

## MATEMATIKAI LOGIKA

### NULLADRENDŰ LOGIKA (ÍTÉLETKALKULUS)

A logikát, mint a filozófia egy részét, már az ókori a görög tudósok is igen magas szinten művelték, pl. Platón (Kr. e. 427- Kr. e. 347), Arisztotelész (Kr.e. 384- Kr. e. 311), Euklidész (Kr. e. 300 körül született). Az ún. matematikai logika azonban csak XIX. században fejlődött ki. Sok világhírű matematikus foglalkozott logikával, a magyar matematikusok közül például Bereczki Ilona, Kalmár László, Neumann János, Péter Rózsa, Pásztorné Varga Katalin, Urbán János, Lovász László.

E fejezet célja, hogy mindazon matematikai logikai ismereteket összefoglalja, amelyek alapján megérthetjük majd a mesterséges intelligenciában alkalmazott, logikai alapú következtető, döntéselőkészítő, szakértő rendszereket, és logikai alapú programnyelveket, pl. a Prolog Programming in Logic) nyelvet. A Prolog nyelvnek fontos magyar vonatkozása is van: Szeredi Péter és Futó Iván fejlesztették ki annak moduláris változatát, amely abban az időben nagy előrelépést jelentett.

Az itt tanultakat a Mesterséges intelligencia tantárgy nemcsak felhasználja, hanem további fontos ismeretekkel is kiegészíti majd.

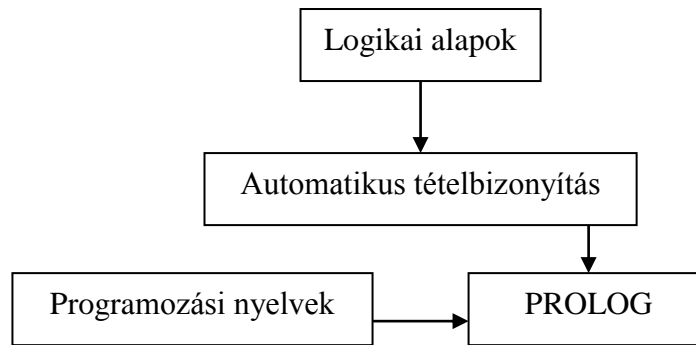
Mesterséges Intelligencia (MI) igen nagy részének matematikai alapja a matematikai logika. Az automatizált gyártósorok, robotok működésében pedig az MI igen nagy szerepet játszik.

Az igazság az, hogy az emberi következtetés nem a logika szabályai szerint történik. Az emberi intuíció az, amit a logika sem tud pótolni, sőt esetenként a matematikai szigorúság rugalmatlansága akadályozhatja a következtetést. Ezzel együtt a logika mégis az emberi gondolkodás egyfajta modelljének tekinthető, különösen a XX. századtól bevezetett újfajta logikák: többértékű, fuzzy, temporális, modális logikák, melyekben például az igazságértékek az igaz-hamis klasszikus modelltől eltérően finomodhatnak (igaz, hamis, részben igaz, A matematikai logikát a gondolkodás tudományának is nevezik. A matematikai logika fő feladata helyes következtetési sémák kialakítása, helyességük bizonyítása.

(**többnyire** igaz, stb.), lehetőség van az időbeliség modellezésére és sok minden egyéb olyan folyamat leírására, amely a mindennapos gondolkodásunkban előfordulhat. A Mesterséges Intelligencia nevét onnan kapta, hogy az itt kidolgozott programok, algoritmusok, módszerek az emberi gondolkodást próbálják utánozni, és a technikában alkalmazhatóvá tenni. Ez manapság már igen sikeresnek mondható: például az ún. „okos” termékek már mindenki által elérhetőek.

E logikáról szóló fejezetekben tehát megadjuk azokat az alapokat, melyek segítségével az automatikus tételbizonyítás megérthető. Ez az út azonban nagyon hasznos szemléletet is ad más intelligens rendszerek működésének megértéséhez.

Az alábbi ábra az itt tanultak szerepét szemlélteti.



### Nulladrendű logika (ítéletkalkulus)

A nulladrendű logika egy **formális nyelv**. Minden formalizált nyelv két fontos részből áll: a szintaxis részből és a szemantika részből. A szintaxis megadja a nyelv elemeit és felépítésének szabályait, míg a szemantika mindezek értelmét írja le.

