Записки за упражненията по Числени методи, СИ, ИС, II курс, зимен семестър, 2018/2019

Тихомир Иванов

19 ноември 2018 г.

Съдържание

Глава 1

Въведение

1.1 Какво представляват числените методи?

Най-общо казано, числените методи са техники, чрез които математически задачи се представят във вид, в който могат да бъдат решени с помощта на аритметични операции. Въпреки че има много видове числени методи, те имат обща характеристика – изискват голям брой аритметични пресмятания. Ето защо тяхното прилагане става посредством имплементирането им в компютърни програми.

Обикновено числените методи включват **апроксимация** (т.е. приближение) на оригиналната математическа задача. Ето защо голяма част от тях можем да разглеждаме като техники за **приближеното решаване** на дадена математическа задача посредством аритметични операции.

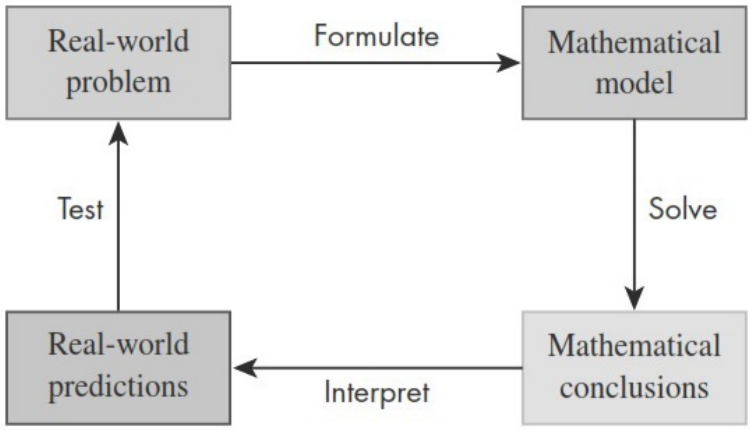
В настоящия курс ще се занимаем с въпросите за приближаването на функции, приближеното пресмятане на производни и интеграли, приближеното намиране на корените на дадено уравнение.

Преди да преминем към разглеждането на конкретни числени методи, нека разгледаме въпроса защо изобщо е необходимо тяхното използване. Математиката е езикът, на който се описват процесите от света около нас. За да изучим даден реален процес или да решим дадена практическа задача, ние трябва да определим кои са основните характеристики, които ги описват – това са някакви величини, които дават информация за съответния процес (например време, скорост, температура, сила, бързодействие на алгоритъм, компресия на данни и др.). Величините се измерват в дадени мерни единици, т.е. им се съпоставят някакви числени стойности. Изучавайки даден процес, ние искаме да изучим зависимостите между величините, които го описват, като за целта създаваме и изследваме математически модел на процеса.

Най-общо казано, **математически модел** е описание на някакъв реален процес или реална задача на езика на математиката. Често това става чрез функция или уравнение (или система от уравнения), много често – диференциално, свързващо величините, описващи процеса. Математическият модел обаче може да представлява и друг математически обект. Например, изследвайки една компютърна мрежа, може да се наложи решаването на задача от теория на графите.

Целта на математическото моделиране е да се опише даденият процес и по-добре да се разберат механизмите, които го обуславят, както и, евентуално, да се направят компютърни симулации и/или предвиждания за бъдещото му поведение.

Често в литературата се дава следната схема, описваща методологията на математическото моделиране:



Да коментираме накратко етапите, описани в нея.

1. Имайки някаква реална задача, първото, което трябва да направим, е да **формулираме математически модел**, който да я описва. За целта трябва да определим основните величини, които характеризират процеса (от гледна точка на математиката – променливи и параметри), и да съставим математическата задача, която ги свързва (например диференциално уравнение, оптимизационна задача и др.). Важно е да се има предвид, че **всеки математически модел е една абстракция, идеализация на реалния процес**. В него трябва да има баланс – от една страна, моделът трябва достатъчно подробно да описва процеса, така че резултатите от него да бъдат полезни, но, от друга страна, трябва да е достатъчно прост, за да позволява математическо изследване. Всеки модел се базира на някакви допускания (абстракции), които позволяват опростяването на реалната ситуация. При създаването на математически модел използваме физически закони, обуславящи процеса, и математически техники, за да получим уравнения (или други обекти), свързващи променливите. В ситуации, когато не са известни физически закони, които да ни ръководят, може да е необходимо да се съберат данни от експерименти, на базата на които да се състави математическият модел.

2. Имайки предвид, че математическият модел на един процес представлява математическа задача, **вторият етап е да решим тази задача** и да получим математически заключения. **В настоящия курс ние ще разгледаме именно техники, които ще можем да използваме в този етап**. Важно е да се отбележи, че практическите задачи водят твърде често до математически задачи, които не могат да бъдат решени със стандартните аналитични техники. Както знаем, дори просто изглеждащи алгебрични уравнения като полиномиалните уравнения от пета и по-висока степен в общия случай не могат да бъдат решени точно. Същото се отнася

за повечето определени интеграли и др. Въпреки това обаче съществуват техники за тяхното **приближено решаване** и именно с такива ще се запознаем в курса по Числени методи.

3. След като сме решили (в някакъв смисъл) математическата задача, **следва да интерпретираме резултатите от гледна точка на реалния процес**.

4. Да обърнем внимание, че резултатите за реалния процес, които получихме, са следствие на математическия модел, а не на самия процес. От друга страна, казахме, че математическият модел е една абстракция на реалния процес, т.е. може и да не го описва достатъчно добре. Затова е необходимо да направим **проверка дали тези резултати съответстват на реалността**. Ако това е така, можем да считаме, че моделът ни е удачен. В противен случай се връщаме в началото и трябва да модифицираме модела така, че той да отразява действителността по-добре. С други думи, математическото моделиране е един **итеративен процес**.

Основни теми, които ще бъдат застъпени в курса, са:

1. Приближаване на функции – функциите са основен математически обект и затова ние ще посветим голяма част от курса именно на въпроса за тяхното приближаване.

2. Приближаване на производни – **производната на една функция описва скоростта на изменение на функцията в дадена точка**. Тя е основна характеристика на една функция. Затова ние ще се занимаем с въпроса за тяхното апроксимиране.

3. Приближаване на интеграли – интегрирането е основно действие в математиката. От друга страна, повечето интеграли не могат да бъдат решени точно. Ето защо методите за тяхното приближено пресмятане с достатъчно висока точност са от много голяма важност.

4. Приближено решаване на алгебрични уравнения.

В заключение да отбележим няколко причини за изучаването на числени методи:

- Числените методи са много мощни средства за решаването на реални задачи. С тяхна помощ е възможно решаването на големи системи уравнения, справянето с нелинейности и сложни геометрии, които са присъщи за задачите от практиката и към които често е невъзможно да се подходи аналитично.

- Често в практиката се налага използването на готови софтуерни продукти, чието действие се базира на дадени числени методи. Интелигентното използване на тези продукти изисква познаването на основната теория, обуславяща съответните числени методи.

- Невинаги готовите софтуерни продукти са достатъчни за решаването на дадена практическа задача. В тези случаи познаването на основната теория в областта на числените методи ни позволява проектирането и направата на собствени програми.

1.2 Грешка. Източници на грешка. Представяне на числата в компютъра.

Както отбелязахме, повечето числени методи включват някаква апроксимация. Ето защо разбирането на идеята за грешка е от много голяма важност за ефективното им използване. Нека първо дадем следните дефиниции:

Дефиниция 1. ***Абсолютна грешка*** *наричаме разликата между точната и приближената стойност при дадена апроксимация:*

$$\varepsilon_a := exact\ value - approximation.$$

Дефиниция 2. ***Относителна грешка*** *дефинираме по следния начин:*

$$\varepsilon_r := \frac{exact\ value - approximation}{exact\ value} = \frac{\varepsilon_a}{exact\ value}.$$

Основните източници на грешка при решаването на една практическа задача са следните:

- Математическият модел – както казахме, математическият модел сам по себе си е една апроксимация на реалността, с други думи самото му съставяне въвежда грешка по отношение на реалния процес.

- Грешка от числения метод – обикновено числените методи се базират на някаква апроксимация, т.е. въвеждат някаква грешка. Тъй като ние на практика не знаем точното решение на съответната математическа задача, обикновено е невъзможно да намерим каква е грешката при въпросната апроксимация. От друга страна, за да разберем дали даден числен метод е приложим, или не, ние трябва да знаем с каква точност той ще реши съответната задача. Затова се налага да се правят оценки на грешката, например да се намери някаква стойност, която тя със сигурност не надминава, или да се определи нейният порядък. Така, при изучаването на различните числени методи в настоящия курс, ние най-често ще се спираме на два основни момента:

  – описание на самия метод;

  – начини за оценка на грешката.

- Грешки от закръгляване – те са свързани с начина, по който числата се представят в компютъра. Ще се спрем по-подробно на този вид грешка в настоящия параграф.

- Грешки от входните данни – математическите модели обикновено зависят от някакви параметри, стойностите на които се определят чрез провеждането на експерименти, правенето на измервания. Дори и най-съвършената техника позволява измерване с определена точност, т.е. стойностите на измерените величини, с които работим, също носят определена грешка.

