Υποχρεωτική εργασία

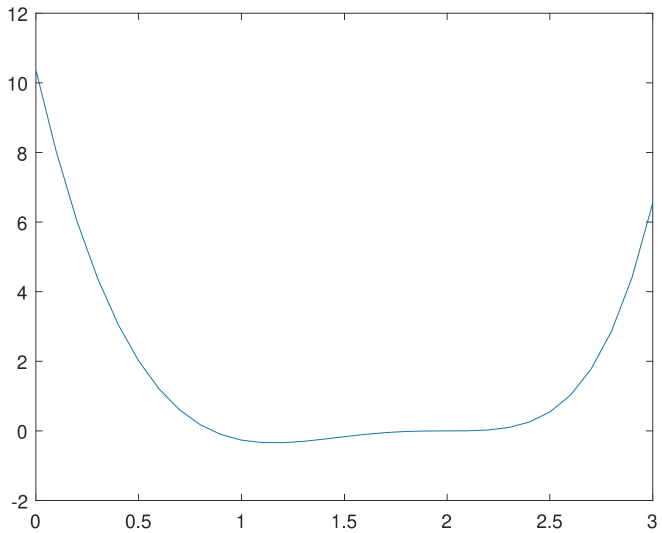
Ονοματεπώνυμο : Kristi Cami
AEM: 3882

Δεκέμβριος 29, 2021

1 Πρώτη Άσκηση

(α) *Να γίνει η γραφική παράσταση της παρακάτω συνάρτησης στο διάστημα [0,3].*

$$f(x) = 14xe^{x-2} - 12e^{x-2} - 7x^3 + 20x^2 - 26x + 12$$



Όπως θα δούμε και θα αποδείξουμε παρακάτω η συνάρτηση έχει δυο ρίζες (2.00000 και 0.857114) στο διάστημα [0,3].

(β) *Υπολογισμός ριζών της συνάρτησης με την μέθοδο της διχοτόμησης σε Matlab*

```
clc; clear all ; close all;

f =@(x)(14.*x.*exp(x-2)-12.*exp(x-2)-7.*x
    .^3+20.*x.^2-26.*x+12);

x=(0:0.1:3);
plot(x,f(x));

a=1;
%b=1;
b=3;

k=0;
while abs(b-a) > eps*abs(b)
        x=(a+b)/2;
    if sign(f(x)) == sign(f(b))
        b=x;
    else
        a=x;
    end
k=k+1;
end

fprintf('The Root is : %.5f \n',a);
fprintf('No. of Iterations : %d\n',k);
```

Αποτελέσματα του παραπάνω προγράμματος

Διάστημα	Ρίζα	Επαναλήψης
[0 , 1]	0.85714	53
[1 , 3]	2.00001	52

(γ) *Υπολογισμός ριζών της συνάρτησης με τη μέθοδο Newton-Raphson σε Matlab*

```
clc; clear all ; close all;

syms x;
f=14.*x.*exp(x-2)-12.*exp(x-2)-7.*x.^3+20.*x
    .^2-26.*x+12;
g=diff(f);
epsilon = 5*10^-(5+1);
%x0 = 0;
x0 = 3;

for i=1:100
     f0=vpa(subs(f,x,x0));
     f0_der=vpa(subs(g,x,x0));
  y=x0-f0/f0_der;
err=abs(y-x0);
if err<epsilon
break
end
x0=y;
end

y = y - rem(y,10^-5);
fprintf('The Root is : %.5f \n',y);
fprintf('No. of Iterations : %d\n',i);
```

Αποτελέσματα του παραπάνω προγράμματος

x0	Ρίζα	Επανάληψης
0	0.85714	7
3	2.00000	30

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ριζά 2.00000 δεν συγκλίνει τετραγωνικά διότι f(2.00000)=0 και f'(2.00000)=0 ενώ αντίθετα η ριζά 0.85714 συγκλίνει τετραγωνικά διότι ισχύει η συνθήκη f(0.85714) = 0 και f'(0.85714) != 0. Γενικότερα αν η f(x) δεν έχει συνεχή και φραγμένη πρώτη και δεύτερη παραγωγό, ή αν το αρχικό σημείο δεν είναι αρκετά κοντά στο σημείο μηδενισμού, τότε δεν έχουμε τετραγωνική σύγκληση.

(δ) *Υπολογισμός ριζών της συνάρτησης με τη μέθοδο της τέμνουσαςσε Matlab*

```matlab
clc; clear all ; close all;

f =@(x)(14.*x.*exp(x-2)-12.*exp(x-2)-7.*x.^3+20.*x.^2-26.*x+12);

a=0;
b=1;
%b=3;

k=0;
while abs(b-a) > eps*abs(b)
    c=a;
    a=b;
    b = b + (b-c)/(f(c)/f(b)-1);
    k=k+1;
end

fprintf('The Root is : %f \n',c);
fprintf('No. of Iterations : %d\n',k);
```

Αποτελέσματα του παραπάνω προγράμματος

Διάστημα	Ρίζα	Επανάληψης
[0 , 1]	0.85714	12
[2.5 , 3]	2.00000	41

2 Δεύτερη Άσκηση

(α) *Τροποποιημένη μέθοδος Newton-Raphson με βάσει τον παρακάτω τύπο.*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{\frac{f'(x_n)}{f(x_n)} - \frac{1}{2}\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)}}$$

```matlab
clc; clear all ; close all;

syms x;
f= 54.*x.^6 + 45.*x.^5 -102.*x.^4 - 69.*x.^3 +35.*x.^2 +16.*x -4 ;
g=diff(f);
h=diff(g);
epsilon = 5*10^-(5+1);
x0 = 0.9;

for i=1:100
     f0=vpa(subs(f,x,x0));
     f0_der=vpa(subs(g,x,x0));
     f0_2der=vpa(subs(h,x,x0));
     y=x0-1/(f0_der/f0-1/2*f0_2der/f0_der);
err=abs(y-x0);
if err<epsilon
break
end
x0=y;
end

y = y - rem(y,10^-5);
fprintf('The Root is : %f \n',y);
fprintf('No. of Iterations : %d\n',i);
```