**Szintaxis:**

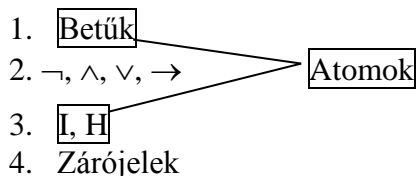
- Jelkészlet megadása
- Formulaképzés szabályai

**Szemantika:**

- A helyes szintaxisú formulák jelentése

## Szintaxis

### Jelkészlet:



### Formulák képzése:

1. Minden atom formula
2. Ha  $\alpha, \beta$  formula akkor  $\neg\alpha, \alpha\wedge\beta, \alpha\vee\beta, \alpha\rightarrow\beta$  is formulák
3. a fenti két szabály véges sokszori alkalmazásával kapjuk a formulákat

A magyar betűkkel az atomi formulákat, a görög betűkkel az összetett formulákat jelöljük.

## Szemantika

Először a jelkészlet elemeit értelmezzük.

A **betűk** az ún. **ítéletváltozók**. Nevüket az indokolja, hogy a köznap nyelv kijelentő mondatainak, kijelentéseinek felelnek meg. A klasszikus logikában csak olyan kijelentésekre gondolunk, amelyek igaz vagy hamis volta egyértelműen eldönthető. Ezáltal egyfajta ítéletet képviselnek e mondatok. Változók pedig azért, mert az eredeti kijelentés tartalmától függetlenül, csakis annak **igazságértékeit** vehetik fel: az igaz, vagy a hamis értékek valamelyikét.

Az **igazságértékek** tehát az ítéletváltozók lehetséges értékei, jelöljük ezek a halmazát  $I$ -vel.  $I$  csak a klasszikus logikában kételemű halmaz.

Azt a függvényt, amely a betűkkel jelölt változókhoz hozzárendeli a lehetséges igazságértékek valamelyikét, **interpretációnak** hívjuk. (Az interpretációk az igazságtábla atomokat tartalmazó oszlopaiban találhatók, ezen oszlopok minden egyes sora egy interpretáció.)

Praktikus, ha az  $I$  és  $H$  betűt kiemeljük a betűk közül, és rögzítjük igazságértéküket - ezáltal e betűk nem ítéletváltozók, hanem **ítéletkonstansok** lesznek. Az  $I$  betű igazságértéke **minden interpretációban** legyen igaz, a  $H$  betű igazságértéke **minden interpretációban** legyen hamis. A többi ítéletváltozó esetében az igazságérték az interpretációtól függ.

Tehát az ítéletváltozók és az ítéletkonstansok az ún. atomok, vagy **atomi formulák**, mert ezekből a műveletek segítségével építjük fel az **összetett, nem atomi formulákat**.

A **zárójelek** értelmezése és használata a matematikában szokásos módon történik: lényegében a műveletek kiértékelési sorrendjét tudjuk általuk meghatározni.

A  $\wedge, \vee, \rightarrow$  **jelek** az igazságértékeken értelmezett **műveleteknek** felelnek meg. E műveletek közül csak az egy-, és kétváltozós műveletek közül néhánynak van gyakorlati jelentősége. A műveletek definícióját szokás **kiértékelésnek**, kiértékelési szabálynak is nevezni. A kiértékelés az igazságtábla eredménynek megfelelő oszlopában van.

A műveleteket igazságtáblával értelmezzük. Ennek első oszlopai az ítéletváltozók lehetséges értékeit tartalmazzák, ezek tehát az ún. interpretációk. A többi oszlopban a művelet eredményeképpen kapott igazságérték áll.

### Egyváltozós művelet

**Negáció (tagadás):**

Igazságtáblázat:

Ítéletváltozó	Ítéletváltozó tagadása
A	$\neg A$
Igaz	Hamis
Hamis	Igaz
↑	↑
interpretációk	kiértékelések

A 4 egyváltozós művelet közül csak a negáció lényeges, a többi a gyakorlatban alig fordul elő.

## Kétváltozós műveletek

Általában infix jelölést használunk.

### Konjunkció

$A \wedge B$ : **informális jelentése:** és.

**Példa:** Esik az eső és süt a nap.

Ezt a mondatot az  $A \wedge B$  sémával lehet jellemezni.

Mikor gondoljuk igaznak ezt a két kijelentés összetételével kapott mondatot?

A konjunkció akkor és csak akkor igaz, ha mindkét változó igazságértéke igaz.

