Contents

Introduktion

Dokumentet kan downloades som pdf

Differentialregning

Grænseværdi

$$\frac{1}{n} \rightarrow_{n\rightarrow\infty} 0$$

Bestemmelse af e

$$(1 + \frac{1}{n}^{n}) \rightarrow_{n\rightarrow\infty} e$$

Tid/distance

Tangenten på en funktion der beskriver tid/distance, kan bruges til at finde hastigheden i præcis det punkt, hvor tangenten ligger.

v= hastighed

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} \rightarrow_{\Delta t\rightarrow 0} S'(t) = V(t)$$

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} \rightarrow_{\Delta t\rightarrow 0} S'(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dy}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow_{\Delta x\rightarrow 0} f'(x) = \frac{df}{dx}$$

$$\frac{f(x) + \Delta x) = f(x)}{\Delta x}$$

Eksempel:

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = \frac{x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{x^2 + (\Delta x^2) + 2x * \Delta x - x^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta x(\Delta x + 2x)}{\Delta x}$$

$$(\Delta x + 2x)$$

$$(\Delta x + 2 \rightarrow_{\Delta x \rightarrow 0} 2x)$$

Eksempel:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\frac{x-(x+\Delta x)}{(x+\Delta x)*x}}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{(x+\Delta x)*x}}{\Delta x}$$

Regler og eksempler

Differentiering af potensfunktion

$$f(x) = a^x$$

$$f'(x) = ln(a) * a^x$$

Differentiering af e^x

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

Differentering af x^a

$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

$$e^{lnx} = x$$

$$x^a = (e^{lnx})^a = e^{a*lnx}$$

$$(x^a)' = (e^{alnx}) = e^{alnx} * a\frac{1}{x} = ax^a * \frac{1}{x^1} = ax^{a-1}$$

Differentiering af konstanter

$$h(x) = k * f(x)$$

$$h'(x) = k * f'(x)$$

Differentiering af resultatet af to funktioner

$$H(x) = f(x) \pm g(x)$$

$$h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

Differentiering af produktet af to funktioner

$$h(x) = f(x) * g(x)$$

$$h'(x) = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$$

Produktreglen Bevis for at produktreglens funktion er kontinuer

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\Delta f = \frac{\Delta f}{\Delta x} * \Delta x$$

$$f'(x) * 0 = 0$$

Differentiering af divion af to funktioner

$$h(x) = f(x)/g(x)$$

$$g(x) \neq 0$$

$$h'(x) = (f'(x) * g(x) - f(x) * g'(x))/g(x)^2)$$

Differentering af sammensatte funktioner

sammensat funktion = composite function se 6.8, chain rule i "Essential Mathematic for Economic Analysis" side 187

$$h(x) = f(g(x))$$

f(x) er ydre funktion g(x) er indre funktion

$$h'(x) = f'(g(x)) * g'(x)$$

Bevis:

$$y = f(g(x))$$

$$test = \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x}$$

$$\frac{f(g(x) + \Delta g) - f(g(x))}{\Delta x}$$

$$f'(g(x)) * g'(x)$$

Differentiering af logaritmefunktionen ln

$$\frac{ln(x + \Delta x) - lnx}{\Delta x} = \frac{ln(\frac{x+\Delta x}{x})}{\Delta x} = \frac{ln(\frac{x}{x} + \frac{\Delta x}{x}) - ln1}{\Delta x}$$

Divider delta x med x og gang det med x, for at matche det i overdelen af ligningen

$$\frac{ln(\frac{x}{x} + \frac{\Delta x}{x}) - ln1}{\frac{\Delta x}{x} * x} = \frac{1}{x}$$

Tangentligning

Eks.:

$$y = ax + b$$

Givet punkterne (1,1) og funktionen x^2

$$y = f'(x) + b$$

$$f'(x_0) = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f(x) = x^2$$

$$t(x) = 2x + b$$

b kan herefter udregnes ved hjælp af et givent punkt.

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Funktioner

Definitioner m.v.

