

Αλγόριθμοι 2022-2023

Δεύτερη Εργασία – 1 μονάδα στον τελικό βαθμό

Υπεύθυνη εργασίας: Αρετή Αμπατζόγλου

Διδάσκων: Γεώργιος Χριστοδούλου

Δώστε απαντήσεις για τις παρακάτω ασκήσεις τεκμηριώνοντας τις απαντήσεις σας με σαφήνεια. Οι λύσεις των ασκήσεων πρέπει να γραφτούν σε υπολογιστή (πχ Word ή Latex και **όχι** σκαναρισμένα χειρόγραφα κείμενα), και να υποβληθούν στο **elearning** σε μορφή **pdf**. Η προθεσμία της παράδοσης είναι **9 Ιουνίου 2023** και ώρα **11:59μμ**.

Σύνολο 10 μονάδες

Στα 4 θέματα που ακολουθούν σας ζητείται να σχεδιάσετε αποδοτικούς αλγορίθμους, καθώς και να τους αναλύσετε ως προς ορθότητα και πολυπλοκότητα. Η περιγραφή θα πρέπει **οπωσδήποτε** να είναι σε φυσική γλώσσα, αλλά όπου θεωρείτε σκόπιμο θα μπορεί να συνοδεύεται από αντίστοιχο ψευδοκώδικα (**όχι** όμως κώδικα σε κάποια γλώσσα προγραμματισμού).

1. **(2.5 μον.)** Έστω $G = (V, E)$ ένα μη κατευθυνόμενο, γράφημα με θετικό βάρος c_e σε κάθε ακμή $e \in E$. Ονομάζουμε ένα υποσύνολο ακμών $E' \subseteq E$ **έγκυρο**, αν όταν αφαιρεθεί το E' από το σύνολο ακμών E , το γράφημα δεν περιέχει κύκλο: δηλαδή το γράφημα $G = (V, E \setminus E')$ δεν περιέχει κανένα κύκλο.

Να δοθεί αποδοτικός αλγόριθμος που να υπολογίζει ένα **έγκυρο** υποσύνολο E' με το **ελάχιστο συνολικό βάρος**. Το E' μπορεί να είναι και κενό, αν το αρχικό γράφημα δεν περιέχει κύκλους. Να επεξηγηθεί λεπτομερώς η ορθότητα και η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

2. **(2.5 μον.)** Σας έχει ανατεθεί να διοργανώσετε μια δεξίωση στον χώρο εργασίας σας και θα πρέπει να επιλέξετε ένα υποσύνολο από τους n εργαζόμενους της εταιρίας που θα καλέσετε. Για να είναι επιτυχημένη η δεξίωση έχετε σκεφθεί ότι πρέπει να ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

(α') Ο κάθε προσκεκλημένος θα πρέπει να γνωρίζει **τουλάχιστον 4** άλλους προσκεκλημένους, ώστε να αισθάνεται άνετα στην δεξίωση.

(β') Για κάθε προσκεκλημένο θα πρέπει να υπάρχουν **τουλάχιστον 4** άλλοι προσκεκλημένοι που δεν γνωρίζει, ώστε να δημιουργηθούν νέες γνωριμίες κατά τη διάρκεια της δεξίωσης.

Ο στόχος σας είναι να προσκαλέσετε όσο πιο πολλά άτομα είναι δυνατόν, ώστε να ικανοποιούνται και οι δυο παραπάνω συνθήκες.

