Hringavitleysa

Kristján Sölvi Örnólfsson

13. apríl 2025

Útdráttur

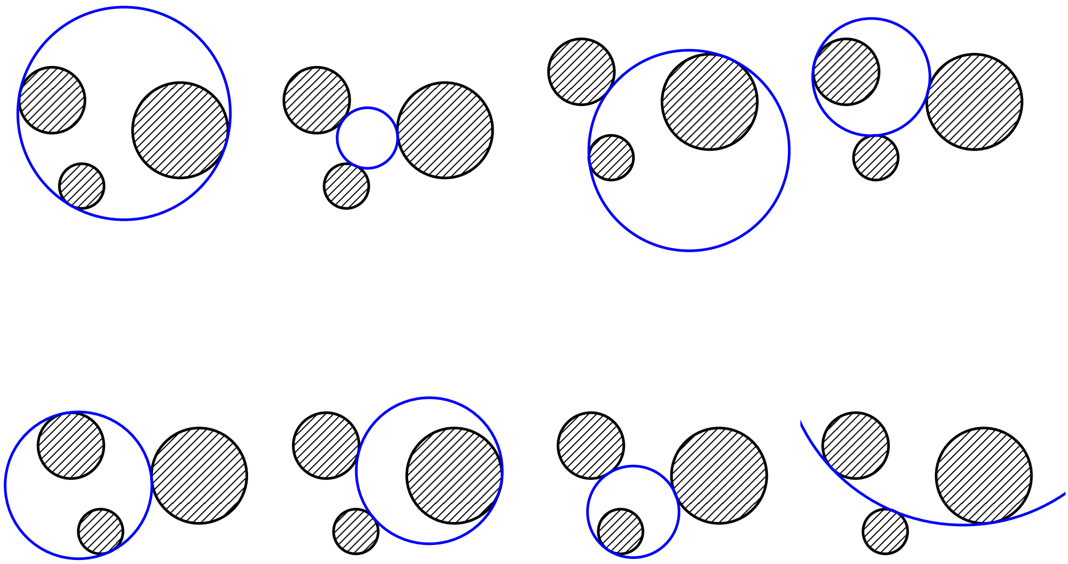
Apollonius frá Perga var einn merkasti stærðfræðingur fornaldar og lagði grunn að mörgum mikilvægum hugtökum í rúmfræði. Apollonius er sagður hafa fundið lausn á verkefni sínu um að finna hring sem snertir þrjá aðra gefna hringi, þó engin rit hans um efnið hafi varðveist. Verkefni hans hefur hins vegar vakið mikla athygli meðal stærðfræðinga á seinni öldum.

Á 19. öld lagði Gergonne fram aðferð til þess að smíða hringi Appolonius. Lausn hans byggir meðal annars á því að nýta Hringaverkefni Monge og setningu d'Alembert, sem lýsa ýmsum eiginleikum hringa og tengslum þeirra við snertipunkta. Hér verður farið yfir aðferð Gergonne ásamt setningu Descates sem lýsir sambandi milli geisla fjögurra snertandi hringa.

1 Hringir Apolloniusar

Apollonius frá Perga (um 240 f. Kr. – um 190 f. Kr.) var einn merkasti stærðfræðingur fornaldar. Hann lagði grunn að mörgum hugmyndum í rúmfræði. Setti meðal annars fram skilgreiningar á sporbaug, fleigboga og breiðboga. Apollonius var einnig mikill stjarnfræðingur og var fyrstur manna til að setja fram kenningu um að jörðin færi í sporbaug um sólina.

Í bók sinni „Epaphaí“ eða „snertlar“ á íslensku lýsir Apollonius Hringaverkefni sínu sem fjallar um að finna hring sem snertir þrjá gefna hringi. Apollonius er sagður hafa leyst verkefnið þó engin rit um það hafi varðveist. Almennt eru átta hringir sem snerta hinu gefnu hringi.



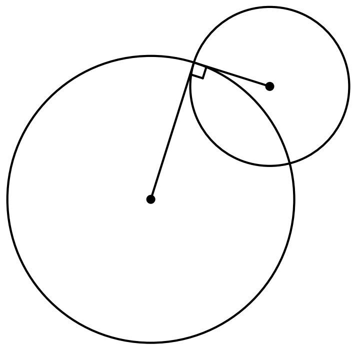
Mynd 1: Snertilhringir Appolonius

Á 18. öld skoðaði Gaspard Monge (1746 - 1818) líkt verkefni þar sem hann hafði áhuga á að finna hornréttan hring á hina þrjá gefna hringi. Niðurstaða hans nýtist okkur í smíði Gergonne á hringum Appoloniusar. Í þessum kafla munum við fylgja bókinni *100 Great Problems of Elementary Mathematics* eftir *Heinrich Dörrie* [3]

1.1 Verkefni Monge

Að teikna hring með reglustiku og hringfara sem sker þrjá gefna hringi í plani hornrétt.

Skilgreining 1.1. Tveir hringir eru sagðir **skerast hornrétt** ef geislar frá miðju til skurðpunkts mynda rétt horn



Mynd 1: Tveir hringir sem skerast hornrétt

Potturinn og pannan í lausn Monge við verkefninu er hugtakið veldi punkts við hring.

Skilgreining 1.2 (Veldi punkts við hring)**.** Veldi punkts P með tilliti til hrings $\mathcal{R}$ með miðju O og geisla r er skilgreint sem:

$$\mathrm{Pow}_R(P) = OP^2 - r^2.$$

Við fyrstu sýn getur verið erfitt að átti sig á því hvernig veldi punkts við hring hjálpar við smíði hornrétts hrings. Látum tvo gefna hringi $\mathcal{R}_1$ og $\mathcal{R}_2$ vera hornrétta. Setjum r_1 og r_2 sem geisla hringana og O_1, O_2 sem miðjur þeirra. Þá er ljóst með pýþagoras að

$$(O_1O_2)^2 = r_1^2 + r_2^2 \quad \text{þ.e} \quad r_1^2 = (O_1O_2)^2 - r_2^2 = \mathrm{Pow}_{\mathcal{R}_2}(O_1)$$

þ.e tveir hringir eru hornréttir þegar veldi miðju annars hringsins við hinn, er geisli hins í öðru veldi. Skoðum setningu sem getur oft komið til gagna þegar unnið er með veldi punkts við hring.

