

LinAlgDM I. 18. gyakorlat: Determinánsok

2023. november 24.

1 A determináns fogalma és kiszámítása

Egy négyzetes mátrix determinánsa egy szám, amelyet rekurzívan tudunk megadni, az alábbi módon. Az 1×1 -es mátrix determinánsa a benne szereplő szám, pl:

$$A = [-3] \in \mathbb{R}^{1 \times 1} \rightarrow |-3| = -3$$

Ha $n > 1$, akkor az $n \times n$ -es mátrix determinánsát megkapjuk, ha az első sor minden elemét szorozzuk a hozzá tartozó előjeles, $(n-1) \times (n-1)$ -es al-determinánssal, majd ezeket összeadjuk. Az előjel az ún sakktábla-szabály szerint állapítható meg: az első sor első eleme $+$, második eleme $-$, harmadik eleme megint $+$ előjelű és így tovább. Az al-determináns pedig az adott sor és oszlop elhagyásával létrejövő mátrix determinánsa. Az A mátrix determinánsát $\det(A)$ -val vagy $|A|$ -val jelöljük - utóbbi nem keverendő össze az abszolút értékkel (lásd a fenti 1×1 -es példát)!

Ezek alapján az 1×1 -es determináns értéke:

$$A = [a] \rightarrow \det(A) = |a| = a$$

Egy 2×2 -es mátrix determinánsa visszavezethető 2 db 1×1 -es determinánssra:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} \oplus & \ominus \\ a & b \\ c & d \end{vmatrix} = +a|d| - b|c| = ad - bc$$

Egy 3×3 mátrix determinánsa pedig visszavezethető 3 db 2×2 determinánssra, és ezáltal $3 \cdot 2$ db 1×1 -es determinánssra:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} \oplus & \ominus & \oplus \\ a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = +a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

A fenti módszerrel egy $n \times n$ -es determináns visszavezethető $n!$ db 1×1 -es determinánssra.

Kifejtési tétel: A determináns értéke kiszámolható ha egy tetszőleges sor (vagy oszlop) elemeit szorozzuk a hozzájuk tartozó előjeles al-determinánssal és ezeket összeadjuk.

Tehát nem muszáj az első sor szerint kifejteni a determinánst, hanem tetszőleges sor/oszlop szerint megtehetjük. A kifejtésnél fontos figyelembe venni az al-determinánsok előjeleit, amit a sakktábla szabály alapján kapunk meg (bal felső sarok mindig $+$):

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Érdemes a legtöbb 0-t tartalmazó sor vagy oszlop szerint kifejteni a determinánst, illetve a következő pontban felsorolt determináns-tulajdonságok felhasználásával sok nullát létrehozni.

Determináns rendje: A determináns méretét a determináns rendjének nevezzük: ha A egy $(n \times n)$ -es mátrix, determinánsát n -edrendű determinánssnak nevezzük. Vagyis az eddigiekben első-, másod- és harmadrendű determinánsok kiszámítását tekintettük át.

Tulajdonságok/Tételek

A következő tulajdonságokat sorokra fogalmazzuk meg, azonban - az alábbi első tétel következtében - oszlopokra ugyanúgy érvényesek!

1. Oszlopok és sorok szerepe egyforma (szimmetrikus): a főátlóra tükrözve a determináns értéke nem változik. Azaz $\det(A) = \det(A^T)$.

