

Optimalisatie van het Bewijs ‘Sorteernetwerken van Optimale Grootte bij 9 Kanalen’

Mathias Dekempeneer

Bachelor Informatica

Katholieke Universiteit Leuven

mathias.dekempeneer@student.kuleuven.be

Vincent Derkinderen

Bachelor Informatica

Katholieke Universiteit Leuven

vincent.derkinderen@student.kuleuven.be

Abstract

Een *sorteernetwerk* is een netwerk bestaande uit *compare-and-swap* elementen. Deze netwerken kunnen gebruikt worden om data met een vaste invoergrootte te sorteren. Om een zo efficiënt (en goedkoop) mogelijk netwerk te bekomen wordt er gezocht naar een netwerk met zo weinig mogelijk elementen. Het minimaal aantal elementen is reeds bewezen voor invoerdata tot en met grootte 9 en 10. Het algoritme voor het bewijs van invoergrootte 9 [Codish *et al.*, 2014] gebruikt een genereer- en snoei-methode dewelke deze paper zal reproduceren en optimaliseren. Voor een bewijs van invoer grootte 9 wordt de uitvoeringstijd gereduceerd van 305 uur naar 3 uur en 26 minuten en wordt zo een stap dichter gezet naar een uitvoering voor 10 en 11 kanalen.

1 Introductie

Comparatornetwerken bestaan uit zowel kanalen als comparatoren. De kanalen dienen voor invoer van data en de comparatoren, dewelke elk twee kanalen verbinden, zorgen voor de operaties op deze data. De operatie van een comparator bestaat eruit om de data verkregen van de twee verbonden kanalen te vergelijken en gesorteerd terug te plaatsen op deze twee kanalen. Dit zorgt ervoor dat een datasequentie ingevoerd bij een comparatornetwerk er partieel gesorteerd zal uitkomen. Sorteernetwerken zijn comparatornetwerken waarvoor geldt dat bij elke mogelijke invoer de uitvoer een volledig gesorteerde sequentie is. Wanneer twee of meer opeenvolgende comparatoren geen gemeenschappelijk kanaal hebben, worden deze aanschouwd als een parallelle laag. De gebruikte terminologie wordt uitvoerig besproken in Sectie 3.

Voor sorteernetwerken is er zowel onderzoek naar optimale diepte als optimale grootte. Een sorteernetwerk van optimale diepte houdt in dat er geen sorteernetwerk bestaat met even veel kanalen maar met minder (parallelle) lagen. Dit betekent dat, mits elke comparator in een parallelle laag parallel uitgevoerd wordt, men het snelst mogelijke netwerk bekomt. Een sorteernetwerk van optimale grootte daarentegen houdt in dat er geen sorteernetwerk bestaat met even veel kanalen maar met minder comparatoren. Hierdoor bekomt men zowel het goedkoopste netwerk alsook, wanneer de comparato-

ren niet parallel uitgevoerd worden, het snelste netwerk. Het onderzoek in deze paper spitst zich toe op het bewijzen van optimale grootte.

In 1966 bewees het werk van Floyd en Knuth de optimale groottes voor $1 \leq n \leq 8$ [Floyd and Knuth, 1973]. Voor optimale diepte vond Parberry een bewijs voor $n = 9$ en $n = 10$ waarna in 2014 Bundala en Závodný er vonden voor $11 \leq n \leq 16$ [Parberry, 1989; Bundala and Závodný, 2013]. Het volgende kleinste open probleem bij optimale diepte was dan het bewijs voor 17 kanalen, bewezen door de onderzoeksgroep van onder meer Codish [Codish *et al.*, 2015]. Voor optimale grootte is het meest recent opgeloste open probleem het bewijs voor 9 en 10 kanalen [Codish *et al.*, 2014]. Bij dit bewijs, voor 9 kanalen, maakten ze gebruik van zowel een genereer- en snoei-aanpak als een SAT-aanpak. De bewezen grootte voor 9 kanalen droeg dan direct bij aan een bewijs voor 10 kanalen. Het bewijs voor 9 kanalen is bekomen door een parallelle uitvoer op 144 Intel E8400 cores (3.0GHz) met elk 2 threads. Enkel gebruik makend van de genereer- en snoei-aanpak eindigde dit bewijs in 305 uur, voor de bijkomstige SAT-aanpak duurde het slechts 197 uur. Dit onderzoek bouwt verder op hun voorgaand werk en tracht dichter bij een bewijs voor 11 kanalen te komen. Enkel gebruik makend van de genereer- en snoei-aanpak zal door onze implementatie voor 9 kanalen de optimale grootte bewezen worden in 3 uur en 26 minuten op één node bestaande uit twee 12-core “Haswell” Xeon E5-2680v3 processoren (2.5GHz, 30MB level 3 cache met 64GB RAM) op de rekeninfrastructuur van het Vlaamse Supercomputer Centrum.

De voorgestelde oplossing wordt besproken in Sectie 4 en geëvalueerd in Sectie 5. De bijdrage van deze paper is, met betrekking tot het algoritme dat enkel gebruik maakt van een genereer- en snoei-aanpak, een reductie van de uitvoeringstijd van 305 uur naar 3 uur en 26 minuten.

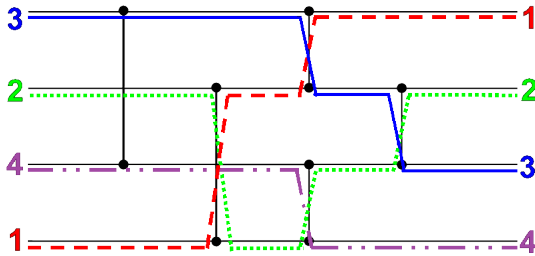
2 Probleemstelling

Het bewijs van Codish *et al.* [Codish *et al.*, 2014] omtrent de optimale grootte van een sorteernetwerk van invoergrootte 9 maakt zowel gebruik van een genereer- en snoei-aanpak als een SAT-aanpak. Het algoritme met de SAT-aanpak maakt ook deels gebruik van de genereer- en snoei-aanpak. Met als doel een bewijs te vinden voor invoergrootte 11 is de beslissing gemaakt om deze genereer- en snoei-aanpak te optimaliseren. We zullen ons enkel hierop toespitsen.