Hjálparsetning 1.3 (Veldi punkts við hring)**.** Látum P vera gefin punkt. Lína sem sker P og hring R í tveimur punktum A, B gefur af sér veldi P við R sem:

$$\mathrm{Pow}_R(P) = OP^2 - r^2 = \begin{cases} OA \cdot OB & \text{ef P er fyrir utan } R \\ -OA \cdot OB & \text{ef P er inn í } R \end{cases}$$

Sönnun. Sleppt. □

Skilgreining 1.4 (Veldisás)**.** Veldisás tveggja hringa er mengi þeirra punkta sem hafa jafnt veldi með tilliti til beggja hringa.

Til að geta smíðað veldisás er nytsamlegt að vita megin eiginleika þess. Næstu tvær setningar gefa okkur innsýn í þá.

Hjálparsetning 1.5. Veldisás tveggja hringa er lína sem er hornrétt á línu sem tengir miðju hringanna.

Sönnun. Í þessari sönnun er gott að hafa mynd 3 til hliðsjónar. Látum tvo hringi R og R' vera með miðjur K og K' og geisla k og k'. Látum einnig línuna sem fer í gegnum miðpunktana K og K' vera l, þ.e $KK' = l$. Látum hring $\mathcal{H}$ vera með miðju X og geisla x þ.a að hann sé hornréttur á hringi R og R'. Setjum svo loks z og z' sem KX og $K'X$. Þá er

$$\mathrm{Pow}_R(X) = z^2 - k^2 = x^2 = (z')^2 - k'^2 = \mathrm{Pow}_{R'}(X) \tag{1}$$

Því hafa hringirnir R og R' sama veldi við X. Skoðum mengi punktana sem hafa sama veldi við R og R'. X er punktur í þessu mengi og við drögum hornrétta línu frá X í gegnum línuna KK', sem tengir miðju hringanna R og R', látum skurðpunktinn vera F og látum $KF = f$ og $K'F = f'$. Skv pýþagoras fæst þá:

$$z^2 - f^2 = (z')^2 - f'^2 \tag{2}$$

Drögum nú (2) frá (1) og þá fæst

$$\mathrm{Pow}_R(F) = f^2 - k^2 = f'^2 - k'^2 = \mathrm{Pow}_{R'}(F) \tag{3}$$

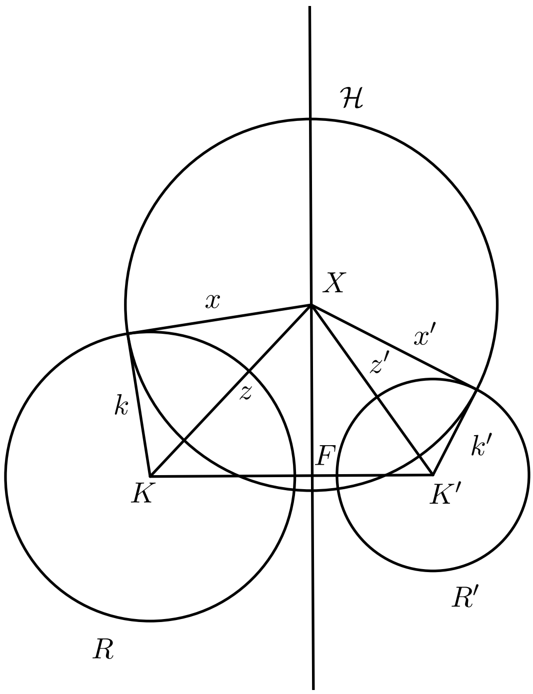
Þar með er veldi F við hringi R og R' einnig það sama. Nú völdum við einnig f og f' þ.a

$$l = f + f' \tag{4}$$

Frá jöfnu (4) fæst þá

$$\begin{aligned} f^2 - k^2 = f'^2 - k'^2 \quad & \text{þ.e} \quad (f + f')(f - f') = k^2 - k'^2 \\ & \text{þ.e} \quad l(f - f') = k^2 - k'^2 \\ & \text{þ.e} \quad f - f' = \frac{k^2 - k'^2}{l} \end{aligned}$$

En þar með höfum við tvær jöfnur fyrir f og f', því eru f og f' fastar. Frá þessu fæst þá að Veldisás hringanna er lína sem er hornrétt á línu KK' sem tengir miðju hringanna.



□

Hjálparsetning 1.6. Fyrir gefna þrjá hringi þá skerast veldisárnir þrír í einum punkti

Sönnun. Látum I, II, III vera gefna hringi. Látum O vera punktinn þar sem veldisásar (I, II) og (II, III) skerast. Þá er

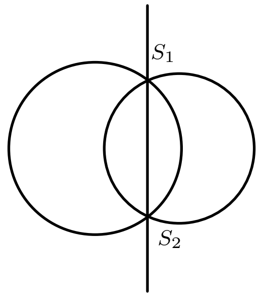
$$\mathrm{Pow}_{\mathrm{I}}(O) = \mathrm{Pow}_{\mathrm{II}}(O) \text{ og } \mathrm{Pow}_{\mathrm{II}}(O) = \mathrm{Pow}_{\mathrm{III}}(O)$$

en það þýðir að $\mathrm{Pow}_{\mathrm{I}}(O) = \mathrm{Pow}_{\mathrm{III}}(O)$ svo að O liggur á veldisás (I,III) og þar með skerast veldisásarnir þrír í punkti O. □

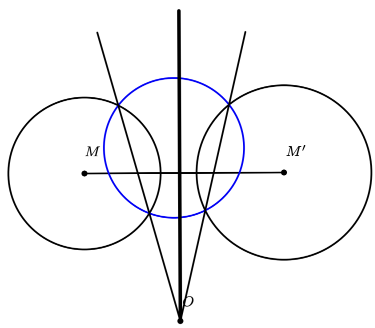
Setning 1.7 (Hringaverkefni Monge)**.** Fyrir gefna þrjá hringi er hægt að finna hring með reglustriku og hringfara sem sker alla þrjá hringina hornrétt

Sönnun. Við byrjum að finna veldisás tveggja hringa I og II. Samkvæmt Hjálparsetningu 1.5 er veldisás tveggja hringa lína, við þurfum því að finna tvo punkta sem hafa jafnt veldi við báða hringina. Skoðum tvö tilvik:

i Ef hringirnir tveir skerast þá er veldisásinn sú lína sem fer í gegnum báða skurðpunkta, því veldi þeirra við báða hringina er 0.

