



Софийски университет "Св. Климент Охридски"
Факултет по математика и информатика

УЧЕБЕН ПРОЕКТ

по

Диференциални уравнения и приложения

спец. Софтуерно инженерство, 2 курс, летен семестър,

учебна година 2021/2022

Тема № СИ 2022- Г1- 27

30.06.2022

София

Изготвил: Кристиан Филипов Иванов

Ф. No. 0MΠ0600137

Група 1

Оценка :.....

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

1. Тема (задача) на проекта	3
2. Решение на Задачата.....	4
2.1. Теоретична част	4
2.2. MatLab код и получени в командния прозорец резултати при изпълнението му	7
2.3. Графики (включително от анимация)	10
2.4. Коментари към получените с MatLab резултати.....	11

1. Тема (задание) на проекта

Учебен проект по ДУПрил
спец. СИ, 2 курс, летен семестър, уч. год. 2021/2022

Тема СИ2022-Г1-27. Движението на струна се моделира със следната задача

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} = 5u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 3\pi, \\ u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq 3\pi, \\ u_t|_{t=0} = \begin{cases} \sin \frac{5x}{6}, & 0 \leq x \leq 5 \\ \sin \frac{5x}{6} - 10(x-5)^3(x-3\pi)^2, & x \in [5, 3\pi], \end{cases} \\ u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=3\pi} = 0, \quad t \geq 0. \end{array} \right.$$

1. (10 т.) Разделете променливите в задачата, като търсите решение от вида $u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x)T_k(t)$. За функциите $X_k(x)$ получите задача на Шурм-Лиувил и напишете нейните собствени стойности и собствени функции. Напишете кои са функциите $T_k(t)$ и кои са коефициентите в получения ред за $u(x, t)$.

2. (10 т.) Използвайте 50-та частична сума на реда за $u(x, t)$ за да направите (с MATLAB) анимация на трептенето на струната за $t \in [0, 12]$. Начертайте в един прозорец една под друга графиките от направената анимация в три различни момента.

Срок за предаване 30.06.2022 г.

2. Решение на Задачата

2.1 Теоретична част

$$\begin{aligned}
 &u_{tt} = 5u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 3\pi \\
 &u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq 3\pi \\
 &u|_{t=0} = \begin{cases} \sin \frac{5x}{6} & 0 \leq x \leq 5 \\ \sin \frac{5x}{6} - 10(x-5)^3(x-3\pi)^2, & x \in [5; 3\pi] \end{cases} \\
 &u_{x=0} = 0, \quad u_{x=3\pi} = 0, \quad t \geq 0
 \end{aligned}$$

$$u|_{t=0} = 0 \Rightarrow \Psi(x) \quad a = \sqrt{5}$$

$$u|_{t=0} = \Psi(x) \quad L = 3\pi$$

$$X(x)T''(t) = 5X''(x)T(t)$$

$$\frac{T''(t)}{5T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \Rightarrow \text{const}$$

$$T''(t) + 5\lambda T(t) = 0$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

За $X(x)$ поставяме гранични условия на $xy-\Pi$.

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, \quad X'(3\pi) = 0 \end{cases}$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -\lambda$$

$$1) \lambda < 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\lambda}$$

$$\Phi CP = \{e^{\sqrt{-\lambda}x}, e^{-\sqrt{-\lambda}x}\}$$

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$$X(0) = c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2$$

$$\begin{aligned}
 X'(3\pi) &= -c_2 \sqrt{-\lambda} e^{\sqrt{-\lambda}3\pi} - c_2 \sqrt{-\lambda} e^{-\sqrt{-\lambda}3\pi} = \\
 &= -c_2 \sqrt{-\lambda} (e^{\sqrt{-\lambda}3\pi} + e^{-\sqrt{-\lambda}3\pi}) = 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$2) \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0$$

