# 第6章 信号的运算和处理

**本章要求：**

**掌握由集成运放组成的基本运算电路的工作原理及分析方法；**

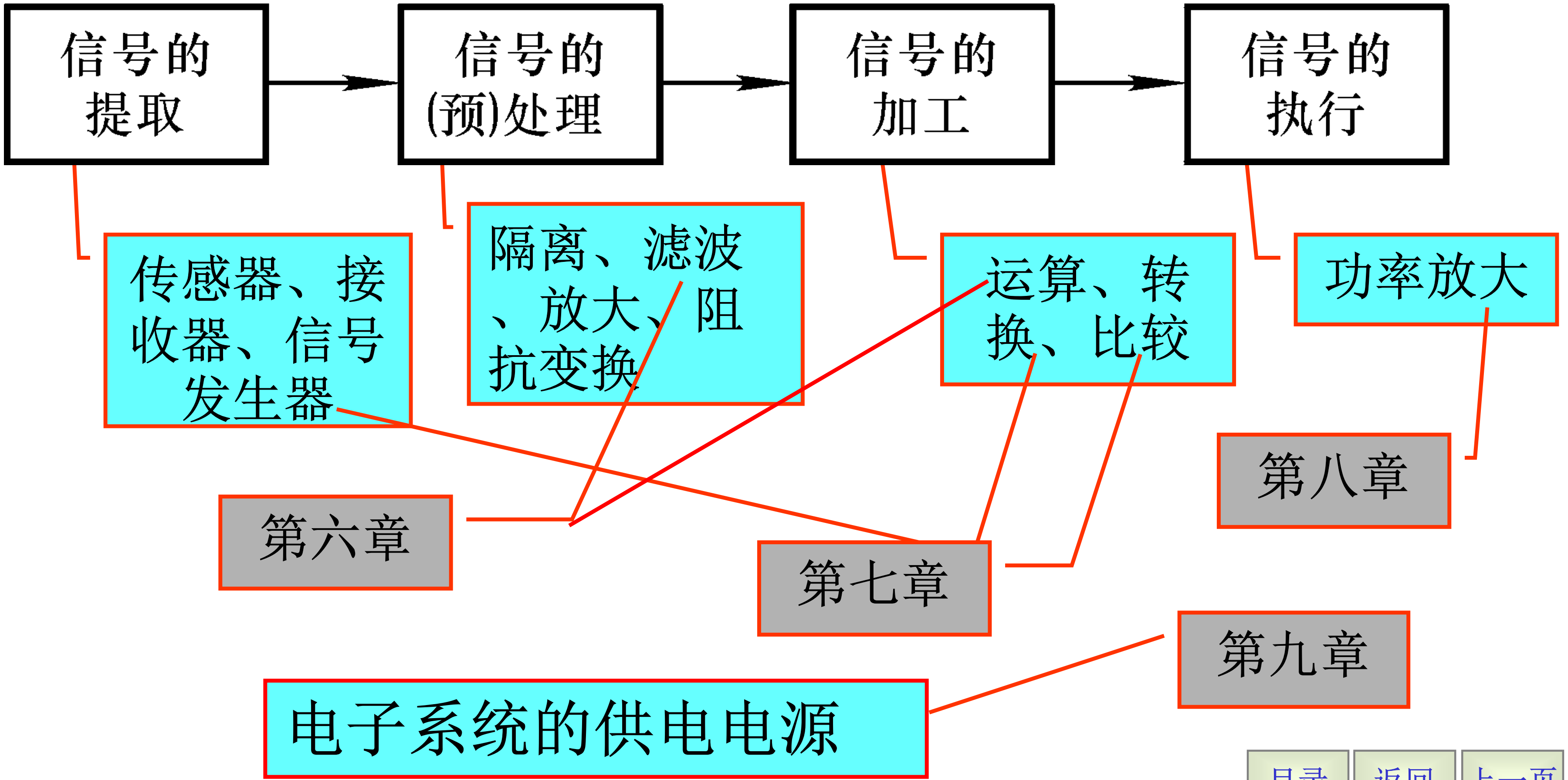
**理解有源滤波电路的种类、电路特点及应用场合，能识别有源滤波器的类型。**

# 目 录

# 6.1 基本运算电路

## 6.1.1 概述

### 1. 模拟电子系统的组成



## 2. 运算电路研究的问题

（1）什么是运算电路：运算电路的输出电压是输入电压某种运算的结果，运算关系式为 $u_O = f(u_I)$，实现比例、加减、积分、微分、对数、指数等基本运算。

（2）电路的特点：运算电路中的集成运放应当工作在线性区，且为了稳定输出电压，应当引入电压负反馈。即从集成运放的输出端到其反相输入端存在反馈通路，且输出电阻为零。

（3）分析方法：均设为理想运放，所以“虚短”和“虚断”是分析运算电路的基本出发点。

## 3. 学习运算电路的基本要求

（1）识别电路。

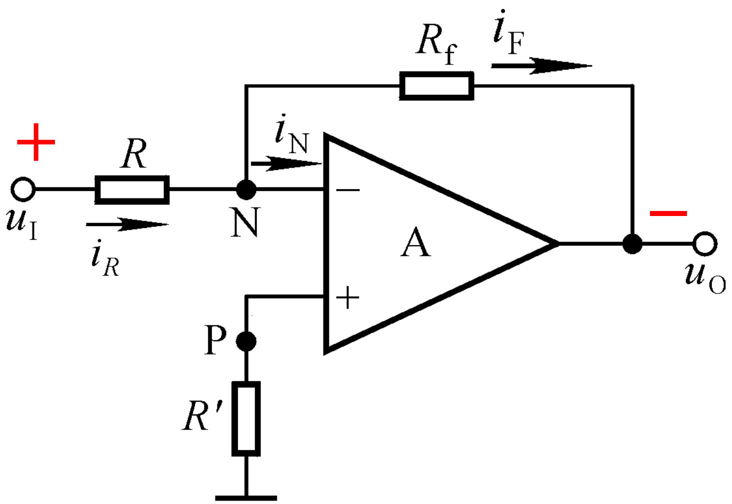
（2）求解运算关系式。

# 6.1.2 比例运算电路

## 一、反相比例运算电路

因虚断，$i_P = i_N = 0$，所以 $i_R = i_F$

### 1. 基本电路




又因虚短，所以$u_N = u_P = 0$，

**称为“虚地”— 是反相比例运算的重要特点**

$$i_R = \frac{u_I - u_N}{R} = i_F = \frac{u_N - u_O}{R_f}$$

$$\boxed{u_O = -\frac{R_f}{R} u_I}$$

$$\boxed{A_{uf} = \frac{u_O}{u_I} = -\frac{R_f}{R}}$$

深度电压并联负反馈电路

为保证集成运放输入级差分放大电路的对称性，一般有 $R_P = R_N$，所以补偿电阻 $R' = R \,//\, R_f$

$A_{uf}$ 只与 $R$ 和 $R_f$ 有关，而与运放本身的参数及负载无关，这就保证了运算的精度和稳定性。

$R_i = R$ 反相比例运算电路的输入电阻不大

$$u_O = -\frac{R_f}{R} u_I$$

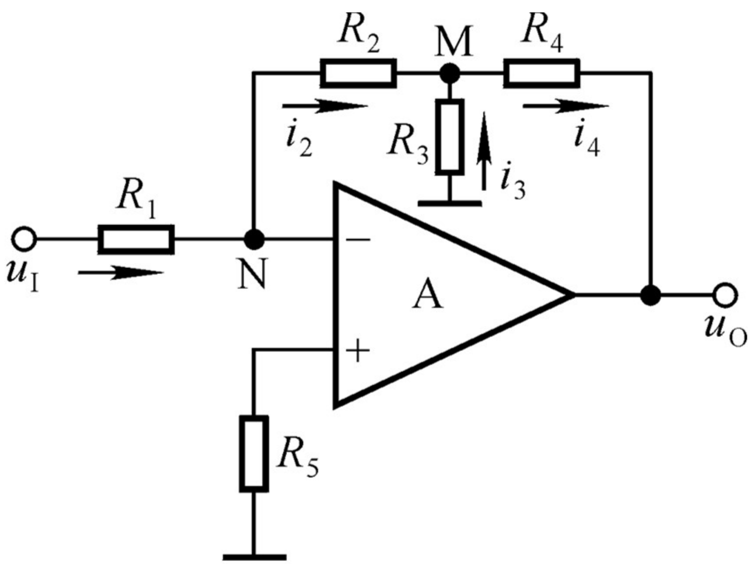
若要求$R_i = 100\text{k}\Omega$，则$R = ?$ 100KΩ

$$\boldsymbol{R_i = R}$$

若比例系数为－50，则$R_f = ?$ 5MΩ

要求利用阻值不大的电阻来获得较大数值的比例系数，并且具有较大的输入电阻。

## 2.T形网络反相比例运算电路




$$u_M = -\frac{R_2}{R_1} \cdot u_I \qquad u_O = u_M - (i_2 + i_3) R_4$$

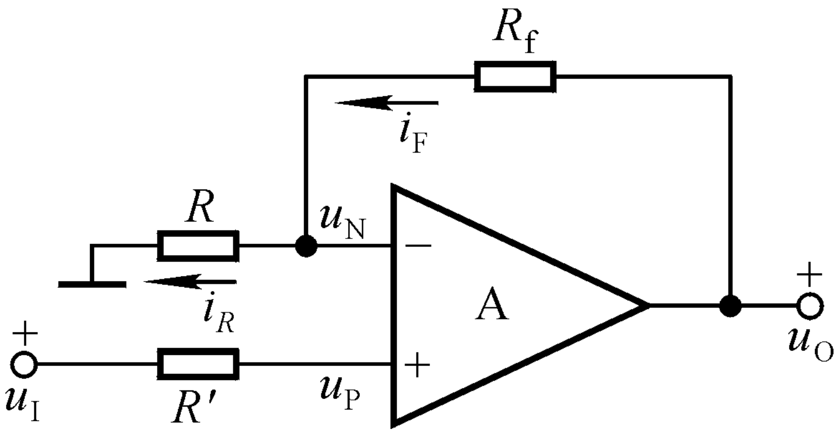
$$i_2 = \frac{u_I}{R_1} \qquad i_3 = -\frac{u_M}{R_3}$$

$$\boxed{u_O = -\frac{R_2 + R_4}{R_1}\left(1 + \frac{R_2 \mathbin{/\!/} R_4}{R_3}\right) \cdot u_I}$$

若要求$R_i = 100\text{k}\Omega$，则$R_1 = ?$ 100KΩ

若比例系数为－50，$R_2 = R_4 = 100\text{k}\Omega$，则$R_3 = ?$ 2.08KΩ

## 二、同相比例运算电路




因虚断，所以 $i_R = i_F$

又因虚短，所以$u_N = u_P = u_I$

$$i_R = \frac{u_N}{R} = i_F = \frac{u_O - u_N}{R_f}$$

$$\boxed{u_O = (1 + \frac{R_f}{R})u_N}$$

深度电压串联负反馈电路

$$u_O = (1 + \frac{R_f}{R})u_I$$

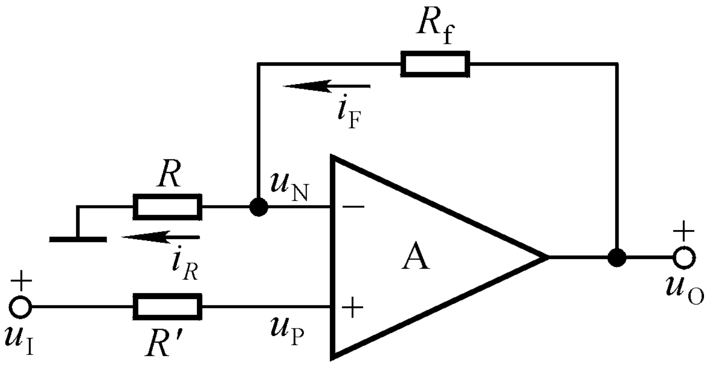
$$\boxed{A_{uf} = \frac{u_O}{u_I} = 1 + \frac{R_f}{R}}$$

