Лекція 5

ОСНОВНІ ПРАВИЛА КОМБІНАТОРИКИ

Нехай B — довільна скінчена множина. Позначимо через $\mathrm{card}(B)$ кількість елементів множини B.

1. Правило бієкції

Нехай X і Y дві довільні множини. Якщо задано правило, згідно з яким кожному елементу $x \in X$ відповідає елемент $y \in Y$, то говорять, що задано *відображення* множини X на множину Y. Якщо позначити правило буквою f, то відображення множини X в множину Y позначають $f : X \to Y$. Якщо згідно з відображенням f елемент $y \in Y$ відповідає елементу $x \in X$, то y називається *образом* x, а x — *прообразом* y.

Приклад 1. Нехай X — множина всіх людей, які живуть на нашій планеті, Y — множина всіх країн світу. Визначимо правило f наступним чином: $f(x)$ — це країна, в якій проживає людина x. Ясно, що f — це відображення множини X в множину Y. Зауважимо, що для різних $x_1 \neq x_2$ цілком можливо, що $f(x_1) = f(x_2)$.

Відображення називається *бієкцією*, якщо кожному елементу $x \in X$ відповідає тільки один елемент $y \in Y$, а кожний елемент $y \in Y$ відповідає тільки одному елементу $x \in X$.

[0]Printed from the file `[discretka_L=04.tex]` on 25.7.2013

Приклад 2. Обидві множини X і Y співпадають з множиною дійсних чисел. Відображення $f(x) = x$ є бієкцією, а $f(x) = x^2$ — ні.

Правило 1. *Нехай множини X і Y мають скінчену кількість елементів. Якщо існує бієкція між X і Y, то* $\operatorname{card}(X) = \operatorname{card}(Y)$.

Доведення правила бієкції. Для зручності позначимо $m = \operatorname{card}(X)$ та $n = \operatorname{card}(Y)$. Нехай $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ і $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$. Запишемо таблицю з елементів множини X і елементів множини Y, які їм відповідають згідно відображення f:

$$\begin{array}{ccc} x_1 & \dots & x_m \\ \downarrow & \dots & \downarrow \\ f(x_1) & \dots & f(x_m) \end{array} \tag{1}$$

Зафіксуємо $i \leq m$. Оскільки $f(x_i) \in Y$, то існує $y_j \in Y$, для якого $y_j = f(x_i)$. Оскільки f — бієкція, всі елементи $f(x_1), \dots, f(x_m)$ різні. Їх сукупність є підмножиною Y. Тому $m \leq n$. Як би $m < n$, то знайшовся б такий елемент $y_0 \in Y$, який відрізнявся б від всіх елементів другого рядка таблиці. Позначимо елемент з X, який відповідає y_0, через x_0. Знайдемо x_0 в таблиці. Якщо елемент x_0 знаходиться в таблиці на позиції i, то йому відповідає елемент $f(x_i)$. Таким чином, і y_0, і $f(x_i)$ відповідають x_0. З означенням бієкції це неможливо. Тобто $m = n$. □

2. Правило додавання

Об'єднанням множин A і B називається сукупність елементів, кожний з яких належить хоча б одній з множин A

і B (позначається $A \cup B$). *Перетином* множин A і B називається сукупність елементів, кожний з яких належить кожній з множин A і B (позначається $A \cap B$).

Нехай $A_1, \dots, A_n$ скінчені множини. Тобто $\mathrm{card}(A_i) < \infty$, $1 \le i \le n$. Утворимо їхнє об'єднання

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Правило 2. *Припустимо, що множини $A_1, \dots, A_n$ попарно не перетинаються, тобто $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$. Тоді*

$$\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(A_1) + \dots + \mathrm{card}(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{card}(A_i). \tag{2}$$

Доведення правила додавання. Дійсно, за означенням об'єднання кожний елемент $a \in A$ входить принаймні в одну із множин $A_1, \dots, A_n$. Оскільки вони попарно не перетинаються, то існує тільки одна множина серед $A_1, \dots, A_n$, яка містить a. Тому a рахується тільки один раз в правій частині (2). $\square$

Задача 1. *Квадрат із стороною довжини 4 розбили на 16 однакових частин 4–ма лініями, паралельними вісі Ox, і 4-ма лініями, паралельними вісі Oy. Скільки квадратів можна нарахувати в такій картинці?*