Задача 1. Постройте в една координатна система графиките на функциите

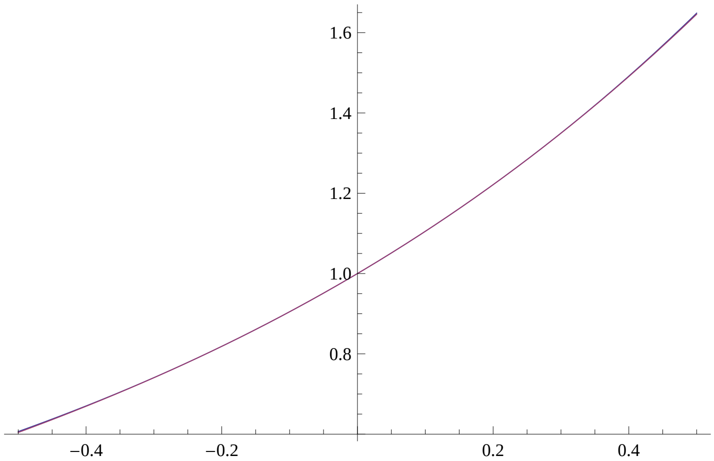
$$f(x) = e^x \text{ и } g(x) = 1 + x + 0.5x^2 + 0.1667x^3$$

в интервала [-0.5,0.5]. Постройте в същия интервал графиките на абсолютната и относителната грешка, които се получават при приближаването на $f(x)$ с $g(x)$, като функции на x.

Решение. Първо построяваме сътоветните графики, използвайки СКА Mathematica:

```
In[3]:= Plot[{E^x, 1 + x + 0.5 x^2 + 0.1667 x^3}, {x, -0.5, 0.5}]
```

Out[3]=



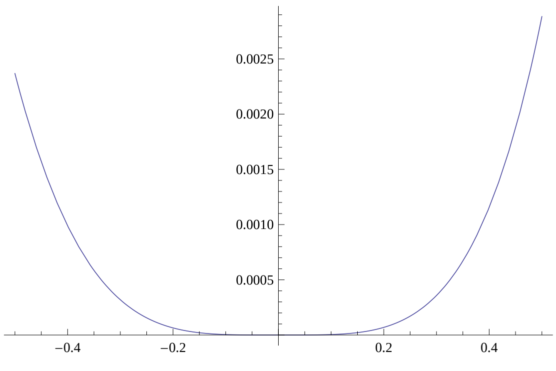
Визуално двете графики изглежда, че съвпадат. Това, което постигаме е, че експоненциалната функция, стойността на която не е лесно да се пресметне, сме приближили с алгебричен полином.

Абсолютната грешка, според Дефиниция 1, е

$$\varepsilon_a(x) = f(x) - g(x) = e^x - (1 + x + 0.5x^2 + 0.1667x^3).$$

```
In[1]:= Plot[E^x - (1 + x + 0.5 x^2 + 0.1667 x^3), {x, -0.5, 0.5}, PlotRange → All]
```

Out[1]=



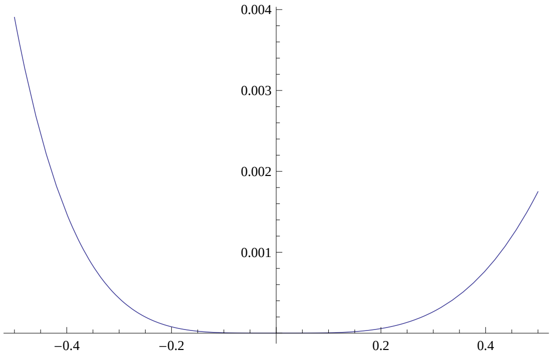
От графиката виждаме, че функцията $g(x)$ приближава сравнително добре функцията $f(x)$ в дадения интервал. Разбира се, дали точността на приближението е достатъчно добра, зависи от конкретния контекст, в който се разглежда задачата.

За относителната грешка, според Дефиниция 2, имаме

$$\varepsilon_r(x) = \frac{f(x) - g(x)}{f(x)} = \frac{e^x - (1 + x + 0.5x^2 + 0.1667x^3)}{e^x}.$$

In[2]:= Plot[$\frac{\text{E^x - (1 + x + 0.5 x^2 + 0.1667 x^3)}}{\text{E^x}}$, {x, -0.5, 0.5}, PlotRange → All]

Out[2]=



От последната графика виждаме, че относителната грешка в разглеждания интервал не надминава 0.2%. □

Сега ще се спрем на грешката от закръгляване. Причината за нея, както казахме, е начинът, по който числата се представят в компютъра. По-точно, ще се занимаем с т.нар. числа с плаваща точка (floating-point). При този подход числото се представя чрез дробна част, наречена **мантиса**, и цяло число, което се нарича **експонента** или характеристика по следния начин:

$$m.b^e,$$

където m е мантисата, b е основата на бройната система, в която работим (в компютъра $b = 2$), e – експонентата. Например $156.78 = 0.15678 \times 10^3$ е представянето във вид на число с плаваща точка на числото 156.78 в десетична бройна система. Да обърнем внимание, че обикновено дробната част се нормализира, така че първият знак след десетичната точка да бъде различен от нула.

Предимството на числата с плаваща точка е, че те позволяват представянето както на дроби, така и на много големи числа. От друга страна обаче, се появява т.нар. грешка от закръгляване, тъй като мантисата може да съдържа само краен брой значещи цифри. В компютъра, с t-битова дума могат да се представят най-много 2^t различни реални числа. Очевидно има безброй много числа, които не могат да бъдат представени точно. За тяхното представяне се използва най-близкото число, което може да се представи точно. По този начин въвеждаме грешка от закръгляване. Нещо повече, тъй като има максимално (по абсолютна стойност) число, то при опит да запишем число, което има по-голяма стойност, получаваме т.нар грешка "overflow". Освен това, по аналогична причина, не можем да представяме много малки по абсолютна стойност числа (т.е. близки до нулата). Опитът за записването на такова число води до грешка "underflow". Нека отбележим, че някои компютри заместват "underflow" с нула.

За да илюстрираме ефектите от грешките от закръгляване, нека разгледаме един хипотетичен компютър, който използва десетична бройна система и представя числата с плаваща точка чрез 1-цифрена експонента със знак и 3-цифрена мантиса.

Най-малкото положително число, което можем да представим в този компютър, е 0.100×10^{-9}, а следващото по големина число е 0.101×10^{-9}. Всяко друго число между тези две трябва да бъде апроксимирано. Това ни дава максимална грешка от закръгляване 0.5×10^{-12}.

Най-голямото число, което можем да представим, е 0.999×10^9, докато следващото по-малко число е 0.998×10^9, което дава максимална грешка 0.5×10^6.

Вижда се, че грешката съществено зависи от големината на числата, които апроксимираме. Затова е по-смислено да говорим за относителната вместо за абсолютната грешка. Може да се покаже, че тя е под 5×10^{-3}, т.е. под 0.5%. Да разгледаме следния пример, който ще ни покаже защо относителната грешка е по-добрия показател за точността на приближението. Ясно е, че абсолютна грешка, равна на 1, при число от порядъка на 10^8 е, по принцип, много по-пренебрежима, отколкото грешка от 0.001 при число от порядъка на 10^{-2}. Относителните грешки в този случай са съответно 10^{-8} и 0.1.

Може да се покаже, че за относителната грешка е в сила

$$|\varepsilon_r| < 0.5 \times 10^{-p},$$

където p е броят значещи цифри в мантисата. За числа с двойна точност (double) $p \approx 16$, а с единична (float) – $p \approx 7$

Като резултат от грешките от закръгляване, дори фундаменталните асоциативни и дистрибутивни закони на алгебрата може и да не са в сила при числени пресмятания. Да разгледаме следните примери:

- Асоциативност на събирането

  $$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

  Нека $a = 0.456 \times 10^{-2}$, $b = 0.123 \times 10^0$, $c = -0.128 \times 10^0$. Тогава

  $$\begin{aligned} (a + b) + c &= 0.128 \times 10^0 - 0.128 \times 10^0 = 0, \\ a + (b + c) &= 0.456 \times 10^{-2} - 0.500 \times 10^{-2} = -0.440 \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

  Очевидно първият резултат не е верен и причината за това е **събирането на голямо с малко число**. Можем да разгледаме и още по-показателен пример за този проблем – ако съберем 0.100×10^0 с 0.100×10^{-3}, резултатът е 0.100×10^0, т.е. все едно не сме извършили събирането!

- Асоциативност на умножението

  $$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c.$$

  При стойности $a = 10^{-6}$, $b = 10^{-6}$, $c = 10^8$ лявата страна на асоциативния закон дава верен резултат. При използване на дясната страна обаче, при изчисленията ще се получи "underflow". Виждаме, че дори при работата с числа, които могат да бъдат представени точно, не сме застраховани от наличието на тази грешка. Следователно **действието на един алгоритъм може да зависи съществено от реда, в който се извършват операциите в него.**

Горните примери ни показват, че всяка аритметична операция, която извършваме, би могла да въведе грешка. Както казахме, числените методи се базират на голям брой аритметични операции, така че това е нещо, което не можем да пренебрегнем при тяхното използване.