3 Terminologie

Een *comparatornetwerk* C_k^n bestaat uit n kanalen en k *comparatoren*. Een comparator (i, j) verbindt twee verschillende kanalen i en j waarbij $0 < i < j \leq n$. We nemen x_l^m als waarde op kanaal m net voor comparator l . Deze waarde is een element uit een totaal geordende set en is deel van de oorspronkelijke invoer. De l^{de} comparator vergelijkt de huidige waarden van beide kanalen en plaatst de kleinste waarde op kanaal i en de grootste waarde op kanaal j zodat $x_{l+1}^i = \min(x_l^i, x_l^j)$ en $x_{l+1}^j = \max(x_l^i, x_l^j)$. De uitvoer van een comparatornetwerk is de partieel geordende vector $\vec{x} = \{x_{k+1}^1 \dots x_{k+1}^n\}$. De invoer wordt voorgesteld door $\vec{x} = \{x_1^1 \dots x_1^n\}$.

Een *sorteernetwerk* is een comparatornetwerk met als eigenschap dat de uitvoer gesorteerd is voor elke invoer. De grootte van een comparatornetwerk verwijst naar het aantal comparatoren. Een sorteernetwerk C_k^n van optimale grootte houdt dan in dat er geen ander sorteernetwerk C_l^n bestaat waarbij $l < k$. Figuur 1 is een voorbeeld van een sorteernetwerk waarop ook de werking gedemonstreerd wordt. Deze figuur toont ook twee parallele lagen, bestaande uit enerzijds de eerste en de tweede comparator en anderzijds uit de derde en de vierde. Deze zijn respectievelijk $(1, 3)$, $(2, 4)$ en $(1, 2)$, $(3, 4)$. De parallele lagen bestaan uit comparatoren die geen kanaal gemeenschappelijk hebben en waarbij de volgorde van uitvoer omgewisseld kan worden.



Figuur 1: Voorbeeld van een sorteernetwerk bestaande uit 4 kanalen (horizontale lijnen) en 5 comparatoren (verticale lijnen). De verschillende lijnen stellen de data voor die doorheen het netwerk propageert.

Om te onderzoeken of een comparatornetwerk een sorteernetwerk is, kunnen we gebruik maken van het *nul - één principe*. Dit principe, zoals beschreven volgens Knuth [Knuth, 1973], stelt dat om na te gaan of een comparatornetwerk met n kanalen een sorteernetwerk is, er enkel nagegaan moet worden of alle 2^n mogelijke sequenties van n nullen en enen gesorteerd worden. De optimale grootte van een sorteernetwerk met n kanalen is reeds bewezen tot en met $n \leq 10$ (Tabel 1 [Codish et al., 2014]).

n	6	7	8	9	10	11	12
bovengrens	12	16	19	25	29	35	39
ondergrens	12	16	19	25	29	33	37

Tabel 1: Minimaal aantal comparatoren bij $6 \leq n \leq 12$ kanalen.

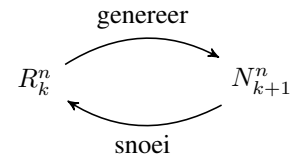
Voor $n > 10$ zijn er bovengrenzen gekend door zowel concrete voorbeelden als de systematische constructie van Batchier [Batcher, 1968]. De ondergrenzen werden gevonden door zowel bewijzen als Lemma 1 [Voorhis, 1972]. Zo hebben bijvoorbeeld Codish et al. de optimale grootte voor 10 kanalen bewezen via de optimale grootte voor 9 kanalen en Lemma 1.

Lemma 1. $S(n+1) \geq S(n) + \lceil \log_2(n) \rceil, \forall n \geq 1$ waarbij geldt dat $S(n)$ gelijk is aan het aantal comparatoren in een sorteernetwerk van optimale grootte met n kanalen.

4 Voorgestelde oplossing

Om te bewijzen dat een sorteernetwerk C_k^n een sorteernetwerk is van optimale grootte, moeten we bewijzen dat er geen sorteernetwerk C_{k-1}^n bestaat. Aangezien n kanalen zorgen voor $\frac{n(n-1)}{2}$ verschillende comparatoren kunnen er $\binom{n(n-1)/2}{k}$ verschillende netwerken gevormd worden met k comparatoren. Voor 9 kanalen en 24 comparatoren betekent dit 2.245×10^{37} verschillende netwerken. Deze grote hoeveelheid maakt het overlopen van alle netwerken niet aantrekkelijk. Om dit aantal te reduceren zullen we gebruik maken van symmetrieën waardoor we bepaalde netwerken reeds kunnen verwijderen bij het aanmaken.

We gebruiken de *genereer- en snoei-methode* zoals beschreven door Codish et al. (Sectie 3, [Codish et al., 2014]). Deze methode heeft een cyclisch verloop waarbij men bij elke cyclus de set R_k^n uitbreidt naar N_{k+1}^n om vervolgens te snoeien en de set R_{k+1}^n te bekomen (Figuur 2). Specifiek



Figuur 2: Genereer- en snoei-principe

zullen we vertrekken van een netwerk zonder comparatoren om te eindigen bij R_k^n bestaande uit één sorteernetwerk van optimale grootte. Bij de genereer-stap zullen we aan elk netwerk van R_k^n alle mogelijke comparatoren toevoegen zodat $|N_{k+1}^n| = |R_k^n| \times \frac{n(n-1)}{2}$. Bij de snoei-stap zullen we dan netwerken verwijderen volgens het subsumes principe beschreven in Definitie 1. Deze definitie toont dat voor elk netwerk het algoritme een uitvoerverzameling, *outputs*, moet bijhouden.

Definitie 1 (Subsumes). We zeggen “Comparatornetwerk $C_{k,a}^{n-1}$ subsumes comparatornetwerk $C_{k,b}^n$ ” wanneer een permutatie π bestaat zodat $\pi(\text{outputs}(C_a)) \subseteq \text{outputs}(C_b)$. Dit wordt genoteerd als $C_a \preceq C_b$ om aan te duiden dat er een permutatie π bestaat zodat $C_a \leq \pi C_b$.

¹ $C_{k,a}^n$ wordt doorheen de tekst afgekort door C_a .

Lemma 2. Wanneer voor comparatornetwerk $C_{k,a}^n$, $C_{k,b}^n$, C en C' geldt dat $C_a \preceq C_b$ en er bestaat een sorteernetwerk gevormd door de concatenatie van C_b en C van grootte m dan bestaat er ook een sorteernetwerk gevormd door de concatenatie van C_a en C' van grootte m .

