本科课程设计报告

项 目 名 称： 饮酒驾车微分方程模型

课 程 名 称： 数学建模

姓 名 学 号： 朱自恺 2015053751

姜雪慧 2015053726

文 迪 2016053364

院 系 专 业： 电子商务

指 导 教 师： 赵新建

教 师 单 位： 暨南大学深圳旅游学院

开 课 时 间：2017 ~ 2018 学年度第 二 学期

暨南大学教务处

2018 年 6 月 10 日

目　录

饮酒驾车微分方程模型

[摘要]

国家质量验检局 2004 年规定了新的驾驶人员血液中的酒精含量标准。本文针对司机喝酒后血液中的酒精含量是否符合驾车标准这一问题，通过 MATLAB 的 dsolve、nlinfit、solve、fzero、diff、plot、ezplot 等函数，建立了三种不同情况下体液内酒精含量随时间变化的数学模型，并创新性地使用了微分方程的迭代方法。所建立的模型可以为司机提供理论上的依据，给喝酒的司机提供如何合理安排饮酒时间、以达到有效避免饮酒驾车的策略。

[关键词]

饮酒驾车；数学模型；微分方程；MATLAB

引言

“酒驾”即酒后驾车，包括饮酒驾车和醉酒驾车。随着我国经济的高速发展，我国汽车数量急剧增加，重大交通事故迅速攀升，给人民群众的生命和财产造成巨大的损失，酒后驾车、醉酒驾车等引发了一系列重大交通事故。据公安部交通管理局数据显示：2009 年 8 月 15 日至 12 月 31 日，公安部门整治酒驾专项活动期间，全国查处酒后驾驶案例 31.3 万起，其中醉酒驾驶 4.2 万起；2006 年至 2010 年，每年因酒后驾驶有 3500 余人死亡和 9000 余人受伤。根据《中华人民共和国道路交通安全法》的规定，交管部门对饮酒与醉酒的处罚是有区别的，但对饮酒和醉酒的认定标准却一直没有明确。

国际质量监督检验检疫总局 2004 年 5 月 21 日发布的《车辆驾驶人员血液、呼气酒精含量阀值与检验》国家标准（GB19522-2004），为交管部门依法认定酒后驾车这一交通违法行为提供了依据：驾驶人血液中酒精含量大于（等于）20 毫克/100 毫升、小于 80 毫克/100 毫升的定位属于饮酒驾驶，大于等于 80 毫克/100 毫升的视为醉酒驾驶。

这个标准的制定为交警提供了严格而统一的检查尺度。根据这个标准，驾驶员只要控制饮酒量，合理安排饮酒时间，就可以做到既不损害生活质量，又不逾越交通安检标准。

查找相关资料可知，一个人喝酒后的一段时间内，酒精首先通过口腔进入胃中，胃里的酒精按照一定的速度逐步转移到体液（包括血液）中，体液中的酒精经过新陈代谢逐渐排出体外，且酒精在体液中和血液中的含量是大致相等的，因此本文只研究酒精在体液中的占比，即代表了酒精在血液中的占比。

体重约 70kg的某人在短时间内喝下 2 瓶啤酒后，隔一定时间测量他的血液中酒精含量（毫克 / 百毫升），得到数据如下：

时间（h）	0.25	0.5	0.75	1	1.5	2	2.5	3
酒精含量（mg/hml）	30	68	75	82	82	77	68	68
时间（h）	3.5	4	4.5	5	6	7	8	9
酒精含量（mg/hml）	58	51	50	41	38	35	28	25
时间（h）	10	11	12	13	14	15	16	
酒精含量（mg/hml）	18	15	12	10	7	7	4	

为了便于研究，需要在建立具体模型之前先做如下假设：

（1）体液的体积V在整个过程中保持不变；

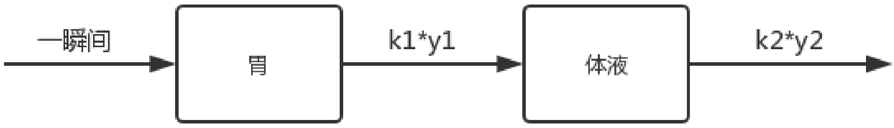
（2）酒精在进入胃和体液的过程中都没有消耗，而酒精在胃和体液中都是均匀分布；

（3）酒精变化的动态过程是单向性和单一的，只能从胃向体液中转移，从体液中排出体外，不考虑从体液向胃的逆渗透，也不考虑酒精从其他途径排出体外；

（4）酒精的转移速率与酒精转出位置的含量成正比；

以上四条假设适用于全文中所有模型。

模型一



模型一假定酒精瞬间全部进入胃中，并以k_1速度进入体液，k_2速度从体液排出体外。

胃中酒精绝对值为y_1（mg），体液中酒精绝对值为y_2（mg），1 瓶啤酒中酒精绝对值为 Q（mg）。从而可以列出式子：

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{dt}} = -k_1 \times y_1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ y_1(0) = nQ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{dt}} = k_1 \times y_1 - k_2 \times y_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3) \\ y_2(0) = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4) \end{cases}$$

式子（1）表示胃中酒精绝对值的变化率等于酒精从胃流入体液的速度乘以胃中的酒精绝对值，式子（2）表示胃中初始的酒精含量为 n 瓶啤酒中的酒精含量 nQ，式子（3）表示体液中的酒精绝对值变化率等于从胃中流入的酒精增加量减去通过体液排出体外的酒精量，式子（4）表示体液中初始的酒精含量为 0。

用 MATLAB 的 dsolve 函数求解微分方程[1]，结果为：

$$\begin{cases} y_1 = 2Qe^{-k_1 t} \\ y_2 = \frac{2k_1 \mathrm{Q}(e^{-k_2 t} - e^{-k_1 t})}{k_1 - k_2} \end{cases}$$

[1] 附录 2.1.1

设体液体积为 V（hml），令 $x=\frac{y2}{V}$，故 x 为体液中酒精含量（mg/hml），引入 k3 用于简化，从而可以列出式子：

$$\begin{cases} x = k_3(e^{-k_2 t} - e^{-k_1 t}) \\ k_3 = \frac{nk_1 Q}{V(k_1 - k_2)} \end{cases}$$

题目中给出的数据是基于短时间内喝下两瓶啤酒得到的，故取 n=2，使用 MATLAB 的 nlinfit 非线性拟合函数代入题目给出的数据拟合[2]，得出结果为：

$$\begin{cases} k_1 = 2.0079 \\ k_2 = 0.1855 \\ k_3 = 114.4326 \end{cases}$$

将结果代入$k_3 = \frac{2k_1 Q}{V(k_1 - k_2)}$，得$\frac{Q}{V}$＝51.9303mg/hml。

那么，拟合出来的数据$\frac{Q}{V}$＝51.9303mg/hml 是否合理呢？收集数据可得：每瓶啤酒的体积约为 640ml，取啤酒的酒精浓度为 4.5 度，酒精的密度为 0.8g/ml，所以喝 1 瓶啤酒的酒精总量为 Q＝640×0.045×0.8×1000＝23040mg。根据题目给出的数据，人的体液占人的体重的 65%至 70%，设定人的体重为 70kg，体液的密度约为 1.05g/ml，所以：

当人的体液占人的体重的 65%时：

$$V = \frac{70\times0.65\times10}{1.05} = 433.33\text{hml}$$

$$\frac{Q}{V} = \frac{23040}{433.33} = 53.17\text{mg/hml}$$

当人的体液占人的体重的 70%时：

$$V = \frac{70\times0.7\times10}{1.05} = 466.67\text{hml}$$

$$\frac{Q}{V} = \frac{23040}{466.67} = 49.37\text{mg/hml}$$

[2] 附录 2.1.2

之前用 MATLAB 计算出的结果$\frac{Q}{V}$＝51.9303mg/hml，在 49.37mg/hml 至 53.17mg/hml 范围内，所以经检验该结果符合实际情况，具有合理性。

使用 MATLAB 的 plot 函数画出原始点和拟合函数图像[3]（图 1）。

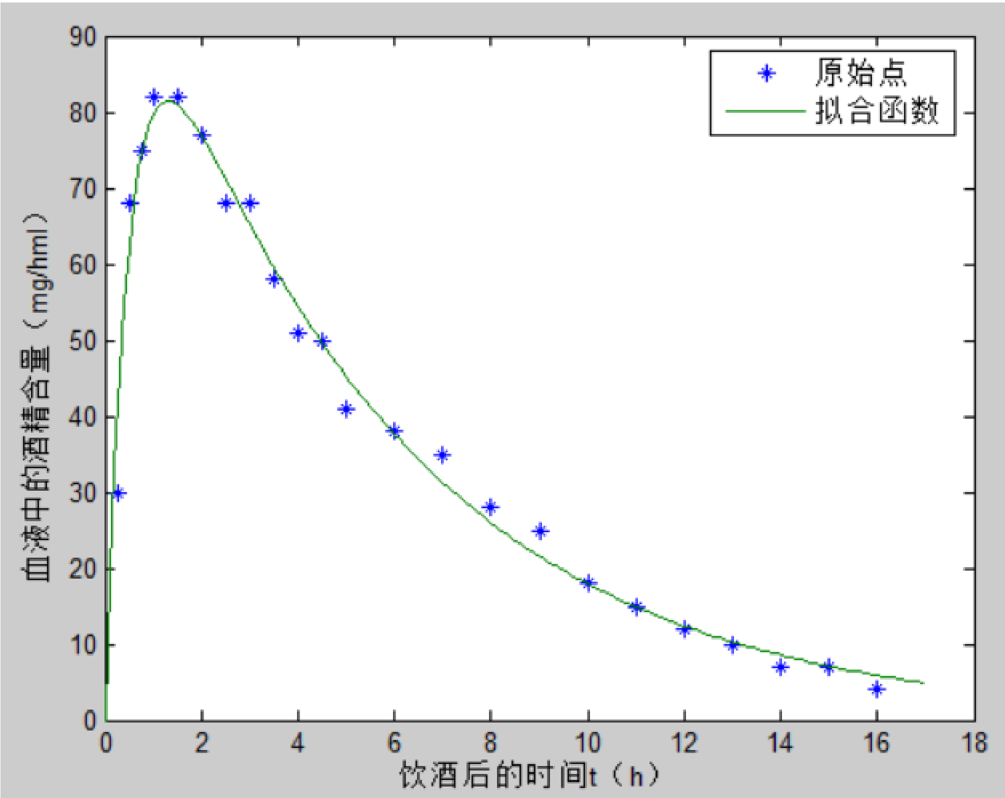


图 1：题目给出的数据和拟合后的函数

由图可见，拟合效果良好。

[3] 附录 2.1.3

问题 1

大李在中午 12 点喝了一瓶啤酒，下午 6 点检查时符合新的驾车标准，紧接着他在吃晚饭时又喝了一瓶啤酒，为了保险起见他呆到凌晨 2 点才驾车回家，又一次遭遇检查时却被定为饮酒驾车，对大李碰到的情况做出解释。

