschaltbild und Lösungsfluss

Das topologische Schema des Gesamtfahrzeuges ist in Abb. 12.38 wiedergegeben.

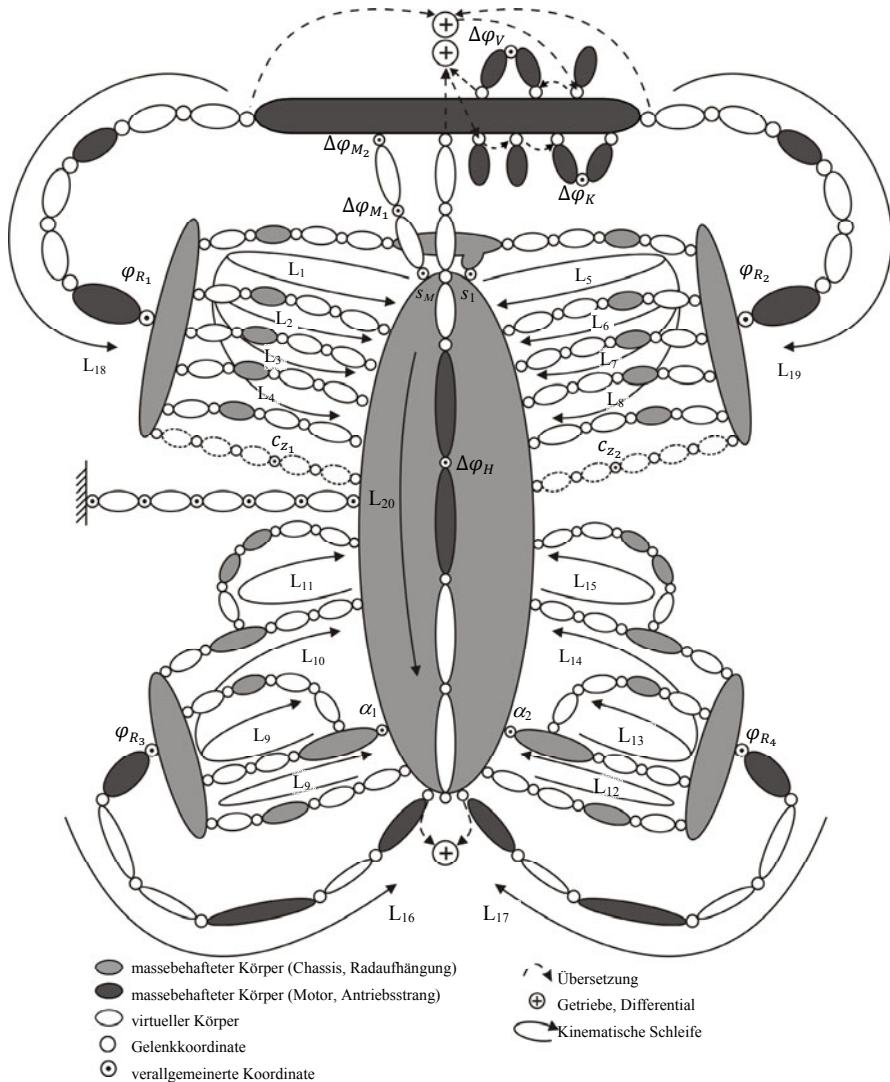


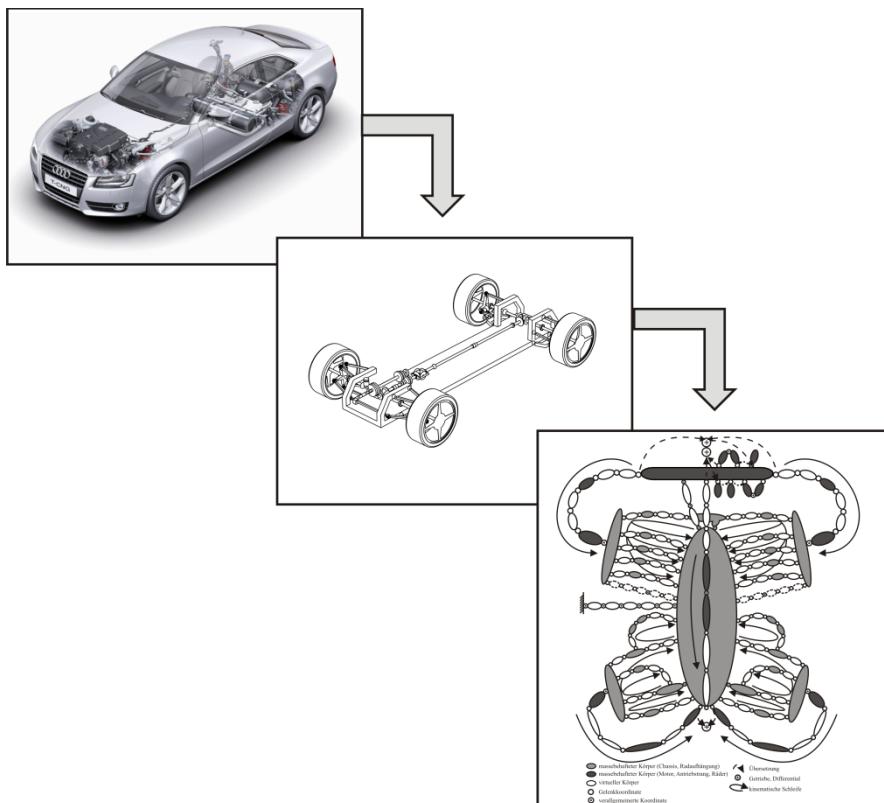
Abb. 12.38: Audi A5 – Topologie Gesamtfahrzeug

Die Zusammenstellung der Fahrzeugkomponenten mit Zahl der Körper, Zahl der kinematischen Schleifen und Zahl der Freiheitsgrade ist aus Tabelle 12.3 zu entnehmen. Zu beachten ist hier, dass die Analyse der Fünflenker-Vorderradaufhängung mit Hilfe von kinematischen Transformatoren, wie sie in Abb. 12.36 angedeutet ist, nicht unbedingt die optimale Lösung liefert. Stattdessen empfiehlt sich hier die Vorgehensweise entsprechend der Raumlenkerachse aus Kapitel 6.

Tabelle 12.3: Kinematische Struktur des Audi A5

Fahrzeugkomponente	Freiheitsgrade	Körper	Schleifen
Fahrgestell	6	1	0
Vorderradaufhängung	$2 \times 1 + 1$	13	2×4
Hinterradaufhängung	2×1	14	2×4
Motorlager	3	1	0
Antriebsstrang (inkl. aller Raddrehungen)	7	20	4
Σ	21	49	20

Die Schritte der Modellbildung zur kinematischen Analyse dieses allradgetriebenen Gesamtfahrzeugs – reales Fahrzeug, Mehrkörpersystem, Topologie und Einzelanalyse der Fahrzeugkomponenten – sind in Abb. 12.39 noch einmal zusammengefasst, und dienen, wie im Falle der anderen Fahrzeuge, als Voraussetzung für eine effiziente Aufstellung der dynamischen Gleichungen.

**Abb. 12.39:** Audi A5 – Stufen der kinematischen Modellbildung

12.1.3 Dynamik des Gesamtfahrzeugmodells

Nach der Berechnung der Kinematik des Gesamtfahrzeugmodells müssen zur Beschreibung der Dynamik die Bewegungsgleichungen des Systems aufgestellt werden. Dies kann besonders effektiv mit der Methode der kinematischen Differentiale nach Kecskeméthy und Hiller erledigt werden (vgl. dazu (Hiller et al. 1986), (Hiller und Kecskeméthy 1987), (Kecskeméthy 1993 und Hiller 1995)), wobei der numerische Aufwand durch zwei Optimierungsmöglichkeiten nochmals erheblich verringert werden kann.

Durch die Ausnutzung der topologischen Struktur des Fahrzeugmodells ist es in weiten Bereichen möglich, Nulloperationen zu vermeiden und Terme günstig zusammenzufassen. Hierzu wird die Kopplung der mechanischen Subsysteme untereinander betrachtet, die sich anschaulich beispielsweise aus Abb. 12.12 entnehmen lässt. Dabei stellt man fest, dass einzelne Subsysteme kinematisch entkoppelt sind. Das bedeutet, dass Änderungen in einzelnen verallgemeinerten Koordinaten spezieller Subsysteme keinen Einfluss auf die Bewegung in anderen Subsystemen haben.

Als Beispiel für die Kopplung der Einzelemente, Komponenten und Subsysteme ist nachfolgend die Massenmatrix eines Fahrzeugmodells mit $f = 15$ Freiheitsgraden abgebildet², von der wegen ihres symmetrischen Aufbaus nur die obere Dreiecksform dargestellt ist (Abb. 12.40). Man erkennt den unterschiedlichen Einfluss der einzelnen Subsysteme auf die Elemente der Massenmatrix, die hier am Beispiel des Einflusses des linken Vorderrades veranschaulicht sind. Mit ■ sind die vom linken Vorderrad beeinflussten und mit * die davon unbeeinflussten Massenmatrixelemente gekennzeichnet.

Zusätzlich zu dieser Optimierung ist die Zusammenfassung von Elementen der Massenmatrix möglich, wodurch sich wiederum die Anzahl der benötigten Rechenoperationen verringert. Zur näheren Erläuterung wird an dieser Stelle auf (Schnelle 1990), (Schmitz 1994) und (Pichler 1999) verwiesen.

² Dies entspricht dem Fahrzeug aus Abb. 12.12 ohne Berücksichtigung der Freiheitsgrade des Motorlagers und der Elastizitäten des Antriebsstrangs

Abb. 12.40: Koppelung der Subsysteme der Massenmatrix am Beispiel des Einflusses des linken Vorderrades

12.2 Simulation von Kraftfahrzeugen

Abhängig von der Aufgabenstellung, für welche die in Kapitel 12.1 entwickelten komplexen Fahrzeugmodelle eingesetzt werden sollen, ist es notwendig, diese Modelle für die durchzuführenden unterschiedlichen Simulationen entsprechend aufzubereiten. Ziel ist es also, dafür eine geeignete Simulationsumgebung zu schaffen. Die zu erstellenden Simulationen haben im vorliegenden Fall in erster Linie mit fahrdynamischen Abläufen zu tun, wie sie im Zusammenhang mit unterschiedlichen Fahrzeugsicherheitssystemen, Komfortsystemen oder der immer breiter werdenden Palette der Fahrerassistenzsysteme auftreten. Als Beispiele seien hier genannt: aktive und passive Fahrzeugsicherheitssysteme, wie Antiblockiersysteme (ABS), Antriebsschlupfregelungen (ASR), elektronische Stabilitatsprogramme (ESP – Electronic Stability Program), automatische Abstandsregelungen (ACC – Adaptive Cruise Control), auf der aktiven Seite oder automatische Rückhaltesysteme zum Insassenschutz bei Uberrollvorgangen als einem Beispiel aus der passiven Sicherheit. Hinter diesen Anwendungen steht nun eine bereits mehr als zwanzigjährige enge Zusammenarbeit in Form von konkreten Kooperations- und Entwicklungsprojekten mit der Fahrzeugzulieferindustrie sowie den Fahrzeugherstellern.

Zur Vermeidung von Unfällen werden dabei in den Fahrzeugen immer komplexere Regelsysteme eingesetzt. Sie dienen z.B. beim Elektronischen Stabilitätsprogramm ESP, das zusätzlich zur Regelung der Längsdynamik (ABS und ASR) unter Betrachtung des Schwimmwinkels und der Giergeschwindigkeit auch die Querdynamik berücksichtigt (Erhardt und

van Zanten 1995), der Stabilisierung der Fahrzeuge bei Situationen im physikalischen oder fahrerischen Grenzbereich und sollen eine Überforderung des Fahrers vermeiden helfen. ABS, ASR und ESP sind bereits weit fortgeschritten und gehören heute in den meisten Fahrzeugmodellen zur Grundausstattung. Um die Entwicklungszeiten zu verkürzen und die Entwicklungskosten zu senken, wird bei solchen Systemen daher üblicherweise das Werkzeug der Fahrdynamiksimulation eingesetzt. In Zusammenarbeit mit der Robert Bosch GmbH wurde am Lehrstuhl für Mechatronik der Universität Duisburg-Essen von 1990 bis 1995 für die erste serienmäßige ESP-Entwicklung für die damalige S-Klasse (W140) der Daimler-Benz AG die Entwicklungsumgebung FASIM_C++ für dreidimensionale Fahrdynamiksimulationen erstellt. Diese wird seither in Kombination mit kommerziellen Softwarepaketen in den unterschiedlichsten Anwendungsprojekten eingesetzt (Erhardt und van Zanten 1995).

12.2.1 Aufbau und Konzept von FASIM_C++

Das Simulationsprogramm FASIM_C++ bietet zum einen die Möglichkeit eines generellen Einblicks in das dynamische Systemverhalten des Fahrzeugs, zum anderen unterstützt es insbesondere die aufwendige Entwicklung von Fahrdynamikreglern. Das Programm besteht im Wesentlichen aus zwei Teilen: dem eigentlichen Fahrzeugmodell und dem Simulationsrahmen (Abb. 12.44).

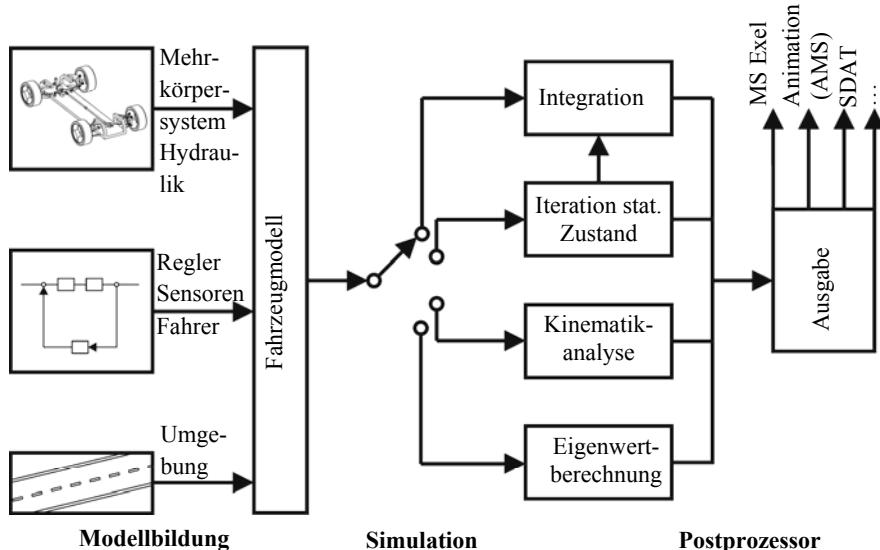


Abb. 12.41: Programmkonzept von FASIM_C++

Das Fahrzeugmodell lässt sich als Kombination

- eines Mehrkörpersystems, zur Abbildung der mechanischen Eigenschaften,
- der Hydraulik, für das Bremssystem,
- eines Fahrers,
- von zeitdiskreten Systemen, wie Reglern und Sensoren und
- dem äußeren Einfluss durch die Umgebung

auffassen. Das Fahrzeugmodell kann zur Simulation, oder zur Iteration von Gleichgewichtszuständen oder aber zur Analyse der Kinematik oder Linearisierung einschließlich einer Eigenwertberechnung dienen. Es stehen unterschiedliche Ausgabemechanismen zur Verfügung. Das gesamte Programm kann über eine grafische Benutzeroberfläche WinFas (Adamski 2001) für Microsoft Windows bedient werden.

Für die Struktur eines solchen Simulationsprogramms ergeben sich zahlreiche Anforderungen:

- Wesentliche fahrdynamische Effekte eines Fahrzeuges müssen abgebildet werden.
- Es muss eine Trennung zwischen dem Simulationsrahmen (einschließlich numerische Integrationsverfahren) und der Systembeschreibung vorhanden sein.
- Der Simulationsrahmen muss die Verknüpfung von schnellen und langsamen Teilsystemen (z.B. Hydraulik und Fahrzeug) sowie die Einbindung von diskreten Sensor-Regler-Systemen unterstützen.
- Das Programm soll in seiner Struktur transparent sein, so dass Änderungen und Erweiterungen einfach möglich sind.
- Der Austausch von Komponentenmodellen muss einfach sein. Beispiele: Übergang von einfachen zu komplexen Komponentenmodellen, Austauschen von Radaufhängungstypen. Hierbei soll sich die Zahl der jeweiligen Freiheitsgrade ändern können.
- Während der Simulation muss ein einfacher Zugriff auf beliebige Systemgrößen (z. b. Sensorsignale) möglich sein.
- Die Eingabe von Stellsignalen vom Regler ins System muss ebenfalls einfach und flexibel sein.

- Niedrige Rechenzeiten, die durch effizientes Aufstellen der Bewegungsgleichungen erreicht werden können.

Als möglicher Lösungsansatz wurde die Konzeption der modular aufgebaute Simulationsumgebung FASIM_C++ erarbeitet. Sie wurde in der objektorientierten Programmiersprache C++ erstellt (Pichler 1999). Die Bewegungsgleichungen der mechanischen Komponenten werden in Minimalkoordinaten mit dem Verfahren der kinematischen Differentiale (Kapitel 4) aufgestellt. Dieser Zugang erlaubt in einer speziellen Formulierung, auf die nachfolgend näher eingegangen wird, die Zerlegung des Fahrzeugs in Module (Fahrgestell, Vorderachse, Hinterachse, Reifen, Antriebsstrang, Motorlager) mit standardisierten Schnittstellen. Auch die übrigen nichtmechanischen Komponenten (Bremshydraulik, Umgebung, Fahrer, Verbrennungsmotor) werden als Module beschrieben.

Die modulare Struktur ist ein wesentlicher Vorteil des Simulationsprogramms FASIM_C++, da somit ein vergleichsweise einfaches Austauschen einzelner Systemkomponenten möglich ist. In dem nun folgenden Abschnitt wird ein Überblick über die bislang erstellten Module gegeben; dem Anwender ist so die Auswahl passender Komponenten für sein Simulationsvorhaben möglich.

Wie ersichtlich ist, lassen sich folgende Grundprinzipien der Struktur von FASIM_C++ herleiten.

- Jedes Modul ist nach außen abgeschlossen und besitzt einen eigenen Datensatz sowie Methoden für die Initialisierung, für die Kinematik- und die Dynamikberechnung des Moduls (bei mechanischen Komponenten).
- Die interne Kommunikation zwischen den Modulen sowie mit einem übergeordneten Rahmen, der die Bewegungsgleichungen zusammenstellt, erfolgt über Schnittstellen, die nicht von der Komplexität des Moduls abhängen. Eine Änderung der Zahl der Freiheitsgrade äußert sich nur in der Dimension einiger Schnittstellengrößen und kann problemlos verarbeitet werden.
- Der Rechenfluss folgt dem Aufbau des Modells. Mit den verallgemeinerten Koordinaten als Eingang wird zunächst die Kinematik des Mehrkörpersystems *von oben nach unten* (Fahrgestell, Achsen, Antriebsstrang, Räder) berechnet. Daraufhin wird mit den nun bekannten kinematischen Werten die Dynamik der nichtmechanischen Module (Fahrer, Motor, Bremshydraulik) bestimmt. Schließlich erfolgt die Berechnung der Dynamik der mechanischen Komponenten des Mehrkörpermodells *von unten nach oben*.

Zuletzt werden durch den Simulationsrahmen die Bewegungsgleichungen gebildet. Durch Einsetzen des Zustandsvektors in die Bewegungsgleichungen kann die erste Ableitung des Zustandsvektors ermittelt werden. Nach der numerischen Integration der ersten Ableitung dieses Zustandsvektors wird dieser wiederum in die den Modulen entsprechenden verallgemeinerten Koordinaten zerlegt und der Rechenfluss beginnt von neuem.

Zur Durchführung eines Simulationsprojektes ist somit für den Anwender der folgende Arbeitsablauf vorgegeben. Zunächst wählt er aus der Modulbibliothek (siehe Abschnitt 12.2.2), die seinem Fahrzeugmodell entsprechenden Module aus. So könnte er beispielsweise nach der Auswahl eines Fahrgestells ein Modell für eine McPherson-Radaufhängung und eine Doppelquerlenkerachse wählen. Durch Hinzufügen eines Frontantriebsmoduls und eines dynamischen Reifenmodells wird der mechanische Bestandteil des Fahrzeugmodells komplettiert. Zur Vervollständigung des Gesamtmodells verwendet man weiterhin ein Fahrermodell, ein Modell für die Bremshydraulik sowie ein Motormodell. Zuletzt kann beispielsweise ein ABS- oder ESP-Regler installiert werden. Dem Anwender steht es nun frei, Parameter in den Steuerdatensätzen zu ändern oder individuelle Simulationsläufe zu erstellen (Kurvenfahrten, Fahrten über versetzte Bodenwellen, usw.).

12.2.2 Modulare Struktur eines Fahrzeugmodells

Das Programm FASIM_C++, das primär für Straßenfahrzeuge entwickelt wurde, stellt die Bewegungsgleichungen komplexer modularer Mehrkörpersysteme mit aktiven Elementen in Minimalkoordinaten auf. Die Systeme werden als Starrkörpermodelle unterschiedlicher Komplexität abgebildet, welche z.B. die nichtlineare Kinematik der Radaufhängungen berücksichtigt, die sich insbesondere im Auftreten von zahlreichen kinematischen Schleifen äußert, und die für die korrekte Abbildung des dynamischen Verhaltens des Fahrzeuges eine wesentliche Rolle spielt.

Bei der Programmentwicklung wurde besonderes Gewicht auf das weitgehend automatische Aufstellen der Bewegungsgleichungen bei hoher Modularität des Gesamtprogramms und geringem Rechenzeitbedarf gelegt. Ferner sollen die einzelnen Module schnell erstellt und einfach ausgetauscht werden können. Wie dies realisiert worden ist, wird im nächsten Abschnitt erläutert.

Zur Realisierung eines hohen Modularitätsgrades ist eine systematische Strukturierung des Mehrkörpersystems *Fahrzeug* erforderlich. Die Schnittstellen zwischen den Modulen werden dabei so gelegt, dass sie das Mehr-

körpersystem an starren Verbindungen aufzutrennen. Dies bedeutet, dass jegliche Beschreibung der Gelenke in die Module gelegt wird, mit dem Vorteil, dass die Schnittstellen nach außen einheitlich behandelt werden können. Ein Mehrkörpersystem kann dadurch in anschauliche, realistische Baugruppen aufgeteilt werden (Pichler 1999).

Der Zusammenbau der einzelnen Module zu einem komplexen Mehrkörpersystem kann bei der gewählten Vorgehensweise als ein Zusammenstecken der einzelnen Baugruppen zu einem Gesamtsystem *Fahrzeug* interpretiert werden. Für jeden Typ einer Baugruppe wird ein Modul implementiert und in einer Bibliothek abgelegt. Da beim Aufstellen der Bewegungsgleichungen die benötigten Koppelemente automatisch ermittelt werden, kann die Berechnung der Kinematik und Dynamik eines Moduls jeweils weitgehend unabhängig von allen anderen Modulen implementiert werden.

Um den Gedanken der Modularität und die Flexibilität dieses Konzeptes gebührend zu betonen, sollen in der Folge als Fahrzeugtypen, neben einem reinen PKW, auch noch ein Gespann – bestehend aus PKW und Wohnanhänger – sowie ein Sattelzug kurz vorgestellt werden. Deren Umsetzung in FASIM_C++ wird nachfolgend kurz erläutert.

Personenkraftfahrzeug

Ein Fahrzeug wird in einem ersten Schritt in die Module Fahrgestell, Vorder- bzw. Hinterachse und die vier Räder unterteilt (siehe Abb. 12.45).

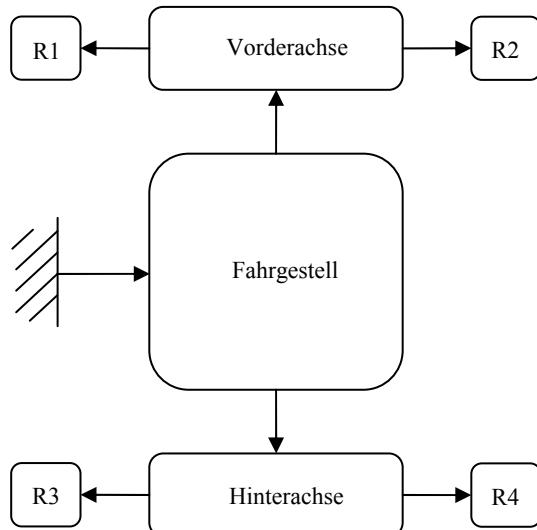


Abb. 12.42: Struktur eines Personenkraftfahrzeugs

Die Unterscheidung der einzelnen Fahrzeugtypen (Fahrzeuge verschiedener Baureihen bzw. Hersteller) wird durch die Verwendung angepasster Module erreicht. So kann zum Beispiel für den Modultyp Vorderachse eine Achse der folgenden Bauart ausgewählt werden⁵:

- Starrachse,
- Schräglengerachse,
- Doppelquerlenkerachse,
- McPherson-Achse,
- Doppelgelenkfederbeinachse,
- Vierlenkerachse,
- Raumlenkerachse.

Mit jeder Bauart ist ein spezieller Datensatz verbunden, der die herstellerspezifischen Abmessungen und Parameter enthält.

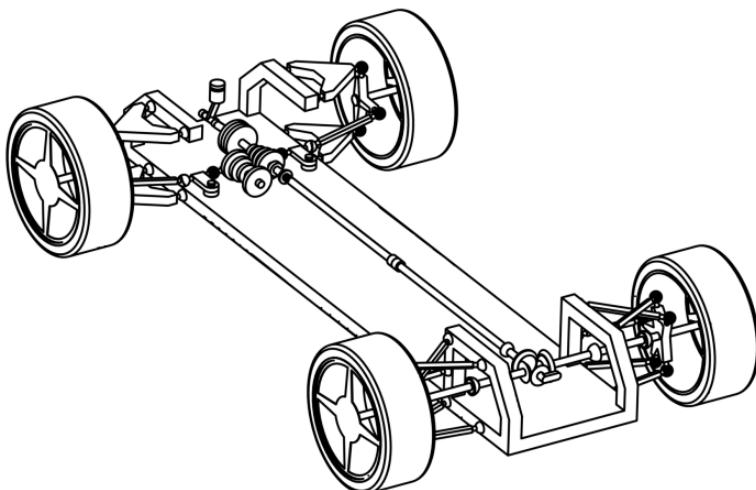


Abb. 12.43: Komplexes Mehrkörpermodell eines MB W140 (frühere S-Klasse)

Ein konkretes Beispiel für ein Fahrzeugmodell ist die Modellierung eines Mercedes Benz W140 (Abb. 12.43), das Zielfahrzeug während der weiter oben erwähnten Kooperation mit der Fahrzeugzulieferindustrie. In seinem mechanischen Aufbau und seiner topologischen Struktur ist es dem zu Beginn dieses Kapitels vorgestellten hinterradangetriebenen 5er BMW sehr ähnlich. Die Vorderachse ist eine Doppelquerlenkerachse mit drei

Freiheitsgraden, wobei die Lenkung als ein Gelenkviereck mit Lenkdämpfer ausgeführt ist. Als Hinterachse wird das Modell einer Raumlenkerachse (je ein Freiheitsgrad) verwendet. Für den Antriebsstrang steht ein Heckantrieb mit Automatikgetriebe zur Verfügung. Das Rad ist in eine Felge, die zum Antriebsstrang gehört und in einen Reifen aufgeteilt. Die Felge übernimmt den Drehfreiheitsgrad sowie die Masseneigenschaften des Rades. Das Reifenmodell kann aus mehreren Modellen mit unterschiedlicher Komplexität und Aufgabenstellung gewählt werden. Für Standardanwendungen wird ein Reifenmodell nach HSRI (siehe Abschnitt 7.4.6) eingesetzt. Eine genauere Beschreibung des Fahrzeugmodells ist in (Schmitz 1994) zu finden. Die kinematische Struktur ähnelt der in Tabelle 12.1 wiedergegebenen.

Wohnanhänger

Durch konsequente Ausnutzung der Möglichkeiten der Programmiersprache C++ können in FASIM_C++ eine Vielzahl von Fahrzeugtypen simuliert werden, ohne dass ein neues Programm erstellt werden muss. Auf diese Weise ist es z.B. möglich einen Pkw mit Wohnanhänger zu simulieren (Abb. 12.44). Die zugehörige Modul-Struktur ist in Abb. 12.45 dargestellt.

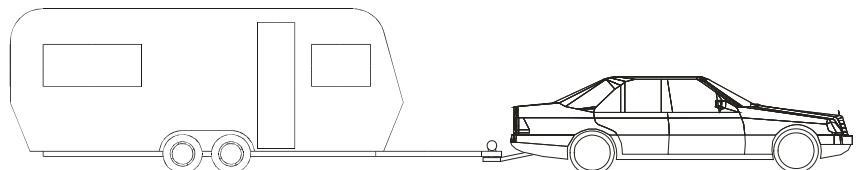


Abb. 12.44: Skizze eines Wohnwagengespannes

Da der überwiegende Teil von Wohnanhängern über eine Auflaufbremse verfügt (Uffelmann 1980), wurde auch das Anhängermodul mit dem Modell solch einer Bremse versehen. Da die Auflaufbremse ein Beispiel für ein strukturvariantes System darstellt, soll sie im Folgenden näher erläutert werden. Als Anhängerachse wird eine Drehstabfederachse verwendet (Müller 1996).

Die Auflaufbremse erzeugt selbsttätig ein Bremsmoment, das durch den Auflaufvorgang des Anhängers beim Abbremsen des Zugfahrzeugs entsteht. Die Deichsel des Anhängers ist in einem bestimmten Bereich längsverschiebbar, so dass der Anhänger beim Bremsen die Deichsel durch die entstehende Längskraft gegen eine Feder und einen Dämpfer zusammenschiebt. Durch die Relativbewegung zwischen Anhänger und Zugfahrzeug wird so die Bremse betätigt. Die Deichsel besitzt zwei Anschlüsse.

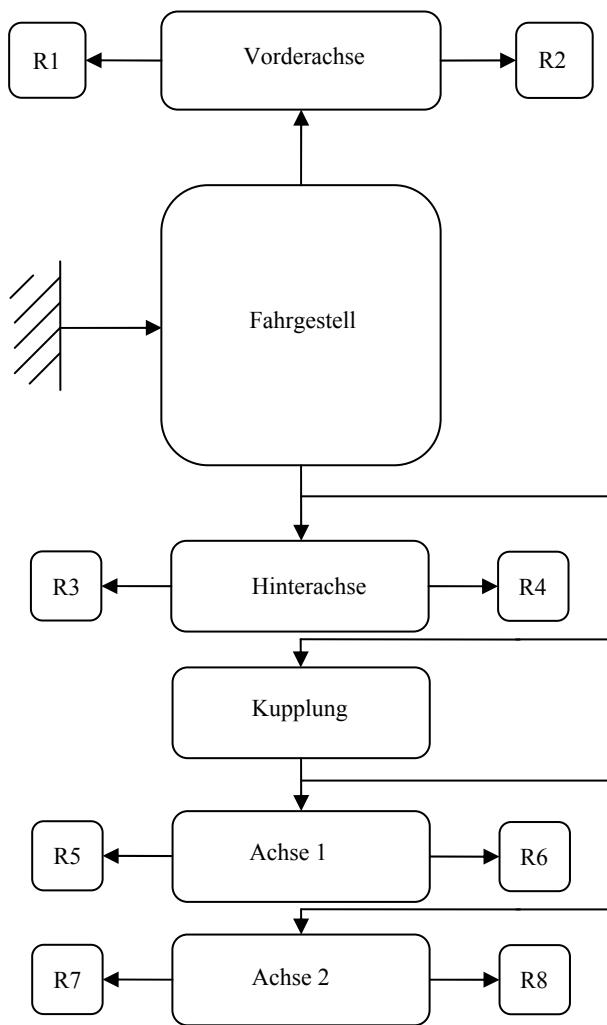


Abb. 12.45: Modul-Struktur eines Wohnwagengespannes

Wird einer der Anschläge erreicht, so muss der translatorische Freiheitsgrad der Kupplung abgeschaltet werden. Die Einschalt- bzw. Abschaltbedingung wird in diesem einfachen Modell durch eine Schätzung festgelegt. Die Entwicklungsumgebung FASIM_C++ ist zwar in der Lage zu jedem Zeitpunkt alle benötigten Größen exakt zu berechnen, doch hat es sich in diesem Fall gezeigt, dass eine Schätzung der notwendigen Kräfte zu einem

guten und schnelleren Ergebnis führt. Für die Beurteilung ob der Freiheitsgrad zugeschaltet werden muss oder nicht, dient zum einen die Anhängerlängskraft F_A

$$F_A = m_A \cdot a_{abs} \quad (12.1)$$

mit

- F_A : Anhängerlängskraft [N],
 m_A : Masse des Anhängers [kg],
 a_{abs} : Beschleunigung in Koordinaten des Inertialsystems [m/s²]
(betrachtet wird nur der Anteil in der x-y-Ebene)

und zum anderen die Federkraft F_F der in der Deichsel eingebauten Feder

$$F_F = c_F \cdot x_{Bmax} \quad (12.2)$$

mit

- F_F : Federkraft [N],
 c_F : Federkonstante [N/m],
 x_{Bmax} : Federweg bis zum Anschlag [m].

Solange $F_A \leq F_F$ gilt, das heißt, solange die Kraft aus der Verzögerung kleiner bleibt als die Federkraft, ist der Freiheitsgrad zugeschaltet. Die Anschläge der Bremse sind jedoch so gewählt, dass sie sich bei Fahrten mit geringer Beschleunigung bzw. Verzögerung durch die aerodynamische Kraft des Anhängers und den Rollwiderstand der Reifen im hinteren Anschlag befindet. Der Freiheitsgrad der Auflaufbremse wird dadurch abgeschaltet und die Berechnungszeit verkürzt sich.

Sattelkraftfahrzeug

Im Unterschied zu dem vorhergehenden Beispiel des Wohnwagengespanns ist die Anhängerkupplung (Sattelkupplung) bei einem Sattelkraftfahrzeug (Abb. 12.46) vor der Hinterachse des Zugfahrzeugs angebracht. Das Modell eines Sattelkraftfahrzeugs zeigt, dass sich die Möglichkeiten von FASIM_C++ nicht auf Personenkraftfahrzeuge beschränken. Um dies prinzipiell zu zeigen, wurde ein einfaches Fahrzeugmodell entworfen. Das Gesamtfahrzeugmodell ist aber in der Lage wesentliche Effekte bereits gut

nachzubilden. Da bei einem Fahrzeug dieser Ausmaße (Länge ca. 15 m, Gewicht ca. 30t) nicht mehr von starren Aufbauten ausgegangen werden kann, wurden im Fahrgestell der Zugmaschine eine und im Rahmen des Auflegers zwei konzentrierte Elastizitäten eingefügt. Die eingesetzten Module *Elastizität* erlauben eine Verdrehung um die Fahrzeuggängsachse. Auf diese Weise soll der verwindungsweiche Rahmen nachgebildet werden. Die Modul-Struktur des Sattelkraftfahrzeuges wird in Abb. 12.47 wieder-gegeben. Insgesamt verfügt das Modell über 32 Freiheitsgrade. Die kine-matische Topologie eines Sattelkraftfahrzeuges ist in Abb. 12.48 darge-stellt. Sie ist sehr einfach gehalten und enthält nur eine kinematische Schleife (Lenkung).

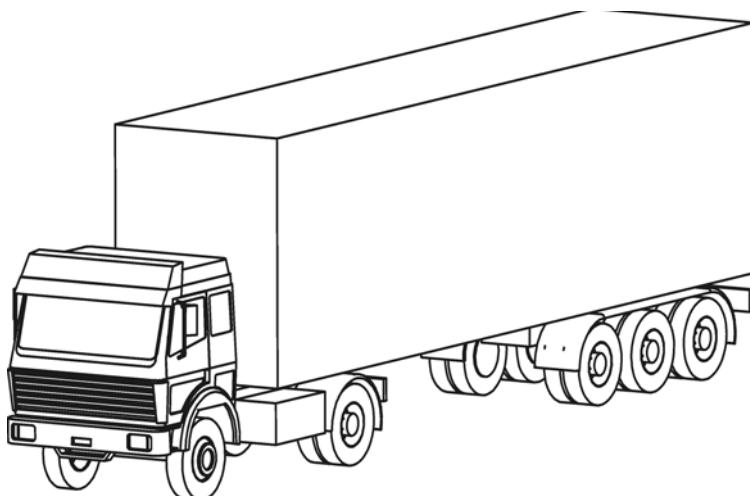


Abb. 12.46: Skizze eines Sattelkraftfahrzeuges

12.2.3 Aufstellen der Bewegungsgleichungen

Bei der Berechnung der Kinematik des Systems wird auf bewährte Konzepte zurückgegriffen ((Hiller 1989), siehe auch Kapitel 3). Hierbei wird die Berechnung der *globalen Kinematik* in eine *relative Kinematik* – d.h. Lösung der Bindungsgleichungen – und eine *absolute Kinematik* – d.h. Bestimmung der absoluten Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung der Körper – unterteilt. Zur topologischen Strukturierung des Mehrkörper-systems wird der *kinematische Transformator* zur Darstellung des Über-tragungsverhaltens einer kinematischen Einzelschleife und deren Verknüp-fung zu einem kinematischen Netz verwendet (Hiller et al. 1986). Die Kinematik der Einzelschleifen kann mit dem Verfahren des *charakteristi-schen Gelenkpaares* in rekursiver oder weitgehend rekursiver Form gelöst

werden (Woernle 1988). Zur Berechnung der Kinematik kann zusätzlich das in der objektorientierten Programmiersprache C++ entwickelte Programm Paket *MOBILE* verwendet werden (Kecskeméthy 1993).