一般有 $R_P = R_N$，∴补偿电阻$R' = R // R_f$

$R_i = \infty$

同相比例运算电路具有高输入电阻的优点

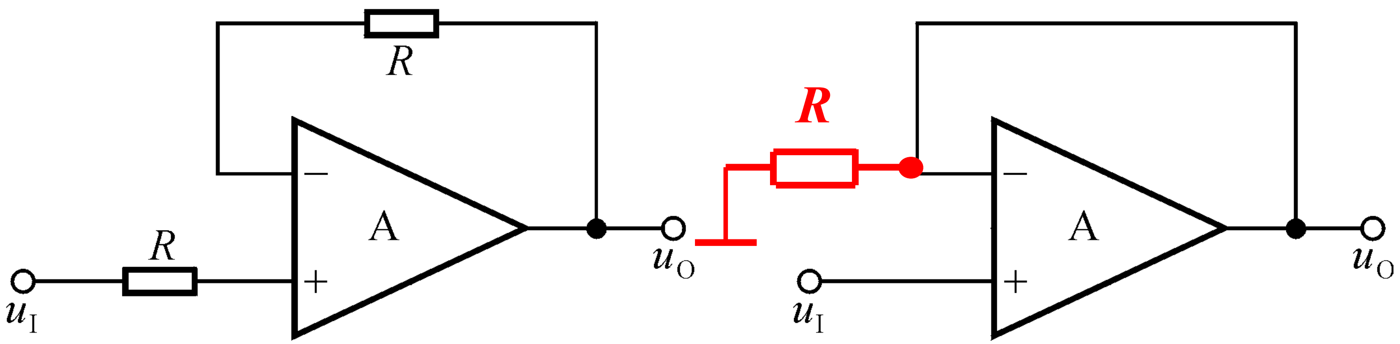
$$u_O = (1 + \frac{R_f}{R})u_I$$




**当** $R = \infty$ **或** $R_f = 0$ **时:** $\boxed{u_O = u_I}$

同相比例运算电路的特例：电压跟随器

$$\boxed{u_O = u_N = u_P = u_I}$$



# 运算电路的分析方法

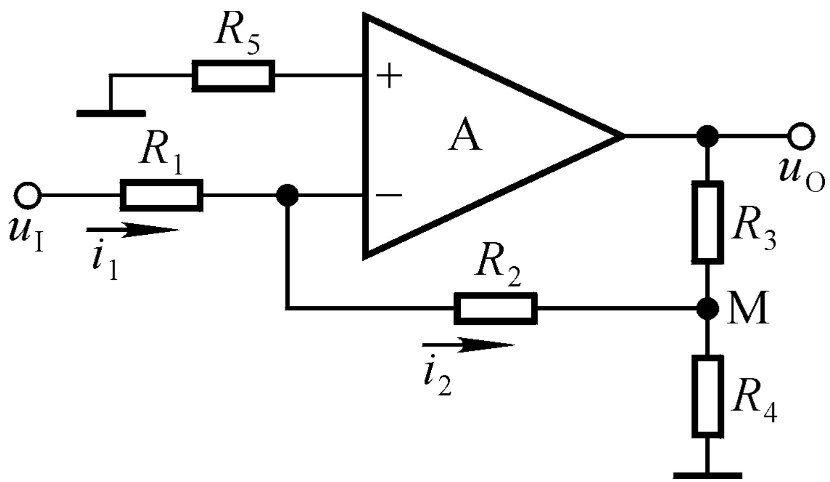
## 方法一：节点电流法(通用方法)

## 例6.1.1

【例 6.1.1】 电路如图 6.1.5 所示，已知 $R_2 \gg R_4$，$R_1 = R_2$，试问：

（1）$u_O$与 $u_I$的比例系数为多少？

（2）若 $R_4$开路，则 $u_O$与 $u_I$的比例系数为多少？



方法二：在多级运算电路的分析中，因为各级$R_o$=0且具有恒压特性，所以后级电路不影响前级电路的运算关系，故可以对每级电路单独分析。

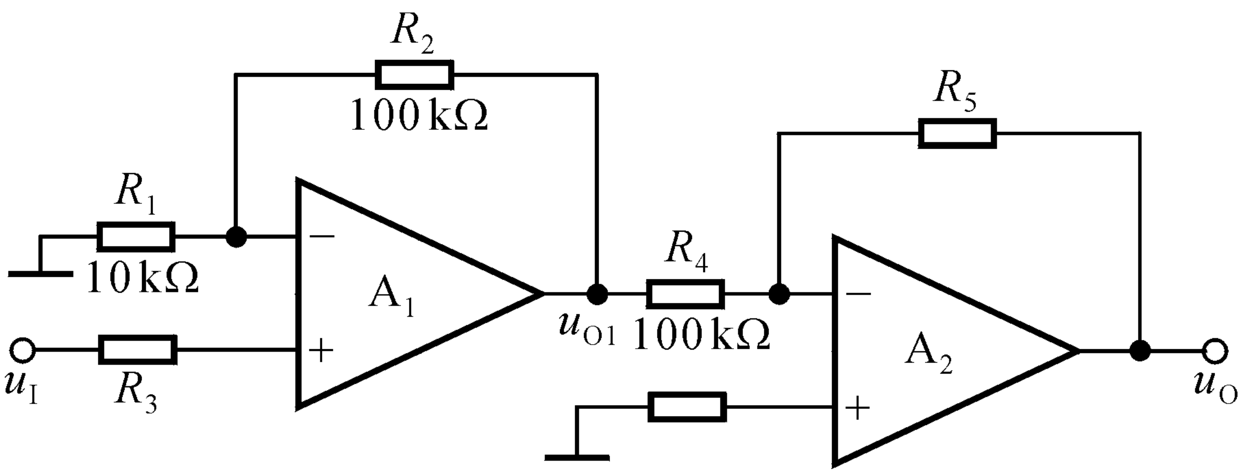
## 例6.1.2

【例6.1.2】 电路如图6.1.6所示，已知集成运放输出的最大幅值为±14 V；$u_O=-55u_I$，其余参数如图中所标注。回答下列问题：

（1）求出 $R_5$ 的值；

（2）若 $u_I$ 与地接反，则输出电压与输入电压的关系将产生什么变化？

（3）若 $u_I$=10 mV，而 $u_O$ = −14 V，则电路可能出现了什么故障？



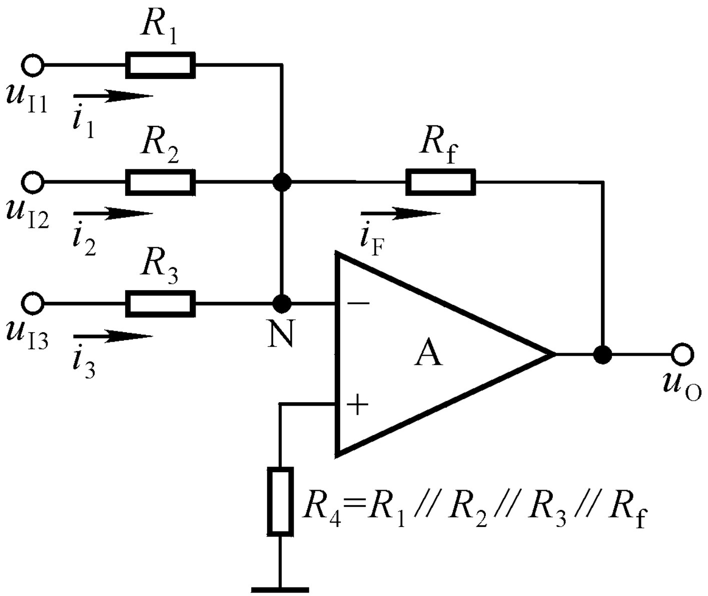
# 6.1.3 加减运算电路

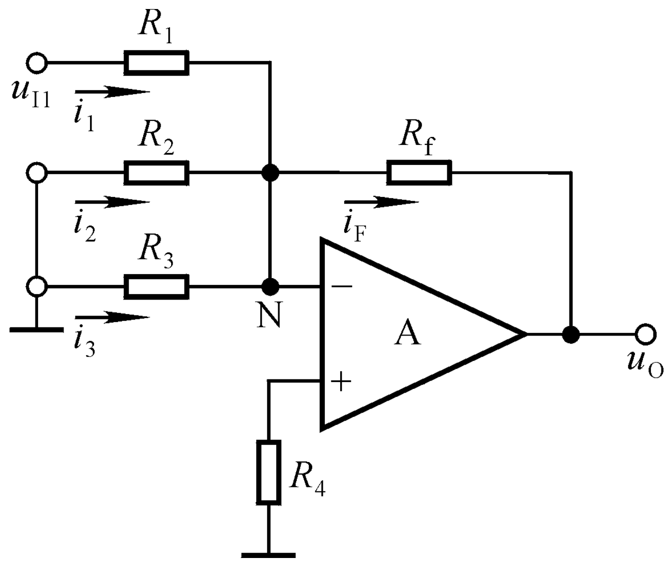
## 一、求和运算电路

可以采用节点电流法求解

### 1.反相求和运算电路

方法三：对于多输入的电路，可以利用叠加定理




$$u_{O1}=-\frac{R_f}{R_1}\cdot u_{I1}$$

同理可得

$$u_{O2}=-\frac{R_f}{R_2}\cdot u_{I2}$$

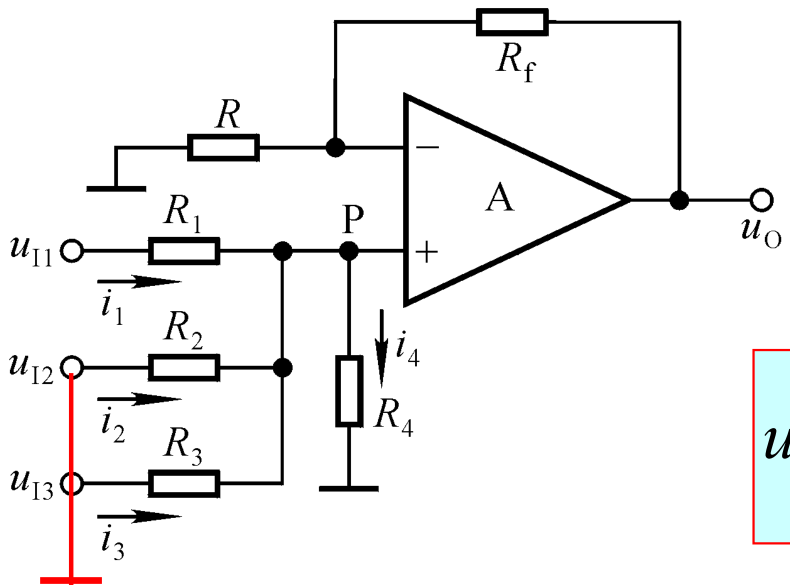
$$u_{O3}=-\frac{R_f}{R_3}\cdot u_{I3}$$

$$u_O=u_{O1}+u_{O2}+u_{O3}=-\frac{R_f}{R_1}\cdot u_{I1}-\frac{R_f}{R_2}\cdot u_{I2}-\frac{R_f}{R_3}\cdot u_{I3}$$

各信号源的输入电阻均不同。

## 2.同相求和运算电路

设 $R_1 // R_2 // R_3 // R_4 = R // R_f$




采用叠加定理求解

令$u_{I2}=u_{I3}=0$，求$u_{I1}$单独作用时的输出电压

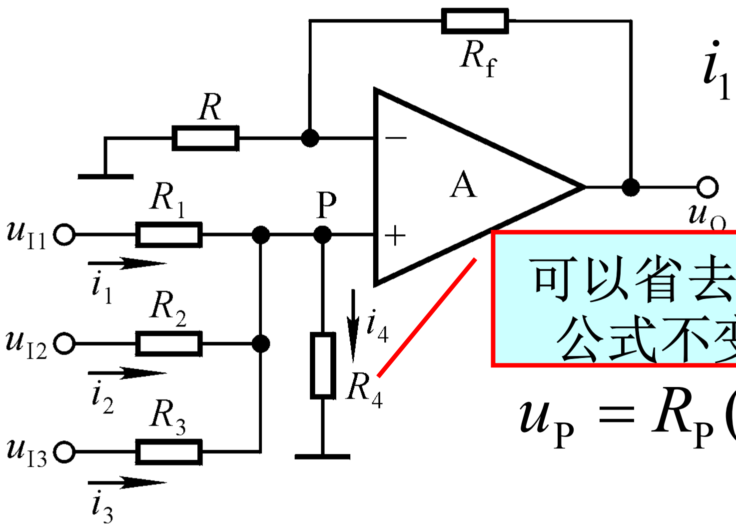
$$u_{O1}=(1+\frac{R_f}{R})\cdot\frac{R_2 // R_3 // R_4}{R_1+R_2 // R_3 // R_4}\cdot u_{I1}$$

同理可得，$u_{I2}$、$u_{I3}$单独作用时的$u_{O2}$、$u_{O3}$，形式与$u_{O1}$相同，$u_O=u_{O1}+u_{O2}+u_{O3}$。

物理意义清楚，但计算过程繁琐！

在求解运算电路时，应选择合适的方法，使运算结果简单明了，易于计算。

采用节点电流法求解




可以省去，
公式不变

$$i_1+i_2+i_3=i_4 \qquad \frac{u_{I1}-u_P}{R_1}+\frac{u_{I2}-u_P}{R_2}+\frac{u_{I3}-u_P}{R_3}=\frac{u_P}{R_4}$$

$$\frac{u_{I1}}{R_1}+\frac{u_{I2}}{R_2}+\frac{u_{I3}}{R_3}=(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4})u_P$$

$$u_P=R_P(\frac{u_{I1}}{R_1}+\frac{u_{I2}}{R_2}+\frac{u_{I3}}{R_3}) \qquad (R_P=R_1\,//\,R_2\,//\,R_3\,//\,R_4)$$

$$u_O=(1+\frac{R_f}{R})\cdot u_P=\frac{R+R_f}{R}\cdot R_P(\frac{u_{I1}}{R_1}+\frac{u_{I2}}{R_2}+\frac{u_{I3}}{R_3})\cdot\frac{R_f}{R_f} \qquad (R_N=R\,//\,R_f)$$

$$u_O=\frac{R_P}{R_N}\cdot R_f\cdot(\frac{u_{I1}}{R_1}+\frac{u_{I2}}{R_2}+\frac{u_{I3}}{R_3})$$