Να δοθεί αποδοτικός αλγόριθμος για το παραπάνω πρόβλημα. Η είσοδος του προβλήματος είναι τα n άτομα και η λίστα με τα ζευγάρια (i, j) όπου ο i και ο j γνωρίζονται μεταξύ τους. Να επεξηγηθεί λεπτομερώς η ορθότητα και η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

3. **(2.5 μον.)** Προγραμματίζετε ένα μεγάλο ταξίδι με αυτοκίνητο. Ξεκινάτε από ένα σημείο που βρίσκεται στη χιλιομετρική θέση 0. Στη διαδρομή που θα ακολουθήσετε υπάρχουν n ξενοδοχεία, στις χιλιομετρικές θέσεις, $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, όπου a_i είναι η χιλιομετρική απόσταση από το σημείο εκκίνησης. Οι μοναδικές θέσεις όπου επιτρέπεται να σταθμεύσετε είναι οι τοποθεσίες των ξενοδοχείων. Μπορείτε όμως να επιλέξετε **σε ποια** ξενοδοχεία θα σταθμεύσετε. Πρέπει οπωσδήποτε να σταθμεύσετε στο ξενοδοχείο που βρίσκεται σε απόσταση a_n που είναι ο τελικός προορισμός.

Ιδανικά θα θέλατε να ταξιδεύετε ακριβώς 200 χιλιόμετρα μεταξύ δυο σημείων στάθμευσης. Αυτό όμως μπορεί να μην είναι εφικτό. Αν ταξιδέψετε x χιλιόμετρα μέχρι την επόμενη στάση (π.χ. από το ξενοδοχείο i μέχρι το ξενοδοχείο j), η ποινή για το συγκεκριμένο διάστημα είναι

$(200 - x)^2$. Το x μπορεί να είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο του 200. Θέλετε να προγραμματίσετε το ταξίδι σας ώστε να **ελαχιστοποιήσετε** τη συνολική ποινή, δηλαδή το άθροισμα των επιμέρους ποινών, για κάθε στάση του ταξιδιού. Να σχεδιάσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο ο οποίος να προσδιορίζει τη βέλτιστη ακολουθία των ξενοδοχείων στα οποία πρέπει να σταθμεύσετε. Να επεξηγηθεί λεπτομερώς η ορθότητα και η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου.

4. (2.5 μον.) Με δεδομένο ένα απεριόριστο απόθεμα νομισμάτων ονομαστικής αξίας x_1, x_2, \dots, x_n επιθυμούμε να πραγματοποιήσουμε μια ανταλλαγή με μια τιμή v χρησιμοποιώντας το πολύ k νομίσματα. Δηλαδή επιθυμούμε να βρούμε ένα σύνολο από k ή λιγότερα νομίσματα των οποίων η συνολική αξία να είναι ίση με v . Κάτι τέτοιο μπορεί να μην είναι πάντα δυνατό. Για παράδειγμα, αν οι ονομαστικές αξίες είναι $x_1 = 5, x_2 = 10$, και $k = 6$ τότε μπορούμε να πραγματοποιήσουμε την ανταλλαγή για την τιμή $v = 55$ (χρησιμοποιώντας 5 νομίσματα αξίας 10 και 1 αξίας 5), αλλά δεν μπορούμε να πραγματοποιήσουμε την ανταλλαγή για την τιμή $v = 65$. Επίσης, με τις παραπάνω ονομαστικές αξίες του παραδείγματος ($x_1 = 5, x_2 = 10$) δεν θα μπορούσαμε να πραγματοποιήσουμε την ανταλλαγή για την τιμή $v = 14$, ανεξάρτητα από την τιμή του k .
Να περιγράψετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού για το πρόβλημα.

Είσοδος: Οι θετικοί ακέραιοι x_1, \dots, x_n, k, v

Έξοδος: Ο αλγόριθμος θα πρέπει να απαντάει «Ναι», αν είναι δυνατό να πραγματοποιήσουμε ανταλλαγή με την τιμή v χρησιμοποιώντας k ή λιγότερα νομίσματα και «Όχι» αν κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατό. Στην πρώτη περίπτωση θα πρέπει να επιστρέφει και τη λύση, δηλαδή ποια νομίσματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν και πόσες φορές το καθένα, ώστε να πραγματοποιηθεί η ανταλλαγή. Να επεξηγηθεί λεπτομερώς η ορθότητα και η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου.