Основни граници

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{t(x)\to 0}\frac{\operatorname{tg} t(x)}{t(x)}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

$$\lim_{t(x)\to 0}\frac{\sin t(x)}{t(x)}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^p-1}{x}=p \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

$$\ln(1+x)\sim x+o(x)$$

$$\sin x\sim x+o(x)$$

Критерии за сходимост на редове

Критерий на Даламбер

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$$

$$\mathbf{l}:\begin{cases} l<1, & \textbf{сходящ}\\ l>1, & \textbf{разходящ}\\ l=1, & \textbf{неопределеност}\end{cases}$$

Критерий на Коши

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$$

$$\mathbf{l}:\begin{cases} l<1, & \textbf{сходящ}\\ l>1, & \textbf{разходящ}\\ l=1, & \textbf{неопределеност}\end{cases}$$

Критерий на Раабе-Дюамел

$$\lim_{n\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=l$$

$$\mathbf{l}:\begin{cases} l>1, & \textbf{сходящ}\\ l<1, & \textbf{разходящ}\\ l=1, & \textbf{неопределеност}\end{cases}$$

Основни производни

$$(const)'=0 \qquad (\ln x)'=\frac{1}{x} \qquad (\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(x^n)'=nx^{n-1} \qquad (\sin x)'=\cos x \qquad (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(a^x)'=a^x\ln a \qquad (\cos x)'=-\sin x \qquad (\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a} \qquad (\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

$$(e^x)'=e^x \qquad (\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

Прозиводни от n-ти ред

$$(\sin x)^{[n]}=\sin(x+n\frac{\pi}{2})$$

$$(a^x)^{[n]} = a^x \ln^n a$$

$$(\ln x)^{[n]} = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{x^n}$$

$$(x^a)^{[n]} : \qquad 0 < a < n \Rightarrow 0 \qquad a = n \Rightarrow n! \qquad a > n \Rightarrow a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)x^{a-n}$$

$$a < 0 \Rightarrow (-1)^n a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)\frac{1}{x^{a+n}}$$

Формула на Лайбниц

$$(f(x) * g(x))^{[n]} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(x)^{[n-k]} g(x)^{[k]}$$

Таблчини неопределени интеграли

$$\int e^x \, dx = e^x + c \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + c \qquad \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + c$$

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1 \qquad \int -\frac{1}{\sin^2 x} \, dx = \operatorname{ctg} x + c \qquad \int -\frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arcctg} x + c$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + c \qquad \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c \qquad \int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arccos x + c \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \, dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$$

Интегриране по части

$$\int f(x) \, d(g(x)) = f(x) * g(x) - \int g(x) \, d(f(x))$$

Основни свойства на определени интеграли

$$1. \int_a^b (\alpha f(x) \pm \beta g(x)) \, dx \ = \ \alpha \int_a^b f(x) \, dx \ \pm \ \beta \int_a^b g(x) \, dx$$

$$2. \int_a^b f(x) \, dx \ = \ \int_a^c f(x) \, dx \ + \ \int_c^b f(x) \, dx \qquad c \in [a, b]$$

$$3. \ f(x) \leq g(x) \, \forall x \in [a, b] \ \Rightarrow \ \int_a^b f(x) \, dx \ \leq \ \int_a^b g(x) \, dx$$

$$4. \int_a^a f(x) \, dx \ = \ 0$$

5. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \;=\; -\int_b^a f(x)\,dx$

6. $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \;\leq\; \int_a^b |f(x)|\;dx$

Интегриране по части на определен интеграл

$$\int_a^b f(x)\,d(g(x)) \;=\; f(x) * g(x)\Big|_a^b \;-\; \int_a^b g(x)\,d(f(x))$$

Основни формули на определени интеграли

1. $f(x)$ е **непрекъсната** в $[-a,a]$ и **четна**. Тогава: $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx \;=\; 2\int_0^a f(x)\,dx$

2. $f(x)$ е **непрекъсната** в $[-a,a]$ и **нечетна**. Тогава: $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx \;=\; 0$

3. $f(x)$ е **периодична с период Т**. Тогава: $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\,dx \;=\; \int_0^T f(x)\,dx$

4. $f(x)$ е **непрекъсната** в $[0,1]$. Тогава: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$

5. $f(x)$ е **непрекъсната** в $[0,1]$. Тогава: $\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx \;=\; \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$

Геомтетрични приложения на определения интеграл

Лице

$f(x)$ и $g(x)$ са **непрекъснати** в $[a,b]$ и $f(x) \leq g(x)$ за всяко x в $[a,b]$. Тогава:

$$S \;=\; \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$$

Полярни координати

$\rho = f(\theta)$ е **непрекъсната** и **неотрицателна** за θ в $[\alpha,\beta]$. Тогава:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2\,d\theta$$

Дължина на крива

$x = f(t)$ и $y = g(t)$ са **непрекъснати** и **диференцируеми** за t в $[a, b]$. Тогава:

$$l \;=\; \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\, dt$$

Графика на функция

$x = t$ и $y = f(x)$ са **непрекъснати** и **диференцируеми** за t в $[a, b]$. Тогава:

$$l \;=\; \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt$$

Обем

$f(x)$ е **непрекъсната** в $[a, b]$. Тогава:

$$V \;=\; \pi \int_a^b f(x)^2\, dt$$

Основни несобствени интеграли за сравняване

Първи род

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\lambda}\, dx \quad (a > 0)$$

$$\int_{-\infty}^{b} \frac{1}{x^\lambda}\, dx \quad (b < 0)$$

$$\text{са}: \begin{cases} \textbf{сходящи}\ \lambda > 1 \\ \textbf{разходящи}\ \lambda \le 1 \end{cases}$$

Втори род

$$\int_a^{b} \frac{1}{(x-a)^\lambda}\, dx$$

$$\int_a^{b} \frac{1}{(b-x)^\lambda}\, dx$$

$$\text{са}: \begin{cases} \textbf{сходящи}\ \lambda < 1 \\ \textbf{разходящи}\ \lambda \ge 1 \end{cases}$$

Първи род

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p \ln^q x}\, dx$$

$$\text{е}: \begin{cases} \textbf{сходящ}\ p > 1 \\ \textbf{сходящ}\ p = 1 \text{ и } q > 1 \\ \textbf{разходящ}\ p = 1 \text{ и } q \le 1 \\ \textbf{разходящ}\ p < 1 \end{cases}$$

Формули за радиус на сходимост на степенни редове

Формула на Даламбер

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Формула на Коши-Адамар

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Основни Маклоренови развития

$$1.\ \ e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$2.\ \ \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$3.\ \ \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$4.\ \ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \quad x \in (-1, 1]$$

$$5.\ \ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, \quad x \in (-1, 1)$$

$$6.\ \ (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \cdots, \quad x \in (-1, 1)$$