Die Bewegungsgleichungen des Systems werden in Minimalkoordinaten aufgestellt, wobei die benötigten partiellen Ableitungen der Körperkoordinaten nach den verallgemeinerten Koordinaten mit dem Verfahren der *kinematischen Differentiale* ermittelt werden (Kecskeméthy und Hiller 1989). Diese Vorgehensweise basiert auf der oben erläuterten Behandlung der Kinematik. Die Bewegungsgleichungen können weitgehend automatisch aufgestellt werden, wenn die einzelnen Module des Systems, wie bereits verdeutlicht, in Baumstruktur miteinander verkoppelt sind und von der Wurzel beginnend zu den Blättern initialisiert werden. Die Schnittstellen werden hierbei selbstständig aufgebaut. Durch eine konsequente Partitionierung der Massenmatrix und der JACOBI-Matrizen können die infolge der Topologie des Systems auftretenden Nulloperationen vermieden werden (Pichler 1999). Der Einfluss auf die Massenmatrix wurde bereits in Abschnitt 12.1.3 für einen Personenkraftwagen ausführlich erläutert. Im Folgenden wird dies nochmals für ein Sattelkraftfahrzeug gezeigt.

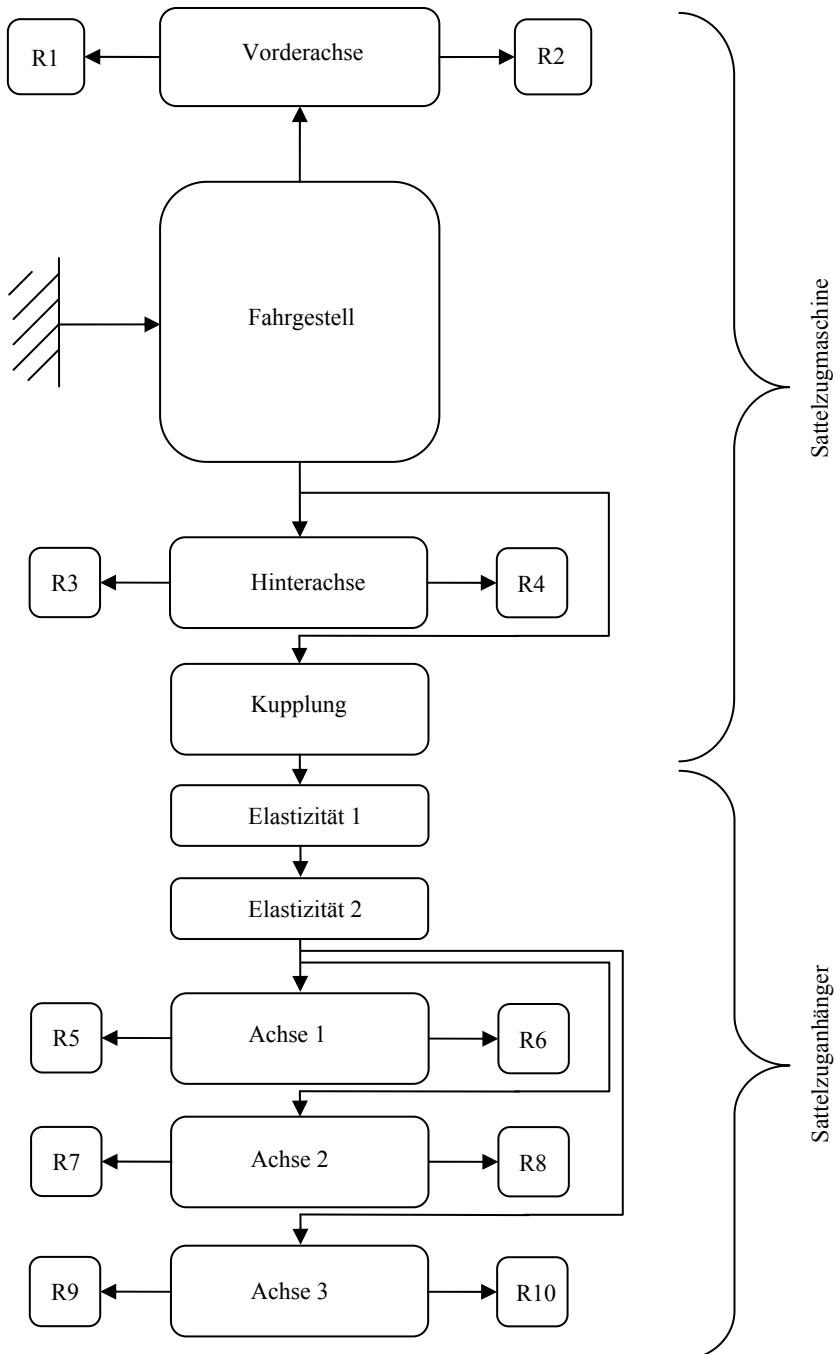


Abb. 12.47: Modul-Struktur des Sattelkraftfahrzeugs

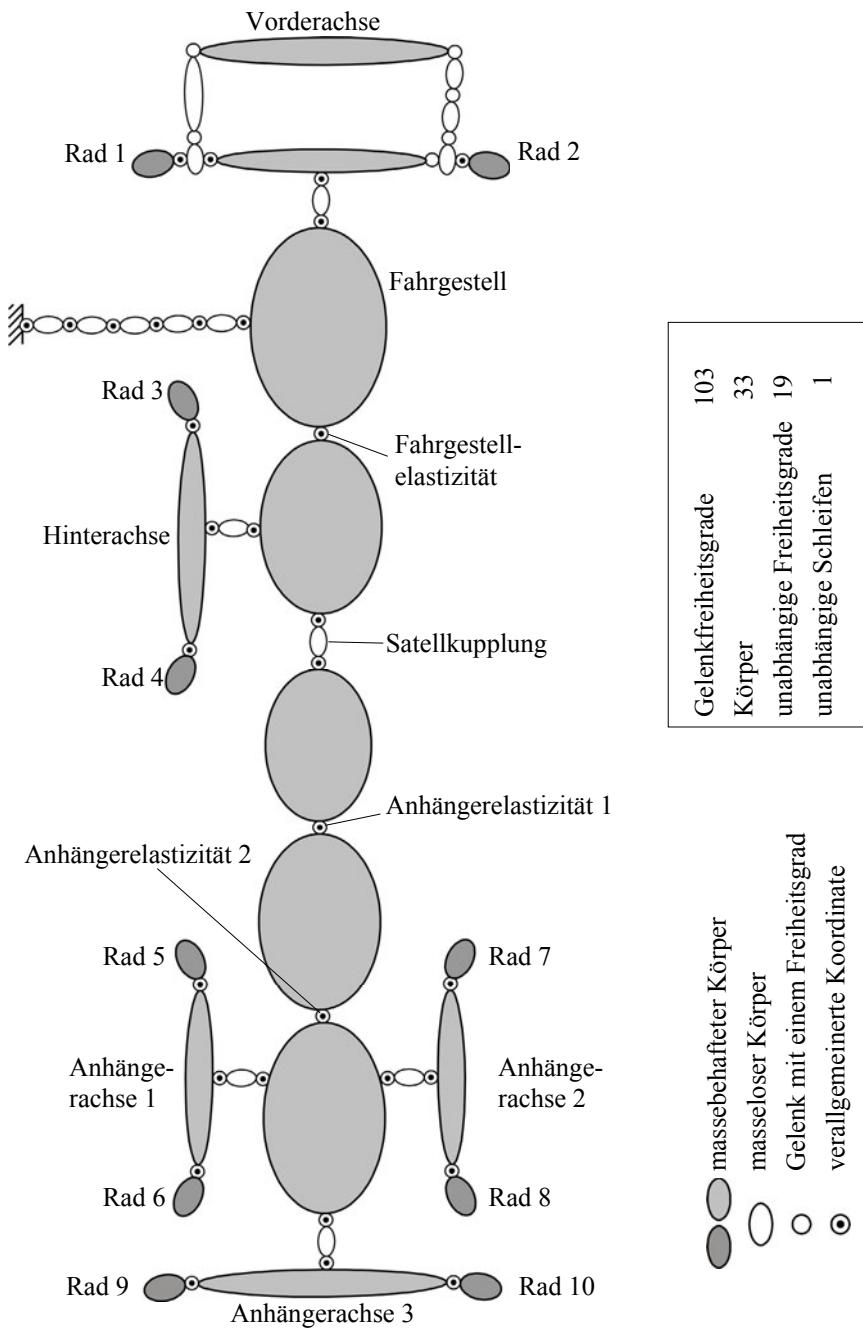


Abb. 12.48: Gelenkkörperdarstellung eines Sattelkraftfahrzeugs – Topologie

Die Berechnung wird insgesamt in eine Initialisierung, einen Kinematikteil (Position, Geschwindigkeit und *kinematische Differentiale*), bei dem das System von der Wurzel zu den Blättern durchgerechnet wird und einen Dynamikteil (eingeprägte Kräfte bzw. Momente und Aufstellen der Bewegungsgleichungen), bei dem das System in umgekehrter Reihenfolge abgearbeitet wird, aufgeteilt.

Den verwendeten Bewegungsgleichungen liegt nach Kapitel 4 das d'ALEMBERTsche Prinzip in der LAGRANGEschen Fassung zugrunde

$$\sum_{i=1}^{n_B} [(m_i \ddot{\mathbf{r}}_{S_i} - \mathbf{F}_i) \delta \mathbf{r}_{S_i} + (\boldsymbol{\Theta}_{S_i} \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\Theta}_{S_i} \boldsymbol{\omega}_i - \mathbf{T}_{S_i}) \delta \boldsymbol{\varphi}_i] = 0, \quad (12.3)$$

mit den Bezeichnungen:

- n_B : Anzahl der massebehafteten Körper,
- $m_i, \boldsymbol{\Theta}_{S_i}$: Masse und Trägheitstensor bezogen auf den Schwerpunkt S,
- $\ddot{\mathbf{r}}_{S_i}$: Beschleunigung des Schwerpunktes,
- $\mathbf{F}_i, \mathbf{T}_{S_i}$: eingeprägte Kraft bzw. Moment bzgl. ich des Schwerpunktes,
- $\delta \mathbf{r}_{S_i}; \delta \boldsymbol{\varphi}_i$: virtuelle Verschiebung und virtuelle Verdrehung.

Die virtuellen Verschiebungen aus Gleichung (12.3) sind aufgrund der Bindungen des Systems nicht unabhängig voneinander. Um also die Bewegungsgleichungen des Mehrkörpersystems in Minimalkoordinaten darstellen zu können, ist die Einführung von f unabhängigen verallgemeinerten Koordinaten q_1, \dots, q_f sinnvoll. Dabei entspricht f der Anzahl der Freiheitsgrade und bestimmt somit die Dimension der Massenmatrix. Die Bewegungsgleichungen des mechanischen Systems in Minimalkoordinaten ergeben sich zu

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{b} = \mathbf{Q} \quad (12.4)$$

mit den Bezeichnungen und Dimensionen:

- \mathbf{q} : $[f \times 1]$ - Vektor der verallgemeinerten Koordinaten,
- \mathbf{M} : $[f \times f]$ - verallgemeinerte Massenmatrix,
- \mathbf{b} : $[f \times 1]$ - Vektor der verallgemeinerten Coriolis-, Zentrifugal- und Kreiselkräfte
- \mathbf{Q} : $[f \times 1]$ - Vektor der verallgemeinerten eingeprägten Kräfte.

Mit Hilfe des Verfahrens der kinematischen Differentiale werden unter Verwendung der Pseudogeschwindigkeiten $\tilde{\mathbf{r}}_{S_i}^{(j)}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(j)}$ und der Pseudobel-

schleunigungen \tilde{r}_{S_i} , $\tilde{\omega}_i$ die Elemente der Bewegungsgleichungen berechnet ((Kecskeméthy und Hiller 1989), (Kecskeméthy 1993)). Die Elemente erhalten so die Form (Abschnitt 4.6)

$$\mathbf{M}_{j,k} = \sum_{i=1}^{n_B} \left[m_i \tilde{\mathbf{r}}_{S_i}^{(j)} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_{S_i}^{(k)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(j)} \cdot (\boldsymbol{\theta}_{S_i} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(k)}) \right], \quad (12.5)$$

$$\mathbf{b}_j = \sum_{i=1}^{n_B} \left[m_i \tilde{\mathbf{r}}_{S_i}^{(j)} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_{S_i}^{(j)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(j)} \cdot (\boldsymbol{\theta}_{S_i} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\theta}_{S_i} \boldsymbol{\omega}_i) \right], \quad (12.6)$$

$$\mathbf{Q}_j = \sum_{i=1}^{n_P} \left[\tilde{\mathbf{r}}_{S_i}^{(j)} \cdot \mathbf{F}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(j)} \cdot \mathbf{T}_i \right]. \quad (12.7)$$

Um das Verfahren der kinematischen Differentiale auf die neu eingeführte Modulstruktur der Fahrzeuge korrekt zu übertragen, müssen die Bewegungsgleichungen umgeformt werden. Der Vorteil der dann verwendeten Methode liegt in der Modularisierung der benötigten Matrizen und Vektoren, so dass die einzelnen Elemente von den entsprechenden Modulen berechnet werden können. Deshalb sind die Gleichungen (12.8) bis (12.10) in eine innere Summe innerhalb eines Moduls l über alle seine Körper n_B und eine äußere Summe über alle Module n_M unterteilt (Pichler 1999).

$$\mathbf{M}_{j,k} = \sum_{l=1}^{n_M} \sum_{i \in l_i} \left[m_i \tilde{\mathbf{r}}_{S_i}^{(j)} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_{S_i}^{(k)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(j)} \cdot (\boldsymbol{\theta}_{S_i} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(k)}) \right], \quad (12.8)$$

$$\mathbf{b}_j = \sum_{l=1}^{n_M} \sum_{i \in l_i} \left[m_i \tilde{\mathbf{r}}_{S_i}^{(j)} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_{S_i}^{(j)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(j)} \cdot (\boldsymbol{\theta}_{S_i} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\theta}_{S_i} \boldsymbol{\omega}_i) \right], \quad (12.9)$$

$$\mathbf{Q}_j = \sum_{l=1}^{n_M} \sum_{i \in l_i} \left[\tilde{\mathbf{r}}_{S_i}^{(j)} \cdot \mathbf{F}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(j)} \cdot \mathbf{T}_i \right]. \quad (12.10)$$

Die Vektoren mit dem Symbol „ $\tilde{\cdot}$ “ sind die bereits in Abschnitt 4.6 eingeführten *Pseudo-Geschwindigkeiten* bzw. *Pseudo-Beschleunigungen* und werden wie folgt definiert:

$$\tilde{\mathbf{r}}_{S_i}^{(j)} = \frac{\delta \mathbf{r}_{S_i}}{\delta \mathbf{q}_j}, \quad \tilde{\mathbf{r}}_{S_i} = \sum_{j=1}^f \sum_{k=1}^f \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{S_i}}{\partial \mathbf{q}_j \partial \mathbf{q}_k} \dot{\mathbf{q}}_j \dot{\mathbf{q}}_k, \quad (12.11)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(j)} = \frac{\delta \boldsymbol{\omega}_i}{\delta \dot{\mathbf{q}}_j}, \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i = \sum_{j=1}^f \frac{\delta \mathbf{J}_{\omega_i}}{\delta \mathbf{q}_j} \dot{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}_j; \quad \mathbf{J}_{\omega_i} = \frac{\delta \boldsymbol{\omega}_i}{\delta \dot{\mathbf{q}}} \quad (12.12)$$

mit

$m_i, \boldsymbol{\Theta}_i$: Masse und Trägheitstensor des Körpers i ,

$\mathbf{F}_i, \mathbf{T}_i$: eingeprägte Kraft, eingeprägtes Moment

$\boldsymbol{\omega}_i$: Winkelgeschwindigkeit.

Durch die Anwendung der Kinematik des Fahrzeugmodells können die Pseudogeschwindigkeiten und Pseudobeschleunigungen berechnet werden. Bedingt durch die Baumstruktur des Modells ist dieses wesentlich schneller als die analytische Berechnung. Die modulare Struktur wird aus der Massenmatrix des bereits beschriebenen Modells eines Sattelkraftfahrzeugs, die in Abb. 12.49 dargestellt ist, deutlich³.

Aus Abb. 12.49 ist ersichtlich, dass die Massenmatrix symmetrisch ist, so dass sie nur zur Hälfte ausgewertet werden braucht. Die Berechnung der einzelnen Elemente der Massenmatrix wird nun blockweise durchgeführt. Da mittels der Schnittstellen zwischen den Modulen der Weg von Inertialsystem (Wurzel) zum Modul (Blatt) bekannt ist, werden nur die Kopplungen berücksichtigt, die auf diesem Weg liegen. Bei allen anderen Kopplungen käme es systembedingt zu Nulloperationen. Die Berechnung der Blöcke ist in zwei Stufen unterteilt:

- Berechnung der Blöcke der Hauptdiagonalen und
- Berechnung der Blöcke der Nebendiagonalen.

³ Die Module wurden zusammengefasst, da die Darstellung aller 32 Freiheitsgrade zu unübersichtlich wird.

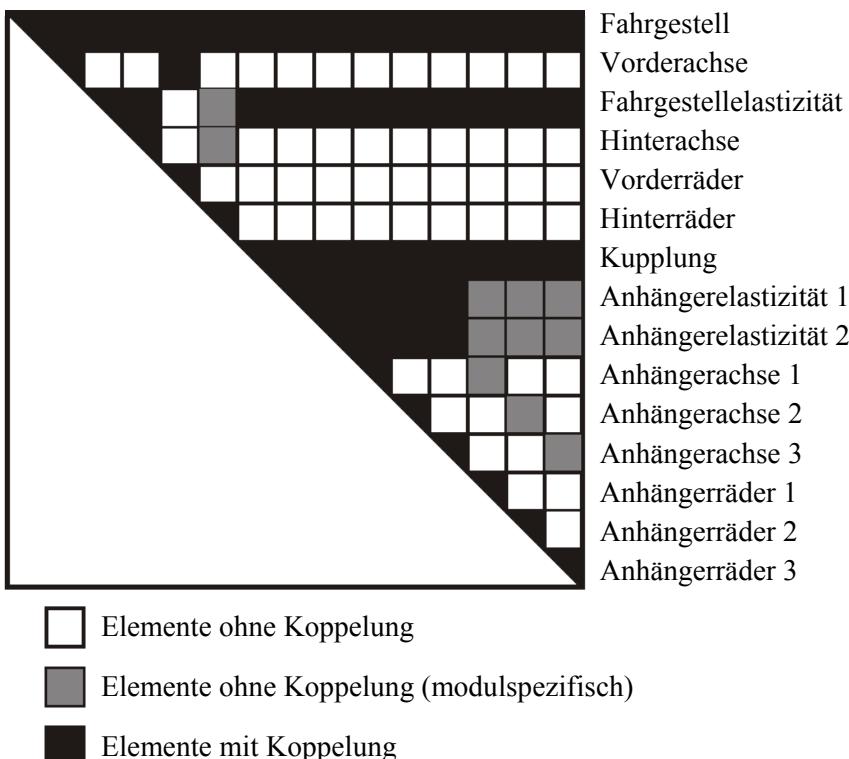


Abb. 12.49: Schematisierte Darstellung der Massenmatrix für den Sattelzug

Neben den Elementen, die strukturbedingt Null bleiben, gibt es noch Elemente, bei denen im Standardfall eine Koppelung vorliegt, es jedoch bedingt durch die spezielle Kinematik ebenfalls zu Nulloperationen kommt. Im speziellen Fall des hier betrachteten Sattelkraftfahrzeuges stehen die Räder senkrecht auf der Achse, so dass die Koppelterme zwischen Achse und Rad verschwinden (aufgrund des Skalarproduktes). Dies kann jedoch nicht automatisch erkannt werden und muss deshalb modulintern entsprechend behandelt werden, um so zu einer Rechenzeitoptimierung zu gelangen⁴. Auch für die Elemente des Vektors der verallgemeinerten Coriolis-, Zentrifugal- und Kreiselkräfte \mathbf{b} und des Vektors der verallgemeinerten Kräfte \mathbf{Q} werden nur die Rechenoperationen durchgeführt, die einen Beitrag ungleich Null zum Ergebnis liefern. Betrachtet man beispielsweise die Drehbewegung der Räder der dritten Anhängerachse, so wird deutlich,

⁴ Eine Mitberechnung dieser Terme würde keine Ergebnisveränderung bewirken, aber Rechenzeit verbrauchen.

dass die Koordinaten der Räder zwar von den Bewegungen der zugehörigen Achse, der beiden Anhängerelastizitäten, der Anhängerkupplung, der Fahrgestellelastizität sowie natürlich des Fahrgestells beeinflusst werden, nicht aber von den Bewegungen der restlichen Module. Es ist einsichtig, dass eine Drehung eines anderen Rades keinen Einfluss auf das betrachtete Rad hat.

Die äußere Modellstruktur enthält keine kinematischen Schleifen. Innerhalb der einzelnen Module können aber sehr wohl Schleifen existieren (z.B. Lenkung, Radaufhängungen, ...). Diese Schleifen werden modulintern über geeignete Mechanismen gelöst. Die Berechnung der Kinematik und der Dynamik erfolgt modulweise. Zuerst wird die Kinematik entsprechend der Baumstruktur bei der Wurzel beginnend ausgewertet. Danach wird die Dynamik in umgekehrter Reihenfolge berechnet.

Mit den verwendeten Verfahren können die einzelnen Module zu einem Mehrkörpersystem mit einer beliebigen Anzahl von Freiheitsgraden und Modulen in Baumstruktur verknüpft werden. Insbesondere können auf einfache Art die Module ausgetauscht und die Struktur des Gesamtsystems variiert werden. Das entwickelte Konzept kann auf den Fall erweitert werden, bei welchem die Module zu Schleifen verknüpft sind. Diese Schleifenstruktur von Modulen erhält man beim Fahrzeug z. B. bei der Einführung von Achsträgern und bei der Modellierung des Antriebsstrangs.

12.2.4 Numerische Integration

Es werden verschiedene Integrationsverfahren angeboten, die abhängig von der Aufgabe und dem zu simulierenden System gewählt werden können. Im Einzelnen stehen folgende Verfahren zur Verfügung:

Einschrittverfahren:

- modifiziertes EULER-Verfahren
- HEUN-Verfahren

Mehrschrittverfahren:

- Prediktor-Korrektor-Verfahren nach ADAMS
- LSODAR-Integrationsverfahren (umschaltbar zwischen ADAMS- und BDF-Verfahren)

Einschrittverfahren

Als einfaches Einschrittverfahren wird die Methode von EULER verwendet. In ihrer ursprünglichen Form

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (12.13)$$

benötigt sie eine sehr kleine Schrittweiten h , um gute Näherungswerte zu liefern (Schwarz 1993). Aus diesem Grund wird eine modifizierte Form des EULER-Verfahrens nach HEUN verwendet, die die Funktion $f(x, y)$ an zwei Stellen auswertet. Geometrisch kann dieses Verfahren über die Steigungen interpretiert werden (Abb. 12.50). Die Fehlerordnung wird so von 1 auf 2 erhöht.

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}f(x_i, y_i)\right) \quad (12.14)$$

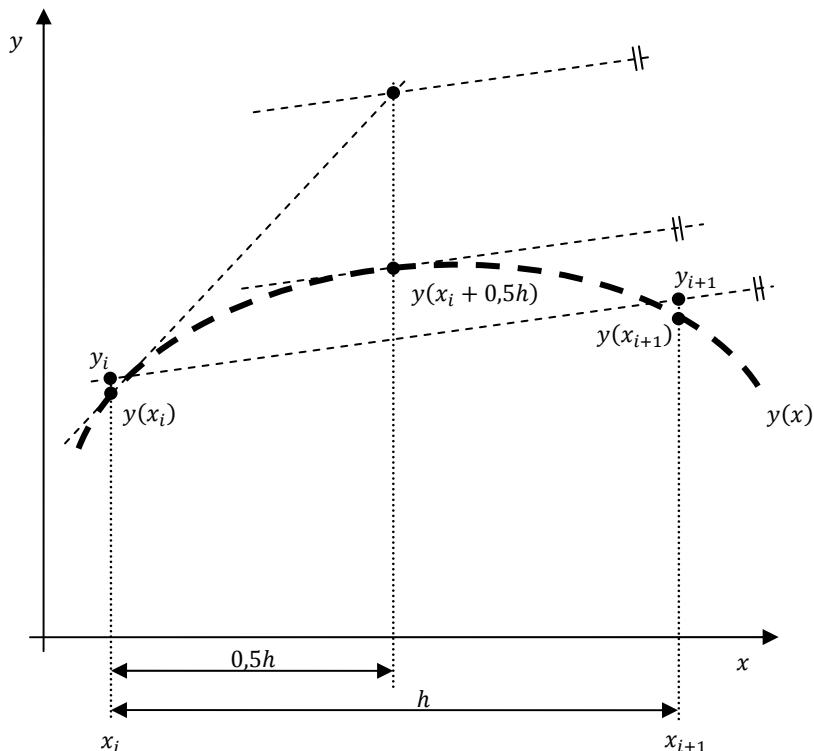


Abb. 12.50: Modifiziertes Verfahren nach EULER

Der Vorteil dieser Methode ist ihre kürzere Rechenzeit. Bei anspruchsvollen Fahrmanövern zum Beispiel mit blockierenden Reifen oder bei Überrollsimulationen ist die erreichbare Genauigkeit jedoch oftmals nicht mehr ausreichend, so dass komplexere Verfahren verwendet werden müssen.

Ein großer Vorteil des Verfahrens liegt in seiner Echtzeitfähigkeit, wie sie für *Hardware-in-the-Loop*-Simulationen vorausgesetzt wird. Für die Berechnung eines weiteren Zustandwertes werden nur Größen benötigt, die zum aktuellen Zeitschritt verfügbar sind.

Mehrschrittverfahren

Da bei der Modellierung eines Fahrzeuges als mechatronisches System Komponenten mit sehr unterschiedlichen Eigenfrequenzen eingebunden sein können, ist die Möglichkeit ein steifes System von Differentialgleichungen zu erhalten, sehr groß. Integrationsverfahren mit automatischer Schrittweitensteuerung versuchen den lokalen Fehler so gering wie möglich zu halten. Überschreitet der Fehler einen vorgegebenen Maximalfehler, so wird die Schrittweite verkleinert. Unterschreitet der Fehler den Maximalfehler wesentlich, so wird die Schrittweite entsprechend vergrößert. Bei nichtsteifen Systemen kann in der Regel die Schrittweite abhängig vom betragmäßig größten Eigenwert (bzw. der kleinsten Zeitkonstante) gewählt werden, ohne dass das Stabilitätsgebiet des Integrationsverfahrens verlassen wird. Bei steifen Systemen ist dies problematisch, da eine Schrittweitenanpassung abhängig vom betragmäßig größten Eigenwert zu numerischen Problemen mit Rundungsfehlern bei den Komponenten mit wesentlich geringeren Eigenwerten führen kann und zusätzlich zu erheblich längeren Rechenzeiten führt. Daher ist es erforderlich, FASIM_C++ mit numerischen Integrationsverfahren zu versehen, welche sowohl steife als auch nichtsteife Differentialgleichungen integrieren können.

Zur numerischen Integration der Differentialgleichungen werden lineare Mehrschrittverfahren der Form

$$\sum_{i=0}^{K_1} \alpha_{n,i} y_{n-i} + h_n \sum_{i=0}^{K_2} \beta_{n,i} \dot{y}_{n-i} \quad (12.15)$$

genutzt, die in (Gupta et al. 1985) ausführlich beschrieben werden. Hierbei sind $\alpha_{n,i}$ und $\beta_{n,i}$ Koeffizienten, welche aus den aktuellen und vorangegangenen Schrittweiten h_n berechnet werden. Die Schrittweiten h_n werden dabei vom Integrator intern gesteuert. Der Index n bezeichnet in dieser Formel den zuletzt durch numerische Integration ermittelten Wert.

Abhängig von der Größe der von der verwendeten Integrationsordnung q abhängigen Koeffizienten K_1 und K_2 lassen sich nun zwei spezielle In-

tegrationsverfahren herleiten. Die Adams-Verfahren lassen sich aus Gleichung (12.15) herleiten, in dem man $K_1 = 1$ und $K_2 = q - 1$ setzt. Im Rahmen der betrachteten Integrationsprogramme wird mit einer Ordnung q zwischen eins und zwölf integriert (Shampine und Gordon 1984) und (Hindmarsh 1983). Adams-Formeln werden zur Lösung nichtsteifer Differentialgleichungen verwendet. Durch Umformung ergibt sich folgende Beziehung

$$y_n = y_{n-1} + h \sum_{i=0}^{q-1} \beta_i \dot{y}_{n-i}. \quad (12.16)$$

Auch die BDF-Formeln (BDF = Backward Differentiation Formula), welche zur Lösung steifer Differentialgleichungen verwendet werden, sind Mehrschrittverfahren, welche unmittelbar aus Gleichung (12.15) folgen.

Für $K_1 = q$ und $K_2 = 0$ ergibt sich nach einer kurzen Umformung

$$y_n = \sum_{i=1}^q \alpha_i y_{n-i} + h \beta_0 \dot{y}_n. \quad (12.17)$$

Diese Verfahren benötigen jedoch eine wesentlich höhere Rechenzeit. Da die Steifigkeit eines Systems eine lokale Eigenschaft ist, die durch die JACOBImatrix, der Systemmatrix der lokalen Linearisierung bestimmt wird, ändert sie sich bei den betrachteten nichtlinearen Systemen während der Simulation (Breitenecker 1996). Liegen alle Eigenwerte der Jakobimatrix wieder in derselben Größenordnung, so braucht das System nicht mehr mit den Methoden für steife Systeme behandelt zu werden und ein Umschalten auf Methoden für nichtsteife Systeme würde die Rechenzeit erheblich verkürzen.

Aus diesem Grund wird in FASIM_C++ das LSODAR- Integrationsverfahren zur Lösung steifer und nichtsteifer Differentialgleichungen verwendet. Es ist durch Auswertung eines in (Petzold 1980) beschriebenen Algorithmus in der Lage, steife bzw. nichtsteife Systeme zu erkennen und unterschiedlich zu behandeln. Zusätzlich ist ein Nullstellensucher (root-finding option) integriert, worauf im folgenden Abschnitt 12.2.5 eingegangen wird.

12.2.5 Behandlung von Ereignissen

Die numerische Integration der Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen erfordert eine geeignete Ereignisbehandlung, wobei zwischen

Zeit-, Schritt- und Zustandsereignissen unterschieden wird (Hörsken 1996 und Otter 1995). Abb. 12.51 verdeutlicht die in FASIM_C++ realisierte Schrittweiten- und Ereignissesteuerung.

Zustandsänderungen treten im Fahrzeugmodell zum Beispiel beim Blockieren der Räder auf, während die Schritttereignissteuerung von zeitdiskreten Systemen wie etwa Sensoren, Reglern oder Ausgabemodulen abhängt.

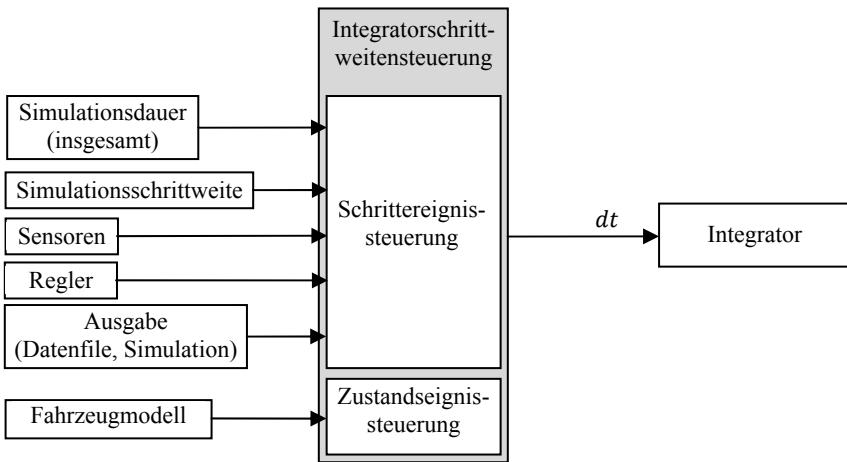


Abb. 12.51: Steuerung des Integrators

Strukturvariante Systeme

Bei manchen Systemen ist es notwendig, während der Simulation die Anzahl der Freiheitsgrade oder das Übertragungsverhalten einzelner Module zu verändern. Dies macht jeweils ein Anhalten der Simulation und einen anschließenden Neustart des Integrators notwendig. Die Anzahl der Freiheitsgrade ändert sich zum Beispiel bei einem Bremsmanöver mit blockierenden Rädern. Sobald ein Rad blockiert, fällt der Drehfreiheitsgrad weg und das System muss neu konfiguriert werden. Sobald sich das Rad wieder dreht, wird der Freiheitsgrad wieder hinzugenommen und das System muss wiederum neu konfiguriert werden.

Aus diesem Grund wird eine Ereignisfunktion $g(\mathbf{q}, t)$ definiert, welche von den Zustandsgrößen und der Zeit abhängt. Die Elemente eines Ereignisvektors repräsentieren dabei einzelne *Ereignisse* (Blockieren eines Rades, Schalten des Automatikgetriebes, ...). Diese Funktion wird dem Integrator übergeben, so dass *innerhalb* eines Integrationsschrittes die Vorzeichenwechsel von Elementen des Vektors detektiert werden können.

Je nach Ereignis wird die Anzahl der Freiheitsgrade angepasst und/oder eine Reinitialisierung des Systems mit einem anschließenden Neustart des Integrators vorgenommen. Ein einfaches Beispiel für ein strukturvariantes System ist eine Auflaufbremse, die für das Modell eines Wohnwagens entworfen wurde. Sie wurde in Abschnitt 12.2.2 vorgestellt. Ein weiteres Beispiel für eine Neukonfiguration ist die Behandlung von Stößen.

Zeitdiskrete Systeme

Die Entwicklungsumgebung FASIM_C++ wurde zur Entwicklung komplexer Regelsysteme entworfen. Da die verwendeten Regler und Sensoren zeitdiskrete Systeme sind, muss die Integration, abhängig von der Abtastzeit der Regler und Sensoren, unterbrochen werden. Dafür muss gewährleistet sein, dass der Integrator rechtzeitig den jeweiligen Integrations schritt unterbricht, damit das entsprechende zeitdiskrete System aufgerufen werden kann. Zur Realisierung dieser Steuerung wird in FASIM_C++ eine Liste zeitdiskreter Systeme erstellt, die dem Integrator den nächsten Aus stiegszeitpunkt mitteilt. Nach Eingriff des zeitdiskreten Systems wird die Kontrolle wieder an den Integrator zurückgegeben. In dieser Liste sind neben Reglern und Sensoren auch die Ausgabemechanismen für die Simula tionsdaten und die Animation enthalten.

13 Modell eines typischen komplexen Gesamtfahrzeugs

Dieses Kapitel zeigt die Modellierung eines typischen Fahrzeugs der Mittelklasse in FASIM_C++. Darüber hinaus werden die bei der Verifikation und Validierung des Modells angewendeten Methoden beschrieben (vgl. auch VDI-Richtlinie 2206 *Entwicklungsmethoden für mechatronische Systeme* (2004)). Daraus geht das verifizierte Modell eines typischen Mittelklasse-Personenkraftwagens hervor. Dieses Fahrzeugmodell wird anhand von realen Versuchsdaten von vier verschiedenen Mittelklassefahrzeugen auf seine Aussagefähigkeit hin untersucht. Mithilfe dieses Fahrdynamik-simulationsmodells können dann zum Beispiel die in Kapitel 14 dargestellten Untersuchungen zur Auslegung von Überschlagschutzsystemen durchgeführt werden.

13.1 Modellierung des Gesamtfahrzeugs

Wie in Abschnitt 12.2.3 bereits beschrieben, basiert FASIM_C++ auf der Formulierung der Bewegungsgleichungen komplexer modularer Mehr-körpersysteme mithilfe der kinematischen Differentiale. Dieses Verfahren ermöglicht eine Zerlegung des Fahrzeugs in größere Einheiten (Module) mit standardisierten Schnittstellen. Die Schnittstellendefinitionen und die modulare Schreibweise der Bewegungsgleichungen können (Pichler 1999) entnommen werden. Das dynamische Verhalten der mechanischen Module, wie das Fahrgestell, die Vorderachse, die Hinter-achse und der Antriebsstrang, ergibt i.a. System von Differential-gleichungen zweiter Ordnung, das Verhalten der nichtmechanischen Komponenten wie Bremshydraulik, Umgebung, Fahrer und Motor wird über Differentialgleichungen erster Ordnung beschrieben.

Bevor alle Module, wie in Abschnitt 12.2.2 dargestellt, zu einem Gesamtsystem zusammengefügt werden können, müssen zuerst die Submodule, welche die Kinematik beschreiben, in FASIM_C++ *eingebaut* werden. Die Kinematik kann hierzu entweder, wie zum Beispiel in Abschnitt

6.5.2 dargestellt, explizit berechnet oder mithilfe des Programmpaketes MOBILE (Kecskeméthy 1996) beschrieben werden.

