

Következmény fogalma és Rezolúciója

2023. október 27.

A feladatban egy formula tautológia tulajdonságát, vagy egy $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \models \beta$ következtetési séma helyességét szeretnénk bizonyítani. Ez utóbbi a tanult tétel alapján az $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$ formula tautológia voltával ekvivalens, így visszavezettük a feladatot a múlt órán alkalmazott módszerre.

Az, hogy egy formula tautológia, megegyezik azzal, hogy a tagadása kontradikció. Ennek igazolásához indirekt feltesszük, hogy az állítás tagadása nem kontradikció, tehát van olyan kiértékelés, ahol igaz. Ehhez a formula tagadását átalakítjuk KNF alakra és a kapott klózokból a rezolúció alaplépésének ismételt alkalmazásával következményeket írunk fel.

(Következtetési séma esetén a tételben szereplő kifejezés tagadása: $\neg\{\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta\} \equiv \neg\{\neg[\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n] \vee \beta\} \equiv \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \wedge \neg\beta$ alakú, és mivel KNF-k konjunkciója is KNF, itt elég az állításokat és a következmény tagadását külön-külön KNF alakra hozni.)

Ha ezen következményekből kijön az üres klóz (nil), ami semmikor sem igaz, akkor a tagadott formula sem lehet igaz semmilyen kiértékelés esetén (azaz kontradikció), tehát az eredeti formula tautológia.

1. Bizonyítsa be a következtetési sémák helyességét igazságtáblával, a definíció alapján!

- (a) Modus ponens $\{A \rightarrow B, A\} \models B$
- (b) Modus tollens $\{A \rightarrow B, \neg B\} \models \neg A$
- (c) Diszjunktív szillogizmus $\{A \vee B, \neg A\} \models B$
- (d) Hipotetikus szillogizmus $\{A \rightarrow B, B \rightarrow C\} \models A \rightarrow C$
- (e) Konstruktív dilemma $\{A \vee B, A \rightarrow C, B \rightarrow D\} \models C \vee D$
- (f) $\{\neg B, \neg C, A \rightarrow (B \vee C)\} \models \neg A$
- (g) $\{A \rightarrow \neg C, \neg B \rightarrow C\} \models A \rightarrow B$

2. Bizonyítsuk be, hogy helyesek az alábbi következtetési sémák, majd a levezetések alapján adjunk meg további helyes következményeket!

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ B \rightarrow C \\ \hline \neg(C \wedge D) \\ \hline A \rightarrow \neg D \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A \rightarrow \neg C \\ \neg B \rightarrow C \\ \hline A \rightarrow B \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \neg A \rightarrow (B \wedge C) \\ (C \wedge A) \rightarrow D \\ \neg B \\ \hline \neg D \rightarrow A \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A \rightarrow (B \wedge C) \\ \neg B \vee \neg C \\ \hline \neg A \end{array}$$

3. Bizonyítsa be rezolúció segítségével, hogy az első három állítás nulladrendű logikai következménye a negyedik állítás:

- Ha nem tanulok, nem sikerül jól a zh-m.
- Nem tudok egyszerre tanulni és bulizni is.

- Elmehetnek rakodómunkásnak, ha nem sikerül a zh-m.
 - Nem bulizok, vagy rakodómunkásnak állok.
4. Nulladrendű logikai rezolúció segítségével igazolja, hogy az első négy állítás következménye az ötödik.
- Ha a virágok korán nyílnak, nem lesz probléma az idei mézterméssel.
 - Ha a méhek nem porozzák be a virágokat, akkor probléma lesz az idei mézterméssel.
 - Egyszerre nem tudják a méhek beporozni a virágokat és elrepülni délre.
 - A virágok korán nyílnak
 - A méhek nem repülnek délre.
5. Ha Gandalf a hegyeket választja, akkor nem jut át a túloldalra. Ha Mória bányáit választja, akkor sem jut át a túloldalra. De tegyük fel, hogy Gandalf végül mégis átjutott a túloldalra. Ezek szerint ebben a történetben Gandalf nem a hegyeket és nem is a bányákat választotta. Igaz ez?
6. Ha Bilbo elolvassa a Terms & Conditionst és jó lakomát tart, akkor elmehet egy nagy kalandra a törpökkel. Tudjuk, hogy Bilbo, mint minden hobbit, jó lakomát tartott. Igaz-e, hogy Bilbo nem olvasta el a Terms & Conditionst?
7. - A dolog úgy áll - állapította meg Nyuszi -, hogy be vagy szorulva.
 - Ez mind attól van - jegyezte meg Micimackó kissé idegesen -, hogy ezeknek a modern lakásoknak nincs elég széles kijáratuk. A bejáratok jók, de a kijáratok nem elég szélesek.
 - (...) Akartam mondani, csak nem szeretem figyelmeztetni a vendéget, hogy **egyikünk túlságosan sokat eszik. És az az egyikünk nem én voltam.** De ezen most kár vitatkozni, elfutok Róbert Gidáért.
- (a) Formalizáljuk Nyuszi állítását!
- (b) Mire célzott Nyuszi?
- (c) Igazoljuk, hogy az állítás, és e mögöttes tartalom ekvivalensek!
8. Igazságtábla vizsgálatával keressünk olyan formula párokat, melyek egymás logikai következményei! (Definíció alapján)