За да илюстрираме ефекта на грешките от закръгляване, нека разгледаме следния пример.

Задача 2. Даден е алгебричният полином

$$p(x) = (x-2)^9 = x^9-18x^8+x^7-672x^6+2016x^5-4032x^4+5376x^3-4608x^2+2304x-512.$$

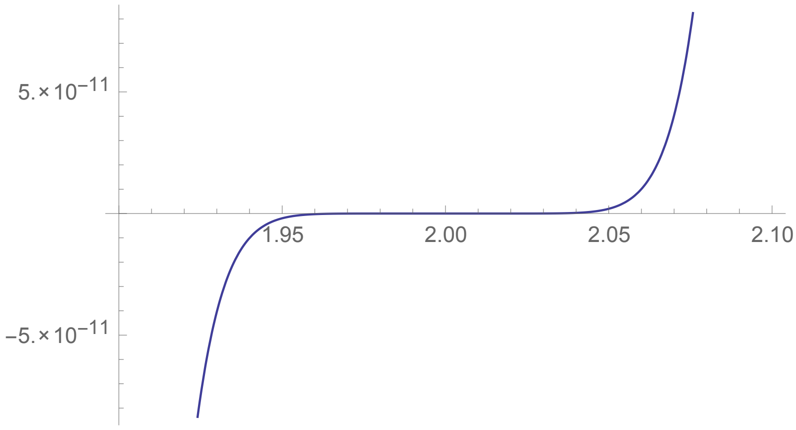
Да се построи неговата графика, като за пресмятане на стойностите му в точката x се използва

а)$p(x) = (x-2)^9$

б)$p(x) = x^9 - 18x^8 + 144x^7 - 672x^6 + 2016x^5 - 4032x^4 + 5376x^3 - 4608x^2 + 2304x - 512$.

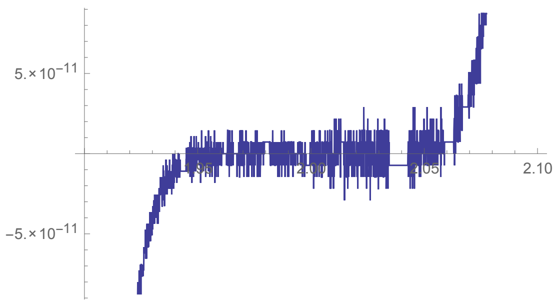
Решение. Решението на а) прилагаме по-долу.

```
f[x_]:=(x-2)^9
Plot[f[x],{x,1.9,2.1}]
```



За б) имаме.

```
p[x_]:=-512+2304 x-4608 x^2+5376 x^3-4032 x^4+2016 x^5-672 x^6+144 x^7-18 x^8+x^9
Plot[p[x],{x,1.9,2.1}]
```



Очевидно във втория случай резултатът е по-лош. Причината е в големия брой аритметични операции, които извършваме при него. Грешките от закръгляване водят до появилия се "шум". □

Вземайки предвид казаното дотук, **числените методи, които използваме трябва да са такива, че грешките от закръгляване да не водят до драстично изменение на резултата. Такива методи се наричат устойчиви.**

Глава 2

Интерполация

2.1 Идея на интерполацията

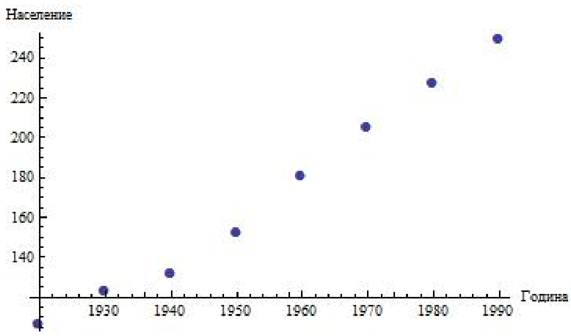
Изучавайки света около нас, ние искаме да намерим зависимости между различни величини. За да се изследва дадено явление или даден процес, е необходимо да се направят експерименти, които да дадат информация за него. След това данните от тези експерименти се използват, за да се създаде математически модел, който ги описва. Нека разгледаме следната задача.

Задача 3. В таблицата са дадени данни за населението на САЩ в млн. в периода 1920-1990.

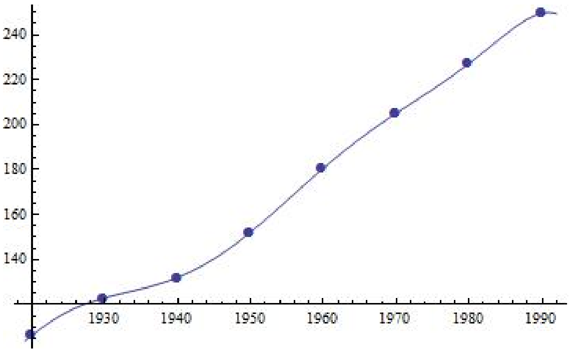
Година	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990
Население	106.46	123.08	132.12	152.27	180.67	205.05	227.23	249.46

Да се намери функция, описваща изменението на населението през този период.

Коментар по задачата. В случая търсим зависимост между две величини, а резултатите от измерванията можем да интерпретираме геометрично като точки в равнината.



Тогава един възможен начин да опишем това явление е да намерим функция, чиято графика минава през дадените точки.



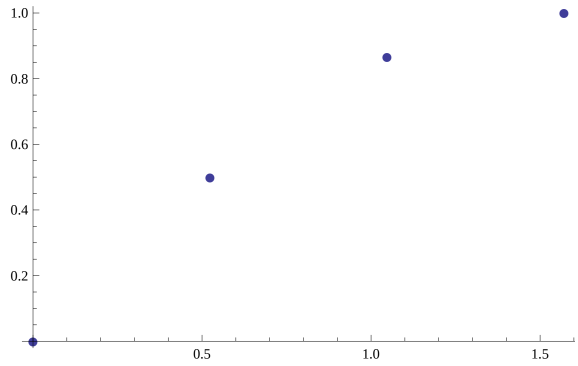
□

Намирането на функция, чиято графика минава през дадени точки, се нарича **интерполация**.

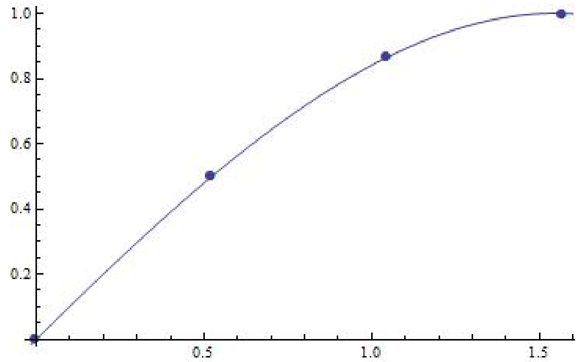
Нека сега разгледаме още една ситуация, в която ще използваме интерполация. На практика често се налага да се намират стойностите в дадена точка на функции като $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\ln x$ и др. Както сами можем да се убедим, в общия случай това не изглежда тривиално. Един възможен подход ще илюстрираме със следващия пример.

Задача 4. Да се намери приближение на стойността на функцията $f(x) = \sin x$ за $x = \pi/5$.

Коментар по задачата. Оказва се, че можем да сведем тази задача до аналогична на предходната. Стойността на функцията $f(x) = \sin x$ ни е известна например за $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$, $x_3 = \frac{\pi}{2}$ (съответните стойности на $f(x)$ в тези точки са $0, 1/2, \sqrt{3}/2, 1$). Геометрично тази информация е представена на следващата фигура:



Тогава, ако намерим някаква функция $g(x)$, чиято графика да минава през тези точки (и чиято стойност в дадена точка може да бъде лесно пресметната!), ние ще имаме приближение на стойността на $f(x)$.



Така ние ще можем да намерим приблизително $\sin \pi/5$, като пресметнем $g(\pi/5)$. Тук възниква много важният въпрос колко точно ще бъде нашето приближение, т.е. колко ще се отличава неговата стойност от стойността на оригиналната функция. В настоящата глава ще коментираме и него. □

Изобщо казано, интерполацията ни позволява да намерим приближение на дадена функция, използвайки стойностите ѝ в дадени точки.[1] И така, в настоящата глава ние ще търсим отговора на следните въпроси:

- Как да намерим функция, чиято графика минава през дадени точки?
- Как да оценим точността на приближението, което сме получили?

2.2 Интерполационна задача на Лагранж

Алгебричните полиноми са функции, чиято стойност в дадена точка може да бъде пресметната лесно (един бърз алгоритъм за целта е например схемата на Хорнер). Ето защо те се явяват добър избор за решаване на задачата, която си поставихме. И така, ние ще търсим алгебричен полином, който минава през дадени точки. Нека сега формулираме точно поставената вече задача.

Постановка на интерполационната задача на Лагранж.