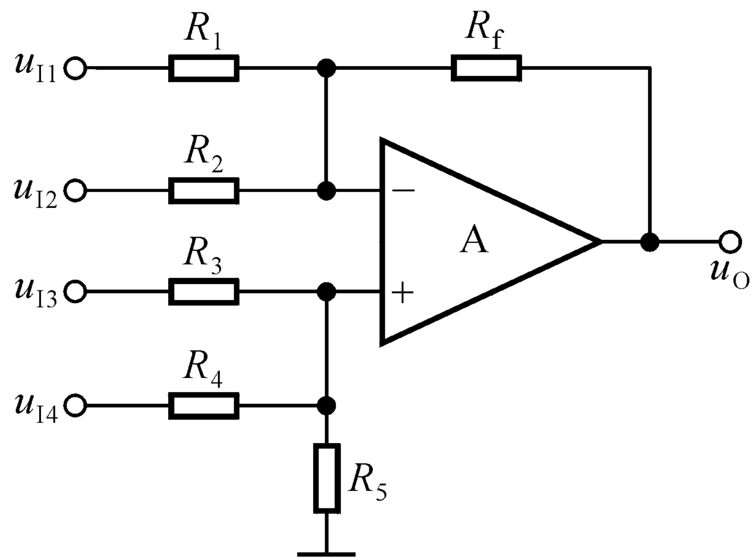
当 $R_P=R_N$时：

$$u_O=R_f\cdot(\frac{u_{I1}}{R_1}+\frac{u_{I2}}{R_2}+\frac{u_{I3}}{R_3})$$

与反相求和运算电路
的结果差一负号

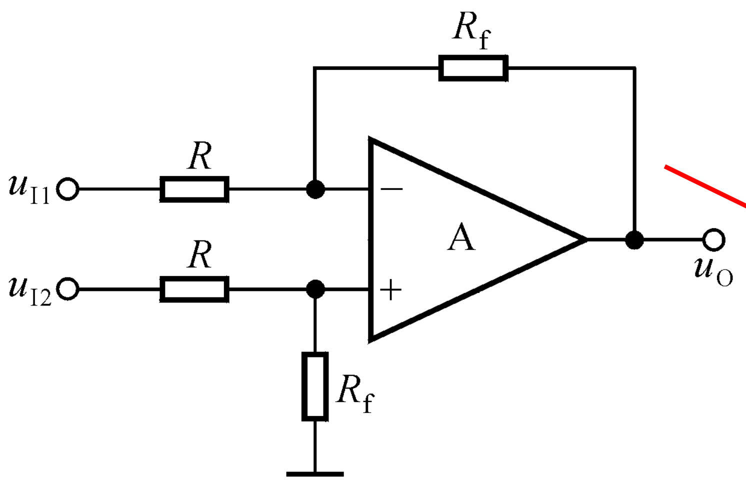
各信号源的输入电阻均不同。

## 二、加减运算电路　利用求和运算电路的分析结果




设 $R_P = R_N$

$$u_O = R_f \cdot \left(\frac{u_{I3}}{R_3} + \frac{u_{I4}}{R_4} - \frac{u_{I1}}{R_1} - \frac{u_{I2}}{R_2}\right)$$

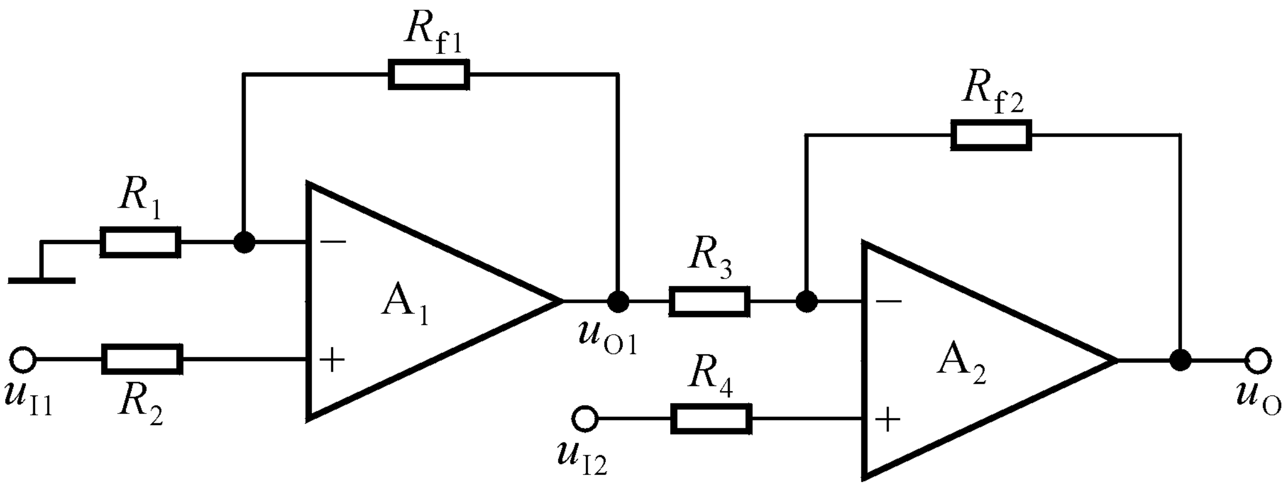



$$u_O = \frac{R_f}{R} \cdot (u_{I2} - u_{I1})$$

实现了对差模输入的比例运算，称为差分比例运算电路，又称为减法运算电路

缺点是：电阻的选取和调整不方便；每个信号源的输入电阻都较小。可采用两级电路。

# 高输入电阻的两级差分比例运算电路




$$u_O = (1+\frac{R_{f1}}{R_1})\cdot(-\frac{R_{f2}}{R_3})u_{I1} + (1+\frac{R_{f2}}{R_3})u_{I2}$$

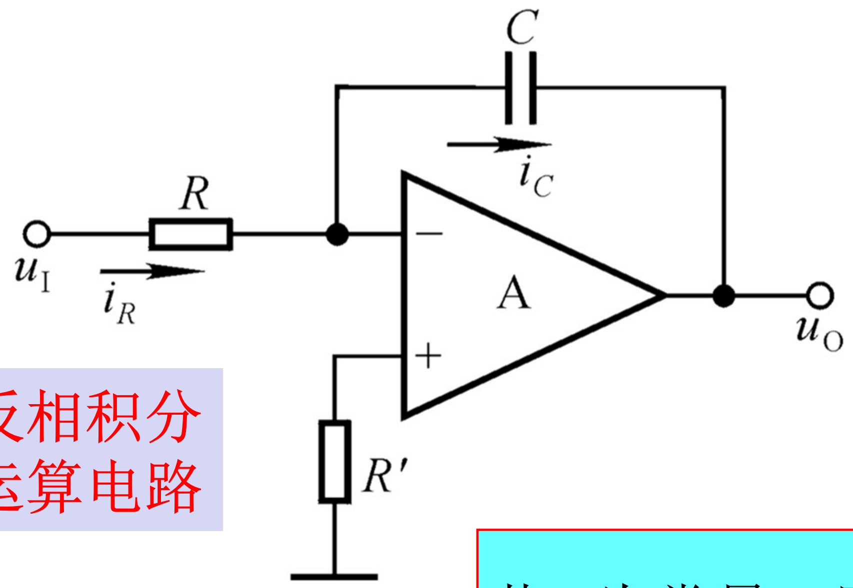
若$R_1 = R_{f2}$，$R_3 = R_{f1}$

$$\boxed{u_O = (1+\frac{R_{f2}}{R_3})(u_{I2} - u_{I1})}$$

每个信号源的输入电阻均可认为无穷大。

# 6.1.4 积分运算电路和微分运算电路

## 一、积分运算电路




反相积分运算电路

$$i_C = i_R = \frac{u_I}{R}$$

$$u_O = -u_C = -\frac{1}{C}\int i_C \mathrm{d}t = -\frac{1}{RC}\int u_I \mathrm{d}t$$

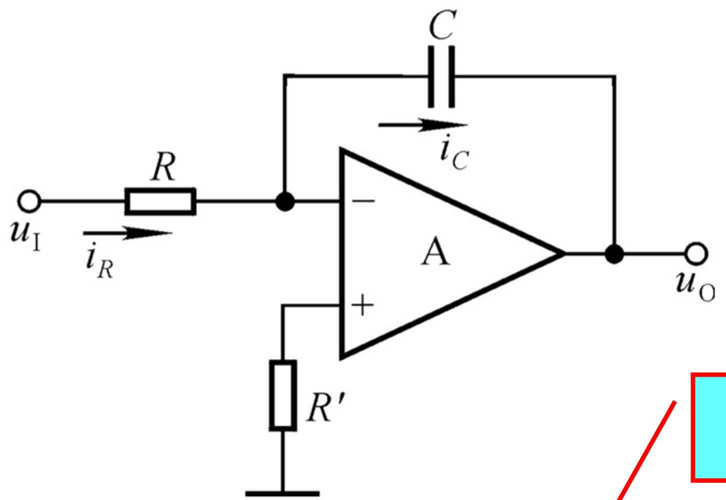
$$u_O = -\frac{1}{RC}\int_{t_1}^{t_2} u_I \mathrm{d}t + u_O(t_1)$$

若$u_I$为常量，则 $u_O = -\frac{1}{RC}\cdot u_I \cdot (t_2 - t_1) + u_O(t_1)$

采用运放组成的积分电路，由于充电电流基本上是恒定的，故 $\boldsymbol{u_o}$ 是时间 $\boldsymbol{t}$ 的一次函数，从而提高了它的线性度。