Concreet kunnen we de definitie van subsumes en Lemma 2 gebruiken om in te zien dat we netwerken die gesubsumed worden door andere netwerken kunnen verwijderen [Codish *et al.*, 2014]. Wanneer een set van netwerken een sorteernetwerk bevat, zal het snoeien van deze set enkel het sorteernetwerk overhouden. Dit gegeven kan gebruikt worden om de eindigheid van het algoritme in te zien.

Om na te gaan dat er een permutatie π bestaat zodat $\pi(\text{outputs}(C_a)) \subseteq \text{outputs}(C_b)$, en dus $C_a \preceq C_b$, zouden we alle permutaties kunnen overlopen. Om deze kostelijke bewerkingen te vermijden en te versnellen, zullen we extra methoden moeten invoeren om sneller beslissingen te maken over het “subsumen van een ander netwerk”. Deze beslissingen kunnen zowel tijdens de genereer-stap als de snoei-stap plaats vinden.

In de volgende subsecties zal de voorgestelde oplossing specifiek beschreven worden. In Sectie 4.1 wordt beschreven hoe de informatie van een comparatornetwerk efficiënt kan worden opgeslagen. Vervolgens zullen in Sectie 4.2 en 4.3 zowel de opbouw van de genereer- en snoei-methode als de extra beslistmethoden toegelicht worden. Bijkomend zullen we een manier geven in Sectie 4.4 om het proces te paralleliseren zonder al te veel locks.

4.1 Representatie van comparatornetwerken

Bij de representatie van comparatornetwerken moeten we rekening houden met het geheugengebruik en de mogelijkheid om efficiënte bewerkingen uit te kunnen voeren. Concreet zullen we comparatoren voorstellen door een sequentie van bits waarbij twee bits op één staan. Bijvoorbeeld [010001] stelt de comparator (1, 5) voor bij een netwerk van 6 kanalen. Doordat kanaal 1 rechts geplaatst wordt, komt elk kanaal overeen met zijn bitshift². Om de hoeveelheid overbodige bits te beperken, zullen we bij de Java implementatie gebruik maken van shorts³. Dit is voldoende voor een bewijs tot en met 16 kanalen. Buiten de comparatoren wordt ook de mogelijke uitvoer van het netwerk bijgehouden. Aangezien het nul-één-principe stelt dat enkel sequenties van nullen en enen getest moeten worden, kunnen we de uitvoer opdelen per aantal enen. Voor een netwerk zonder comparatoren betekent dit 2^n mogelijke uitvoersequenties. Het toevoegen van een comparator kan er mogelijk voor zorgen dat een uitvoer hetzelfde wordt als een andere uitvoer. Hierdoor zal het aantal mogelijke uitvoersequenties dalen naarmate er meer en meer comparatoren worden toegevoegd. Aangezien een gesorteerde uitvoer ongewijzigd blijft, eindigen we met n unieke uitvoersequenties. Door de gekozen representatie van invoer en comparatoren kunnen we Code 1 gebruiken om de uitvoer van een comparator te bepalen gegeven een bepaalde invoer.

²Bijvoorbeeld een bitshift naar rechts, \gg , zal achteraan een aantal nullen verwijderen.

³In Java bestaat een short uit 16 bits.

Code 1: swapCompare

```
/**
 * input - De invoer voor de comparator.
 * comp - De comparator (bv. 00101)
 * return - Het resultaat bekomen door de bits
 *         van de input om te wisselen afhankelijk
 *         van de comparator.
 */
short swapCompare(short input, short comp) {
    int channel1 = 31 -
        Integer.numberOfLeadingZeros(comp);
    int channel2 =
        Integer.numberOfTrailingZeros(comp);

    int firstBit = (input >> channel1) & 1;
    int secondBit = (input >> channel2) & 1;

    return (firstBit <= secondBit) ? input :
        (input ^ comp);
}
```

In de Java implementatie kiezen we er voor om een comparatornetwerk voor te stellen door een tweedimensionale array van shorts, short[][]], en laten we de rij van n nullen en n enen weg. Een voorbeeld van zo een representatie staat in Tabel 2. Hier zien we dat comparatoren slechts twee bits hebben en dat er een opdeling (in rijen) is van de uitvoer op basis van aantal enen.

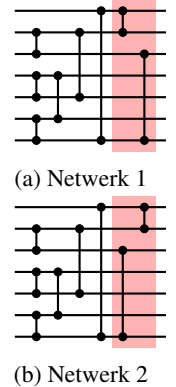
Comparators		[0011]	[1010]	
Uitvoer	één 1	[0001]	[0100]	[0010]
	twee 1'en	[0011]	[0101]	[0110]
	drie 1'en	[0111]	[1011]	

Tabel 2: Representatie C_2^4 : (1,2)(2,4)

4.2 Genereren

Bij de genereer-stap itereren we over de set R_k^n en voegen we bij elk netwerk alle mogelijke comparatoren toe. Een overbodige comparator voor een bepaald comparatornetwerk is een comparator die, wanneer toegevoegd aan het comparatornetwerk, geen wijziging veroorzaakt in de mogelijke uitvoer. Wanneer een overbodige comparator wordt toegevoegd aan een comparatornetwerk, zal deze gesubsumed worden door een uitbreiding van dat netwerk met een niet overbodige comparator. Bijgevolg kunnen we deze meteen uit de set N_{k+1}^n verwijderen. Om te beslissen of een comparator al dan niet overbodig is, moeten we voor elke mogelijke uitvoer nagaan of deze een wijziging teweegbrengt. We kunnen dit sneller laten verlopen door eerst te kijken of de comparator al dan niet identiek is met de vorige comparator in het netwerk.

Wanneer twee netwerken, op de volgorde van hun parallelle comparatoren na, gelijk zijn, zoals in Figuur 3a en 3b,



Figuur 3

zullen deze elkaar subsumen en zal één van de twee verwijderd worden. Dit kan opgevangen worden in de generatiestap om zo extra werk in de snoei-stap te vermijden. Bij het toevoegen van een nieuwe comparator (a, b) moet er dan gecontroleerd worden of deze comparator een kanaal gemeenschappelijk heeft met de vorige (Code 2).

Code 2: Test op parallelle comparatoren.

```
(a,b) & vorigeComp != 0
```

Wanneer dit niet het geval is en het dus parallelle comparatoren zijn, kunnen we bijvoorbeeld kiezen om het netwerk weg te gooien waarbij de nieuwe comparator kleiner is dan de vorige.