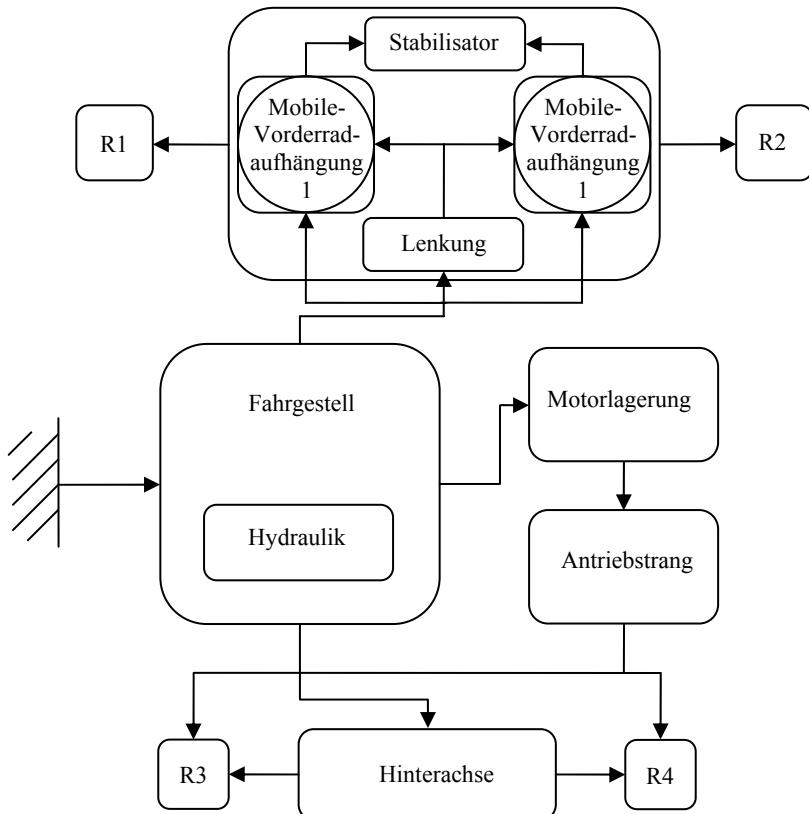


Abb. 13.1: Module des Gesamtfahrzeugs in FASIM_C++

Für das hier vorgestellte Gesamtfahrzeugmodell wurde die Kinematik der Radaufhängungen mit MOBILE berechnet. Für die Modellierung von Mehrkörpersystemen sind in MOBILE bereits elementare Grundbausteine wie Referenz-Koordinatensysteme, Gelenke (Schub- und Drehgelenke), starre Verbindungen und Objekte zur Definition und Lösung von kinematischen Ketten in der Programmiersprache C++ implementiert.

Um die kinematischen Submodule einzubinden, existieren in FASIM_C++ Schnittstellen, sogenannte Schalen, welche die zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen notwendige Berechnung der globalen Kinematik erledigen. Zur Verdeutlichung der Einschalung der MOBILE-Radaufhängungen in die Achsmodule ist in Abb. 13.1 beispielhaft die submodulare Struktur der Vorderachse dargestellt. Hierbei werden zur Be-

rechnung der Achskinematik die eingeschalten MOBILE-Module zuerst von der Lenkung und vom Fahrgestell aus aktiviert. Dann wird in den MOBILE-Modulen die Radaufhängungskinematik berechnet. Zuletzt erfolgt die Berechnung des Stabilisators zwischen den beiden Radaufhängungen. Die Berechnung der Kinematik des Gesamtfahrzeugs geschieht gemäß dem in Abb. 13.1 dargestellten Fluss ausgehend vom Inertialsystem.

Wenn alle nicht-mechanischen und mechanischen Module (vergleiche Abschnitt 12.2.2) des Fahrzeugmodells vorhanden sind, können diese zu einem Gesamtmodell zusammengebaut werden. Der *Zusammenbau* der einzelnen Module wird in einem Textfile, dem sogenannten Vehicle-Pointerfile, vorgenommen. Weiterhin werden in diesem Steuerfile die Namen der für die Initialisierung der Module benötigten Datenfiles angegeben. Beim Start einer Simulation erfolgt im ersten Schritt (Initialisierung) das Einlesen der Modellparameter aus diesen Datenfiles, die Verwaltung der Daten sowie eine eventuell erforderliche Vorabberechnung konstanter Parameter.

Der zweite Schritt (Kinematik) umfasst die Berechnung der lokalen Kinematik der einzelnen Module. Im letzten Schritt (Dynamik) werden die eingeprägten Kräfte und Momente ermittelt sowie die zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen erforderlichen Größen bereitgestellt.

Die Zusammenstellung der Module im Vehicle-Pointerfile ermöglicht die schnelle Modellierung verschiedener Mittelklassefahrzeuge mit unterschiedlichen Radaufhängungssystemen. Voraussetzung hierfür ist allerdings, dass die entsprechenden kinematischen Module und die jeweils zugehörige fahrzeugspezifischen Datensätze verfügbar sind. So sind in der Modellbibliothek von FASIM_C++ zum Beispiel die in Tabelle 13.1 aufgeführten Radaufhängungskinematiken implementiert. Im Zusammenhang mit den entsprechenden Datensätzen lassen sich damit vier verschiedene Mittelklassefahrzeuge (A-D) simulieren.

Tabelle 13.1: Radaufhängungstypen von typischen Mittelklassefahrzeugen (vergleiche Abschnitt 6.2)

Fahrzeug	Vorderradaufhängung	Hinterradaufhängung
A	McPherson (Dämpferbein)	Raumlenker
B	McPherson (Federbein)	Deltalink (Verbundlenker)
C	McPherson (Federbein)	Multilink (Vierlenker)
D	Vierlenker	Doppelquerlenker

Zur Modellierung der Mittelklassefahrzeuge A-D wird für die Module Fahrer, Motor, Fahrgestell, Antriebsstrang, Hydraulik und Rad auf bereits vorhandene Module zurückgegriffen. Hier wurden lediglich Anpassungen der vorhandenen Datensätze vorgenommen. Dies war allerdings bei den

Modulen Motor, Hydraulik und Antriebsstrang nur teilweise möglich, da hierfür nicht alle Daten verfügbar sind. Hier kommen Datensätze anderer vergleichbarer validierter Fahrzeuge zum Einsatz. Der Einfluss dieser Komponenten ist bei den in Abschnitt 14.2 betrachteten Überschlagmanövern von untergeordneter Bedeutung, da nur das rollende Fahrzeug im ausgekuppelten Zustand betrachtet wird. Bei den Submodulen Lenkung und Stabilisator für die Vorder- und Hinterachse konnte ebenfalls auf bereits vorhandene Module zurückgegriffen werden. Dabei ist je nach Fahrzeugtyp der Stabilisator als einfacher Torsionsstab mit oder ohne Pendelstütze ausgeführt und die Lenkung wird entweder als Zahnstangen- oder Lenkstockhebelversion modelliert.

Da dem Reifen, der in FASIM_C++ als Submodul dem Antriebsstrang zugeordnet ist, bei allen Manövern als Kontaktlement zwischen Fahrbahn und Fahrzeug eine große Bedeutung zukommt, wurde bei allen Fahrzeugen darauf geachtet, den Reifendatensatz möglichst mit detaillierten fahrzeugspezifischen Werten zu besetzen. So werden zum Beispiel bei allen Modellen die korrekten Abmessungen der tatsächlich am Fahrzeug montierten Reifengröße berücksichtigt. Diese Daten sind zur Berechnung der genauen Kinematik des Rad-Straße-Kontakts erforderlich. Das FASIM_C++ zugrunde liegende kinematische Reifenmodell basiert auf dem in den Abschnitten 7.4.1 bis 7.4.3 vorgestellten mechanischen Ersatzmodell zur Berechnung des Latsches. Danach kann der Bewegungszustand des Latsches in Abhängigkeit des Sturzwinkels sowie der Winkel- und Translationsgeschwindigkeit des Radträgers bzw. des Radmittelpunktes bestimmt werden. Dies ermöglicht dann die Berechnung von Reifenschräglauf und Schlupf. Die Berechnung der dynamischen Reifenkräfte geschieht mithilfe des HSRI-Reifenmodells (s. Abschnitt 7.4.6). Dieses Modell ermöglicht die Bestimmung von Reifenlängs- und Querkraft aus Reifenschräglauf und Schlupf. Zur Berechnung der Reifenkräfte mit diesem physikalischen Modell werden neben zwei reifenspezifischen Koeffizienten zur Berechnung der Gleitreibungskräfte die vertikale Federsteifigkeit und die auf die Normalkraft bezogene Längs- und Quersteifigkeit des Reifens benötigt. Diese Parameter sind für manche Reifenmodelle nicht oder nur teilweise verfügbar, sodass Parameter anderer vergleichbarer Reifentypen aus validierten Fahrzeugmodellen zum Einsatz kommen. Diese Vorgehensweise führt, wie die im nachfolgenden Abschnitt beschriebene Validierung der vier Fahrzeuge verdeutlicht, bei den für die Überschlagsimulation relevanten Fahrmanövern zu ausreichend genauen Fahrzeugmodellen.

13.2 Modellverifikation und -validierung

Um zu einer Bewertung der in Abschnitt 13.1 beschriebenen Modelle in Bezug auf ihre Simulationsergebnisse zu gelangen, bieten sich verschiedene Verfahren an (siehe hierzu auch (Pelz 2001) und (Kramer und Neculau 1998)). In der Praxis hat sich aber vor allem die möglichst frühe Durchführung von Simulationsläufen, insbesondere schon in der Phase der Modellbildung, als wichtiges Korrektiv herausgestellt, um frühzeitig Modellfehler zu erkennen und schrittweise die Modellqualität zu verbessern. Diese Vorgehensweise führte bei den Gesamtmodellen der Mittelklassefahrzeuge A, B, C und D bereits vor der Durchführung von Validierung und Verifikation zu qualitativ aussagefähigen Modellen. Zusätzlich wurden die Fahrzeugmodelle für Überschlagmanöver auf Rampen beziehungsweise Böschungen validiert. Die allgemeine Vorgehensweise bei der Bewertung der Modellqualität lässt sich grundsätzlich in die beiden Teile Verifikation und Validierung gliedern. Dabei beschäftigt sich die Modellverifikation mit der Frage, ob das Modell konzeptionell insgesamt und in seinen Komponenten den Anforderungen entspricht. Die Aufgabe der Modellvalidierung besteht dagegen darin, mithilfe von aus realen Versuchen gewonnenen Messdaten zu zeigen, dass das ausführbare Simulationsmodell für eine spezielle Anwendung geeignet ist (s. hierzu auch die VDI-Richtlinie 2206 *Entwicklungsmethoden für mechatronische Systeme* (2004)). Die für die Fahrzeuge A-D durchgeführten Schritte zur Validierung und Verifikation der Simulationsmodelle gliedern sich in folgende Aufgaben:

Verifikation

- Plausibilitätstests
 - Überprüfung der Spur- und Sturzkurven von Vorder- und Hinterachse in den jeweiligen Radaufhängungssubmodulen.
 - Überprüfung stationärer Fahrzustände des Fahrzeuggesamtmodells anhand folgender Manöver:
 - I. Schlupffreies Geradeausrollen bei 30 km/h,
 - II. Kreisfahrt bei konstant 50 km/h.
- Visuelle Inspektion und grafische Animation der Radaufhängungen und des Gesamtfahrzeugs.

Validierung

- Exaktes Nachstellen der realen Versuchsszenarien in der Simulationsumgebung.

- Erster visueller Vergleich von realen Versuchsvideos und animierten Simulationsergebnissen des Versuchsszenarios.
- Beseitigung von Modellfehlern und Feinabstimmung der nicht exakt verfügbaren Modellparameter.
- Grafische Gegenüberstellung der relevanten gemessenen und simulierten Daten der Wankwinkelgeschwindigkeit ω_x und der lateralen und vertikalen Beschleunigung a_y und a_z .

Da eine komplette Diskussion dieser Verifikations- und Validierungsaufgaben für alle vier hier untersuchten Fahrzeuge den Rahmen dieses Buches überschreiten würde, sollen nachfolgend zur Darstellung der Methodik, stellvertretend nur einige Beispiele zu den jeweiligen Punkten vorgestellt werden.

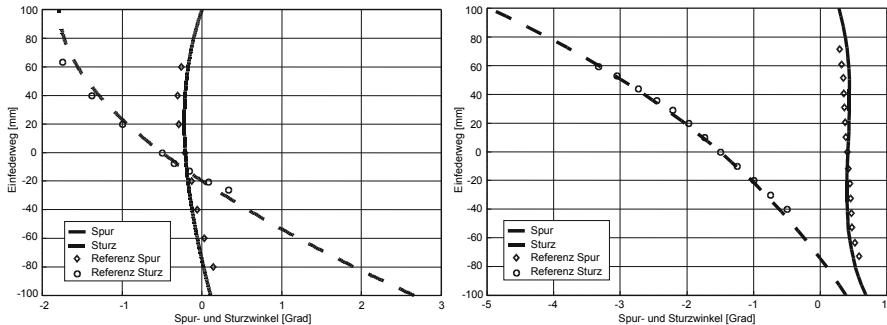


Abb. 13.2: Verifikation der Spur- und Sturzkurven am Beispiel des Fahrzeugs A

Als erster *Plausibilitätstest* zur *Verifikation* wurden für alle vier modellierten Fahrzeuge die Spur- und Sturzkurven der Vorder- und Hinterradaufhängungen berechnet. In Abb. 13.2 ist der Vergleich der gemessenen und der simulierten Spur- und Sturzkurvenverläufe am Beispiel von Fahrzeug A dargestellt. Die Abweichungen zwischen Simulation und Messung begründen sich aus der im Modell vernachlässigten Elastokinematik der Lagerungen. Jedoch bestätigen die Kurvenverläufe der Simulation trotz dieser Modellvereinfachungen eine gute Genauigkeit, sodass man das Verhalten der Radaufhängungen als verifiziert bezeichnen kann.

Der zweite Teil der *Plausibilitätstests* dient vor allem zur Überprüfung des Gesamtfahrzeugmodells in Hinblick auf die prinzipielle Funktion von Reifen, Radaufhängungen, Stabilisatoren, Lenkung und Antriebsstrang.

Das schlupffreie Geradeausrollen mit 30 km/h bestätigt die korrekte Simulation eines stationären Fahrzustandes, frei von Antriebs-, Lenkungs- und Fahrbahnanregungen. Im ausgekuppelten Zustand muss das Fahrzeug in einem quasi-stationären Zustand stabil rollen. Bei Vorliegen von Modellfehlern können sich hier zum Beispiel schwingende Zustände, unplau-

sible Fahrwege oder Simulationsabbrüche aufgrund von Instabilitäten ergeben.

Die Kreisfahrt bei konstanter Geschwindigkeit verifiziert dagegen das Gesamtmodell bei Antriebs- und Lenkungseinflüssen. Bei diesem Manöver muss sich, wie in Abb. 13.3 am Beispiel von Fahrzeug D dargestellt, nach einer gewissen Einrollphase, eine stationäre Kreisbahn einstellen. Zur Prüfung der korrekten Arbeitsweise der Stabilisatoren muss sich bei stationärer Kreisfahrt mit deaktivierten Stabilisatoren ein größerer Fahrzeuwankwinkel einstellen.

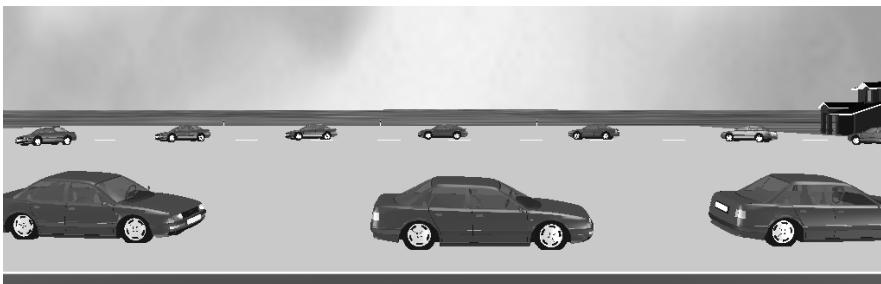


Abb. 13.3: Verifikation des Modellverhaltens bei einer Kreisfahrt mit konstant 50 km/h

Grundsätzlich ist die *visuelle Inspektion* der Teilmodelle bzw. des Gesamtmodells wie in Abb. 6.40 und Abb. 13.3 dargestellt von großem Nutzen. Durch den frühzeitigen Einsatz von Animationen lassen sich bereits beim Modellaufbau Fehler vermeiden. Außerdem untermauern sie eindrucksvoll und schnell die Plausibilitätsprüfungen und geben Hinweise auf mögliche Fehlerquellen, welche sich bei der bloßen Analyse von Datenmaterial nicht ohne Weiteres erschließen.

Arbeitsschritt 1 im Rahmen der *Validierung* ist das exakte Nachstellen des jeweiligen Versuchszenarios. Hierzu stehen reale Versuchsdaten von Fahrmanövern auf Rampen und Böschungen zur Verfügung. Die verfügbaren Fahrmanöver sind in Tabelle 13.2 zusammengestellt. Um die Versuche möglichst exakt in der Simulationsumgebung nachzustellen zu können, ist eine ausführliche Dokumentation bereits bei der Versuchsdurchführung unabdinglich. Dies gilt insbesondere für die innerhalb einer Versuchsreihe variierenden Parameter. Bei allen Versucharten gleichermaßen sind dies das jeweilige Fahrzeuggewicht und eventuelle größere Zuladungen, zum Beispiel in Form von Messtechnik und Dummies sowie die Fahrbahnbeschaffenheit und die bei der Versuchsdurchführung vorherrschenden Witterungsbedingungen. Da die Versuche teilweise unter freiem Himmel durchgeführt wurden, ist diese Information zur Abschätzung der Reibungskoeffizienten zwischen Rad und Straße notwendig. Sind die Umge-

bungsbedingungen bekannt, so lassen sich die Gleitreibungsbeiwerte mithilfe von Literaturangaben abschätzen ((Mitschke und Wallentowitz 2004) und (Robert Bosch GmbH 2007)).

Tabelle 13.2: Zur Validierung der Fahrzeugmodelle verfügbare Fahrmanöver

Fahrzeug	Fahrmanöver
A	Böschungsüberfahrt auf trockenem verfestigtem Lehm mit Überschlag (siehe Abb. 13.8 unten)
B	Rampenüberfahrten ähnlich SAE J857 bei unterschiedlichen Geschwindigkeiten und Rampenhöhen (siehe Abb. 13.4)
C	Rampenüberfahrten ähnlich ADAC Schraubtest bei unterschiedlichen Geschwindigkeiten und Rampenhöhen (siehe Abb. 13.5)
D	Rampenüberfahrten ähnlich ADAC Schraubtest bei unterschiedlichen Geschwindigkeiten und Rampenhöhen (siehe Abb. 13.5) und Böschungsüberfahrten auf künstlicher verstellbarer Böschung (siehe Abb. 13.7)

Des Weiteren müssen die von der Versuchsart abhängigen Konfigurationen bekannt sein. Abb. 13.4 stellt den Versuchsaufbau der Validierungsversuche mit Fahrzeug B dar. Entgegen der in der SAE Richtlinie SAE J857 empfohlenen gekrümmten Führungsschiene wurde bei diesen Versuchen eine gerade Leitvorrichtung in Kombination mit einem Lenkeingriff verwendet. Das Fahrzeug wird von der Leitvorrichtung beschleunigt und rollt nach dem Ausklinken aus der Leitvorrichtung frei weiter. An einem definierten Punkt werden die Vorderräder innerhalb von 0,2 Sekunden um einen Winkel von 35° nach links eingeschlagen (siehe Abb. 13.4), sodass das Fahrzeug mit den kurveninneren Rädern über die Rampe rollt. Die Rampe ist 5 m lang und einen Meter breit. Ihre Höhe wurde bei den Versuchen zwischen 40 cm und 50 cm variiert, sodass es je nach Fahrzeuggeschwindigkeit (50 – 80 km/h) zu einem Überschlag oder zu einem Beinahe-Überschlag kommt. Bei den Versuchen, die zu einem Überschlag führten, wurde die Überschlagtendenz durch einen *Eingrabeffekt* der Räder im Bereich des Mutterbodens stark beeinflusst.

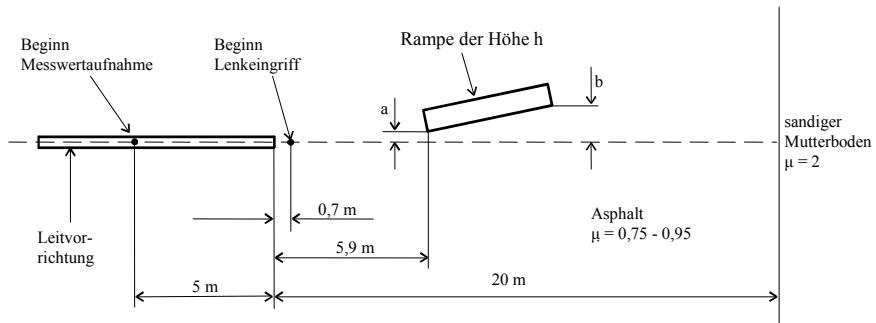


Abb. 13.4: Draufsicht des Versuchsaufbaus für die Rampenüberfahrt ähnlich SAE J857 (Abmessungen a und b sind Fahrzeugabhängig)

Da für diesen Effekt in FASIM_C++ kein spezielles Rad-Boden-Modell verfügbar ist, kann dieser nur durch einen Reibsprung angenähert werden (vergleiche Abb. 14.9). Hierdurch kommt es in der Simulation zu einem zu starken Anstieg der Wankdrehrate beim Eintritt in den Mutterbodenbereich. Da die Fahrzeuge zu diesem Zeitpunkt in der Realität bereits größere Wankwinkel als 50° erreichen, wurde die Validierung für diese Manöver nur bis zu diesem Bereich betrachtet. Bei Fahrmanövern ohne Überschlag ist das Modell dagegen im gesamten Bereich validiert (siehe Abb. 13.10).



Abb. 13.5: 5 m lange und höhenverstellbare Rampen für Validierungsversuche ähnlich ADAC Schraubtest

Die zur Validierung von Fahrzeug C und D durchgeführten Rampenversuche sind vom Aufbau her vergleichsweise einfach. Diese Versuche wurden mit einer Stahlrampe entsprechend Abb. 13.5 durchgeführt. Hierbei rollt das Fahrzeug ohne Lenkeingriff bei ausgekuppeltem Antriebsstrang auf trockenem Asphalt mit den linken Rädern über die Rampe. Dabei wurde die Rampenhöhe zwischen 50 cm und 100 cm in Schritten von 10 cm variiert. Die untersuchten Geschwindigkeitsbereiche erstrecken sich von 18 bis 72 km/h.

Zur Validierung von Fahrzeug A und D wurden Böschungsüberfahrten durchgeführt (Bardini et al. 1997). Abb. 13.6 zeigt das in FASIM_C++ nachgebildete Böschungsmanöver auf trockenem, verfestigtem Lehm. Bei

diesem Versuch rollt das Fahrzeug frei mit einer Geschwindigkeit von 57 km/h unter einem Anfahrwinkel von 11° geradewegs auf die Böschungskante zu. Beim Böschungsmanöver auf der in Abb. 13.7 abgebildeten künstlichen, verstellbaren Böschung gibt es nur eine im Winkel β gegen die horizontale geneigte Böschungsebene. Hier rollt das Fahrzeug frei mit einem Anfahrwinkel α von 15° oder 20° auf die 1,80 m hohe Böschungskante zu. Der getestete Geschwindigkeitsbereich bewegt sich zwischen 18 und 45 km/h. Der Gleitreibungsbeiwert auf der Böschung, welche mit einer speziell beschichteten asphaltähnlichen Oberfläche verkleidet ist, wird zu $\mu = 1,0$ angenommen. Um auf der relativ niedrigen Böschung zuverlässigere Überschläge zu erreichen, wird zusätzlich ein Lenkwinkeleinschlag zur oberen Böschungskante hin eingeführt. Dieser wird automatisch aktiviert, sobald die Fahrzeugmitte die obere Kante der Rampe erreicht.

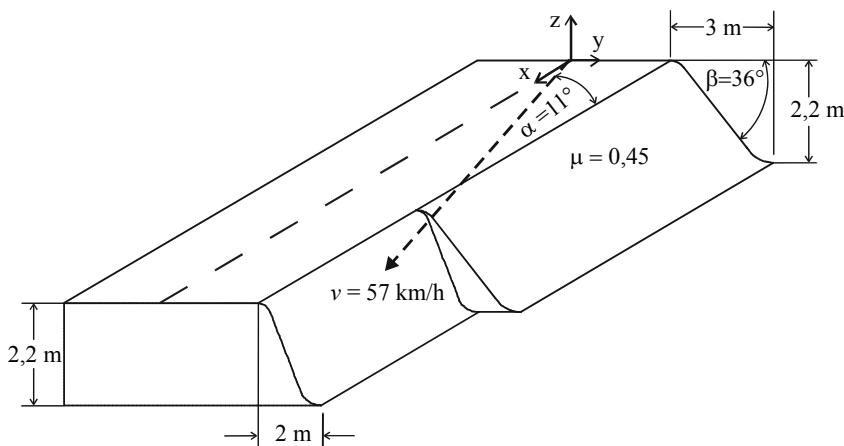


Abb. 13.6: Versuchsaufbau und -parameter des Böschungsmanövers zur Validierung von Fahrzeug A



Abb. 13.7: Versuchsaufbau der künstlichen, verstellbaren Böschung

Der *Arbeitsschritt 2* der Validierung wird anhand des Böschungsmanövers mit Fahrzeug A verdeutlicht. Mithilfe der auszugsweise in Abb. 13.8

dargestellten Videovalidierung ist es möglich, die Fahrzeugkinematik des Modells auf das reale Verhalten abzustimmen. Dabei wurden folgende Unstimmigkeiten im Modellverhalten erkennbar:

- zu starke Ein- und Ausfederbewegungen der Radaufhängungen (Ursache: nicht definierte Zug- und Druckanschläge der Federung),
- zu starke Deformation der Räder (Ursache: nur lineare vertikale Federsteifigkeit),
- ungewollte Bewegungen der Lenkung (Ursache: zu geringe Steifigkeit des Lenksystems) und
- zu starke Wankbewegung des Fahrzeugaufbaus (Ursache: zu geringe Stabilisatorsteifigkeit).



Abb. 13.8: Vergleich zwischen Simulation und realem Versuch (Bardini et al. 1996)

Diese in der Videoanalyse entdeckten Auffälligkeiten münden direkt in *Arbeitsschritt 3* der Validierung. Die Beseitigung von Modellfehlern und die Durchführung der Feinabstimmung setzen für alle hier modellierten Fahrzeuge bei diesen vier Punkten an. Die Punkte eins und zwei beruhen auf einer nicht ausreichenden Definition der Arbeitsbereiche der Fahrzeugdaten. So sind zur Simulation von normalen Fahrdynamikmanövern in der Ebene oft lineare Federkennlinien für Radaufhängungen und Räder ausreichend. Bei der Simulation extremer Fahrmanöver im Grenzbereich, wie sie bei Fahrzeugüberschlägen auftreten, sind dagegen auch die oberen und unteren Grenzen der Arbeitsbereiche relevant. In Abb. 13.9 sind beispielhaft die nichtlinearen progressiven bzw. degressiven Federkennlinien der Räder und der Radaufhängungen eines der modellierten Fahrzeuge dargestellt. Bei den Rädern wurde der Bereich der Reifensteifigkeit um den Bereich der Felgensteifigkeit erweitert. Entsprechend der am jeweiligen Fahrzeug eingesetzten Felgengröße wird für die vertikale Radsteifigkeit

keit auf den Materialkennwert von Stahl bzw. Aluminium umgeschaltet. Ähnlich wurden die Ein- und Ausfederwege der Radaufhängungen begrenzt. Hierfür wurden die linearen Kennlinien des normalen Arbeitsbereichs mit den gemessenen Kennlinien der sogenannten Bump- und Reboundstops ergänzt.

Die Punkte 3 und 4 sind darauf zurückzuführen, dass aufgrund der Art und Weise der Modellierung des Lenkmechanismus und der Stabilisatoren die benötigten Modellparameter nicht direkt aus Messungen am realen Fahrzeug verfügbar sind. Das in FASIM_C++ eingesetzte Stabilisatormodell (vgl. Abb. 9.9) konzentriert die Eigenschaften des gesamten Stabilisators inklusive der weichen fahrzeugseitigen Lagerung in Gummihülsen in einem U-förmigen Mechanismus mit einer Drehfederkonstante, sodass das Stabilisatormodell vereinfacht nur als Kraftelement auf die Radaufhängungen wirkt. Daher muss der aus Messungen verfügbare reale Wert der Stabilisatorsteifigkeit entsprechend dem realen Fahrzeugverhalten angepasst werden. Ähnliches gilt für den idealisierten Lenkmechanismus bei dem die Feder- und Dämpferkonstante als konzentrierte Koeffizienten das Verhalten der gesamten *Lenkung* abbilden.

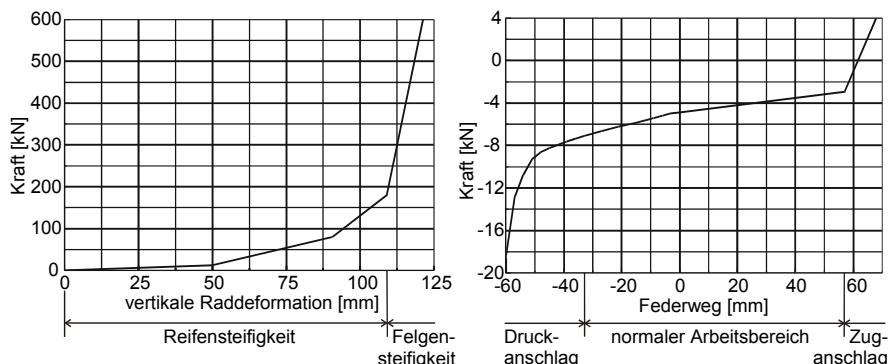


Abb. 13.9: Federkennlinien der Räder und Radaufhängung

Im Rahmen der Feinabstimmung des Gesamtmodells werden die zuvor genannten, nicht exakt verfügbaren Modellparameter so angepasst, dass sich ein möglichst realitätsnahe Fahrzeugverhalten darstellen lässt. Zur Überprüfung des Erfolges dieser Anpassungen werden in *Arbeitsschritt 4* der Validierung, wie in Abb. 13.10 zum Beispiel für Fahrzeug B dargestellt, die relevanten gemessenen und simulierten Daten einander grafisch gegenüber gestellt. Die Daten von Wankwinkel, Wankwinkelgeschwindigkeit, lateraler und vertikaler Beschleunigung stammen von einer Rampenüberfahrt mit einer Geschwindigkeit von 68 km/h und 40 cm Rampenhöhe, die ohne Überschlag abläuft. In Abb. 13.11 sind dagegen die

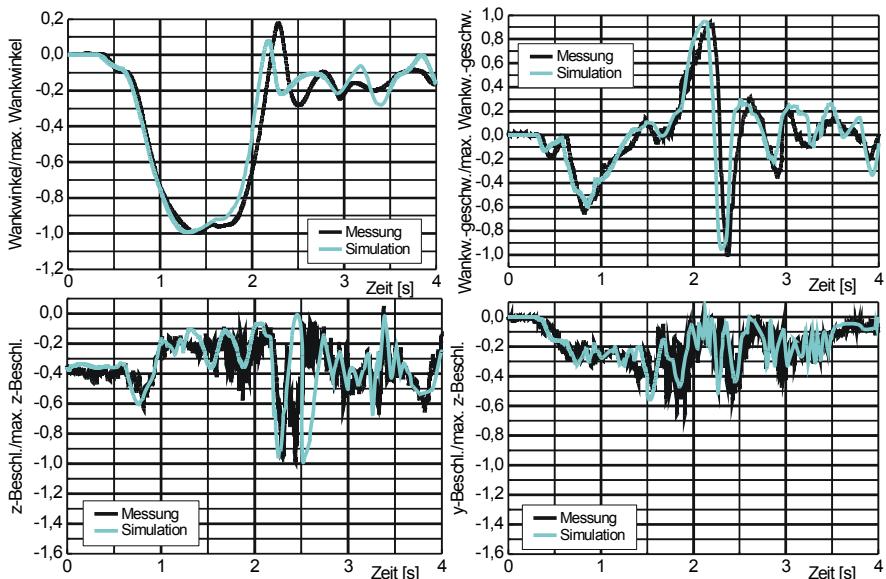


Abb. 13.10: Validierung einer Rampenüberfahrt ähnlich SAE J857 ohne Überschlag

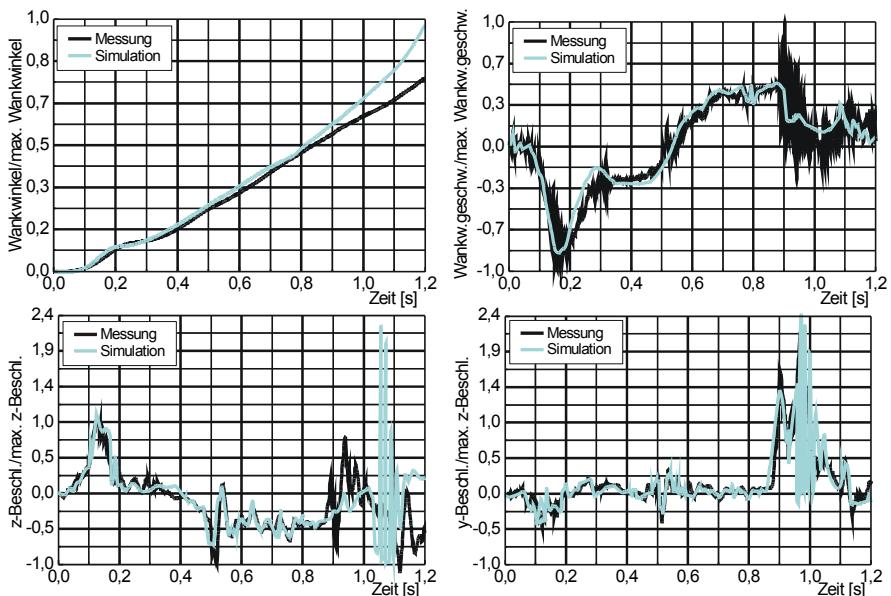


Abb. 13.11: Validierung einer Rampenüberfahrt ähnlich ADAC Schraubtest mit Überschlag

entsprechenden Kurven eines Überschlags auf einer einen Meter hohen Rampe bei 45 km/h mit Fahrzeug D dargestellt.

Abb. 13.10 und Abb. 13.11 sollen hier stellvertretend für alle in Tabelle 13.2 aufgeführten Fahrmanöver einen Eindruck der Güte der erstellten Modelle zur Simulation von Fahrzeugüberschlägen vermitteln. Insgesamt kann man allen Modellen eine hohe Güte bei der Simulation von Beinahe-Überschlägen bestätigen. Diese Aussage ist für Manöver mit Überschlag allerdings einzuschränken. Für Wankwinkel, die größer als 60° sind, kann das Modellverhalten nicht mehr als validiert betrachtet werden, da bei so großen Wankwinkeln einerseits das Reifenmodell keine sinnvollen Vertikal- und Querkräfte mehr berechnen kann (siehe Abb. 13.12 ab 1,1 s), und andererseits Kontakte der Karosserie mit der Umgebung relevant werden. Diese Kontakte werden in den Modellen nicht berücksichtigt, da für die Überschlagsimulation eine validierte Berechnung bis zu einem Wankwinkel in der Größe des statischen Kippwinkels von Mittelklasse-Pkw ($50^\circ - 55^\circ$) ausreichend ist. Somit kann für die validierten Überschlagszenarien von den Modellen eine zuverlässige Aussage über das Auftreten von Überschlägen erwartet werden. Bis zu diesem Winkelbereich bestätigt die Validierung den für die Auslegung von Überschlagschutzsystemen relevanten Signalen qualitativ und quantitativ eine gute Genauigkeit, sodass der zur Auslösung von Überschlagschutzsystemen relevante Winkelbereich voll abgedeckt wird.

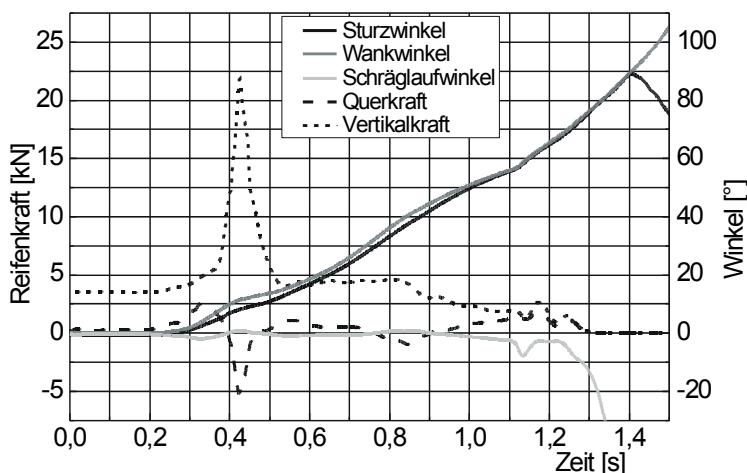


Abb. 13.12: Reifenkräfte am rampenabgewandten Hinterrad beim Überschlag

13.3 Parametrisiertes Fahrzeugmodell

Wie die vorherigen Abschnitte in diesem Kapitel zeigen, muss für die Neumodellierung eines Fahrzeugs ein beachtlicher Aufwand betrieben werden. Darüber hinaus ist eine große Anzahl von fahrzeugspezifischen Daten erforderlich. Um für Überschlagsimulationen mit anderen als den bisher hier validierten Fahrzeugen nicht auf die Verfügbarkeit detaillierter Fahrzeugdaten angewiesen zu sein, wurde untersucht, welche der Fahrzeugparameter tatsächlich relevant für das Überschlagverhalten von Personenkraftwagen der Mittelklasse sind. Die Untersuchungen gliedern sich in drei Schritte:

- Aufstellung eines durchschnittlichen Mittelklasse-Fahrzeugmodells als Referenzmodell für die Parameteruntersuchung.
- Sukzessive Untersuchung aller Modellparameter des Durchschnittsmodells im Hinblick auf ihren Einfluss auf das Wankverhalten des Fahrzeugs.
- Verifikation des Verhaltens der parametrisierten Modelle anhand der validierten Originalmodelle.