$$u_O = -\frac{1}{RC} \cdot u_I \cdot (t_2 - t_1) + u_O(t_1)$$

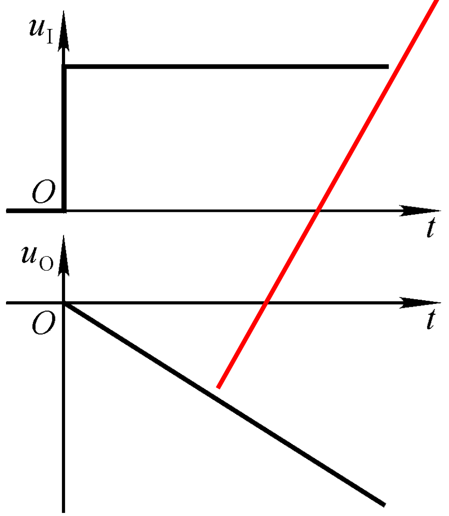
利用积分运算的基本关系实现不同的功能



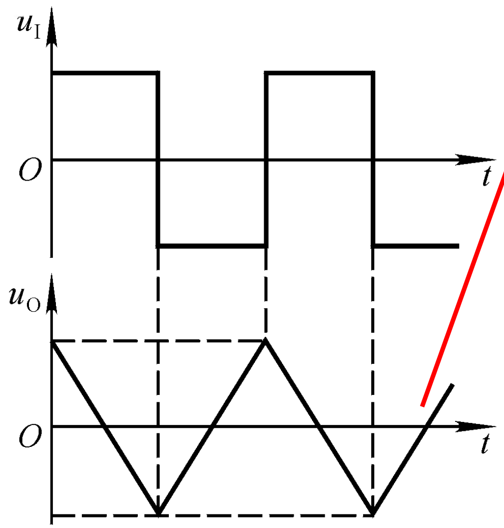

1) 输入为阶跃信号时的输出电压波形？

2) 输入为方波时的输出电压波形？

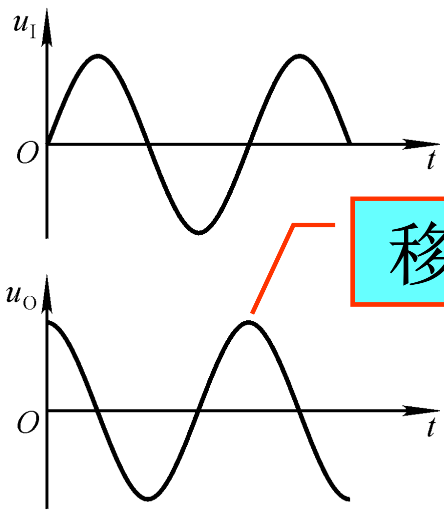
3) 输入为正弦波时的输出电压波形？




线性积分

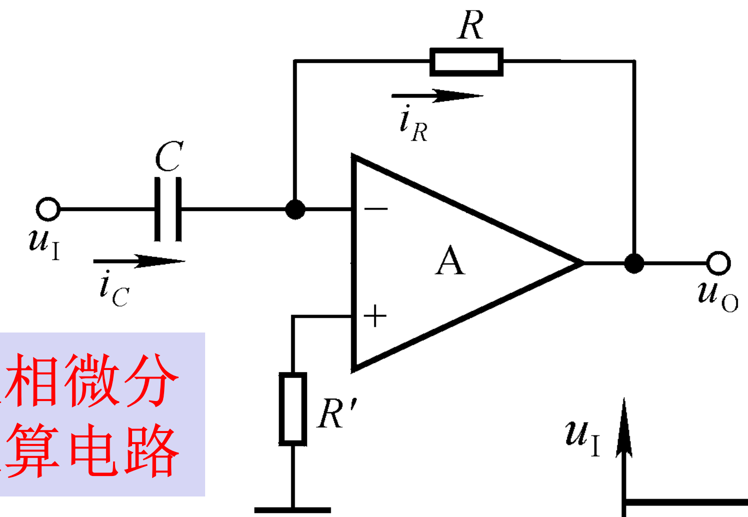



波形变换




移相

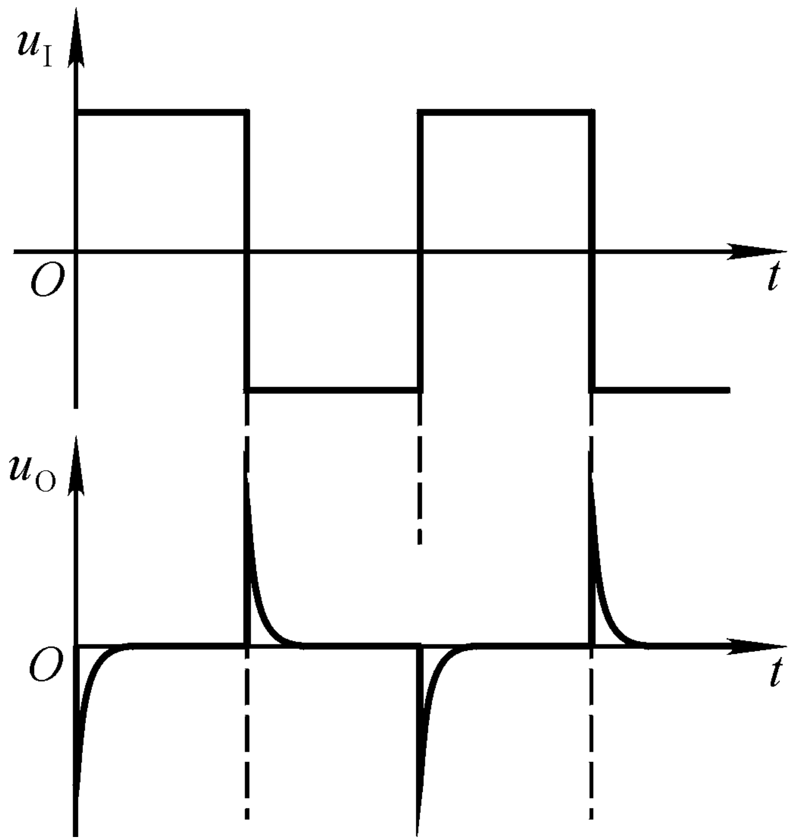
# 二、微分运算电路




反相微分运算电路

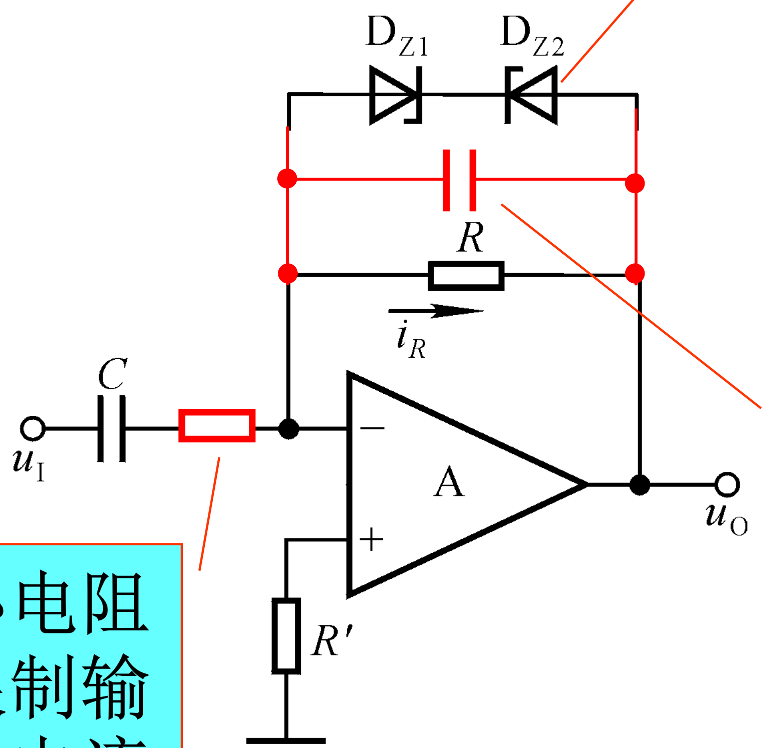
$$i_R = i_C = C\frac{\mathrm{d}u_I}{\mathrm{d}t}$$

$$u_O = -i_R R = -RC\frac{\mathrm{d}u_I}{\mathrm{d}t}$$



为了克服集成运放的阻塞现象和自激振荡，实用电路应采取措施。

双向稳压管限制输出电压幅值,防止出现阻塞现象

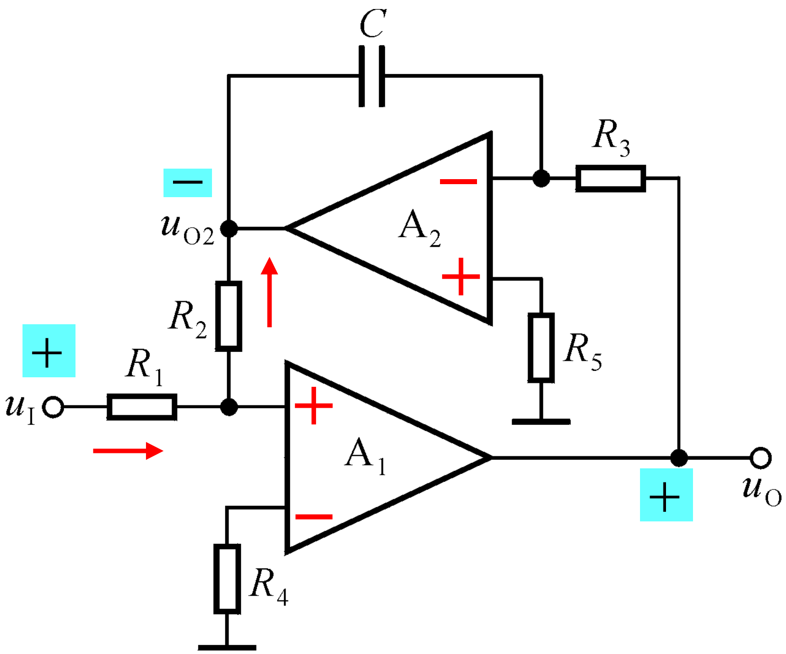



小电容相位补偿,防止自激振荡

小电阻限制输入电流

# 三、逆函数型微分运算电路

利用积分运算电路来实现微分运算：将积分运算电路作为反馈回路。



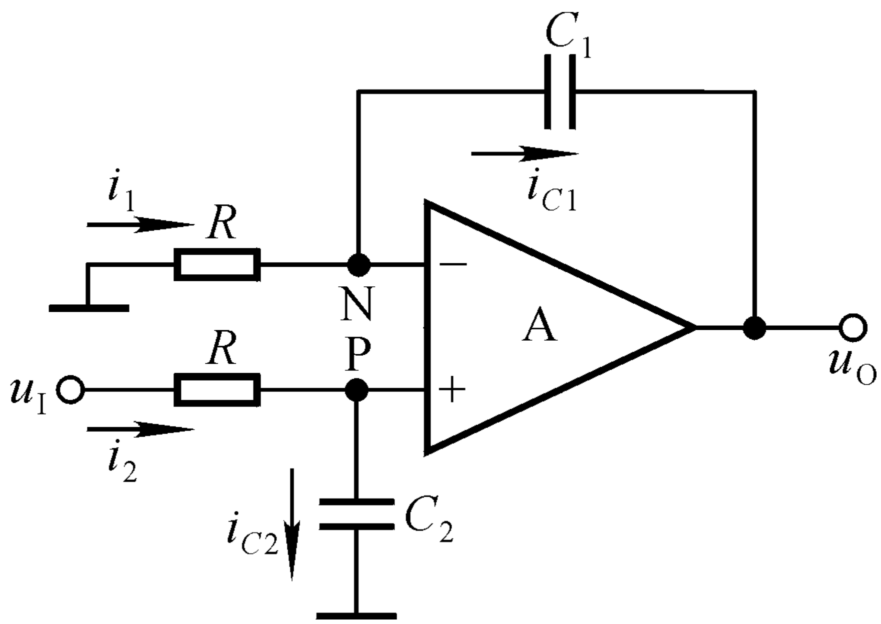

1) 必须保证引入的是负反馈；

2) $u_O = f(u_I) = ?$

$$u_{O2} = -\frac{1}{R_3 C}\int u_O \mathrm{d}t = -\frac{R_2}{R_1}u_I$$

$$\boxed{u_O = \frac{R_2 R_3 C}{R_1}\cdot\frac{\mathrm{d}u_I}{\mathrm{d}t}}$$

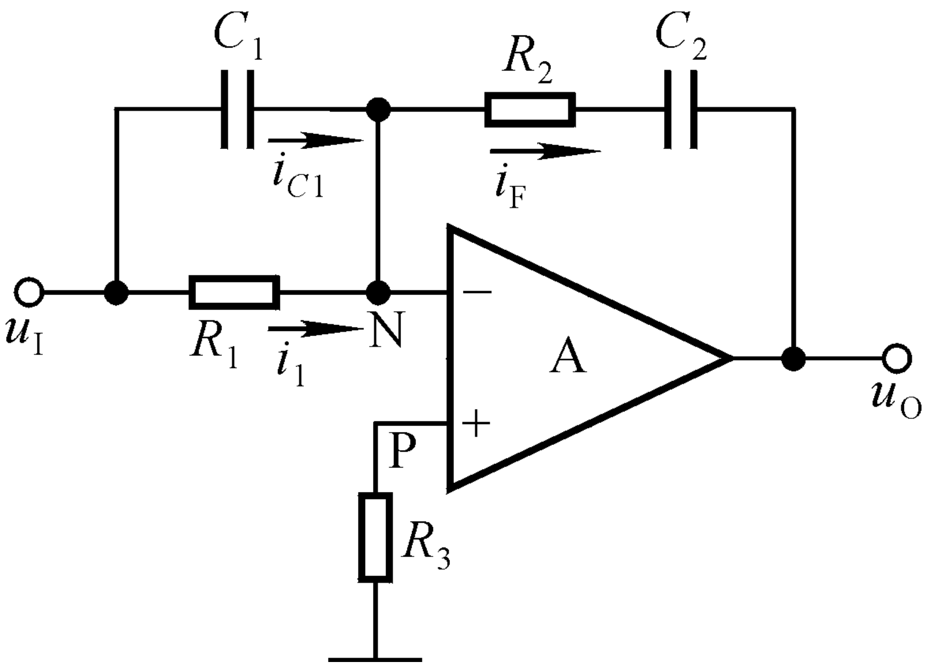
# 例6.1.4




$$u_O = \frac{1}{RC}\int u_I \mathrm{d}t$$

同相积分运算

# 例6.1.5




**PID调节器**

$$u_O = -\left(\frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2}\right)u_I - R_2C_1\frac{du_I}{dt} - \frac{1}{R_1C_2}\int u_I dt$$