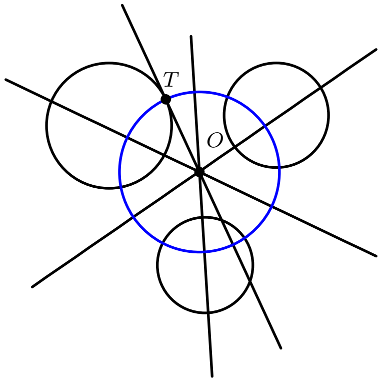


ii Ef hringirnir skerast ekki þá teiknum við nýjan hring, $\mathcal{R}$, sem er þess eðlis að hann sker hina tvo hringina sjá mynd. Við teiknum veldisása (I, $\mathcal{R}$) og (R, II) eins og í i). Skurðpunktur þessara veldisása er þá punktur á veldisás (I, II). Drögum hornrétta línu í gegnum skurðpunktinn og á línuna sem tengir miðjur I og II. Þessi lína er þá veldisás (I, II) samkvæmt 1.5.



Nú höfum við séð hvernig við getum fundið veldisás fyrir hringi I og II. Til að klára verkefnið þá finnum við veldisásana þrjá (I, II), (II, III) og (III, I). Veldisásarnir skerast í einum punkti, köllum hann O. Næst drögum við snertil frá O að einhvern gefina hringana segjum hring I. Látum snertipunkt snertilsins við hringinn vera T. Hringur með miðju í O og geisla OT er hornréttur á I og þar með er veldi O við hring I jafnt OT^2. Þar sem O liggur á öllum veldisásunum er veldi O við hring II og III jafn OT^2 en þar með er hringurinn okkar líka hornréttur á II og III.

Nú er hægt að spyrja sig hvort alltaf sé til hornréttur hringur á hina þrjá gefina hringi. Lausnin byggir aðeins á því hvort skurðpunktur veldisásana sé alltaf til. Ef veldisásarnir eru samsíða þá liggja miðjur hringana á línu, þar með er línan sem fer um miðjurnar lausn á verkefninu.



$\square$

1.2 Einslögunamiðjur og setning d'Alembert

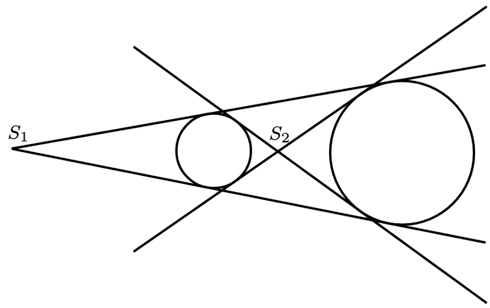
Eftir að hafa sannað Hringaverkefni Monge skoðum við setningu d'Alembert sem lýsir eiginleika ytri og innri einslögunarmiðja þriggja hringa.

Skilgreining 1.8 (Ytri- og innri einslögunarmiðjur)**.** Látum $\mathcal{R}$ og $\mathcal{R}'$ vera tvo gefna hringi, með miðjur M og M' og geisla r og r'.

- **Ytri einslögunarmiðja** er punktur A á línunni MM', sem uppfyllir hlutfallið
$$\frac{MA}{M'A} = +\frac{r}{r'}$$
- **Innri einslögunarmiðja** er punktur J á línunni MM', sem uppfyllir hlutfallið:
$$\frac{MJ}{M'J} = -\frac{r}{r'}$$

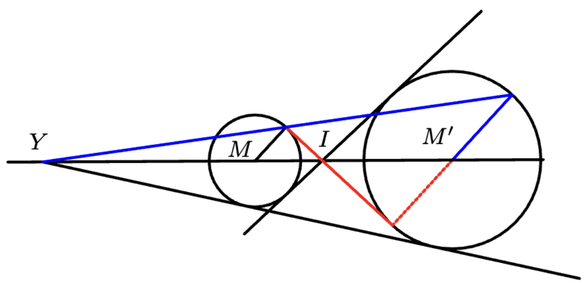
Formerkið er jákvætt þegar punkturinn liggur fyrir utan hringina en neikvæð þegar punkturinn liggur á milli þeirra. Punktarnir A og J kallast **einslögunarmiðjur** hringanna tveggja.

Einslögunarmiðjur má íminda sér sem einskonar punktur þar sem formin líta eins út í einhverjum skilningi. Ef maður rennir minni hringnum eftir snertlum hringsins um ytri einslögunarmiðjuna þá stækkar hann og verður loks jafn stór og sá stærri þegar miðjur hringanna verða á sama stað. Innri einslögunarmiðjuna má ímynda sér svo að maður renni öðrum hvorum hringnum eftir snertlunum og þá minnkar hringurinn og snýst svo við og stækkar upp að hinum.



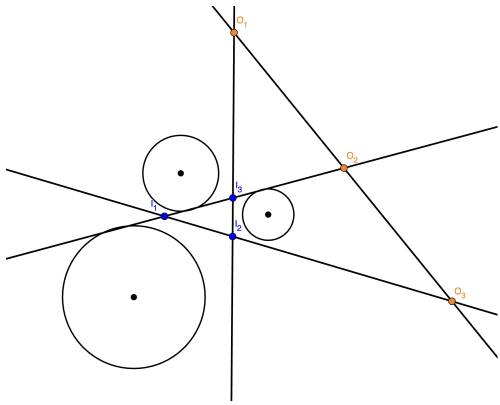
Mynd 2: Einslögunarmiðjur, S_1 ytri en S_2 innri

Höfum tvo hringi. Teiknum geisla þeirra þannig að geislarnir eru samsíða og teiknum línu frá enda geislana. Þá sker sú lína annaðhvort ytri eða innri einslögunarmiðju hringanna.

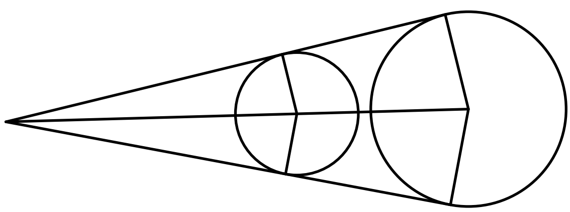


Mynd 3: Y og I eru ytri og innri einslögunarmiðjur

Setning 1.9 (Setning d'Alembert)**.** Ef gefnir eru þrír hringir, þá liggja þeirra ytri einslögunarmiðður á sömu línu. Sömuleiðis þá liggur þrennd af einum ytri og tveimur innri einslögunarmiðjum á línu.