假定大李在第一次喝酒之前没有喝酒，且每次喝酒都在短时间内喝完，可以认为是瞬间喝完，所以大李在第一次喝酒后、第二次喝酒前体内的酒精含量符合模型一。利用模型一的数学解释如下：

模型一基于瞬间喝下两瓶啤酒的数据，问题一中大李两次各喝了一瓶啤酒，故取 n=1，代入模型一种的 x，即大李在喝下第一瓶酒后、第二瓶酒前的情况下，其体内的酒精含量：

$$\mathrm{x}=\frac{k_1\mathrm{Q}}{V(k_1-k_2)}\left(e^{-k_2t}-e^{-k_1t}\right)$$

大李在下午 6 点第一次受检查时，距离中午 12 点喝酒间隔 6 小时，因此在 MATLAB 中代入 t＝6[4]，得$\mathrm{x}=$18.7991。该结果表明大李下午 6 时的体内酒精含量为 18.7791mg/hml，小于新标准中规定的 20mg/hml，所以符合新的驾车标准，不为酒驾。

假设大李距离前一次喝酒 s 小时后再喝一瓶啤酒，此时胃和体液中分别残留$y_1(s)$毫克和$y_2(s)$毫克的酒精。新喝下一瓶啤酒后，胃中酒精含量的绝对值为y_3毫克，体液中为y_4毫克。重新建立微分方程模型如下：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{dt}}=-k_1\times y_3 & \cdots\cdots(1)\\ y_3(0)=nQ+y_1(s)/2 & \cdots\cdots(2)\\ \dfrac{\mathrm{d}y_4}{\mathrm{dt}}=k_1\times y_3-k_2\times y_4 & \cdots\cdots(3)\\ y_4(0)=y_2(s)/2 & \cdots\cdots(4)\end{cases}$$

[4] 附录 2.2.1

式子（1）表示胃中酒精绝对值的变化率等于酒精从胃流入体液的速度乘以胃中的酒精绝对值，式子（2）表示胃中初始酒精含量为喝入酒精量加上上次残留，式子（3）表示体液中的酒精绝对值变化率等于从胃中流入的酒精增加量减去通过体液排出体外的酒精量，式子（4）表示体液中初始的酒精含量为上次残留。

用 MATLAB 的 dsolve 函数求解微分方程[5]，可得：

$$\begin{cases} y_3 = (Q + y_1(s))e^{-k_1 t} \\ y_4 = \dfrac{\left(k_1 Q + k_1 y_1(s) + k_1 y_2(s) - k_2 y_2(s)\right)e^{-k_2 t} - k_1 (Q + y_1(s)) e^{-k_1 t})}{k_1 - k_2} \end{cases}$$

设大李此时体液酒精含量为x_2（mg/hml），$x_2 = \frac{y_4}{V}$，代入$y_1(s)$，$y_2(s)$，得：

$$x_2 = \frac{k_1 Q}{V(k_1 - k_2)}((1 + e^{-k_2 s})e^{-k_2 t} - (1 + e^{-k_1 s})e^{(k_2 - k_1)t})$$

使用 plot 函数画出大李两次喝酒后体内酒精含量变化函数图像[6]（图 2）。

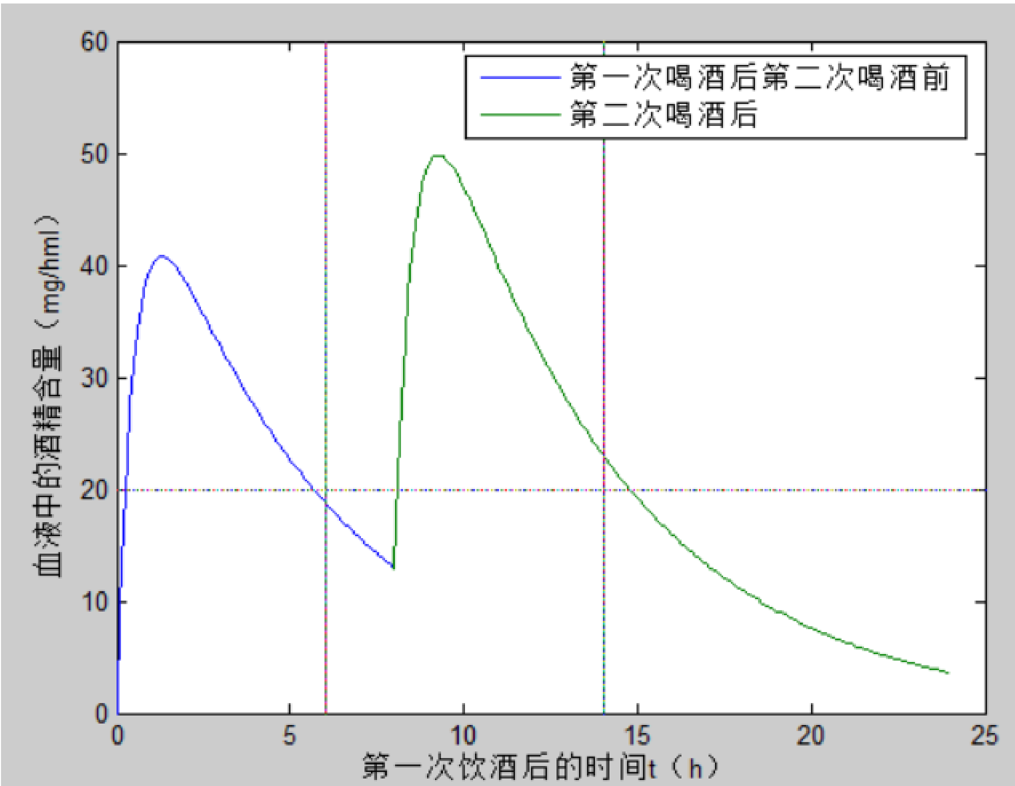


图 2：大李两次喝酒后体内酒精含量变化函数

5 附录 2.2.2

6 附录 2.2.3

假设大李 8 点喝了第二次酒，那么 s＝8，t＝6，将值带入上式x_2的方程中，用 MATLAB 求解得[7]：x_2＝23.0607，此时大李体内的酒精含量为 23.0607mg/hml，大于新标准中规定的 20mg/hml，不符合新的驾车标准，属于饮酒驾车。

那么大李在几点前第二次喝酒才不会在凌晨 2 点时检查出酒驾呢？用数学建模做了如下分析：

第一次喝酒到第二次喝酒的间隔 s 和第二次喝酒到遭遇检查的间隔为 t，二者之和为 14 小时，故令 s＝14-t，建立x_2与 t 的函数关系。要求解凌晨 2 点不会检测出酒驾，即要求寻找令 $x_2-20=0$ 的点 t：

$$x_2=\frac{k_1Q}{V(k_1-k_2)}(\left(1+e^{-k_2(14-t)}\right)e^{-k_2t}-\left(1+e^{-k_1(14-t)}\right)e^{(k_2-k_1)t})-20=0$$

使用 MATLAB 的 fzero 函数寻找零点[8]，解得：t＝6.9584。

所以，在第二次检查前 6.9584 小时，即晚上 7.0416 时，约 7:03 之前饮酒，将检测不出酒驾。

[7] 附录 2.2.4
[8] 附录 2.2.5

问题 2（假设 1）

在很短时间内喝了 3 瓶啤酒或者半斤低度白酒后多长时间内驾车就会违反上述标准？

查找相关资料可知，半斤低度白酒和 3 瓶啤酒中的酒精含量是大致相等的，所以只考虑喝了 3 瓶啤酒的情况。可以认为酒是在瞬间喝完的，符合模型一的假设，其中 n 取 3，即该问中人体液中的酒精含量 x（mg/hml）符合：

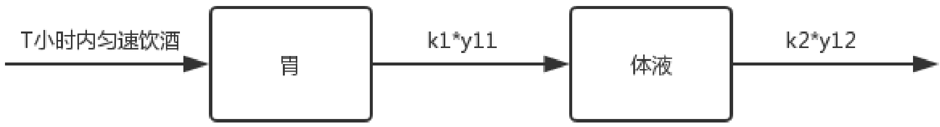
$$\mathrm{x}=\frac{3k_1\mathrm{Q}}{V(k_1-k_2)}\left(e^{-k_2t}-e^{-k_1t}\right)$$

接着使用 MATLAB 的 fzero 函数寻找令$x=20$的点 t[9]。

解得 t＝11.5888。所以在喝了 3 瓶啤酒或者半斤低度白酒后 11.5888 小时，约合 11 小时 35 分钟内驾车就会违反上述标准。

[9] 附录 2.3.1

模型二



模型一中，假设酒在瞬间喝完，不符合实际情况，有一定缺陷，不能解决之后的问题。故建立模型二，假设酒并不是瞬间喝完，全部进入胃中，而是在 T 小时内匀速喝完。模型中其它条件不变。

（1）当 0≤t≤T 时，设胃中酒精绝对值为y_{11}（mg），体液中酒精绝对值为y_{12}（mg），可以列出如下式子：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_{11}}{\mathrm{dt}} = \dfrac{nQ}{T} - k_1 \times y_{11} \cdots\cdots (1) \\ y_{11}(0) = 0 \cdots\cdots (2) \\ \dfrac{\mathrm{d}y_{12}}{\mathrm{dt}} = k_1 \times y_{11} - k_2 \times y_{12} \cdots\cdots (3) \\ y_{12}(0) = 0 \cdots\cdots (4) \end{cases}$$

式子（1）表示此时胃中酒精绝对值的变化率等于在 T 小时内每小时进入胃中的酒精绝对值减去酒精从胃流入体液的速度乘以胃中的酒精绝对值，式子（2）表示胃中初始的酒精含量为 0，式子（3）表示体液中的酒精绝对值变化率等于从胃中流入的酒精增加量减去通过体液排出体外的酒精量，式子（4）表示体液中初始的酒精含量为 0。