Im ersten Schritt wurden basierend auf der Zulassungsstatistik (Kraftfahrt-Bundesamt 2006) für Mittelklasse-Fahrzeuge die in Tabelle 13.3 aufgeführten durchschnittlichen Fahrzeugparameter ermittelt. Die dabei berücksichtigten Fahrzeuge machen innerhalb ihrer Klasse einen Marktanteil von ca. 95 % aus.

Als Modell für die Achskinematik wird für das Durchschnittsmodell die Kinematik von Fahrzeug C (siehe Tabelle 13.1) genutzt. In Abb. 13.14 ist die zugehörige topologische Struktur des Gesamtfahrzeuges dargestellt. Die McPherson-Vorderradaufhängung in der Federbeinausführung und die Mehrlenker-Hinterradaufhängung mit vier Lenkern sind die zum Zeitpunkt der Datenerhebung (Kraftfahrt-Bundesamt 2006) am weitesten in der Mittelklasse verbreiteten Achskinematiken. Die Anpassung der jeweiligen Parameter aus Tabelle 13.3 kann in den meisten Fällen durch einfache Anpassung der entsprechenden Zahlenwerte in den Datenfiles vorgenommen werden. So wird beispielsweise die Verbreiterung oder Verengung der Spur durch die Veränderung der y-Koordinate des Radmittelpunktes erreicht. Die Veränderung der Feder- und Dämpferkennlinien der Radaufhängungen sowie die Kennlinie der Reifen ist dagegen aufwendiger. Zur Bestimmung der durchschnittlichen Kennlinien werden die Daten der validierten Fahrzeuge zugrunde gelegt, da ansonsten keine weiteren detaillierten Kennliniendaten zur Verfügung standen. Zur Bestimmung der Durch-

schnitts-Federkennlinie werden die Kennlinien der validierten Fahrzeuge um ihre Einbaulänge verschoben. Die verschobenen Kennlinien operieren somit am gleichen Arbeitspunkt.

Tabelle 13.3: Parameter des durchschnittlichen Mittelklasse-Fahrzeugmodells

Nr. Parameter	Durch- schnitts- modell	max. Abwei- chung	Nr. Parameter	Durch- schnitts- modell	max. Abwei- chung
Fahrgestell:					
1. Masse Fahrgestell [kg]	1296,5	255,5	11. Masse des Radträgers [kg]	8,21	1,79
2. Schwerpunktlage [m]	-1,1855 0 0,2337	0,2353 0 -0,0337	12. Trägheitstensor des Radträgers [kgm^2]	0,0426 0,103 0,1033	0,0574 0,147 0,1667
3. Trägheitstensor [kgm^2]	482,7 2394,3 2585,6	-122,7 -194,3 -225,6	13. Federkennung	s. Abb. 13.13	n. A.
4. Sitzposition Insassen vorn [m]	-1,3902 $\pm 0,3699$ 0,2735	0,0902 $\pm 0,0114$ -0,0385	14. Dämpferkennung	s. Abb. 13.13	n. A.
Vorderachse (McPherson mit Zahnstangenlenkung):					
5. Masse des Radträgers [kg]	10,33	2,67	15. Halbe Spurbreite [m]	0,7437	0,0353
6. Trägheitstensor des Radträgers [kgm^2]	0,033 0,083 0,09	0,067 0,167 0,18	16. Radstand [m]	2,6897	-0,1377
7. Federkennung	s. Abb. 13.13	n. A.	Stabilisator hinten:		
8. Dämpferkennung	s. Abb. 13.13	n. A.	17. Drehfeder- konstante [$\text{Nm}/^\circ$]	7,3686	-3,4586
9. Halbe Spurbreite [m]	0,7461	0,0436	Motorlager:		
Stabilisator vorne:					
10. Drehfeder- konstante [$\text{Nm}/^\circ$]	6,4315	2,173	18. Ortsvektor zum Lagerpkt. [m]	0,0031 0 0,0857	-0,1431 0 0,0713
Rad:					
19. Reifenradius [m]					
20. Längs-Trägheits- moment [kgm^2]					
21. Quer-Trägheits- moment [kgm^2]					
22. lineare vertikale Rei- fenfedersteifigkeit [N/m]					
23. Radkennlinie					

Anschließend werden die Federkennlinien in ihren linearen und nichtlinearen Anteil zerlegt und die durchschnittlichen Steigungen und Längen des linearen Bereichs berechnet.

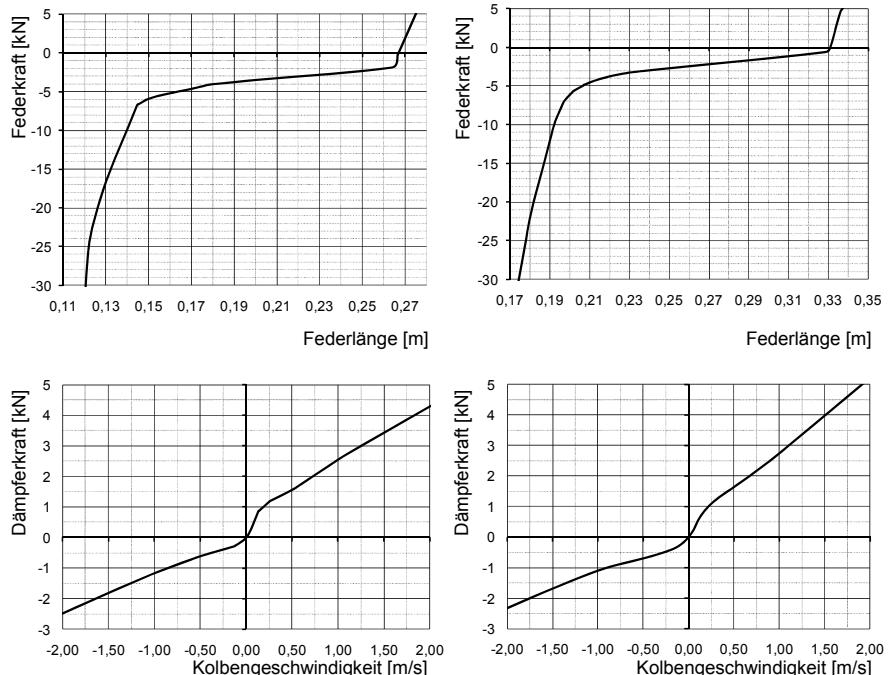


Abb. 13.13: Aufbaufeder- und Dämpferkennlinien der Vorderrad- (links) und Hinterradaufhängung (rechts) des durchschnittlichen Mittelklasse-Fahrzeugmodells

Daraufhin erfolgt die Addition des gemittelten nichtlinearen Anteils, der durch den Bump-Stop und den Rebound-Stop bedingt ist (vergleiche Abb. 13.9 rechts). Abschließend muss die Kennlinie entsprechend der Einbauderlänge von Fahrzeug C und unter Berücksichtigung der Federkraft in der Gleichgewichtslage (Vorspannung in Einbaulage) an den Arbeitspunkt des Durchschnittsfahrzeugs verschoben werden. Deutlich einfacher ist die Vorgehensweise bei der Bestimmung der durchschnittlichen Dämpferkennlinie. Hierzu ist nur die Mittelwertbildung an den jeweiligen Stützpunkten der Kennlinien erforderlich. Die Bestimmung der durchschnittlichen mittleren vertikalen Federsteifigkeit der Räder geschieht auf die gleiche Weise. Auch hier werden an den jeweiligen Stützpunkten die Mittelwerte gebildet.

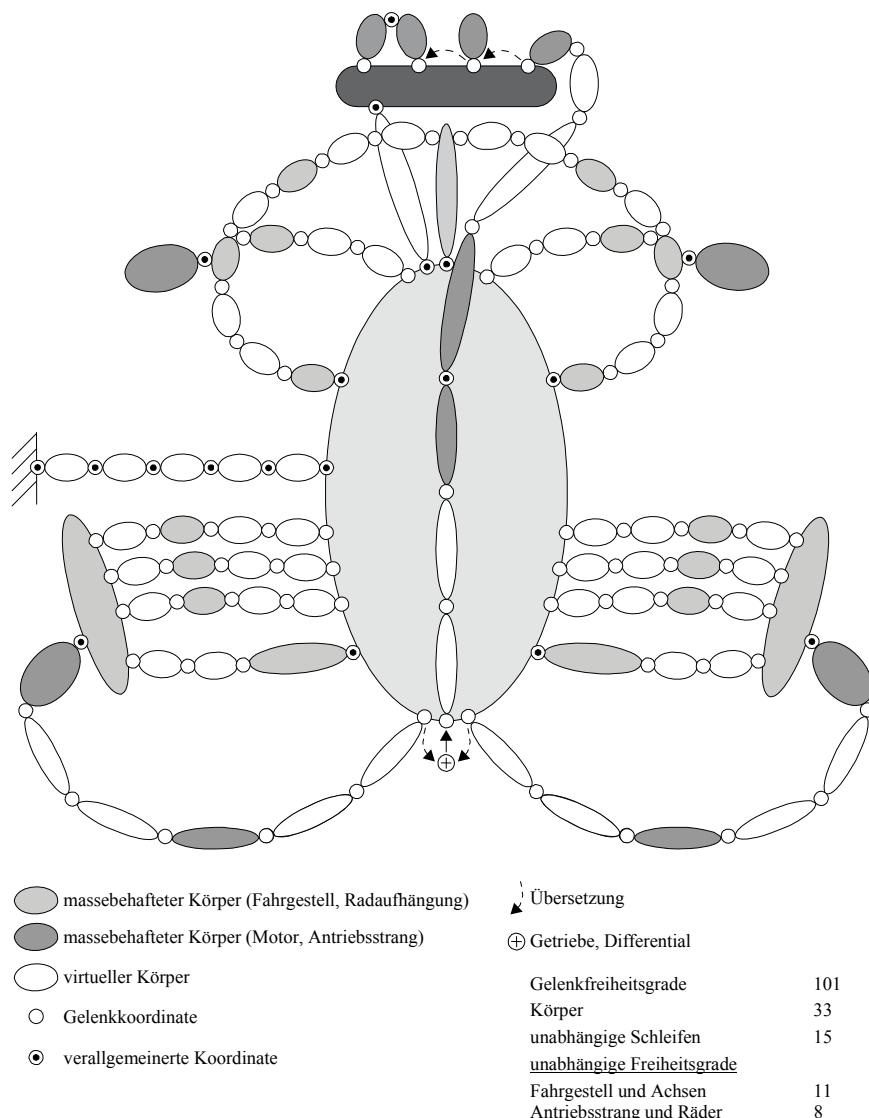


Abb. 13.14: Topologische Struktur des durchschnittlichen Mittelklasse-Fahrzeugmodells

Im zweiten Schritt gilt es nun, sukzessive die in Tabelle 13.3 aufgeführten 23 Parameter auf ihre Auswirkungen auf das Wankverhalten des durchschnittlichen Mittelklasse-Fahrzeugmodells hin zu untersuchen. Hierzu wurden für jeden der 23 Parameter Simulationen mit jeweils einem

veränderten Wert durchgeführt und anschließend mit dem Referenzverhalten des Durchschnittsmodells verglichen. Die Bewertung geschieht auf Basis der Simulation einer Fahrt über eine 5 m lange und 0,5 m hohe Rampe mit einer Geschwindigkeit von 54 km/h. Als Bewertungskriterium wird ein Abweichungskorridor von 10 % des Referenzverhaltens festgelegt. Liegen die Auswirkungen einer Parameteränderungen im gesamten Signalverlauf innerhalb des Korridors, dann wird der Parameter als nicht dominant eingestuft und für das zu formulierende Parametermodell vernachlässigt. Als Variation der 23 Parameter werden die in Tabelle 13.3 aufgeführten maximalen Abweichungen eingesetzt. Die maximale Abweichung markiert die jeweils größte im gesamten Datensatz festgestellte Änderung jedes Einzelwertes vom entsprechenden Mittelwert des Durchschnittsmodells. Beispielhaft ist in Abb. 13.15 die Auswirkung der Parametervariation für die Schwerpunktlage (Parameter Nr. 2 in Tabelle 13.3) dargestellt. Aus der durchgeführten Gesamtanalyse der Einflussparameter haben sich die folgenden acht Fahrzeugparameter als dominant herausgestellt:

- Masse Fahrgestell (Parameter Nr. 1),
- Schwerpunktlage des leeren Gesamtfahrzeugs (Parameter Nr. 2),
- Trägheitstensor des Fahrgestells (Parameter Nr. 3),
- Federkennung der Vorderachse (Parameter Nr. 7),
- Spurbreite der Vorderachse (Parameter Nr. 9),
- Federkennung der Hinterachse (Parameter Nr. 13),
- Spurbreite der Hinterachse (Parameter Nr. 15) und
- Radstand (Parameter Nr. 16).

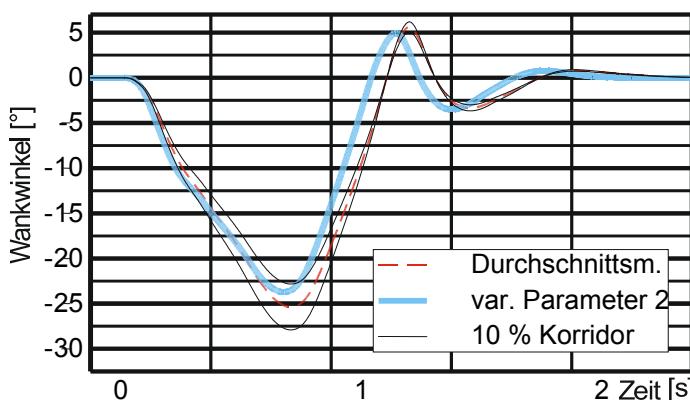


Abb. 13.15: Wankwinkelverlauf bei Variation von Parameter Nr. 2

Im dritten Schritt der Formulierung des parametrisierten Fahrzeugmodells wird überprüft, inwieweit ein Fahrzeugmodell mit 15 nicht dominanten konstant gehaltenen Parametern und acht dominanten angepassten Parametern das Verhalten eines entsprechend detaillierten Fahrzeugmodells nachbilden kann.

Vergleich der parametrisierten Modelle mit den validierten Modellen

Zur Bewertung der Qualität der parametrisierten Fahrzeugmodelle werden mit diesen jeweils zwei unterschiedliche Rampenmanöver simuliert. Durch Gegenüberstellung der entsprechenden Simulationen mit den validierten Modellen aus Abschnitt 13.2 lässt sich anschaulich die Güte der Parametermodelle darstellen. Die beiden folgenden Rampenmanöver liegen dem Vergleich zugrunde:

- Unkritisches Manöver mit geringer Überschlaggefahr:
Rampenhöhe 0,5 m Geschwindigkeit 54 km/h.
- Kritisches Manöver mit hoher Überschlaggefahr:
Rampenhöhe 0,7 m Geschwindigkeit 65 km/h.

Mit dem kritischen Manöver wurde speziell eine Konfiguration ausgewählt, die im Grenzbereich des Kippens liegt. Hiermit ist sichergestellt, dass die Parametermodelle auch in diesem Bereich zuverlässige Prognosen über das Kippverhalten ermöglichen. In Abb. 13.16 und Abb. 13.17 sind die simulierten Wankwinkel der jeweils in ihren acht Parametern angepassten Parametermodelle der Fahrzeuge A, B, C und D abgebildet. Zusätzlich enthält jedes Diagramm den Wankwinkelverlauf (gestrichelte Linie) des Durchschnittsmodells mit den stets konstant gehaltenen Parametern aus Tabelle 13.3. Als Referenzverhalten dient der jeweilige Wankwinkelverlauf (schwarze durchgezogene Linie) des korrekten Modells. Bei den unkritischen Manövern kann für alle Parametermodelle eine deutliche Angleichung des Fahrzeugverhaltens vom Durchschnitts- an die Referenzmodelle erzielt werden. Diese Aussage lässt sich dagegen bei dem kritischen Manöver in der Nähe der Kippgrenze nur für die Parametermodelle der Fahrzeuge A, B und C bestätigen. Bei Fahrzeug D weicht das Parametermodell deutlich vom Referenzverhalten ab, sodass es hier sogar zu einem Fahrzeugüberschlag kommt, obwohl dieser im Referenzmodell nicht auftritt. Dies deutet darauf hin, dass es aufgrund der bei Fahrzeug D von den übrigen Modellen abweichenden Achskinematik der Vorderradaufhängung (siehe Tabelle 13.1) zu diesen Abweichungen kommen könnte.

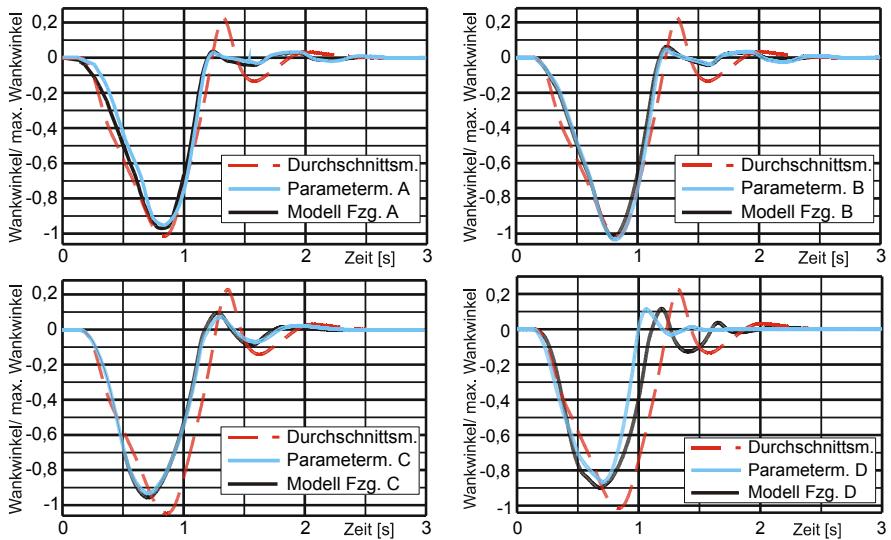


Abb. 13.16: Vergleich der parametrisierten Modelle mit den validierten Modellen in einem Fahrmanöver mit geringer Überschlaggefahr

Weitere Simulationen unter sukzessiver Rückanpassung der Parameter in Richtung der Originalparameter des Fahrzeugs D haben gezeigt, dass sich durch die Übernahme der korrekten Vorderachskinematik und Vorderachsfehlerkurven eine wesentlich verbesserte Modellgüte ergibt. Somit ist die Vorderachskinematik ebenfalls zu den in Abschnitt 13.3 genannten dominanten Parametern zu zählen. Für Mittelklassefahrzeuge, die keine McPherson-Vorderradaufhängung haben, muss im Parametermodell auch die Vorderachse angepasst werden. Der Einfluss der Hinterachse auf das Fahrzeugverhalten ist dagegen deutlich geringer. Bei Verwendung der durchschnittlichen Hinterachs-Radaufhängung weisen die Ergebnisse aller Modelle nur geringe Abweichungen vom jeweiligen Referenzverhalten auf.

So bleibt zusammenfassend festzuhalten, dass das Parametermodell für die Simulation des Verhaltens von Mittelklassefahrzeugen mit McPherson-Vorderradaufhängung mit hoher Güte verwendet werden kann. Für andere Fahrzeuge bedarf es einer individuellen Prüfung. Die Notwendigkeit des Einsatzes der korrekten Vorderachskinematik im Parametermodell verringert den Modellierungsaufwand nicht in vollem Maße. Die in Tabelle 13.4 zusammengefassten Parameter können aber nach wie vor als Durchschnittswerte beibehalten werden. Natürlich ist es grundsätzlich empfehlenswert, alle verfügbaren Daten eines zu simulierenden Fahrzeugs im Modell zu berücksichtigen, doch falls diese zum Beispiel in der frühen

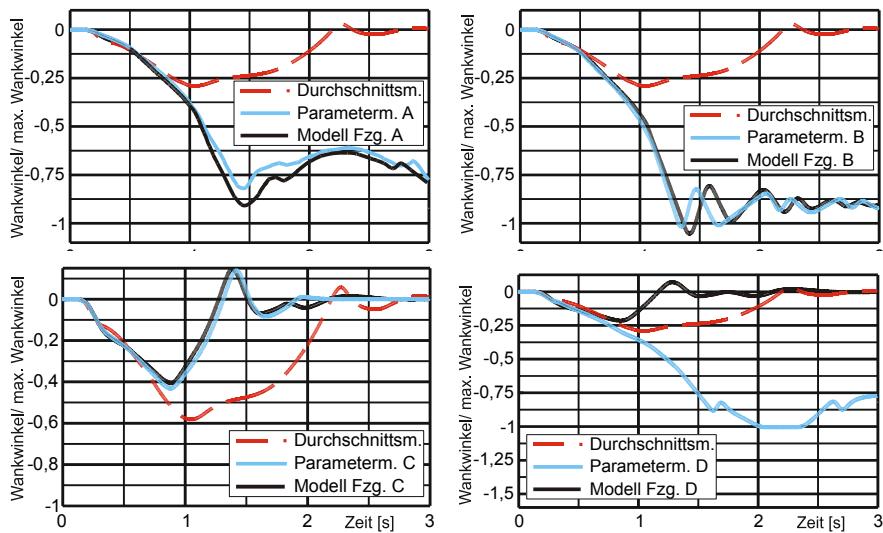


Abb. 13.17: Vergleich der parametrisierten Modelle mit den validierten Modellen in einem Fahrmanöver mit hoher Überschlaggefahr

Phase einer Fahrzeugneuentwicklung nicht verfügbar sind, kann für Pkw der Mittelklasse auf die hier vorgestellten Parameter zurückgegriffen werden. Mithilfe eines so gewonnenen Modells lassen sich sowohl Parameter für die Durchführung von ersten realen Rollover-Applikationsversuchen abschätzen, als auch eine Vorabkalibrierung der Auslöseparameter für erste Versuchsfahrzeuge vornehmen (vgl. Abschnitt 14.2).

Tabelle 13.4: Allgemein gültige Parameter des Mittelklasse-Fahrzeugmodells

Nr.	Parameter	Wert
Fahrgestell:		
4.	Sitzposition Insassen vorn [m]	-1,3902 ±0,3699 0,2735
Vorderachse (mit Zahnstangenlenkung):		
8.	Dämpferkennung	s. Abb. 13.13
Stabilisator vorne:		
10.	Drehfeder-konstante [Nm/°]	6,4315
Hinterachse (Mehrlenker):		
11.	Masse des Radträgers [kg]	8,21
12.	Trägheitstensor des Radträgers [kgm ²]	0,0426 0,103 0,1033
14.	Dämpferkennung	s. Abb. 13.13
Stabilisator hinten:		
17.	Drehfederkonstante [Nm/°]	7,3686
Motorlager:		
18.	Ortsvektor zum Lagerpunkt [m]	0,0031 0 0,0857
Rad:		
19.	Reifenradius [m]	0,3108
20.	Längs-Trägheitsmoment [kgm ²]	1,375
21.	Quer-Trägheitsmoment [kgm ²]	0,85
22.	lineare vertikale Reifenfedersteifigkeit [N/m]	239333
23.	Radkennlinie	s. Abb. 13.9

14 Ausgewählte Anwendungen

Die ständig wachsende Komplexität von Kraftfahrzeugen macht den Einsatz der Fahrdynamiksimulation in einem effizienten Entwicklungsprozess unverzichtbar. Neben der Bewertung von den grundlegenden Fahreigenschaften wie Komfort und Stabilität unterstützt die Simulation den Entwurfs- und Applikationsprozess von Fahrdynamikreglern wie dem Anti-blockiersystem (ABS), der Antriebsschlupfregelung (ASR) oder dem Elektronischen Stabilitäts-Programm (ESP). Dabei ist es die Aufgabe des Simulationswerkzeugs, ein Fahrzeug im Rechner abzubilden, um es als Strecke in der Regler-Applikation zu verwenden. Dies wird in Abschnitt 14.1 am Beispiel eines Lenkwinkelsprunges als Fahrmanöver demonstriert. Darüber hinaus findet die Fahrdynamiksimulation auch Anwendung im Bereich der Entwicklung und Applikation von passiven Sicherheitssystemen wie der Überschlagerkennung (Abschnitt 14.2). Ein weiteres Anwendungsbeispiel ist mit der Regelung der Wankdynamik durch aktive Stabilisatoren in Abschnitt 14.3 gegeben.

14.1 Simulation eines Lenkwinkelsprungs (ISO 7401)

Als Beispiel für ein Testverfahren bei dem das Fahrzeuggesamtsystem ohne den Fahrer bewertet werden soll, wird an dieser Stelle ein sogenanntes open-loop (offener Regelkreis) Manöver analysiert. Mit Hilfe des in Kapitel 13 beschriebenen Gesamtfahrzeugmodells wird ein Lenkwinkelsprung nach (ISO 74012003) simuliert. Bei diesem Manöver wird während einer Geradeausfahrt mit konstanter Geschwindigkeit sprungförmig das Lenkrad auf den Stationärwert $\delta_{H, stat}$ eingeschlagen. Da es aus physikalischen Gründen nicht möglich ist einen idealen Sprung zu erzeugen, wird in der Norm gefordert, dass die Zeitdauer zwischen 10% und 90% des Stationärwertes des Lenkwinkels unter 0,15 s liegt. Um Fehler bzw. Ungenauigkeiten bei der Auswertung zu berücksichtigen, wird der Zeitpunkt t_0 , ab dem Ansprechzeiten des Fahrzeuges gemessen werden, erst definiert, wenn 50% des stationären Lenkradwinkels erreicht sind.

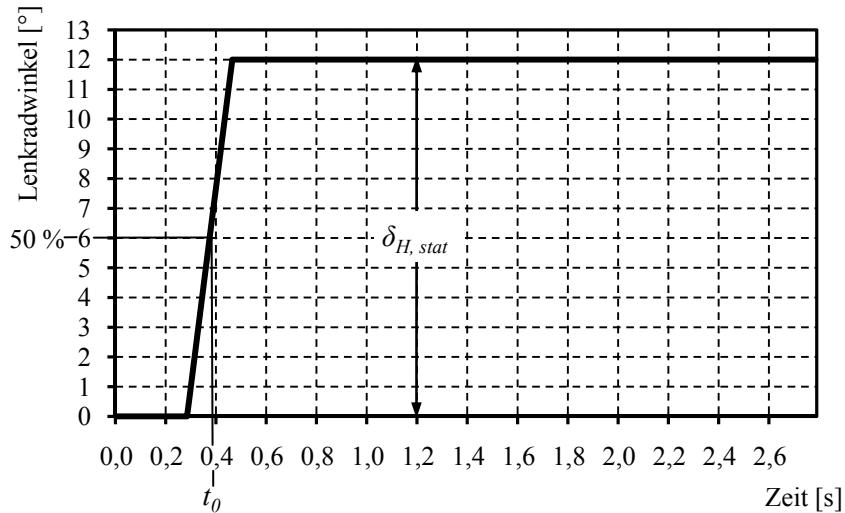


Abb. 14.1: Verlauf des Lenkradwinkels

Die Größe des Lenkradwinkels ist in Vorversuchen zu bestimmen. Er muss so gewählt werden, dass sich nach dem Einschwingvorgang eine stationäre Querbeschleunigung von 4 m/s^2 einstellt. Die Standard Geschwindigkeit beträgt dabei 100 km/h und die Gaspedalstellung ist während der gesamten Testdauer konstant zu halten.

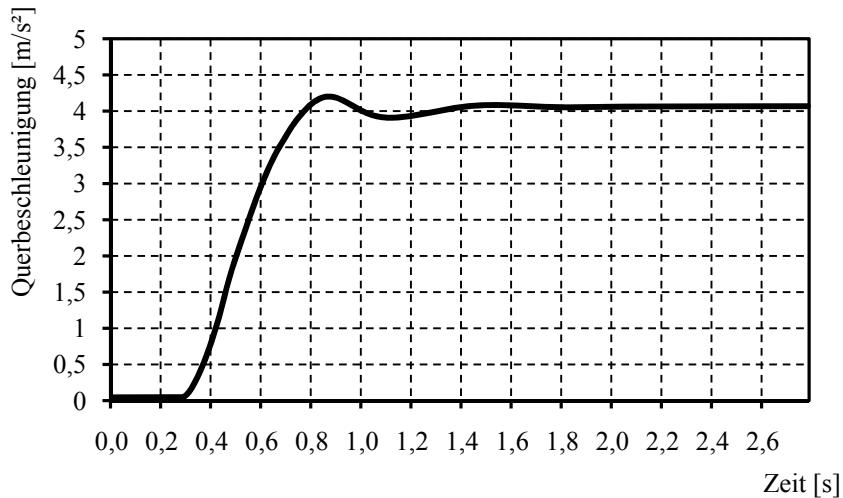


Abb. 14.2: Verlauf der Querbeschleunigung

Für das hier verwendete Simulationsmodell ergibt sich unter den zuvor genannten Bedingungen bei einem Lenkwinkelsprung von 12° (s. Abb. 14.1) die geforderte Querbeschleunigung von 4 m/s^2 (s. Abb. 14.2). Somit kann nun das Ansprechen des Fahrzeuges auf den Lenkeinschlag bewertet werden. Eine schnelle und gut gedämpfte Fahrzeugreaktion ist hierbei wünschenswert.

Die Schnelligkeit der Fahrzeugreaktion wird über so genannte Ansprechzeiten quantifiziert. Die am häufigsten verwendeten Ansprechzeiten sind die *response time* T_ψ und die *peak response time* $T_{\psi \max}$ der Gierwinkelgeschwindigkeit. Die *response time* ist definiert als die Zeitdauer von t_0 bis zum Erreichen von 90% des Stationärwertes. In Abb. 14.3 beträgt T_ψ 0,25 s. Die *peak response time* kann sowohl für die Querbeschleunigung als auch für die Gierwinkelgeschwindigkeit ermittelt werden. Allerdings wird vorrangig die Gierwinkelgeschwindigkeit zur Bewertung der Schnelligkeit herangezogen. In Abb. 14.3 beträgt $T_{\psi \max}$ 0,32 s.

Die Bewertung der Dämpfung der Fahrzeugreaktion kann zum einen durch das Verhältnis von Maximalwert zu Stationärwert der Gierwinkelgeschwindigkeit oder zum anderen durch die in der Regelungstechnik verwendete normierte Überschwingweite

$$U_\psi = \frac{\dot{\psi}_{\max} - \dot{\psi}_{\text{stat}}}{\dot{\psi}_{\text{stat}}} \quad (14.1)$$

vorgenommen werden. Die Überschwingweite des hier simulierten Fahrzeugmodells beträgt 2,3%. Dieser Wert deutet auf ein untersteuernd ausgelegtes, stabiles Fahrverhalten hin.

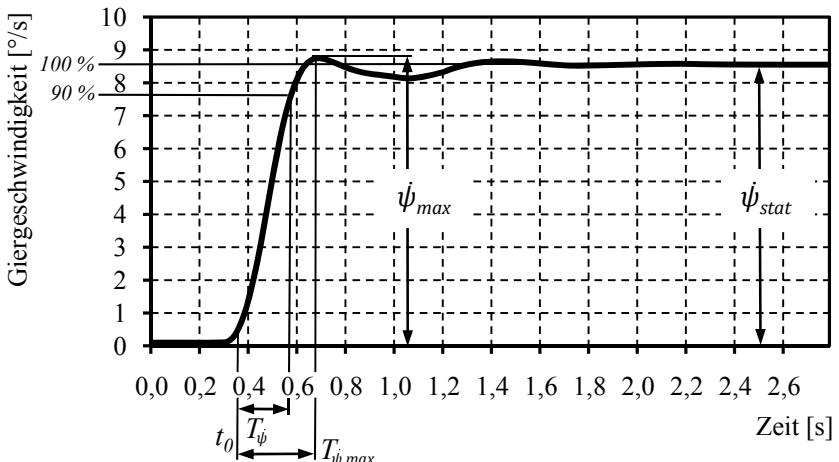


Abb. 14.3: Verlauf der Gierwinkelgeschwindigkeit

14.2 Simulation von Fahrzeugüberschlägen

Als ein komplexes Anwendungsbeispiel wird in diesem Abschnitt die Unterstützung des Applikationsprozesses einer Überschlagerkennungsfunktion zur Steuerung von Rückhaltesystemen bei Personenkarfreitwagen durch die Mehrkörpersimulation beschrieben, dabei stammen die folgenden Ausführungen im Wesentlichen aus (Bardini 2008). Der Applikationsprozess eines Überschlagschutzsystems ist im Rahmen der Gesamtfahrzeugentwicklung ein untergeordneter Teilprozess. Er ist vor allem abhängig von der Verfügbarkeit von Prototypenteilen und -fahrzeugen. Je früher im Ablauf der Produktentstehung auf diese zugegriffen wird, umso kostenintensiver gestaltet sich der Prozess insgesamt. Andererseits werden aber durch einen möglichst frühen Prozessbeginn die Reife und damit die Qualität der Applikation zum Serienstart erhöht und das Entwicklungsrisiko minimiert. Vor dem Hintergrund dieses Zielkonfliktes gilt es, einen möglichst optimalen Applikationsprozess zu finden. Hierzu kann die Simulation einen entscheidenden Beitrag leisten.

Um die Funktion einer Überschlagerkennung sicherzustellen, sind entsprechend der in Abb. 14.4 dargestellten Unfallszenarien diejenigen repräsentativen Versuchskonfigurationen abzuleiten, welche das reale Unfallgeschehen möglichst umfassend abbilden. Diese müssen dann mit Hilfe der Simulation nachgestellt werden. Gemäß Abb. 14.4 können 81 % des feldrelevanten Überschlagunfallgeschehens mithilfe von vier Versuchsszenarien repräsentiert werden. Um eine sichere Aktivierung bei der Mehrzahl der realen Überschlagunfälle zu gewährleisten, sollten der Bordstein-, der Sandbett-, der Böschungs- und der Rampenversuch bei verschiedenen Geschwindigkeiten im Rahmen des Entwicklungsprozesses mit Prototypen durchgeführt werden.

Zur Minimierung des hierfür erforderlichen Aufwands, sind zunächst die üblicherweise in den Entwicklungsprogrammen der Fahrzeugherrsteller berücksichtigten und gegebenenfalls für die Auslegung des Überschlagschutzes von Pkws relevanten Versuche zu betrachten. Von diesen etablierten Versuchen können zum Beispiel beim lateralen Bordsteinanprall und beim *VDA-Slalomtest* sowie beim *VDA-Spurwechseltest* Synergien für die Auslegung der Überschlagerkennung genutzt werden. Bei dem standardmäßig als Seitencrash-Misuse-Versuch durchgeföhrten seitlichen Bordsteinanprall wird die No-Fire-Schwelle üblicherweise auf Anprallgeschwindigkeiten zwischen 10 und 15 km/h appliziert. Bei höheren Geschwindigkeiten findet dann bei den beschleunigungsbasierten Sensorsystemen eine Auslösung über den Seitencrashalgorithmus statt.

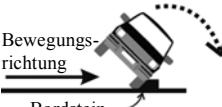
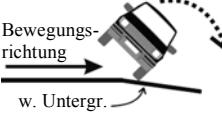
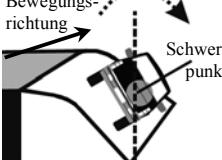
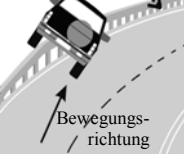
Überschlag-ursache	Unfallszenario	Feldrelevanz	Versuchsszenario
seitlicher Rutschvorgang in Verbindung mit wechselndem Untergrund (<i>Trip-over</i>)		56 %	Bordstein 
			Sandbett 
Abkommen von der Fahrbahn auf eine abschüssige Ebene (<i>Fall-over</i>)		13 %	Böschung 
Überfahren eines rampenähnlichen Objektes (<i>Flip-over</i>)		12 %	Rampe 
Summe		81 %	

Abb. 14.4: Ableitung feldrelevanter Versuchsszenarien (Bardini 2008)

Der Überschlag eines Mittelklasse-Pkws kann aus physikalischen Gründen nicht bei Geschwindigkeiten unterhalb von 17 km/h stattfinden. Damit ist davon auszugehen, dass in jedem Fall die Seitencrasherkennung vor der Überschlagerkennung greift. Dies geschieht normalerweise bereits bei Fahrzeugwinkelwinkeln unterhalb von 5°. Aufgrund dieser Synergie braucht zur Applikation der Überschlagerkennung beim Bordsteinanprall kein zusätzlicher Versuch im Entwicklungsprozess vorgesehen werden. Dies gilt ebenso für die im Rahmen der Fahrwerksentwicklung standardmäßig

durchgeführten Fahrdynamiktests Slalom und Spurwechsel (*Elctest*). Die bei diesen Versuchen gemessenen Daten dienen bei der Applikation der Überschlagerkennung als robust zu erfüllende No-Fire-Versuche.

Wie in Abb. 14.5 dargestellt, kann die Produktentstehung sowohl zeitlich als auch bezüglich der Produktreife in drei Phasen unterteilt werden. In der ersten Phase, die etwa drei Jahre vor Serienstart beginnt, stehen die frühen Prototypen zur Verfügung. Diese sind in Bezug auf ihre Aussagefähigkeit im Vergleich zum späteren Serienprodukt mit Einschränkungen behaftet. Materialien, Package und Konstruktionsdetails können sich im weiteren Verlauf der Entwicklungsphasen noch ändern. Daher könnten – im ungünstigsten Fall – die in dieser Phase aufgenommen Daten später zur Applikation ungeeignet sein. Hinzu kommt, dass Fahrzeuge dieser Baustufe sehr kostspielig und somit nur in geringer Anzahl für zerstörende Versuche verfügbar sind. Vor diesem Hintergrund ist ein Verzicht auf die Durchführung eines kompletten Versuchsprogramms zur ersten Datenaufnahme naheliegend. Jedoch erhöht sich damit auch das Entwicklungsrisiko, da eventuelle Probleme erst in der nächsten Prototypenphase, die ca. zwei Jahre vor Serienstart beginnt, entdeckt werden. Besteht allerdings der Anspruch, die Fahrzeuge bereits in dieser nächsten Entwicklungsstufe mit auslösefähigen Systemen auszustatten, so müssen Versuchsdaten zur ersten Datenaufnahme bereitgestellt werden.