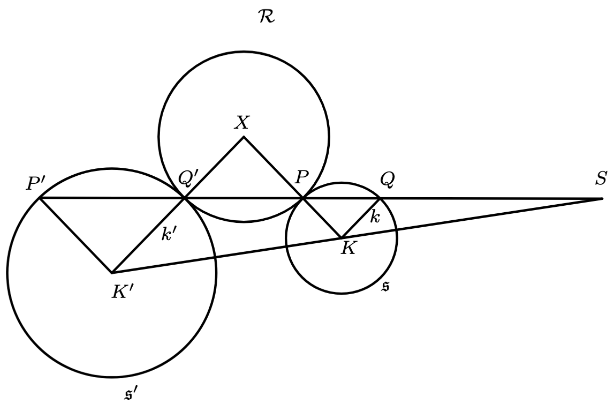
Sönnun. Monge átti hugmynd að mjög sniðugri sönnun á þessari setningu sem gengur útá að skoða plan sem liggur á þremur kúlum. Hún virkar þó ekki alltaf en hægt er að bjarga hugmyndinni um að færa sig upp um vídd. Sönnunin sem við munum skoða fékkst frá *3Blue1Brown*[1]. Látum Hringi I, II, III vera gefna. Færum okkur nú upp um vídd og skoðum keilurnar með botnfleti I, II, III og eins halla. Lína um topppunkta á tveimur keilum mun einnig skera (ytri) einslögunarmiðju upphaflegu hringanna, sjá mynd.



Skoðum nú planið sem fer um alla topppunkta keilanna. Þetta plan sker allar þrjár (ytri) einslögunarmiðjurnar. Við vitum að einslögunarmiðjurnar liggja auk þess allar á upphaflega plani okkar. Þar með vitum við að einslögunarmiðjurnar liggja einhversstaðar á skurðmengi planana tveggja en það er einmitt lína [1]. Til að sýna að þrennd af einni ytri og tveimur innri einslögunarmiðjum liggi á línu er hægt að nota sömu röksemdarfærslu nema snúa þarf einni keilunni á hvolf. □

Hjálparsetning 1.10. Ytri (innri) einslögunarmiðjur tveggja gefina hringa er sá punktur sem hefur jafnt veldi við alla hringi sem snertir hina gefnu hringi, og þar sem allar línur sem fara í gegnum snertipunkta hrings sem snertir hina gefnu hringi skerast.

Sönnun. Látum tvo hringi $\mathfrak{s}$ og $\mathfrak{s}'$ með miðjur K og K', látum svo hring $\mathcal{R}$ með miðju X vera snertill við $\mathfrak{s}$ og $\mathfrak{s}'$ með snertipunkta P og Q'. Látum S vera ytri einslögunarmiðja $\mathfrak{s}$ og $\mathfrak{s}'$. Teiknum tvær línur frá S, aðra í gegnum K og K' og hina í gegnum P og Q', látum P' vera skurðpunkt línunar við hring K' og Q vera skurðpunkt línunar við K. Loks teiknum við línustrik frá K' í X og annað línustrik frá X í K. Nú fáum við þrjá einslaga jafnarma þríhyrninga



með arma sem geisla hvers hrings. Þá er

$$\frac{SP}{SP'} = \pm\frac{k}{k'} = \frac{SQ}{SQ'} \Rightarrow SP \cdot SQ' = SQ \cdot SP'$$

Ef við látum $SP \cdot SQ' = w = SQ \cdot SP'$ þá fæst

$$w^2 = SP \cdot SQ' \cdot SQ \cdot SP' = SP \cdot SQ \cdot SP' \cdot SQ' = \mathrm{Pow}_{\mathfrak{s}}(S) \cdot \mathrm{Pow}_{\mathfrak{s}'}(S)$$

En þar með er

$$\mathrm{Pow}_{\mathcal{R}}(S) = SP \cdot SQ' = w = \sqrt{\mathrm{Pow}_{\mathfrak{s}}(S) \cdot \mathrm{Pow}_{\mathfrak{s}'}(S)}$$

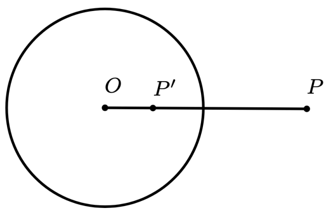
þ.e veldi S við $\mathcal{R}$ er fasti. Þar sem við tókum $\mathcal{R}$ sem hring sem snertir hina hringina af handahófi þarf sérhver hringur sem snertir tvo aðra að hafa sama veldi við ytri einslögunarmiðjuna. Tilvikið fyrir innri einslögunarmiðjuna er svipað nema þá skoðum við hringina sem gleypir annan af hringunum tveimur. $\square$

1.3 Pól punktar

Skilgreining 1.11 (Andhverfu punktar með tillit til hrings)**.** Látum $\mathcal{R}$ vera hring með miðju O. Tveir punktar P og P' sem liggja á línu um O eru sagðir vera samoka með tilliti til $\mathcal{R}$ ef

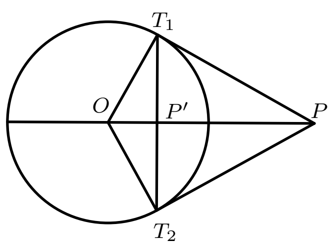
$$OP \cdot OP' = r^2$$

Um þessa tvo punkta P og P' gildir að annar er í $\mathcal{R}$ og hinn er fyrir utan $\mathcal{R}$.



Skilgreining 1.12 (Póllína af punkti og pólpunktur)**.** Látum $\mathcal{R}$ vera hring. **Póllína** punkts P er sú lína p sem er hornrétt á helmingunarlínu $\mathcal{R}$ frá P og fer í gegnum samoka punkt P. Öfugt, þá er **pólpunktur** línunnar p sá punktur P sem er samoka skurðpunkts p og helmingunarlínuna sem er hornrétt á p.

Ef við látum T_1 og T_2 vera snertipunkta snertilsins frá P við hringinn eins og á mynd.