（2）当 t≥T 时，设胃中酒精绝对值为y_{21}（mg），体液中酒精绝对值为y_{22}（mg），可以列出如下式子：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_{21}}{\mathrm{dt}} = -k_1 \times y_{21} \cdots\cdots (1) \\ y_{21}(T) = y_{11}(T) \cdots\cdots (2) \\ \dfrac{\mathrm{d}y_{22}}{\mathrm{dt}} = k_1 \times y_{21} - k_2 \times y_{22} \cdots\cdots (3) \\ y_{22}(T) = y_{12}(T) \cdots\cdots (4) \end{cases}$$

式子（1）表示此时胃中酒精绝对值的变化率等于酒精从胃流入体液的速度乘以胃中的酒精绝对值，式子（2）表示胃中 T 时刻的酒精绝对值，由于胃中酒精变化是个连续函数，所以$y_{21}(T)=y_{11}(T)$，式子（3）表示体液中的酒精绝对值变化率等于从胃中流入的酒精增加量减去通过体液排出体外的酒精量，式子（4）表示体液中 T 时刻的酒精含量，同理$y_{22}(T)=y_{12}(T)$。

用 MATLAB 的 dsolve 函数求解微分方程[10]，结果为：

$$
\begin{cases}
y_{11}=\dfrac{nQ(1-e^{-k_1t})}{k_1T} \\
y_{12}=\dfrac{\mathrm{nQ}}{k_2T}+\dfrac{\mathrm{nQ}e^{-k_1t}}{(k_1-k_2)T}-\dfrac{\mathrm{nQ}k_1e^{-k_2t}}{k_2(k_1-k_2)T} \\
y_{21}=\dfrac{nQ(1-e^{-k_1T})e^{-k_1(t-T)}}{k_1T} \\
y_{22}=\dfrac{\mathrm{nQ}(k_1e^{-k_2(t-T)}-k_1e^{-k_2t}-k_2e^{-k_1(t-T)}+k_2e^{-k_1t})}{k_2(k_1-k_2)T}
\end{cases}
$$

酒精在体液中的含量 x（mg/hml）分别为$\frac{y_{12}}{\mathrm{V}}$(0≤t≤T)和$\frac{y_{22}}{\mathrm{V}}$(t≥T)，化简式子得：

$$
x=\begin{cases}
\dfrac{nk_1\mathrm{Q}(k_1-k_2+k_2e^{-k_1t}-k_1e^{-k_2t})}{V(k_1-k_2)k_1k_2T} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & 0\leqslant t\leqslant T \\
\dfrac{nk_1\mathrm{Q}(k_1e^{-k_2(t-T)}-k_2e^{-k_1(t-T)}+k_2e^{-k_1t}-k_1e^{-k_2t})}{V(k_1-k_2)k_1k_2T} \cdots\cdots & t\geqslant T
\end{cases}
$$

[10] 附录 2.4.1

问题 2（假设 2）

在喝了 3 瓶啤酒或者半斤低度白酒后多长时间内驾车就会违反上述标准？酒是在较长一段时间（比如 2 小时）内喝的。

此问适用于模型二，其中 n=3。显然，必然在喝完酒后一段时间内，体内酒精含量才有可能降低到 20mg/hml 以下，所以只考虑 t≥T 的情况：

$$x = \frac{3k_1Q(k_1e^{-k_2(t-T)}-k_2e^{-k_1(t-T)}+k_2e^{-k_1t}-k_1e^{-k_2t})}{V(k_1-k_2)k_1k_2T}$$

令 T＝2,用 MATLAB 的 fzero 函数寻找令 x-20＝0 的 t[11]:解得 t＝ 12.6197。所以在喝了 3 瓶啤酒或者半斤低度白酒后 12.6197 小时（约合 12 小时 37 分钟）内驾车就会违反上述标准。

使用 plot 函数画出 2 小时喝 3 瓶啤酒体液内酒精含量的变化情况[12]（图 3）。

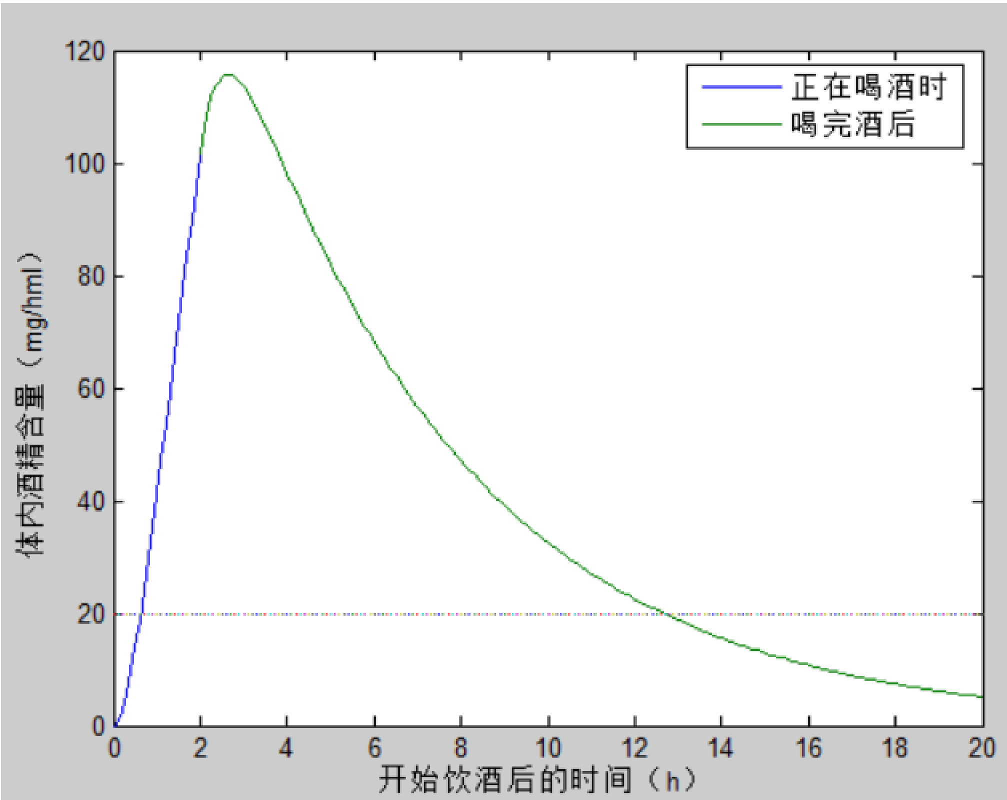


图 3：2 小时喝 3 瓶啤酒，体液内酒精含量的变化情况

[11] 附录 2.5.1
[12] 附录 2.5.2

那么，对于任意的喝酒时长，之后多长时间内开车会违反标准呢？即探求一下对任意 T 小时，体内酒精含量降到 20 的 t 的函数关系 t(T)，即解酒时间与饮酒时长的关系。

首先，先使用 MATLAB 的 solve 函数，尝试寻找 t 与 T 的函数关系 t＝f(T)[13]，但 MATLAB 显示无法找到解析解。

使用 MATLAB 的 ezplot 函数，画出隐函数 f(t,T)＝0 的函数图像[14]，即解酒时间与饮酒时长的关系（图 4）。

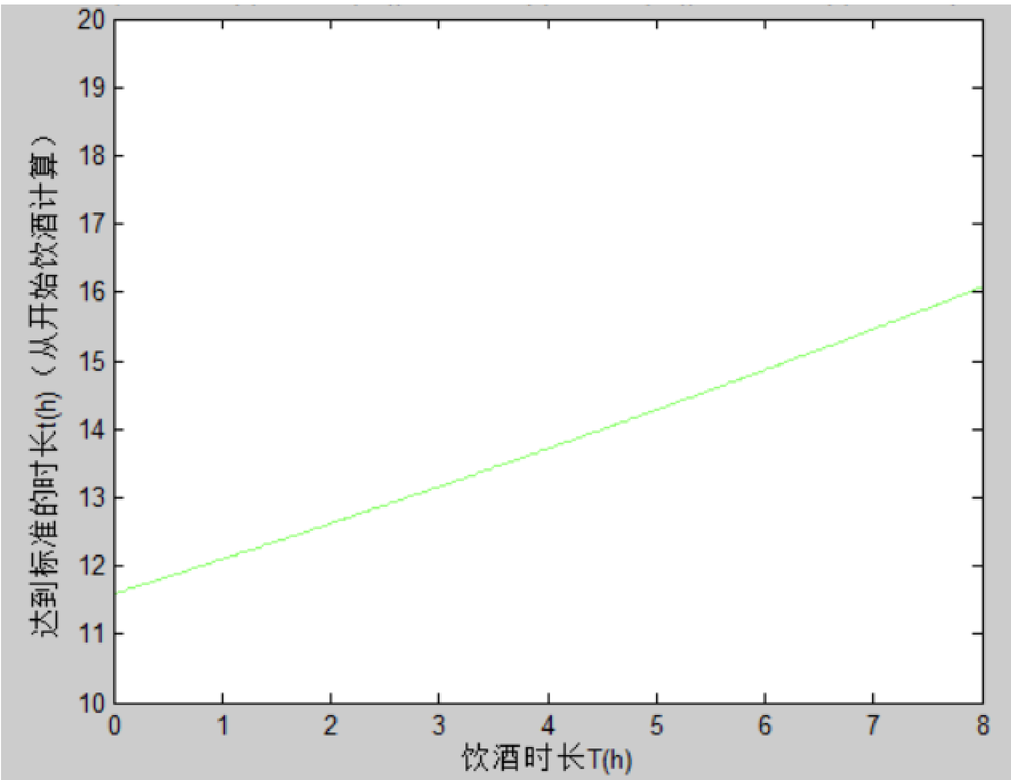


图 4：解酒时间与饮酒时长的关系

[13] 附录 2.5.3
[14] 附录 2.5.4

问题 3

怎样估计血液中的酒精含量在什么时间最高？

显然，可以对体液中酒精含量函数 x=f(t)求导，当$f'(t)=0$时，x 达到最大值，即酒精含量最高。

假设 1

该人在短时间内喝完酒，可以理解为瞬间喝完，符合模型一。此时体内酒精含量 x 符合：

$$x=\frac{nk_1Q}{V(k_1-k_2)}(e^{-k_2t}-e^{-k_1t})$$

使用 MATLAB 的 diff 函数对 t 求导[15]，可得导数为：

$$x'=\frac{nk_1Q}{V(k_1-k_2)}(-k_2e^{-k_2t}+k_1e^{-k_1t})$$

使用 MATLAB 的 solve 函数求令$x'=0$的 t[16]，得 t=1.3070。

所以，当某人在短时间内喝完酒后，在 1.3070 小时（约合 1 小时 18 分钟）后，体内酒精含量达到最高。

假设 2

该人在一段时间 T(h)内匀速喝酒，符合模型二。显然，体液内酒精含量达到最高点的时刻是在饮酒结束之后的某时，所以只需要考虑 t>T 时的 x：

$$x=\frac{nk_1Q(k_1e^{-k_2(t-T)}-k_2e^{-k_1(t-T)}+k_2e^{-k_1t}-k_1e^{-k_2t})}{V(k_1-k_2)k_1k_2T}$$