Lineære funktioner

Formel:

$$y = ax + b$$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Ligefrem proportionalitet

$$y = kx$$

Omvendt proportionalitet

$$y = \frac{k}{x}$$

e.g. cykelpumpe

$$p * v = k$$

Exponentielle funktioner

Formel:

$$y = ba^x$$

Hvis man kender to punkter, eks. (3, 2), (24,5)

$$24 = (b * a^5)$$
$$3 = (b * a^2)$$
$$\frac{24}{3} = \frac{ba^5}{ba^2}$$

$$\frac{24}{3} = \frac{a^5}{a^2}$$

$$a = (\sqrt[5-2]{\frac{24}{3}})$$

e^x Formel

$$y = e^x$$

Bevis:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \frac{e^x * e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x}$$
$$e^x \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \frac{e^{0+\Delta x} e^0}{\Delta x}$$

Vi ved:

$$\frac{e^{0+\Delta x} e^0}{\Delta x} = 1$$

Derfor er

$$(e^x)' = e^x$$

Derudover:

$$e^{lna*x} = (e^{lna})^x = a^x$$

Regning med procent

$$y = b(1 + r)^x$$

Fordoblingstid/Halveringstid

$$y = b * 2^{\frac{x}{T_2}}$$

Potensfunktioner

Formel:

$$y = bx^a$$

$$(1 + rx)^a = (1 + ry)$$

Logaritmer

ln != log

log() bruger 10-tals-systemet

$$y = a * ln(x)$$

$$ln2 = ln(2) \approx 0,69314$$
$$ln3 = ln(3) \approx 1,09861$$
$$ln6 = ln(6) \approx 1,79176$$

eks.

$$f(x) = e^x$$
$$f^{-1}(x) = ln(x)$$

$$ln(x) = 0- > e^0 = 1$$

(man kan ligge resultaterne sammen og få produktet af dem)

bevis

$$e^{ln(a*b)} = e^{lna+lnb}$$

$$e^{ln\frac{a}{b}} = e^{lna-lnb}$$

$$a * b = e^{lna} * e^{lnb}$$

Sammensatte funktioner

Det kan ofte være nyttigt at kombinere flere funktioner, f.eks.:

$$f(x) = x^2$$
$$g(x) = \sqrt{x} - 23$$

De kan herefter kombineres, f.eks.:

$$f(g(x)) = (\sqrt{x} - 23)^2$$

eller

$$g(f(x)) = \sqrt{(}x^2) - 23$$

% Integralregning % Kristian Øllegaard % 12-07-2012

Integralregning

Består af stamfunktioner, summer og sandsynlighedsregning.

Stamfunktioner

En stamfunktion er at gå baglæns ifht. differentiering.

$$f(x) = 2x$$

Stamfunktion til f = F

$$F'(x) = f(x)$$

$$F(x) = x^2 + k$$

Idet man kan tilføje en hvilkensomhelst konstant til en given stamfunktion, er det ikke kun een stamfunktion, men uendeligt mange.

$$g(x) = x^3$$

$$G(x) = \frac{1}{4}x^4 + k$$

f(x)	F(x)
x^7	$1/8x^8 + k$
$5x^{10}$	$\frac{5}{11}x^{11} + k$
$3x^2 + 2x - 8$	$x^3 + x^2 - 8x + k$
$1/x$	$lnx + k$
e^x	$e^x + k$
$e^(5x)$	$\frac{1}{5}e^{5x} + k$
3^x	$\frac{1}{ln3} * 3^x + k$
$-(1/x^2)$	$\frac{1}{x} + k$

Eksempel:

$$f(x) = 2x$$

$$F(x) = \int 2xdx = x^2 + k$$

$$(\int f(x)dx)' = f(x)$$

$$\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int k * g(x)dx = k * \int g(x)dx$$