(β) *Τροποποιημένη μέθοδος διχοτόμησης οπού η εκτίμηση για την ριζά δεν είναι το μέσο του διαστήματος αναζήτησης σε κάθε βήμα αλλά ένα τυχαίο σημείο που επιλέγεται με την χρήση μια συνάρτησης rand() εντός του διαστήματος αναζήτησης*

```
clc; clear all ; close all;

f = @(x) 54.*x.^6 + 45.*x.^5 -102.*x.^4 - 69.*x.^3 +35.*x.^2 +16.*x -4 ;

x=(-2:0.1:2);
plot(x,f(x))

a=0.4;
b=0.9;

k=0;
while abs(b-a) > eps*abs(b)
        x=a + (b-a).*rand(1,1);
    if sign(f(x)) == sign(f(b))
        b=x;
    else
        a=x;
    end
k=k+1;
end

fprintf('The Root is : %f \n',a);
fprintf('No. of Iterations : %d\n',k-1);
```

(γ) *Τροποποιημένη μέθοδος της τέμνουσας η οποία χεριάζετε 3 αρχικά σημεία και υπολογίζει την επόμενη εκτίμηση για την ριζά με βάση τον τύπο:*

$$x_{n+3} = x_{n+2} - \frac{r(r-q)(x_{n+2} - x_{n+1} + (1-r)s(x_{n+2} - x_n)}{(q-1)(r-1)(s-1)}$$

οπού

$$q = \frac{f(x_n)}{f(x_{n+1})}, r = \frac{f(x_{n+2})}{f(x_{n+1})}, s = \frac{f(x_{n+2})}{f(x_n)}$$

η μέθοδος αυτή είναι γνώστη και ως αντιστροφή τετραγωνική παρεμβολή.

```
clc; clear all ; close all;

f = @(x) 54.*x.^6 + 45.*x.^5 -102.*x.^4 - 69.*x.^3 +35.*x.^2 +16.*x -4 ;
a = -2;
b = 1;
err = 0.0001;

x(1)=-2; x(2)=0; x(3)=2;

i=2;
while abs( x(i-1)-x(i) ) >= err
    i=i+1;
    x(i+1) = x(i-2)*f(x(i-1))*f(x(i))/((f(x(i-2))-f(x(i-1)))*(f(x(i-2))-f(x(i))))+ ...
             x(i-1)*f(x(i-2))*f(x(i))/((f(x(i-1))-f(x(i-2)))*(f(x(i-1))-f(x(i))))+ ...
             x(i)*f(x(i-2))*f(x(i-1))/((f(x(i))-f(x(i-2)))*(f(x(i))-f(x(i-1))));

    xx(i,1) = x(i+1);
    ii(i,1) = i;

end

disp(['Root X = ' num2str(x(i+1)) ' ,Iterations = ' num2str(i) ]);
```

1. Να βρεθούν όλες η ρίζες της παρακάτω συνάρτησης με ακρίβεια 5ου δεκαδικού ψηφίου στο διάστημα [-2,2] χρησιμοποιώντας της παραπάνω μεθόδους

$$f(x) = 54x^6 + 45x^5 - 102x^4 - 69x^3 + 16x + 4$$

Αποτελέσματα τροποποιημένης Newton-Raphson

x0	Ρίζα	Επανάληψης
-2	-1.38129	5
-1	-0.66666	12
0	0.20518	4
0.6	0.50000	4
1	1.17611	5

Αποτελέσματα τροποποιημένης μεθόδου διχοτόμησης

Διάστημα	Ρίζα	Επανάληψης
[-2 , -1]	-1.38129	69
[0 , 0.4]	0.20518	62
[0.4 , 1]	0.50000	74
[-2 , 2]	1.17611	68

Παρατηρούμε ότι η μέθοδος αυτή χάνει μια ριζά την 0.66666

Αποτελέσματα τροποποιημένης μεθόδου τέμνουσας

x1 , x2 , x3	Ρίζα	Επανάληψης
-1.5 , -1.6 , 2	-1.38129	9
0 , 1 , 2	-0.66666	17
-2 , 0 , 2	0.20518	9
-1 , 1 , 2	0.50000	11
1 , 1.5 , 2	1.17611	19

2. Εκτελώντας τον αλγόριθμο (β) 10 φορές παρατηρούμε ότι δεν συγκλίνει πάντα στον ίδιο αριθμό επαναλήψεων και αυτό οφείλετε στο γεγονός ότι η εκτίμηση για την ριζά επιλέγετε τυχαία από μια συνάρτηση παραγωγής τυχαίων αριθμόν

3. Παρατηρούμε ότι η τροποποιημένη μέθοδο της διχοτομήσεις συγκλίνει ταχύτερα από την κανονική μέθοδο. Το ακριβός αντίθετο παρατηρούμε με της υπολείπεις δυο μεθόδους οπού η κανονικές συγκλίνουν ταχύτερα από της τροποποιούμενες.