[15] 附录 2.6.1

[16] 附录 2.6.2

使用 MATLAB 的 diff 函数对 t 求导[17]，可得导数为：

$$x' = \frac{nk_1 Q(-e^{-k_2(t-T)}+e^{-k_1(t-T)}-e^{-k_1 t}+e^{-k_2 t})}{V(k_1-k_2)T}$$

使用 MATLAB 的 solve 函数求令$x'=0$的 t（由 T、k_1、k_2表示）[18]，建立 t 和 T 的函数关系 t(T)，即酒精含量最高点与饮酒时长的关系：

$$t = \frac{\log(\frac{e^{k_1 T-1}}{e^{k_2 T-1}})}{k_1-k_2}$$

使用 plot 函数画出饮酒时长和达到酒精含量最高的时间的函数（图 5）[19]。

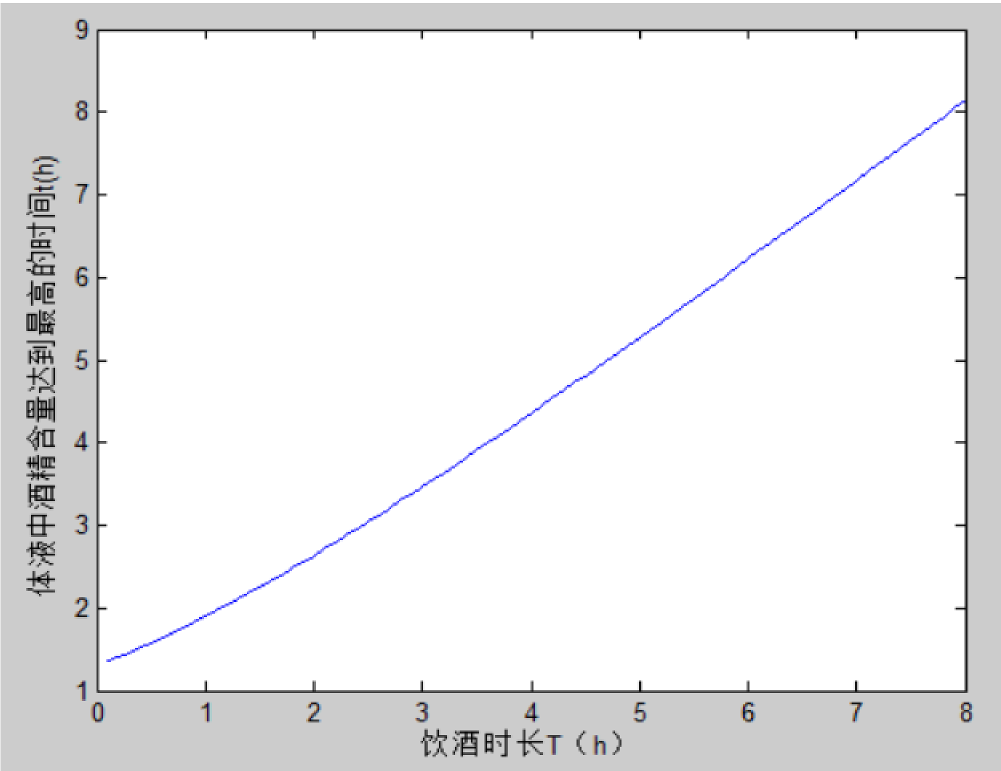


图 5：饮酒时长和达到酒精含量最高的时间（从开始喝酒计算）的关系

17 附录 2.7.1
18 附录 2.7.2
19 附录 2.7.3

模型三

模型一和模型二都是基于一次喝酒而建立的，即喝酒前体液内不含有酒精。然而现实中，人们会经常喝酒，所以必须考虑某次喝酒时体内残余的上一次喝酒的酒精含量。为解决前两个模型的不足，故基于模型一建立模型三。

模型三的假设如下：

（1）某人每次喝酒都在瞬间喝完（同模型一）；

（2）某人喝酒的间隔固定为 s（h）；

（3）每次喝酒时，胃中的酒精绝对值（mg）为此次喝酒的量加上上一次的酒精残余，体液中的酒精绝对值（mg）为上一次的酒精残余。

所以，某人在第 i 次喝酒后，第 i+1 次喝酒前，胃液中酒精绝对值$y_1[i]$（mg）和体液中酒精绝对值$y_2[i]$（mg）的变化情况符合如下关系（其中 i→+∞）：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}y_1[i]}{\mathrm{dt}} = -k_1 \times y_1[i] & \cdots\cdots(1) \\
y_1[i](0) = nQ + y_1[i-1](s) & \cdots\cdots(2) \\
\dfrac{\mathrm{d}y_2[i]}{\mathrm{dt}} = k_1 \times y_1[\mathrm{i}] - k_2 \times y_2[i] & \cdots\cdots(3) \\
y_2[i](0) = y_2[i-1](s) & \cdots\cdots(4)
\end{cases}
$$

可见，这是一个微分方程的迭代过程。由于笔者水平有限，无法使用 MATLAB 进行微分方程的迭代，故取 i=1,2,3,4，观察所求结果，并进行合理猜测。

使用 MATLAB 的 dsolve 函数求$y_1[i]$的前四项[20]，结果如下：

$$
\begin{cases}
y_1[1] = n\mathrm{Q}e^{-k_1 t} \\
y_1[2] = n\mathrm{Q}e^{-k_1 t}(1 + e^{-k_1 s}) \\
y_1[3] = n\mathrm{Q}e^{-k_1 t}(1 + e^{-k_1 s} + e^{-2k_1 s}) \\
y_1[4] = n\mathrm{Q}e^{-k_1 t}(1 + e^{-k_1 s} + e^{-2k_1 s} + e^{-3k_1 s})
\end{cases}
$$

[20] 附录 2.8.1

可以猜测，当 i→+∞不断迭代，即一直喝酒后：

$$y_1[i]=n\mathrm{Q}e^{-k_1t}\lim_{i\to+\infty}\sum_{m=0}^{i-1}e^{-\mathrm{m}k_1s}$$

可见，$\lim_{i\to+\infty}\sum_{m=0}^{i-1}e^{-\mathrm{m}k_1s}$是一个等比数列的无穷级数，结果为$\frac{1}{(1-e^{-k_1s})}$，代入$y_1[i]$可得：

$$y_1[i]=\frac{n\mathrm{Q}e^{-k_1t}}{(1-e^{-k_1s})}$$

将$y_1[i]$代入y_2的微分方程，使用 dsolve 函数求$y_2[i]$的前四项[21]，结果如下：

$$\begin{cases}y_2[1]=\frac{nk_1\mathrm{Q}(e^{-k_2s}-e^{-k_1t})}{(1-e^{-k_1s})(k_1-k_2)}\\ y_2[2]=\frac{nk_1\mathrm{Q}(e^{-k_2t}(1+e^{-k_2s}-e^{-k_1s})-e^{-k_1t})}{(1-e^{-k_1s})(k_1-k_2)}\\ y_2[3]=\frac{nk_1\mathrm{Q}(e^{-k_2t}(1+e^{-k_2s}+e^{-2k_2s}-e^{-k_1s}-e^{-k_1s-k_2s})-e^{-k_1t})}{(1-e^{-k_1s})(k_1-k_2)}\\ y_2[4]=\frac{nk_1\mathrm{Q}(e^{-k_2t}(1+e^{-k_2s}+e^{-2k_2s}+e^{-3k_2s}-e^{-k_1s}-e^{-k_1s-k_2s}-e^{-k_1s-2k_2s})-e^{-k_1t})}{(1-e^{-k_1s})(k_1-k_2)}\end{cases}$$

可以猜测，当 i→+∞不断迭代，即一直喝酒后：

$$y_2[i]=\frac{nk_1\mathrm{Q}(e^{-k_2t}\lim_{i\to+\infty}(\sum_{m=0}^{i-1}e^{-mk_2s}-e^{-k_1s}\sum_{m=0}^{i-2}e^{-mk_2s})-e^{-k_1t})}{(1-e^{-k_1s})(k_1-k_2)}$$

同理，$\lim_{i\to+\infty}\sum_{m=0}^{i-1}e^{-mk_2s}=\lim_{i\to+\infty}\sum_{m=0}^{i-2}e^{-mk_2s}=\frac{1}{1-e^{-k_2s}}$，代入$y_2[i]$：

$$y_2[i]=\frac{nk_1\mathrm{Q}}{(k_1-k_2)}\left(\frac{e^{-k_2t}}{1-e^{-k_2s}}-\frac{e^{-k_1t}}{1-e^{-k_1s}}\right)$$

令 x=$\frac{y_2[i]}{V}$，则 x 表示经常喝酒后，体液中酒精含量（mg/hml）的函数：

$$x=\frac{nk_1\mathrm{Q}}{V(k_1-k_2)}\left(\frac{e^{-k_2t}}{1-e^{-k_2s}}-\frac{e^{-k_1t}}{1-e^{-k_1s}}\right)\quad(0\leqslant t\leqslant s)$$

[21] 附录 2.8.2

问题 4

如果天天喝酒，是否还能开车？

由于该题目并未对“天天喝酒”的概念作出具体要求，故根据题意和日常实际生活，结合假设的可操作性，基于模型三做出如下两种情况的假设。

假设 1

某人每隔固定间隔 s（h），在短时间内（视为瞬间）喝下一瓶啤酒。

基于此假设，该人在某次喝酒之前的一瞬间，体液内酒精含量达到最低点。故研究此人是否可以开车，只需研究此人在 t=s（即喝酒前一瞬间）时，体液内的酒精含量。如果此时的酒精含量低于 20mg/hml，则该人仍然有机会开车，否则则永远不能开车。因此假设每次喝一瓶啤酒，取 n=1，令 t=s，建立$x_1 = f(s)$：

$$x_1 = \frac{k_1 Q}{V(k_1 - k_2)}\left(\frac{e^{-k_2 s}}{1-e^{-k_2 s}} - \frac{e^{-k_1 s}}{1-e^{-k_1 s}}\right)$$