$$\Phi_{CP} = \{1, x\}$$

$$X(x) = c_1 + c_2 x$$

$$X(0) = c_1 = 0$$

$$X'(3\pi) = c_2 = 0$$

$$3) \lambda > 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$$

$$\Phi_{CP} = \{\cos(\sqrt{\lambda}x), \sin(\sqrt{\lambda}x)\}$$

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

$$X(0) = c_1 = 0$$

$$X'(3\pi) = \sqrt{\lambda} c_2 \cos(\sqrt{\lambda}x) = \sqrt{\lambda} c_2 \cos(\sqrt{\lambda} 3\pi)$$

$$\Rightarrow \cos \sqrt{\lambda} 3\pi = 0$$

$$\lambda_k = \left(\frac{2k+1}{3}\right)^2 \rightarrow \text{корень из } \sqrt{\lambda} = \frac{2k+1}{6} \quad k=0,1,2,\dots$$

корень из Φ -ум c_k :

$$X_k(x) = \sin\left(\frac{2k+1}{6}x\right) \quad k=0,1,2,\dots$$

При $\lambda = \lambda_k$ заменим в y -то z $T(z)$:

$$T''(z) + 5\lambda_k T(z) = 0$$

$$Q(z) = z^2 + 5\lambda_k = 0$$

$$\lambda = \pm \sqrt{-5\lambda_k} \Rightarrow \pm i\sqrt{5} \cdot \frac{2k+1}{6}$$

$$\Phi_{CP} = \left\{ \cos\left(\frac{\sqrt{5}}{6}(2k+1)z\right), \sin\left(\frac{\sqrt{5}}{6}(2k+1)z\right) \right\}$$

$$T_k(z) = A_k \cos\left(\frac{\sqrt{5}}{6}(2k+1)z\right) + B_k \sin\left(\frac{\sqrt{5}}{6}(2k+1)z\right)$$

$$U_k(x,z) = X_k(x) T_k(z)$$

$$U_k = \sin\left(\frac{(2k+1)x}{6}\right) \left[A_k \cos\left(\frac{\sqrt{5}}{6}(2k+1)z\right) + B_k \sin\left(\frac{\sqrt{5}}{6}(2k+1)z\right) \right]$$

$$\text{и т.д. } U_k|_{z=0} = \varphi(x) \Rightarrow \sin\left(\frac{(2k+1)x}{6}\right) A_k = \varphi(x)$$

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) X_k(x) dx$$

$$u_t = \sin\left(\frac{2k+1}{6}x\right) \cdot \frac{\sqrt{5}}{6}(2k+1) \left[-A_k \sin\left(\frac{\sqrt{5}}{6}(2k+1)t\right) + B_k \cos\left(\frac{\sqrt{5}}{6}(2k+1)t\right) \right]$$

$$u_t|_{t=0} = 0 \Rightarrow \sum X_k(x) \frac{\sqrt{5}}{6}(2k+1) B_k = \varphi(x)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{6}(2k+1) B_k = \frac{2}{L} \int_0^L X_k(x) \varphi(x) dx$$

$$B_k = \frac{12}{2\sqrt{5}} \int_0^L X_k(x) \varphi(x) dx$$

2.2. MatLab код и получени в командния прозорец резултати при изпълнението му

function project

%необходимии параметри

a=sqrt(5);

L=3*pi;

tmax=12;

x=linspace(0,L); %вектор от 100 точки от 0 до L на
равно разстояние една от друга

t=linspace(0,tmax);