Igazságtáblázat:

interpretációk	Ítéletváltozók		Művelet	kiértékelések
	A	B	$A \wedge B$	
	I	I	I	
	I	H	H	
	H	I	H	
	H	H	H	

### Diszjunkció

$A \vee B$ : **informális jelentése:** vagy.

**Példa:** Esik az eső vagy süt a nap.

Ezt a mondatot az  $A \vee B$  sémával lehet jellemezni.

Mikor gondoljuk igaznak ezt a két kijelentés összetételével kapott mondatot?

A diszjunkció akkor és csak akkor hamis, ha mindkét változó igazságértéke hamis.

Igazságtáblázat:

interpretációk	Ítéletváltozók		Művelet	kiértékelések
	A	B	$A \vee B$	
	I	I	I	
	I	H	I	
	H	I	I	
	H	H	H	

### Implikáció

$A \rightarrow B$ : **informális jelentése:** ha A, akkor B.

**Példa:** Ha az iskolai tanulmányai alatt a tanuló/hallgató minden félévben legalább jeles átlageredményt ért el, akkor az állam egy aranygyűrűt ad ajándékba a diploma kiosztásakor. (Valójában ehhez még az is feltétel, hogy ne legyen hármasnál rosszabb jegye).

Ezt a mondatot az  $A \rightarrow B$  sémával lehet jellemezni.

Mikor gondoljuk igaznak ezt a két kijelentés összetételével kapott mondatot?

Az implikáció akkor és csak akkor hamis, ha az előtagja igaz, az utótagja hamis.

Igazságtáblázat:

interpretációk	Ítéletváltozók		Művelet	kiértékelések
	A	B	$A \rightarrow B$	
	I	I	I	
	I	H	H	
	H	I	I	
	H	H	I	

**Feladatok:**

Hány kétváltozós művelet van?

Mitől függ az interpretációk száma?

**Példák kiértékelésre:**

1. Adja meg az  $((A \vee B) \wedge C) \rightarrow (A \wedge \neg B)$  formula kiértékelését minden interpretációban!

A	B	C	$((A \vee B) \wedge C)$	$\rightarrow$	$(A \wedge \neg B)$
I	I	I	I	H	H
I	I	H	I	I	H
I	H	I	I	I	I
I	H	H	I	I	I
H	I	I	I	H	H
H	I	H	I	I	H
H	H	I	H	I	I
H	H	H	H	I	I

2. Adja meg az  $(A \rightarrow B) \wedge (A \wedge \neg B)$  formula kiértékelését minden interpretációban!

**Megoldás:**

A	B	$(A \rightarrow B)$	$\wedge$	$(A \wedge \neg B)$
I	I	I	H	H
I	H	I	H	I
H	I	H	H	H
H	H	H	H	I

3.

- Adja meg az  $(A \rightarrow B) \vee (A \wedge \neg B)$  formula kiértékelését minden interpretációban!

A	B	$A \rightarrow B$	$A \wedge \neg B$	$(A \rightarrow B) \vee (A \wedge \neg B)$
I	I	I	H	I
I	H	H	I	I
H	I	I	H	I
H	H	I	H	I

**Definíció: Tautológia** (azonosan igaz formula, érvényes formula): Az a formula, amely minden interpretációban igaz (például a 3. formula).

**Definíció Kontradikció** (ellentmondás, azonosan hamis, kielégíthetlen): Az a formula, amely minden interpretációban hamis (például a 2. formula).

A kétértékű logikában érvényes az ún. harmadik (érték) kizárásának elve, amelyet például az alábbi formulákkal is megfogalmazhatunk:

$A \wedge \neg A = H$  (kontradikció) – ez azt jelenti, hogy az  $A$  ítéletváltozó az igaz, hamis értékek közül pontosan egyet vehet fel (kétértékű logika).

$A \vee \neg A = I$  (tautológia) – ez informálisan azt jelenti, hogy az  $A$  ítéletváltozó az igaz, hamis értékek közül legalább az egyiket felveszi.

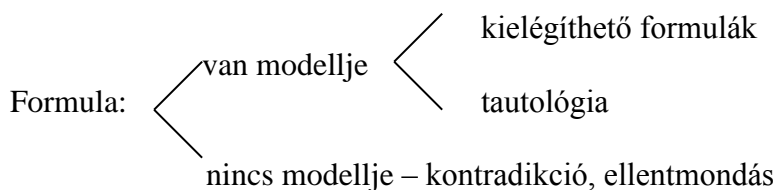
**Definíció: Modell:** modellnek nevezzük azt az interpretációt, amelyben a formula igaz.