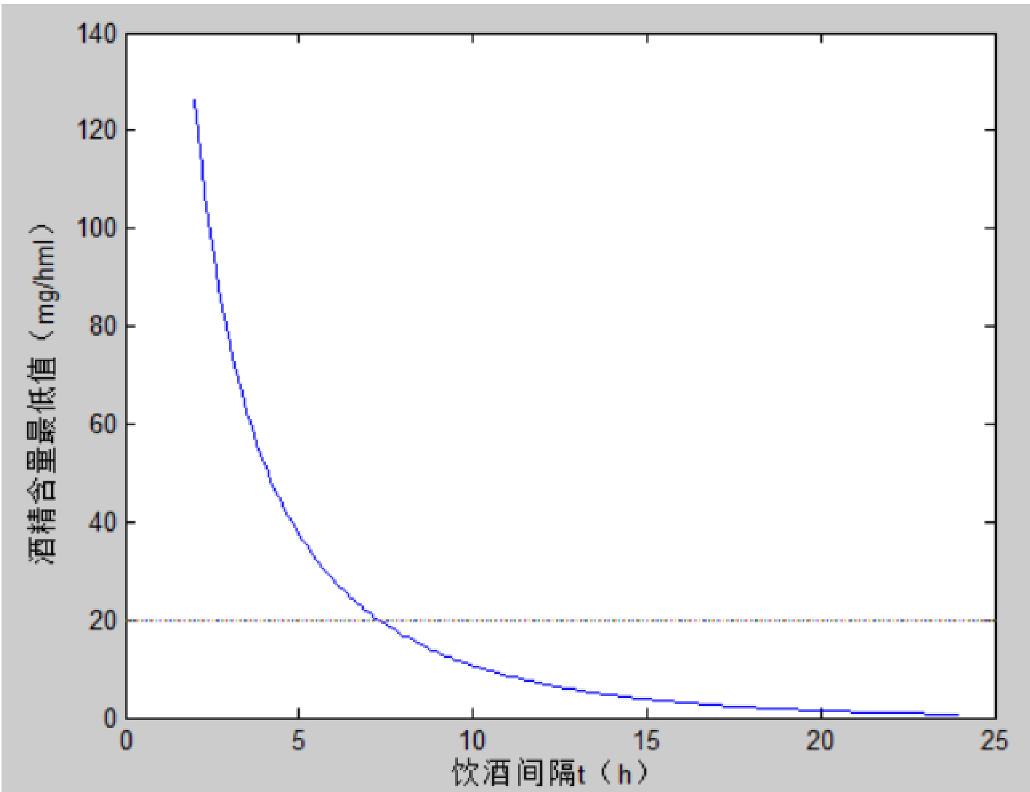


图 6：两次饮酒之间的间隔与喝酒前一瞬间酒精含量的关系

使用 MATLAB 的 plot 函数画出两次饮酒之间的间隔与最低酒精含量（下次喝酒前一瞬间时酒精含量）的函数（图 6）[22]。

使用 fzero 函数，求令$x_1-20=0$的 s[23]，得 s=7.2824。

所以，若饮酒间隔为 7.2824 小时（约合 7 小时 17 分钟），该人每天在喝酒前的一瞬间体液内酒精含量达到最低点，刚好达到酒驾标准临界点 20mg/hml，所以该人一直不能开车。如果该人饮酒间隔长于 7.2824 小时，还是有一些时间段是可以开车的。

另外，上述结论还可以理解为，如果每天喝酒$\frac{24}{7.2824}$=3.2956 瓶，也刚好永远不能开车，而如果少于 3.2956 瓶，则还是可以开车的（假定两次喝酒之间间隔不变）。

使用 plot 函数画出每天喝酒瓶数与最低酒精含量的函数（图 7）[24]。

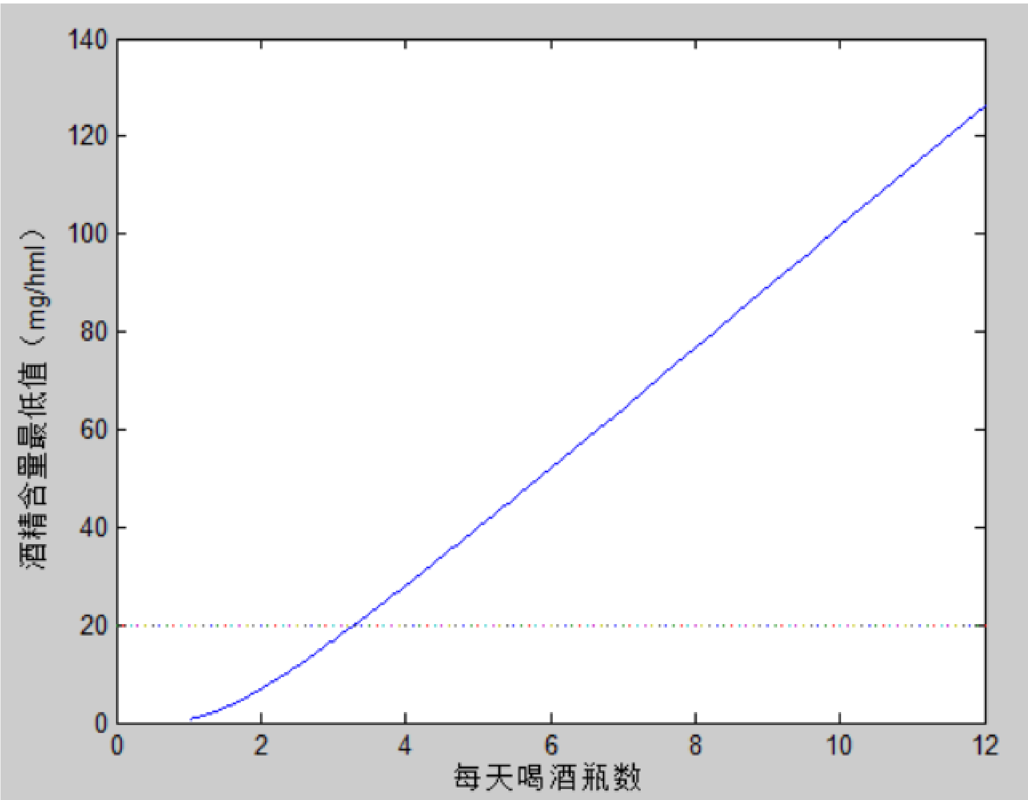


图 7：每天喝酒瓶数与喝酒前一瞬间酒精含量的关系

[22] 附录 2.9.1
[23] 附录 2.9.2
[24] 附录 2.9.3

假设 2

某人每天均在某一个固定时间点，饮用固定数量的酒，在短时间内（视为瞬间）喝完。

显然，在此假设中，s=24。建立$x_2 = f(n,t)$：

$$x_2 = \frac{nk_1\text{Q}}{V(k_1-k_2)}(\frac{e^{-k_2 t}}{1-e^{-24k_2}} - \frac{e^{-k_1 t}}{1-e^{-24k_1}})$$

此时，需要研究一下在喝完酒后时长 t（h）为多少时，体液内的酒精含量将会下降到 20mg/hml 以下，符合驾车标准。只要 t＜24，则该人便能够有一段时间可以开车，否则永远不能开车。而时长 t 受喝酒瓶数 n 决定。故令$x_2 = 20$，建立 n 和 t 的函数关系：

$$\frac{nk_1\text{Q}}{V(k_1-k_2)}\left(\frac{e^{-k_2 t}}{1-e^{-24k_2}} - \frac{e^{-k_1 t}}{1-e^{-24k_1}}\right) = 20$$

使用 MATLAB 的 solve 函数，试图将隐函数$f(n,t) - 20 = 0$转化成 t 与 n 的函数关系$\text{t} = \text{g}(n)$[25]，但 MATLAB 显示无法找到。

所以分别令 n=1,2,3，代入$f(n,t) - 20 = 0$，并使用 solve 函数求 t 的值[26]：

n=1 时 t=5.7294；

n=2 时 t=9.4662；

n=3 时 t=11.6520。

所以，如果每天在固定某一时刻喝下 1 瓶啤酒，喝完后 5.7294 小时（约合 5 小时 44 分钟）后可以开车；2 瓶啤酒则为 9.4662 小时（约合 9 小时 28 分钟）；3 瓶啤酒则为 11.6520 小时（约合 11 小时 39 分钟）。

[25] 附录 2.10.1

[26] 附录 2.10.2

使用 MATLAB 的 ezplot 函数画出隐函数$f(n,t)-20=0$的图像，即每天固定某一时刻喝下啤酒瓶数 n 与喝完后达到驾车标准的时长 t 的函数关系（图 8）[27]。

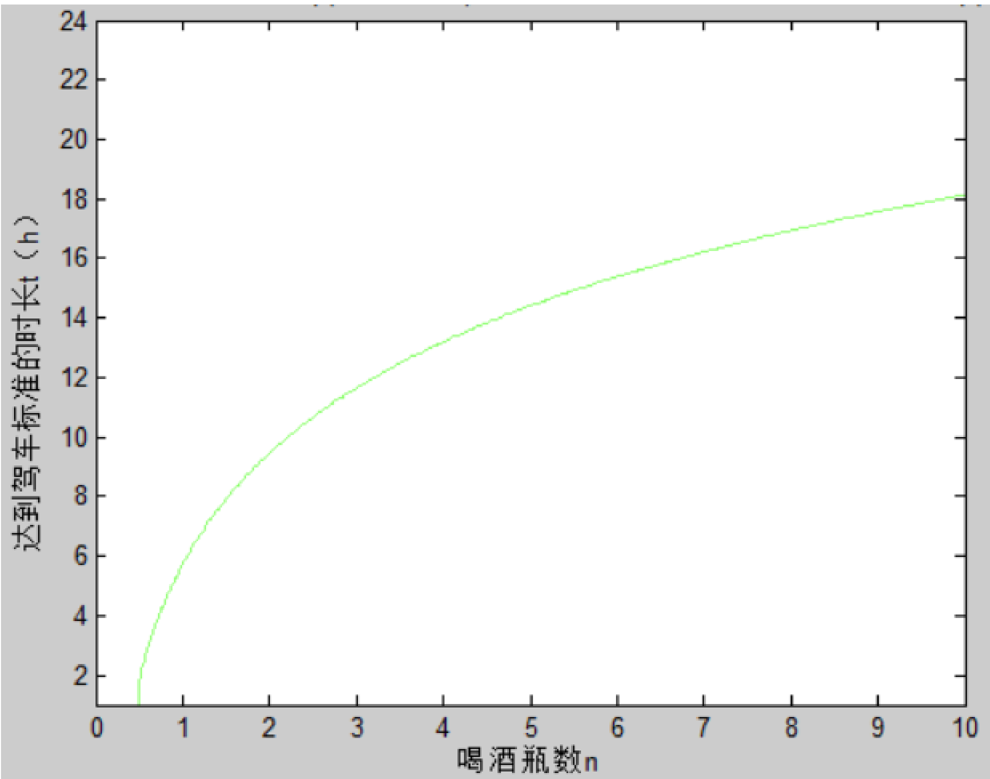


图 8：喝酒瓶数 n 与达到标准时长 t 的函数

由图可知，当喝酒瓶数增多时，需要的解酒时长增长速度逐渐放缓，呈现边际递减效应，即使每天在某固定的短时间内喝下 10 瓶啤酒，也还有每天 6 个小时的时长可以开车。而对比假设 1 中的结论，如果每次只喝一瓶酒，一天喝酒 3 瓶多就永远不能开车了，两种假设的结果差异较大。