Þá er $\angle OT_1P' = \angle T_1PP'$ svo að $\triangle OP'T_1 \sim \triangle OT_1P$. Þar með er

$$\frac{OT_1}{OP'} = \frac{OA}{OT_1} \Rightarrow r^2 = OP \cdot OP'$$

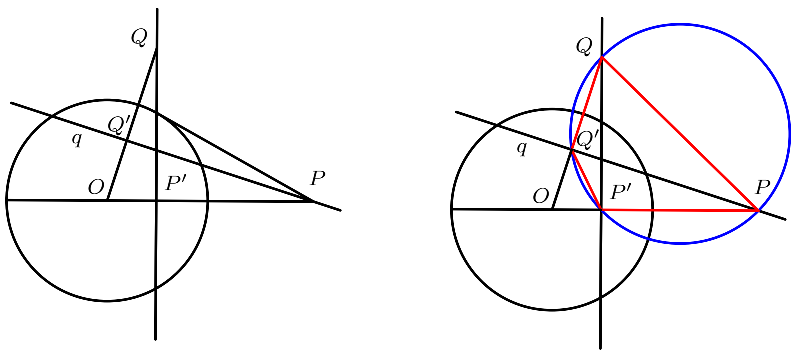
Við höfum því leið til þess að finna póla.
Skilgreininginn hefur í för með sér að ef p er póllína punkts P þá er P pólpunktur línunar p.

Setning 1.13 (Setning um Póllínur og pólpunkta)**.** Ef Q liggur á póllínu puntks P, þá liggur P á póllínu punkts Q. Eins gildir um póllínur að ef p sker pólpunkt q þá sker q einnig pólpunkt p.

Sönnun. Látum $\mathcal{R}$ vera hring með miðju O. Gerum ráð fyrir að Q sé punktur á póllínu p af punkti P, látum Q' vera anhverfu Q með tilliti til $\mathcal{R}$ og P' vera andhverfu P. Þá er

$$OP \cdot OP' = r^2 = OQ \cdot OQ'$$

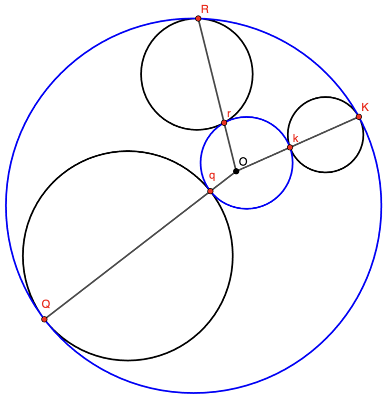
þar sem r er geisli $\mathcal{R}$. En þá er til umritaður hringur við ferhyrninginn $PP'Q'Q$ því veldi O við hann væri PP' og QQ' samkvæmt Hjálparsetningu 1.3. Nú er $\angle P' = 90$ og þá gefur regla um ferilhorn að $\angle Q' = 90$ þ.e PQ' er hornrétt á OQ. Því er PQ' póllínan q af punkti Q.



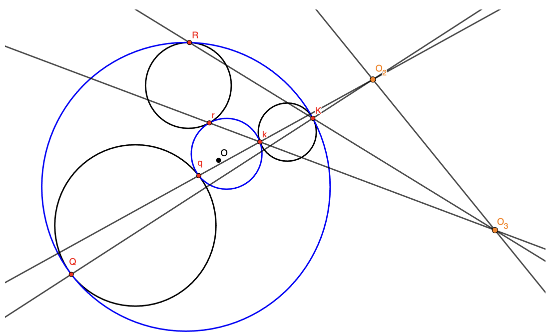
□

1.4 Aðferð Gergonne

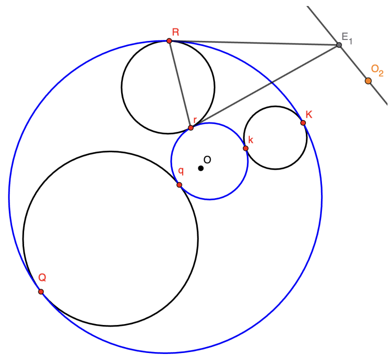
Látum hringi $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$ vera gefna og gerum ráð fyrir að við höfum par af hringjum (U, V) sem snertir gefnu hringina. Samkvæmt hjálparsetningu 1.10 vitum við að þar sem $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$ serta allir (U, V) að einslögunarmiðja (U, V) er punkturinn sem línurnar sem fara um snertipunktana skerast (a á mynd) köllum punktinn O. Einnig er samkvæmt hjálparsetningu 1.10 veldi O við $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$ það sama. Þar með er O veldisás $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$.



Skoðum tvennd af $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$, segjum $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$. Hjálparsetning 1.10 gefur nú að þar sem U, V snertir $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ að línurnar sem fara um RK og rk skerast í einslögunarmiðju $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$. Einnig er veldi einslögunarmiðjunnar við U og V það sama. Þar með liggur einslögunarmiðja $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ á veldisás (U, V). Ef við tökum aðra tvennd og gerum það sama sjáum við að veldisás (U, V) er línan sem fer um einslögunarmiðjur $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ og $\mathcal{R}_3$. Köllum þessa línu $\mathcal{X}$



Skoðum nú snertla $\mathcal{R}_1$ sem fara um R og r. Látum skurðpunkt þessa snertla vera E_1. Nú er $RE_1 = rE_1$ og $\text{Pow}_U(E_1) = (RE_1)^2 = (rE_1)^2 = \text{Pow}_V(E_1)$. Svo að E_1 liggur á veldisás (U, V). Þar með fer $\mathcal{X}$ um pólpunkt Rr og samkvæmt setningu 1.13 fer þá Rr um pólpunkt $\mathcal{X}$.