**Feladatok:**

Mi a tautológia tagadása?

Mi a kontradikció tagadása?

Hány modellje van az 1., 2., 3 példákban szereplő formuláknak?



**Definíció: Ekvivalens** két formula,  $\alpha$  és  $\beta$ , ha minden interpretációban ugyanaz az igazságértékük. (A két formula közös igazságtáblájában a kiértékelésnek megfelelő oszlopok azonosak)

Jelölés:  $\alpha \equiv \beta$

**Példák fontos ekvivalens formulákra:**

1. A konjunktív normálformára hozáshoz nélkülözhetetlen:

$$\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg \alpha \vee \beta$$

$\alpha$	$\beta$	$\alpha \rightarrow \beta$	$\neg \alpha \vee \beta$
I	I	I	I
I	H	H	H
H	I	I	I
H	H	I	I

2. De Morgan azonosság 1.

$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$$

A	B	$A \vee B$	$\neg A \wedge \neg B$
I	I	H	H
I	H	H	H
H	I	I	I
H	H	I	I

3. De Morgan azonosság 2.

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$$

A	B	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$
I	I	H	H
I	H	I	I
H	I	I	I
H	H	I	I



**A konjunkció és diszjunkció tulajdonságai**

- |  |  |
|--|--|
| 1.a. $A \vee B \equiv B \vee A$                                | 1.b. $A \wedge B \equiv B \wedge A$                              |
| 2.a. $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$              | 2.b. $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$        |
| 3.a. $A \vee (A \wedge B) \equiv A$                            | 3.b. $A \wedge (A \vee B) \equiv A$                              |
| 4.a. $I \vee A \equiv I$                                       | 4.b. $H \wedge A \equiv H$                                       |
| 5.a. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ | 5.b. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ |
| 6.a. $A \vee \neg A \equiv I$                                  | 6.b. $A \wedge \neg A \equiv H$                                  |

**Feladat:** Igazolja igazságtáblázattal, hogy a fenti formulák valóban ekvivalensek!

**Halmazelméletben is hasonló azonosságok igazak:**

- |  |   |
|--|---|
| 1.a. $A \cup B = B \cup A$                             | 1.b. $A \cap B = B \cap A$                            |
| 2. a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$          | 2.b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$          |
| 3. a. $A \cup (A \cap B) = A$                          | 3.b. $A \cap (A \cup B) = A$                          |
| 4. a. $U \cup A = U$                                   | 4.b. $\emptyset \cap A = \emptyset$                   |
| 5. a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | 5.b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ |
| 6. a. $A \cup \bar{A} = U$                             | 6.b. $A \cap \bar{A} = \emptyset$                     |

Az olyan struktúrákat, amelyekben két művelet van definiálva, és van két kitüntetett elem, amelyekre a fenti azonosságok igazak, **BOOLE ALGEBRÁ**nak nevezzük.

**További példa:** a valószínűségszámításban Boole algebrát alkotnak az események.

## További kétváltozós művelet

## Ekvivalencia

Az ekvivalencia szót a logikában egy kétváltozós műveletre is használjuk. Az ekvivalencia, mint művelet az implikációból és a konjunkcióból származtatható:

**Definíció:**  $\alpha \leftrightarrow \beta := (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$

Az ekvivalencia akkor és csak akkor igaz, ha  $\alpha$  és  $\beta$  igazságértéke egyforma.

Az ekvivalencia igazságtáblázata:

$\alpha$	$\beta$	$\alpha \rightarrow \beta$	$\beta \rightarrow \alpha$	$(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$
I	I	I	I	I
I	H	H	I	H
H	I	I	H	H
H	H	I	I	I

**Feladat:** Ha  $\alpha$  és  $\beta$  ekvivalens formulák, mit tudunk mondani az  $\alpha \leftrightarrow \beta$  formuláról?

**Megjegyzés:** Noha az alapjelkészletben nem szerepelt a  $\leftrightarrow$  jel, ezt használhatjuk a definícióban megadott formula rövidítéseként.