Нека x_0, x_1, ..., x_n са дадени различни точки от реалната права (възли) и $y_0, y_1, \ldots, y_n$ са дадени реални числа (стойности). Искаме да построим полином $P(x) \in \pi_n$ (π_n – класът от всички алгебрични полиноми от степен, ненадминаваща n) такъв, че

$$\left| \begin{array}{l} P(x_0) = y_0 \\ P(x_1) = y_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P(x_n) = y_n \end{array} \right. \qquad (2.1)$$

Винаги, когато формулираме една математическа задача, много съществен е въпросът за съществуване и единственост на решението. От гледна точка на програмното реализиране на алгоритми за нейното решение например, е важно да знаем дали задачата винаги е решима и, ако не е, да можем да обработваме съответните изключения. В случая на интерполационната задача на Лагранж е в сила следното твърдение.

[1] Както ще видим по-нататък, можем да наложим условия и върху стойностите на нейните производни, но засега ще разглеждаме ситуацията, когато сме наложили условия само върху стойностите на функцията.

Твърдение 1. *Съществува, при това единствен полином $P(x) \in \pi_n$, удовлетворяващ интерполационната задача на Лагранж за произволни възли и стойности.*

Да отбележим още веднъж, че геометричната интерпретация на тази задача е следната – дадени са $n+1$ точки в равнината и търсим алгебричен полином от степен, ненадминаваща n, чиято графика минава през тези точки.

2.3 Интерполационна формула на Лагранж

Твърдение 2 (Интерполационна формула на Лагранж)**.** *Полиномът, удовлетворяващ условията (2.1), се представя по формулата*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) y_k,$$

където $l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x)$ са базисните полиноми на Лагранж. Те изпълняват условията

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{ако } k \neq i \\ 1, & \text{ако } k = i \end{cases}$$

и се задават с формулата

$$l_k(x) = \prod_{i=0,\ i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

Ще обясним смисъла на формулата чрез пример.

Задача 5. Като се използва интерполационната формула на Лагранж, да се намери полином $P(x) \in \pi_3$, удовлетворяващ условията

$$P(1) = 2;\ P(2) = 9;\ P(4) = 41;\ P(6) = 97$$

Решение. Нека означим

$$x_0 = 1,\ x_1 = 2,\ x_2 = 4,\ x_3 = 6;$$

$$y_0 = 2,\ y_1 = 9,\ y_2 = 41,\ y_3 = 97.$$

Първо ще построим базисните полиноми на Лагранж. За полинома $l_0(x)$ искаме да се нулира във всички възли освен в x_0. В x_0 стойността му трябва да бъде 1. Тогава имаме

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}.$$

Действително, във възлите x_1, x_2, x_3 съответно първият, вторият и третият множител в числителя става 0 и цялата дроб е 0. Във възела x_0 получаваме

$$l_0(x_0) = \frac{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = 1,$$

т.е. така дефинираният полином $l_0(x)$ изпълнява поставените му условия. Като заместим x_0, x_1, x_2, x_3 с техните равни, получаваме окончателно за $l_0(x)$

$$l_0(x) = \frac{(x-2)(x-4)(x-6)}{(1-2)(1-4)(1-6)} = -\frac{(x-2)(x-4)(x-6)}{15}.$$

Аналогично имаме

$$l_1(x) = \frac{(x-1)(x-4)(x-6)}{(2-1)(2-4)(2-6)} = \frac{(x-1)(x-4)(x-6)}{8};$$
$$l_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-6)}{(4-1)(4-2)(4-6)} = -\frac{(x-1)(x-2)(x-6)}{12};$$
$$l_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(6-1)(6-2)(6-4)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{40}.$$

Тогава интерполационният полином, удовлетворяващ задачата, може да бъде представен във вида

$$P(x) = l_0(x).y_0 + l_1(x).y_1 + l_2(x).y_2 + l_3(x).y_3.$$

За да се убедим в това, нека проверим какво се случва например в точката $x = x_1$. Имаме $l_0(x_1) = l_2(x_1) = l_3(x_1) = 0$ и $l_1(x_1) = 1$. Тогава

$$P(x_1) = 0.y_0 + 1.y_1 + 0.y_2 + 0.y_3 = y_1.$$

Аналогично се вижда, че този полином удовлетворява интерполационните условия и в другите възли.

И така, получихме

$$P(x) = l_0(x).2 + l_1(x).9 + l_2(x).41 + l_3(x).97.$$

След заместване и опростяване, получаваме окончателно

$$P(x) = 3x^2 - 2x + 1.$$

□

Оттук нататък с $L_n(f;x)$ ще бележим интерполационния полином от ред n за функцията f, а с $\omega(x)$ ще бележим $(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)$, където x_0, x_1, ..., x_n са дадени различни точки.

Дотук показахме как можем да построим полином, чиято графика минава през дадени точки. Следващото твърдение дава отговор на въпроса как да оценим каква е точността на приближението, което се получава, когато заменим дадена непрекъсната функция с нейния интерполационен полином.

Твърдение 3. *Нека $[a,b]$ е даден краен интервал и $x_0,\dots,x_n$ са различни точки в него. Нека функцията $f(x)$ има непрекъсната $(n+1)$-ва производна в този интервал. Тогава за всяко $x \in [a,b]$ съществува точка $\xi \in [a,b]$ такава, че*

$$f(x) - L_n(f;x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)$$

Вече сме готови да решим задача 4, която формулирахме в първия параграф и да видим как можем да оценим приближено стойността на дадена функция в някоя точка, използвайки интерполация.

Задача 6. Да се намери приближено стойността на $\sin\dfrac{\pi}{5}$ и да се даде оценка на грешката при апроксимация.

Решение. Очевидно оценяването на функцията $f(x) = \sin x$ в дадена точка не е никак проста работа. Ето защо, вместо да работим с тази функция, ние ще намерим нейно приближение и ще работим с него. Да изберем първо възли, в които да интерполираме. Точки, в които стойността на $\sin x$ ни е известна, са например $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$, $x_3 = \frac{\pi}{2}$ (съответните стойности на $f(x)$ в тези точки са $0, 1/2, \sqrt{3}/2, 1$). Ще намерим полинома $L_3(f;x)$, който интерполира функцията $f(x)$ в тези точки. За целта първо намираме базисните полиноми на Лагранж:

$$\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{3})(x-\frac{\pi}{2})}{(0-\frac{\pi}{6})(0-\frac{\pi}{3})(0-\frac{\pi}{2})};\\
l_1(x) &= \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{3})(x-\frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{6}-0)(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3})(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2})};\\
l_2(x) &= \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{3}-0)(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2})};\\
l_3(x) &= \frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{3})}{(\frac{\pi}{2}-0)(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})}.
\end{aligned}$$

Тогава получаваме

$$L_3(f;x) = l_0(x).0 + l_1(x).\frac{1}{2} + l_2(x).\frac{\sqrt{3}}{2} + l_3(x).1.$$

След кратки преобразования получаваме

$$L_3(x) \approx 1.02043x - 0.0654708x^2 - 0.113872x^3.$$

Сега вече можем да намерим стойността на полинома $L_3(x)$ при $x = \frac{\pi}{5}$, тъй като тя ще бъде „близо” до истинската стойност на $\sin\frac{\pi}{5}$. Получаваме $L_3\left(\frac{\pi}{5}\right) \approx 0.587061$.

Остана да дадем оценка за това колко „близо” всъщност е стойността, която ние сме намерили, до точната стойност. С други думи, искаме да дадем оценка за грешката

$$R\left(\frac{\pi}{5}\right) = \left|f\left(\frac{\pi}{5}\right) - L_3\left(f;\frac{\pi}{5}\right)\right|.$$

От Твърдение 3 непосредствено следва, че

$$R\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\left|f^{(4)}(\xi)\right|}{4!}\left|\omega\left(\frac{\pi}{5}\right)\right|,$$

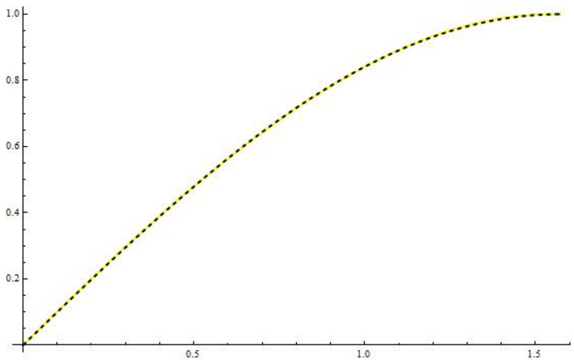
където ξ е число от интервала $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Имаме $f^{(4)}(\xi) = \sin\xi$.В интервала $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ функцията $\sin x$ приема стойности между 0 и 1, т.е. $|f^{(4)}(\xi)| \le 1$. Тогава

$$R\left(\frac{\pi}{5}\right) \le \frac{1}{24}\left|\omega\left(\frac{\pi}{5}\right)\right| \approx 0.00108232.$$

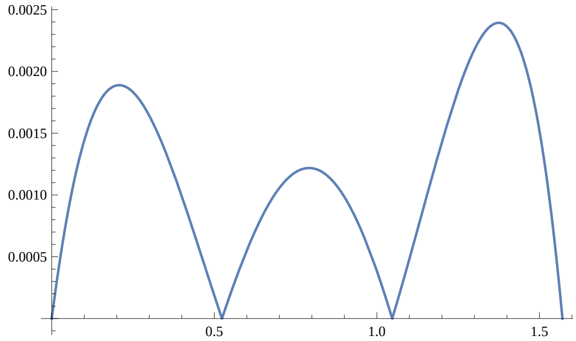
Окончателно получихме, че грешката по абсолютна стойност не надминава 0.0011. Ако сравним стойността, която ние получихме (0.587061) със стойността, която Mathematica връща за $\sin\frac{\pi}{5}$ (0.587785), ще се убедим, че това действително е така. Обърнете внимание, че това е оценка отгоре за грешката, т.е. тя може и да е значително по-малка.