这一方面是人体对于酒精排出的机理造成的，酒精从体液排出体外的速度与体液中酒精含量成正比，酒精含量越大时排出速度越快。另一方面也是因为该模型假设酒在瞬间喝完，当喝酒量较少时该假设仍然接近实际情况，而当喝酒量较多时，显然在短时间内喝完是不现实的，该假设与实际情况相差甚远，模型三已经失效，不再适用。

笔者尝试基于模型二中 T 时间内匀速喝酒的假设，通过微分方程迭代的方式建立模型四（固定时间间隔 s 喝酒，每次 T 内匀速喝完，0＜T＜s），但未成功。

[27] 附录 2.10.3

研究总结

研究结论

尽管国家有明文条例关于酒驾醉驾的约束，但是仍然有相当大一部分司机存在侥幸心理，出于工作应酬需要或人情关系等原因，喝酒之后开车，虽然也有一部分司机意识到酒后驾车的危险性，但是因为缺乏科学性认识，认为只要喝完酒后休息一段时间再开车，此时检测酒精含量便不会超过标准值。该论文通过利MATLAB 不同方式对饮酒后人体血液内酒精含量的变化规律展开了科学性研究，并在所建立模型的基础上为广大司机朋友提出关于喝酒和驾车的一些小建议，以便广大司机朋友能够了解酒后驾车的危险性，有效预防酒驾，并为交管机构的科学执法提供数据支持。

1. 司机朋友在一天内存在多次饮酒的情况下，如果第一次饮酒后检测结果并未达到酒驾标准，不能类推认为接下来和同样的酒量隔相同的时间再开车也是可以的，不会违背交通规定。实际上，由于酒精在体内代谢是一个较长过程，因此第一次的饮酒很有可能存在酒精残余，其与之后饮酒的酒精叠加，便很有可能导致血液内酒精含量过高，达到酒驾标准。
2. 有部分司机会认为，慢酒不易醉，延长喝酒过程时间可以防止喝醉。其实这是一种误导。由问题 2 可知：假如一个人在很短时间内（假设瞬间）喝下 3 瓶啤酒，则喝下酒后 11 小时 35 分钟以内都不能开车，而假设一个人在一段时间内（比如 2 个小时）喝下 3 瓶啤酒，则喝下酒后 12.6197 小时内都不能开车。即快速喝酒和慢速喝酒相比，代谢更快。司机朋友们要注意，不要因为不科学理论而贪杯，导致车祸发生。
3. 由问题 4 可知：当一个人天天喝酒时，如果每天喝大量的酒（例如 3 瓶），则喝酒后的 11 小时 39 分钟内都不能开车，如果每天喝少量的酒（例如 1 瓶），则喝酒后的 5 小时 44 分钟内都不能开车，因此建议司机师傅们白天最好不要喝酒，否则白天很长时间不能开车，但可以在傍晚喝少量休息一晚，等到第二天可以开车，实在白天想喝酒的，可以早晨喝一点，那么到了下午、晚上还是可以开车的。

综上所述，由于酒精对人体的大脑具有刺激和麻醉作用，一定量的酒精会使人反应迟钝，出现应激反应迟滞，影响驾驶人的感知能力，判断能力和操作能力，过量的酒精甚至会使人行为失控。而驾驶员在驾驶机动车过程中，必须保持头脑的高度清醒才能在紧急情况下及时应变，保证行车的交通安全。因此，建议司机师傅们为了自己和他人的安全，尽量做到开车不饮酒，饮酒不开车，实在无法避免的情况下，要坚持做到适量饮酒，适时饮酒，不能抱有侥幸心理。

研究创新点

1. 本文建立数学模型过程循序渐进，由浅入深，先考察最基本的单次瞬间饮酒模型，再考察在单次 T 小时内匀速饮酒模型，最后考察多次喝酒的模型，分析过程科学、合理、有理有据。
2. 在研究多次喝酒的模型时，创新性地引入微分方程迭代的方法，求解经常喝酒后体内酒精含量的变化情况。
3. 熟练运用 MATLAB 工具，通过不同函数实现求解函数、画出函数关系图、寻找零点、求导等多种功能。

研究不足

1. 酒精在体内的转移和代谢过程中，因为不同人年龄、性别、体重、消化功能等多方面的不同，存在一定的差异性。本文模型仅基于体重约 70kg 的某人饮酒后血液中的酒精含量，忽略了个体差异性。且本文只考虑了酒精在胃中和血液中的转移和代谢过程，而实际上酒精进人人体后，首先通过胃肠道进入血液循环，其中 90%经过肝脏代谢，其它则通过肾脏、肺脏等代谢，本文忽略了这些情况，代谢条件存在偏差，可能导致最终结果存在一定误差。
2. 在使用微分方程迭代方法时，只是通过求迭代前几项，合理猜测迭代结果，具有一定的不严谨性。且迭代过程假设喝酒间隔永远相等，而实际中间隔往往是不等的，比如不可能在睡觉时喝酒，具有不合理性。
3. 本文未能求出经常喝酒，每次在 T 时间内匀速喝完的微分方程迭代模型，故研究司机每天喝酒还能否开车的问题时，都是假设司机瞬间喝完酒，在喝酒量较大时与实际情况相差较大，借鉴价值有限。

附录 1（失败尝试）

模型四

模型三中假设酒在瞬间喝完，当喝酒量较多时，在短时间内喝完是不现实的，该假设与实际情况相差甚远。笔者尝试基于模型二中 T 时间内匀速喝酒的假设，通过微分方程迭代的方式建立模型四。

模型四的假设如下：

（1）某人每次喝酒都在 T 小时内匀速喝完（同模型二）；

（2）某人每次开始喝酒的间隔固定为 s（h）；

（3）每次喝酒时，胃中的酒精绝对值（mg）为上一次的酒精残余，体液中的酒精绝对值（mg）为上一次的酒精残余。

当 0≤t≤T 时，设胃中酒精绝对值为y_{11}（mg），体液中酒精绝对值为y_{12}（mg），可得：

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y_{11}[i]}{\mathrm{dt}} = \frac{nQ}{T} - k_1 \times y_{11}[i] & \cdots\cdots(1) \\ y_{11}[i](0) = y_{11}[i-1](s) & \cdots\cdots(2) \\ \frac{\mathrm{d}y_{12}[i]}{\mathrm{dt}} = k_1 \times y_{11}[i] - k_2 \times y_{12}[i] & \cdots\cdots(3) \\ y_{12}[i](0) = y_{12}[i-1](s) & \cdots\cdots(4) \end{cases}$$

当 t≥T 时，设胃中酒精绝对值为y_{21}（mg），体液中酒精绝对值为y_{22}（mg），可得：

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y_{21}[i]}{\mathrm{dt}} = -k_1 \times y_{21}[i] & \cdots\cdots(1) \\ y_{21}[i](T) = y_{11}[i](T) & \cdots\cdots(2) \\ \frac{\mathrm{d}y_{22}[i]}{\mathrm{dt}} = k_1 \times y_{21}[i] - k_2 \times y_{22}[i] & \cdots\cdots(3) \\ y_{22}[i](T) = y_{12}[i](T) & \cdots\cdots(4) \end{cases}$$

首先，尝试迭代y_{11}和y_{21}的前四项[28]。通过迭代结果可以猜测，不断迭代后：

$$y_{11}[i] = \frac{Q}{k_1 T}(1 - e^{-k_1 t} + \lim_{i\to+\infty}\sum_{m=1}^{i-1} e^{-k_1(t-T+ms)} - \lim_{i\to+\infty}\sum_{m=1}^{i-1} e^{-k_1(t+ms)})$$

$$y_{21}[i] = \frac{Q}{k_1 T} e^{-k_1(t-T)}(1 - e^{-k_1 T} + \lim_{i\to+\infty}\sum_{m=1}^{i-1} e^{-mk_1 s} - \lim_{i\to+\infty}\sum_{m=1}^{i-1} e^{-k_1(T+ms)})$$

化简为：

$$y_{11}[i] = \frac{Q}{k_1 T}(1 - e^{-k_1 t} + \frac{e^{-k_1(t+s)}(e^{k_1 T}-1)}{1-e^{-k_1 s}})$$

$$y_{21}[i] = \frac{Q e^{-k_1(t-T)}(1-e^{-k_1 T})}{k_1 T(1-e^{-k_1 s})}$$

代入y_{21}和y_{22}，迭代前几项[29]。难以从中看出有价值的规律进行合理猜测，尝试失败。

---

[28] 附录 2.11.1

[29] 附录 2.11.2

附录 2（MATLAB 代码）

2.1.1

```
>> [y1,y2]=dsolve('Dy1=-k1*y1','Dy2=k1*y1-k2*y2','y1(0)=2*Q','y2(0)=0');
>> y1=simple(y1)
   y1 =
   2*Q*exp(-k1*t)
>> y2=simple(y2)
   y2 =
   2*k1*Q*(exp(-k2*t)-exp(-k1*t))/(k1-k2)
```

2.1.2

```
>> t=[0.25 0.5 0.75 1 1.5 2 2.5 3 3.5 4 4.5 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16];
>> x=[30 68 75 82 82 77 68 68 58 51 50 41 38 35 28 25 18 15 12 10 7 7 4];
>> myfunc=inline('k(3)*(exp(-k(2)*t)-exp(-k(1)*t))','k','t');
>> k=nlinfit(t,x,myfunc,[2 0.2 10])
   k =
         2.0079        0.1855    114.4326
```

2.1.3

```
>> tt=0:0.1:17;
>> xx=k(3)*(exp(-k(2)*tt)-exp(-k(1)*tt));
>> plot(t,x,'*',tt,xx);
>> legend('原始点','拟合函数');
>> xlabel('饮酒后的时间 t（h）'); ylabel('血液中的酒精含量（mg/hml）');
```