Mynd 4: blablabla

Nú höfum við þá sýnt að línan sem fer um R, r fer líka um O og pólpunkt línunar $\mathcal{X}$. Þetta gildir líka um hringi $\mathcal{R}_2$ og $\mathcal{R}_3$. Tökum þetta allt saman í aðferð Gergonne.
Látum þrjá hringi vera gefna þá er aðferð Gergonne eftirfarandi:

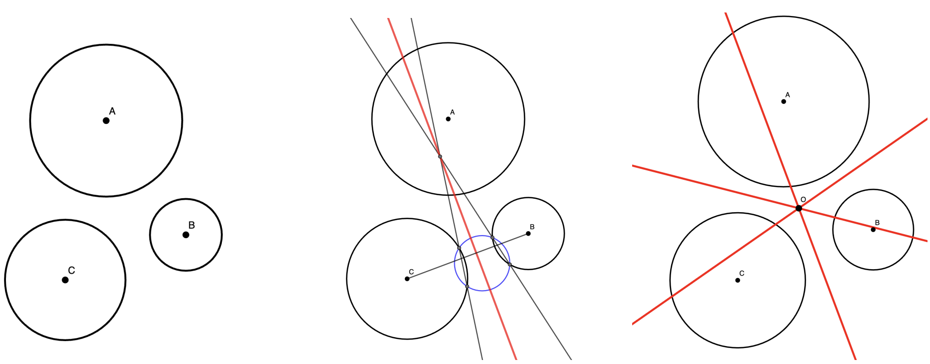
1. Finnum skurðpunkt veldisásana með aðferð Monge.

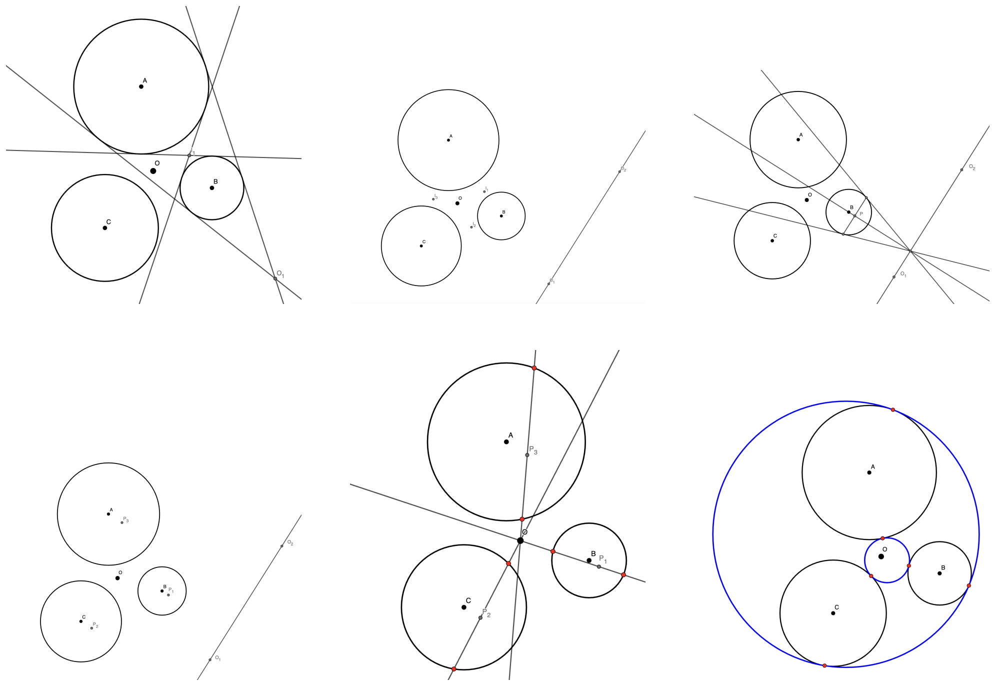
2. Finnum einslögunarmiðjurnar.

3. Veljum eina af línum d'Alambert og finnum pólpunkta hennar. Höfum fjórar línur til að velja um og sérhver línana ákvarða tvo hringi.

4. Teiknum línurnar sem fara um skurðpunkt veldisásana og pólpunktana.

5. Skurðpunktar þessara lína við hringina ákvarða hringina sem snerta hina þrjá gefnu hringi.





2 Setning Descartes

Í þessum kafla munum við skoða Setningu Descartes, sem lýsir sambandi milli geisla fjögurra snertandi hringa. Fylgt verður grein eftir Paul Levrie, *A Straightforward Proof of Descartes's Circle Theorem*[4].

2.1 Sögulegur bakgrunnur

René Descartes (31. mars 1596 - 11. febrúar 1650) var franskur heimspekingur og stærðfræðingur. René lagði mikið af mörkum í garð heimspekinnar og stærðfræðarinnar en hann er gjarnan sagður faðir nútíma heimspeki. Margir kannast eflaust við frasann „cogito, ergo sum“ eða „ég hugsa þess vegna er ég“ en það var einmitt Descartes sem sagði þetta til að svara spurningunni hvort allt sem við upplifum sé í raun draumur.

Árið 1643 skrifaði Descarte tvö bréf til Elísabetu prinsessu af Bæheimi vinkonu hans. Í bréfunum skrifaði hann um sértilvik af verkefni Appolonius, þegar allir hringirnir snertast. Í lausn hans á þessu verkefni fann hann formúlu fyrir hringina tvo sem snerta hinu þrjá gefina snertandi hringa.

2.2 Setning Descarte

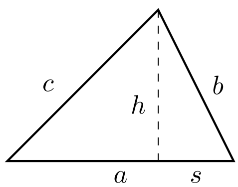
Sönnun Descarte og Elísabetar á setningunni er óþekkt en margir stærðfræðingar hafa reynt við verkefnið og komið með ýmsar sniðugar sannanir á henni. Má þar nefna Jakob Steiner sem uppgötvaði setninguna aftur árið 1826, Philip Beercroft 1842 og Fredrick Soddy árið 1936, en Soddy skrifaði sönnunina sína sem ljóð, *The Kiss Precise* [5] en hann hafði áður fengið nóbelsverðlaunin í efnafræði. Hringirnir tveir sem snerta þrjá snertandi hringi eru oft kallaðir Soddy hringir. Engin af fyrr nefndum sönnunum er auðveld en okkar sönnun byggir á setningu Heron. Rifjum hana upp.

Hjálparsetning 2.1 (Setning Heron)**.** Flatarmál þríhyrnings með hliðar a, b, c er

$$F_{\triangle} = \sqrt{o(o-a)(o-b)(o-c)} \tag{5}$$

þar sem $o = \frac{a+b+c}{2}$ og $F_{\triangle}$ er flatarmál þríhyrningsins $\triangle abc$.

Sönnun. Látum a, b, c vera eins og á mynd.