Да обърнем внимание и че можехме да намерим по-добро приближение на $\sin\frac{\pi}{5}$, ако бяхме подбрали интерполационните възли по по-подходящ начин или бяхме взели повече възли. $\square$

Нека коментираме още няколко неща, свързани с предходната задача. Да илюстрираме първо нейното решение графично – заместваме функцията $\sin x$ (която на фигурата е с черната пунктирана линия) с интерполационния полином от степен 3, $L_3(f;x)$ (жълтата непрекъсната линия). Както виждаме, двете графики почти съвпадат в интервала на интерполация $[0,\pi/2]$, което обосновава приближаването на $\sin\frac{\pi}{5}$ с $L_3(f;\frac{\pi}{5})$.

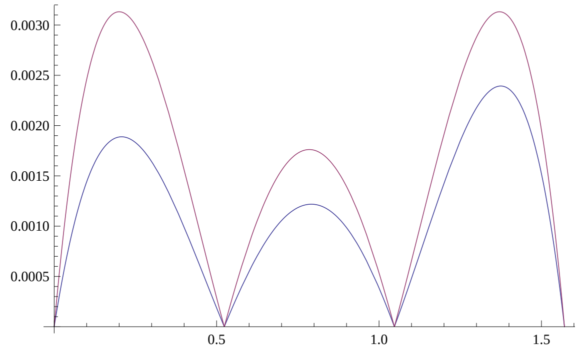


Привеждаме и графиката на абсолютната грешка (по модул) при приближаването на $\sin x$ с $L_3(f;x)$ в разглеждания интервал:

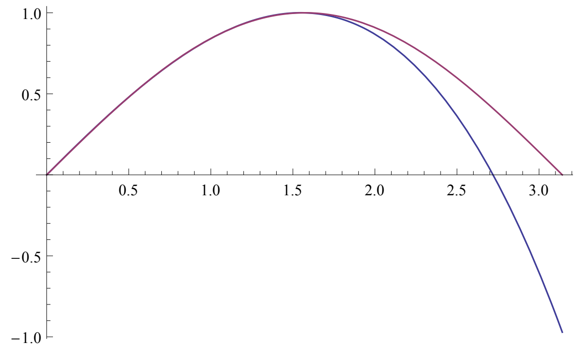


Допуснатата грешка, както можем да очакваме, във всички точки е не по-голяма от изведената оценка

$$R(x) \leq \frac{1}{24}\left|\omega(x)\right|:$$



Нека сега разгледаме графиките на $\sin x$ и $L_3(f;x)$ в интервала $[0,\pi]$:

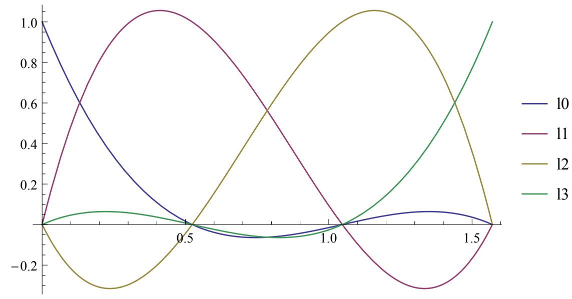


Както виждаме, извън границите на интерполация двете графики сериозно се разминават.

Дефиниция 3. *Когато използваме интерполационния полином за приближаване на стойност в интервала, определен от интерполационните възли, говорим за* ***интерполация****. В противен случай говорим за* ***екстраполация****.*

При екстраполация не можем да разчитаме на това, че ще получим добро приближение. Полиномът няма точки, за които да се „хване" и ето защо няма как да очакваме неговото поведение да следва това на приближаваната функция.

Нека сега разгледаме графиките на базисните полиноми на Лагранж, които намерихме в предходната задача:



Графиката добре илюстрира условието, което наложихме на базисните полиноми на Лагранж при тяхното дефиниране – всеки от тях има стойност 1 във възела, за който "отговаря" и 0 във всички останали възли.

Дефиниция 4. *Нека са дадени точките $x_0 < \cdots < x_n$. Казваме, че функциите $\varphi_0(x), \ldots, \varphi_n(x)$ образуват интерполационен базис, ако*

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{ако } i \neq j, \\ 1 & \text{ако } i = j. \end{cases}$$

Ясно е, че ако $\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x)$ образуват интерполационен базис и във формулата на Лагранж заместим базисните полиноми $l_i(x)$ с $\varphi_i(x)$, то получената функция $\overline{\varphi}(x)$ ще изпълнява условията $\overline{\varphi}(x_i) = y_i$.

Нека сега разгледаме още един пример, показващ как се оценява грешката при приближаване на дадена функция с нейния интерполационен полином.

Задача 7. Стойността на $\ln 15.2$ е намерена приблизително по следния начин: взети са точните стойности на $\ln 15$ и $\ln 16$ и е използвана линейна интерполация (построен е интерполационният полином от първа степен за възлите $x_0 = 15$ и $x_1 = 16$). Нека с f и p са означени съответно точната и приближената стойност на $\ln 15.2$. Докажете, че

$$0 < f - p < 4.10^{-4}$$

Решение. Нека $f(t) = \ln t$. Тогава грешката е

$$f - p = \frac{f''(\xi)}{2}(15.2 - 15)(15.2 - 16), \quad \xi \in (15, 16)$$

Тъй като $f''(t) = -\dfrac{1}{t^2}$, получаваме

$$f - p = -\frac{0,2.(-0,8)}{2\xi^2} = \frac{4}{50\xi^2}.$$

От една страна, $x-y$ очевидно е положително. От друга, най-голямата стойност на грешката се достига, когато знаменателят е най-малък, т.е. при $\xi = 15$. Тогава имаме

$$0 < f - p < \frac{4}{50.15^2} = \frac{4}{2.3^2.5^4} < \frac{4}{10^4}.$$

□

Понякога се интересуваме от максималната грешка, която се получва не в дадена точка, а в целия интервал, в който интерполираме.

Задача 8. Да се намери оценка на грешката, която се допуска при приближаването на функцията $f(x) = 1/(1 + x)$ в интервала $[0, 1]$ с интерполационния полином на Лагранж от първа степен с възли 0 и 1.

Решение. Имаме

$$f''(x) = \frac{2}{(x + 1)^3}.$$

Тогава

$$|R(x)| = \frac{2}{2(\xi + 1)^3}|(x - 0)(x - 1)| \le |(x - 0)(x - 1)|.$$

В последното неравенство използвахме, че $1/(\xi + 1)^3$ достига своя максимум в интервала $[0, 1]$ за $\xi = 0$. И така, за да намерим оценка отгоре на грешката $|R(x)|$ в целия интервал, остана да видим колко най-много може да бъде стойността на $|(x - 0)(x - 1)|$. Ясно е, че максимумът на последната функция се достига за $x = 1/2$ (парабола, която се нулира в 0 и 1 и следователно върхът ѝ е в $1/2$), т.е. окончателно получаваме, че за всяко $x \in [0, 1]$

$$R(x) \le \frac{1}{4}, \; \forall x \in [0, 1].$$

□

2.4 Разделени разлики. Интерполационна формула на Нютон

В настоящия параграф ще коментираме още един начин за построяване на интерполационния полином на Лагранж – формулата на Нютон с разделени разлики.

Дефиниция 5. *Нека $x_0, x_1, \ldots, x_n$ са дадени различни точки.* ***Разделената разлика*** *на функцията $f(x)$ в точките $x_0, \ldots, x_n$ се бележи с $f[x_0, \ldots, x_n]$ и се дефинира индуктивно по следния начин:*

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

като приемаме, че $f[x_i] := f(x_i)$ за всяка точка x_i.