Da für diese erste Applikation aber nicht die hohen Anforderungen wie bei einer feldtauglichen Applikation für den Endverbraucher bestehen, ist eine konservative Auslegung zugunsten hoher Misuse-Robustheit möglich. Damit erhöht sich auch die Toleranz gegenüber den für die erste Applikation bereitzustellenden Versuchsdaten, sodass für die Versuchsdurchführung auch Fahrzeuge des Vorgängermodells verwendet werden können. Dies setzt allerdings voraus, dass bei den in Abschnitt 13.3 ermittelten acht dominanten Fahrzeugparametern zwischen Vorgänger- und Nachfolgermodell keine zu großen Abweichungen bestehen. Als Erfahrungswert für eine maximal zulässige Abweichung hat sich hierbei ein Wert von ca. 5 % bewährt. Darüber hinaus ist es auch möglich, durch das Einbringen bzw. Verschieben von Gewichten im Fahrzeug, eine Anpassung von Fahrzeuggewicht, Schwerpunktlage und Trägheitsmoment in gewissen Grenzen vorzunehmen.

Schaffen solche Maßnahmen keine Abhilfe oder existiert zum Beispiel bei der Entwicklung eines neuen Fahrzeugs kein Vorgängermodell, dann können die Daten nur aus der Simulation gewonnen werden. Der Modellaufbau kann bereits in der Konzeptphase beginnen, sodass gleich bei Verfügbarkeit erster früher Prototypen eine Verifikation des Modells anhand von nicht zerstörenden Manövern, wie etwa *Kreis-* oder *Slalomfahrten*,

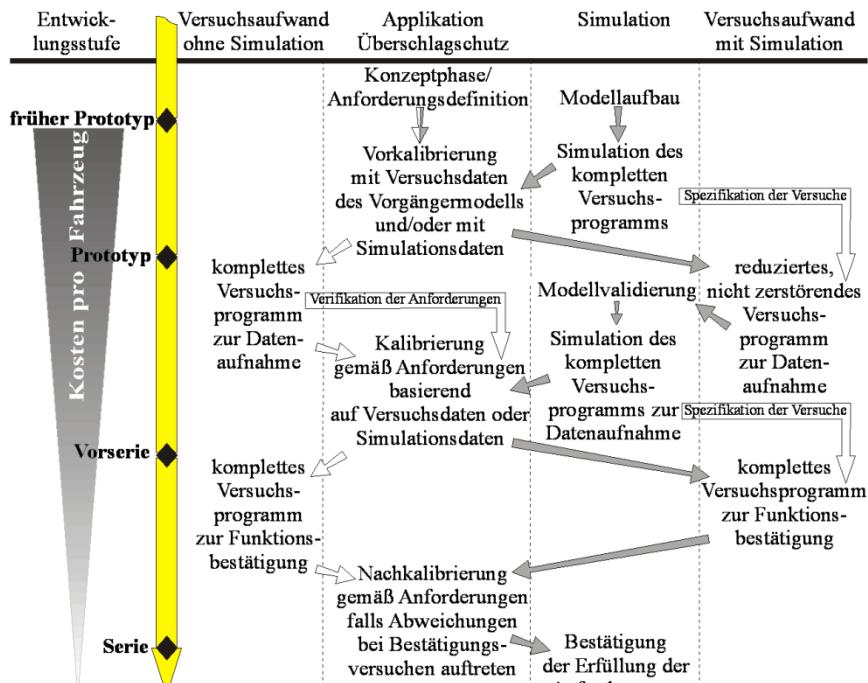


Abb. 14.5: Entwicklungsprozess zur Applikation von Überschlagschutzsystemen, vgl. (Bardini et al. 2007)

vorgenommen werden kann. Mit diesem Modell lassen sich die in Abschnitt 14.2.1 zusammengestellten Manöver simulieren, sodass ein erster Datensatz zur Applikation der Überschlagerkennung zur Verfügung steht.

Falls weder Simulations- noch Versuchsdaten in der frühen Prototypenphase zur Verfügung stehen, dann ist wie in Abb. 14.5 dargestellt, während der zweiten Prototypenphase auf jeden Fall die Erzeugung eines kompletten Datensatzes zur Minderung des Entwicklungsrisikos erforderlich. Andernfalls müssten während der Vorserienphase sowohl die Datenaufnahme als auch die Funktionsbestätigung erledigt werden. Eine sichere Erreichung des Serienstarts könnte dann nur unter Voraussetzung eines *Null-Fehler*-Prozessablaufs erreicht werden. Liegen in der zweiten Prototypenphase Simulationsdaten vor, ist eine Reduzierung der Crash-Versuche denkbar. Einerseits lassen sich dank der Simulation die Versuchsparameter der einzelnen Versuche im Vorfeld genauer festlegen und andererseits können die zerstörenden Versuche gänzlich entfallen. Da für eine robuste Algorithmus-Applikation zu jedem der Auslöseversuche aus Abb. 14.4 je drei Versuche notwendig sind (siehe Abschnitt 14.2.1), ist eine Beschränkung der realen Versuche nur auf die überschlagfreien Versu-

che möglich. Abgesehen von Sandbettversuchen sind alle Versuche, die zum Umsturz des Fahrzeugs führen, als zerstörend anzusehen. Bei Versuchen knapp unterhalb der Kippgrenze ist ggf. eine Reparatur des Fahrzeugs möglich. Bei Verzicht auf die zerstörenden Versuche lässt sich so der Bedarf an Versuchsfahrzeugen reduzieren. Unter Nutzung der überschlagfreien Versuche zur Validierung der Simulationsmodelle können dann die Versuche mit Überschlag durch die Simulation ersetzt werden.

Bei den Versuchen zur Funktionsbestätigung in der Vorserie (ab ca. 16 Monate vor Serienstart) besteht weniger Potenzial zur Einsparung von Versuchen durch die Simulation. Weil die Funktionsbestätigung definitiv gemäß dazu dient, die Funktion des Gesamtsystems (Hardware, Software und Rückhaltesysteme) im realen Fahrzeug nachzuweisen und zu dokumentieren, ist der Verzicht auf reale Versuche prinzipiell nicht möglich. Die Simulation kann hier in erster Linie einen Beitrag zur Versuchsdurchführung liefern, indem mit ihrer Hilfe die Versuchsparameter spezifiziert werden. Kommt es allerdings bei den Bestätigungsversuchen zu Abweichungen vom gewünschten Verhalten, so kann mithilfe der Simulation eine weiterführende Analyse des fraglichen Verhaltens durchgeführt werden. Ist eine Nachkalibrierung der Applikation erforderlich, liefert die Simulation weitere Daten des kritischen Manövers, z. B. in angrenzenden Geschwindigkeitsbereichen. Mithilfe der Insassensimulation müssen die Auswirkungen des eventuell geänderten Auslöseverhaltens auf die Erfüllung der Anforderungen des Insassenschutzes dann erneut überprüft werden. Ob das Ausmaß der Änderungen gar eine Wiederholung des gesamten Bestätigungsprogramms erfordert, ist im Einzelfall zu entscheiden.

14.2.1 Virtuelles Testgelände

In diesem Abschnitt werden die virtuellen Versuchsaufbauten, die zur Applikation eines Überschlagschutzsystems verwendet werden, beschrieben. Alle für eine solche Applikation benötigten Versuche sind in Tabelle 14.1 zusammengestellt. Die Versuche sind in zwei Gruppen unterteilt. Die eine Gruppe umfasst die sogenannten Misuse-Versuche, welche die extremen Fahrsituationen umfasst, bei denen eine Auslösung der nicht reversiblen Komponenten des Insassenschutzsystems inakzeptabel ist. Die andere Gruppe umfasst dagegen die sogenannten Use-Versuche, für die eine Auslösung der Rückhaltesysteme erwartet wird, aber nur dann, wenn es im Verlauf eines solchen Fahrmanövers auch tatsächlich zu einem Überschlag kommt. Daher sind hierbei zusätzlich die Auslöse- (Fire) und die Nicht-Auslöse-Versuche (No Fire) zu unterscheiden. Letztere dienen dazu, die Auslöseschwellen für jeden im Algorithmus vorgesehenen Entscheidungs-

pfad für den Fire- und No-Fire-Fall voneinander abzugrenzen. Das bedeutet, dass für die Use-Versuche jeweils ein Versuch deutlich unterhalb der Auslöseschwelle (Wankwinkel $\leq 40^\circ$), einer knapp unterhalb der statischen Kippgrenze (Wankwinkel 50° bis 60°) und einer über der statischen Kippgrenze ($> 60^\circ$) durchgeführt werden sollte.

Inwieweit eine Simulation dieser Manöver möglich und sinnvoll ist, wird an dieser Stelle diskutiert. Auf Seiten der Misuse-Versuche lassen sich alle Manöver bis auf den Bordsteinanprall mit hoher Zuverlässigkeit mithilfe eines wie in Abschnitt 13.3 vorgestellten Mehrkörpermodells nachbilden. Für den Bordsteinanprall kann, wie bereits zuvor in diesem Abschnitt erwähnt, auf Applikationsdaten der Seitencrasherkennung zurückgegriffen werden. Daher stehen hierzu im Verlauf der Entwicklung Messdaten dieser Versuchsart zur Verfügung, sodass die Simulation dieses Manövers im Applikationsprozess nicht unbedingt erforderlich ist.

Ähnlich verhält es sich mit den beiden VDA-Tests (VDA 2006). Da es sich hierbei um sogenannte *closed-loop-Tests* handelt, sind die Ergebnisse stark vom Fahrereinfluss bzw. in der Simulation von der Qualität des Fahrermodells geprägt. Abhängig davon ergeben sich zum Beispiel bei dem in Abb. 14.6 dargestellten Spurwechseltest sehr unterschiedliche Messwerte. Hierbei sind die maximal realisierbaren Durchfahrtgeschwindigkeiten und damit die in der Applikation zu berücksichtigenden Maximalwerte bei geübten Fahrern höher als in der Simulation. Deshalb empfiehlt es sich auch hier, reale Messdaten zu berücksichtigen.

Der prinzipielle Aufbau der beiden verbleibenden Misuse-Versuche aus Tabelle 14.1 ist in Abb. 14.7 dargestellt. Bei diesen Manövern lassen sich mithilfe von Rampenaufbauten die notwendigen Szenarien nachbilden. Zur Simulation der Wechselböschung können zwei 8,5 m lange Rampen mit zwischen 30 und 60 cm verstellbaren Höhen hintereinander angeordnet werden, sodass diese vom Fahrzeug wechselseitig überfahren werden können. Die Parameter Rampenhöhe, Rampenabstand und Fahrzeuggeschwindigkeit sind dabei so zu wählen, dass sich möglichst hohe Wankwinkelgeschwindigkeiten einstellen, ohne dass das Fahrzeug unkontrollierbar über die Rampen springt. Dies ist für Mittelklassefahrzeuge nur im Geschwindigkeitsbereich unterhalb von 70 km/h möglich. Zur Simulation des Sprunghügels sind theoretisch mit einem Rampenaufbau viele unterschiedliche Konfigurationen denkbar. Ziel dieses Manövers ist die Erzeugung einer Freiflugphase mit einer Dauer von mindestens 300 ms. Um Schäden am Fahrzeug zu vermeiden, hat sich hierfür der Einsatz einer niedrigeren Rampe mit maximal 35 cm Höhe, die im Geschwindigkeitsbereich von 60 bis 80 km/h befahren wird, bewährt.

Tabelle 14.1: Zur Auslegung einer Überschlagerkennung benötigte Versuche

Misuse-Versuche	
Versuch	Applikationszweck
VDA-Slalomtest (10 Pylonen im Abstand von je 18 m auf einer Linie hintereinander)	Absicherung des Resonanzverhaltens (<i>Aufschaukeln</i>)
VDA-Spurwechseltest (ISO 3888 Teil 2)	Robustheit der Applikation bei Standard-Manövern
Lateraler Bordsteinanprall bei 10 – 15 km/h	Test des Einflusses von lateralen Beschleunigungsimpulsen und Definition der oberen Grenze des <i>No Fire</i> -Bereichs
Fahrt über zwei hintereinander stehende Rampen jeweils mit den linken und rechten Rädern (Simulation einer Wechselböschung)	Robustheit bei hohen Wankwinkelgeschwindigkeiten
Sprung über eine Rampe mit allen Rädern (Simulation eines Sprunghügels)	Absicherung der Freiflugphase

Use-Versuche	
Versuch	Applikationszweck
Lateraler Bordsteinanprall bei Geschwindigkeiten ≥ 15 km/h	Absicherung des Auslöseverhaltens beim Bordsteinanprall (laterales Rutschen mit hohem Beschleunigungsimpuls)
Laterales Rutschen in ein Sandbett	Auslöseverhalten bei lateralem Rutschen mit niedrigem Beschleunigungsimpuls
Fahrt mit zwei Rädern über eine Rampe	Auslöseverhalten beim Schraub-Überschlag (aufsteigendes Fahrzeug)
Fahrt über eine Böschung	Auslöseverhalten beim Schraub-Überschlag (fallendes Fahrzeug)

Bei den Use-Versuchen aus Tabelle 14.1 gelten für die Simulation des Bordsteinanpralls im Use-Fall die gleichen Bedingungen wie bereits zuvor für den Misuse-Fall beschrieben. Anders verhält es sich dagegen beim lateralen Rutschen in ein Sandbett (siehe Abb. 14.8).

Bei diesem Manöver findet keine Auslösung über die Seitencrasherkennung statt, weil hier der starke laterale Beschleunigungsimpuls zu Beginn des Überschlagunfalls ausbleibt. Daher ist beim Sandbett wie auch bei den Manövern *Rampe* und *Böschung* die Generierung der zur Applikation benötigten Signale jeweils für die drei bereits erwähnten

Versuchszenarien erforderlich (1. Wankwinkel $\leq 40^\circ$; 2. Wankwinkel 50 bis 60° ; 3. Wankwinkel $> 60^\circ$).

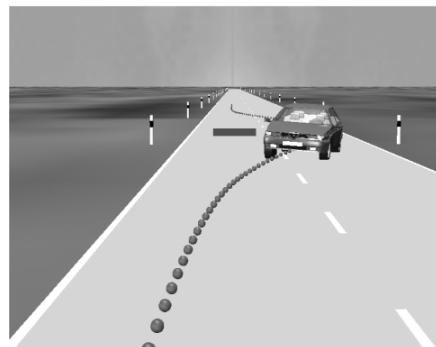


Abb. 14.6: Virtueller VDA-Spurwechseltest (entspricht ISO 3888 Teil 2)

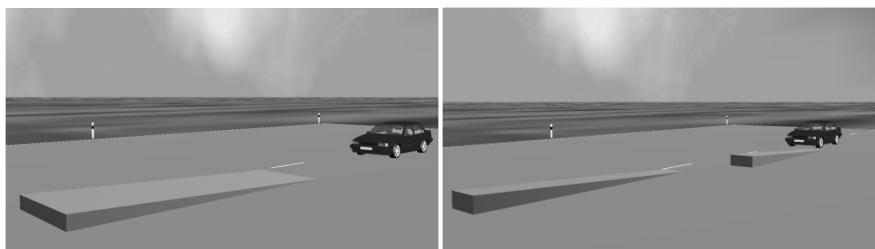


Abb. 14.7: Virtuelles Testgelände für die Misuse-Versuche Wechselböschung und Sprunghügel

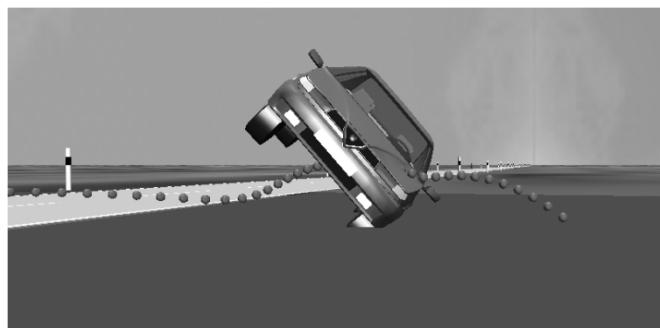


Abb. 14.8: Virtuelles laterales Rutschen in ein Sandbett

Das Sandbettmanöver nimmt hierbei eine Sonderstellung ein. Im Gegensatz zu den anderen sind diese Versuche in der Realität mit geringen Beschädigungen am Fahrzeug durchführbar. Hier werden durch das all-

mähliche Einsinken der Räder in den Sand und das anschließende Abrollen des Fahrzeugs im Sand größere plastische Deformationen verhindert, so dass eine weitere Verwendung des Testfahrzeugs denkbar ist. Die Simulation dieser Manöver ist allerdings ohne einen vorherigen Verifikationsversuch mithilfe der Mehrkörpersimulation nicht möglich. Für eine aussagefähige Simulation sind durch einen Versuch die in Abb. 14.9 dargestellten Parameter Einsinktiefe sowie Länge des Rutschweges im Sandbett zu ermitteln. Mithilfe dieser, aus einem realen Sandbettüberschlagversuch zu ermittelnden Messwerte, ermöglicht ein empirischer Modellierungsansatz über die Anpassung des Verlaufs der in Abb. 14.9 dargestellten Funktion der Gleitreibung die Verifikation des Sandbettmanövers. Hierbei wird der im realen Versuch durch das Einsinken der Räder im Sand entstehende Eingrabeffekt durch eine kontinuierlich ansteigende Reibkraft auf einer sich absenkenden Oberfläche nachgebildet. Der prinzipielle Aufbau der beiden verbleibenden Use-Versuche aus Tabelle 14.1 ist in Abb. 14.10 dargestellt. Welche Parameter etwa für die Rampenhöhe, den Anfahrwinkel, die Böschungsgeometrie und die Fahrzeuggeschwindigkeit für Mittelklasse-Pkw geeignet sind, wird in Abschnitt 14.2.2 anhand von Simulationsergebnissen erörtert.

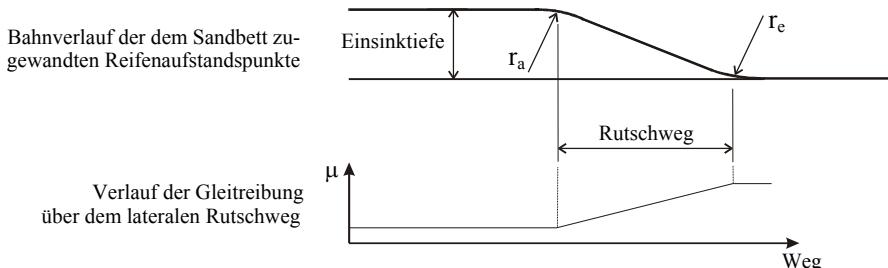


Abb. 14.9: Bodenmodellierung für laterales Rutschen in ein Sandbett

Um bei den hier beschriebenen Manövern auch das zugehörige Verhalten der Insassen beurteilen zu können, bietet sich die Verwendung eines Insassensimulationswerkezeugs an, welches bereits validierte Modelle von Crashtest-Dummies enthält (z.B. MADYMO, Coo et al. 1991). Hierzu können die in der Fahrdynamiksimulation berechneten Positions- und Orientierungsdaten des Fahrgestells als Bewegungsvorgabe für den Fahrzeugginnenraum verwendet werden. Diese müssen hierfür in Bezug auf das Inertialsystem vorliegen. Bei Versuchen, welche wie in diesem Abschnitt beschrieben, mithilfe der Fahrdynamiksimulation durchgeführt werden, können die Daten gleich im benötigten Bezugssystem ausgegeben werden.

Stammen die Daten dagegen aus realen Crashversuchen, so ist ein nicht unerheblicher Aufwand zur entsprechenden Aufbereitung der Messdaten erforderlich.

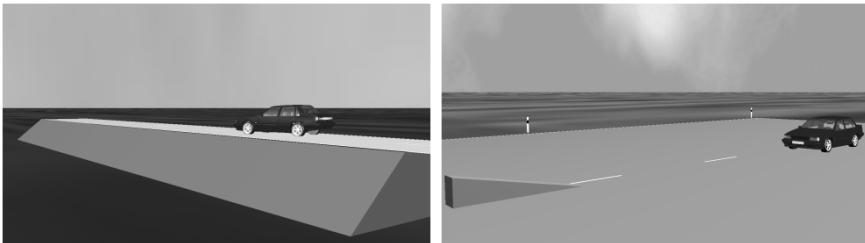


Abb. 14.10: Virtuelles Testgelände für Use-Versuche *Böschung* und *Rampe*

14.2.2 Simulationsergebnisse

Mithilfe der Simulation der in Tabelle 14.1 zusammengefassten Misuse- und Use-Manöver kann ein Algorithmus zur Überschlagerkennung im frühen Stadium der Fahrzeugentwicklung verifiziert und in der in Abb. 14.5 dargestellten Weise bei der Applikation unterstützt werden. Die sich bei den verschiedenen Manövern einstellenden Charakteristika der Fahrzeug- und Insassenbewegung bestimmen die Anforderungen an den Algorithmus und den Insassenschutz. Hierzu werden jeweils geeignete Versuchsparameter ermittelt, sodass sich die für den Überschlagschutz kritischen Parameter einstellen. Insbesondere bei den Manövern mit Überschlag ist zur Abschätzung der Auslöseanforderungen die Simulation des Insassenverhaltens erforderlich. Im Folgenden werden dafür ausgewählte Simulationsergebnisse von verschiedenen Manövern vorgestellt.

Misuse-Versuche

Wie bereits in Abschnitt 14.2.1 diskutiert, nimmt der Bordsteinanprall eine Sonderrolle ein und wird daher hier als Misuse-Versuch nicht weiter betrachtet. Stattdessen sollen die beiden Manöver VDA-Spurwechseltest (Abb. 14.6) und Wechselböschung (Abb. 14.7) als ein weniger kritisches und ein kritisches Manöver repräsentativ untersucht werden.

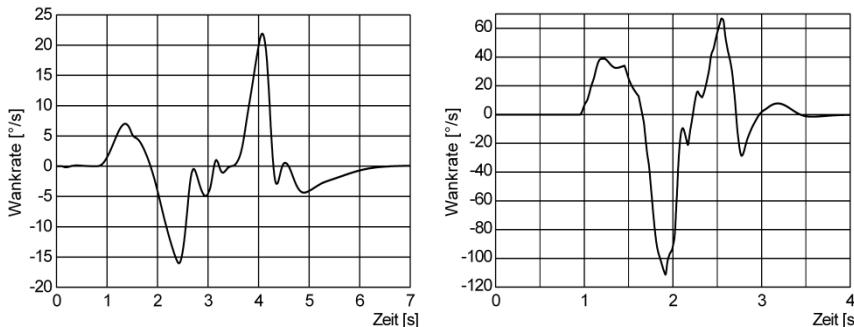


Abb. 14.11: Wankrate des durchschnittlichen Mittelklasse-Fahrzeugmodells beim VDA-Spurwechseltest (links) und bei der Fahrt über eine Wechselböschung (rechts), jeweils mit 60 km/h

Der VDA-Spurwechseltest (VDA 2006), welcher auch unter dem Namen *Elchtest* bekannt ist, stellt für moderne Pkws der Mittelklasse kein Überschlagrisiko mehr dar. Umfangreiche und aufwendige Tests mit Personenwagen, die auf dem US-amerikanischen Markt verkauft werden, zeigen, dass Pickups und SUVs bei diesem Versuch eher zu Überschlägen neigen. Die meisten Pkws verhalten sich dagegen beim Spurwechseltest sehr unempfindlich bezüglich der Überschlagneigung. Dies bestätigt sich auch in den hier mit dem durchschnittlichen Mittelklasse-Fahrzeugmodell durchgeführten Simulationen. In Abb. 14.11 ist der Verlauf der Wankrate des Spurwechselmanövers mit 60 km/h dargestellt. Als maximale Drehrate um die Fahrzeulängssachse treten hier 22 °/s auf. Diese Drehrate hat ausreichend Rotationsenergie um den Fahrzeugschwerpunkt maximal um weitere 3 mm anzuheben. Dies ist bei dem in diesem Manöver auftretenden maximalen Wankwinkel von weniger als 5° unkritisch. Auch ein Erreichen der Plausibilitätschwelle des Algorithmus ist unwahrscheinlich, da die maximale laterale Verzögerung bei 0,7 g liegt. Daher kann der VDA-Spurwechseltest in Bezug auf die Misuse-Sicherheit insgesamt eher als ungefährlich eingestuft werden.

Deutlich kritischer stellt sich dagegen das Wechselböschungsmanöver dar. Eine Wankwinkelgeschwindigkeit von 112 °/s in Verbindung mit einer lateralen Beschleunigung von 1 g und einer vertikalen Beschleunigung von 1,2 g können bei einer unzureichenden Algorithmusapplikation schnell zu Fehlauslösungen führen. Dieses Manöver erzeugt im Augenblick des Rückpralls des Fahrzeugs aus der Wankbewegung der ersten Böschung beim Auffahren auf die zweite Böschung hohe Wankraten und Beschleunigungen. In Abb. 14.11 entspricht dieser Moment dem Zeitpunkt von 1,85 s. Der zugehörige Moment der Animation des Manövers ist in Abb. 14.12 abgebildet.

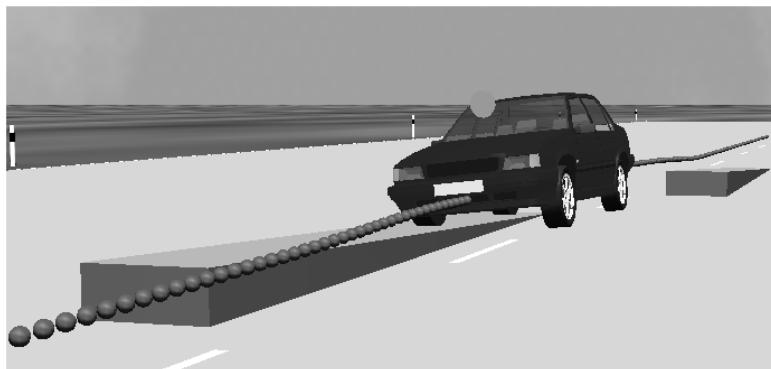


Abb. 14.12: Fahrt über eine Wechselböschung mit 60 km/h ($t = 1,85$ s)

Hier ist zu erkennen (der Auslösealgorithmus wurde in das Simulationsmodell eingebunden und sein Zustand wird in der Animation durch eine farbige Kugel über der Motorhaube dargestellt), dass zu diesem Zeitpunkt der Algorithmus den Plausibilitätszustand ausgibt. Es kommt aber nicht zu einer Auslösung, da die Wankrate mit $122^\circ/\text{s}$ bei dem zu diesem Zeitpunkt vorliegenden gegenläufigen Wankwinkel von 6° nicht für eine kippgefährdende Schwerpunktterhöhung ausreicht. Im Rahmen einer Gesamtapplikation über alle Use- und Misuse-Fälle wäre zu überprüfen, inwieweit die Plausibilitätsschwellen erhöht werden können, ohne dass sich eine solche Parameteranpassung negativ auf die Erreichung der Use-Anforderungen auswirkt. Die folgenden drei Abschnitte analysieren diese Use-Anforderungen genauer.

Überfahren einer Rampe

Wie bereits in Abschnitt 14.2.1 beschrieben, sind zur Algorithmus-Applikation der Use-Versuche verschiedene Schwellen einzustellen. Das heißt, es sind jeweils Versuche unterhalb der Auslöseschwelle (Wankwinkel 30° bis 40°), knapp unterhalb der statischen Kippgrenze (Wankwinkel 50° bis 60°) und über der statischen Kippgrenze ($> 60^\circ$) durchzuführen. Um diese Schwellwerte unter feldrelevanten und reproduzierbaren Bedingungen im Versuch tatsächlich zu erreichen, sind die Parameter *Rampenhöhe* und *Fahrzeuggeschwindigkeit* für jedes Fahrzeugmodell individuell zu definieren. Hierbei kann die Simulation die Versuchsplanung sehr effizient unterstützen.

Die Simulationen können aufwendige Vorversuche bzw. risikoreiche Fehlversuche vermeiden, indem im Vorfeld die in Abb. 14.13 dargestellte Matrix berechnet wird.

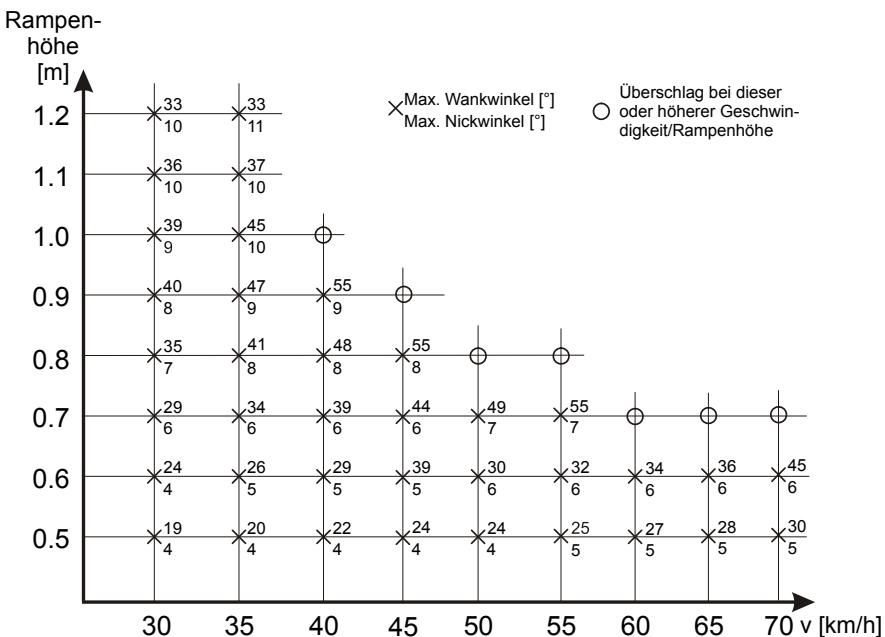


Abb. 14.13: Maximale Wank- und Nickwinkel, abhängig von Rampenhöhe und Geschwindigkeit des durchschnittlichen MittelklasseFahrzeugmodells (Rampenlänge konstant 5 m)

Der Matrix liegen die Erkenntnisse aus der Unfallforschung zugrunde, dass Überschlagunfälle typischerweise nicht bei Geschwindigkeiten oberhalb von 70 km/h auftreten und, dass rampenähnliche Hindernisse nicht höher als 1,2 m sind ((Ajluni 1989) und (Harkey 1999)).

Aus den hier durchgeführten Untersuchungen zu den Rampenversuchen ergibt sich eine steigende Überschlagneigung der Fahrzeuge mit sinkendem Gewicht, sinkender Trägheit sowie Verringerung der Spurbreite und des Radstandes. Für ein durchschnittliches Mittelklasse-Fahrzeugmodell lassen sich in Anlehnung an Abb. 14.13 zum Beispiel mit einer Rampenlänge von fünf Metern und einer Rampenhöhe von 80 cm bei Geschwindigkeiten von 30, 40 und 60 km/h die zur Applikation benötigten Daten erzeugen. Die entsprechenden Wankwinkelverläufe dieser Manöver sind in Abb. 14.14 dargestellt. Abhängig von den Anforderungen des Insassenschutzes, kann so die Auslöseschwelle für das Überschlagmanöver auf der Rampe appliziert werden. Für die Anforderungen des Insassenschutzes beim Überschlag gilt prinzipiell, dass eine möglichst frühzeitige Auslösung der Rückhaltesysteme wünschenswert ist. Jedoch darf diese frühe Auslösung nicht zu Lasten der Misuse-Robustheit gehen. Daher muss von

Seiten des Insassenschutzes auch ein spätestmöglicher Auslösezeitpunkt vorgegeben werden. Dieser lässt sich für den Windowbag mithilfe der Insassensimulation bestimmen. Für die Auslösung des Gurtstrammers gibt es dagegen keinen zu späten Auslösezeitpunkt im Sinne einer OOP-Problematik (Out of Position). Hier ergibt sich lediglich eine Verringerung der Schutzwirkung bei einer späteren Auslösung. Darüber hinaus muss die Insassensimulation entscheiden, ob eine bestimmte Unfallsituation überhaupt die Aktivierung von irreversiblen Rückhaltesystemen rechtfertigt. Dies ist nur sinnvoll, wenn ein entsprechendes Schutzpotenzial zu erwarten ist, beziehungsweise wenn es auch tatsächlich zu einem Überschlag kommt.

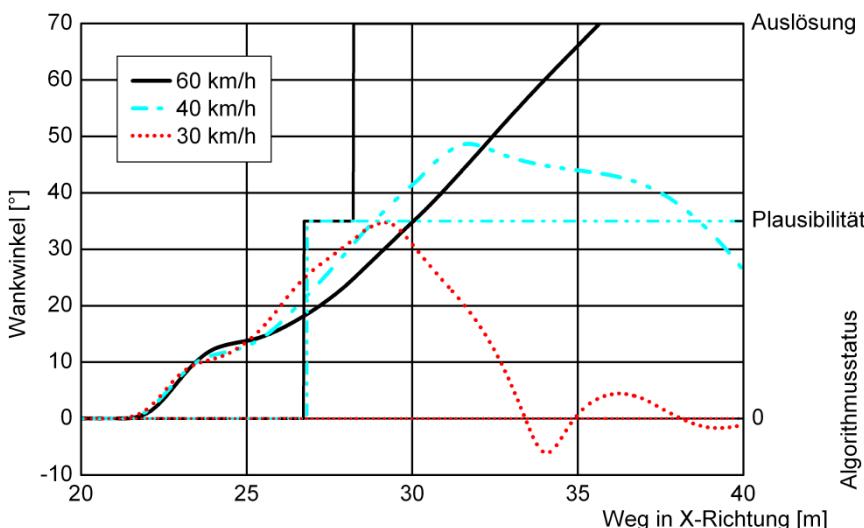


Abb. 14.14: Wankwinkel und Auslösestatus bei Rampenüberfahrten mit verschiedenen Geschwindigkeiten bei 80 cm Rampenhöhe und einer Rampenlänge von 5m

Die in Abb. 14.15 dargestellten Screen Shots von einer Fahrdynamiksimulation (links) und der dazu gehörenden MADYMO-Insassensimulation (rechts) verdeutlichen am Beispiel eines Rampenmanövers den Einsatz der Simulation. Bei diesem mit einer Geschwindigkeit von 80 km/h über eine 35 cm hohe Rampe gefahrenen Manöver kommt es nicht zu einer Auslösung durch den Erkennungsalgorithmus. Die Richtigkeit dieses Auslöseverhaltens bestätigt der hier bei der Insassensimulation eingesetzte ungegurtete 50 % male Hybrid III Dummy. Sämtliche Belastungskennwerte dieser Simulation liegen deutlich unterhalb der gesetzlichen Grenzwerte,

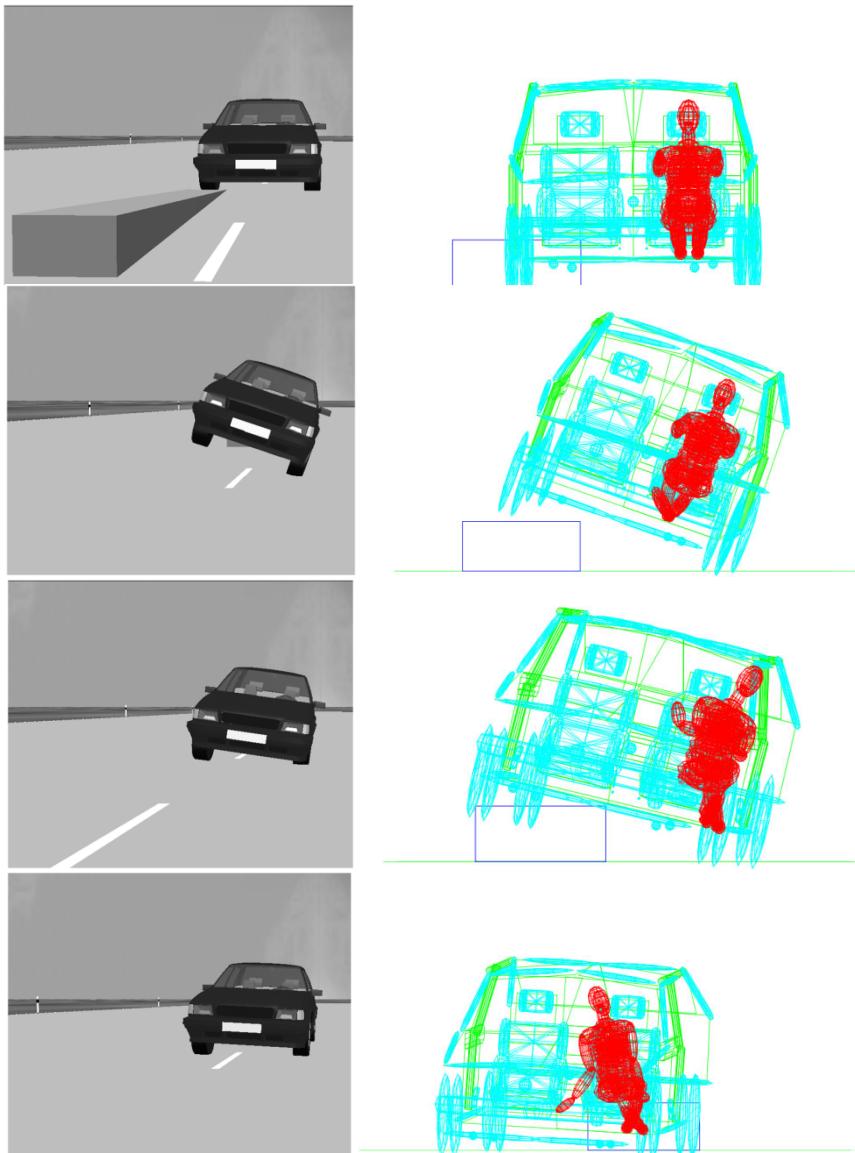


Abb. 14.15: Rampenmanöver mit 35 cm Rampenhöhe und 80 km/h

sodass hier keine Einleitung von Schutzmaßnahmen erforderlich ist. Darüber hinaus zeigt sich während der Fahrt über die Rampe kaum eine Relativbewegung zwischen Dummykopf und Fahrzeuginnenraum, sodass das OOP-Risiko bei Rampenmanövern eher als gering bezeichnet werden kann. Es fällt lediglich die starke Verlagerung des Insassen am Ende der

Simulation auf. Doch wäre bei einer realen Person, aufgrund der aktiv ausgeübten Haltekräfte des Insassens, nicht mit einer so starken Verlagerung zu rechnen. Bei der Durchführung dieser Simulation mit Gurt wird die Situation weiter entschärft. Auch hier konnte, wie bei den Misuse-Manövern auf der Wechselböschung (vergleiche Abschnitt Misuse-Versuche), kein Schutzbedarf für die Insassen festgestellt werden.