**Lemma:** Minden (eddig felírt) igazságtábla igaz úgy is, ha az atomok helyett formulákat írunk.

**Lemma:**  $\alpha$  és  $\beta$  akkor és csak akkor ekvivalens, ha  $\alpha \leftrightarrow \beta$  tautológia.

**Bizonyítás:** a.  $\alpha$  ekvivalens  $\beta \Rightarrow \alpha \leftrightarrow \beta$  tautológia.

Ha  $\alpha$  és  $\beta$  igazságértéke megegyezik, akkor az ekvivalencia definíciója miatt csak igaz lehet  $\Rightarrow$  tautológia.

b. ha  $\alpha \leftrightarrow \beta$  tautológia  $\rightarrow$  csak igaz lehet, de ez pontosan akkor van, ha  $\alpha$  és  $\beta$  igazságértéke ugyanaz, vagyis  $\alpha$  ekvivalens  $\beta$ .

**Tétel:** Ha  $\alpha$  tautológia, akkor az ítéleváltozók helyébe formulákat írva tautológiát kapunk.

**Tétel:** Ha  $\alpha$  tautológia, akkor bármely részformula helyett azzal ekvivalens formulát írva tautológiát kapunk.

**Tétel:** Az ekvivalens nulladrendű formulák az összes formulák partícióját adják.

$$\leftrightarrow \text{ ha } \alpha \equiv \beta \left\{ \begin{array}{l} \alpha \equiv \alpha \text{ reflexív} \\ \alpha \equiv \beta \text{ és } \beta \equiv \alpha \text{ szimmetrikus} \\ \alpha \equiv \beta \text{ és } \beta \equiv \gamma \Rightarrow \alpha \equiv \gamma \text{ tranzitív} \end{array} \right\} \text{ Ekvivalencia reláció}$$

## A logikai következmény

Elérkeztünk a logika legfontosabb feladatának tárgyalásához: **a helyes következtetési sémák kialakításához.**

Példa következtetésekre régebbi jelölésekkel:

Az első példát nem tudjuk nulladrendű formulákkal jól modellezni:

Minden veréb madár.	Feltétel1
Minden madár gerinces.	Feltétel2
<b>Minden veréb gerinces.</b>	<b>Következmény</b>

Az alábbi példa nulladrendben is jól modellezhető:

Ha elfogy a benzin, az autó leáll.	Feltétel1
Elfogyott a benzin.	Feltétel2
<b>Az autó leáll.</b>	<b>Következmény</b>

$A$  = Elfogy a benzin,  $B$  = az autó leáll. A megfelelő séma:

$A$

$A \rightarrow B$

\_\_\_\_\_

$B$

Újabb jelöléssel:  $\{A, A \rightarrow B\} \models_0 B$

### Latin szavakkal:

1. feltétel	1. Premissza
2. feltétel.	2. Premissza
<b>Következmény</b>	<b>Konklúzió</b>

### Mikor helyes egy következtetési séma?

Ahhoz, hogy e kérdésre válaszolni tudjunk, értelmeznünk kell a következmény fogalmát.

**Definíció:** Modelleméleti vagy szemantikus következményfogalom: Azt mondjuk, hogy az  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  formulahalmaz **következménye** a  $\beta$  formula, ha minden olyan interpretációban, amelyben az  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  formulák igazak,  $\beta$  is igaz.

Más szavakkal:  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  formulahalmaz **következménye** a  $\beta$  formula, ha  $\beta$  **legalább akkor igaz**, amikor az  $\alpha_i$ -k igazak.

**Jelölés:**  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \models_0 \beta$

**Megjegyzés:** Mivel az elsőrendű logika következményfogalma nem teljesen azonos a nulladrendűével, ezért az indexben szokás azt is jelölni, hogy melyik nyelvről van szó:  $\models_0$   
Az elsőrendű logikában a következményfogalom jele:  $\models_1$

Ha  $\beta$  tautológia, akkor minden interpretációban igaz, tehát abban is, amelyekben az  $\alpha_i \rightarrow k$ . Ezért a tautológia bármely formulahalmaz következménye. Ez indokolja a tautológia jelölését:  $\models_0 \beta$ .