Tenslotte kunnen we, na het toevoegen van de comparator, de nieuwe uitvoer berekenen door de huidig bijgehouden uitvoer als invoer te gebruiken voor de nieuwe comparator. Om de efficiëntie te verhogen kunnen we bij de omzetting van de uitvoer eerder verkregen informatie gebruiken. Een comparator is namelijk niet overbodig wanneer er een uitvoer bestaat met s enen waarvoor geldt dat de comparator deze uitvoer wijzigt. Deze informatie kan gebruikt worden om bij de omzetting slechts te beginnen bij uitvoer met het aantal enen gelijk aan s . Een algemene structuur van deze code wordt geïllustreerd in Code 3.

In het ergste geval moeten er aan alle elementen in de set R_k^n alle mogelijke comparatoren worden toegevoegd. Dit betekent $\mathcal{O}\left(|R_k^n| \times \frac{n(n-1)}{2}\right)$.

Code 3: Pseudocode - optimalisatie via s

```
for(short nieuweComp : comparatoren) {
    int s = vanafAantalEnenWijzigt(netwerk,
        nieuweComp);
    if(s != -1) {
        voegToeAanNetwerk(netwerk, nieuweComp, s)
    }
}
```

4.3 Snoeien

Bij de snoei-stap lopen we over de set N_{k+1}^n en verwijderen we alle comparatornetwerken die gesubsumed worden door een ander comparatornetwerk in de resterende set. Om het aflopen van alle permutaties te vermijden, en sneller te beslissen of $C_a \preceq C_b$ met C_a en C_b twee comparatornetwerken, voeren we enkele methoden in. Zo gebruiken we onder meer Lemma 3 en Lemma 4, beschreven door Codish *et al.* [Codish *et al.*, 2014].

Aangezien een permutatie op de uitvoer geen verandering teweegbrengt op vlak van de hoeveelheid uitvoer en $\pi(\text{outputs}(C_a)) \subseteq \text{outputs}(C_b)$ kan het onmogelijk dat $|\text{outputs}(C_a)| > |\text{outputs}(C_b)|$. Dit kan worden doorgetrokken naar de uitvoerverzamelingen met hetzelfde aantal enen. Zo zien we bijvoorbeeld in Figuur 4 dat $C_2 \not\preceq C_3$ want C_2 heeft vier uitvoersequenties met twee enen en C_3 heeft er slechts drie. Dit vormt Lemma 3 en wordt bij het uitvoeren van ons algoritme voor 9 kanalen 1.07666×10^{13} keer nagegaan. In 97.9% van de gevallen wordt op basis van dit lemma beslist dat voor netwerken C_a en C_b geldt dat $C_a \not\preceq C_b$.

Aantal enen	1	2	3	4
C_1	00010	00110 01010	01011 01110	11110
C_2	00010	00101 00110 01001	01011 01101	10111
C_3	00010 00100	00101 00110	01110 10110	10111 11110

Figuur 4: Voorbeeld van drie comparatornetwerken met elk 5 kanalen en met bijhorende uitvoerverzamelingen [Codish *et al.*, 2014]. Elke gesorteerde uitvoer is weggelaten.

Lemma 3. Wanneer de uitvoerverzameling bij C_a met x enen ($1 \leq x \leq n$) groter is dan bij C_b weten we dat $C_a \not\preceq C_b$ met C_a en C_b twee comparatornetwerken.

Voor Lemma 4 introduceren we extra informatie over het comparatornetwerk, namelijk $w(C_a, x, k)$ waarbij $x \in \{0, 1\}$ en $0 \leq k \leq n$. Dit representeert de set van posities i waarvoor er een uitvoer bestaat in C_a met k enen waarvoor geldt dat op de i^{de} positie van deze uitvoer een x voorkomt. Om efficiënt operaties te kunnen uitvoeren, zullen we de posities voorstellen door middel van een bit representatie. Zo zal bijvoorbeeld $w(C_a, 1, 2) = 0110$ inhouden dat er bij de uitvoerverzameling met twee enen minstens één uitvoer bestaat met een 1 op de 2^{de} positie, minstens één met een 1 op de 3^{de} positie en geen enkel met een 1 op positie 1 of 4. Deze informatie voegen we bij elk netwerk toe in de vorm van een array van shorts, w^* . Aangezien er geen uitvoer wordt bijgehouden met 0 enen en n enen zullen we enkel voor $k \geq 1$ en $k \leq n-1$ zowel w als de grootte van w bijhouden. Dit vereist voor elk dan vier opeenvolgende indices in w^* , zoals te zien in Figuur 5. Deze informatie slaan we voor elke k op vanaf index⁴ $(k-1) \times 4$. Wanneer we bij het toevoegen van een comparator w^* herberekenen, kunnen we net zoals bij de omzetting van de uitvoer slechts beginnen bij de uitvoerverzameling met het aantal enen gelijk aan s (zie Code 3).

$$w(C_a, 0, 1) \parallel w(C_a, 0, 1) \parallel w(C_a, 1, 1) \parallel w(C_a, 1, 1)$$

Figuur 5: De inhoud van w^* op indices 0 – 3 voor $k = 1$.

Lemma 4. Wanneer voor comparatornetwerken C_a en C_b met n kanalen geldt dat $|w(C_a, x, k)| > |w(C_b, x, k)|$ voor $x \in \{0, 1\}$ en $0 \leq k \leq n$ dan $C_a \not\preceq C_b$.

Wanneer $\text{outputs}(C_a) \subseteq \text{outputs}(C_b)$ moet gelden dat het aantal posities waar C_a een 0 heeft kleiner moet zijn of gelijk aan het aantal bij C_b . Als dit niet het geval is, zou C_a zeker een positie hebben dewelke C_b niet heeft waardoor dus $\text{outputs}(C_a) \not\subseteq \text{outputs}(C_b)$. Dit geldt niet alleen voor

⁴In Java begint een array met index 0.

0 maar ook voor 1. Als we tenslotte inzien dat een permutatie het aantal posities waar zo een waarde (0 of 1) voorkomt niet wijzigt, krijgen we Lemma 4. In Figuur 4 is bijvoorbeeld te zien dat $C_3 \not\leq C_1$ want voor de uitvoerverzameling met vier enen geldt dat een 0 bij C_3 op drie plaatsen voorkomt terwijl dit bij C_1 slechts op twee plaatsen is. Dit vormt Lemma 4 dewelke bij een uitvoer voor 9 kanalen 2.22803×10^{11} keer wordt uitgevoerd. Hierbij wordt er in 92.3% van de gevallen beslist dat voor netwerken C_a en C_b geldt dat $C_a \not\leq C_b$. Dit lemma voorkomt, net zoals Lemma 3, dat er permutaties getest moeten worden.