Weitere Insassensimulationen haben gezeigt, dass eine kritische Verlagerung des Dummykopfes beim Rampenmanöver erst bei Erreichen eines Fahrzeugwankwinkels von etwa 60° eintritt. Dies bedeutet, dass für die Berechnung einer robusten Auslöseentscheidung, im Vergleich zum Bordsteinanprall oder Sandbett (vergleiche Abschnitt Sandbett) relativ viel Zeit zur Verfügung steht. Eine Auslösung bei einem Wankwinkel von 25° , wie sie die in Abb. 14.14 dargestellte Applikation liefert, eliminiert daher das OOP-Risiko weitestgehend und ermöglicht zusätzlich eine frühe Anbindung der Insassen an die Fahrzeuggbewegung durch die Gurtstrammer.

Überfahren einer Böschung

Analog der im vorhergehenden Abschnitt beschriebenen Vorgehensweise zur Definition geeigneter Versuchspараметer wird auch für die Böschung eine Matrix der sich in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit ergebenden maximalen Wank- und Nickwinkel erstellt. Allerdings kommt bei den Böschungsmanövern noch der Anfahrwinkel α zur Böschungskante als zusätzlicher Variationsparameter hinzu. Um herauszufinden, welcher Anfahrwinkel zu einem möglichst großen Wankwinkelauflaufbau führt, wurden an einer Böschung mit einem Neigungswinkel β von 35° bei einer Fahrgeschwindigkeit von 40 km/h Simulationen mit Anfahrwinkeln α von 5° bis $32,5^\circ$ durchgeführt. Die Ergebnisse dieser Simulationen sind in Tabelle 14.2 zusammengefasst. Die angegebenen maximalen Wankwinkel wurden alle innerhalb einer Strecke von acht Metern gemessen (Länge des geneigten Böschungsteils in Querrichtung). Die größten Wankwinkel stellen sich danach bei Anfahrwinkeln zwischen 20° und 30° ein.

Tabelle 14.2: Wank- und Nickwinkel in Abhängigkeit vom Anfahrwinkel α bei einer Böschungsüberfahrt ($v = 40 \text{ km/h}$, $\beta = 35^\circ$, $\mu = 0,9$)

Anfahrwinkel α [°]	5,0	7,5	10,0	12,5	15,0	17,5	20,0	22,5	25,0	27,5	30,0	32,5
Nickwinkel [°]	4	5	7	10	12	13,0	14	15	16	18	20	22
Wankwinkel [°]	38	39	39	40	45	50	55	63	64	62	60	57

Wie die Auswertungen verschiedener Unfallstatistiken (Mohamedshah und Council 2007) und (Otte und Krettek 2005) zeigen, kommen die Fahrzeuge bei Überschlagunfällen an Böschungen meistens mit Winkeln zwischen 5° und 25° von der Fahrbahn ab. Daher wird für die weiteren Untersuchungen unter Berücksichtigung dieser Feldrelevanz ein Anfahrwinkel von 20° ausgewählt. Ein weiterer Einflussparameter, der im realen Unfallgeschehen relevant ist, ist ein eventueller Lenkeingriff des Fahrers ((Ajluni 1989) und (Mohamedshah und Council 2007)). Normalerweise versucht der Fahrer, sobald er das Abkommen von der Fahrbahn bemerkt, wieder zurück auf die Straße zu lenken. Ein solcher Lenkeingriff führt, wenn er bei einem bereits auf der Böschung fahrenden Fahrzeug ausgeführt wird, zu einer Erhöhung der Überschlagneigung. Daher liegt den Simulationen zur Erstellung der in Abb. 14.16 dargestellten Matrix jeweils ein voller Lenkeinschlag entgegen der Böschung zugrunde. Dieser wird ausgeführt, wenn das vordere böschnungsabgewandte Rad auf die Böschungskante fährt.

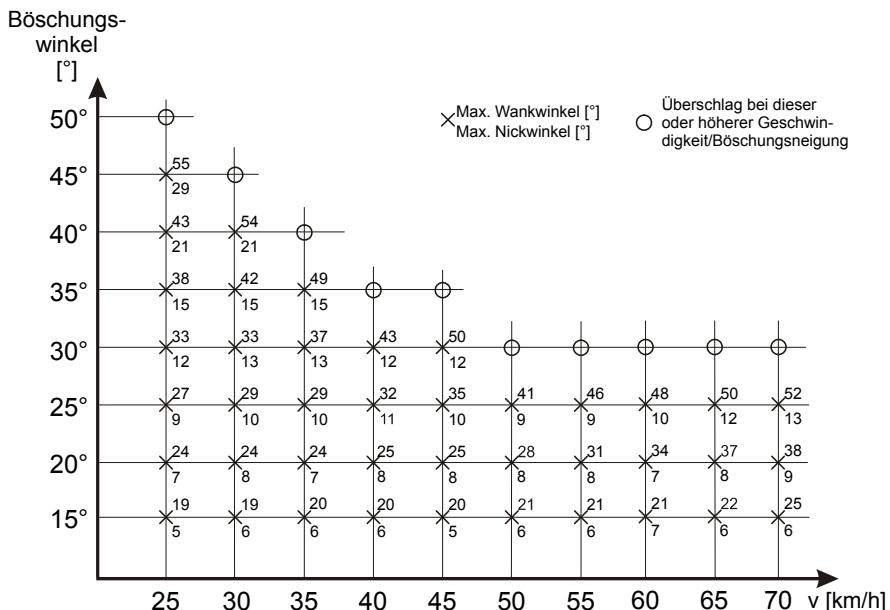


Abb. 14.16: Maximale Wank- und Nickwinkel abhängig vom Böschungswinkel und Geschwindigkeit des durchschnittlichen MittelklasseFahrzeugmodells (mit Lenkeingriff und konstantem Anfahrwinkel von 20°)

In Anlehnung an Abb. 14.16 lassen sich für das durchschnittliche Mittelklasse-Fahrzeugmodell die Parameter *Böschungsneigung* und *Fahr-*

zeuggeschwindigkeit geeignet auswählen. Die für die Applikation von Böschungsüberschlägen erforderlichen Daten, können zum Beispiel bei einer Böschungsneigung von 35° mit Geschwindigkeiten von 25, 38 und 43 km/h erzeugt werden. Hierbei sind eine Mindesthöhe von 3,3 m und eine Mindestlänge von 20 m erforderlich, da anderenfalls das Fahrzeug zu früh wieder auf die horizontale Ebene kommt und der gewünschte Wankwinkel nicht erreicht wird. Steht diese Höhe etwa aus versuchstechnischen Gründen nicht zur Verfügung, dann sollten Konfigurationen mit größeren Böschungswinkeln gewählt werden. Auch die Verwendung von geringeren Anfahrwinkeln erlaubt kleinere Böschungshöhen, wobei sich dann wiederum die erforderliche Länge der Böschung erhöht. In Abb. 14.17 sind die sich bei den zuvor genannten Parametern ergebenden Wankwinkelverläufe dargestellt. Abhängig von den Anforderungen des Insassenschutzes kann damit die Auslöseschwelle für das Überschlagmanöver auf der Böschung appliziert werden.

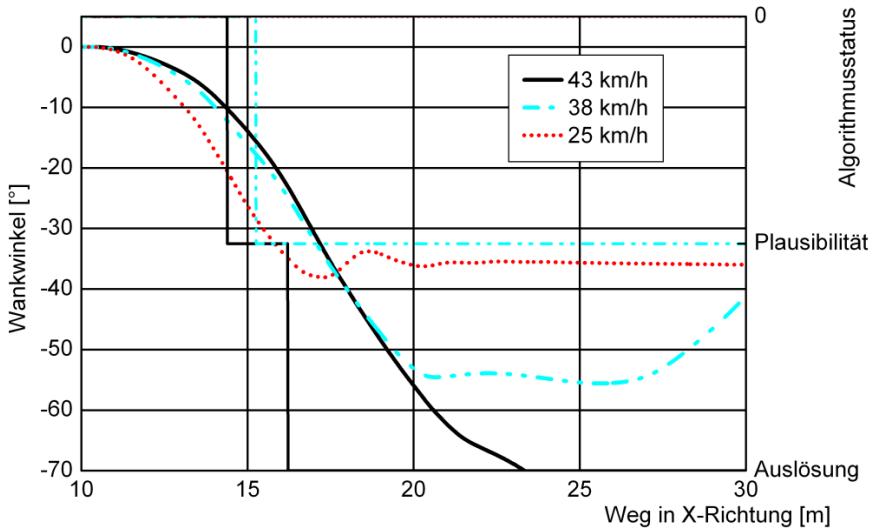


Abb. 14.17: Wankwinkel und Auslösestatus bei Böschungsüberfahrten mit verschiedenen Geschwindigkeiten bei 20° Anfahrwinkel und 35° Böschungswinkel

Wie bei der Applikation des Rampenmanövers (vgl. Abschnitt *Überfahren einer Rampe*) muss auch für das Böschungsmanöver der optimale Kompromiss zwischen rechtzeitiger Auslösung und Misuse-Robustheit eingestellt werden. Dafür ist mithilfe der Insassensimulationen der spätestmögliche Auslösezeitpunkt (vgl. Abschnitt *Überfahren einer Ram-*

pe), welcher die ungehinderte Entfaltung des Windowbags ermöglicht, zu ermitteln.

Die in Abb. 14.18 dargestellten Screen Shots von einer Fahrdynamiksimulation (links) und der dazu gehörenden MADYMO-Insassensimulation (rechts) verdeutlichen die typische Insassenkinematik eines Böschungsmanövers. Bei diesem, mit einem Anfahrwinkel von 15° und einer Geschwindigkeit von 50 km/h über eine um 55° geneigte Böschung gefahrenen Manöver kommt es bei einem Wankwinkel von 30° zu einer Auslösung.

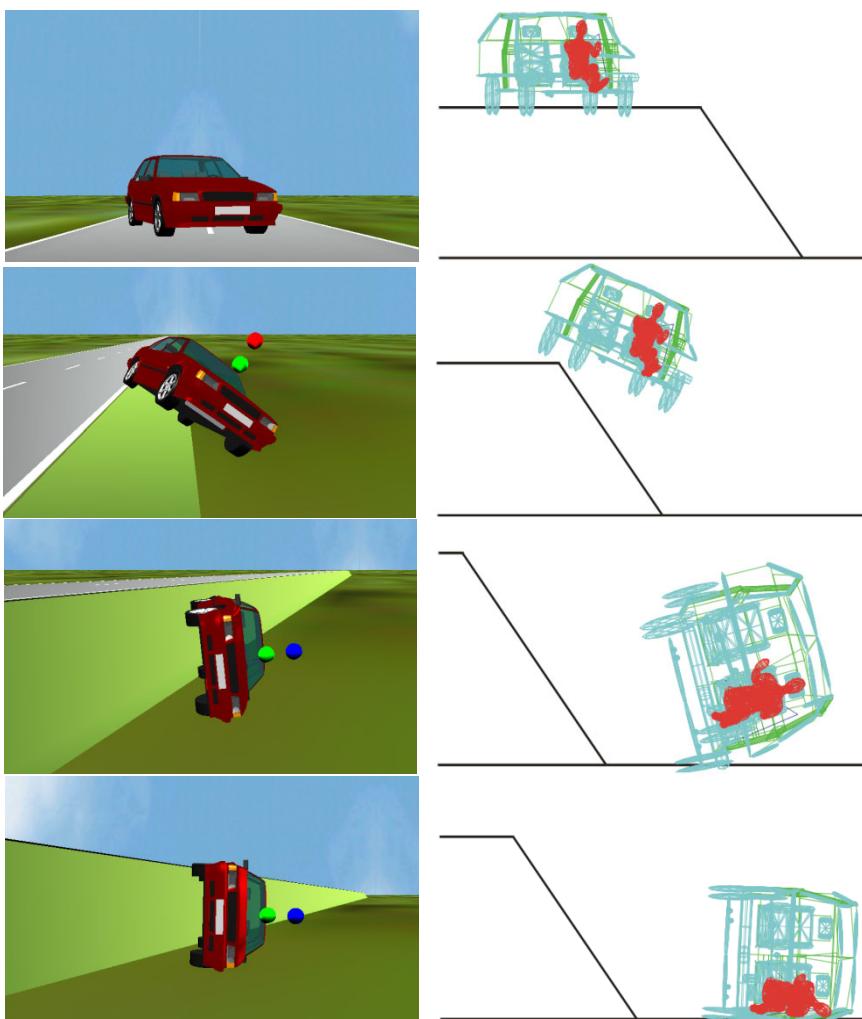


Abb. 14.18: Böschungsmanöver mit 2,2 m Böschungshöhe, 55° Böschungswinkel, 15° Anfahrwinkel und 50 km/h Fahrgeschwindigkeit

In Abb. 14.18 wird der Augenblick der Überschlagerkennung durch den Auslöse-Algorithmus von der oberen der beiden über dem Fahrzeug erscheinenden Kugeln visualisiert. Die untere Kugel signalisiert den Zeitpunkt der Erkennung der Plausibilitätsschwelle. Bei dem abgebildeten Manöver geschieht diese Erkennung bei einem Winkel von 25° . Die Rechtzeitigkeit dieses Auslöseverhaltens bestätigt der hier bei der Insassensimulation eingesetzte angegurtete 50 % male Hybrid III Dummy.

Zahlreiche Insassensimulationen haben gezeigt, dass während der Fahrt über die Böschung kaum eine Relativbewegung zwischen Dummykopf und Fahrzeuginnenraum stattfindet. Daher kann auch bei der Böschung das OOP-Risiko eher als gering bezeichnet werden. Wie bei der Rampe, kommt es erst zu stärkeren Relativbewegungen des Insassen, wenn es durch die Räder zu einem Wiederaufprall auf den Boden kommt, beziehungsweise wenn die Karosserie direkten Bodenkontakt ($\varphi > 90^\circ$) hat. Über alle untersuchten Böschungsmanöver konnte hier festgestellt werden, dass frühestens bei Erreichen eines Fahrzeugwankwinkels von etwa 35° eine OOP-relevante Situation auftreten kann. Dies bedeutet, dass für die Berechnung einer robusten Auslöseentscheidung, ähnlich wie beim Rampenüberschlag (vgl. Abschnitt *Überfahren einer Rampe*), relativ viel Zeit zur Verfügung steht. Ein Auslöseverhalten, wie es die in Abb. 14.17 dargestellte Applikation liefert, erfüllt bei einer guten Misuse-Robustheit somit die Voraussetzungen zur Vermeidung von OOP-Risiken und ermöglicht zusätzlich die frühe Anbindung der Insassen an die Fahrzeubewegung mithilfe der Gurtstrammer.

Sandbett

Die vorwiegend nur in Fahrzeugquerrichtung ablaufenden Überschlagszarien der *Trip-over*-Kategorie (vgl. Abb. 14.4) werden durch den Bordsteinanprall und durch das Sandbett repräsentiert. Die Definition von geeigneten Versuchsparametern für das Sandbettmanöver durch die Simulation ist allerdings mit Einschränkungen behaftet. Die empirischen Modellparameter des Rad-Boden-Kontaktes des Sandbettmanövers sind nicht ohne eine erneute Validierung, auf Basis von Versuchsdaten, auf andere Fahrzeuge übertragbar (vgl. Abschnitt 14.2.1). Das Modell hat allein für das im Rahmen eines Validierungsversuchs gewonnene Eingraververhalten Gültigkeit. Ändern sich die Räder oder die Beschaffenheit des Untergrundes, ist eine Anpassung der empirischen Versuchspараметer (vgl. Abb. 14.9) erforderlich. Daher sind die im Folgenden dargestellten Ergebnisse nicht direkt auf andere Mittelklassefahrzeuge zu übertragen. Dennoch gibt das Modell die Tendenzen und die Größenord-

nungen von Versuchsparametern für Mittelklassefahrzeuge als Anhaltspunkte wieder.

Tabelle 14.3: Maximal erreichter Wankwinkel abhängig von der Rutschgeschwindigkeit beim Eintritt in das Sandbett

Laterale Rutschgeschwindigkeit [km/h]	17	20	21	22	23	24	25	27	30	33
Wankwinkel [°]	12	19	25	33	46	52	100	180	180	180

Beim Sandbettrollover sind, wie bei der Rampe und der Böschung, jeweils Versuche unterhalb der Auslöseschwelle (Wankwinkel 30° bis 40°), knapp unterhalb der statischen Kippgrenze (Wankwinkel 50 bis 60°) und über der statischen Kippgrenze (> 60°) durchzuführen. Hierzu wurden mit dem durchschnittlichen Mittelklassefahrzeug Simulationen mit verschiedenen lateralen Rutschgeschwindigkeiten durchgeführt. Die Ergebnisse dieser Simulationen sind in Tabelle 14.3 aufgeführt. In Anlehnung an diese Ergebnisse können die relevanten Auslöseschwellen beispielsweise bei Geschwindigkeiten von 22, 24 und 33 km/h erreicht werden. In Abb. 14.19 sind die sich bei den zuvor genannten Parametern ergebenden Wankwinkelverläufe dargestellt. Abhängig von den Anforderungen des Insassenschutzes kann damit die Auslöseschwelle für das Überschlagmanöver im Sandbett appliziert werden.

Wie bei der Applikation des Rampen- und des Böschungsmanövers, muss auch für das Sandbettmanöver der optimale Kompromiss zwischen rechtzeitiger Auslösung und Misuse-Robustheit eingestellt werden. Dafür ist mithilfe der Insassensimulationen der letztmögliche Auslösezeitpunkt, welcher die ungehinderte Entfaltung des Windowbags ermöglicht, zu ermitteln. Die in Abb. 14.20 dargestellten Screen Shots einer Fahrdynamiksimulation (links) und der dazu gehörenden MADYMO-Insassensimulation (rechts) verdeutlichen die typische Insassenkinematik eines Sandbettmanövers. Bei diesem, mit einer lateralen Rutschgeschwindigkeit von 33 km/h simulierten Manöver, kommt es bei einem Wankwinkel von 11° zu einer Auslösung. In Abb. 14.20 wird auch der Augenblick der Überschlagerkennung durch den Auslöse-Algorithmus von der oberen der beiden über dem Fahrzeug erscheinenden Kugeln visualisiert. Die untere Kugel signalisiert den Zeitpunkt der Erkennung der Plausibilitätsschwelle. Bei dem abgebildeten Manöver geschieht diese Erkennung bereits bei einem Wankwinkel von 6°. Die Rechtzeitigkeit dieses Auslöseverhaltens bestätigt der hier bei der Insassensimulation eingesetzte angegurtete 50 % male Hybrid III Dummy. Zahlreiche Insassensimulationen haben gezeigt,

dass während des Rutschens des Fahrzeugs durch das Sandbett bereits bei geringen Wankwinkeln Relativbewegungen zwischen Dummykopf und Fahrzeuginnenraum auftreten. Diese werden verursacht durch eine kontinuierlich während des Eingravorgangs wirkende laterale Verzögerung. Diese laterale Verzögerung liegt typischerweise bei Werten zwischen einem und 2,5 g.

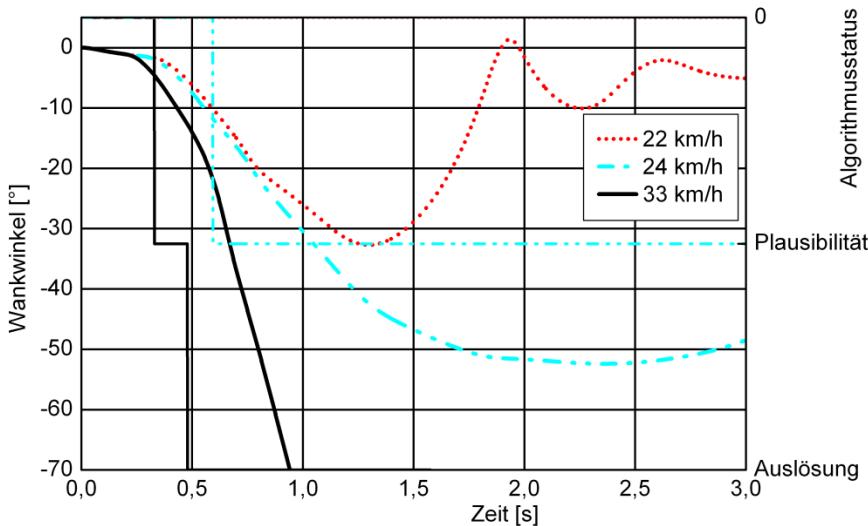


Abb. 14.19: Wankwinkel und Auslösestatus bei Sandbettmanövern mit verschiedenen Geschwindigkeiten

Daher muss bei den Sandbettüberschlägen das OOP-Risiko eher als hoch eingestuft werden. Im Gegensatz zu Rampen und Böschungsmanövern kommt es beim Sandbett bereits früh zum Kontakt zwischen Dummykopf und Seitenscheibe. Über alle hier untersuchten Sandbettmanöver konnte festgestellt werden, dass bereits bei Erreichen eines Fahrzeugwankwinkels von etwa 12° eine OOP relevante Situation auftreten kann. Dies bedeutet, dass für die Berechnung einer robusten Auslöseentscheidung relativ wenig Zeit zur Verfügung steht. Das in Abb. 14.20 dargestellte Auslöseverhalten mit einer Auslöseentscheidung bei einem Wankwinkel von 11° erfüllt somit die Voraussetzungen zur Vermeidung von OOP-Risiken bei gleichzeitig guter Misuse-Robustheit.

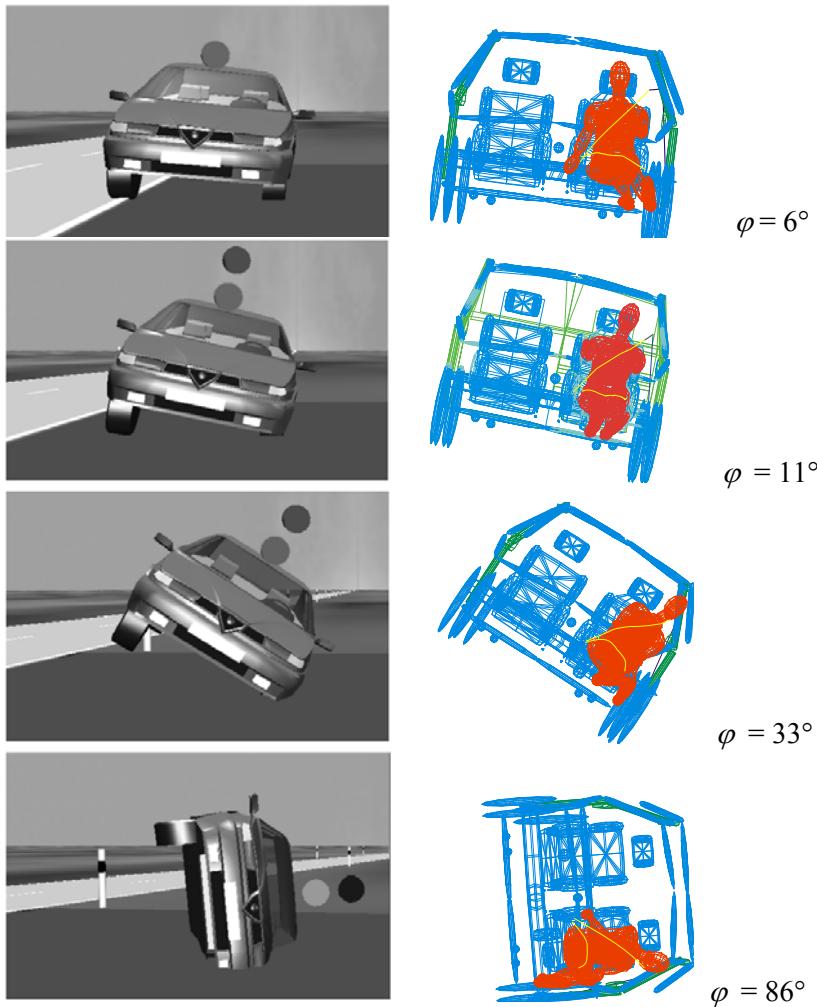


Abb. 14.20: Sandbettmanöver mit 33 km/h lateraler Rutschgeschwindigkeit

14.3 Regelung der Wankdynamik durch aktive Stabilisatoren

Neben den Fahrwerkskomponenten im engeren Sinne, wie Räder, Reifen, Radbremsen, Radträger, Radführung, Lenksystem, Federung und Dämpfung und (passiven) Stabilisatoren sind mittlerweile bei vielen Fahrzeugen auch aktive Komponenten Teil des Fahrwerks. Diese aktiven Komponenten werden eingesetzt, um z.B. Fahrwerkregelsysteme zu realisieren. In

diesem Abschnitt wird das in Kapitel 10 besprochene Modellierungsverfahren eines Einspurmodells mit zusätzlicher linearer Wankdynamik genutzt, um ein Fahrwerkregelsystem mit aktiven Stabilisatoren nachzubilden.

Abb. 14.21 zeigt beispielhaft eine Doppelquerlenkerachse mit integriertem Stabilisator. Eine ausführliche Darstellung, einschließlich einer Diskussion möglicher Realisierungen enthält (Ötgen 2005).

14.3.1 Passive Stabilisatoren

Stabilisatoren werden bei Achsen mit Einzelradaufhängung verwendet, um einerseits die Querneigung des Aufbaus bei der Kurvenfahrt zu reduzieren und andererseits die Tendenz zum Unter- oder Übersteuern (Eigenlenkverhalten) zu beeinflussen. Wie in Kapitel 9 bereits erläutert, hat der Stabilisator die Funktion eines Torsionsstabs, der am Aufbau drehbar gelagert ist. Durch unterschiedliche Einfederungen der Radaufhängungen einer Achse entsteht eine Torsion des Stabes, verbunden mit einem Drehmoment, welches über einen Hebelmechanismus Kräfte an den Radaufhängungen einprägt. Dies führt insgesamt zu einer Verhärtung der Aufbaufederung und somit zu einer Verringerung des Wankwinkels. Nachteilig wirkt sich jedoch die Kopplung beider Radaufhängungen einer Achse bei einseitigen Fahrbahnanregungen auf den Fahrkomfort aus.

Die *Summe der Stabilisatorsteifigkeiten* der beiden Achsen entscheidet über die bewirkte *Wankreduzierung*. Über die *Verteilung der Steifigkeiten auf die Vorder- und Hinterachse* lassen sich die Radvertikalkraftdifferenzen an der jeweiligen Achse und damit das *Eigenlenkverhalten* des Fahrzeugs beeinflussen.

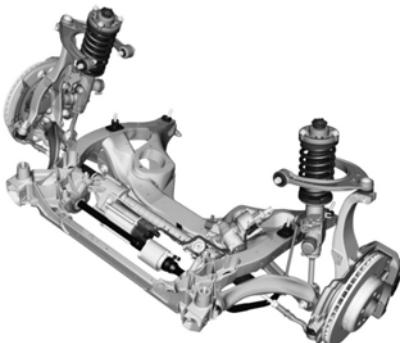


Abb. 14.21: Realisierung eines aktiven Stabilisators (Mit freundlicher Genehmigung der BMW Group 2009)

14.3.2 Steifigkeitsverteilung zwischen Vorder- und Hinterachse

Im Folgenden werden Simulationsergebnisse von (Öttgen 2005) benutzt, die mit einem linearen Wankmodell gewonnen wurden. Das Wankmodell wird durch die in Kapitel 10 abgeleitete Gleichung beschrieben:

$$\begin{aligned} & \theta_{xx,A} \ddot{\varphi} + 2(s_{D,v}^2 d_v + s_{D,h}^2 d_h) \dot{\varphi} \\ & + 2 \left(s_{F,v}^2 c_{F,v} + \frac{c_{St,v} l_{St,v} s_{St,v}}{2b_v^2} + s_{F,h}^2 c_{F,h} + \frac{c_{St,h} l_{St,h} s_{St,h}}{2b_h^2} \right) \varphi \\ & = m_A a_y (h_s - h_w). \end{aligned} \quad (14.2)$$

Um den Einfluss der Steifigkeitsverteilung des Fahrwerks sichtbar zu machen und die Identifikation der physikalischen Parameter zu erleichtern, wird zusätzlich der Parameter λ_{FD} eingeführt, der die Verteilung der Federsteifigkeiten und Dämpfungsmaße zwischen Vorder- und Hinterachse näherungsweise beschreibt. Damit werden einfache Zusammenhänge zwischen vorderem und hinterem Stabilisator erreicht. Es gilt:

$$c_{F,v} = \lambda_{FD} c_F, \quad c_{F,h} = (1 - \lambda_{FD}) c_F \quad (14.3)$$

für die Winkelsteifigkeiten und

$$d_v = \lambda_{FD} d, \quad d_h = (1 - \lambda_{FD}) d, \quad (14.4)$$

mit $\lambda_{FD} \in [0 \ 1]$ für die Wankdämpfungen. Damit erhält man durch Einsetzen der Gln. (14.13) und (14.14) in Gl. (14.12) zunächst noch ohne Berücksichtigung der Stabilisatoren die Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} & \theta_{xx,A} \ddot{\varphi} + 2 \left(s_{D,v}^2 \lambda_{FD} + s_{D,h}^2 (1 - \lambda_{FD}) \right) d \dot{\varphi} + 2 \left(s_{F,v}^2 \lambda_{FD} + \right. \\ & \left. s_{F,h}^2 (1 - \lambda_{FD}) \right) c_F \varphi = m_A a_y (h_s - h_w). \end{aligned} \quad (14.5)$$

Für ein typisches Mittelklassefahrzeug ermittelt Ottgen 2005 beispielsweise aus Referenzmessungen mit Hilfe eines Identifikationsverfahrens die Werte:

$$\lambda_{FD} = 0,69, \quad c_F = 36390 \frac{N}{m}, \quad d = 5401 \frac{Ns}{m}. \quad (14.6)$$

Entsprechend wie bei den Parametern der Radaufhängung wird auch die Aufteilung der Stabilisatorsteifigkeiten zwischen Vorder- und Hinterachse durch einen skalaren Parameter $\lambda \in [-1 \ 1]$ beschrieben:

$$c_{St,v} = \frac{1}{2}(1 + \lambda)c_{St}, c_{St,h} = \frac{1}{2}(1 - \lambda)c_{St}. \quad (14.7)$$

Für das gegebene Beispieldfahrzeug ergab sich hier beispielhaft ein Wert für die Gesamtstabilisatorsteifigkeit von $c_{St} = 2882 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$.

Um die Effekte unterschiedlicher Steifigkeitsverteilungen zwischen Vorder- und Hinterachse zu verdeutlichen, sind in Abb. 14.22 jeweils die Trajektorien eines Fahrzeugs bei der Einfahrt in einen ortsfesten Kreis in der x_E, y_E -Ebene mit identischen Lenkbewegungen, Fahrzeuggeschwindigkeit ($v = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$) und Haftreibungsbeiwert ($\mu = 1$) dargestellt. Die verwendeten Fahrzeugkonfigurationen unterscheiden sich jedoch in der Verteilung der Gesamtsteifigkeit der Stabilisatoren an der Vorder- und Hinterachse durch den Verteilungsparameter $\lambda \in [-1, 1]$. Für $\lambda = -1$ wird die gesamte Steifigkeit an der Hinterachse und mit $\lambda = 1$ an der Vorderachse angenommen. Die Trajektorien des Fahrzeugschwerpunktes in Abb. 14.22 zeigen, dass ein Fahrzeug bei einer Steifigkeitsverteilung zur Vorderachse ($\lambda = 1$) ein stärker ausgeprägtes untersteuerndes Fahrverhalten aufweist, als bei einer Verteilung in Richtung Hinterachse ($\lambda = -1$). In der Konsequenz führt dies zu einem größeren Kurvenradius.

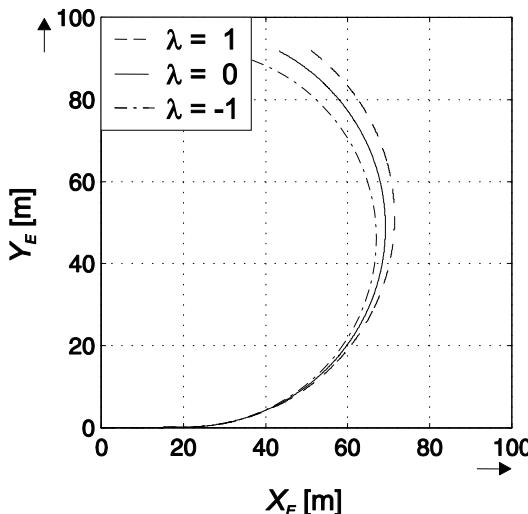


Abb. 14.22: Trajektorien mit unterschiedlichen Verteilungen der Stabilisatorsteifigkeit

In Abb. 14.23 sind die Wankwinkel φ und die Radlenkwinkel δ_R aus statischen Kreisfahrten aufgetragen, die sich ergeben bzw. eingestellt werden

müssen, um einen Kreis mit Radius $R = 50 \text{ m}$ mit einer identischen Fahrzeulgängsgeschwindigkeit zu durchfahren. In Abb. 14.24 erkennt man, dass die Verteilung λ der Stabilisatorsteifigkeiten kaum Einfluss auf den Wankwinkel hat. Die Zunahme der Gesamtsteifigkeit c_{St} bewirkt jedoch eine deutliche Reduzierung des Wankwinkels.

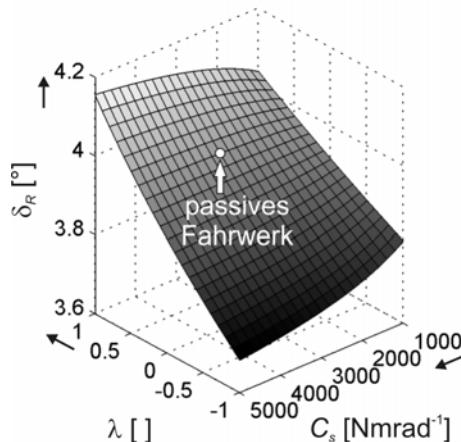


Abb. 14.23: Radlenkwinkel bei stationären Kreisfahrten

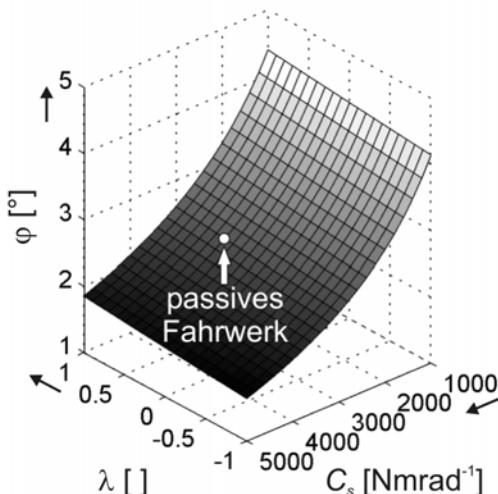


Abb. 14.24: Wankwinkel bei stationären Kreisfahrten

Abb. 14.23 zeigt bei einer stärkeren Verteilung der Steifigkeit zur Vorderachse hin einen steigenden Radlenkbedarf, um denselben Kreis zu durch-

fahren. Hier bewirkt der Gesamtsteifigkeitswert lediglich, dass bei größeren Werten der Einfluss des Parameters λ größer wird.

Bei passiven Fahrwerken wird üblicherweise eine untersteuernde Fahrzeugabstimmung angestrebt, um dem Fahrer in kritischen Situationen die Möglichkeit zu geben, das Fahrzeug durch eine für ihn naheliegende Aktion (stärker einlenken) zu kontrollieren. Andererseits verliert ein stark untersteuerndes Fahrzeug an Agilität und wird als weniger wendig wahrgenommen. Aus diesen widersprechenden Zielen ergibt sich der Wunsch nach einem tendenziell übersteuernden Fahrzeug im *normalen* Fahrbetrieb und einem untersteuernden Fahrzeug in kritischen Fahrsituationen. Der in diesem Abschnitt besprochene Ansatz zur Auflösung dieses Zielkonfliktes ist der Einsatz aktiver Stabilisatoren, um situationsabhängig geeignete Momente an der Vorder- und Hinterachse einzubringen. Auf diese Weise ist, anders als bei einem Fahrzeug mit passivem Fahrwerk, fast der gesamte in Abb. 14.24 dargestellte Arbeitsbereich nutzbar. Hinzu kommt, dass hier eine Reduzierung der Wankbewegungen und das jeweils gewünschte Eigenlenkverhalten nahezu unabhängig voneinander und von der jeweiligen Fahrsituation abhängig eingestellt werden können.