A következményfogalom definíciójának egyszerű következményei:)

- $\alpha_i$ -k közös modellje  $\beta$ -nak is modellje (fordítva az állítás nem igaz)
- **tautológia következménye csak tautológia lehet: tautológia  $\models_0$  tautológia**
- **a tautológia bármely  $\alpha$  formula következménye:  $\alpha \models_0$  tautológia,**
- **kontradikciónak bármi lehet a következménye (spec. A is és az A tagadása is) : Kontradikció  $\models_0 \alpha$**
- **kontradikció csak kontradikciónak lehet következménye (hiszen más formula esetén igaznak kellene lennie ott, ahol a formula igaz): kontradikció  $\models_0$  kontradikció**

Most már válaszolni tudunk a fejezet elején feltett kérdésre, melyek a helyes következtetési sémák.

**Definíció:** Azokat a következtetési sémákat tekintjük helyesnek, amelyekben a következmény valóban a feltételek (szemantikai) következménye.

### Példák helyes következtetési sémákra (szabályokra)

1. Modus ponens (leválasztási szabály):  $\{\alpha, \alpha \rightarrow \beta\} \models_0 \beta$

Azt kell vizsgálnunk, ahol  $\alpha$  és  $\alpha \rightarrow \beta$  igaz, ott a  $\beta$  igaz-e. Ha igen, akkor helyes, ha nem, akkor helytelen a következtetési séma. Csak az első interpretációban teljesül, hogy  $\alpha$  és  $\alpha \rightarrow \beta$  igaz. Ebben a interpretációban  $\beta$  is igaz, tehát valóban  $\{\alpha, \alpha \rightarrow \beta\} \models_0 \beta$ .

Ítéletváltozók		
$\alpha$	$\beta$	$\alpha \rightarrow \beta$
I	I	I
I	H	H
H	I	I
H	H	I

$\frac{A \quad A \rightarrow B}{A}$	MODUS PONENS
-------------------------------------	--------------

**Feladat:** Bizonyítsa be, hogy az alábbi következtetési sémák helyesek!

- Modus tollens (elvető mód, kontrapozíció):  $\{\alpha \rightarrow \beta, \neg \beta\} \models_0 \neg \alpha$
- Hipotetikus szillogizmus (feltételes szillogizmus, láncszabály):  $\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma\} \models_0 \alpha \rightarrow \gamma$
- Modus tollendo ponens / diszjunktív szillogizmus (elvéve helyező mód):  $\{\alpha \vee \beta, \neg \beta\} \models_0 \alpha$

- Indirekt:  $\{\neg\alpha \rightarrow \neg\beta, \beta\} \models_0 \alpha$

**Tétel:**  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \models_0 \beta$  akkor és csak akkor, ha  $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n \models_0 \beta$

**Bizonyítás:**  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  együttesen akkor és csak akkor igaz, ha  $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n$  igaz.

E tétel miatt a  $\models_0$  jel bal oldalát a továbbiakban egyszerűen  $\alpha$ -val jelöljük, ahol  $\alpha$ -n mindig  $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n$  formulát értjük.

**Tétel:**  $\alpha \models_0 \beta$  akkor és csak akkor, ha  $\alpha \rightarrow \beta$  tautológia.

**Bizonyítás:**

**a.) ha  $\alpha \models_0 \beta$  akkor  $\alpha \rightarrow \beta$  tautológia:**

a jelölt sor ez esetben nem lehet az igazságtáblában, ugyanis akkor  $\alpha \models_0 \beta$  nem teljesülne, hiszen ekkor  $\beta$ -nak legalább akkor kell igaznak lennie, amikor  $\alpha$  igaz. A maradék sorokra pedig valóban az I az igazságérték.

$\alpha$	$\beta$	$\alpha \rightarrow \beta$
I	I	I
I	H	H
H	I	I
H	H	I

**b.) ha  $\alpha \rightarrow \beta$  tautológia, akkor  $\alpha \models_0 \beta$ :**

Ha  $\alpha \rightarrow \beta$  tautológia, akkor a fenti igazságtáblában jelölt sor nem szerepelhet, hanem csak a jelöletlen, I sorok. Ezekben a sorokban viszont valóban a  $\beta$  legalább ott igaz, ahol az  $\alpha$ .