Als beide lemma's geen uitsluiting bieden, zullen we permutaties moeten nagaan. Een naïeve methode zou zijn om alle $n!$ permutaties te overlopen. In de plaats daarvan zullen we enkel permutaties afgaan die voldoen aan Lemma 5 [Cordish *et al.*, 2014].

Lemma 5. $C_a \leq C_b \Rightarrow \pi(\text{outputs}(C_a)) \subseteq \text{outputs}(C_b) \Rightarrow \pi(w(C_a, x, k)) \subseteq w(C_b, x, k), \forall x \in \{0, 1\}, \forall k \in \{1..n\}$.

Als $\text{outputs}(C_a) \subseteq \text{outputs}(C_b)$ moet gelden dat alle posities waar een 0 en een 1 voorkomt bij C_a dit ook zeker het geval moet zijn bij C_b . Wanneer dit niet het geval is zou C_a een uitvoer hebben met een 0 en een 1 op een plaats waar C_b dit niet heeft waardoor $\text{outputs}(C_a) \not\subseteq \text{outputs}(C_b)$. Deze redenering is het basisidee achter Lemma 5.

Om de mogelijke permutaties bij te houden, zullen we gebruik maken van een voorstelling die te zien is in Tabel 3. De waarden in een kolom stellen alle mogelijke posities voor die op die plaats kunnen voorkomen. Wanneer we Tabel 3 gebruiken om de mogelijke permutaties weer te geven dan zullen we permutatie 4321 en 1324 bekomen, waarbij 4321 een eenheidspermutatie zal voorstellen. Bij het begin van het algoritme zullen we starten met Tabel 4. Deze laat alle $n!$ permutaties toe. Hierna gebruiken we Lemma 5 om posities uit de kolommen te verwijderen.

1	2	2	1
2	3		4
4			

Tabel 3: Een voorbeeld van een permutatietabel voor 4 kanalen.

1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4

Tabel 4: Een permutatietabel in het begin van het algoritme voor 4 kanalen.

We weten namelijk dat als

$$\pi(\text{outputs}(C_a)) \subseteq \text{outputs}(C_b)$$

er bij de gepermuteerde uitvoer enkel een 1 kan komen op de plaats waar dit bij C_b ook het geval is. Op de plaats waar C_b een 0 heeft, kunnen dus enkel de posities komen waar C_a een 0 heeft. Nemen we bijvoorbeeld $w(C_a, 1, 1) = 0101$ en $w(C_b, 1, 1) = 0110$. Aangezien we weten dat $w(C_b, 1, 1) = 0110$, weten we dat op zowel op de eerste als de vierde plaats nooit een 1 voorkomt. Wanneer we een permutatie uitvoeren op een uitvoer van C_a mag op die plaats dus nooit een

1 terechtkomen na de permutatie. Door $w(C_a, 1, 1) = 0101$ weten we dat op de tweede en vierde plaats geen 1 voorkomt. Bijgevolg kan op de eerste en vierde plaats (kolom) enkel positie 2 en 4 voorkomen. Zo kunnen we Tabel 4 reduceren tot Tabel 5. We kunnen voor $w(C_a, x, k)$ deze methode door trekken voor elke $1 \leq k \leq n$ en voor zowel $x = 0$ als $x = 1$. Wanneer we elke kolom bijhouden door een bit representatie kunnen we gemakkelijk de doorsnede van de mogelijke posities nemen na elke berekening voor een bepaalde k en x door middel van de $\&$ -operatie.

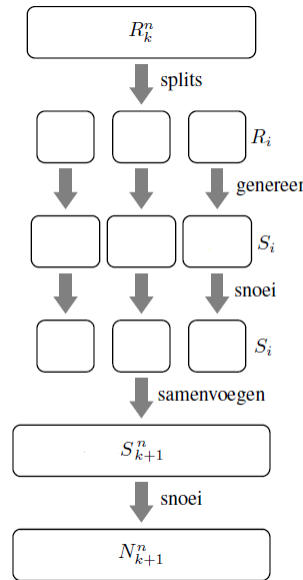
2	1	1	2
4	2	2	4
	3	3	
	4	4	

Tabel 5: Een permutatietabel voor 4 kanalen.

Wanneer tijdens het algoritme een kolom leeg zou komen te staan, kunnen we het algoritme stopzetten. Dit betekent namelijk dat er geen enkele permutatie bestaat die niet door Lemma 5 wordt afgekeurd. Mocht op het einde een kolom één element hebben, mogen we dit element uit alle andere kolommen verwijderen. We kunnen nadien ook nog nagaan of alle elementen minstens éénmaal voorkomen in de hele tabel. Tot slot gebruiken we de overblijvende permutatietabel om onze mogelijke permutaties, die aan Lemma 5 voldoen, na te gaan. Dit kan onder andere door middel van een recursieve methode.

In het ergste geval moeten we voor elk element in N_{k+1}^n subsumes nagaan met elk ander element in N_{k+1}^n . Nemen we voor de kost van een subsumes-test $f(n)$ dan betekent dit $\mathcal{O}(|N_{k+1}^n| \times (|N_{k+1}^n| - 1) \times f(n))$.

4.4 Parallellisatie



Figuur 6: Opbouw parallelle genereer & snoei

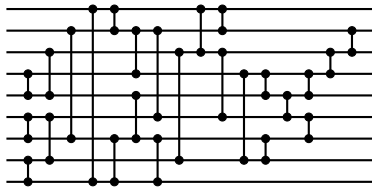
Om het algoritme te laten functioneren met meerdere processoren, zullen we enkele aanpassingen doorvoeren. Bij de overgang van R_k^n naar N_{k+1}^n zal elke thread een aantal netwerken uit R_k^n nemen, in ons geval 256, hierop de genereer-stap uitvoeren en vervolgens binnen de resulterende set de snoei-stap uitvoeren. Op dat moment beschikt elke thread over een set van netwerken met $k + 1$ comparatoren waarop de snoei-stap nog moet worden uitgevoerd ten opzichte van alle andere sets. Elke thread zal vervolgens zijn set in een gedeelde lijst S_{k+1}^n in het centraal geheugen plaatsen. Om deze operatie zo efficiënt mogelijk te maken, vermijden we zowel locks als het moeten vergroten van de lijst. Daarom zullen we

in het begin van de cyclus zorgen dat deze lijst groot genoeg is en gebruik maken van een variabele die bijhoudt op welke index een volgend netwerk moet worden bijgevoegd. In onze Java implementatie zullen we voor deze variabele een `AtomicInteger` gebruiken. Deze variabele garandeert een atomische `getAndIncrement(int)` functie. Een thread kan deze functie gebruiken om voldoende plaats in de lijst op te eisen voor zijn set door de grootte van zijn set mee te geven als parameter.