14.3.3 Regelung der Wankdynamik durch aktive Stabilisatoren

Als Stellglieder für die Wankstabilisierung dienen aktive Stabilisatoren, s. Abb. 14.21. Dazu werden die Torsionsstäbe der passiven Stabilisatoren ersetzt durch elektrische oder hydraulische Aktuatoren, welche aktiv ein Drehmoment $M_{St,v}$ an der Vorder- und $M_{St,h}$ an der Hinterachse einprägen, s. Kapitel 9. Die eingeprägten Drehmomente stützen sich über die Pendelstütze am Radträger ab und leiten durch die Reaktionskräfte ein Drehmoment um die Fahrzeuglängsachse in den Aufbau ein. Auf diese Weise ist eine Wankstabilisierung realisierbar und durch Aufteilung der eingeprägten Momente auf die Vorder- und die Hinterachse das Eigenlenkverhalten des Fahrzeugs beeinflussbar.

14.3.4 Reglerentwurf

Der Reglerentwurf erfolgt bei (Öttgen 2005) anhand des reduzierten Fahrzeugmodells im kontinuierlichen Zeitbereich, da auf diese Weise Standardauslegungsverfahren für kontinuierliche Systeme verwendet werden können. Dabei wird eine Regelung vorgeschlagen, die einerseits durch das Gesamtstabilisatormoment M_{St} die Wankdynamik, aber auch durch eine Verteilung der Stabilisatormomente an der Vorder- und Hinterachse

$M_{St,v}$ und $M_{St,h}$ die Eigenlenkdynamik aktiv beeinflussen. Der von (Öttgen 2005) verwendete Regelkreis für die Regelung der Wankdynamik ist in Abb. 14.25 dargestellt. Der Wankwinkel ist dabei durch entsprechende Schätzverfahren mit Hilfe zum Beispiel eines Winkelgeschwindigkeitssensors zu ermitteln, wie (Lich und Breitmaier 2003) bei der Überrollsensierung zeigen.

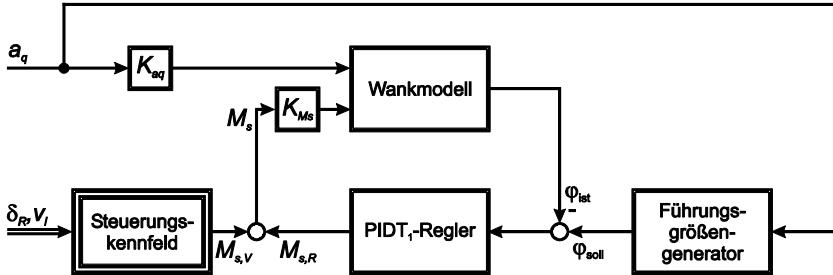


Abb. 14.25: Konzept zur Regelung des Wankwinkels

Die Regelgröße ist der Wankwinkel φ_{ist} und die Stellgröße das gesamte Stabilisatormoment M_{St} . Die messtechnisch erfassbare Querbeschleunigung a_y stellt aus regelungstechnischer Sicht eine Störgröße dar. Darüber hinaus sind noch die Führungsgröße φ_{soll} und das Vorsteuerungsmoment $M_{S,V}$ in Abhängigkeit des Radlenkwinkels δ_R und der Fahrzeuggängeschwindigkeit v_l berücksichtigt, deren Bestimmung später behandelt wird. Die Beschreibung der Wankdynamik des reduzierten Modells ändert sich mit dem Gesamtstabilisatormoment M_s und der Verteilung $\lambda \in [-1 1]$ wie folgt:

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{d_v s_{d,v}^2 + d_h s_{d,h}^2}{2\theta_{xx,A}} \right) \dot{\varphi} + \left(\frac{c_v s_{f,v}^2 + c_h s_{f,h}^2}{2\theta_{xx,A}} \right) \varphi = K_{a_y} a_y + K_{M_s} M_{st}, \quad (14.8)$$

mit der bezogenen Zentrifugalkraftanregung

$$K_{a_y} a_y = \frac{m(h_S - h_W)}{\theta_{xx,A}} a_y \quad (14.9)$$

und dem aktiven bezogenen Wankmoment

$$K_{M_s} M_{st} = \left(\frac{\frac{1}{2}(1+\lambda)s_{f,v}}{2a_v b_v \theta_{xx,A}} + \frac{\frac{1}{2}(1-\lambda)s_{f,h}}{2a_h b_h \theta_{xx,A}} \right) M_{st}. \quad (14.10)$$

Die Übertragungsfunktion des linearen Wankmodells aus Gl. (14.8) als Regelstrecke im Bildbereich lautet:

$$G_s(s) = \frac{1}{\theta_{xx,A}s^2 + \frac{d_v s_{d,v}^2 + d_h s_{d,h}^2}{2}s + \frac{c_v s_{f,v}^2 + c_h s_{f,h}^2}{2}}. \quad (14.11)$$

Nach der Übertragungsfunktion aus Gl. (14.11) entspricht die Strecke einem PT₂-Glied. Eigenkreisfrequenz und Dämpfung der Regelstrecke ergeben sich zu:

$$\omega_0 = 6,318 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad D = 0,47. \quad (14.12)$$

Der Frequenzgang des linearen Wankmodells nach Gl. (14.11) ist in Abb. 14.26 dargestellt. Für die Auswahl der Reglerstruktur sind die Eigenschaften Stabilität und stationäre Genauigkeit des Regelkreises entscheidend. Hinzu kommt das Bestreben, den Regelkreis möglichst schnell zu machen und eine hohe Dämpfung zu erreichen. Diese Anforderungen stehen allerdings im Gegensatz zueinander, weshalb ein guter Kompromiss gefunden werden muss. Es bietet sich dafür ein PID-Regler an.

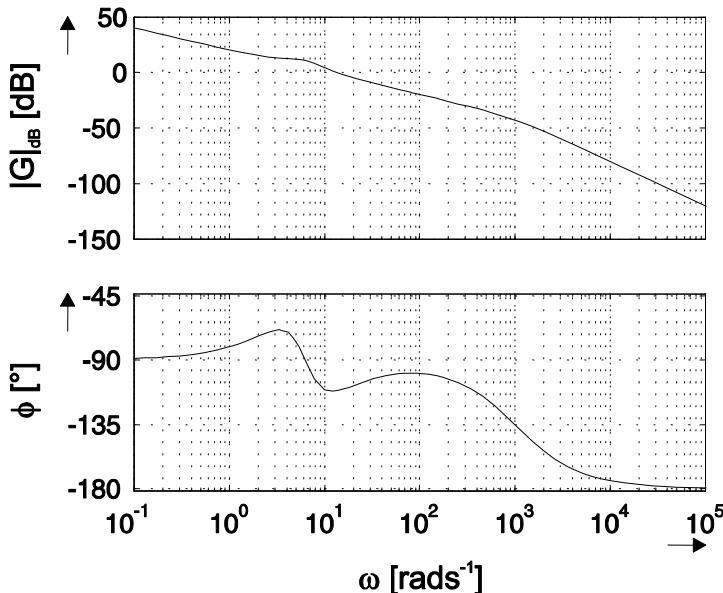


Abb. 14.26: Frequenzgang (Bode-Diagramm) der Regelstrecke

Im Hinblick auf die Realisierbarkeit wird für die Regelung der Wankdynamik ein PIDT₁-Regler – auch als realer PID-Regler bekannt – ausgewählt, dessen Übertragungsfunktion wie folgt lautet (Unbehauen 1997a):

$$G_R(s) = K_R \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D \frac{s}{1 + T_1 s} \right). \quad (14.13)$$

Bei der Reglerauslegung wird das Frequenzkennlinienverfahren angewendet (Ötgen und Bertram 2002a), bei dem ein Rückschluss von dem Verhalten des offenen Systems auf das geschlossene System möglich ist (Lunze 2001). Neben Stabilitätsverhalten kann auch eine qualitative Aussage über das Einschwingverhalten, das heißt Dämpfung und Schnelligkeit, getroffen werden. Der Frequenzgang des offenen Systems hat folgende Form:

$$G_0(s) = K_{M_s} G_s(s) G_R(s), \quad (14.14)$$

mit

$$K_{M_s} = \frac{\frac{1}{2}(\lambda + 1)s_{f,v}}{2a_v b_v} + \frac{\frac{1}{2}(1 - \lambda)s_{f,h}}{2a_h b_h}. \quad (14.15)$$

Für die Stabilität des geschlossenen Regelkreises bei Gegenkopplung ist es notwendig, dass der Phasengang bei der Durchtrittsfrequenz ω_T des Amplitudenganges durch die 0dB-Linie nicht unterhalb der 180°-Linie liegt. Die Durchtrittsfrequenz ist darüber hinaus ein Maß für die Schnelligkeit des Systems. In Gl. (14.16) sind die Reglerverstärkung und Zeitkonstanten zusammengestellt, wobei eine Gesamtverstärkung des offenen Regelkreises von $K_O = 10$ gewählt wird:

$$K_R = 28155, T_I = 0,306s, T_D = 0,072s, T_1 = 0,01s. \quad (14.16)$$

Der Frequenzgang des offenen Regelkreises aus Gl. (14.14) ist in Abb. 14.27 abgebildet. Dort ist abzulesen, dass das System im gesamten Arbeitsbereich stabil ist, da der Phasengang nicht unterhalb der 180°-Linie verläuft. Das System besitzt eine Phasenreserve von etwa $\phi_R \approx 68^\circ$, was auf eine hohe Dämpfung hinweist. Die Durchtrittsfrequenz von circa $\omega_T \approx 13,5 \text{ rad}^{-1}$ deutet auf eine kurze Einstellzeit hin.

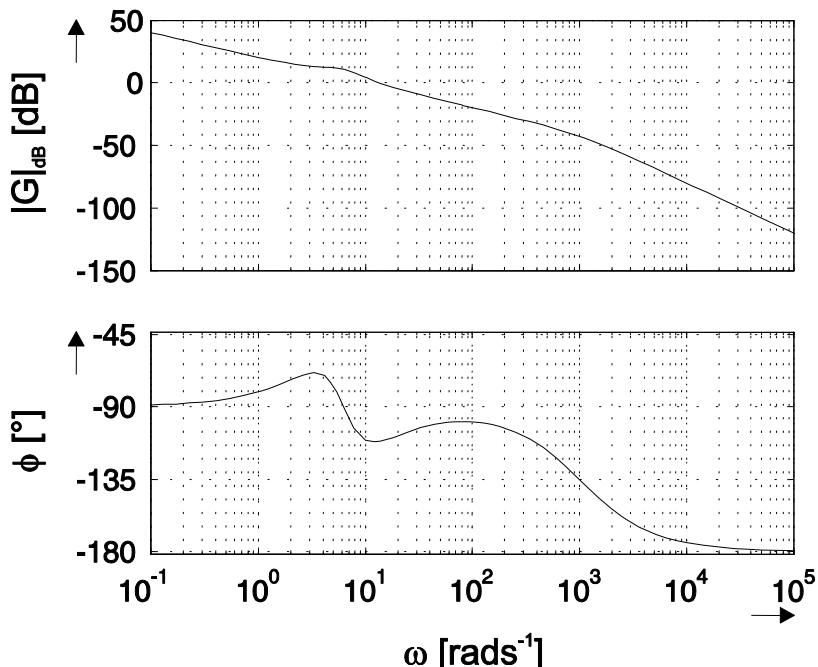


Abb. 14.27: Bode-Diagramm des offenen Regelkreises

14.3.5 Führungs- und Störverhalten

Der Regler zur Wankstabilisierung eines Fahrzeugs wird in (Öttgen 2005) anhand von Führungs- und Störgrößensprüngen bewertet. Dazu wurden Simulationen mit Hilfe eines zeitdiskreten linearen Wankmodells durchgeführt. Für die ausführliche Beschreibung und Diskussion sei auf (Öttgen 2005) verwiesen.

14.3.6 Wankmomentenverteilung mit Fuzzy-Logik

Bisher wurde ein Regler zur Wankstabilisierung eines Fahrzeugs mit Hilfe aktiver Stabilisatoren verwendet. Dazu wurde zunächst das Gesamtstabilisatormoment des Fahrzeugs geeignet geregelt. Zusätzlich gestatten aktive Stabilisatoren natürlich auch eine Beeinflussung des Eigenlenkverhaltens eines Fahrzeugs. Dies wird wieder anhand des Einspurmodells mit linearer Wankdynamik diskutiert, s. Abb. 14.28. Als Eingangsgröße dient jetzt der Fahrerwunsch in Form des Lenkradwinkels δ_H , der über die Len-

kungsübersetzung i_L zu einem Radlenkwinkel $\delta_R = \frac{1}{i_L} \delta_H$ führt. Die Fahrzeulgängsgeschwindigkeit wird zusammen mit der Umgebunggröße Haftreibungsbeiwert μ als weiterem Parameter behandelt. Der Wankwinkel φ_{ist} wird mit dem oben erläuterten PIDT₁-Regler geregelt. Zusätzlich wird jetzt die Stellgröße Gesamtstabilisierungsmoment M_{St} abhängig von der Querbeschleunigung a_y , dem Haftreibungsbeiwert μ und der Fahrzeulgängsgeschwindigkeit v_L mit Hilfe eines linguistischen Fuzzy-Algorithmus (Zadeh 1973 und Mamdani und Assilian 1975) zwischen Vorder- und Hinterachse verteilt (Öttgen und Bertram 2004a).

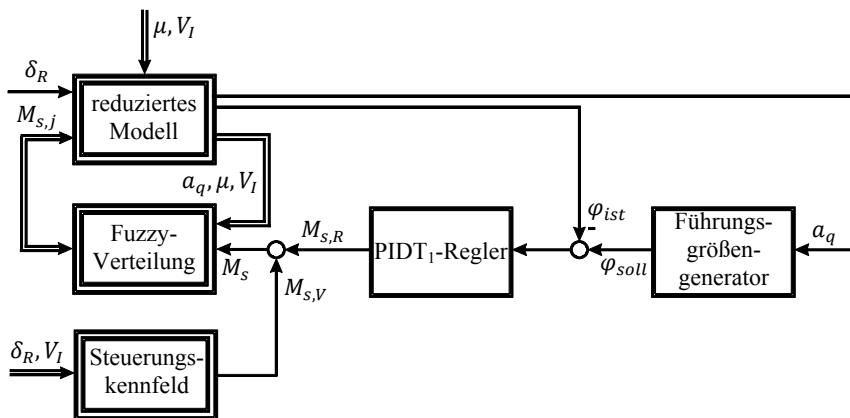


Abb. 14.28: Konzept zur aktiven Verteilung der Wankmomente

14.3.7 Wirkprinzip

In diesem Abschnitt wird das Wirkprinzip aktiver Stabilisatoren zur Beeinflussung des Eigenlenkverhaltens durch Radvertikalkraftverlagerung an einer Achse näher erläutert. Die Schräglaufrate, die zur Bestimmung der Radseitenkraft verwendet wird, hängt nichtlinear von der jeweiligen Vertikalkraft des entsprechenden Rades ab. Als Ansatz für die Bestimmung der Schräglaufrate in Abhängigkeit der Vertikalkraft wurde in (Öttgen 2005) ein Polynom dritter Ordnung gewählt. Der identifizierte Zusammenhang für die Räder an der Vorderachse bei einem Haftreibungsbeiwert von $\mu = 1$ ist in Abb. 14.29 abgebildet. Mit durchgezogenen Linien sind die Radvertikalkraft und die Schräglaufrate bei Geradeausfahrt mit symmetrischer Massenverteilung der linken und rechten Fahrzeugseite dargestellt. Die Einfahrt in einen Kreis bewirkt nun eine

Radlastdifferenz von $2\Delta F_v$. Auf Grund des nichtlinearen Zusammenhangs verliert das an Vertikalkraft abnehmende Rad mehr an Schräglaufstifigkeit, als das an Vertikalkraft zunehmende Rad gewinnt.

$$|\Delta c_{\alpha,z}| < |\Delta c_{\alpha,a}| \quad (14.17)$$

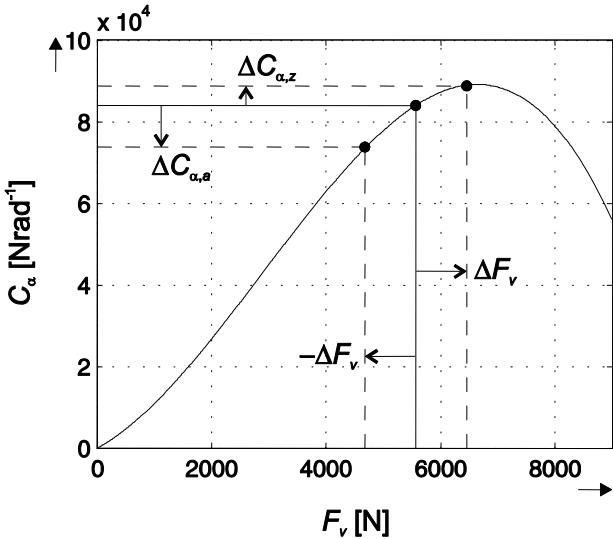


Abb. 14.29: Identifizierte Reifencharakteristik der Vorderachse bei einem Haftreibungsbeiwert von $\mu = 1$

Ein größeres Stabilisatormoment an dieser Achse bei Kurvenfahrt führt zu einer weiteren Erhöhung der Radvertikalkraftdifferenz (Gln. (14.18) und (14.19)):

$$\begin{aligned} F_{v,VL} = & \left(\frac{l_h}{l} \frac{mg}{2} - \frac{ma_y h_W}{s_R} + \frac{\Theta_{xx,D}}{s_R} \ddot{\phi} \right) - \frac{d_v s_{d,v}^2}{2s_R} \dot{\phi} \\ & - \frac{c_{f,v} s_{f,v}^2}{2s_R} \varphi - \frac{M_{s,v} s_{f,v}}{2b_v s_R}, \end{aligned} \quad (14.18)$$

$$\begin{aligned} F_{v,VR} = & \left(\frac{l_h}{l} \frac{mg}{2} - \frac{ma_y h_W}{s_R} + \frac{\Theta_{xx,D}}{s_R} \ddot{\phi} \right) - \frac{d_v s_{d,v}^2}{2s_R} \dot{\phi} \\ & - \frac{c_{f,v} s_{f,v}^2}{2s_R} \varphi - \frac{M_{s,v} s_{f,v}}{2b_v s_R}. \end{aligned} \quad (14.19)$$

Somit verringert sich die Summe der Schräglaufstifigkeiten an dieser Achse. Für den Aufbau der entsprechenden Radseitenkraft ist ein größerer Schräglauftwinkel erforderlich. Das heißt, dass eine Erhöhung des Stabilisatormomentes an einer Achse eine Verringerung der Schräglaufstifigkeit und Vergrößerung der Schräglauftwinkel zur Folge hat. Mit einem höheren Moment an der Vorderachse ist nun ein stärker untersteuerndes und mit einer Erhöhung des Momentes an der Hinterachse ein starker übersteuerndes Fahrzeugverhalten erzielbar. Durch eine aktive Verteilung der Stabilisatormomente zwischen Vorder- und Hinterachse kann daher fahrzustandsabhängig ein verschieden stark ausgeprägtes unter- beziehungsweise übersteuerndes Fahrzeugverhalten eingestellt werden. Die Verteilung der Momente erfolgt durch den Parameter $\lambda \in [-1, 1]$. Dadurch wird mit $\lambda = -1$ das gesamte Moment an der Hinterachse und mit $\lambda = 1$ an der Vorderachse eingeprägt Abb. 14.30.

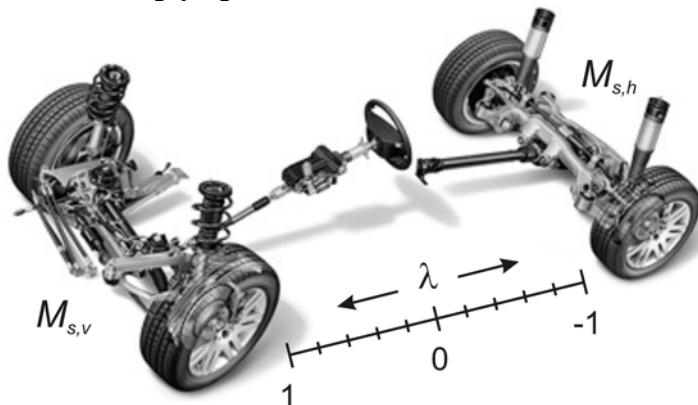


Abb. 14.30: Verteilung der Stabilisatormomente zwischen Vorder- und Hinterachse

14.3.8 Potential einer Wankmomentenverteilung

Nachdem bereits der Einfluss der Steifigkeitsverteilung passiver Stabilisatoren zwischen Vorder- und Hinterachse dargestellt wurde, wird nun das Potenzial der aktiven Wankmomentenverteilung bezüglich des Eigenlenkverhaltens eines Fahrzeuges mit Hilfe aktiver Stabilisatoren aufgezeigt. In Abb. 14.31 sind drei Trajektorien aus Einfahrten in einen Kreis mit dem reduzierten Fahrzeugmodell bei einer Fahrzeulgängsgeschwindigkeit von $v_l = 15 \frac{m}{s}$ und einem Haftreibungsbeiwert von $\mu = 1$ abgebildet.

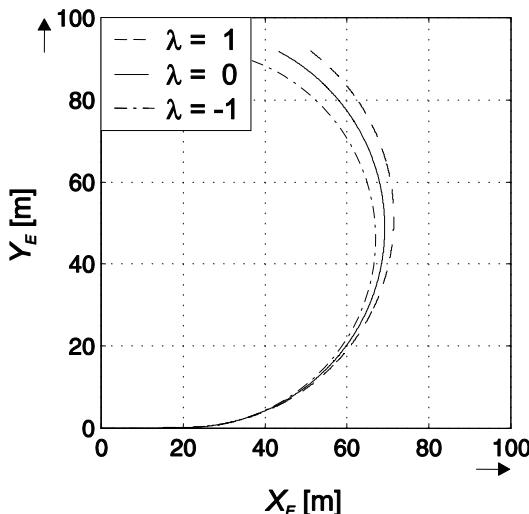


Abb. 14.31: Trajektorien mit unterschiedlicher Verteilung des Gesamtstabilisatormomentes

Die drei Fahrzeugkonfigurationen unterscheiden sich lediglich durch unterschiedliche Verteilungen des Gesamtstabilisatormomentes von $\lambda = -1$, $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$. Das Gesamtstabilisatormoment wird dabei in Abhängigkeit von dem beschriebenen Reglerentwurf bestimmt. Im Vergleich zu der Steifigkeitsverteilung der passiven Stabilisatoren ist der Einfluss mit aktiven Stabilisatoren auf Grund der betragsmäßig höheren Stabilisatormomente noch größer. So zeigt das Fahrzeug bei einer Verteilung von $\lambda = -1$ mit einem Kreisradius von $R = 44,9 \text{ m}$ ein deutlich neutraleres Fahrverhalten als das Fahrzeug bei einer Verteilung von $\lambda = 1$ mit $R = 52,1 \text{ m}$. Somit bedeutet eine Verteilung zur Hinterachse einen Zuwachs im Bereich der Agilität durch eine Verringerung des vom Fahrer aufzubringenden Lenkaufwandes, um das Fahrzeug einer gewünschten Bahn folgen zu lassen. In Abb. 14.32 sind ergänzend dazu die Querbeschleunigungs- und Wankwinkelverläufe abgebildet. Anhand der stationären Querbeschleunigungen in Abb. 14.32 a) ist zu erkennen, dass das Fahrzeug mit der Verteilung zur Vorderachse ($\lambda = 1$) einen signifikant größeren Lenkradwinkelbedarf hat, um denselben Kreis zu durchfahren. Die Wankwinkelverläufe in Abb. 14.32 b) verdeutlichen noch einmal die Abhängigkeit der Führungsgröße von der Querbeschleunigung durch das im Algorithmus parallel mit simulierte passive Wankmodell.

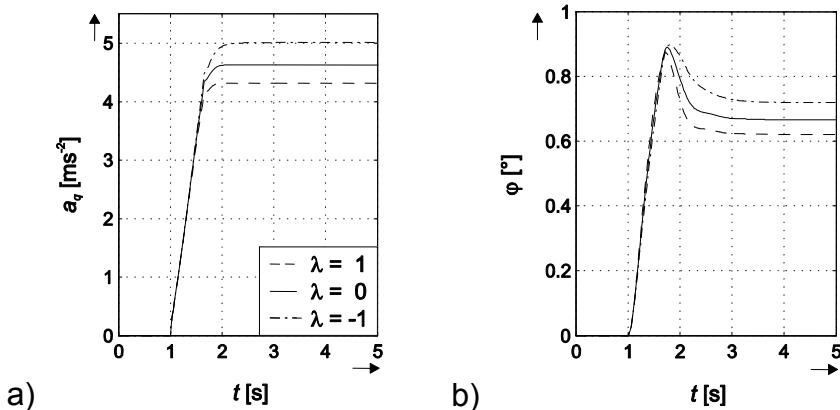


Abb. 14.32: Querbeschleunigungen a) und Wankwinkel b) mit unterschiedlichen Verteilungen des Gesamtstabilisatormomentes

Ein untersteuerndes Fahrzeug hat in instabilen und kritischen Fahrsituationen durch das *Schieben* über die Vorderräder klare Vorteile. Denn das Fahrzeug ist für den Fahrer leichter zu beherrschen, da er der Kurve folgend einen größeren Lenkradwinkel aufbringen muss. Im stabilen und sicheren Fahrbetrieb jedoch zeigt sich ein neutraler abgestimmtes Fahrzeug wesentlich lenkwilliger und besitzt ein größeres Seitenführungspotenzial für zum Beispiel plötzlich auftretende kritische Fahrsituationen. Die Vorteile beider Fahrzeugkonfigurationen werden in (Ötgen 2005) durch eine fahrzustandsabhängige Verteilung der Stabilisatormomente mit Fuzzy-Logik vereint.

Literaturverzeichnis

- Adamski, D. (2001): Komponentenbasierte Simulation mechatronischer Systeme. Dissertation. Fortschritt-Berichte VDI Reihe 10, Nr. 682. VDI-Verlag. Universität Duisburg-Essen
- Adamski, D., Schuster, C. und Hiller, M. (1997). Fahrdynamiksimulation mit FASIM C++ als Beispiel für die Modellierung mechatronischer Systeme. VDI-Berichte, Band 1315, S. 117-141. VDI-Verlag, Düsseldorf.
- Ajluni, K. K. (1989): Rollover Potential of Vehicles on Embankments, Sideslopes, and Other Roadside Features. PUBLIC ROADS Vol. 52, No. 4, S. 107-113.
- Ammon, D. (1997): Modellbildung und Systementwicklung in der Fahrzeugdynamik. B. G. Teubner.
- Ammon, D. (2005): Vehicle Dynamics Analysis Tasks and Related Tire Simulation Challenges. Vehicle System Dynamics 43: 30–47.
- ATZ (2008): ATZ Extra: Der VW Golf VI. Band: D 58922, Ausgabe: September 2009, Vieweg Verlag / GWV Fachverlag GmbH.
- Auktor, E.; Schmelz, F.; Seherr-Thoss, H.-C. (2002): Gelenke und Gelenkwellen: Berechnung, Gestaltung, Anwendungen. Berlin: Springer-Verlag.
- Bardini, R.; Hiller, M.; Schuster, C.; Breunig, V.; Lang, H.-P.; Mattes, B. (1996): Developing a rollover sensing concept using multibody simulation. In Poster Presentation at 3rd International Symposium on Sophisticated Car Occupant Safety Systems, Airbag 2000. Karlsruhe, Germany.
- Bardini, R.; Hiller, M.; Schramm, D. und Herrmann, T. (1997): Einsatz der Simulation zur Entwicklung von intelligenten Rückhaltesystemen. VDI-Berichte, Band 1354, S. 405-424. VDI-Verlag, Düsseldorf.
- Bardini, R.; Nagelstraße, M.; Wronn, O. (2007): Applikation, Test und Absicherung einer Überschlagsensorik am Beispiel des neuen BMW X5. In VDI-Bericht Nr. 2013, S. 149-167. VDI-Verlag, Düsseldorf, Germany.
- Bardini, R. (2008): Auslegung von Überschlagschutzsystemen für Personenkraftwagen mithilfe der Simulation. Dissertation. Fortschrittberichte VDI Reihe 12 Nr. 668. Düsseldorf: VDI-Verlag. Universität Duisburg-Essen.
- Bill, K.-H.; Breuer, B. (2006): Bremsenhandbuch: Grundlagen, Komponenten, Systeme, Fahrdynamik. GWV-Fachverlage GmbH. Wiesbaden.

- Blundell, M; Harty, D.(2006): The Multibody Systems Approach to Vehicle Dynamics. Elsevier. Amsterdam, Boston.
- Bösch, P.; Ammon, D.; Klempau, F. (2002): Reifenmodelle – Wunsch und Wirklichkeit aus der Sicht der Fahrzeugentwicklung. 4. Darmstädter Reifenkolloquium, 17.10.2002. Fortschrittberichte VDI, Reihe 12, Nr.511.
- Brandt, T.; Bröcker, M.; Heitzer, H.-D.; Hiesgen, Gregor; Hesse, Benjamin; Schramm, D. (2008): Linear Stability and Performance Analysis of Shared Lane Keeping between Driver and Assistance Systems. In: Proceedings of the 9th International Symposium on Advanced Vehicle Control - AVEC 2008. Kobe, Japan (2008), S. 51-56.
- Brandt, T.; Hesse, B.; Hiesgen, G.; Schramm, D.; Unterreiner, M. (2008): Ein Werkzeug zur frühzeitigen Integration des Fahrers in den Entwicklungsprozess von Fahrerassistenzsystemen. In: VDI-Berichte 2048 VDI/VW Gemeinschaftstagung Integrierte Sicherheit und Fahrerassistenzsysteme. Wolfsburg, Deutschland (2008), S. 361-370.
- Burckhardt, M. (1991): Fahrwerktechnik: Bremsdynamik und Pkw-Bremsanlagen. Vogel-Verlag.
- Bürger, K.-H.; Dödelbacher, G. (1988): Verbesserung des Fahrzeugschwingungsverhaltens durch Strukturoptimierung in der Konzeptphase. VDI-Bericht Nr. 699.
- Coo, P. J. A. de; Wismans, J.; Niboer, J. J. (1991): *Advances in MADYMO Crash Simulations*. SAE Technical Paper Series 910879, Warrendale, USA
- Cronin, D. L. (1981). *McPherson Strut Kinematics*. Mechanism and Machine Theory, Volume 16, Issue 6, S. 631-644.
- DIN 70000 (1994), Fahrzeugdynamik und Fahrverhalten. Berlin: Deutsches Institut für Normung e.V.
- Dugoff, H.; Fancher, P. S.; Segel, L. (1969): Tire Performance Characteristics Affecting Vehicle Response to Steering and Breaking Control Inputs. Highway Safety Research Institute, The University of Michigan An Arbor, Michigan, USA.
- Erhardt, R. und van Zanten, A. T. (1995). Die Regelung der Fahrdynamik im physikalischen Grenzbereich. VDI-Berichte, Band 1224, S. 423-438. VDI-Verlag, Düsseldorf.
- Ersoy, M.; Heißing, B. (Hrsg.) (2007): Fahrwerkhandbuch: Grundlagen, Fahrdynamik, Komponenten, Systeme, Mechatronik, Perspektiven. Wiesbaden: Vieweg.
- FAKRA (1994) Normenausschuss Kraftfahrzeuge im DIN – Deutsches Institut für Normung e. V.: Fahrzeugdynamik und Fahrverhalten – Begriffe. Deutsche Norm DIN 70000 ISO 8855. 1994.

- Frik, S. (1994): Untersuchungen zur erforderlichen Modellkomplexität bei der Fahrdynamiksimulation. Dissertation. Fortschritt-Berichte VDI Reihe 12 Nr. 208. Universität - Gesamthochschule Duisburg.
- Gaul, L.; Zastrau, B. (1989): Nichtlineare und viskoelastische Elemente in Mehrkörpersystemen. Sonderdruck zum Kolloquium des DFG-Schwerpunktes Dynamik von Mehrkörpersystemen.
- Gaus, H., Frank, J (1996) SLK – Der neue Roadster von Mercedes-Benz. ATZ Automobiltechnische Zeitschrift 98 10: 484-498.
- Germann, S. (1997): Modellbildung und modellgestützte Regelung der Fahrzeulängsdynamik. Dissertation TU Darmstadt. Fortschritts-Berichte des VDI, Reihe 12, Nr. 309. VDI Verlag, Düsseldorf.
- Gillespie, T. (1992): Fundamentals of Vehicle Dynamics. Society of Automotive Engineers.
- Gipser, M. (1999): Systemdynamik und Simulation. Stuttgart: B.G. Teubner.
- Gipser, M. (2002): Ftire: ein physikalisch basiertes, anwendungsorientiertes Reifenmodell für alle wichtigen fahrzeugdynamischen Fragestellungen, 4. Darmstädter Reifenkolloquium, Darmstadt, S.42-68.
- Göbel, E. F. (1974): Rubber Springs Design. London: Newness Butterworths.
- Gouya, M.; Nishiaki, M. (1990): Study on disc brake groan. SAE 90007.
- Harkey, D. L. (1999): The Effect of Roadside Design on Rollover. SAE Passenger Car Rollover Toptec. San Diego, USA.
- Haß, C. (2005): Modellbasierter Systementwurf eines reversiblen mechatronischen Gurtstraffers. Dissertation. Fortschrittsberichte VDI Reihe 12 Nr. 599. Düsseldorf: VDI-Verlag. Universität Duisburg-Essen.
- Haken, K.-L. (2008): Grundlagen der Kraftfahrzeugtechnik. München: Hanser.
- Heißing, B.; Müller, A. (1997) Das Fahrwerk des neuen Audi A6. Sonderausgabe ATZ und MTZ. Der neue Audi A6: 22-37.
- Brandt, T.; Hesse, B.; Hiesgen, G.; Schramm, D. (2009): Ein Fahrsimulator als Werkzeug zur frühzeitigen Eigenschaftsabsicherung von Mensch-zentrierten mechatronischen Systemen. In: Tagungsbericht Mechatronik 2009 - Komplexität beherrschen, Methoden und Lösungen aus der Praxis für die Praxis. Wiesloch, Deutschland (2009), S. 109-116.
- Hiller, M. (1983): Mechanische Systeme: Eine Einführung in die analytische Mechanik und Systemdynamik. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Hiller, M. (1989): Modeling the dynamics of a complete vehicle with nonlinear wheel suspension kinematics and elastic hinges. In IUTAM-Symposium on Dynamics of Controlled Mechanical Systems. Springer-Verlag.

- Hiller, M. (1995): Multiloop Kinematic Chains, and Dynamics of Multiloop Systems in Kinematics and Dynamics of Multi-body Systems. Eds. J. Angeles and A. Kecskemethy. Springer-Verlag, Wien, New York
- Hiller, M. (1981): Analytisch-numerische Verfahren zur Behandlung räumlicher Übertragungsmechanismen. Habilitation. Fortschrittberichte VDI-Z. Reihe 1 Nr. 76. Düsseldorf: VDI-Verlag. Universität Stuttgart.
- Hiller, M. und Kecskeméthy, A. (1987): A computer-oriented approach for the automatic generation and solution of the equations of motion for complex mechanisms. In Proceedings of the 7th. World Congress on Theory of Machines and Mechanisms, Band 1, S. 425-430, Sevilla, Spain. IFToMM, Pergamon Press.
- Hiller, M. und Kecskeméthy, A. (1989): Equations of motion of complex multibody systems using kinematical differentials. Transactions of the Canadian Society of Mechanical Engineers, 13(4), S. 113-121.
- Hiller, M., Kecskeméthy, A. und Woernle, C. (1986): A loop-based kinematical analysis of complex mechanisms. ASME-Paper 86-DET-184, New York. Presented at the Design Engineering Technical Conference, Columbus, Ohio, 5th. to 8th. October.
- Hiller M.; Kecskeméthy A.; Woernle C.: Computergestützte Kinematik und Dynamik für Fahrzeuge, Roboter und Mechanismen. Carl-Cranz-Kurs V 1.16, Carl-Cranz-Gesellschaft, Oberpfaffenhofen, 1986,1987,1988.
- Hunt, K. H., (1990): "Kinematic Geometry of Mechanisms", Oxford: Clarendon Press.
- Hucho, W.-H. (2005): Aerodynamik des Automobils, 5. Auflage. Wiesbaden: Vieweg-Verlag.
- Isermann, R. (2008): Mechatronische Systeme – Grundlagen. Berlin, Heidelberg, New-York: Springer-Verlag
- ISO-Norm 8767 (1992): Pkw-Reifen – Methoden der Rollwiderstandsmessung.
- ISO 7401 (2003): Technical Committee ISO/TC 22, Road vehicles, Subcommittee SC 9, Vehicle dynamics and road-holding ability: Road vehicles — Lateral transient response test methods — Open-loop test methods. INTERNATIONAL STANDARD ISO 7401..
- Klingbeil, E. (1966): Tensorrechnung für Ingenieure, Bibliographisches Institut Mannheim
- Kramer, Ulrich; Neculau, Mihaela (1998): Simulationstechnik. Carl Hanser Verlag, München Wien
- Kramer, U. (2008): Kraftfahrzeugführung. München: Carl Hanser Verlag.
- Kraftfahrt-Bundesamt (2006): Pressemitteilungen - Neuzulassungen von Pkw nach Segmenten und Modellreihen. <http://www.kba.de/Stabsstelle/Presse>

- service/Pressemitteilungen/pressemitteilungen1998/SegmenteModelle/seg_1998.htm. Seitenabruf Okt/2006.
- Krempel, G. (1965): Experimenteller Beitrag zur Untersuchung am Kraftfahrzeugreifen. Dissertation: TH Karlsruhe.
- Kecskemethy, A. (1993): Objektorientierte Modellierung der Dynamik von Mehrkörpersystemen mit Hilfe von Übertragungselementen. Dissertation. Fortschrittberichte VDI Reihe 20 Nr. 88. Düsseldorf: VDI-Verlag. Universität Duisburg.
- Kecskeméthy, A. (1996): MOBILE - Version 1.2 - User's Guide and Reference Manual. Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg, Fachgebiet Mechatronik.
- Lang, H.-P. (1997): Kinematik-Kennfelder in der objektorientierten Mehrkörpermodellierung von Fahrzeugen mit Gelenkelastizitäten. Dissertation Universität Duisburg-Essen. Fortschrittberichte VDI Reihe 12 Nr. 323. Düsseldorf: VDI-Verlag.
- Leister, G. (2009): Fahrzeugreifen und Fahrwerkentwicklung. GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden.
- Li, Hongyou (1990): Ein Verfahren zur vollständigen Lösung der Rückwärtstransformation für Industrieroboter mit allgemeiner Geometrie. Dissertation, Universität – Gesamthochschule – Duisburg.
- Magnus, K.; Müller H. H. (1974): Grundlagen der Technischen Mechanik. B.G.Teubner, Stuttgart.
- Matschinsky, W. (1987): Die Radführungen der Straßenfahrzeuge. Verlag TÜV Rheinland.
- Mitschke, M.; Wallentowitz, H. (2004): Dynamik der Kraftfahrzeuge. 4. Auflage, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
- Mohamedshah, Y.; Council, F. (2007): Synthesis of Rollover Research. <http://www.suvdriving.net/References/Synthesis.pdf>. Seitenabruf Feb. 2007.
- Mohr-Matuschek, U. (1992): Auslegung von Kunststoff- und Elastomerformteilen mittels Finite-Element-Simulationen. Fortschrittberichte VDI, Reihe 20, Nr. 68. VDI-Verlag, Düsseldorf.
- Mödinger, W.; Bublitz, H. Grebe, K.-J.; Schulz, W.; Minning, M.; Braun, R. (1997): Das Fahrwerk des neuen A-Klasse von Daimler-Benz. Sonderausgabe ATZ und MTZ Die neue A-Klasse von Daimler-Benz: S. 102-109.
- Möller, Manfred (1992): Ein Verfahren zur automatischen Analyse der Kinematik mehrschleifiger räumlicher Mechanismen. Dissertation, Universität Stuttgart.
- Nicolin, J.; Dellmann, T. (1985): Über die modellhafte Nachbildung der dynamischen Eigenschaften einer Gummifeder. ZEV-Glasers Annalen, Band 109.