比例运算P　　微分运算D　　积分运算I

还有**PI**调节器(当$R_2$=0短路或$C_1$=0开路时)；

**PD**调节器(当$C_2$=∞短路或$R_1$=∞开路时)。

习题6.13

# 6.3 有源滤波电路

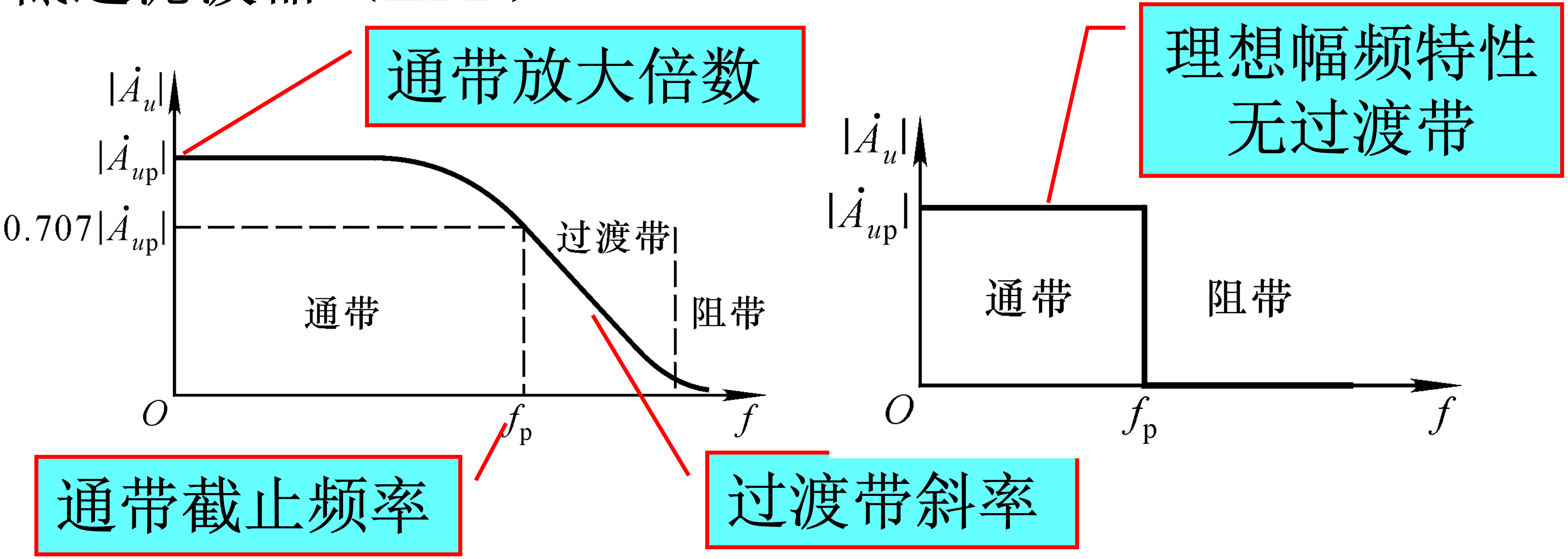
## 6.3.1 概述

### 1. 滤波电路的功能

使特定频率范围内的信号通过，而阻止其它频率信号通过。

### 2. 滤波电路的种类

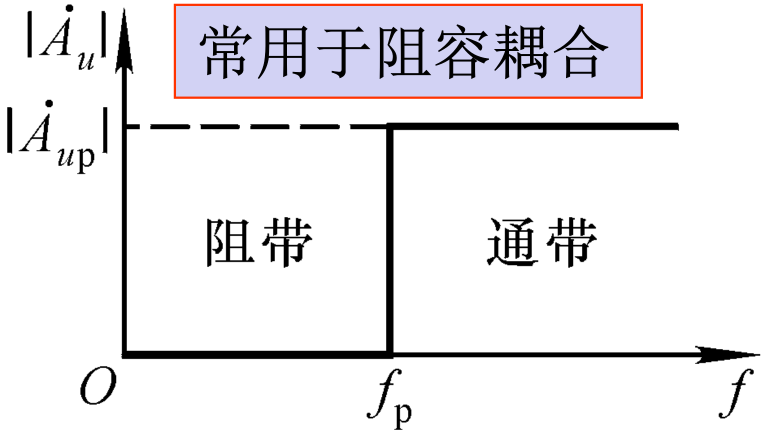
低通滤波器（**LPF**）　常用于直流电源中的滤波电路



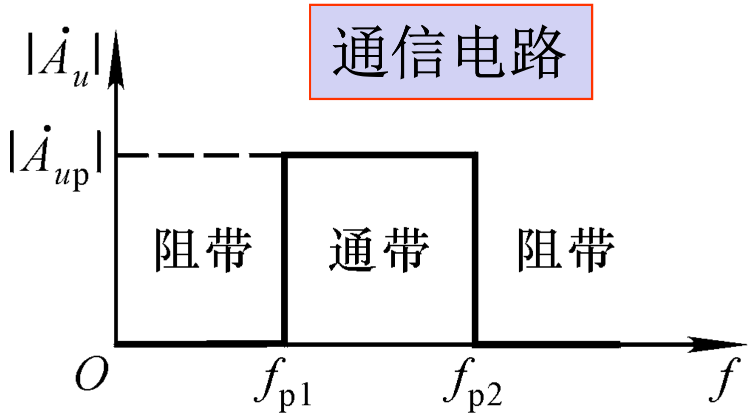

分析滤波电路就是研究其幅频特性，即求解$\dot{A}_{up}$、$f_P$和过渡带的斜率。

# 理想滤波电路的幅频特性

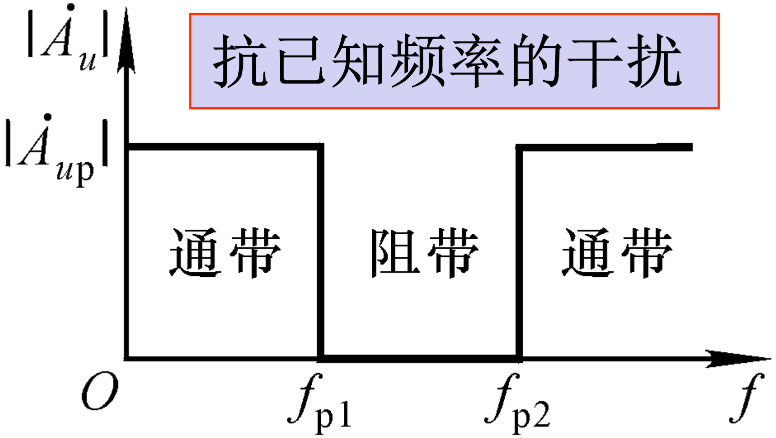
## 高通滤波器（HPF）



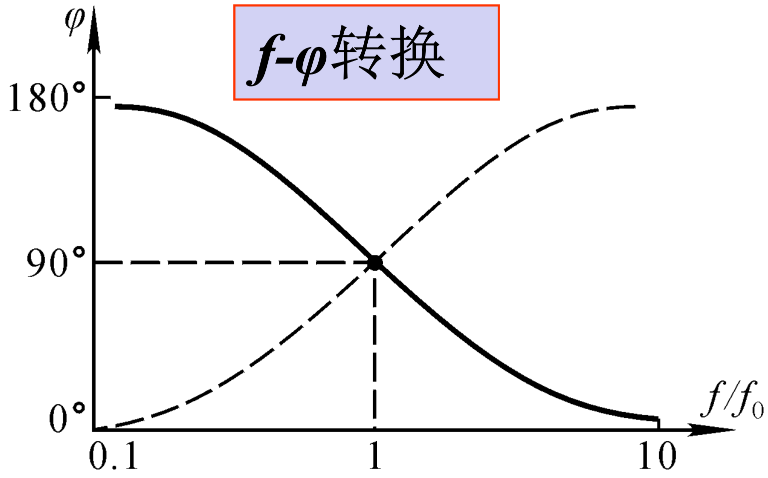

## 带通滤波器（BPF）



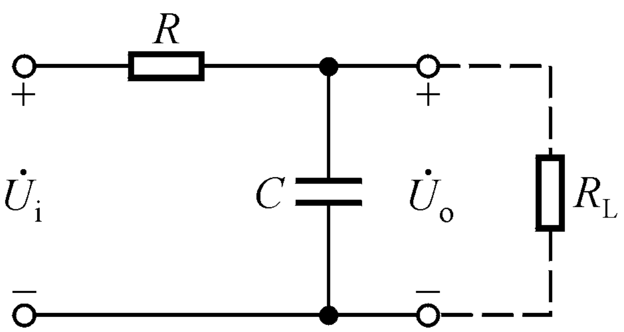

## 带阻滤波器（BEF）

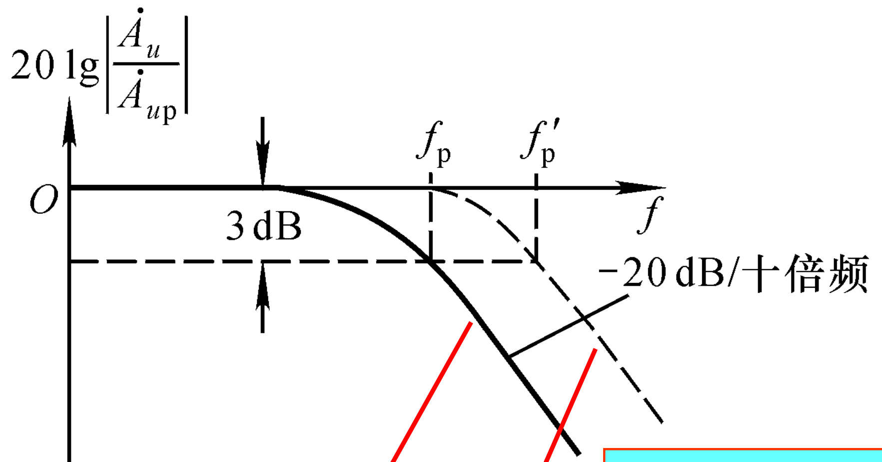



## 全通滤波器（APF）



# 3. 无源滤波电路和有源滤波电路




空载时

带负载时

负载变化时，通带放大倍数和通带截止频率均变化。

空载：$\dot{A}_{up}=1 \quad f_{\mathrm{p}}=\dfrac{1}{2\pi RC}$

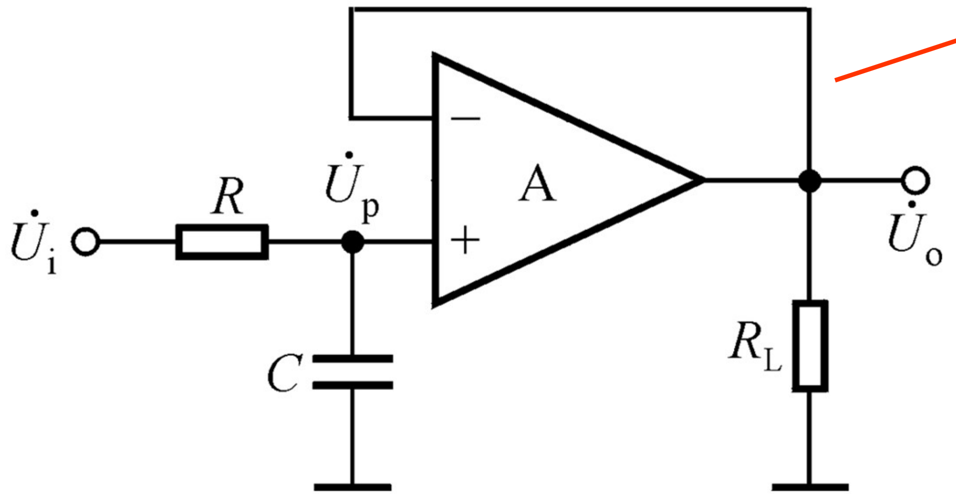
$$\dot{A}_u=\frac{1}{1+\mathrm{j}\dfrac{f}{f_{\mathrm{p}}}}$$

带载：$\dot{A}_{up}=\dfrac{R_{\mathrm{L}}}{R+R_{\mathrm{L}}}$

$$f_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2\pi(R\,/\!/\,R_{\mathrm{L}})C}$$

$$\dot{A}_u=\frac{\dot{A}_{up}}{1+\mathrm{j}\dfrac{f}{f_{\mathrm{p}}}}$$

# 有源滤波电路




用电压跟随器隔离滤波电路与负载电阻

无源滤波电路的滤波参数随负载变化；有源滤波电路的滤波参数不随负载变化，须直流电源供电，可放大，应选用带宽合适的集成运放，不适于高电压大电流的负载，只适于信号处理。

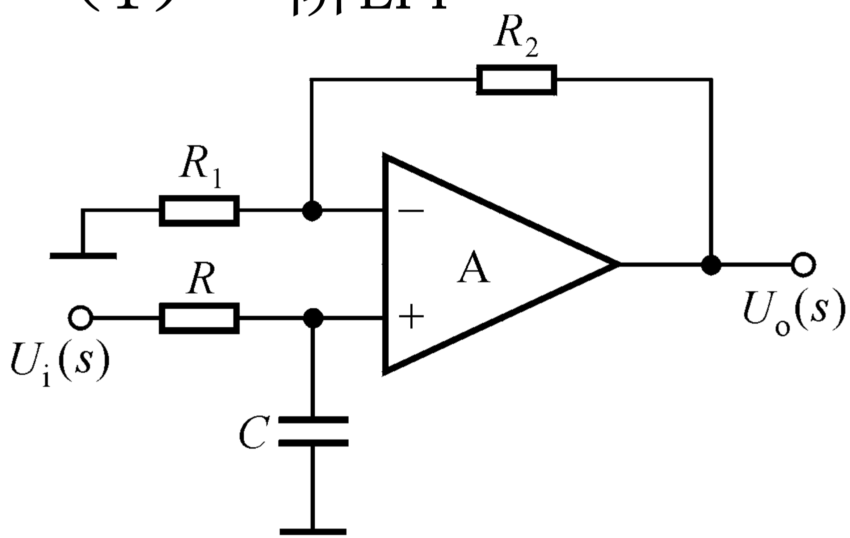
# 有源滤波电路的特点和分析方法

- 电路特点（和运算电路相同）
  - 引入深度电压负反馈，因而集成运放工作在线性区。
  - 具有“虚短”和“虚断”的特点。
- 分析方法
  - 有源滤波电路研究的是频域问题，用电压放大倍数的幅频特性描述滤波特性（而运算电路研究的是时域问题，用运算关系式描述输出电压与输入电压的关系）。
  - 采用节点电流法，首先用相量法求出电压放大倍数，然后得出通带放大倍数、通带截止频率，最后画出频率特性。
  - 识别滤波器类型的方法：分别在信号频率趋于零、无穷大或某一频率段时，判断电压放大倍数是有确定的值还是零，而这一确定的值就是通带放大倍数。

# 6.3.2 低通滤波器（LPF）

## 1. 同相输入LPF

（1）一阶LPF




$$\dot{A}_{up} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

频率趋于0时有确定的放大倍数，即通带放大倍数；频率趋于∞时输出电压为0

$$\dot{A}_u = \frac{\dot{A}_{up}}{1 + {\rm j}\omega RC} = \frac{\dot{A}_{up}}{1 + {\rm j}\dfrac{f}{f_{\rm p}}}$$