2.2.1

```
>> k(3)/2*(exp(-k(2)*6)-exp(-k(1)*6))
   ans =
           18.7991
```

2.2.2

```
>> [y3,y4]=dsolve('Dy3=-k1*y3','Dy4=k1*y3-k2*y4','y3(0)=Q+y1(s)','y4(0)=y2(s)');
>> y3=simple(y3)
   y3 =
   (Q+y1(s))*exp(-k1*t)
>> y4=simple(y4)
   y4 =
   (k1*Q+k1*y1(s)+y2(s)*k1-y2(s)*k2)/(k1-k2)*exp(-k2*t)-1/(k1-k2)*k1*exp(-k1*t)*(Q+y1(s))
```

2.2.3

```
>> t1=0:0.1:8;
>> x1=k(3)/2*(exp(-k(2)*t1)-exp(-k(1)*t1));
>> s=8;
>> t2=8:0.1:24;
>> x2=k(3)/2*((1+exp(-k(2)*s))*exp(-k(2)*(t2-s))-exp((t2-s)*(k(2)-k(1)))*(1+exp(-k(1)*s)));
>> plot(t1,x1,t2,x2,0:0.1:25,20,6,0:0.1:60,14,0:0.1:60);
>> legend('第一次喝酒后第二次喝酒前','第二次喝酒后');
```

2.2.4

```
>> k(3)/2*((1+exp(-k(2)*8))*exp(-k(2)*6)-exp(6*(k(2)-k(1)))*(1+exp(-k(1)*8)))
   ans =
        23.0607
```

2.2.5

```
>>x=fzero('114.4326/2*((1+exp(-0.1855*(14-x)))*exp(-0.1855*x)-exp(x*(0.1855-2.0079))*(1+exp(-2.0079*(14-x))))-20',8)
   x =
        6.9584
```

2.3.1

```
>> x=fzero('114.4326*3/2*(exp(-0.1855*x)-exp(-2.0079*x))-20',10)
   x =
         11.5888
```

2.4.1

```
>>[y11,y12,y21,y22]=dsolve('Dy11=n*Q/T-k1*y11','Dy12=k1*y11-k2*y12','Dy21=-k1*y21','Dy22=k1*y21-k2*y22','y11(0)=0','y12(0)=0','y21(T)=y11(T)','y22(T)=y12(T)');
>> y11=simple(y11)
   y11 =
   (1-exp(-k1*t))*n*Q/T/k1
>> y12=simple(y12)
   y12 =
   1/T*n*Q/k2-1/T*n*Q/(-k1+k2)/exp(k1*t)-1/exp(k2*t)/T/k2/(k1-k2)*n*Q*k1
>> y21=simple(y21)
   y21 =
   -n*Q*(-1+exp(-k1*T))/k1/T*exp(k1*(T-t))
>> y22=simple(y22)
   y22 =
      -n*Q*(-k1*exp(k2*(T-t))+k1*exp(-k2*t)+exp(k1*(T-t))*k2-exp(-k1*t)*k2)/T/k2/(k1-k2)
```

2.5.1

```
>> x=fzero('114.4326*1.5/2/2.0079/0.1855*(2.0079*exp(-0.1855*(x-2))-0.1855*exp(-2.0079*(x-2))+0.1855*exp(-2.0079*x)-2.0079*exp(-0.1855*x))-20',10)
   x =
       12.6197
```

2.5.2

```
>> t1=0:0.1:2;
>> t2=2:0.1:20;
>> T=2;
>> x1=k(3)*1.5/T/k(1)/k(2)*(k(1)-k(2)+k(2)*exp(-k(1)*t1)-k(1)*exp(-k(2)*t1));
>> x2=k(3)*1.5/T/k(1)/k(2)*(k(1)*exp(-k(2)*(t2-T))-k(2)*exp(-k(1)*(t2-T))+k(2)*exp(-k(1)*t2)-k(1)*exp(-k(2)*t2));
>> plot(t1,x1,t2,x2,0:0.1:20,20);
>> xlabel('开始饮酒后的时间（h）');
>> ylabel('体内酒精含量（mg/hml）');
>> legend('正在喝酒时','喝完酒后');
```

2.5.3

```
>> solve('114.4326*1.5/T/2.0079/0.1855*(2.0079*exp(-0.1855*(x-T))-0.1855*exp(-2.0079*(x-T))+0.1855*exp(-2.0079*x)-2.0079*exp(-0.1855*x))-20=0')
   Warning: Explicit solution could not be found.
   > In solve at 140
   ans =
   [ empty sym ]
```

2.5.4

```
>> ezplot('114.4326*1.5/T/2.0079/0.1855*(2.0079*exp(-0.1855*(t-T))-0.1855*exp(-2.0079*(t-T))+0.1855*exp(-2.0079*t)-2.0079*exp(-0.1855*t))-20=0',[0,8],[10,20]);
>> xlabel('饮酒时长 T(h)');
     >> ylabel('达到标准的时长 t(h)（从开始饮酒计算）');
```

2.6.1

```
>> syms t n Q V k1 k2;
>> diff(n*k1*Q/V/(k1-k2)*(exp(-k2*t)-exp(-k1*t)),t)
   ans =
   n*Q*k1/V/(k1-k2)*(-k2*exp(-k2*t)+k1*exp(-k1*t))
```

2.6.2

```
>> solve(n*Q*k1/V/(k1-k2)*(-k2*exp(-k2*t)+k1*exp(-k1*t)))
   ans =
   -log(k2/k1)/(k1-k2)
>> k2=0.1855;k1=2.0079;
>> -log(k2/k1)/(k1-k2)
   ans=
         1.3070
```

2.7.1

```
>> syms t n Q V T k1 k2
>> diff(n*k1*Q/V/(k1-k2)/k1/k2/T*(k1*exp(-k2*(t-T))-k2*exp(-k1*(t-T))+k2*exp(-k1*t)-k1*exp(-
k2*t)),t)
   ans =
   n*Q/V/(k1-k2)/k2/T*(-k1*k2*exp(-k2*(t-T))+k2*k1*exp(-k1*(t-T))-k2*k1*exp(-
   k1*t)+k1*k2*exp(-k2*t))
```

2.7.2

```
>> solve(n*Q/V/(k1-k2)/k2/T*(-k1*k2*exp(-k2*(t-T))+k2*k1*exp(-k1*(t-T))-k2*k1*exp(-
k1*t)+k1*k2*exp(-k2*t)))
   ans =
   -log((exp(k2*T)-1)/(exp(k1*T)-1))/(k1-k2)
```

2.7.3

```
>> T=0.1:0.1:8;
>> t=-log((exp(0.1855.*T)-1)./(exp(2.0079.*T)-1))./(2.0079-0.1855);
>> plot(T,t);
>> xlabel('饮酒时长 T（h）');
>> ylabel('体液中酒精含量达到最高的时间 t(h)');
```

2.8.1

```
>> [y1a,y1b,y1c,y1d]=dsolve('Dy1a=-k1*y1a','Dy1b=-k1*y1b','Dy1c=-k1*y1c','Dy1d=-
k1*y1d','y1a(0)=n*Q','y1b(0)=n*Q+y1a(s)','y1c(0)=n*Q+y1b(s)','y1d(0)=n*Q+y1c(s)')
>> y1a=simple(y1a)
   y1a =
   n*Q*exp(-k1*t)
>> y1b=simple(y1b)
   y1b =
   n*Q*(1+exp(-k1*s))*exp(-k1*t)
>> y1c=simple(y1c)
```

```
  y1c =
  exp(-k1*t)*n*Q*(1+exp(-k1*s)+exp(-2*k1*s))
>> y1d=simple(y1d)
  y1d =
  n*Q*(1+exp(-k1*s))*(1+exp(-k1*s)^2)*exp(-k1*t)
```

2.8.2

```
>> [y2a,y2b,y2c,y2d]=dsolve('Dy2a=k1*Q*exp(-k1*t)/(1-exp(-k1*s))-k2*y2a','Dy2b=k1*Q*exp(-
k1*t)/(1-exp(-k1*s))-k2*y2b','Dy2c=k1*Q*exp(-k1*t)/(1-exp(-k1*s))-k2*y2c','Dy2d=k1*Q*exp(-
k1*t)/(1-exp(-k1*s))-k2*y2d','y2a(0)=0','y2b(0)=y2a(s)','y2c(0)=y2b(s)','y2d(0)=y2c(s)');
>> y2a=simple(y2a)
  y2a =
  -1/(-1+1/exp(k1*s))*k1*Q/(-k1+k2)/exp(k1*t)+1/exp(k2*t)*exp(k1*s)*k1*Q/(exp(k1*s)*k1-
  exp(k1*s)*k2-k1+k2)
>> y2b=simple(y2b)
  y2b =
  (-1/(-1+exp(-k1*s))*k1*Q/(-k1+k2)*exp(t*(-k1+k2))+k1*Q*(exp(k1*s+k2*s)+exp(k1*s)-
  exp(k2*s))*exp(-k2*s)/(exp(k1*s)*k1-exp(k1*s)*k2-k1+k2))*exp(-k2*t)
>> y2c=simple(y2c)
  y2c =
  (-1/(-1+exp(-k1*s))*k1*Q/(-k1+k2)*exp(t*(-
  k1+k2))+k1*Q*(exp(k1*s+k2*s)+exp(k1*s)+exp(k1*s+2*k2*s)-exp(2*k2*s)-exp(k2*s))*exp(-
  2*k2*s)/(exp(k1*s)*k1-exp(k1*s)*k2-k1+k2))*exp(-k2*t)
>> y2d=simple(y2d)
  y2d =
  (-1/(-1+exp(-k1*s))*k1*Q/(-k1+k2)*exp(t*(-
  k1+k2))+k1*Q*(exp(k1*s+k2*s)+exp(k1*s+2*k2*s)+exp(k1*s+3*k2*s)+exp(k1*s)-exp(2*k2*s)-
  exp(k2*s)-exp(3*k2*s))*exp(-3*k2*s)/(exp(k1*s)*k1-exp(k1*s)*k2-k1+k2))*exp(-k2*t)
```

2.9.1

```
>> s=2:0.1:24;
>> x=2.0079*51.9303/(2.0079-0.1855).*(exp(-0.1855*s)./(1-exp(-0.1855*s))-exp(-2.0079*s)./(1-
exp(-2.0079*s)));
>> plot(s,x,0:0.1:25,20);
>> xlabel('饮酒间隔 t（h）');
>> ylabel('酒精含量最低值（mg/hml）');
```

