

Contents

Introduktion	1
Differentialregning	2
Grænseværdi	2
Tid/distance	2
Regler og eksempler	3
Differentiering af potensfunktion	3
Differentiering af e^x	3
Differentiering af x^a	3
Differentiering af konstanter	3
Differentiering af resultatet af to funktioner	4
Differentiering af produktet af to funktioner	4
Differentiering af division af to funktioner	4
Differentiering af sammensatte funktioner	5
Differentiering af logaritmefunktionen \ln	5
Tangentligning	5
Funktioner	6
Definitioner m.v.	6
Lineære funktioner	6
Exponentielle funktioner	6
Potensfunktioner	7
Logaritmer	8
Sammensatte funktioner	8
Tal	9

Introduktion

Dokumentet kan [downloades](#) som pdf

Differentialregning

Grænseværdi

$$\frac{1}{n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

Bestemmelse af e

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} e$$

Tid/distance

Tangenten på en funktion der beskriver tid/distance, kan bruges til at finde hastigheden i præcis det punkt, hvor tangenten ligger.

v= hastighed

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} \rightarrow_{\Delta t \rightarrow 0} S'(t) = V(t)$$

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} \rightarrow_{\Delta t \rightarrow 0} S'(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dy}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow_{\Delta x \rightarrow 0} f'(x) = \frac{df}{dx}$$

$$\frac{f(x) + \Delta x - f(x)}{\Delta x}$$

Eksempel:

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = \frac{x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{x^2 + (\Delta x^2) + 2x * \Delta x - x^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta x(\Delta x + 2x)}{\Delta x}$$

$$(\Delta x + 2x)$$

$$(\Delta x + 2 \rightarrow_{\Delta x \rightarrow 0} 2x)$$

Eksempel:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \frac{\frac{x - (x + \Delta x)}{(x + \Delta x) * x}}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{(x + \Delta x) * x}}{\Delta x}$$

Regler og eksempler

Differentiering af potensfunktion

$$f(x) = a^x$$

$$f'(x) = \ln(a) * a^x$$

Differentiering af e^x

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

Differentiering af x^a

$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

$$e^{\ln x} = x$$

$$x^a = (e^{\ln x})^a = e^{a * \ln x}$$

$$(x^a)' = (e^{a \ln x})' = e^{a \ln x} * a \frac{1}{x} = ax^a * \frac{1}{x^1} = ax^{a-1}$$

Differentiering af konstanter

$$h(x) = k * f(x)$$

$$h'(x) = k * f'(x)$$

Differentiering af resultatet af to funktioner

$$H(x) = f(x) \pm g(x)$$

$$h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

Differentiering af produktet af to funktioner

$$h(x) = f(x) * g(x)$$

$$h'(x) = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$$

Produktreglen Bevis for at produktreglens funktion er kontinuert

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\Delta f = \frac{\Delta f}{\Delta x} * \Delta x$$

$$f'(x) * 0 = 0$$

Differentiering af division af to funktioner

$$h(x) = f(x)/g(x)$$

$$g(x) \neq 0$$

$$h'(x) = (f'(x) * g(x) - f(x) * g'(x))/g(x)^2$$

Differentiering af sammensatte funktioner

sammensat funktion = composite function se 6.8, chain rule i “Essential Mathematic for Economic Analysis” side 187

$$h(x) = f(g(x))$$

f(x) er ydre funktion g(x) er indre funktion

$$h'(x) = f'(g(x)) * g'(x)$$

Bevis:

$$y = f(g(x))$$

$$test = \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x}$$

$$\frac{f(g(x) + \Delta g) - f(g(x))}{\Delta x}$$

$$f'(g(x)) * g'(x)$$

Differentiering af logaritmefunktionen ln

$$\frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \frac{\ln(\frac{x + \Delta x}{x})}{\Delta x} = \frac{\ln(\frac{x}{x} + \frac{\Delta x}{x}) - \ln 1}{\Delta x}$$

Divider delta x med x og gang det med x, for at matche det i overdelen af ligningen

$$\frac{\ln(\frac{x}{x} + \frac{\Delta x}{x}) - \ln 1}{\frac{\Delta x}{x} * x} = \frac{1}{x}$$

Tangentligning

Eks.:

$$y = ax + b$$

Givet punkterne (1,1) og funktionen x^2

$$y = f'(x) + b$$

$$f'(x_0) = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f(x) = x^2$$

$$t(x) = 2x + b$$

b kan herefter udregnes ved hjælp af et givent punkt.

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Funktioner

Definitioner m.v.

Lineære funktioner

Formel:

$$y = ax + b$$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Ligefrem proportionalitet

$$y = kx$$

Omvendt proportionalitet

$$y = \frac{k}{x}$$

e.g. cykelpumpe

$$p * v = k$$

Exponentielle funktioner

Formel:

$$y = ba^x$$

Hvis man kender to punkter, eks. (3, 2), (24,5)

$$24 = (b * a^5)$$

$$3 = (b * a^2)$$

$$\frac{24}{3} = \frac{ba^5}{ba^2}$$

$$\frac{24}{3} = \frac{a^5}{a^2}$$

$$a = (\sqrt[5-2]{\frac{24}{3}})$$

e^x Formel

$$y = e^x$$

Bevis:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \frac{e^x * e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\ e^x \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} &= e^x \frac{e^{0+\Delta x} e^0 - e^0}{\Delta x} \end{aligned}$$

Vi ved:

$$\frac{e^{0+\Delta x} e^0 - e^0}{\Delta x} = 1$$

Derfor er

$$(e^x)' = e^x$$

Derudover:

$$e^{lna*x} = (e^{lna})^x = a^x$$

Regning med procent

$$y = b(1+r)^x$$

Fordoblingstid/Halveringstid

$$y = b * 2^{\frac{x}{T_2}}$$

Potensfunktioner

Formel:

$$y = bx^a$$

$$(1+rx)^a = (1+ry)$$

Logaritmer

\ln != \log

$\log()$ bruger 10-tals-systemet

$$y = a * \ln(x)$$

$$\ln 2 = \ln(2) \approx 0,69314$$

$$\ln 3 = \ln(3) \approx 1,09861$$

$$\ln 6 = \ln(6) \approx 1,79176$$

eks.

$$f(x) = e^x$$

$$f^{-1}(x) = \ln(x)$$

$$\ln(x) = 0 \rightarrow e^0 = 1$$

(man kan ligge resultaterne sammen og få produktet af dem)

bevis

$$e^{\ln(a*b)} = e^{\ln a + \ln b}$$

$$e^{\ln \frac{a}{b}} = e^{\ln a - \ln b}$$

$$a * b = e^{\ln a} * e^{\ln b}$$

Sammensatte funktioner

Det kan ofte være nyttigt at kombinere flere funktioner, f.eks.:

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = \sqrt{x} - 23$$

De kan herefter kombineres, f.eks.:

$$f(g(x)) = (\sqrt{x} - 23)^2$$

eller

$$g(f(x)) = \sqrt{(x^2)} - 23$$

Tal

N = Naturlige tal $\{1, 2, 3, \dots\}$

N_0 = Naturlige tal, samt 0 $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Z = Hele tal $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, \dots\}$

Q = Rationale tal (brøker) - “Ratio”, eng.

R = Reelle tal