**Példa:** Modus ponens:  $\{\alpha, \alpha \rightarrow \beta\} \models_0 \beta$  helyes:

Ítéletváltozók		Formulák		
$\alpha$	$\beta$	$\alpha \rightarrow \beta$	$(\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow \beta$	$\beta$
I	I	I	I	I
I	H	H	H	I
H	I	I	H	I
H	H	I	H	I

**Feladat:** A fenti módszerrel bizonyítsa be, hogy az alábbi következtetési szabályok helyesek!

- Modus tollens:  $\{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\} \models_0 \neg\alpha$
- Hipotetikus szillogizmus:  $\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma\} \models_0 \gamma$
- Modus tollendo ponens / diszjunktív szillogizmus (elvéve helyező mód)  $\{\alpha \vee \beta, \neg\beta\} \models_0 \alpha$
- Indirekt:  $\{\neg\alpha \rightarrow \neg\beta, \beta\} \models_0 \alpha$

**Tétel:**  $\alpha \models_0 \beta$  akkor és csak akkor, ha  $\alpha \wedge \neg\beta$  azonosan hamis.

**Bizonyítás:**  $\alpha \models_0 \beta$  akkor és csak akkor, ha  $\alpha \rightarrow \beta$  tautológia, vagyis  $\neg(\alpha \rightarrow \beta)$  **kontradikció** (azonosan hamis):  $\neg(\alpha \rightarrow \beta) = \neg(\neg\alpha \vee \beta) = \neg\neg\alpha \wedge \neg\beta = \alpha \wedge \neg\beta$

**Példa:** Modus ponens  $\{\alpha, \alpha \rightarrow \beta\} \models \beta$  helyes:

Ítéletváltozók		Formulák		
$\alpha$	$\beta$	$\alpha \rightarrow \beta$	$(\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta))$	$\wedge \neg \beta$
I	I	I	I	H
I	H	H	H	H
H	I	I	H	H
H	H	I	H	H

**Feladat:** A fenti módszerrel bizonyítsa be, hogy az alábbi következtetési szabályok helyesek!

- Modus tollens:  $\{\alpha \rightarrow \beta, \neg \beta\} \models \neg \alpha$
- Hipotetikus szillogizmus:  $\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma\} \models \gamma$
- Modus tollendo ponens / diszjunktív szillogizmus (elvéve helyező mód)  $\{\alpha \vee \beta, \neg \beta\} \models \alpha$
- Indirekt:  $\{\neg \alpha \rightarrow \neg \beta, \beta\} \models \alpha$

**Tétel: A rezolúció alap következtetési szabálya:**  $\{\alpha \vee \beta, \gamma \vee \neg \beta\} \models \alpha \vee \gamma$

Ez a szabály tulajdonképpen diszjunktív szillogizmus általánosítása.

**Definíció:** Az  $\alpha \vee \beta$  és  $\gamma \vee \neg \beta$  formulák ún. **klózok**. E két klóz **rezolvense**  $\alpha \vee \gamma$ .

**A rezolúció alap következtetési szabályának bizonyítása** többféleképpen történhet:

- definíció alapján (házi feladat)
- $\alpha \models \beta$  akkor és csak akkor, ha  $\alpha \rightarrow \beta$  tautológia (házi feladat)
- $\alpha \models \beta$  akkor és csak akkor, ha  $\alpha \wedge \neg \beta$  azonosan hamis (előadáson)

**Alkalmazás:** automatikus tételbizonyítás, **rezolúció** (PROLOG nyelv) alapelve.

Ahhoz, hogy a rezolúciós technikát ellően értékelni tudjuk, válaszoljunk az alábbi kérdésre.

**Feladat:**

Hány interpretáció van, ha az ítéletváltozók száma  $n$ ?

A következményfogalom eldöntésére bizonyított tételekben az összes interpretációt meg kell vizsgálni. Ez **exponenciális nagyságrendű** feladat, vagyis  $n$  ítéletváltozó esetén  $2^n$ . Ez már 6 változó esetén is igazán embert próbáló rabszolgamunka, de még kivitelezhető.

Az alábbi táblázat azt mutatja, ha egy szuperszámítógép 10 ítéletváltozó összes interpretációját megadja 0,001 sec alatt, akkor 60 változóét 366 évszázad alatt adja meg. S utána még ki is kell értékelni az adott formulát! Így hát emberi erővel ezek a számítások már nem végezhetők el.

### Ítéletváltozók

száma, $n$ :	10	20	30	40	50	60
$2^n$	0.001sec	1.0 sec	17.9 perc	12.7 nap	35.7 év	366 évszázad

Ezért volt forradalmi jelentőségű **Robinson** rezolúciós felfedezése 1965-ben, amely ezt az exponenciális nagyságrendet csökkenti. A nagyságrendekkel és az algoritmusok komplexitásával egy külön fejezetben foglalkozunk.