`Розв'язання задачі 1`. Очевидно, що паралельні прямі проведені на однаковій відстані одна від одної. Позначимо через A множину всіх квадратів на цій картинці, а через A_i, $1 \le i \le 4$, — множину квадратів, довжина сторони яких дорівнює i. Наприклад, A_1 — це множина квадратів, довжина сторони яких дорівнює 1. Зрозуміло, що $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ і, крім цього, $\mathrm{card}(A_1) = 16$ та $\mathrm{card}(A_4) = 1$ Нескладно також побачити, що $\mathrm{card}(A_2) = 9$, $\mathrm{card}(A_3) = 4$. Оскільки множини A_1, A_2, A_3, A_4 попарно не перетинаються, то згідно з правилом додавання $\mathrm{card}(A) = 16 + 9 + 4 + 1 = 30$.

Задача 2. *Скільки ходів на шаховій дошці* 8×8 *може зробити король?*

Розв'язання задачі 2. Кількість ходів, які король може зробити з фіксованої клітинки, залежить від положення цієї клітинки на шаховій дошці. Клітинки на дошці позначимо через K_{ij}, $1 \le i, j \le 8$, в залежності від їх положення, причому K_{11} — це ліва нижня клітинка. З клітинки K_{11} король може зробити 3 ходи, з клітинки K_{12} — 5 ходів, з клітинки K_{22} — 8 ходів. Розглянемо множину клітинок A_3, A_5 і A_8, з яких король може зробити 3, 5 і 8 ходів відповідно. Якщо A — це множина всіх клітинок дошки, то $A = A_3 \cup A_5 \cup A_8$. Оскільки множини попарно не перетинаються, то згідно з правилом додавання $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(A_3) + \mathrm{card}(A_5) + \mathrm{card}(A_8)$. А оскільки $\mathrm{card}(A_3) = 4$, $\mathrm{card}(A_5) = 24$ і $\mathrm{card}(A_8) = 64 - 4 - 24 = 36$, то кількість можливих ходів короля є $4 \times 3 + 24 \times 5 + 36 \times 8 = 12 + 120 + 288 = 420$.

3. Правило множення

Нехай X і Y — дві довільні множини. Сукупність векторів (x, y), $x \in X$, $y \in Y$, називається *декартовим добутком* множин X і Y. Позначення: $X \times Y$. Декартовим добутком множин $X_1, \dots, X_n$ називається сукупність векторів $(x_1, \dots, x_n)$, $x_1 \in X_1$, $\dots$, $x_n \in X_n$. Позначення: $X_1 \times \dots \times X_n$

Правило 3. *Припустимо, що кожна з множин* $X_1, \dots,$ X_n *є скінченою. Тоді їхній декартів добуток* $X_1 \times \dots \times X_n$

також має скінчену кількість елементів, причому

$$\text{card}(X_1 \times \cdots \times X_n) = \text{card}(X_1) \ldots \text{card}(X_n). \tag{3}$$

Наслідок 1. *Нехай множини X та Y є скінченими. Тоді* $\text{card}(X \times Y) = \text{card}(X)\,\text{card}(Y)$.

Доведення правила множення. Позначимо $n_i = \text{card}(X_i)$, $1 \le i \le n$. Спочатку розглянемо випадок $n = 2$. Будемо користуватись позначеннями $X = X_1$, $Y = X_2$. Всі елементи $X \times Y$ можна розмістити у вигляді таблиці

$$\begin{array}{ccccc} \text{[стовбчик номер 1]} & & \text{[стовбчик номер } n_2\text{]} & \\ \downarrow & & \downarrow & \\ (x_1, y_1) & \ldots & (x_1, y_{n_2}) & \leftarrow \text{[рядок номер 1]} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (x_{n_1}, y_1) & \ldots & (x_{n_1}, y_{n_2}) & \leftarrow \text{[рядок номер } n_1\text{]} \end{array}$$

В цій таблиці n_1 рядків і n_2 стовпців. Тому кількість елементів в ній дорівнює $n_1 n_2$. Це і доводить правило множення для $n = 2$.