Твърдение 4 (Интерполационна формула на Нютон)**.** *Интерполационният полином на Лагранж може да се представи чрез формулата*

$$L_n(f; x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, \ldots, x_k](x - x_0) \ldots (x - x_{k-1}).$$

Идея на доказателството. Формулата на Нютон се основава на връзката между полинома $L_n(f, x)$, интерполиращ $f(x)$ в точките $x_0, \ldots, x_n$, и полинома $L_{n-1}(f, x)$, интерполиращ $f(x)$ в точките $x_0, \ldots, x_{n-1}$. Да разгледаме разликата $L_n(f, x) - L_{n-1}(f, x) \in \pi_n$. Ясно е, че стойността на тази разлика е 0 за $x = x_0, \ldots, x_{n-1}$, тъй като в тези точки и двата полинома съвпадат с $f(x)$. Тогава

$$L_n(f, x) - L_{n-1}(f, x) = C(x - x_0) \ldots (x - x_{n-1}),$$

т.е.

$$L_n(f, x) = C(x - x_0) \ldots (x - x_{n-1}) + L_{n-1}(f, x).$$

Може да се покаже, че $C = f[x_0, \ldots, x_n]$. Разсъждавайки индуктивно, можем да изразим L_{n-1} чрез L_{n-2} и т.н., с което получаваме формулата на Нютон. □

Задача 9. Като използвате интерполационната формула на Нютон, намерете полинома $P(x)$, който интерполира функцията $f(x) = \sqrt{x} + 3x^2 - x + 2$ в точките 0,1,4.

Решение. Нека първо систематизираме интерполационните условия в таблица. За целта трябва да пресметнем стойността на $f(x)$ в точките 0, 1, 4. Получаваме

x	0	1	4
$f(x)$	2	5	48

Използвайки интерполационната формула на Нютон, получаваме представянето

$$L_2(f; x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

Тогава трябва да пресметнем разделените разлики, участващи във формулата. Удобно е тези пресмятания да се систематизират в следната таблица:

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2
$x_0 = 0$	$f[x_0] = 2$	$f[x_0, x_1] = 3$	$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{34}{12} = \frac{17}{6}$
$x_1 = 1$	$f[x_1] = 5$	$f[x_1, x_2] = \frac{43}{3}$	
$x_2 = 4$	$f[x_2] = 48$		

Коефициентите, необходими ни за формулата на Нютон, се намират в първия ред на така получената таблица. Получаваме

$$L_2(f;x) = 2 + 3(x-0) + \frac{17}{6}(x-0)(x-1) = 2 + 3x + \frac{17}{6}x^2 - \frac{17}{6}x = 2 + \frac{1}{6}x + \frac{17}{6}x^2.$$

□

Задача 10. Точките

x	-2	1	4	-1	3	-4
y	-1	2	59	4	24	-53

лежат на полином. Определете степента на този полином.

Решение. От единствеността на интерполационния полином и прилагайки формулата на Нютон, получаваме $P(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{5} f[x_0, \ldots, x_k](x - x_0) \ldots (x - x_{k-1})$ Както в предишната задача правим таблица с необходимите ни разделени разлики (обърнете внимание, че не е необходимо възлите да бъдат в нарастващ ред):

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2	Ред 3	4	5
$x_0 = -2$	$f[x_0] = -1$	$f[x_0, x_1] = 1$	$f[x_0, x_1, x_2] = 3$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 1$	0	0
$x_1 = 1$	$f[x_1] = 2$	$f[x_1, x_2] = 19$	$f[x_1, x_2, x_3] = 4$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = 1$	0	
$x_2 = 4$	$f[x_2] = 59$	$f[x_2, x_3] = 11$	$f[x_2, x_3, x_4] = 6$	$f[x_2, x_3, x_4, x_5] = 1$		
$x_3 = -1$	$f[x_3] = 4$	$f[x_3, x_4] = 5$	$f[x_3, x_4, x_5] = -2$			
$x_4 = 3$	$f[x_4] = 24$	$f[x_4, x_5] = 11$				
$x_5 = -4$	$f[x_5] = -53$					

Коефициентите във формулата на Нютон лежат на първия ред и тогава последният ненулев член е $f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$. Следователно полиномът е от трета степен. □

Нека сега коментираме накратко въпроса **защо са необходими различни формули за решаване на една и съща задача**.

Имплементирайки даден алгоритъм, основен е въпросът за неговото бързодействие. Именно тук се появява разликата между различните формули. В зависимост от това каква конкретна практическа задача искаме да решим, ще искаме различни неща от съответния алгоритъм.

- Често на практика, когато искаме да апроксимираме стойността на дадена функция в точката x, като са известни стойностите в точките $x_0, x_1, \ldots$, се построява редица от полиноми – първо, полином $p_1(x)$ от първа степен през двете най-близки точки, след това – полином $p_2(x)$ от втора степен през вече използваните две точки и следващата по отдалеченост и т.н. Това се прави, докато две съседни приближения дадат един и същ (с точност до някаква допустима грешка) резултат. След като сме получили един и същи резултат по два различни начина, можем да считаме, че този резултат е достоверен. За построяването на такава редица от полиноми е явно преимуществото на формулата на Нютон, тъй като, за да добавим нов възел, е достатъчно да добавим един ред в таблицата с разделени разлики и един член в сумата, описваща полинома. С други думи, можем да използваме вече направените изчисления. По формулата на Лагранж би ни се наложило да направим всички изчисления отначало, тъй като базисните полиноми зависят от възлите.

- Понякога искаме да построим полиноми с различни стойности, но еднакви възли. Например в биологията, когато се правят експерименти за развитието на една популация от микроорганизми, се следва експериментален протокол. Измервания се правят във фиксирани моменти от време. Тогава, ако искаме да сравним развитието на две популации, ще трябва да построим полиноми с едни и същи възли (фиксираните моменти от време), но различни стойности (численостите на различните популации в дадените моменти от време). Когато искаме да построим различни интерполационни полиноми, които имат обаче еднакви възли, по-удачно ще бъде да използваме формулата на Лагранж. След като възлите не се променят, базисните полиноми остават същите и трябва само да сметнем линейната им комбинация с новите стойности. Формулата на Нютон в този случай не е удобно да се използва, тъй като, сменяйки стойностите, трябва да пресметнем всички разделени разлики отначало (да отбележим още веднъж, че базата на рекурсията зависи от стойностите на приближаваната функция).

- В случаите, когато възлите са на равни разстояния един от друг, могат да се използват формулите на Нютон с крайни разлики. По формулата на Лагранж полиномът се представя във вида

  $$\sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{k\neq i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}.$$

  Имаме $n+1$ събираеми, като за всяко трябва да се извършат от порядъка на n операции, т.е. сложността е $O(n^2)$. Формулата на Нютон за интерполиране напред (вж. учебника) представя полинома във вида

  $$\sum_{i=0}^{n} \binom{t}{i} \Delta^i f_0,$$

  т.е. се извършват $O(n)$ операции. Тази формула обаче не е приложима в общия случай, а само при равноотдалечени възли

С други думи, различните формули ни предоставят различни инструменти, които ни позволяват да изберем подходящото средство за всеки конкретен случай.

2.5 Някои практически въпроси, свързани с интерполирането с алгебрични полиноми

Числените методи, както казахме, включват голям брой аритметични пресмятания. Затова тяхното прилагане става посредством имплементирането им в компютърни програми. Нека сега дефинираме функция в Mathematica, която намира автоматично полинома на Лагранж по формулата на Нютон. Тъй като в Mathematica индексацията в списъците започва от 1, нека означим интерполационните възли с $x_1,\dots,x_{n+1}$. Тогава интерполационната формула на Нютон ще изглежда така:

$$L_n(f;x) = f[x_1] + \sum_{k=2}^{n+1} f[x_1,\dots,x_k](x-x_1)\dots(x-x_{k-1}).$$

Ясно е, че за да имплементираме формулата на Нютон, трябва да можем да пресмятаме разделени разлики. Вземайки предвид това, ще дефинираме следните функции:

- $dividedDiff[nodes\_, values\_]$ – изчислява разделената разлика на функция със стойности $values$ в точките $nodes$ ($nodes$ и $values$ се задават като списъци);

- $newtonPoly[nodes\_, values\_, x\_]$ – намира интерполационния полином на Лагранж, построен за възли $nodes$ и стойности $values$.

```
dividedDiff[nodes_, values_] := (
  If[Length[nodes] == 1,
   values[[1]],
   (dividedDiff[nodes[[2 ;; Length[nodes]]], values[[2 ;; Length[nodes]]]] -
      dividedDiff[nodes[[1 ;; Length[nodes] - 1]], values[[1 ;; Length[nodes] - 1]]]) /
    (nodes[[Length[nodes]]] - nodes[[1]])]
 )
newtonPoly[nodes_, values_, x_] := (
  poly = 0;
  product = 1;
  For[i = 1, i ≤ Length[nodes], i++,
   poly += dividedDiff[nodes[[1 ;; i]], values[[1 ;; i]]] * product;
   product *= x - nodes[[i]]
  ];
  poly // Expand
 )
```

Сега, използвайки дефинираните функции, ще разгледаме някои особености на интерполирането с алгебрични полиноми, които трябва да се имат предвид, когато приближаваме дадена функция или моделираме дадено явление. Ще започнем с една дефиниция.

Дефиниция 6. *Когато използваме интерполационния полином за приближаване на стойност в интервала, определен от интерполационните възли, говорим за* ***интерполация****. В противен случай говорим за* ***екстраполация****.*

Задача 11. В таблицата са дадени данни за населението на САЩ в периода 1920-1990. Да се построи полином от седма степен, интерполиращ таблицата. Да се даде приближение на населението през 1952, 1974, 2000 година и да се сравни с действителните стойности – съответно 157 млн., 214 млн., 281.42 млн.