Na het toevoegen aan de gedeelde lijst volgt de snoei-stap. Hier zal elke thread subsumes moeten nagaan tussen alle netwerken in zijn set en elk ander reeds toegevoegd netwerk. Door het (hopelijk) vele verwijderen van netwerken ontstaan er veel opeenvolgende lege plaatsen in de lijst⁵. Hierdoor zal het algoritme vaak overbodig het netwerk opvragen. Om dit aantal, dat groter wordt naarmate het aantal kanalen stijgt, te verminderen, introduceren we een manier om deze opeenvolgende lege indices over te slaan. Telkens wanneer een lege index wordt gedetecteerd door een thread zal deze het aantal opeenvolgende lege indices tellen en dit aantal opslaan op de eerste lege plaats in deze reeks. Dit getal stelt dus het aantal opeenvolgende lege plaatsen voor na die index. Wanneer een thread dan dit getal tegenkomt, weten we exact hoeveel indices de thread kan overslaan.

5 Evaluatie

Onze Java-implementatie van het beschreven algoritme vindt voor 9 kanalen reeds na 3 uur en 26 minuten een oplossing met 25 comparatoren die gevisualiseerd wordt in Figuur 7. Dit bevestigt het gekende resultaat [Codish *et al.*, 2014].

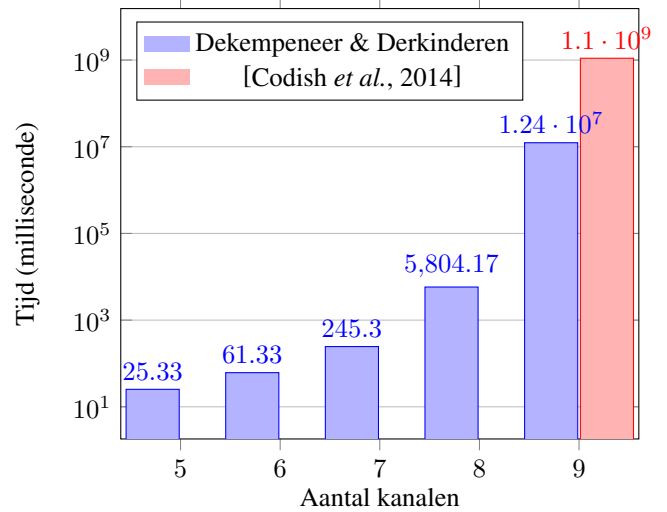


Figuur 7: Het gevonden sorteernetwerk van optimale grootte bij 9 kanalen met 25 comparatoren.

De tijdsmetingen voor het vinden van een sorteernetwerk van optimale grootte van 5 tot en met 9 kanalen zijn te zien in Figuur 8. In deze figuur is ook de tijdsmeting van eerder werk te zien, ongeveer 12 dagen 17 uur en 58 minuten [Codish *et al.*, 2014]. De bekomen resultaten van ons werk zijn afkomstig van het uitvoeren op één node bestaande uit twee 12-core “Haswell” Xeon E5-2680v3 processoren (2.5GHz, 30MB level 3 cache met 64GB RAM) op de rekeninfrastructuur van het Vlaamse Supercomputer Centrum.

Aangezien de meeste concepten in ons algoritme afkomstig zijn van het werk van Codish *et al.* kunnen we concluderen dat de tijdsinstaat voornamelijk afkomstig is van het optimaliseren van de details.

⁵Bij de Java implementatie zullen we verwijderen via “= null”.



Figuur 8: Tijdsmetingen voor uitvoer bij 5 tot en met 9 kanalen.

5.1 Benadering voor 10 kanalen

De uitvoering van het programma voor 10 kanalen is na 299 uur⁶ stopgezet. De tussentijdse resultaten met betrekking tot de uitvoeringstijd zijn te zien in Figuur 9 en met betrekking tot het aantal netwerken zijn te zien in Figuur 10. Voor 10, en dus ook voor 11, kanalen is de Java implementatie met de gebruikte hardware onvoldoende om resultaten binnen een redelijk tijdsbestek te bekomen. Gebaseerd op Figuur 9 schatten we dat voor 10 kanalen meer dan 5800 dagen⁷ vereist zijn.

5.2 Geheugen

Door het grote aantal netwerken is het efficiënt testen van $C_a \preceq C_b$ en de efficiëntie van de datastructuren van groot belang. In Figuur 10 zien we dat dit aantal voor 9 kanalen kan oplopen tot meer dan 900000 netwerken. Bij het stijgen van het aantal kanalen wordt dan ook het geheugenbeheer des te belangrijker.

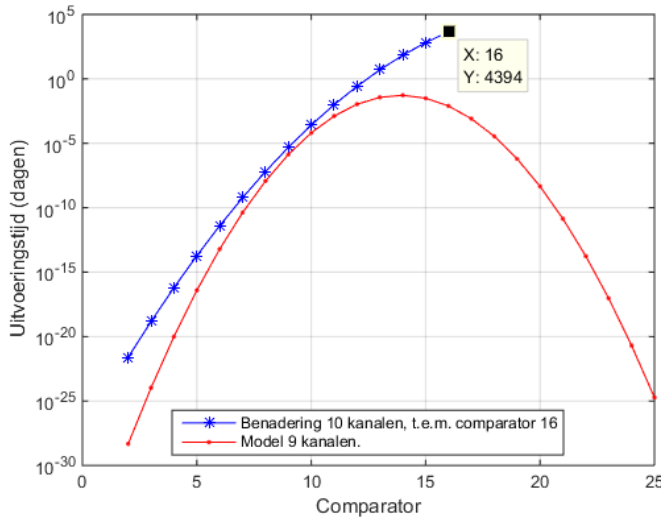
In Java hebben we het voordeel dat we niet expliciet aan geheugenbeheer moeten doen. We gaan anderzijds wel enkele maatregelen nemen om de vereiste hoeveelheid geheugen te verlagen. Eén van de mogelijke plaatsen waar we dit kunnen doen, is bij de representatie van een netwerk. Wanneer een comparator aan een netwerk wordt toegevoegd, is het mogelijk dat een lijst van uitvoersequenties met s enen ongewijzigd blijft. Om te vermijden dat we hierdoor meerdere malen dezelfde lijst in het geheugen hebben, zullen we een referentie doorgeven van deze lijst en slechts een nieuwe lijst gebruiken wanneer de lijst gewijzigd wordt. Aangezien bij Java een tweedimensionale lijst wordt aanzien als een