Нехай тепер $n > 2$. Скористаємось методом математичної індукції. Базою індукції є випадок $n = 2$, який ми вже розглянули вище. Припустимо, що правило множення є справедливим для $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Доведемо його для $k = n$. Позначимо

$$X = X_1 \times \cdots \times X_{n-1}, \qquad Y = X_n.$$

Тоді $X_1 \times \cdots \times X_n = X \times Y$. Згідно з вже розглянутим випадком $\text{card}(X \times Y) = \text{card}(X) \times \text{card}(Y)$. Згідно з припущенням математичної індукції

$$\text{card}(X) = \text{card}(X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) = \text{card}(X_1) \ldots \text{card}(X_{n-1}).$$

Це і доводить правило множення (3). □

4. Основне правило комбінаторики

Правило множення часто зручно формулювати наступним чином. Нехай деяка операція O здійснюється за допомогою дій $D_1, \dots, D_k$, які виконуються послідовно. Цей факт ми записуємо так: $O = D_1 \otimes \dots \otimes D_k$.

Приклад 3. Нехай $O = \{$записати слово з 4-х літер$\}$, а $D_i = \{$записати i-у літеру$\}$, $1 \le i \le 4$. Оскільки кожне слово отримується послідовним записом літер у позиціях 1, 2, 3 та 4, то $O = D_1 \otimes D_2 \otimes D_3 \otimes D_4$.

Правило 4. *Нехай дію D_i, $1 \le i \le k$, можна виконати n_i способами. Тоді операцію O можна здійснити $n_1 \dots n_k$ способами.*

Це правило називається *основним правилом комбінаторики.*

Доведення. Доведемо, що основне правило комбінаторики є еквівалентним правилу множення. Для цього розглянемо k множин $X_1 = \{1, \dots, n_1\}$, ... , $X_k = \{1, \dots, n_k\}$.

Кожний вектор $(x_1, \dots, x_k) \in X_1 \times \dots \times X_k$ можна інтерпретувати як певний результат виконання дій $D_1, \dots, D_k$. Цей результат отримується, якщо дія D_i виконується способом номер x_i, $1 \le i \le k$. Тоді операція O закінчується результатом, який відповідає вектору $(x_1, \dots, x_k)$. Таким чином, ми співставляємо кожному способу, яким реалізується операція O, вектор із декартового добутку $X_1 \times \dots \times X_k$. Таке співставлення є взаємно однозначною відповідністю між $X_1 \times \dots \times X_k$ і множиною способів реалізації операції O. Згідно з правилом бієкції це означає, що ці множини мають однакову кількість елементів, що і доводить необхідне твердження. $\square$

Задача 3. *З міста A в місто B веде 5 доріг, а з B в C — 4 дороги. Скільки існує різних шляхів з A в C?*

Розв'язання задачі 3. Операцію $O = \{$вибрати шлях з A в $C\}$ можна представити як результат виконання двох дій $O = D_1 \otimes D_2$, де $D_1 = \{$вибрати дорогу з A в $B\}$ і $D_2 = \{$вибрати дорогу з B в $C\}$. Дію D_1 можна здійснити 5 способами, а дію D_2 — 4 способами. Згідно з правилом множення операцію O можна здійснити 20 способами.

Задача 4. *Нехай X і Y дві скінчені множини. Скільки існує різних відображень X в Y?*

Розв'язання задачі 4. Нехай $m = \mathrm{card}(X)$ і $n = \mathrm{card}(Y)$. Кожне відображення f можна представити у вигляді таблиці (1). Розглянемо дії D_i, $1 \leq i \leq m$:

$$D_i = \{\text{вибрати образ елемента } x_i, \text{ тобто вибрати } f(x_i)\}\,.$$

Кількість способів здійснити дію D_i однакова для всіх $1 \leq i \leq m$ і дорівнює n. Тому згідно з основним правилом комбінаторики операцію

$$O = \{\text{вибрати відображення}\} = D_1 \otimes \cdots \otimes D_m$$

можна здійснити n^m способами. Це означає, що існує n^m різних відображень множини X в множину Y.

Задача 5. *Скільки існує способів вибрати пару полів на шаховій дошці 8×8 так, щоб одне поле було білим, а друге — чорним?*

Розв'язання задачі 5. Нехай X — це множина білих полів, а Y — множина чорних полів. Якщо використовувати спосіб нотації в шахах, то $X = \{a1, a3, \ldots, h8\}$, $Y = \{a2, a4, \ldots, h7\}$. Зрозуміло, що $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y) = 32$. Запитання задачі можна сформулювати так: скільки існує пар (x, y), таких, що $x \in X$, а $y \in Y$? Ясно, що це запитання стосується кількості елементів декартового дрбутку $X \times Y$. Тобто відповідь в задачі така: $32 \cdot 32 = 1024$.