%дефинираме функцията фи

function y=phi(x)

for i=1:length(x)

y(i)=0;

end

end

%дефинираме функцията пси

function y=psi(x)

for i=1:length(x)

if x(i)>=0 && x(i)<=5

y(i)=sin((5*x(i))/6);

elseif x(i)>=5 && x(i)<=3*pi

y(i)=sin((5*x(i))/6) - 10*((x(i)-5)^3)*((x(i)-
3*pi)^2);

end

end

end

%дефинираме функцията u(x,t)

```

function y=u(x,t)
    y=0;
    for k=0:49 %50-та частична сума на реда за u(x,t)
        Xk=cos((2*k+1)*x/6);
        Ak=2*trapz(x,phi(x).*Xk)/L;
        Bk=(12*trapz(x,psi(x).*Xk))/(a*L);

        Tk=Ak*cos(((2*k+1)*a*t)/6)+Bk*sin(((2*k+1)*a*t)/6);
        y=y+Tk*Xk; %поелементно умножение
    end
end

% генерираме графиките на анимацията
for n=1:length(t)
    plot(x,u(x,t(n)),'r', 'LineWidth', 2) %2D plot; x и
    u(x,t(n)) са вектори с еднаква дължина
    axis([0,L,-3000,3000]) % размери на plot - по
    абсциса и ордината
    grid on %показва мрежа в plot
    getframe; %създава анимация от текущите
    оси на екрана
end

%чертаем в един прозорец графиките от
анимацията
subplot(3,1,1) %разделя текущата фигура на 3x1
решетки и създава оси в позиция 1
plot(x,u(x,0),'r','LineWidth',2)
title('When t=0')
grid on
hold off %задава се изчистване на настройките на
plot