$$\text{pl. } \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$$

2. Ha a determináns két sorát felcseréljük, a determináns értéke (-1) szeresére változik.
3. Ha a determinánsnak van két egyenlő sora, akkor értéke 0 (mivel ekkor $\det(A) = -\det(A)$ kell legyen, ami csak 0 esetén lesz igaz).
4. Ha a determináns egyik sora egy másik sorának λ -szorososa, a determináns értéke 0.
5. **Ha a determináns egy sora csupa 0-ából áll, akkor értéke 0.**
6. **Ha a determináns egy sorát egy λ számmal szorozzuk, akkor a determináns értéke λ -szorosára növekszik.**

$$\text{pl. } \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Ebből következik, hogy ha a determináns minden sorát megszorozzuk λ -val, a determináns értéke a λ^n -nel szorzódik, ahol n a determináns rendje: $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$, ahol $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

$$\text{pl. } \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

7. **Ha a determináns főátlója alatt (vagy fölött) csak 0-ák állnak, akkor a determináns értéke a főátlóban lévő elemek szorzata.** Ez a helyzet a diagonális mátrixnál is, nemcsak a felső- illetve alsóháromszög determináns esetében.

$$\text{pl. } \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & j \end{vmatrix} = a \cdot c \cdot f \cdot j, \quad \begin{vmatrix} a & b & d & g \\ 0 & c & e & h \\ 0 & 0 & f & i \\ 0 & 0 & 0 & j \end{vmatrix} = a \cdot c \cdot f \cdot j, \quad \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j \end{vmatrix} = a \cdot c \cdot f \cdot j.$$

8. Ha a determináns egyik sora egy kéttagú összeg, akkor a determináns értéke két olyan determináns értékének összege, melyeknek az egyik sora a kéttagú összeg egyik ill. másik fele.

$$\text{pl. } \begin{vmatrix} a & b & c \\ d+j & e+k & f+l \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ j & k & l \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

9. **A determináns értéke nem változik, ha egy sorához hozzáadjuk valamelyik másik sorának számszorosát.**
10. Az előző tételek következtében a determináns "Gauss eliminálható", amelynél nemcsak sorok, de akár oszlopok szerint is haladhatunk. Azonban figyelniük kell néhány szabályra:

- Egy sorhoz (vagy oszlophoz) hozzáadhatjuk egy másik sor (vagy oszlop) számszorosát,
- két sor (vagy oszlop) cseréje esetén változik az előjel,
- egy sort (vagy oszlopot) megszorozhatunk egy számmal, de így a determinánst értéke is ezzel a számmal szorzódik,
- Ha csak 0-kat tartalmazó sor (vagy oszlop) adódik, akkor a determináns értéke 0.

A cél: alsó- vagy felsőháromszög determináns kialakítása, mert itt a főátló elemeinek összeszorozásával megkapjuk a determináns értékét.

11. FERDE KIFEJTÉS: adott sor/oszlop elemeit rendre másik sor/oszlop megfelelő eleméhez tartozó aldeteminánssal szorozzuk, akkor nullát kapunk

Feladat 1. Számoljuk ki a következő determinánsokat a kifejtési tétel segítségével!

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \quad \det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \quad \det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \quad \det(D) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

Feladat 2. A kifejtési tétel segítségével számoljuk ki a következő determinánsokat:

$$\det(F) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \det(G) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 6 \\ 6 & 0 & 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Feladat 3. Számoljuk ki a következő determinánsokat:

$$\det(H) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}, \quad \det(J) = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & 5 \end{vmatrix}, \quad \det(K) = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \det(L) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 7 & 0 & 2 \end{vmatrix},$$

Feladat 4. Valaki egy kis szelet papírra felírta az alábbi mátrixot:

$$S = \begin{bmatrix} 3 & -1 & \dots \\ 8 & -1 & \dots \\ -6 & -1 & \dots \end{bmatrix}$$

A papír szélét sajnos az orvul kiömlő reggeli kávé súlyosan megrongálta, így nem tudjuk, hogy pontosan milyen értékek szerepeltek a mátrix utolsó oszlopában, csak azt, hogy az elemek azonosak voltak. Meg tudjuk-e ez alapján határozni $\det(S)$ értékét? Ha igen, mi ez az érték, és hogyan lehet meghatározni?

Feladat 5. Számoljuk ki a következő determinánst "Gauss elimináció" segítségével kétféleképpen: sorok és oszlopok szerint haladva is!

$$\det(V) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$