⁶12 dagen en 11 uur

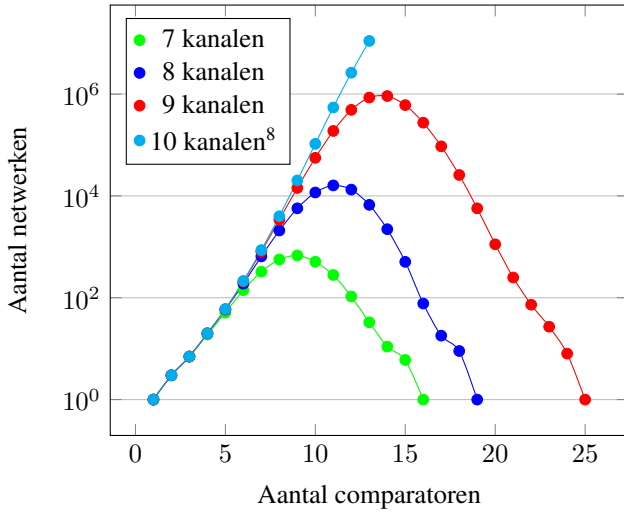
⁷Berekend op basis van een Gaussisch verloop:

$$f(x) = 3.559 \times 10^5 \times e^{-\left(\frac{x-21.05}{2.409}\right)^2}$$

⁸Voor 10 kanalen is het aantal netwerken berekend tot en met comparator 13.



Figuur 9: Tijdsverloop voor 10 kanalen tot en met de 13^{de} comparator en benadering van tijdsverloop tot en met de 16^{de} comparator, de vermoedelijke piek. Ter illustratie tonen we ook het tijdsverloop voor 9 kanalen.



Figuur 10: Aantal resterende netwerken na het uitvoeren van genereren en snoeien bij toevoegen van de k^{de} comparator.

lijst van referenties naar andere lijsten kan de oude referentie gemakkelijk hergebruikt worden.

Een andere plaats is bij de parallelisatie. Hier daalt de hoeveelheid geheugen doordat een thread enerzijds zal snoeien binnen zijn set alvorens de set toe te voegen aan de gedeelde lijst en anderzijds doordat de genereer- en snoei-stap door elkaar worden uitgevoerd.

Onze Java implementatie gebruikte bij de uitvoering voor 8 en 9 kanalen respectievelijk 208MB en 3951MB. De exacte hoeveelheid verschilt naargelang de frequentie waarmee de Java Virtual Machine de *Garbage Collection* uitvoert. Voor minder dan 8 kanalen was het geheugengebruik verwaarloosbaar klein.

5.3 Profileren

Via een profiling, zoals in Figuur 11, kunnen we de bottleneck vaststellen met als doel de uitvoeringstijd te verbeteren. In dit profiel zien we dat de snoei-methode, de prune-methode in de figuur, duidelijk de bottleneck is. In deze methode wordt er door een thread voor elk netwerk in de gedeelde lijst subsumes testen uitgevoerd met elk netwerk in zijn eigen lijst, zoals beschreven in Sectie 4.4. Wanneer we de uitvoeringstijd willen verbeteren, kunnen we enerzijds proberen deze prune methode te voorkomen zoals bijvoorbeeld in de genereer-stap en anderzijds door deze prune-methode efficiënter te maken. Hier kan bijvoorbeeld onderzoek gedaan worden naar of men al dan niet onder een bepaalde voorwaarde netwerken van de eigen lijst kan overslaan.

Name	Self Time (CPU)	Total Time (CPU)
prune	1,925,071 ms (80%)	2,257,121 ms (17.1%)
existsAValidPerm	155,080 ms (6.4%)	376,525 ms (2.9%)
isValidPermutation	150,901 ms (6.3%)	150,901 ms (1.1%)
innerPrune	89,898 ms (3.7%)	145,503 ms (1.1%)
checkAllRelevantPermutations	70,522 ms (2.9%)	221,423 ms (1.7%)
subsumes	11,008 ms (0.5%)	387,534 ms (2.9%)
processData	3,391 ms (0.1%)	3,402 ms (0%)
generate	1,006 ms (0%)	4,997 ms (0%)
java.lang.Object.clone[native]	588 ms (0%)	588 ms (0%)

Figuur 11: Profiel van een partiële uitvoering voor 9 kanalen.

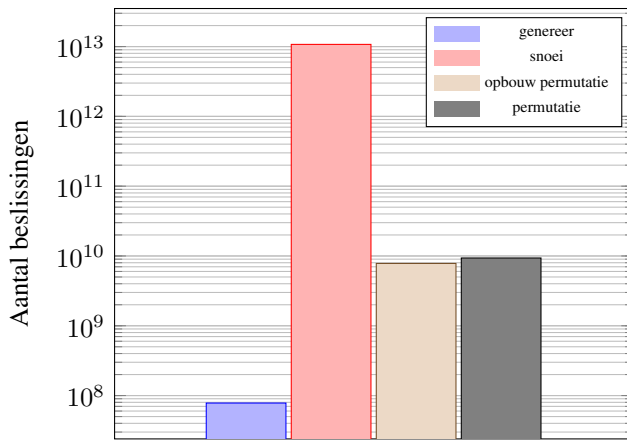
5.4 Beslissingen

Door de genereer- en snoei-aanpak mag het totaal aantal te overlopen netwerken dan wel gedaald zijn, de hoeveelheid beslissingen die genomen moeten worden blijft nog steeds hoog zoals te zien in Figuur 12. In deze figuur zien we dat de meeste beslissingen genomen worden tijdens het snoeien. Met beslissingen bedoelen we beslissingen over het al dan niet gelden van $C_a \preceq C_b$. Er moet echter wel een onderscheid gemaakt worden tussen de soorten van beslissingen. De beslissingen genomen in de genereer-stap zijn beslissingen die het genereren van een netwerk voorkomen en zijn gebaseerd op redundante comparatoren. Deze beslissingen zorgen voor minder netwerken in de gedeelde lijst en dus voor zowel minder snoei-operaties als geheugengebruik.

