

# LinAlgDM I. 4-5. gyakorlat: Lineáris egyenletrendszerek megoldása Gauss-Jordan eliminációval

2023. október 19.

Ismételjünk át néhány fogalmat!

**Lineáris egyenletrendszer.** Az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \dots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \quad (1)$$

ahol  $x_1, \dots, x_n$  változók, az  $a_{ij}$  és  $b_i$  *állandó (konstans)* együtthatók, **lineáris egyenletrendszernek** nevezzük. A fenti egyenletrendszer  $m$  db egyenletről áll, és  $n$  db változója van. (Az egyenletek és változók számának nem kell megegyeznie.) Az egyenletrendszer lehet **homogén**, ha  $b_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  (azaz a jobb oldalon csupa 0 áll), illetve lehet **inhomogén**, ha van olyan  $i$ , amelyre  $b_i \neq 0$  (azaz a jobb oldalon van legalább egy nem nulla együttható).

Az (1) lineáris egyenletrendszerben minden együttható konstans, és minden változónak csak az első hatványa szerepel, továbbá ezek a változók egymással nem szorozódnak, csak a konstansokkal.

**Kibővített együtthatómátrix** A Gauss-elimináció lépéseinek a leírását megkönnyítettük azzal, hogy nem "cipeltük" magunkkal feleslegesen a változókat, hanem csak az együtthatókat rendeztük el tömörszerűen. Ezért definiáltuk az (1) lineáris egyenletrendszer *kibővített együtthatómátrixát* az alábbi formában:

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

A **Gauss elimináció** lépéseit már ismerjük:

1. Lépcsős alak kialakítása kiküszöbölés (elimináció) segítségével ("alsó háromszögből" eltűnnek a változók),
2. Változók értékeinek meghatározása visszahelyettesítéssel, az utolsó egyenlettől az első felé haladva.

Ha a visszahelyettesítést nem szeretjük, inkább többet számolnánk a kibővített együtthatómátrix segítségével, akkor az alábbi algoritmust nekünk találták ki:

**Gauss-Jordan elimináció:** Adott az (1) lineáris egyenletrendszer.

- *Feladat:*  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  meghatározása.

- *Megoldás:*

1. A lépcsős alakot kialakítjuk kiküszöbölés (elimináció) segítségével ("alsó háromszögből" eltűnnek a változók),
2. Minden egyenletet elosztunk az ún. főegyütthatójával az alábbiak szerint. A  $k$ . egyenletet  $k = 1, \dots, n$  az  $x_k$  változó együtthatójával, vagyis  $a_{kk}$ -val osztjuk le. Ennek eredményeképp a lépcsős alak lépcsőjénél minden együttható 1 lesz.
3. Az ún. *redukált lépcsős alakot* kialakítjuk úgy, hogy a "felső háromszögből" is kiküszöböljük a változókat egy "fordított Gauss" segítségével: a jobb alsó sarokból indulva felfelé nullázunk, majd mindig eggyel balra és felfelé lépünk és ott folytatjuk.

- A megengedett műveletek ugyanazok, mint a Gauss-eliminációnál; ekvivalens átalakítások, amelyek az egyenletrendszer érvényességét (megoldáshalmazát) nem befolyásolják. Szabad:
    - Egyenletek sorrendjét megváltoztatni (pl. két egyenletet megcserélni),
    - Egyenletet számmal szorozni,
    - Egyik egyenlethez hozzáadni egy másik egyenlet számszorosát,
    - Az azonosan nulla, azaz a  $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = 0$  alakú egyenleteket elhagyni.
  - A Gauss-Jordan elimináció során is egyszerűbb a kibővített együtthatómátrixot használni. Mivel ennek  $k$ . sora a  $k$ . egyenletnek felel meg, ezért az algoritmus az alábbiak szerint fogalmazható meg:
    1. Végrehajtjuk a Gauss-elimináció első lépését, kialakítjuk a lépcsős alakot a bal felső sarokból indulva ("alsó háromszög" minden elemét kinullázzuk),
    2. *Vezéregyese*k kialakítása: a kibővített együtthatómátrix főátlójában csupa 1-est hozunk létre az adott sor osztásával,
    3. Kialakítjuk a *redukált lépcsős alakot* úgy, hogy a "felső háromszöget" is kinullázzuk egy "fordított Gauss" segítségével, a jobb alsó sarokból indulva, felfelé nullázva.
  - Szabad:
    - *Sorok* sorrendjét megváltoztatni (pl. két *sort* megcserélni),
    - *Sort* számmal szorozni,
    - Egyik *sorhoz* hozzáadni egy másik *sor* számszorosát,
    - Az azonosan nulla (kizárólag 0-kat tartalmazó) *sorokat* elhagyni.
1. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert Gauss-Jordan elimináció segítségével kétféleképpen: a) egyenletrendszer alakban, b) kibővített együtthatómátrix segítségével!