```



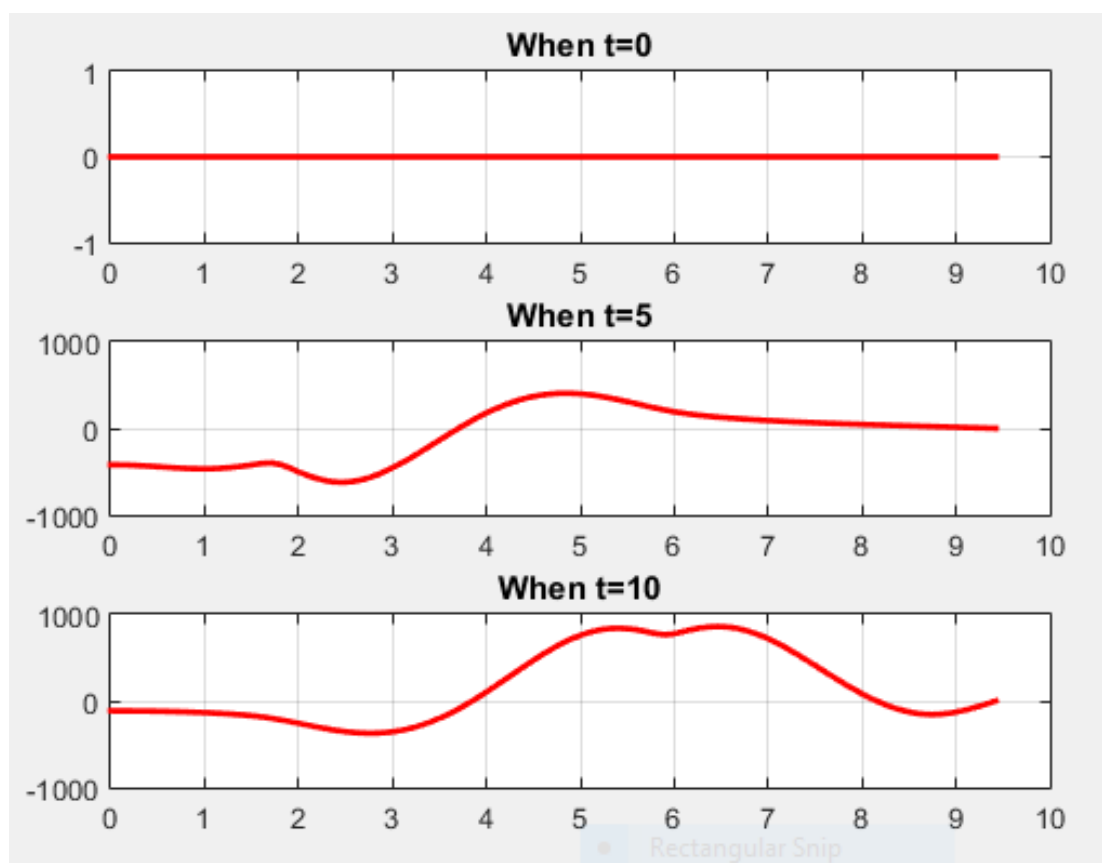
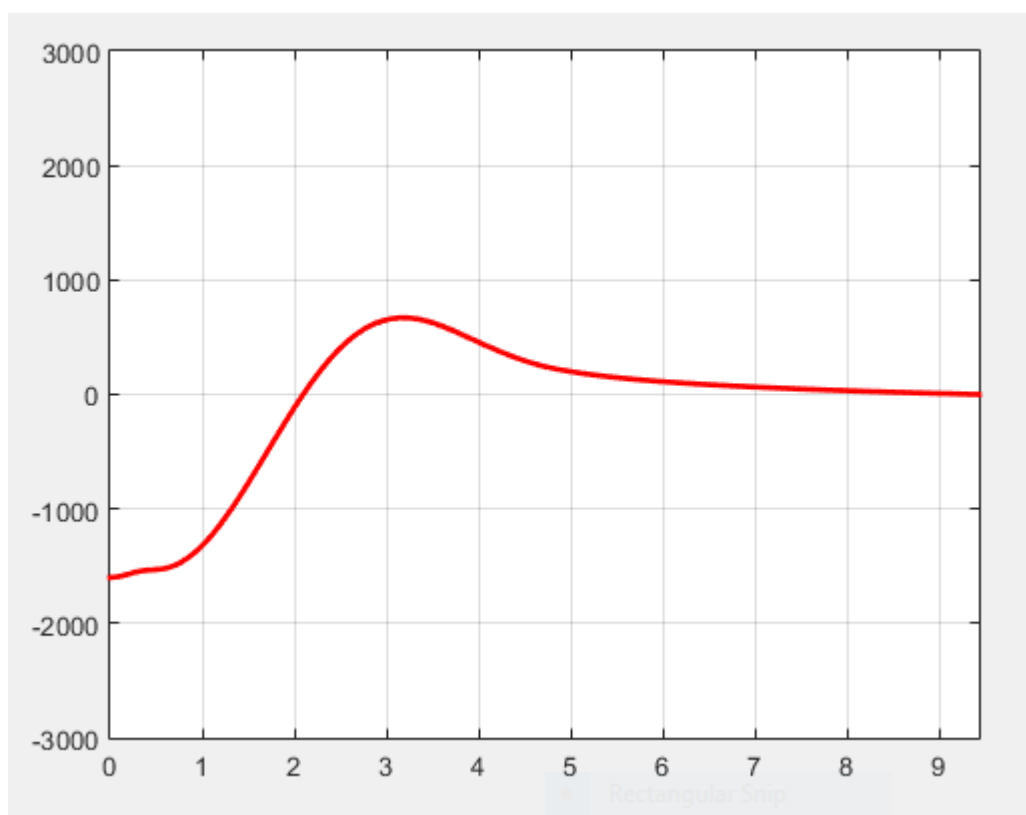
```
subplot(3,1,2)
plot(x,u(x,5),'r','LineWidth',2)
title('When t=5')
grid on
hold off

subplot(3,1,3)
plot(x,u(x,10),'r','LineWidth',2)
title('When t=10')
grid on
hold off

end
```

Бележка: Резултати от изпълнението няма, тъй като задачата е да се покаже графика.

2.3. Графики



2.4. Коментари към получените с MatLab резултати

На първата графика (анимация) се вижда как струната трепти, в резултат на което се образуват две вълни всяка, от които има противоположно направление на другата. В даден момент, те се събират и образуват една вълна, след което процеса започва от начало.

На втората графика е изобразено трептенето на струната в моментите $t_1=0$, $t_2=5$, $t_3=10$.

Вижда се, че положението на вълната се различава в трите графики.