Sorteernetwerken van Optimale Grootte

Mathias Dekempeneer, Vincent Derkinderen
Bachelor Informatica
Katholieke Universiteit Leuven
voornaam.achternaam@student.kuleuven.be

Abstract

Korte samenvatting van wat we doen en wat de conclusie is.
Verder werken op paper van Codish et al. Sorteer optimal size sorting network.
Tijdsverbetering van x? Bla
Bla
Bla
Bla
Bla
Bla
Bla
Bla
Bla
Bla
Bla

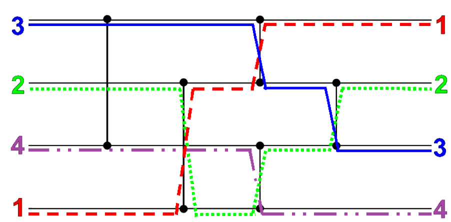
1 Introductie

Situering + bijdrage.
Sorting Network (high level), Optimal Size (high level), contributies andere papers rond deze twee, enkele getallen rond grootte orde van het probleem, wat er al geprobeerd is (SAT, generate & prune,...), hoe wij het probleem zullen aanpakken (hoe wij prunen (high level)), gebruikte hardware...
Bla
Bla
Bla
Bla
Bla
Bla
Bla
Bla
Bla
Bla
Bla
Bla
Bla
Bla
Bla
Bla

2 Probleemstelling

Een *comparator netwerk* C_k^n bestaat uit n kanalen en k *comparatoren*. Een comparator (i, j) verbindt twee verschillende kanalen i en j waarbij $0 < i < j \leq n$. We nemen x_l^m als waarde op kanaal m net voor comparator l. De l^{de} comparator vergelijkt de huidige waarden van beide kanalen en plaatst de kleinste waarde op kanaal i en de grootste waarde op kanaal j zodat $x_{l+1}^i = \min(x_l^i, x_l^j)$ en $x_{l+1}^j = \max(x_l^i, x_l^j)$. De uitvoer van een comparator netwerk verwijst naar de partieel geordende vector $\vec{x} = \{x_{k+1}^1 \ldots x_{k+1}^n\}$.

Een *sorteernetwerk* is een comparator netwerk met als eigenschap dat de uitvoer gesorteerd is ongeacht de invoer. Een sorteernetwerk C_k^n van optimale grootte houdt in dat er geen ander sorteernetwerk C_l^n bestaat waarbij $l < k$. Figuur 1 is een voorbeeld van zo een netwerk waarop ook de werking gedemonstreerd wordt. Om te onderzoeken of een comparator



Figuur 1: Sorteernetwerk 4 kanalen, 5 comparatoren

netwerk een sorteernetwerk is, kunnen we gebruik maken van het *nul - één principe*. Dit principe, zoals beschreven volgens Knuth [Knuth, 1973], stelt dat wanneer een comparator netwerk met n kanalen alle 2^n mogelijke sequenties van n 0- en 1-en sorteert, het een sorteernetwerk is. De optimale grootte van een sorteernetwerk met n kanalen is reeds bewezen tot en met $n \leq 10$ (Tabel 1 [Codish *et al.*, 2014]). Voor $n > 10$

n	6	7	8	9	10	11	12
bovengrens	12	16	19	25	29	35	39
ondergrens	12	16	19	25	29	33	37

Tabel 1: Minimaal aantal comparatoren bij $6 \leq n \leq 12$ kanalen.

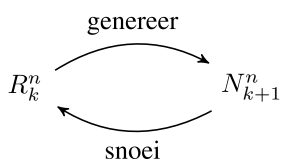
zijn er bovengrenzen gekend door zowel concrete voorbeelden als de systematische constructie van Batcher [Batcher, 1968]. De ondergrenzen werden gevonden via bewijzen en lemma 1 [Voorhis, 1972].

Lemma 1. $S(n+1) \geq S(n) + \lceil \log_2(n) \rceil, \forall n \geq 1$

3 Voorgestelde oplossing

Om te bewijzen dat een sorteernetwerk C_k^n een sorteernetwerk is van optimale grootte, moeten we bewijzen dat er geen sorteernetwerk C_{k-1}^n bestaat. n kanalen zorgen voor $\frac{n(n-1)}{2}$ verschillende comparatoren. Wanneer een netwerk k comparatoren bevat, kunnen er $\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^k$ verschillende netwerken gevormd worden. Voor 9 kanalen en 24 comparatoren betekent dit 2.245×10^{37} verschillende netwerken, dit maakt het overlopen van alle netwerken niet aantrekkelijk. Door gebruik te maken van symmetrieën willen we snoeien in het aanmaken van deze netwerken.

We gebruiken de *genereer- en snoei-methode* zoals beschreven door Codish *et al.* (sectie 3, [Codish *et al.*, 2014]). Deze methode heeft een cyclisch verloop waarbij men bij elke cyclus de set R_k^n uitbreidt naar N_{k+1}^n om vervolgens te snoeien en de set R_{k+1}^n te bekomen (Figuur 2). Specifiek



Figuur 2: Genereer en snoei principe

zullen we vertrekken van een netwerk zonder comparatoren om te eindigen bij R_k^n bestaande uit één sorteernetwerk van optimale grootte. Bij de genereer-stap zullen we aan elk netwerk van R_k^n alle mogelijke comparatoren toevoegen zodat $|N_{k+1}^n| = |R_k^n| \times \frac{n(n-1)}{2}$. Bij de snoei-stap zullen we dan netwerken verwijderen volgens het subsumes principe beschreven in definitie 1. Concreet kunnen we de definitie van subsumes en lemma 2 beschreven door Codish *et al.* [Codish *et al.*, 2014] gebruiken om in te zien dat we netwerken die gesubsumed worden door andere netwerken kunnen verwijderen.