表明进入高频段的下降速率为 －20dB/十倍频

$$f_{\rm p} = f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

决定于*RC*环节

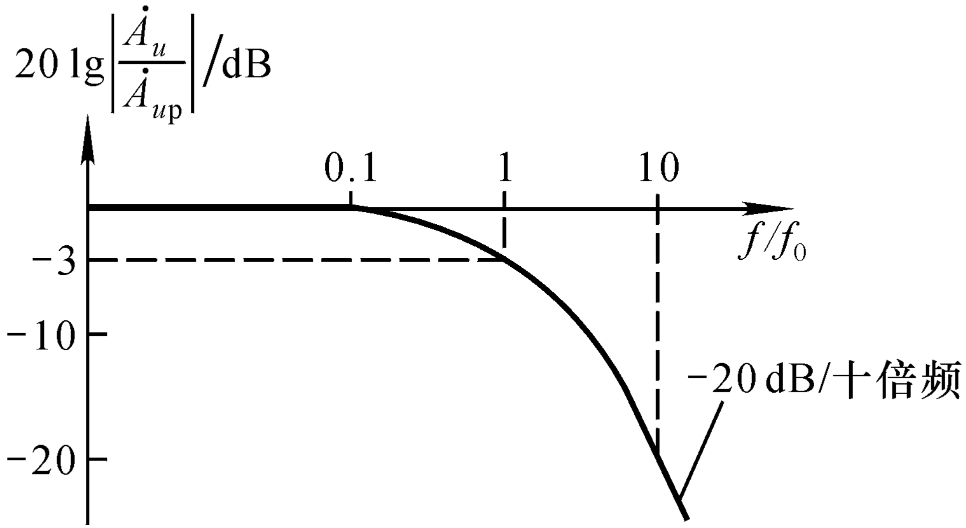
求解传递函数时，只需将放大倍数中的 j$\omega$用 *s*取代即可。

$$A_u(s) = \frac{U_{\rm o}(s)}{U_{\rm i}(s)} = \left(1 + \frac{R_{\rm f}}{R_1}\right)\frac{1/sC}{R + 1/sC} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)\cdot\frac{1}{1 + sRC}$$

s的最高指数称为阶数，一阶LPF

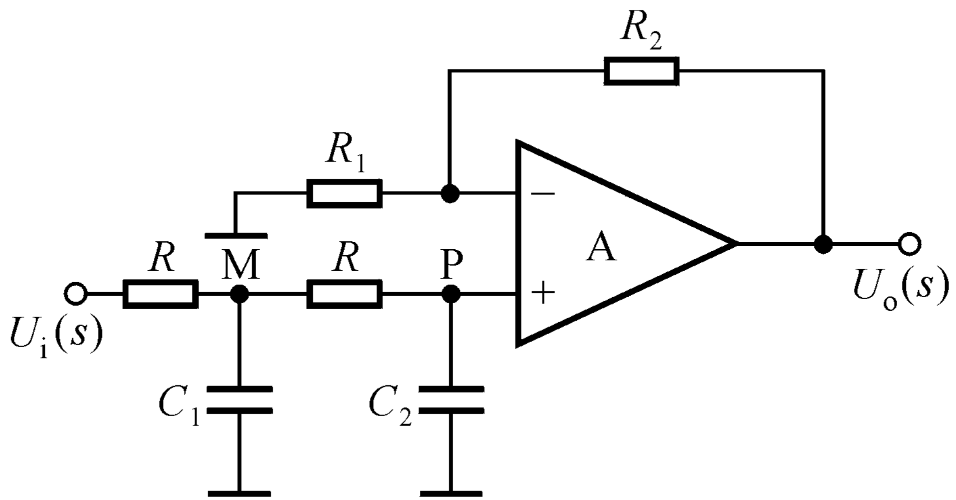
也可以经拉氏变换直接得到传递函数

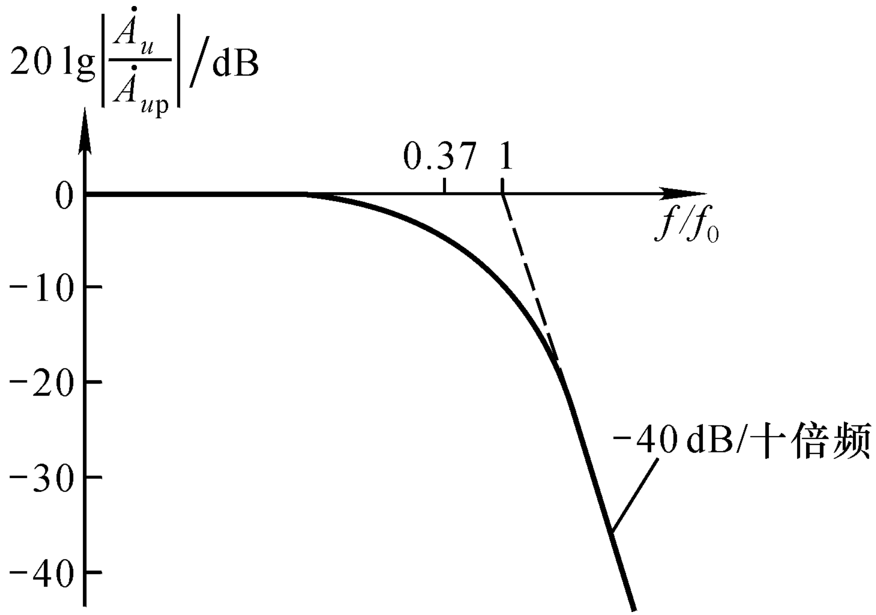
## 一阶LPF幅频特性




为了使过渡带变窄，需采用多阶滤波器，即增加***RC***环节。

# （2）简单二阶LPF




$$A_u(s)=(1+\frac{R_2}{R_1})\frac{1}{1+3sRC+(sRC)^2}$$

$$\dot{A}_u=(1+\frac{R_2}{R_1})\frac{1}{1-(\frac{f}{f_0})^2+3j\frac{f}{f_0}}$$

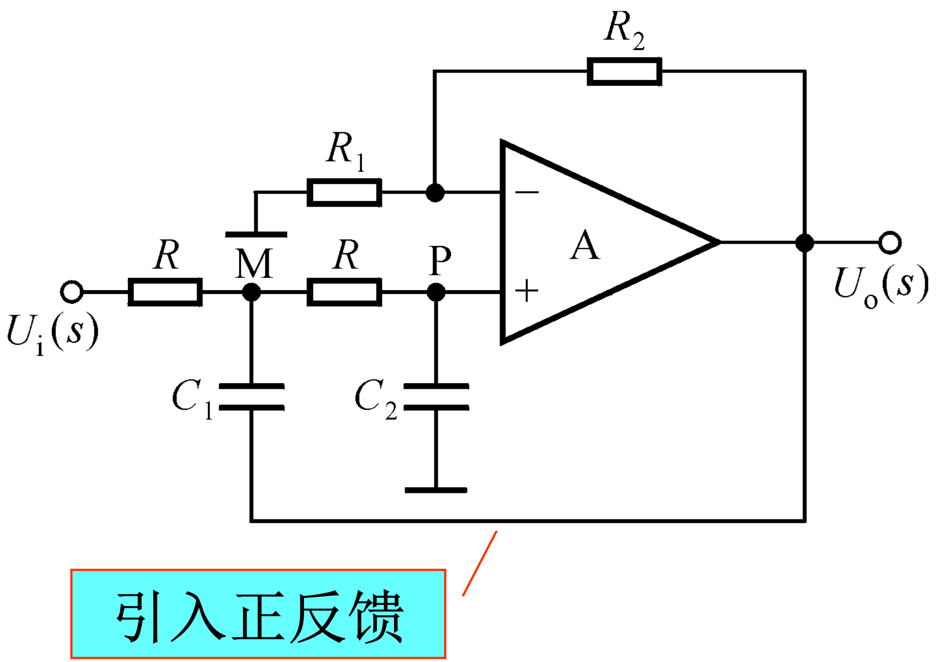
$$f_0=\frac{1}{2\pi RC}$$ 特征频率

截止频率 $f_p\approx 0.37f_0$

$f_p$远离$f_0$，若要两者接近，就要增大$f=f_0$附近的电压放大倍数，可以引入正反馈。

# （3）压控电压源二阶LPF

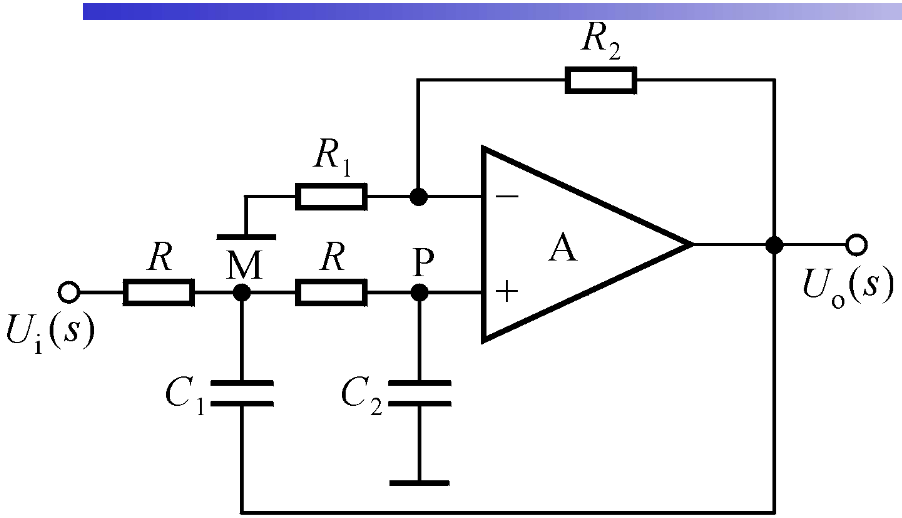
为使 $f_p=f_0$，且在$f=f_0$时幅频特性按－40dB/十倍频下降。

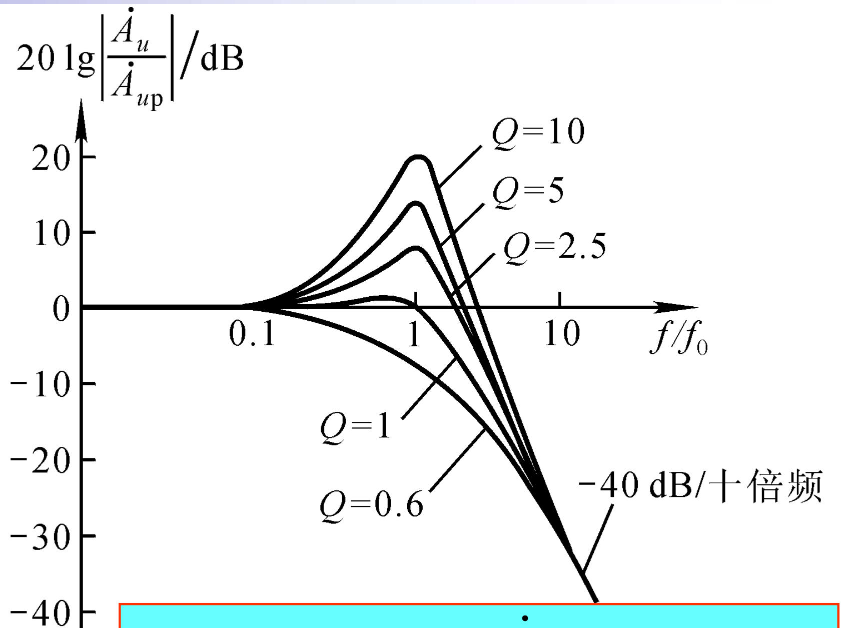



$f\to0$时，$C_1$、$C_2$开路，正反馈断开，放大倍数为通带放大倍数；

$f\to\infty$时，$C_1$、$C_2$短路，输出为0，正反馈对输出不起作用，放大倍数→0。

正反馈主要作用在$f=f_0$附近，既要保证在$f=f_0$时放大倍数数值增大，又不会因正反馈过强而产生自激振荡。




列**P**、**M**点的节点电流方程，整理可得：

$$A_u(s)=\frac{A_{up}(s)}{1+[3-A_{up}(s)]sRC+(sRC)^2}$$

$$\dot{A}_u=\frac{\dot{A}_{up}}{1-(\frac{f}{f_0})^2+\mathrm{j}[3-\dot{A}_{up}]\frac{f}{f_0}}$$

$$f=f_0\text{ 时},\left|\dot{A}_u\right|=\left|\frac{\dot{A}_{up}}{3-\dot{A}_{up}}\right|=\left|Q\dot{A}_{up}\right|$$