Definition

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + k$$

eller

$$\int a^x dx = \frac{1}{lna} a^x + k = \frac{a^x}{lna} + k$$

Brug af lommeregner

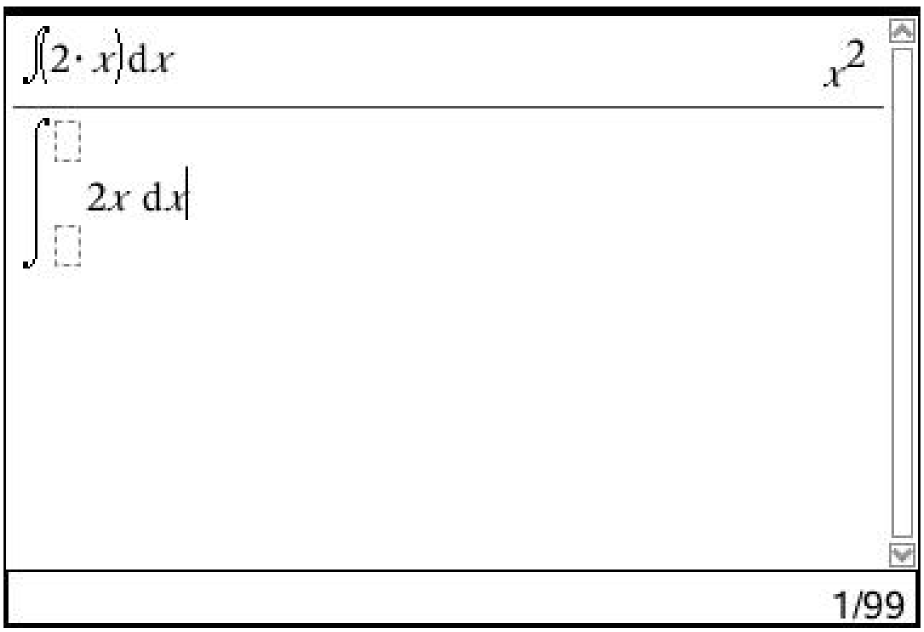
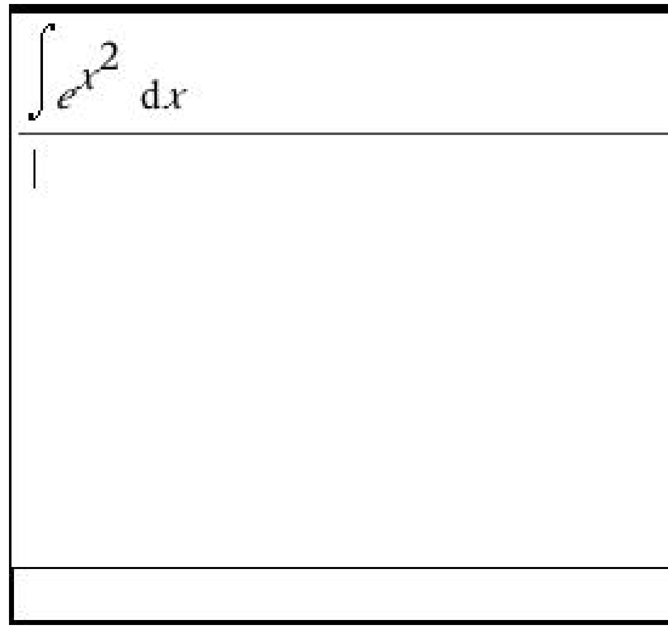


Figure 1: Screenshot af integralregning på TI-nspire CAS

e^{x}2



Kan ikke udtrykkes, derfor skriver lommeregneren flg.:

Udregning af konstant

Ved et givet punkt (2,8)

$$f(x) = 2x$$
$$F(x) = x^2 + k$$
$$8 = 2^2 + k$$
$$k = 4$$
$$F(x) = x^2 + 4$$

Husk at sørge for ‘k’ bliver husket i hvert led.

Om flere stamfunktioner til en given funktion

$$f(x)$$
$$F(x)' = f(x)$$
$$G(x)' = f(x)$$

$$F(x) - G(x) = k$$

$$F(x) = G(x) + k$$

Bevis:

$$(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Derfor

$$F(x) - G(x) = k$$

Tid/distance

t = tid

s = strækning

v = hastighed

a = acceleration

$$s'(t) = v = 3$$
$$f'(x) = 3$$
$$f(x) = 3x + k$$
$$s(t) = 3t + k$$

$$s(t)$$
$$s'(t) = v(t)$$
$$v'(t) = a(t)$$

Areal af f= stamfunktionen til f

$$A(b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(A)$$

Eks. Areal af f(x) = xˆ2 i intervallet [0;1]

$$\int_0^1 x^2 dx = [\frac{1}{3}x^3] = \frac{1}{3}1^3 - \frac{1}{3}0^3 = \frac{1}{3}$$