Definitie 1 (Subsumes)**.** *We zeggen "Comparator netwerk $C_{k,a}^n$ subsumes comparator netwerk $C_{k,b}^n$" wanneer een permutatie π bestaat zodat $\pi\,(outputs\,(C_a)) \subseteq outputs\,(C_b)$. Dit wordt genoteerd als $C_a \preceq C_b$ om aan te duiden dat er een permutatie π bestaat zodat $C_a \leq_\pi C_b$.*

Lemma 2.

Op deze manier zien we dat in de snoei-stap voor elke equivalentie klasse van minimale netwerken slechts één representatief netwerk wordt bijgehouden.

Ontwerp, wat (algoritme)
Generate & prune (en hoe we dit doen) + de getallen hier rond (zoals aantal comparatoren). Het prune idee uitleggen. Benadruk de slechte grootte orde en de nood aan snellere beslissingen om de uitkomst van de prune check op voorhand te weten.

3.1 Representatie van sorteernetwerken

Bijgehouden informatie van netwerken

3.2 Genereren

Uitleg hoe we de generate doen.
Redundant (of de comparator die je toevoegt, wel iets verandert? Uitleggen wat wij specifiek doen), unique_if uitleggen

3.3 Snoeien

Uitleg hoe we de prune doen.
Checken van alle netwerken met alle netwerken voor de prune stap.

- Aantal 1en bij $C_a > C_b \Rightarrow C_a$ subsumes niet C_b
- $|W(C_a, x, k)| > |W(C_b, x, k)| \Rightarrow C_a$ subsumes niet C_b
- Uitleggen reductie van permutaties

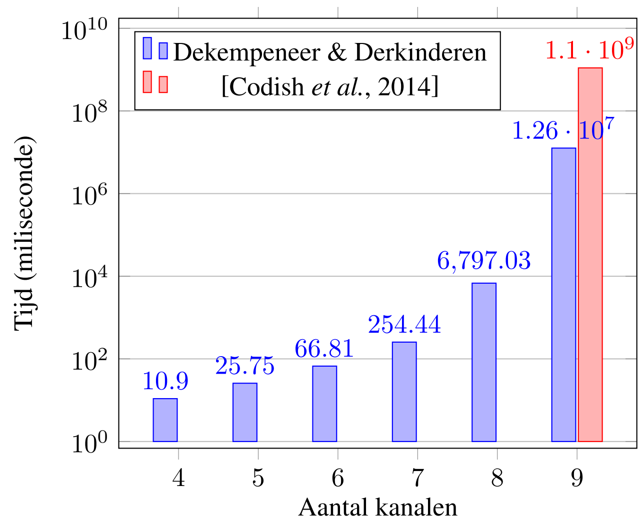
3.4 Parallellisatie

Parallellisatie uitleggen
Uitleg hoe generate and prune verandert door elke thread zijn stuk te laten generate en prunen en vervolgens in een groter geheel te prunen en hoe dit groter geheel prunen werkt zonder locks.

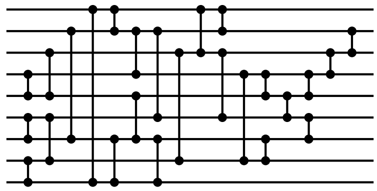
4 Evaluatie

Empirische evaluaties + grafiekjes
Tabel geven van hoeveel beslissingen er op welke plaats genomen worden.

Vergelijken runtime voor 9 kanalen met Codish.
Schatting runtime voor 10 kanalen.



Figuur 3: Resultaten



Figuur 4: Sorteernetwerk 9 kanalen, 25 comparatoren

5 Conclusies

Conclusie[Codish *et al.*, 2014]
Conclusie van wat er bereikt is en hoe er verder aan gewerkt kan worden.[Codish *et al.*, 2015]

Erkenning

De rekeninfrastructuur en dienstverlening gebruikt in dit werk, werd voorzien door het VSC (Vlaams Supercomputer Centrum), gefinancierd door het FWO en de Vlaamse regering - departement EWI.
Professor Dr. Ir. Tom Schrijvers, Katholieke Universiteit Leuven.

Referenties

[Batcher, 1968] K. E. Batcher. Sorting networks and their applications. In *Proceedings of the April 30–May 2, 1968, Spring Joint Computer Conference*, AFIPS '68 (Spring), pages 307–314, New York, NY, USA, 1968. ACM.

[Codish *et al.*, 2014] Michael Codish, Luis Cruz-Filipe, Michael Frank, and Peter Schneider-Kamp. Twenty-five comparators is optimal when sorting nine inputs (and twenty-nine for ten). Technical report, IEEE International Conference on Tools with Artificial Intelligence (ICTAI), November 2014.

[Codish *et al.*, 2015] Michael Codish, Luis Cruz-Filipe, and Peter Schneider-Kamp. Sorting networks: the end game. In *Proceedings of the 9th International Conference on Language and Automata Theory and Applications, LATA*, LNCS, 2015.

[Knuth, 1973] D. E. Knuth. *The art of computer programming. Vol.3: Sorting and searching*. 1973.

[Voorhis, 1972] David C. Voorhis. *Complexity of Computer Computations: Proceedings of a symposium on the Complexity of Computer Computations, held March 20–22, 1972, at the IBM Thomas J. Watson Research Center, Yorktown Heights, New York, and sponsored by the Office of Naval Research, Mathematics Program, IBM World Trade Corporation, and the IBM Research Mathematical Sciences Department*, chapter Toward a Lower Bound for Sorting Networks, pages 119–129. Springer US, Boston, MA, 1972.