Þá er

$$h^2 + s^2 = b^2 \qquad \text{og} \qquad h^2 + (a-s)^2 = c^2$$

Eins fæst

$$h^2 = c^2 - (a-s)^2$$

Drögum nú þessar jöfnur frá hvor annari og fáum

$$c^2 - a^2 + 2as - s^2 = b^2 - s^2 \Rightarrow a^2 - c^2 + b^2 - 2as = 0 \Rightarrow s = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

Því er

$$h^2 = b^2 - s^2 = b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)^2$$

Látum F vera flatarmál þríhyrningsins en þá fæst

$$
\begin{aligned}
F_\triangle^2 = \left(\frac{1}{2}ah\right)^2 &= \frac{1}{4}a^2\left(b^2 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{4}a^2b^2 - \frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)^2 \\
&= \frac{1}{16}(4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2) \\
&= \frac{1}{16}(4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2) \\
&= \frac{1}{16}(2ab + (a^2+b^2-c^2))(2ab - (a^2+b^2-c^2)) \\
&= \frac{1}{16}((a+b)^2 - c^2)(-(a-b)^2 - c^2) \\
&= \frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b) \\
&= o(o-c)(o-b)(o-a)
\end{aligned}
$$

þar sem við settum $o = \frac{a+b+c}{2}$. En þá fæst einmitt

$$
F_\triangle = \sqrt{o(o-a)(o-b)(o-c)}.
$$

□

Setning 2.2 (Setning Descartes)**.** Fyrir fjóra snertandi hringi með geisla r_1, r_2, r_3, r_4. Þá gildir eftirfarandi jafna:

$$
2\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r_4^2}\right) = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}\right)^2. \tag{6}
$$

Sönnun. Látum þrjá snertandi hringi vera gefna með geisla r_1, r_2, r_3. Með að beita aðferð Gergonne er hægt að finna hina tvo snertandi hringi, annar sem snerir hringina að utan og hinn að innan. látum r_4 vera geisla innsta-hringsins. Þá með að beita setningu Herons þá fáum við jöfnu fyrir flatarmál þríhyrningsinsins $\triangle ABC$.

$$
\begin{aligned}
F_{\triangle ABC} &= \sqrt{o(o-(r_1+r_2))(o-(r_1+r_3))(o-(r_2+r_3))} \\
&= \sqrt{(r_1+r_2+r_3)(r_3r_2r_1)} \\
&= \sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}
\end{aligned}
$$

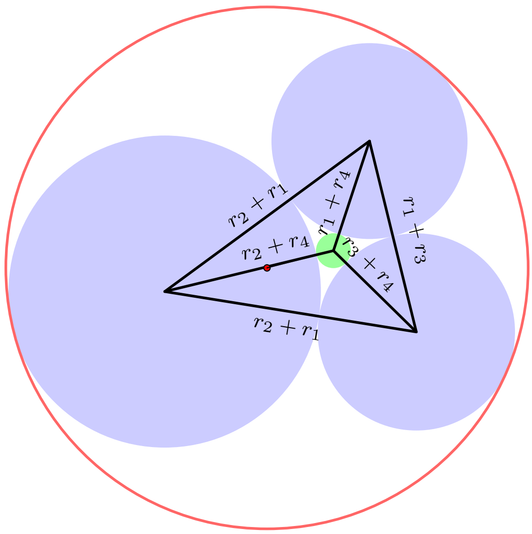
En eins fæst að

$$
F_{\triangle ABC} = \sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_4)} + \sqrt{r_1r_3r_4(r_1+r_3+r_4)} + \sqrt{r_2r_3r_4(r_2+r_3+r_4)}
$$

Þar með höfum við eftirfarandi jöfnu

$$\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)} = \sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_4)} + \sqrt{r_1r_3r_4(r_1+r_3+r_4)} + \sqrt{r_2r_3r_4(r_2+r_3+r_4)} \quad (7)$$

Ef við gerum ráð fyrir að ytri hringurinn hafi neikvæðan geisla þá er þessi jafna einnig uppfyllt.



Nú væri hægt að hugsa sér að leysa þessa jöfnu með að hefja í annað veldi nokkrum sinnum, þó svo að það sé hægt verður það að verulega miklum útreikningum, sem erfitt er að halda utan um. Hinsvegar með því að taka eftir ýmsum sniðugum einföldunum verður þetta verkefni mun viðráðanlegra. Við byrjum á að skilgreina nokkrar stærðir. Látum $s = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$, $p = r_1r_2r_3r_4$, $t = \frac{p}{s}$, $u = \frac{1}{s}$, $\alpha = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}$ og loks $\beta = \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r_4^2}$. Þá getum við hafist handa og endurskrifað jönu (7) sem

$$\sqrt{r_1r_2r_3s - p} = \sqrt{r_1r_2r_4s - p} + \sqrt{r_1r_3r_4s - p} + \sqrt{r_3r_4r_5s - p}$$

deilum í gegn með $\sqrt{s}$ en þá fæst

$$\sqrt{r_1r_2r_3 - t} = \sqrt{r_1r_2r_4 - t} + \sqrt{r_1r_3r_4 - t} + \sqrt{r_2r_3r_4 - t}$$

Hefjum í annað veldi:

$$r_1r_2r_3 - t + r_1r_2r_4 - t = r_1r_3r_4 - t + r_2r_3r_4 - t + 2(\sqrt{r_1r_2r_3 - t}\sqrt{r_1r_2r_4 - t} + \sqrt{r_1r_3r_4 - t}\sqrt{r_2r_3r_4 - t})$$

Tökum saman og fáum

$$\begin{aligned}r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 - r_1r_3r_4 - r_2r_3r_4 =& 2(\sqrt{r_1r_2r_3 - t}\sqrt{r_1r_2r_4 - t} \\ &+ \sqrt{r_1r_3r_4 - t}\sqrt{r_2r_3r_4 - t})\end{aligned}$$

Deilum með $p = r_1r_2r_3r_4$.

$$\frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} = \left(\sqrt{\frac{1}{r_4} - u}\sqrt{\frac{1}{r_3} - u} + \sqrt{\frac{1}{r_2} - u}\sqrt{\frac{1}{r_1} - u}\right)$$