**Q**称为品质因数，是$f_0$处电压放大倍数与通带放大倍数之比

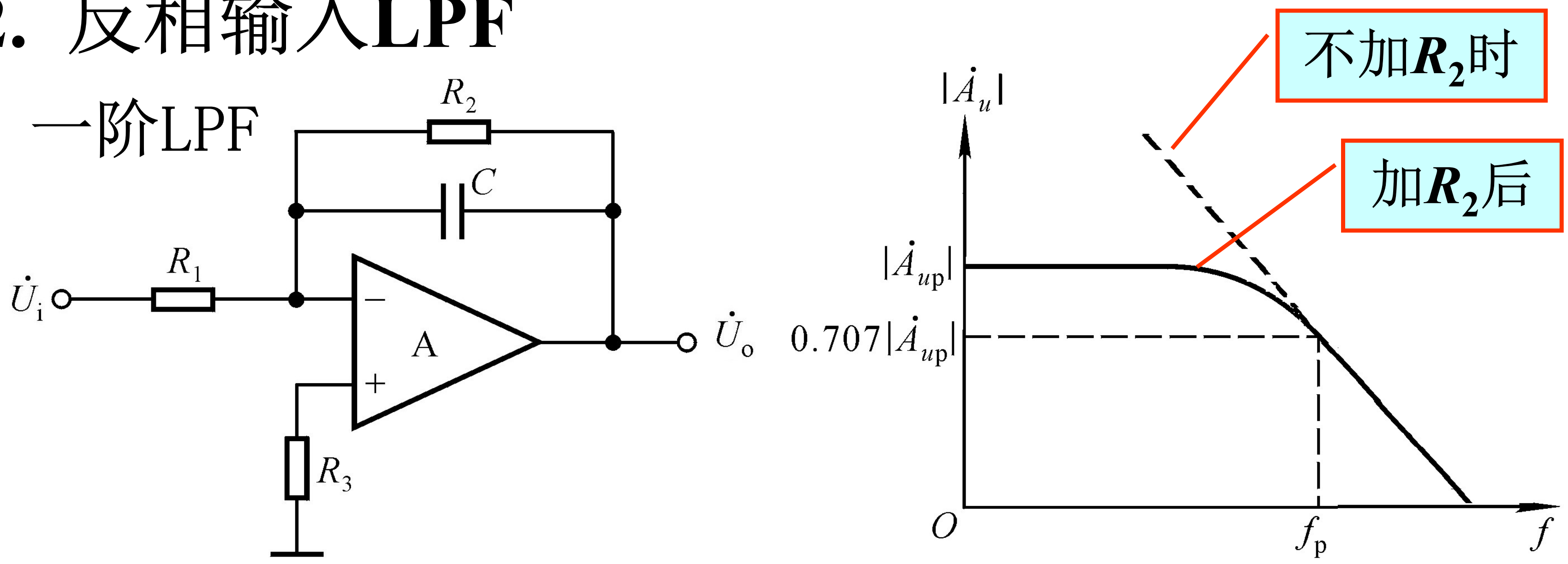
为了**Q**大于**1**

为了不产生自激振荡

$$\text{当 }2<\left|\dot{A}_{up}\right|<3\text{ 时},\left|\dot{A}_u\right|_{f=f_0}>\left|\dot{A}_{up}\right|$$

# 2. 反相输入LPF

（1）一阶LPF




(a) (b)

不加$\boldsymbol{R_2}$时：积分运算电路，

具有低通特性，传递函数 $A_u(s)=\dfrac{1}{sR_1C}$，即 $f\rightarrow 0$，$\left|\dot{A}_u\right|\rightarrow\infty$。

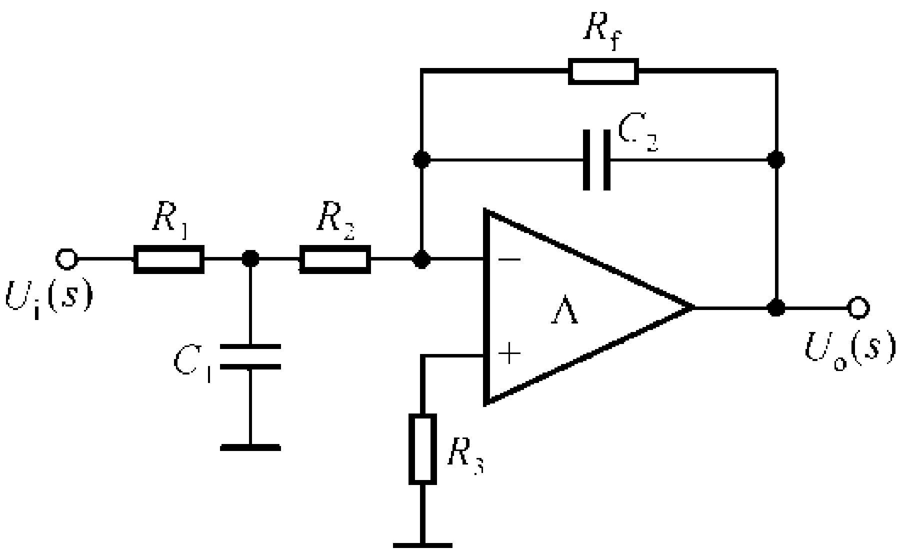
加$\boldsymbol{R_2}$后：$\boldsymbol{f}$→0，$\boldsymbol{C}$ 断开，通带放大倍数 $\boxed{\dot{A}_{up}=-R_2/R_1}$

$$\boxed{A_u(s)=-\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{1}{1+sR_2C}}$$

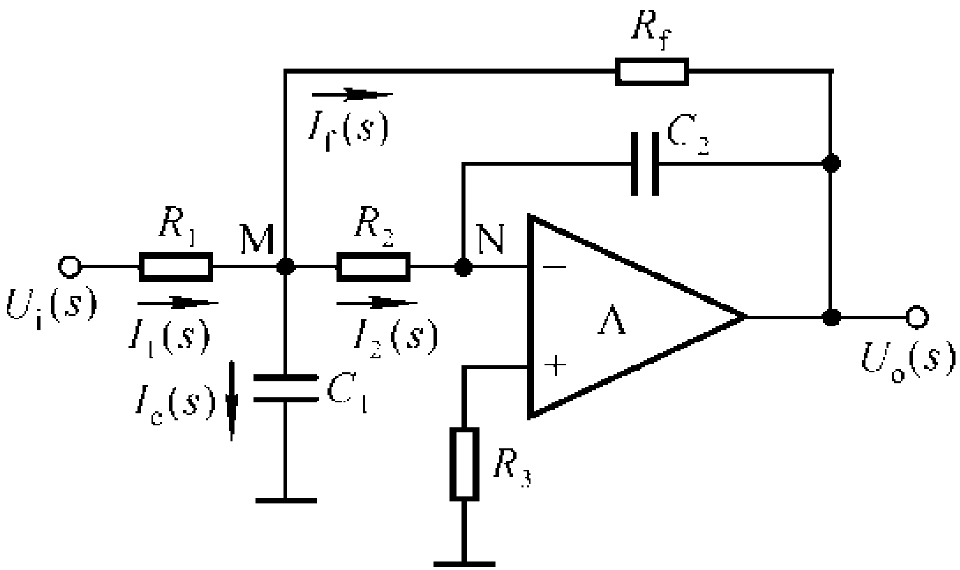
$$\boxed{\dot{A}_u=-\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{1}{1+\mathrm{j}\dfrac{f}{f_0}}\qquad f_p=f_0=\frac{1}{2\pi R_2C}}$$

（2）二阶LPF

简单二阶LPF




无限增益多路反馈二阶LPF



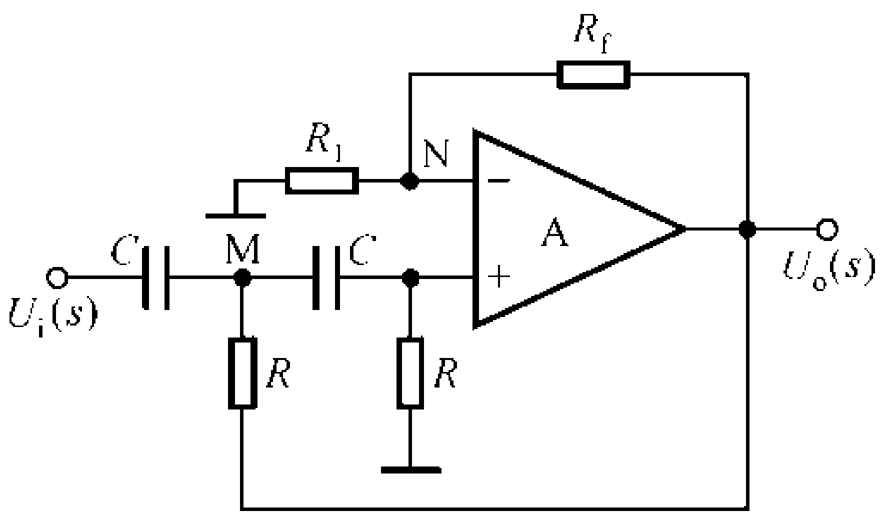
# 6.3.3 其他滤波电路

## 1. 高通滤波器（HPF）

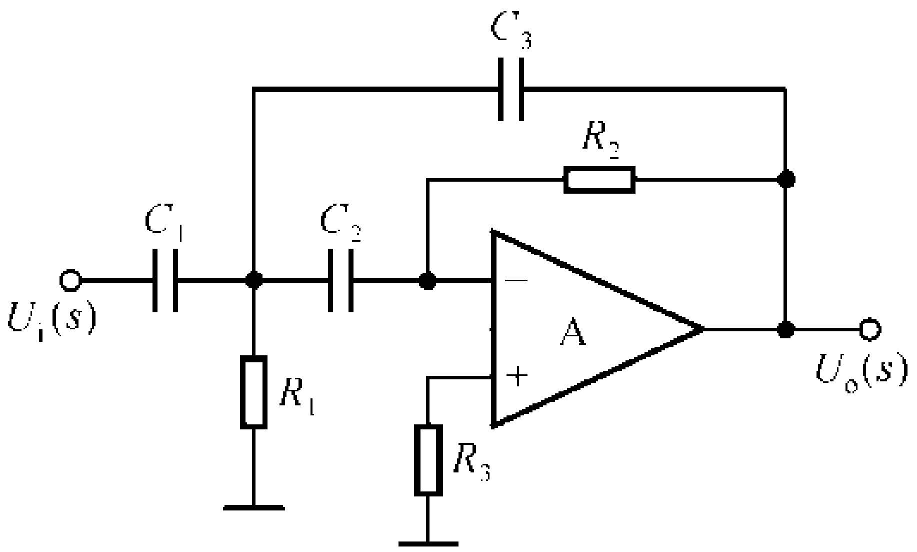
与LPF有对偶性，将LPF的电阻和电容互换，就可得一阶HPF、简单二阶HPF、压控电压源二阶HPF电路。

压控电压源二阶HPF

无限增益多路反馈二阶HPF

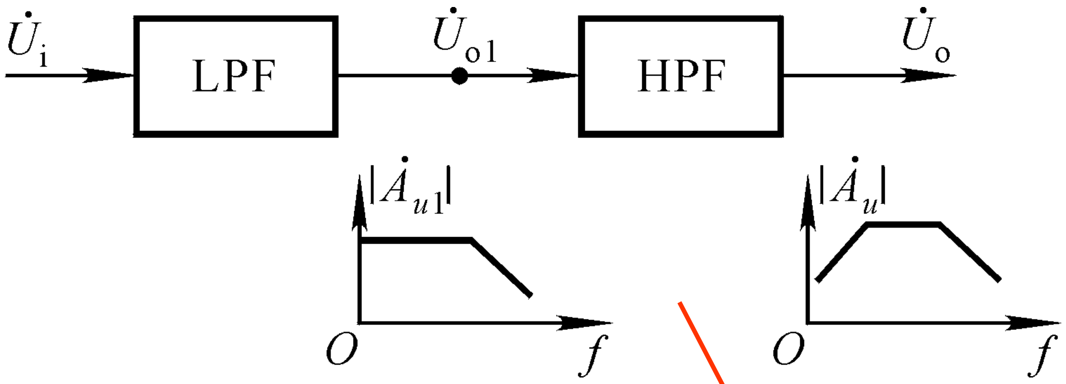



(a)



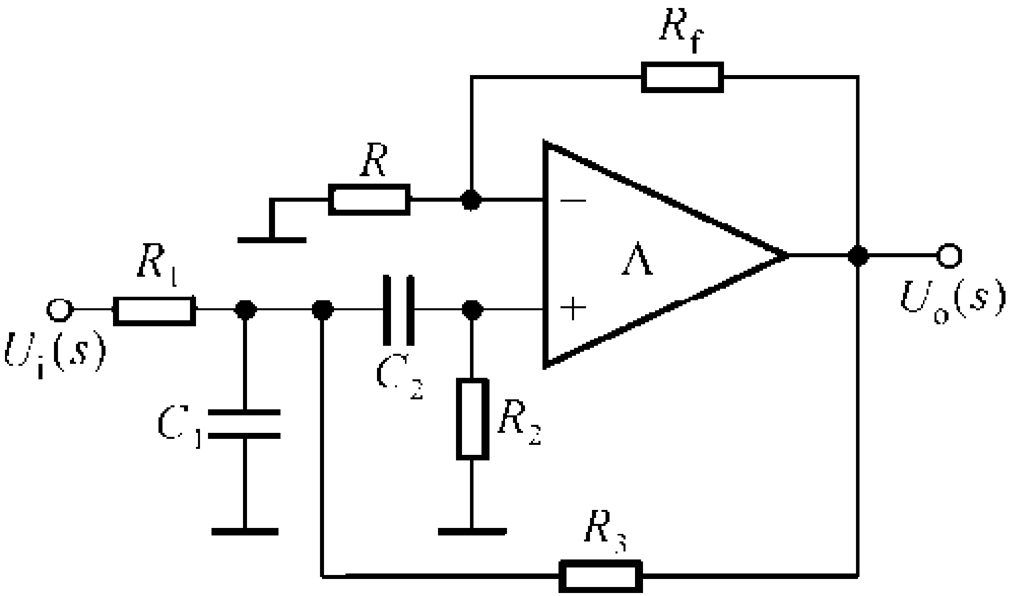

(b)