- N.N. (2005): der Reifen – Rollwiderstand und Kraftstoffersparnis. Jubiläumsausgabe, Erstauflage, Societe de Technologie Michelin, Michelin Reifenwerke KgaA, Karlsruhe.
- Olley, M. (1946): Road Manners of the Modern Car. Proc. Inst. Aut. Engers.
- Otte, D.; Krettek, C. (2005): Rollover Accidents of Cars in the German Road Traffic - An In-Depth-Analysis of Injury and Deformation Pattern by GIDAS. In 19th International Technical Conference on the Enhanced Safety of Vehicles. Paper Number 05-0093. Washington, DC.
- Otter, M. (1995): Objektorientierte Modellierung mechatronischer Systeme am Beispiel geregelter Roboter. Dissertation. Fortschrittberichte VDI Reihe 20 Nr. 147. Düsseldorf: VDI-Verlag.
- Öttgen, O.; Bertram, T. (2003): Aktive Beeinflussung des Eigenlenk- und Wankverhaltens eines Pkws. Automatisierungstechnik 51 (2003) 7. Oldenbourg Verlag.
- Öttgen, O. (2005): Zur modellgestützten Entwicklung eines mechatronischen Fahrwerkregelungssystems für Personenkarawagen. Dissertation Universität Duisburg-Essen. Fortschrittberichte VDI Reihe 12 Nr. 610. Düsseldorf: VDI-Verlag.
- Orend, R (2002): Integrierte Fahrdynamikregelung mit Einzelradaktorik. Shaker Verlag, Aachen.
- Pacejka, H. B. (2006): Tyre and Vehicle Dynamics. 2nd Ed. Butterworth-Heinemann Ltd.
- Pacejka, H. B.; Bakker, E. (1993): The magic formula tyre model, tyre models for vehicle dynamic analysis. Proceedings of the 1st International Colloquiumon Tyre Models for Vehicle Dynamic Analysis, ed. H.B. Pacejka, Swets&Zeitlinger, Lisse, pp. 1-18.
- Pacejka, H. B.; Besselink, I. J. M.(1997): Magic formula tyre model with transient properties. Proceedings of the Berlin Tyre Colloquium, Vehicle System Dynamics Supplement 27, Swets&Zeitlinger, Lisse, pp. 145-155.
- Pelz, Georg (2001): Modellierung und Simulation mechatronischer Systeme. Hüthing Verlag, Heidelberg.
- Pichler, V. (1999): Modellbildung der Dynamik von Kraftfahrzeugen unter Anwendung objektorientierter Konzepte. Dissertation. Fortschrittberichte VDI Reihe 12 Nr. 382. Düsseldorf: VDI-Verlag. Universität Duisburg.
- Popp.K.; Schiehlen.W.(1993): Fahrzeugdynamik. Stuttgart: B.G. Teubner.
- Reimpell, J. (1988) Fahrwerktechnik: Radaufhängungen. 2. Auflage. Vogel Fachbuch. Vogel-Verlag, Würzburg.
- Reimpell, J.; Sponagel, P. (1988): Fahrwerktechnik: Reifen und Räder, Vogel Fachbuch, Vogel-Verlag, Würzburg.

- Riekert, P., Schunk,T. E. (1940): Zur Fahrmechanik des gummibereiften Kraftfahrzeugs. Ingenieur-Archiv11 (1940), S.210–224.
- Rill, G. (1994): Simulation von Kraftfahrzeugen. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg Verlag.
- Robert Bosch GmbH (2007): Kraftfahrzeugtechnisches Taschenbuch. 26. Aktualisierte Auflage. Wiesbaden: Vieweg-Verlag.
- Robert Bosch GmbH (2002): Konventionelle und elektronische Bremssysteme. 3. Auflage.
- Samie, F.; Sheridan, D. (1990): Contact analysis for a passenger car disc brake. SAE 900005.
- Schiehlen, W.; Eberhard, P. (2004): Technische Dynamik. B.G., 2. Auflage. Teubner: Stuttgart.
- Schmidt, A.; Wolz, U. (1987): Nichtlineare räumliche Kinematik von Radaufhängungen – kinematische und dynamische Untersuchungen mit dem Programm- system MESA VERDE. Automobilindustrie 1987 6, S. 639 – 644.
- Schmitz, T. (1994): Modellbildung und Simulation der Antriebsdynamik von Personenwagen. Dissertation. Fortschritt-Berichte VDI Reihe 12, Nr. 224. Universität – Gesamthochschule Duisburg.
- Schnelle, K.-P. (1990): Simulationsmodelle für die Fahrdynamik von Personewagen unter Berücksichtigung der nichtlinearen Fahrwerkskinematik. Dissertation. Fortschritt-Berichte VDI Reihe 12 Nr. 146. Universität Stuttgart
- Schramm, D. (1985): Eine Methode zur Lösung der Zwangskraftgleichungen. Z. Angew. Math. U. Mecha., 65.
- Schramm, D. (1986a): Ein Beitrag zur Dynamik reibungsbehafteter Mehrkörper- systeme. Dissertation. Fortschritt-Berichte VDI Reihe 18 Nr.32. Universität Stuttgart.
- Schramm, D. (1986b): Ein effizienter Algorithmus zur numerischen Berechnung der Zwangskräfte mechanischer Systeme. Z. Angew. Math. U. Mecha., 66.
- Schramm, D. (2007): Modellbildung mechatronischer Systeme im Kraftfahrzeug. In: VDI-Berichte 1971 Mechatronik 2007 - Innovative Produktentwicklung. Wiesloch, Deutschland (2007), S. 13-28.
- Schütz, K.H. (1971): Gleichlauf-Kugelgelenke für Kraftfahrzeugantriebe. Antriebstechnik 10 (1971) 437–440
- Schuster, C. (1999): Strukturvariante Modelle zur Simulation der Fahrdynamik bei niedrigen Geschwindigkeiten. Dissertation. Shaker Verlag GmbH. Universität - Gesamthochschule Duisburg.

- Schuster, H., Balk, A., Oehlschlaeger, H. (1995): Der Sharan – Die Großraumlimousine von Volkswagen. ATZ Automobiltechnische Zeitschrift 97 7/8: 400-415.
- Shi, X. (1996): Entstehung des Bremsenquitschens. Dissertation, Technische Universität Braunschweig.
- Smith, S.W. (2003): Digital Signal Processing. Amsterdam, Boston, ... : Newnes.
- Tesis 2003: ve-DYNA 3.7 Model Overview. www.thesis.de, München.
- Uffelmann, F. (1980): Berechnung des Lenk- und Bremsverhaltens von Kraftfahrzeugzügen auf rutschiger Fahrbahn. Dissertation. TU Braunschweig.
- Unrau, H.-J.; J. Zamow (1997): TYDEX-Format: Description and Reference Manual, Release 1.3. TYDEX-Workshop.
- VDA (2006): Verband der Automobilindustrie e. V. (VDA): VDA-Spurwechseltest.
http://www.vda.de/de/vda/intern/organisation/abteilungen/technik_04.htm. Seitenabruf Dez/2006.
- VDI-Richtlinie 2206 (2004): Entwicklungsmethodik für mechatronische Systeme. Beuth-Verlag GmbH, Berlin.
- Wallentowitz, H. (1998): Längsdynamik von Kraftfahrzeugen. 2. Auflage, Schriftenreihe Automobiltechnik, Aachen.
- Wiegner, P. (1974): Über den Einfluss von Blockierverhinderern auf das Fahrverhalten von Personenkarren bei Panikbremsungen. Dissertation. TU Braunschweig.
- Willumeit, Hans-Peter (1998): Modelle und Modellierungsverfahren in der Fahrzeudynamik. Stuttgart/Leipzig: B.G. Teubner.
- Woernle, Christoph (1988): Ein systematisches Verfahren zur Aufstellung der geometrischen Schließbedingungen in kinematischen Schleifen mit Anwendung bei der Rückwärtstransformation für Industrieroboter. Dissertation. Fortschrittberichte VDI Reihe 18 Nr. 59. Düsseldorf: VDI-Verlag. Universität Stuttgart.
- Zamov, J. (1994): Beitrag zur Identifikation unbekannter Parameter für fahrdynamische Simulationsmodelle. VDI-Berichte, Reihe 12, Nr. 217. Düsseldorf: VDI-Verlag.
- Zomotor, A. (1991): Fahrwerktechnik: Fahrverhalten, 2. Auflage. Würzburg: Vogel Verlag und Druck KG.

Internet Verweise (Datum des Zugriffs 10.02.2010)

- AVL Advisor (2010): <http://www.avl.com>.
- AVL Cruise (2010): <http://www.avl.com>.
- Carsim (2010): <http://www.carsim.com/>.
- Dassault Systemes (2010): <http://www.3ds.com/home/>.
- dSpace (2010): <http://www.dspspace.com>.
- IPG (2010): <http://www.ipg.de>.
- LMS International (2010a): <http://www.lmsintl.com/>.
- LMS International (2010b): <http://www.lmsintl.com/dads>.
- MSC.Software (2010): <http://www.msccsoftware.com>.
- Milliken Research (2010): <http://millikenresearch.com/vdms.html>.
- Parametric Technology Corporation (2010): <http://www.ptc.com/>.
- ProracingSim (2010): <http://www.proracingsim.com/>.
- Simpack AG (2010): <http://www.simpack.com/>.
- Simulia (2010): <http://www.simulia.com/solutions/automotive.html>.
- Southwest Research (2010): <http://www.swri.org>.
- Tesis (2010): <http://www.thesis.de>.
- Gipser (2010): http://www.cosin.eu/prod_FTire.
- Tass (2010): <http://www.tass-safe.com>

Kurzbiografien der Autoren



Prof. Dr.-Ing. Dieter Schramm studierte an der Universität Stuttgart Mathematik. Seine Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Universität Stuttgart schloss er mit der Promotion über ein Thema aus der Theoretischen Mechanik im Jahre 1986 ab. Danach war er 18 Jahre in der Automobilindustrie bei den Firmen Bosch und Tyco Electronics tätig, u.a. als Entwicklungsleiter und Geschäftsführer. Parallel dazu hatte er über mehr als 10 Jahre hinweg Lehraufträge auf den Fachgebieten Technische Mechanik und Systemdynamik. Seit 2004 leitet er den Lehrstuhl für Mechatronik an der Universität Duisburg-Essen. Seit 2006 ist er Dekan der Fakultät für Ingenieurwissenschaften.



Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h.c. mult. Manfred Hiller i.R. studierte an der Universität Stuttgart Luft- und Raumfahrttechnik. Nach Promotion und Habilitation im Fach Mechanik in Stuttgart wechselte er 1987 an die Universität Duisburg (heute Universität Duisburg-Essen), um dort von 1991 bis 2004 den ersten Lehrstuhl für Mechatronik in Deutschland zu leiten. Parallel dazu hatte er von 1986 bis 2004 eine permanente Gastprofessur an der ETH Zürich. Während dieser Zeit und davor an der Universität Stuttgart beschäftigte er sich über mehr als 25 Jahre mit der Modellbildung und Simulation von Kraftfahrzeugen, oft in Kooperation mit Fahrzeugherstellern und führenden Systemlieferanten.



Dr.-Ing. Roberto Bardini studierte an der Universität Duisburg (heute Universität Duisburg-Essen) Maschinenbau. Er promovierte am Lehrstuhl für Mechatronik bei Professor Hiller und arbeitet seit 2000 als Entwicklungsingenieur auf dem Gebiet der Fahrzeugsicherheit, zunächst bei der Firma Audi und seit 2003 bei der Firma BMW. Er beschäftigt sich bereits seit seinem Studienabschluss 1996 mit der räumlichen Mehrkörpersimulation von Insassen und Fahrzeugen. Speziell zur Auslegung von Insassenschutzsystemen bei Fahrzeugüberschlägen hat er Simulationswerkzeuge entwickelt und erfolgreich in der Praxis eingesetzt.

Stichwortverzeichnis

A

- Abrollumfang 169
- Absolutkinematik 77, 79
 - kinematische Differential 91
- Absolutkoordinaten 72, 77
- Abtriebswelle 222
- Achskinematik 277
- Achskörper 118
- Achsprüfstand 155
- Achsquerkräfte 269
- Ackermannwinkel 245
- Additivität 31
- Adhäsionsreibung 165
- aktive Stabilisatoren 433
- Anfahrwinkel 422
- Ansprechzeit 405
- Anströmgeschwindigkeit 231
- Anströmwinkel 231
- Anti-Blockiersystem 205
- Antriebsmomente 288
- Antriebsschlupf 167, 172
- Antriebs-Schlupf-Regelung 205
- Antriebsstrang 205, 288
 - Absolutkinematik 221
 - Bewegungsgleichungen 222
 - Relativkinematik 219
- APPELlsche Gleichungen 84
- Applikationsprozesses 406
- Arbeit
 - virtuelle 84
- Aufbaudämpfer 234
- Auftrieb** 232
- Auftriebskraft
 - aerodynamische 232
- Ausgleichsgetriebe 220

B

- Baumstruktur 52, 63
- Beschleunigung 37, 39
 - absolute 102
 - rotatorische 307
 - verallgemeinerte 93
- Beschleunigungsterme
 - verallgemeinerte 90
- Betriebsbremse 229
- Bewegungsgleichungen 354, 365
- Bewegungsschraube 37
- Bewegungswinder 36, 86, 88
- Bezugssystem 108
 - körperfestes 40
- Bindungen
 - geometrische 55, 85
 - holonome 85
 - kinematische 86
 - nichtholonome 85
- Bindungsgleichungen
 - globale 74
 - implizite 77
 - lokale 74
- Blockschaltbild 72
- Bordsteinanprall 406
- Böschung 388, 412, 421
 - Manöver 423, 424, 425
 - Neigung 422, 423
- Bremskraftverteilung 255
- Bremsmoment 229, 290
- Bremspedalstellung 255
 - normierte 294
- Bremsschlupf 167, 172
- Bremsvorrichtung 115
- Bumpstop 390

- Bürstenmodell 171
- C**
- charakteristische Geschwindigkeit 253
- CORIOLIS-Beschleunigung 39
- CORIOLISKraft verallgemeinerte 104
- COULOMBSche Reibung 175, 184
- D**
- d'ALEMBERTsches Prinzip 84, 369
für starre Körper 88
- Dämpfer 115
- Dämpferbein 123
- Dämpferelement 234
- Dämpferkennlinien 395
- Deichselmodell 321
- Diagonalreifen 169
- Differential 209, 220
Sperrwirkung 220
- Doppelgelenkfederbein-
Vorderradaufhängung 326
- Blockschaltbild 330
- reales System 327
- Strukturbild 327
- Topologie 329
- Doppelquerlenkerachse 116
- Doppelquerlenker-Radaufhängung 62, 79, 122
- Drehachse 42
momentane 59
- Drehbewegung 41
Parametrisierung 42
- Drehgelenk 55, 58, 80
- Drehparameter 42
- Dreh-Schubgelenk 55, 58
- Drehtensor 34, 43
Eigenschaften 45
transponiert, invers, orthogonal 45
- Drehung
räumliche 41
- Drehungen
- isolierte 62
- Drehwinkel 42, 55
- Drehzeiger 34, 43
kleine Drehungen 46
Winkelgeschwindigkeit 45
- Dreieckslenker 115
- Durchtrittsfrequenz 436
- Dyadisches Produkt 31
- E**
- Eigenlenkgradient 250
- Eigenlenkverhalten 251, 429
- Eigenverhalten 254
- Einfederbewegung
allgemeine 298
räumliche 292
- Einflußgrößen 177
- Eingänge
steuernde 12
- eingeprägte Kräfte
verallgemeinerte 90
- Einlaufängen 203
- Einzelkraft 14
- Einzelradaufhängung 61, 73, 113, 116, 297
- Elastomerlager 208
- Elchtest 416
- elektronische Stabilitätskontrolle 205
- Elementardrehung 42
- Elementpaare
höhere 58
niedrige 58
- Erregervektor 291
- EULER-Beschleunigung 39
- EULER-Parameter 43
- EULER-Winkel 43
- F**
- Fahrdynamik 7
- Fahrermodell 320
- Fahrmanöver 8
- Fahrpedalstellung 255, 262
normierte 294
- Fahrstabilität 253

- Fahrverhalten
 neutrales 251
 übersteuernd 433
 übersteuerndes 251
 untersteuernd 433
 untersteuerndes 251
- Fahrzeug
 allradgetriebenes 206, 346
 frontgetriebenes 205, 338
 heckgetriebenes 206
- Fahrzeugaufbau 105
- Fahrzeugdynamik 7
- Fahrzeugmechanik 7
- Fahrzeugmittelebene 105
- Fahrzeugmodell
 Detailierungsgrad 13
 heckgetrieben 326
 komplexes 19
 modulares 359
 parametrisiertes 398
- Fahrzeugreaktion 405
- Fahrzeugsicherheitssysteme 355
- Fahrzeugsimulationssysteme
 kommerzielle 21
- FASIM_C++ 320, 356, 379
- Federbein 116, 123
- Federelemente 232
- Federkennlinie 395
- Federkräfte 283
- Federkraftgesetz 283
- Federvorspannung 233
- Federweg 390
- Feldkraft
 elektrische und magnetische 227
- Fertigungsradius 169
- Festsattelbremse 229
- Fixpunkttdrehung 34, 41
- Formwiderstand 231
- Freiheitsgrad 60
 isolierter 65
- Frequenzen bei
 Fahrzeugteilsystemen 17
- Führungsbewegung 38
- Führungsgröße 434
- Fundamentalgleichung
 der Dynamik 84
- für Punktmassen 84
- Fundamentalgleichung der Dynamik
 83
- Fünflenker-Vorderradaufhängung
 Blockschaltbild 349
 reales System 347
 Strukturbild 348
 Topologie 349
- Fünfpunkt-Radaufhängung 59, 61
- Funktionsbestätigung 410
- Fuzzy-Algorithmus 438
- G**
- Gangpolkurve 170
- Gegenwirkungsprinzip 227
- Gelenk 14, 55
 ebenes 55, 58
 einwertiges 64
 komplexes 58
 mehrwertiges 64
 Standard- 58
 virtuelles 51
- Gelenkfreiheitsgrad 51, 55
- Gelenkoordinate
 natürliche 63
 natürliche bzw. relative 55
 relative 69
- Gelenk-Körper-Darstellung 65
- Gelenkpaaar
 charakteristisches 97
- Gelenkparameter
 invariante 66
- Gelenkviereck 73
 räumliches 73
 Relativkinematik 75
- Gelenkwelle 115, 208, 209, 222
- Geradeausfahrt 250
- Gesamtantriebsmoment 289
- Gesamtfahrzeug 325, 380
 Topologie 336, 345, 352
- Gesamtfahrzeugmodell 17
 allradgetrieben 346
 Dynamik 354
 frontgetrieben 338
 Kinematik 326, 354

Modularisierung 325
Gesamtfreiheitsgrad 60
Gesamtstabilisatorsteifigkeit 431
Gesamtübersetzung 221
Geschwindigkeit 36, 39, 42
 absolute 102
 lokale 228
 verallgemeinerte 92, 228, 294
Geschwindigkeitsregler 320
Getriebe 209
Getriebeübersetzung 255
 gangabhängige 289
Getriebewelle 222
Giergeschwindigkeit 249
Gierverstärkung 253
Gierverstärkungsfaktor 252
Gierwinkel 105
Gierwinkelgeschwindigkeit 405
Gleichlaufgelenk 208, 215
 kinematische Schleife 216
Gleichungssystem
 differential-algebraisches 15
Gleitgeschwindigkeit 171
Gleitreibkoeffizient 178
Gleitreibspannung 175
GRÜBLER-KUTZBACH
 Kriterium von 60
Gummi-Verbund-Elemente 241
Gürtel 161, 188
Gürtelreifen 160, 169

H

Haftriebsspannung 175
Halbstarrachse 116
HAMILTONsche Gleichungen 84
Hardware-in-the-Loop-Simulation
 (HiL) 12
Hauptträgheitsmoment 87
Homogenität 31
HSRI-Reifenmodell 187, 199, 382
Hybride mechanische Systeme 16
Hydrolager 208, 212
 mechanisches Ersatzsystem 213
Hysteresereibung 166

I

Identifikation 10
Identifikationstechnik 10
implizite Formulierung 67
Impulssatz 280
Inertialsystem 39
Innenwiderstand 231
Insassenbewegung 415
Instationäres Reifenverhalten 202
Integral IV-Hinterradaufhängung
 326
 Blockschatzbild 333
 reales System 331
 Strukturbild 332
 Topologie 332
Integrallenker 332
Integrallenker-Radaufhängung 125
Invarianzeigenschaft 29

J

JACOBI-Matrix 76, 89
JOURDAINSches Prinzip 85

K

Kammscher Kreis 184
Kardangelenk 55, 215
KARDAN-Gleichungen
 kinematische 49, 296
Kardanwinkel
 Drehungsfolge 105
 Transformationsmatrix 106
KARDAN-Winkel 43, 105
 ebene Elementardrehung 46
 singuläre Stellung 49
Karkasse 160
Karosserie 105
Kette
 kinematische ebene 53
 kinematische mit Baumstruktur
 52
 kinematische, ebene 57
 kinematische, geschlossene 52
 kinematische, offene 52
 kinematische, räumliche 54

- kinematische, sphärische 54, 58
teilweise und vollständig
geschlossene kinematische 52
- Kinematik** 15
globale 79
- kinematische Differential 93
- kinematische Differentiale
der ersten Art 93
der zweiten Art 93
- kinematische KARDAN-Gleichung 107
- kinematische Modellbildung
Stufen 337, 346, 353
- kinematische Schleife
unabhängige 52
- kinematische Schleifen 326
- kinematische Transformatoren 72
- kinematischen Ketten
Zusammenbau 64
- kinematisches Differential 354
- Kinetik** 15
- kinetische Energie
des starren Körpers 87
- Knotenpunkt 15
- Komponentendarstellung 29
- Komponentenzerlegung 25, 29
- Kontakt-Geometrie 188
- Kontaktkräfte 163
- Kontaktpunkt 161
- Kontinuierliche Systeme (KOS) 16
- Koordinaten
abhängige 89
unabhängige 89
verallgemeinerte 62
- Koordinatensystem 25
aufbaufestes 295
orthonormiert 27
- Koppelmasse 130, 131
- Kopplungsgleichungen
lineare 72
- Kraft**
äußere 226
deterministische 227
eingeprägte 226, 227, 228
innere 226
stochastische 227
- Kräfte**
eingeprägte 84
verallgemeinerte 87
- Kraftelemente**
in Reihe geschaltet 235
masselose 15
parallel geschaltet 235
- Kraftgesetz** 15
- Kraftschluß** 175
- Kraftschlußbeiwert 165, 166, 176, 178
- Kraftschlußbeiwert, maximaler 176
- Kraftübertragung in
Umfangsrichtung 172
- Kreisbahn**
notwendiger Lenkwinkel 250
- Kreiselkräfte**
verallgemeinerte 89, 90
- Kreisfahrt** 249, 385
- Kreuzprodukt** 32
- kritische Geschwindigkeit 253
- Krümmungskreismittelpunkt 244
- Krümmungsradius 246
- Kugelgelenk 55, 58, 80
- Kupplung 209
- Kurbelwelle 222
- Kursregelung 321
- L**
- Lage 33, 38, 42
- Lager 14
- Lagerkraft
natürliche 228
- Lagerrichtung
gesperrte 228
- LAGRANGEsche Gleichungen 84
erster Art 85
zweiter Art 87
- LAGRANGEsche Multiplikatoren 86
- Längslenker 116
- Längslenkerachse 119
- Längsschlupf 167
- LAPLACEsche Identität 26
- laterales Rutschen 412, 413

- Latsch 163, 170
-länge 163, 171
- Latschfläche
Haft- und Gleitbereich 180
- Laufgrad 60
- Laufstreifen 160, 171
-profil 160
- Lenkachse 127, 302
- Lenkerdrehachse 119
- Lenkerebene 116
- Lenkmoment 182
- Lenkradwinkel 291
- Lenkrollhalbmesser 127
- Lenkübersetzung 255
nichtlineare 292
- Lenkverhalten
instationäres 250, 253
- Lenkwinkelsprung 223, 403
- lineares Einspurmodell
als dynamisches System 249
Bewegungsgleichungen 248
Zustandsnormalform 249
- Luftkraft 230
- Luftmoment 230
- Luftwiderstand 230
- Luftwiderstandsbeiwert 257
- Luftwiderstandskraft 231, 256
- M**
- Magic Formula 187, 195
- Magic Formula Reifenmodell 195
- Magic-Formula 287
- Masse
Fahrgestell 394
- Massenmatrix 89
Einfluss des Antriebsstranges 223
Sattelzug 372
Subsysteme 355
- Massenmittelpunkt 15
- mathematische Modelle 187
- McPherson
-Prinzip 116, 123
-Radaufhängung 134
- McPherson-Federbein-
Vorderradaufhängung
- Blockschatzbild 341
mit elastischem Querlenkerlager
Blockschatzbild 342
- mit elastischem Querlenkerlager
Strukturbild 341
- mit elastischem Querlenkerlager
Topologie 342
- reales System 339
- Strukturbild 340
- Topologie 340
- Mechanismus
überbestimmter 61
zwangsläufiger 60
- Mehrkörpersystem 14, 51
kinematisch nicht
zusammenhängendes 51
- kinematisch zusammenhängendes
51
komplexes 77, 326
- Mehrlenkerachse 116
- Mehrlenker-Hinterradaufhängung
109
- Mehrlenker-Radaufhängung 331
- Methode der Finiten Elemente
(FEM) 16
- Minimalkoordinaten 334
- Mischformen 187
- Misuse-Robustheit 408
- Misuse-Versuche 412
- Mittelklasse-Fahrzeugmodell 393
Parameter 394
- MOBILE 366, 380
- Modellbibliothek 381
- Modellbildung 10, 12
experimentelle 10
theoretische 10
- Modelle
mathematische 10
- Modellfehler 384
- Modelluntersuchung 12
- Module
des Gesamtfahrzeugs 380
mechanische 379
nicht-mechanische 381

- M**
- Moment
 - eingeprägtes 226
 - Momentanpol 170
 - Momentenkennfeld
 - Motor 262
 - Motor
 - drehzahl 255, 261
 - moment 255
 - Motorblock 207
 - Kraftkopplung 207
 - Massenkopplung 207
 - räumliche Bewegung 207
 - Motorgehäuse 222
 - Motorlager 208, 209
 - kinematischer Transformator 211
 - Motorstuckern 212
- N**
- Nachlauf
 - strecke 130
 - versatz 130
 - winkel 129
 - Nachspur 127
 - Netze
 - kinematische 72
 - Nickschwingungen 130
 - Nickwinkel 105
 - No Fire 410
 - Normalbeschleunigung 246
 - Normaldruckverteilung 175
 - Normalkraft 227
 - Numerische Integration 373
- O**
- Oberflächenkraft 227
 - OOP-Risiko 425
 - open-loop Manöver 403
- P**
- peak response time 405
 - Personenkraftfahrzeug 360
 - Phasengang 436
 - Phasenreserve 436
 - physikalische Modelle 187
- Q**
- quasistationär 202
 - Quaternionen 43
 - Querbeschleunigung 244, 442
 - stationäre 404
 - Querdynamik 243
 - Querkräfte 183
 - Querlenker 80, 115
 - Querschlupf 179
- R**
- Rad 159
 - Radachse 113
 - Radaufhängung 113
 - Radaufhängungen
 - im Zweispurmodell 292
 - nichtlineare Kinematik 325
 - Radaufhangskinematik 277
 - Radaufhangungspunkte 109
 - Radaufhangungssysteme 113
 - Radaufstandsfläche (Latsch) 162
 - Radaufstandspunkt 127, 246
 - Radführung 113

- Radgeometrie
mechanisches Ersatzmodell 191
- Radkräfte 161
- Radlager 115
- Radlast 163, 177, 183
- Radlastschwankungen 130
- Radlastverteilung 244, 275
- Radmittelebene 189
- Radradius
dynamischer 169
statischer 169
- Radstand 394
- Rad-Straße-Kontakt 159
- Rad-Straße-Kontaktpunkte 195
- Radsturz 182
- Radträger 113, 292
- Radvertikalkraftverlagerung 438
- Rampe 391, 412
ADAC 387
Manöver 420
SAE J857 387
- Rastpolkurve 170
- Raumlenkerachse 61
- Raumlenker-Radaufhängung 144
- Reaktionskraft 226, 227
lokale 228
verallgemeinerte 228
- Reaktionskräfte 84, 85
- Reaktionsmoment 226
- Reboundstop 390
- Rechenregeln
für Vektoren 25
- Regelgröße 434
- Regelstrecke 435
- Reglerauslegung 436
- Reglerentwurf 433
- Reibungswiderstand 231
- Reifen 159
-einfederung 164
-nachlauf 180
Rückstellmoment 180
- Reifenkontaktkräfte, stationäre 162
- Reifenkraft
Horizontalkomponenten 185
- Reifenkräfte
dynamische 287
- Reifenlängssteifigkeit 203
- Reifen-Latsch 159
- Reifenmittelebene 127
- Reifenmodell, kinematisches 162
- Reifenmodell, physikalisches 162
- Reifenmodelle 187
- Reifenradius 394
dynamischer 169
statischer 164
- Reifenseitensteifigkeit 202
- Reifensteifigkeit
vertikale 202
- Relativbewegung 37, 38, 108
- Relativkinematik 72, 77, 79, 299
- Relativkoordinaten 74
- response time 405
- RODRIGUES-Parameter 43
- Rollrichtung 191
- Rollwiderstand 164
- Rollwiderstandskraft 165
- Rotation 33
- Rückstellmoment
Reifen 202
- S**
- Sandbett 414
Manöver 428
- Scheibenbremse 229
- Scherdeformationen 166
- Scherverformung der Profilelemente 172
- Schleife
ebene 63
kinematische 52
- Schließbedingung 66
- Schlupf 167
- Schlupfgröße
absolute 185
- Schlupfkurve 176
- Schräglauf 179
-steifigkeit 179
-winkel 179
- Schräglaufsteifigkeit 201, 203, 248, 275, 438
- Schräglaufsteifigkeiten

- degressiver Verlauf 275
Schräglenker 302
Schräglenkerachse 121
Schräglenkerdrehachse 302
Schräglenker-Radaufhängung 302
Schraubachse 37, 128
 des Radträgers 129
 momentane 59
Schraubbewegung 59
Schraubenfeder 115
Schraubgelenk 55, 58
Schrittweitensteuerung
 automatische 375
Schubgelenk 55, 58
Schubspannung 173
Schwerpunktlage 394
Schwimmbewegung 244
Schwimmwinkel 246
Seitenkraft
 Rad 179
Seitensteifigkeit 203
Simulation von Kraftfahrzeugen
 355
Simulationsumgebung 22
Sparse-Methoden 66
Spatprodukt 26, 101
Spreizung 128
Sprunghügel 412, 413
Spur 127
Spurbreite 394
Spurfläche
 fahrgestellfeste 59
Spurkurve 384
Spurlenker 122
Spurstange 66, 114
Spurweite 127
Spurwinkelkurve 155
Stabilisator 236, 390, 394
 aktiver 239, 429
 Moment 433, 440
 passive 429
 passiver 237
 Steifigkeit 431
 Torsionsmoment 239
Stabilisatorhebel 270
Stabilisatorlängen 270
Standebene 127
Starrachse 115, 116
starrer Körper 15
 allgemeine Bewegung 33
Starrkörperschlupf 167, 168
stationär 202
Stationärwert 403
Staudruck 231
Steifigkeitsverteilung 430
Stellgröße 434
Störgröße 434
Straßenkontaktpunkte 285
Sturz 127
 -kurve 384
 -seitenkraft 182
 winkel 127
 -winkel 182
 -winkel 192
 winkelkurve 155
Subsysteme eines Fahrzeugmodells
 18
Symbole
 Gelenk-Körper-Darstellung 64,
 65
System 11
 Finite-Elemente- 16
 holonomes 85
 kontinuierliches 16
 mechanisches 14
 mechatronisches 7
 nichtholonomes 85
Systemabgrenzung 226
Systemdynamik 12
Systemmatrix 254
- T**
- Tangentialspannungen** 173
Tellerrad 220
Tensor 25
 schiefsymmetrischer 42
Tensor 2. Stufe 31
Tensorprodukt 31
Testgelände virtuelles 410
Topologie 52
topologische Methoden 69

- topologische Struktur 64
Torsionsstab 238
Trägheitskraft 88
Trägheitstensor 103, 394
Transformation
 Koordinaten 30
Transformationsmatrix
 Eigenschaften 30
 Orthogonalitätsbedingung 30
Translation 33
Translationsgeschwindigkeit
 absolute 294
Trapezlenker 125
Trapezlenker-Hinterradaufhängung
 Blockschaltbild 351
 reales System 350
 Strukturbild 350
- U**
- Überschlag
 erkennung 406
 neigung 418
Überschlagerkennung 406
Überschlagunfallgeschehen 406
Überschwingweite 405
Übertragungselement 73
Übertragungsmechanismen 73
Umfangs
 kraft 165, 176
 schlupf 167
 steifigkeit 176, 201, 203
Umfangsschlupfkurve 177
Umgebungsbedingungen 18
Umgebungswind 231
Use- und Misuse-Fälle 417
Use-Versuche 412, 417
- V**
- Validierung 383, 385, 388, 389, 410
VDA-Slalomtest 412
VDA-Spurwechseltest 413, 416
Vector-Loop-Methoden 68
Vektor 25
 der verallgemeinerten
 eingeprägten Kräfte 89
- der verallgemeinerten
 Koordinaten 89
der verallgemeinerten
 Kreiselkräfte 89
 physikalischer 27
Vektorfunktion
 lineare 31
Vektorprodukt 32
verallgemeinerte Koordinaten 89
Verbundlenkerachse 116, 118
Verifikation 383, 384
Verschiebung 55
Verschiebungen
 virtuelle 94, 95, 369
Verzahnungseffekte 166
Verzögerungsglied erster Ordnung
 203
Vierlenker-Hinterradaufhängung
 Blockschaltbild 344
 reales System 342
 Strukturbild 343
 Topologie 344
Viertelfahrzeugmodell 130
 ebenes 130
 virtuelle
 Geschwindigkeitsänderungen 85
 virtuelle Leistung 85
 virtuelle Verschiebung 84, 88
 virtuelle Verschiebungen
 unabhängige 89
Volumenkraft 227
Vorderradaufhängung 114
Vorlauf 129
Vorspurwinkel 127
Vorwärtskinematik 72
- W**
- Wälzen 167
Wankbewegung 266
Wankdämpfungen 430
Wankdynamik 429
Winkelastizitäten 430
Wankmodell
 lineares 266
Wankmodell 430

- Wankmoment 266
Wankmomentenverteilung 437
 aktive 440
Wankpol 266
Wankreduzierung 429
Wankschwingungen 130
Wankstabilisierung 239, 433
Wanksteifigkeit 236
Wankwinkel 105
Wechselböschung 412, 413, 416
Wechselwirkungen 40
Winkelbeschleunigung 107
Winkelgeschwindigkeit 107
- Winkelgeschwindigkeit des starren
 Körpers 87
Wulstring 160, 161
- Z**
- Zentraldifferential 288
Zentripetalbeschleunigung 39
Zentripetalkraft
 verallgemeinerte 104
Zugstrebe 115
Zustandsgleichungen 291
Zwangsbewegung 15
Zwei-Punkt-Lenker 125
Zweispurmodell 277