De beslissingen genomen in de snoei-stap daarentegen, zijn beslissingen die enkel voorkomen dat er permutaties moeten worden opgebouwd om na te gaan of $C_a \preceq C_b$ geldt. Deze zorgen er dus niet voor dat een netwerk uit de gedeelde lijst verdwijnt, enkel dat er niet al te veel tijd gependend wordt aan het onnodig nagaan van permutaties. Hier worden onder meer Lemma 3 en Lemma 4 gebruikt.

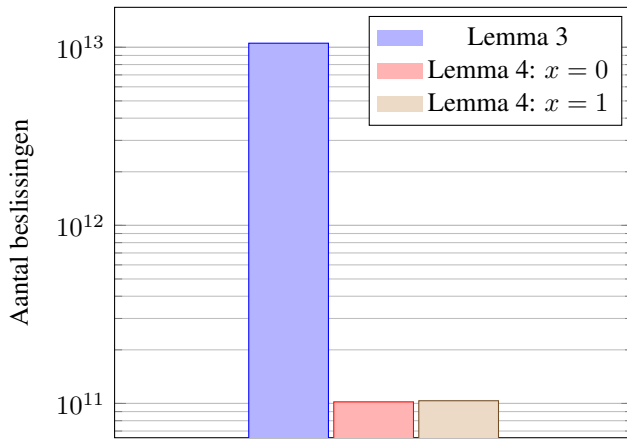
Vervolgens zijn er nog de beslissingen die genomen worden tijdens de opbouw van de mogelijke permutaties en tijdens het aflopen van deze permutaties. Tijdens de opbouw gebeurt deze beslissing wanneer er geen geschikte permutatie bestaat doordat de permutatietabel een lege kolom bevat.

In Figuur 13 wordt er specifiek gekeken naar de beslissingen in de snoei-stap. Hier zien we dat Lemma 3 het grootste aantal beslissingen maakt. Dit is deels te wijten aan



Figuur 12: Aantal beslissingen bij een uitvoer voor 9 kanalen.

het feit dat het als eerste wordt nagegaan in de implementatie. Het is dan ook belangrijk dat dit lemma efficiënt wordt geïmplementeerd. Er zou nog onderzoek gedaan kunnen worden naar of we dit lemma al dan niet kunnen gebruiken om netwerken in de gedeelde lijst over te slaan, zoals reeds vermeld in Sectie 5.3. Zo zou bijvoorbeeld de verzameling van elke thread na het intern snoeien gesorteerd kunnen worden volgens een bepaald argument alvorens ze toe te voegen aan de gedeelde lijst. Vervolgens zou men dan via dit argument kunnen beslissen om al dan niet een bepaald aantal netwerken in de gedeelde lijst over te slaan.



Figuur 13: Aantal beslissingen tijdens het snoeien bij een uitvoer voor 9 kanalen.

6 Conclusies

Onze implementatie van de genereer- en snoei-aanpak van Codish *et al.* zorgde voor een bewijs voor 9 kanalen na 3 uur en 26 min, een versnelling ten opzichte van de eerdere 305 uur. Het is echter niet snel genoeg voor een bewijs van 10 kanalen. Dit zou bij benadering meer dan 1500 dagen duren. Bijgevolg blijft het bewijs voor het sorteernetwerk van optimale grootte voor 11 kanalen een open probleem. Er zou nog extra werk geleverd kunnen worden omtrent het efficiënt overlopen van alle comparatornetwerken alsook het bruikbaar maken voor meerdere nodes.

Erkenning

Graag willen we professor dr. ir. Tom Schrijvers bedanken voor zijn begeleiding doorheen dit onderzoek.

De rekeninfrastructuur en dienstverlening gebruikt in dit werk, werd voorzien door het VSC (Vlaams Supercomputer Centrum), gefinancierd door het FWO en de Vlaamse regering - departement EWI. Bijgevolg willen we de onderzoeksgroep *DTAI* bedanken voor de aangeboden credits voor deze rekeninfrastructuur.

Referenties

- [Batcher, 1968] K. E. Batcher. Sorting networks and their applications. In *Proceedings of the April 30–May 2, 1968, Spring Joint Computer Conference*, AFIPS '68 (Spring), pages 307–314, New York, NY, USA, 1968. ACM.
- [Bundala and Zavodny, 2013] Daniel Bundala and Jakub Zavodny. Optimal sorting networks. *CoRR*, abs/1310.6271, 2013.
- [Codish *et al.*, 2014] Michael Codish, Luis Cruz-Filipe, Michael Frank, and Peter Schneider-Kamp. Twenty-five comparators is optimal when sorting nine inputs (and twenty-nine for ten). Technical report, IEEE International Conference on Tools with Artificial Intelligence (ICTAI), November 2014.
- [Codish *et al.*, 2015] Michael Codish, Luís Cruz-Filipe, Thorsten Ehlers, Mike Müller, and Peter Schneider-Kamp. Sorting networks: to the end and back again. *CoRR*, abs/1507.01428, 2015.
- [Floyd and Knuth, 1973] R. W. Floyd and D. E. Knuth. In *A survey of combinatorial theory*, chapter The Bose-Nelson sorting problem, pages 163–172. North-Holland, 1973.
- [Knuth, 1973] D. E. Knuth. *The art of computer programming. Vol.3: Sorting and searching*. Addison-Wesley, 1973.
- [Parberry, 1989] I. Parberry. A computer assisted optimal depth lower bound for sorting networks with nine inputs. In *Supercomputing, 1989. Supercomputing '89. Proceedings of the 1989 ACM/IEEE Conference on*, pages 152–161, Nov 1989.
- [Voorhis, 1972] David C. Voorhis. *Complexity of Computer Computations: Proceedings of a symposium on the Complexity of Computer Computations, held March 20–22, 1972, at the IBM Thomas J. Watson Research Center, Yorktown Heights, New York, and sponsored by the Office of Naval Research, Mathematics Program, IBM World Trade Corporation, and the IBM Research Mathematical Sciences Department*, chapter Toward a Lower Bound for Sorting Networks, pages 119–129. Springer US, Boston, MA, 1972.