Година	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990
Население	106.46	123.08	132.12	152.27	180.67	205.05	227.23	249.46

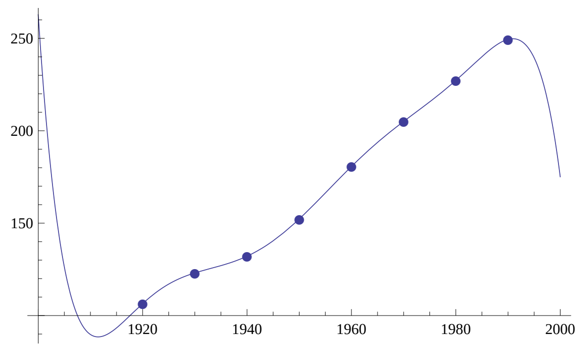
Решение. Ще използваме програмата в Mathematica, която предложихме в началото на настоящия параграф.

```
In[18]:= nodes = Range[1920, 1990, 10];
         values = {106.46, 123.08,  132.12, 152.27, 180.67, 205.05, 227.23, 249.46};
         p[x_] := newtonPoly[nodes, values, x];
         p[1952]
         p[1974]
         p[2000]

Out[21]= 157.728

Out[22]= 213.511

Out[23]= 175.08
```

Получихме следните приближения:

- През 1952 година – 157.728 млн. (в действителност 157 млн.)
- През 1974 година – 213.511 млн. (в действителност 214 млн.)
- През 2000 година – 175.08 млн. (в действителност 281,42 млн.)

В първите два случая приближението е добро и относителната грешка е малка. В третия обаче полученият с интерполационния полином резултат няма нищо общо с действителността. Отново виждаме, че при екстраполация не можем да разчитаме на добри резултати. Обърнете внимание как в границите на интерполация (между 1920 и 1990) поведението му добре моделира нарастването на населението, а извън тях това не е така.



□

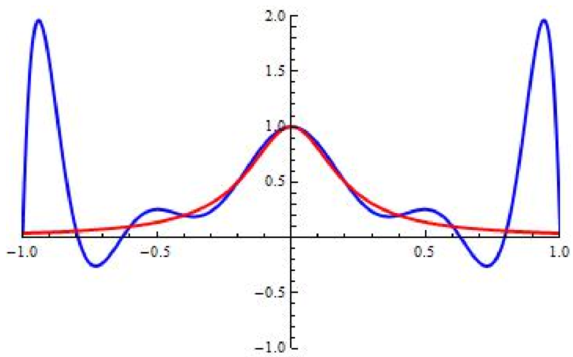
Със следващата задача ще покажем, че, противно на интуицията, често при налагане на повече интерполационни условия (съответно използвайки полиноми от по-висока степен) получаваме по-лошо приближение. Това е така, защото полиномите от по-висока степен имат „по-лошо” поведение – появяват се осцилации.

Задача 12. Да се приближи функцията[2] $f(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}$ в интервала, като се намерят интерполационните полиноми от степени 10 и 4 при равноотдалечени възли в интервала.

Да се построят графиките на абсолютните грешки в двата случая.

Решение. Първо да намерим полинома от десета степен.

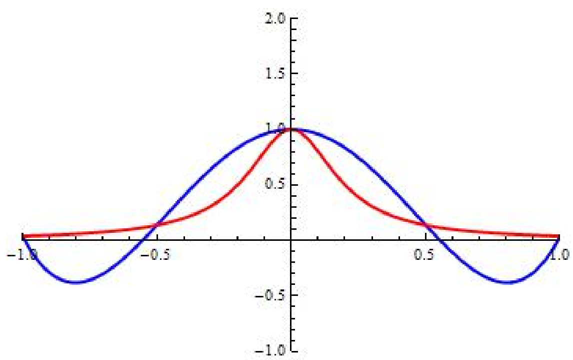
```
In[85]:= f[x_] := 1/(1 + 25 x^2)
         nodes = Range[-1, 1, 0.2];
         values = Table[f[x], {x, -1, 1, 0.2}];
         p[x_] = newtonPoly[nodes, values, x]
         Plot[{p[x], f[x]}, {x, -1, 1},
          PlotStyle → {{Blue, Thick}, {Red, Thick}}, PlotRange → {{-1, 1}, {-1, 2}}]
```



При интерполиране с полиноми от висока степен можем да очакваме наличието на осцилации. Между възлите на интерполация поведението на интерполационния полином е „лошо" - виждате как в двата края на интервала грешката при апроксимация е много голяма.

Приближението (като цяло) е по - добро с полинома от по - ниската степен:

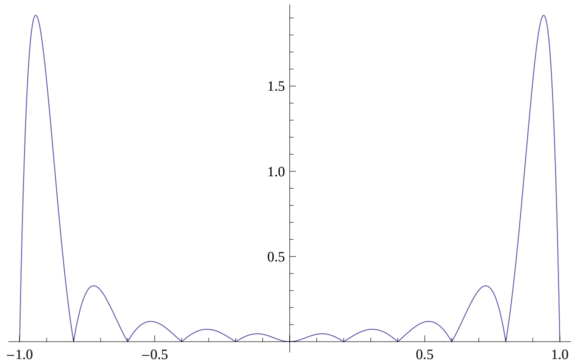
```
In[91]:= f[x_] := 1/(1 + 25 x^2)
         nodes = Range[-1, 1, 0.5];
         values = Table[f[x], {x, -1, 1, 0.5}];
         p4[x_] = newtonPoly[nodes, values, x]
         Plot[{p4[x], f[x]}, {x, -1, 1},
          PlotStyle → {{Blue, Thick}, {Red, Thick}}, PlotRange → {{-1, 1}, {-1, 2}}]
```



[2]Това е т.нар. функция на Рунге, носеща името на Карл Рунге – немски математик, забелязал особеността при интерполиране с полиноми от висока степен, която коментираме. Тази особеност е известна в литературата като „феномен на Рунге".

Нека сега построим графиките на абсолютните грешки при апроксимацията с полиномите от десета и четвърта степен. За полинома от десета степен получаваме следната графика:

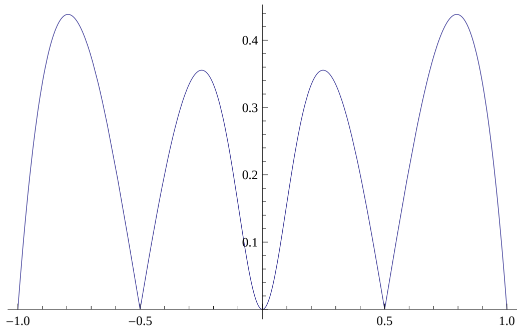
```
In[90]:= Plot[Abs[f[x] - p[x]], {x, -1, 1}, PlotRange → All]
```



За полинома от четвърта степен имаме:

```
In[96]:= Plot[Abs[f[x] - p4[x]], {x, -1, 1}, PlotRange → All]
```

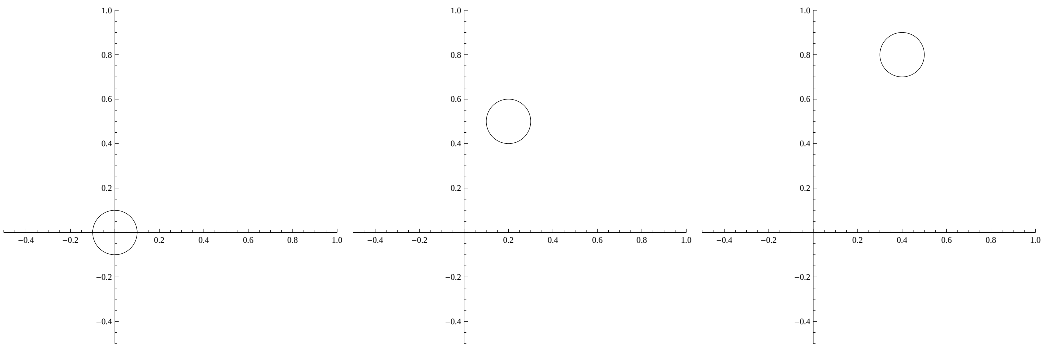
Out[96]=



Вижда се, че и в двата случая грешката в средата на интервала е по-малка отколкото в краищата. Това особено добре си личи за полинома от десета степен. Затова е добре, когато интерполираме, възлите да са подбрани така, че точката, в която искаме да намерим приближената стойност, да е близо до средата на интервала. □

Нека сега видим как можем да направим една простичка анимация.