2.9.2

```
>> x=fzero('2.0079*51.9303/(2.0079-0.1855)*(exp(-0.1855*x)/(1-exp(-0.1855*x))-exp(-
2.0079*x)/(1-exp(-2.0079*x)))-20',8)
  x =
        7.2824
```

2.9.3

```
>> s=2:0.1:24;
>> n=24./s;
>> x=2.0079*51.9303/(2.0079-0.1855).*(exp(-0.1855*s)./(1-exp(-0.1855*s))-exp(-2.0079*s)./(1-exp(-2.0079*s)));
>> plot(n,x,0:0.1:12,20);
>> xlabel('每天喝酒瓶数');
>> ylabel('酒精含量最低值（mg/hml）');
```

2.10.1

```
>> syms t n k1 k2 Q V;
>> solve(k1*Q/V/(k1-k2).*(exp(-k2.*t)./(1-exp(-k2*24))-exp(-k1.*t)./(1-exp(-k1*24))).*n-20)
   ??? Error using ==> solve
   Unable to find closed form solution.
   Error in ==> sym.solve at 49
   [varargout{1:max(1,nargout)}] = solve(S{:});
```

2.10.2

```
>> x=fzero('2.0079*103.8607/2/(2.0079-0.1855).*(exp(-0.1855*x)./(1-exp(-0.1855*24))-exp(-2.0079*x)./(1-exp(-2.0079*24)))-20',7)
   x =
        5.7294
>> x=fzero('2.0079*103.8607/2/(2.0079-0.1855).*(exp(-0.1855*x)./(1-exp(-0.1855*24))-exp(-2.0079*x)./(1-exp(-2.0079*24)))*2-20',10)
   x =
        9.4662
>> x=fzero('2.0079*103.8607/2/(2.0079-0.1855).*(exp(-0.1855*x)./(1-exp(-0.1855*24))-exp(-2.0079*x)./(1-exp(-2.0079*24)))*3-20',12)
   x=
      11.6520
```

2.10.3

```
>> ezplot(2.0079*103.8607/2/(2.0079-0.1855).*(exp(-0.1855*t)./(1-exp(-0.1855*24))-exp(-2.0079*t)./(1-exp(-2.0079*24)))*n-20,[0,10],[1,24]);
>> xlabel('喝酒瓶数 n');
>> ylabel('达到驾车标准的时长 t（h）');
```

2.12.1

```
>> [y11,y21]=dsolve('Dy11=Q/T-k1*y11','Dy21=-k1*y21','y11(0)=0','y21(T)=y11(T)');
>> y11=simple(y11)
   y11 =
   Q(1-exp(-k1*t))/k1/T
>> y21=simple(y21)
   y21 =
   -Q*(-1+exp(-k1*T))/k1/T*exp(k1*(T-t))
>> [y11,y21]=dsolve('Dy11=Q/T-k1*y11','Dy21=-k1*y21','y11(0)=-Q*(-1+exp(-
k1*T))/k1/T*exp(k1*(T-s))','y21(T)=y11(T)');
>> y11=simple(y11)
   y11 =
   Q*(1-exp(-k1*t)+exp(-k1*(t-T+s))-exp(-k1*(t+s)))/k1/T
>> y21=simple(y21)
   y21 =
   Q*(1-exp(-k1*T)+exp(-k1*s)-exp(-k1*(T+s)))*exp(k1*(T-t))/k1/T
>> [y11,y21]=dsolve('Dy11=Q/T-k1*y11','Dy21=-k1*y21','y11(0)=Q*(1-exp(-k1*T)+exp(-k1*s)-
exp(-k1*(T+s)))*exp(k1*(T-s))/k1/T','y21(T)=y11(T)');
>> y11=simple(y11)
   y11 =
   -Q*(-1+exp(-k1*t)+exp(-k1*(t+2*s))-exp(-k1*(t-T+s))+exp(-k1*(t+s))-exp(-k1*(t-T+2*s)))/k1/T
>> y21=simple(y21)
   y21 =
   Q*(1-exp(-k1*T)-exp(-k1*(T+2*s))+exp(-k1*s)-exp(-k1*(T+s))+exp(-2*k1*s))*exp(k1*(T-
   t))/k1/T
>> [y11,y21]=dsolve('Dy11=Q/T-k1*y11','Dy21=-k1*y21','y11(0)=Q*(1-exp(-k1*T)-exp(-
k1*(T+2*s))+exp(-k1*s)-exp(-k1*(T+s))+exp(-2*k1*s))*exp(k1*(T-s))/k1/T','y21(T)=y11(T)');
>> y11=simple(y11)
   y11 =
   -Q*(-1+exp(-k1*t)-exp(-k1*(t-T+s))+exp(-k1*(t+s))+exp(-k1*(t+3*s))-exp(-k1*(t-T+2*s))+exp(-
   k1*(t+2*s))-exp(-k1*(t-T+3*s)))/k1/T
>> y21=simple(y21)
   y21 =
   Q*(1-exp(-k1*T)+exp(-2*k1*s)+exp(-k1*s)-exp(-k1*(T+s))-exp(-k1*(T+3*s))-exp(-
   k1*(T+2*s))+exp(-3*k1*s))*exp(k1*(T-t))/k1/T
```

2.12.2

```
>> [y12,y22]=dsolve('Dy12=k1*Q/k1/T*(1-exp(-k1*t)+exp(-k1*(t+s))*(exp(k1*T)-1)/(1-exp(-
k1*s)))-k2*y12','Dy22=k1*Q/k1/T*(1-exp(-k1*T)+(1-exp(-k1*T))*exp(-k1*s)/(1-exp(-
k1*s)))*exp(k1*(T-t))-k2*y22','y12(0)=0','y22(T)=y12(T)');
>> y12=simple(y12)
   y12 =
   (-Q/T/(-1+exp(-k1*s))*(-1/(k2-k1)*exp((k2-k1)*t)+1/k2*exp(k2*t)-1/k2*exp(k2*t-k1*s)+1/(k2-
   k1)*exp(k2*t-k1*t-k1*s+k1*T))-Q*(exp(k1*s)*k1+k2-k1-exp(k1*T)*k2)/T/k2/(-
   exp(k1*s)*k2+exp(k1*s)*k1+k2-k1))*exp(-k2*t)
>> y22=simple(y22)
   y22 =
   (Q/T/(-1+exp(-k1*s))*(-1/(k2-k1)*exp(k2*t+k1*T-k1*t)+1/(k2-k1)*exp((k2-k1)*t))+Q*(-
   exp(k1*s)*k1+k1*exp(k1*s+T*k2)+k1-k1*exp(T*k2)+exp(k1*T)*k2-k2)/T/k2/(-
   exp(k1*s)*k2+exp(k1*s)*k1+k2-k1))*exp(-k2*t)
>> [y12,y22]=dsolve('Dy12=k1*Q/k1/T*(1-exp(-k1*t)+exp(-k1*(t+s))*(exp(k1*T)-1)/(1-exp(-
k1*s)))-k2*y12','Dy22=k1*Q/k1/T*(1-exp(-k1*T)+(1-exp(-k1*T))*exp(-k1*s)/(1-exp(-
k1*s)))*exp(k1*(T-t))-k2*y22','y12(0)=(-Q/T/(-1+exp(-k1*s))*(-1/(k2-k1)*exp((k2-
k1)*s)+1/k2*exp(k2*s)-1/k2*exp(k2*s-k1*s)+1/(k2-k1)*exp(k2*s-k1*s-k1*s+k1*T))-
Q*(exp(k1*s)*k1+k2-k1-exp(k1*T)*k2)/T/k2/(-exp(k1*s)*k2+exp(k1*s)*k1+k2-k1))*exp(-
k2*s)','y22(0)=y12(T)');
>> y12=simple(y12)
   y12 =
   (Q/T/(-1+exp(-k1*s))*(1/(k2-k1)*exp(-t*(-k2+k1))-1/k2*exp(k2*t)+1/k2*exp(k2*t-k1*s)-1/(k2-
   k1)*exp(k2*t-k1*t-k1*s+k1*T))+Q*(k2*exp(-k2*s+k1*T-k1*s)-k2-exp(k1*T)*k2+exp(k1*s)*k2-
   k2*exp(-k2*s-k1*s)-k2*exp(-k2*s+k1*T)-k2*exp(-2*k1*s+k1*T)+2*k2*exp(-
   k1*s+k1*T)+k2*exp(-k2*s-(-k2+k1)*s)+k1*exp(-k2*s+k1*s)+k1*exp(-k2*s-k1*s)-k2*exp(-k2*s-
   (-k2+k1)*s+k1*s)-2*exp(-k2*s)*k1+exp(-k2*s)*k2)/T/k2/(-2*k2+exp(k1*s)*k2+k2*exp(-
   k1*s)+2*k1-k1*exp(-k1*s)-exp(k1*s)*k1))*exp(-k2*t)
>> y22=simple(y22)
   y22 =
   (-Q/T/(-1+exp(-k1*s))*(1/(k2-k1)*exp(k2*t+k1*T-k1*t)-1/(k2-k1)*exp(-t*(-k2+k1)))+Q*(-
   exp(k1*T)*k2+k1*exp(-k2*s+k1*T+k1*s)+k2*exp(2*k1*T-k2*s-k1*s)+k1*exp(-k2*s+k1*T-
   k1*s)+k2*exp(2*k1*T+T*k2)-2*k1*exp(-k2*s+k1*T)+2*k2*exp(k1*s+T*k2+k1*T)-
   k1*exp(k1*s+T*k2+k1*T)-2*k2*exp(T*k2+k1*T)-k2*exp(2*k1*T-k2*s)-
   k2*exp(k1*s+2*k1*T+T*k2)+2*k2*exp(2*k1*T-k1*s)-k2*exp(k1*s+T*k2)-k2*exp(2*k1*T-
   2*k1*s)-exp(2*k1*T)*k2-k1*exp(T*k2+k1*T-
   k1*s)+exp(T*k2)*k2+k2*exp(k1*s+k1*T)+2*k1*exp(T*k2+k1*T)+k2*exp(-k2*s+k1*T)+k2*exp(-
   k2*s+k1*T-(-k2+k1)*s)-k2*exp(-k2*s+k1*T-(-k2+k1)*s+k1*s)-k2*exp(-k2*s+k1*T-k1*s))/k2/T/(-
   2*k2+exp(k1*s)*k2+k2*exp(-k1*s)+2*k1-k1*exp(-k1*s)-exp(k1*s)*k1)*exp(-k1*T-T*k2))*exp(-
   k2*t)
```