## 2. 带通滤波器（BPF）

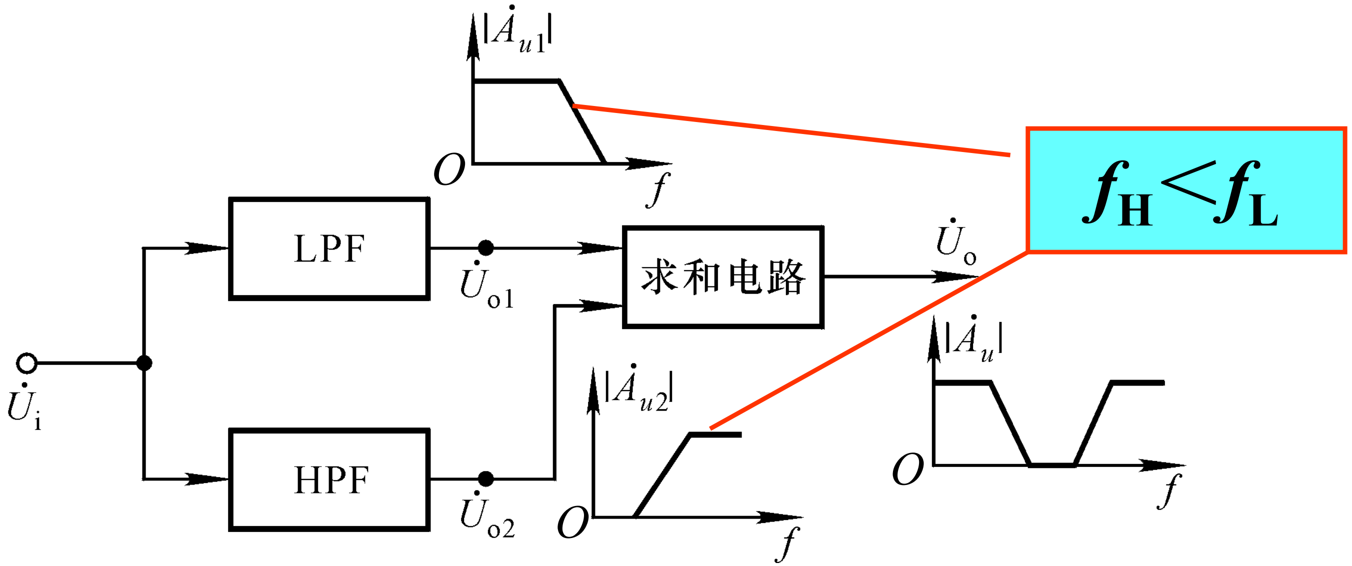



$f_H > f_L$

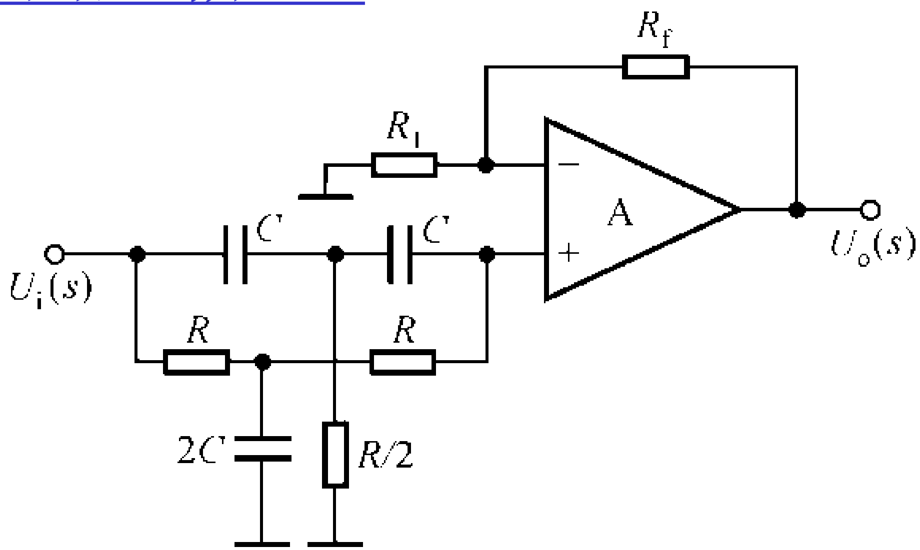
压控电压源二阶BPF

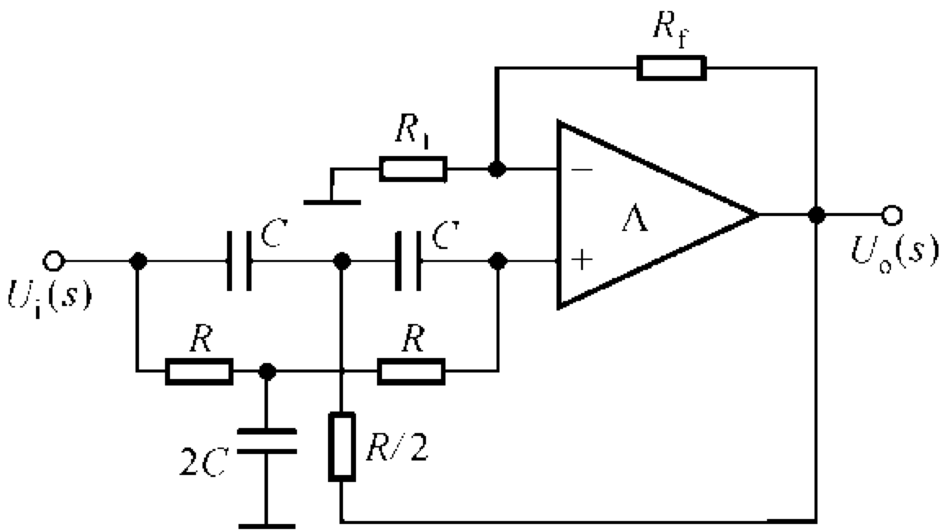


# 3. 带阻滤波器（BEF）




双T网络二阶BEF



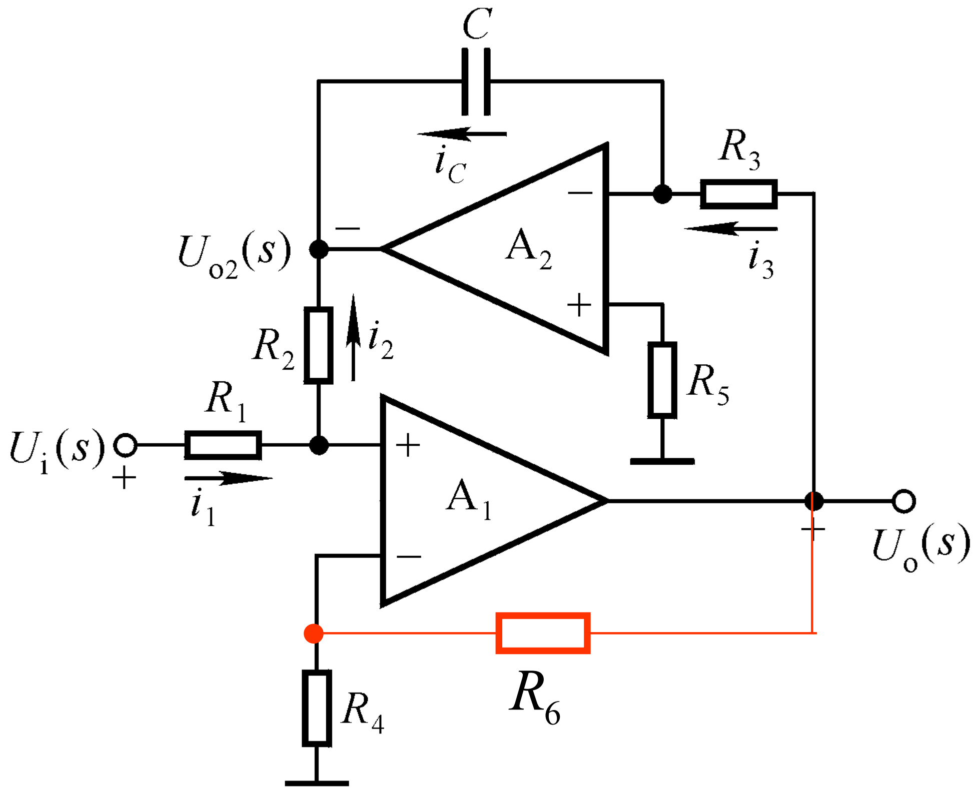



# 6.3.4 状态变量型有源滤波器

利用积分电路实现的高通滤波器

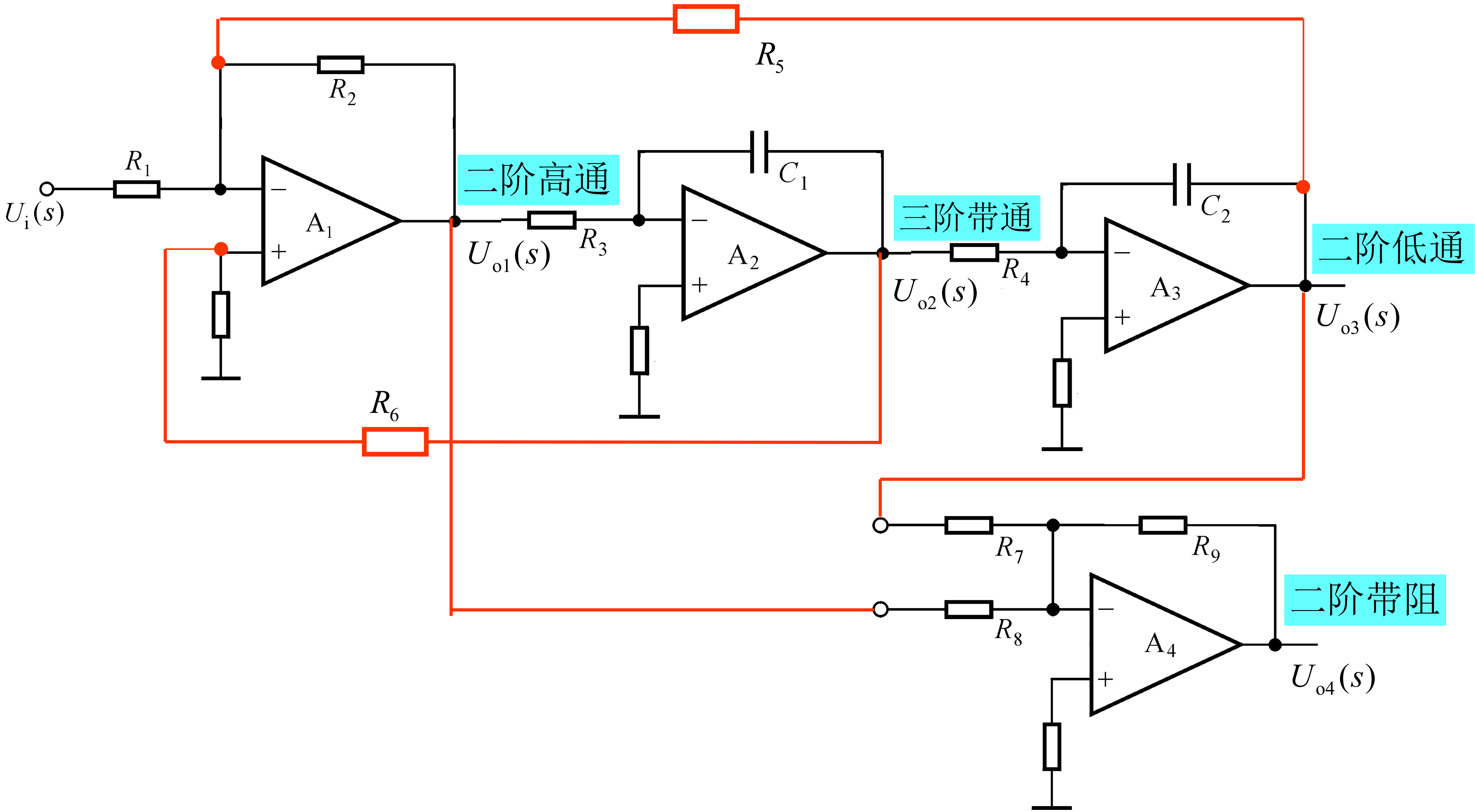
要点：

- 将比例、积分、求和等基本运算电路组合成自由设置传递函数、实现各种滤波功能的电路，称为状态变量型滤波器。
- 通带放大倍数由负反馈网络决定。
- 利用“逆运算”原理：积分电路具有低通特性，置于负反馈通路中可使电路具有高通特性。




$f \to 0$时负反馈最强，$A_1$输出电压$\to 0$；$f \to \infty$时$C$相当于短路，$A_2$输出电压$\to 0$，$A_1$开环，工作在非线性区，$A_1$输出电压$\to \pm U_{OM}$，需引入负反馈$R_6$使电路有确定的通带放大倍数。

# 利用积分电路实现的多阶滤波器



# 第 6 章

# 结 束