þar sem $u = \frac{1}{s}$. Hefjum aftur í annað veldi en þá verður vinstri hliðin

$$\beta + \frac{2}{r_3r_4} - \frac{2}{r_2r_4} - \frac{2}{r_1r_4} - \frac{2}{r_2r_3} - \frac{2}{r_1r_3} + \frac{2}{r_1r_2}$$

munum að $\beta = \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r_4^2}$. Hægri hliðin verður

$$\begin{aligned}&4\left(\left(\frac{1}{r_4} - u\right)\left(\frac{1}{r_3} - u\right) + \left(\frac{1}{r_2} - u\right)\left(\frac{1}{r_1} - u\right)\right) + 8B \\ &= \frac{4}{r_4r_3} + \frac{4}{r_2r_1} - 4\left(\frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}\right)u + 8u^2 + 8B \\ &= \frac{4}{r_4r_3} + \frac{4}{r_2r_1} - 4\alpha u + 8u^2 + 8B\end{aligned}$$

Þar sem $B = \sqrt{\frac{1}{r_4} - u}\sqrt{\frac{1}{r_3} - u}\sqrt{\frac{1}{r_2} - u}\sqrt{\frac{1}{r_1} - u}$. Setjum nú vinstri og hægri hliðarnar saman og þá fáum við

$$\beta - \frac{2}{r_3r_4} - \frac{2}{r_2r_4} - \frac{2}{r_1r_4} - \frac{2}{r_2r_3} - \frac{2}{r_1r_3} - \frac{2}{r_1r_2} + 4\alpha u - 8u^2 = 8B$$

Athugum nú að

$$\beta - \alpha^2 = -\frac{2}{r_3r_4} - \frac{2}{r_2r_4} - \frac{2}{r_1r_4} - \frac{2}{r_2r_3} - \frac{2}{r_1r_3} - \frac{2}{r_1r_2}$$

Svo að

$$(2\beta - \alpha^2) + 4\alpha u - 8u^2 = 8B \tag{8}$$

En og aftur hefjum við í annað veldi

$$(2\beta - \alpha^2)^2 + 8(2\beta - \alpha^2)\alpha u - 16(2\beta - \alpha^2)u^2 + 16\alpha^2u^2 - 64\alpha u^3 + 64u^4 = 64B^2$$

Þar sem

$$
\begin{aligned}
64B^2 &= 64\left(\frac{1}{r_4}-u\right)\left(\frac{1}{r_3}-u\right)\left(\frac{1}{r_2}-u\right)\left(\frac{1}{r_1}-u\right) \\
&= \frac{64}{r_4r_3r_2r_1} - 64\left(\frac{1}{r_1r_2r_3}+\frac{1}{r_1r_2r_4}+\frac{1}{r_1r_3r_4}+\frac{1}{r_2r_3r_4}\right)u \\
&+ 64\left(\frac{1}{r_1r_2}+\frac{1}{r_1r_3}+\frac{1}{r_1r_4}+\frac{1}{r_2r_3}+\frac{1}{r_2r_4}+\frac{1}{r_3r_4}\right)u^2 - 64\alpha u^3 + 64u^4
\end{aligned}
$$

Athugum að

$$
\begin{aligned}
64\left(\frac{1}{r_1r_2r_3}+\frac{1}{r_1r_2r_4}+\frac{1}{r_1r_3r_4}+\frac{1}{r_2r_3r_4}\right)u &= 64\left(\frac{r_4+r_3+r_2+r_1}{r_1r_2r_3r_4}\right)\frac{1}{s} \\
&= \frac{64}{r_1r_2r_3r_4}
\end{aligned}
$$

Þar með er

$$
\begin{aligned}
64B^2 &= 32(\alpha^2-\beta)u^2 - 64\alpha u^3 + 64u^4 \\
&= -16(2\beta-\alpha^2) - 16\alpha^2u^2 - 64\alpha u^3 + 64u^4
\end{aligned}
$$

Sjáum þá að liðir u^2, u^3 og u^4 detta út og þá verður jafnan loks

$$
(2\beta-\alpha^2)^2 + 8(2\beta-\alpha^2)\alpha u = 0
$$

þ.e

$$
(2\beta-\alpha^2)(2\beta-\alpha^2+8\alpha u) = 0
$$

Athugum nú að ef $2\beta-\alpha^2+8\alpha u = 0$ væri $2\beta-\alpha^2 = -8\alpha u$ og þar með myndi vinstri hlið jöfnu (8) verra neikvæð. Því er

$$
2\beta-\alpha^2 = 0 \Rightarrow 2\beta = \alpha^2 \Rightarrow 2\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r_4^2}\right) = \left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)^2
$$

Glöggir taka eftir því að gefið r_1, r_2, r_3, er þetta 2. stigs jafna í r_4 og lausnir hennar eru geislar innri og ytri Soddy hringanna. □

3 Hagnýtinging á verkefni Appolonius

Þó svo að eflaust sé erfitt að hagnýta verkefni Apollonius beint þá er það hægt að einhverju leiti. Dæmi um hagnýtingu má finna í nýlegri rannsókn eftir

Berger o.fl. (2017) þar sem verkefni Apollonius er notað sem hluti af lausn á bestunar verkefni. Verkefnið snýst um að besta staðsetningu og verðlagningu fyrirtækis þannig að sem flestir viðskiptavinir séu tilbúnir til að kaupa vöruna. Hvort viðskiptavinur sé tilbúinn til að kaupa vöruna fer eftir heildarkostnaði ferðar og vöru. Fyrir sérhvern viðskiptavin þá má líta á mesta mögulega heildarkostnað hans sem geisla hrings. Ef við höfum aðeins þrjá viðskiptavini þá er besta staðsetning fyrirtækisins ein af lausnum Apollonius [2].

Heimildir

[1] 3Blue1Brown, *Five Puzzles for Thinking Outside the Box.* `https://www.youtube.com/watch?v=piJkuavhV50&t=823s`, 2024. YouTube video, published Nov, 2024.

[2] A. Berger, A. Grigoriev, A. Panin, and A. Winokurow, *Location, pricing and the problem of apollonius*, Optimization Letters, 11 (2017), pp. 1797–1805. Presented in part at DOOR 2016.

[3] H. Dörrie, *100 Great Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solution*, Dover Publications, New York, 1965.

[4] P. Levrie, *A straightforward proof of descartes's circle theorem*, The Mathematical Intelligencer, 41 (2019), pp. 24–27.

[5] F. Soddy, *The kiss precise*, Nature, 137 (1936), p. 1021.