Eks. på ti-nspire

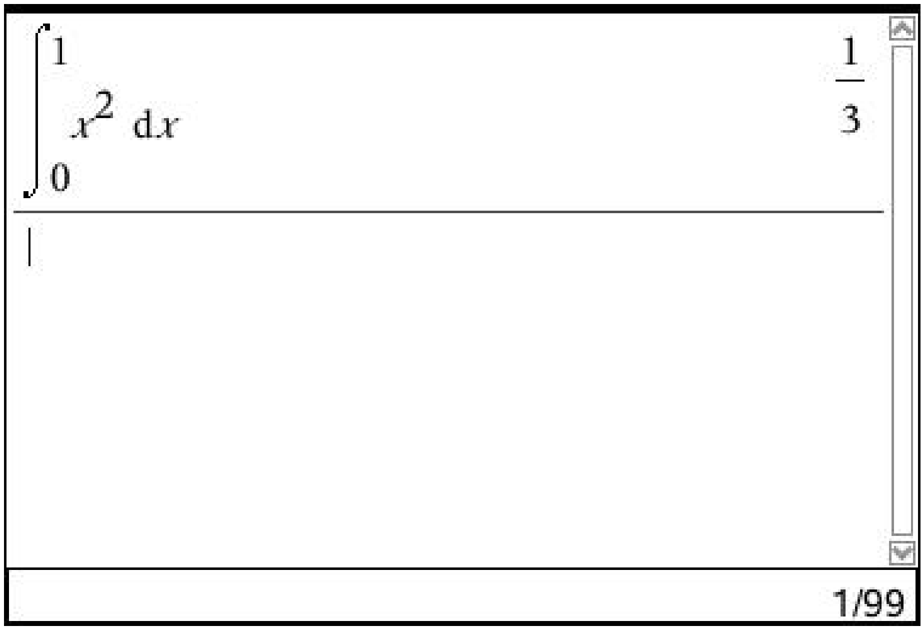


Figure 2: Ovenstående på TI-nspire CAS

Areal/Oversum/Undersum

Oversum

$$O(x) = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x \ldots f(x_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{5} f(x_i)\Delta x$$

Undersum

$$U(x) =$$

Middelsum

$$M(x) =$$

Areal

$$U(x) \leq A \leq O(x)$$

$$O - U \rightarrow_{\Delta x \rightarrow 0} 0$$

$$areal = f(b) - f(a)\Delta x$$

$$\sum^{\infty}\_i = 1 f(t_i)\Delta x \to \_x \to 0 \int^{b} \_a f(x)dx$$

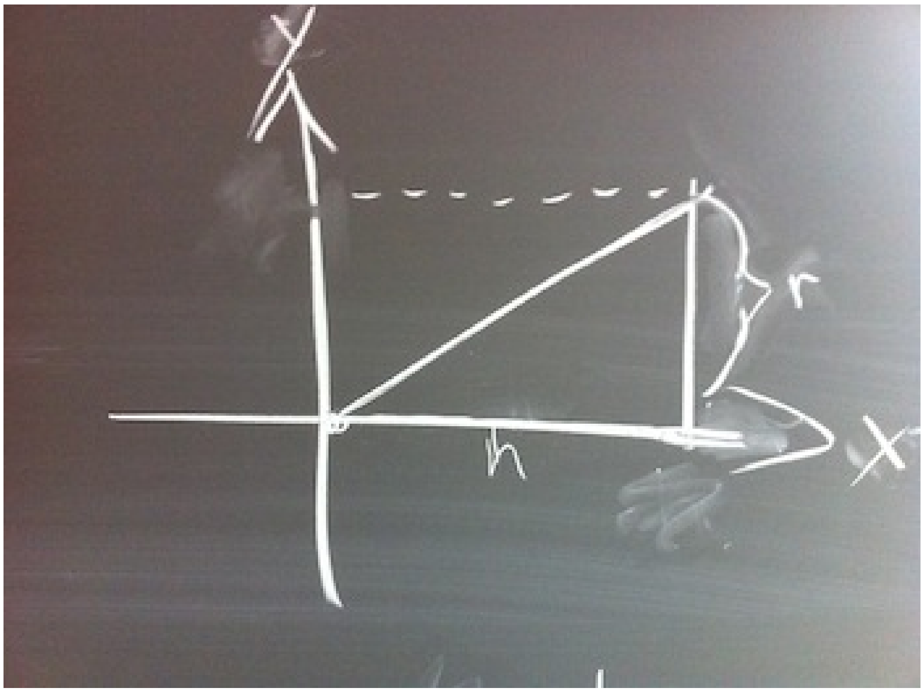


Figure 3:

Bestemmelse af arealet for en kegle

$$a = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

$$y = \frac{r}{h}x$$

$$\int_0^h \pi(\frac{r}{h}x)^2 dx = \pi\frac{r^2}{h^2}\int_0^h x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h * \pi\frac{r^2}{h^2} = \frac{1}{3}\pi\frac{r^2}{h^2} + 0 = \frac{1}{3}h\pi * r^2$$

Tal

N = Naturlige tal {1, 2, 3, . . . }

N0 = Naturlige tal, samt 0 {0, 1, 2, 3, ...}

Z = Hele tal {..., -3, -2, -1, 0, 1, ...}

Q = Rationale tal (brøker) - “Ratio”, eng.

R = Reelle tal