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 10 \end{aligned}$$

a) Megoldás egyenletrendszer alakban:

$$\begin{aligned} \begin{array}{rrrrrr} -x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 10 \end{array} & \xrightarrow[\text{III.}+2\cdot\text{I.}]{\text{II.}+3\cdot\text{I.}} & \begin{array}{rrrrrr} -x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ 10x_2 & + & 10x_3 & = & 10 \\ 4x_2 & + & 9x_3 & = & 14 \end{array} & \xrightarrow{\text{II.}/10} \\ \\ \xrightarrow{\text{II.}/10} & \begin{array}{rrrrrr} -x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & 4x_2 & + & 9x_3 & = & 14 \end{array} & \xrightarrow[\text{III.}+4\cdot\text{II.}]{\text{III.}-4\cdot\text{II.}} & \begin{array}{rrrrrr} -x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & 5x_3 & = & 10 \end{array} & \xrightarrow[\text{III.}/5]{\text{I.}/(-1)} \\ \\ \xrightarrow[\text{III.}/5]{\text{I.}/(-1)} & \begin{array}{rrrrrr} x_1 & - & 3x_2 & - & 3x_3 & = & -2 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & x_3 & = & 2 \end{array} & \xrightarrow[\text{II.}-\text{III.}]{\text{I}+3\cdot\text{III.}} & \begin{array}{rrrrrr} x_1 & - & 3x_2 & & & = & 4 \\ & & x_2 & & & = & -1 \\ & & x_3 & & & = & 2 \end{array} & \xrightarrow{\text{I.}+3\cdot\text{II.}} \\ \\ & \xrightarrow{\text{I.}+3\cdot\text{II.}} & \begin{array}{rrrrrr} x_1 & & & & & = & 1 \\ & x_2 & & & & = & -1 \\ & & x_3 & & & = & 2 \end{array} \end{aligned}$$

A megoldást közvetlenül megkaptuk, nem kellett visszahelyettesíteni.

b) Megoldás kibővített együtthatómátrix segítségével:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 & 10 \end{array} \right) & \xrightarrow[\text{III.}+2\cdot\text{I.}]{\text{II.}+3\cdot\text{I.}} \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 10 & 10 & 10 \\ 0 & 4 & 9 & 14 \end{array} \right) & \xrightarrow{\text{II.}/10} \\ \\ \xrightarrow{\text{II.}/10} \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 9 & 14 \end{array} \right) & \xrightarrow[\text{III.}/5]{\text{III.}/5} \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array} \right) & \xrightarrow[\text{III.}/5]{\text{I.}/(-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
I./(-1) \\
III./5
\end{array}
\left( \begin{array}{ccc|c}
1 & -3 & -3 & -2 \\
0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & \boxed{1} & 2
\end{array} \right)
\begin{array}{l}
I.+3\cdot III. \\
II.-III.
\end{array}
\left( \begin{array}{ccc|c}
1 & -3 & 0 & 4 \\
0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 2
\end{array} \right)
\begin{array}{l}
I.+3\cdot II. \\
II.-III.
\end{array}
\left( \begin{array}{ccc|c}
\boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 2
\end{array} \right)$$

A kibővített együtthatómátrix bal oldalán a főátlóban 1-esek állnak, míg a többi elem 0 (ez az ún. egységmátrix), így az ennek megfelelő egyenletrendszer rendkívül egyszerű szerkezetű:

$$\begin{array}{ccccccc}
x_1 & + & 0 & + & 0 & = & 1 \\
0 & + & x_2 & + & 0 & = & -1 \\
0 & + & 0 & + & x_3 & = & 2
\end{array}$$

Vagyis ebben a formában közvetlenül megkapjuk a megoldást:

$$\begin{array}{l}
x_1 = 1 \\
x_2 = -1 \\
x_3 = 2
\end{array}$$

2. Van-e a következő egyenletű síkoknak közös metszéspontja? Ha igen, adjuk meg!

$$\begin{array}{l}
x + y + z = 1 \\
8x + 2y + 2z = -4 \\
25x + y + z = -23
\end{array}$$

3. Vizsgáljuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldhatóságát, adjuk meg a megoldások számát! Ha van megoldás, adjuk meg azt is!

$$\begin{array}{l}
x_1 + 2x_2 = 3 \\
4x_1 + 9x_2 = 6 \\
10x_1 + 21x_2 = 24 \\
28x_1 + 59x_2 = 66
\end{array}$$

4. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert (rögtön az együttható-mátrixos felírást használjuk):

$$\left( \begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 2 & -2 \\
1 & 2 & 3 & 4 & -6 \\
2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 0
\end{array} \right)$$

5. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert (rögtön az együttható-mátrixos felírást használjuk):

$$\left( \begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & 3 & 4 & -6 \\
2 & -2 & 1 & -3 & 3 \\
2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 0
\end{array} \right)$$

6. A  $c \in \mathbb{R}$  paraméter minden lehetséges értékére vizsgáljuk meg az egyenletrendszer megoldhatóságát és megoldásainak számát! Adjuk meg a megoldást is!

$$\begin{array}{l}
x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 7 \\
x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 19 \\
3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = -9 \\
-2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 \\
2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = c
\end{array}$$