Задача 13. Дадени са три сцени:



Да се направи анимация на базата на тези три сцени

Решение. Можем да намерим функция, която описва траекторията на центъра на окръжността. За целта можем да построим полином от втора степен (защото имаме три точки), който минава през точките (0,0), (0.2,0.5), (0.4,0.8) (това е центърът на окръжността на трите сцени). Решавайки тази интерполационна задача, можем да рисуваме окръжността през достатъчно малки интервали от време с център върху тази парабола и така ще получим анимирано движение на окръжността.

```
p[x_] = newtonPoly[{0, 0.2, 0.4}, {0, 0.5, 0.8}, x];
Animate[Graphics[Circle[{x, p[x]}, 0.1], Axes → True,
  AxesOrigin → {0, 0}, PlotRange → {{-0.5, 1}, {-0.5, 1}}],
  {x, 0, 0.4, 0.01}]
```

□

Задача 14. Проведени са експерименти, за да се определи бързодействието на един алгоритъм за сортиране в зависимост от броя елементи. Резултатите са представени в следната таблица:

бр.е/ти (х1000)	10	20	50	100	150	200	250
време, сек	0.1639275	0.53282	3.00007	11.20784	26.7486723	47.3297	76.80605

Да се определи колко най-много елемента могат да се сортират за не повече от 30сек.

Решение. Нека с x означим броя елементи. Ще използваме **обратна интерполация**. Т.е. ще построим интерполационния полином $f(x)$, съответсващ на таблицата, и ще намерим стойността на x, за която $f(x) = 30$. От проведените експерименти е ясно, че търсената стойност за x ще е между 150 и 200 хил. Нека построим интерполационния полином от трета степен с възли 100, 150, 200, 250 и стойности – 11.20784, 26.7486723, 47.3297, 76.80605. По този начин точката, в която искаме да апроксимираме стойността, ще има по два възела от двете си страни.

```
p[x_] = newtonPoly[{100, 150, 200, 250},
   {11.20784, 26.7486723, 47.3297, 76.80605}, x];
Solve[p[x] == 30, x]

Out[103]= {{x → 47.4033 - 243.128 i}, {x → 47.4033 + 243.128 i}, {x → 159.083}}
```

Получаваме $x \approx 159.083$. Следователно за под 30 сек. можем да сортираме масив с приблизително 159 хил. елемента. □

2.6 Интерполационна задача на Ермит. Разделени разлики с кратни възли.

Освен да налагаме условия върху стойността на функцията, можем да налагаме условия и върху стойностите на нейните производни в дадени точки. Това ни позволява по-добре да „контролираме” нейното поведение. Ние сега ще разгледаме интерполационната задача на Ермит.

Постановка на задачата. Нека

$$x_0, \ldots, x_n$$

са дадени различни точки от реалната права (възли). Нека

$$\nu_0, \dots, \nu_n$$

са цели положителни числа (кратности) и

$$\{y_{k\lambda}, k = 0, \dots, n, \lambda = 0, \dots, \nu_k - 1\}$$

е таблица от произволни реални стойности. Нека

$$N := \nu_0 + \dots + \nu_n - 1.$$

Интерполационната задача на Ермит е да се построи полином P от степен N, който удовлетворява условията

$$P^{(\lambda)}(x_k) = y_{k\lambda}, k = 0, \dots, n, \lambda = 0, \dots, \nu_k - 1.$$

С други думи, за всеки възел x_k налагаме условия за стойността на функцията и първите ѝ $\nu_k - 1$ производни (или общо толкова условия колкото е кратността на всеки възел) в съответния възел. По този начин имаме общо $\nu_0 + \dots + \nu_n$ условия, които могат да определят еднозначно коефициентите на полином от степен $N := \nu_0 + \dots + \nu_n - 1$.

Твърдение 5. *Задачата на Ермит има, при това единствено решение при всеки избор на интерполационни възли, кратности и стойности.*

Оказва се, че за да намерим интерполационния полином на Ермит, можем да използваме отново формулата на Нютон. Единствената разлика е, че трябва да обобщим понятието за разделени разлики така, че да можем да пресмятаме разделени разлики с кратни възли.

Твърдение 6. *Нека $f \in C^{(k)}[a, b]$. Тогава за произволни точки $x_0 \leq \ldots \leq x_n$ е в сила рекурентната връзка*

$$f[x_0, \dots, x_n] = \begin{cases} \dfrac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}, & \text{ако } x_0 < x_n \\ \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, & \text{ако } x_0 = x_n. \end{cases}$$

Задача 15. Да се построи полином, удовлетворяващ интерполационните условия

0	0	1	1	1
-1	-2	0	10	40

Решение. Казано с други думи, трябва да построим полином $P(x) \in \pi_4$ такъв, че

$$P(0) = -1, P'(0) = -2, P(1) = 0, P'(1) = 10, P''(1) = 40.$$

Ще го построим, използвайки формулата на Нютон. За целта трябва първо да пресметнем необходимите ни разделени разлики. Там, където пресмятаме разделена разлика, в която всички възли са равни, ще отбелязваме с * ($f[., ., .]^*$), за да обръщаме внимание на този факт.

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2	Ред 3	Ред 4
$x_0 = 0$	$f[x_0] = -1$	$f[x_0, x_1]^* = -2$	$f[x_0, x_1, x_2] = 3$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 6$	5
$x_1 = 0$	$f[x_1] = -1$	$f[x_1, x_2] = 1$	$f[x_1, x_2, x_3] = 9$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = 11$	
$x_2 = 1$	$f[x_2] = 0$	$f[x_2, x_3]^* = 10$	$f[x_2, x_3, x_4]^* = 20$		
$x_3 = 1$	$f[x_3] = 0$	$f[x_3, x_4]^* = 10$			
$x_4 = 1$	$f[x_4] = 0$				

Обърнете внимание как е попълнена първата колона. $f[x_1]$ е равно на -1 а не на -2, тъй като $f[x_1] = f[0] = f(0)$. По същата причина $f[x_3] = f[x_4] = 0$.

Сега коефициентите лежат в първия ред. Получаваме

$$
\begin{aligned}
P(x) = &-1 + (-2)(x-0) + 3(x-0)(x-0) + 6(x-0)(x-0)(x-1) \\
&+ 5(x-0)(x-0)(x-1)(x-1) = 5x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 2x - 1.
\end{aligned}
$$

□

Задача 16. Да се построи полиномът, интерполиращ таблицата

0	0	0	1
1	0	2	-1

Решение. Имаме

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2	Ред 3
$x_0 = 0$	$f[x_0] = 1$	$f[x_0, x_1]^* = \frac{0}{1!} = 0$	$f[x_0, x_1, x_2]^* = \frac{2}{2!} = 1$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = -3$
$x_1 = 0$	$f[x_1] = 1$	$f[x_1, x_2]^* = \frac{0}{1!} = 0$	$f[x_1, x_2, x_3] = -2$	
$x_2 = 0$	$f[x_2] = 1$	$f[x_2, x_3] = -2$		
$x_3 = 1$	$f[x_3] = -1$			

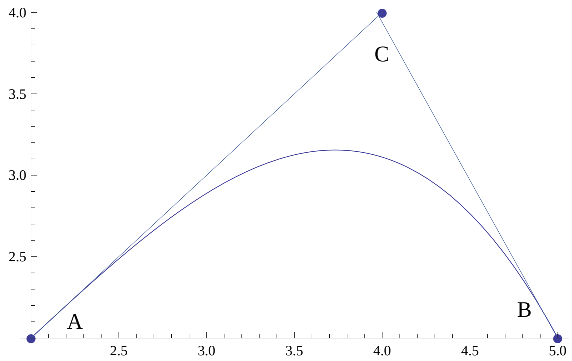
Получаваме

$$
P(x) = 1 + 0.(x-0) + 1(x-0)(x-0) + (-3)(x-0)(x-0)(x-0) = 1 + x^2 - 3x^3.
$$

□

В софтуера за графичен дизайн една от базовите функционалности, които трябва да бъдат реализирани, е изобразяването на криви. Да разгледаме един простичък начин как може да стане това. За да илюстрираме това, за което става въпрос, нека използваме програмата Paint, която е достъпна за всеки. За да построим крива, първо трябва да провлачим мишката между две точки, нека ги наречем A и B (построявайки отсечка), и след това да кликнем с нея някъде (например в точка C), за да определим „кривината" ѝ. Както можете да се уверите, оказва се, че през точка C минават допирателните към кривата в точките A и B. Да видим как може да бъде реализирано това.

От гледна точка на математиката, информацията, която имаме, са координатите на 3 точки в равнината. Нека ги означим с $A = (x_0, y_0)$, $B = (x_1, y_1)$ и $C = (x_2, y_2)$. Задачата ни е да построим крива, която минава през точките A и B, а допирателните към нея в точките A и B минават през точката C.



За да опишем кривата, нека я разгледаме като графика на някакъв кубичен полином

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Тогава можем да пресметнем производната на $p(x)$ в точките x_0 и x_1 (геометрично, това е тангенсът на ъгъла, който допирателната сключва с абсцисната ос). Съответните стойности са $p'(x_0) = \dfrac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}$ и $p'(x_1) = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$. Сега вече имаме стойностите на функцията и на първите производни в x_0 и x_1. Намирането на полинома при тези данни е интерполационната задача на Ермит. Решавайки я, имаме функция, която описва кривата и която можем да изобразим на екрана. Разбира се, на практика кривите се описват с много разнообразни функции и условията, които се налагат върху тях, могат да бъдат различни.