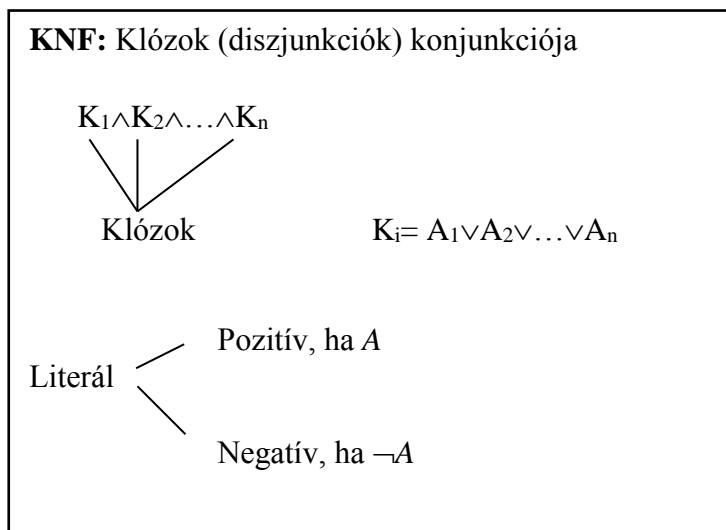
Robinson elméletének alkalmazásához a formulákat speciális alakra, ún. klóz formára kell hozni. E szóval már a fentiekben találkoztunk, most megadjuk ennek általános definícióját.

### Definíciók:

**K**onjunktív **N**ormál**F**orma, **KNF**: a  $K_i$  **klózek** konjunkciója.

**Klóz**: literálok diszjunkciója.

**Literál**: atom, vagy annak tagadása.



**Tétel**: Minden formulához létezik vele ekvivalens konjunktív normálforma.

### Bizonyítás:

Az alábbi ekvivalens formulák alkalmazásával a konjunktív normálforma elérhető:

1. Az implikációk kiküszöbölése:  $\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg \alpha \vee \beta$
2. A negáció hatáskörének egy atomra redukálása:  
De Morgan  $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg \alpha \vee \neg \beta$   
 $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg \alpha \wedge \neg \beta$
3. A disztributív szabály alkalmazásával a klóz forma létrehozása:  $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$

**Definíció**: DNF (diszjunktív normálforma): konjunkciók diszjunkciója.

**Tétel**: Minden formulához létezik vele ekvivalens diszjunktív normálforma.

**Megjegyzés:** A KNF és DNF duális formák: a KNF  $\wedge$  helyett  $\vee$ , a  $\vee$  helyett  $\wedge$  szerepel a DNF-ben.

**Következmény:**

**(Funkcionálisan) teljes rendszerek**

Fentiekből szerint, minden formula kifejezhető a  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\neg$  műveletekkel. Ezért azt mondjuk, hogy e három művelet **teljes** rendszert alkot. A De Morgan azonosságokból azonnal adódik, hogy  $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg \alpha \wedge \neg \beta$ , így  $\wedge$ ,  $\neg$ , és hasonlóképpen bizonyíthatóan a  $\vee$ ,  $\neg$  is funkcionálisan teljes halmaz. A  $\wedge$ ,  $\vee$  műveletekkel viszont nem lehet a  $\neg$ -t kifejezni, így a konjunkció és diszjunkció együttesen NEM alkot teljes rendszert.

**Feladat:**

Bizonyítsa be, hogy a  $\rightarrow$  és  $\neg$  teljes rendszert alkot! (Melyik implikáció ekvivalens  $\alpha \vee \beta$ -val?)

**Példa:** Hozza konjunktív normálformára az alábbi formulát!

$$\begin{aligned} \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \vee A) \rightarrow (C \vee B))] &\equiv \neg[(\neg A \vee B) \rightarrow (\neg(C \vee A) \vee (C \vee B))] \equiv \neg[\neg(\neg A \vee B) \vee (\neg(C \vee A) \vee (C \vee B))] \equiv \\ &\equiv \neg[\neg(\neg A \vee B) \vee ((\neg C \wedge \neg A) \vee (C \vee B))] \equiv \neg[(A \wedge \neg B) \vee (\neg C \wedge \neg A) \vee (C \vee B)] \equiv \\ &\equiv \neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(\neg C \wedge \neg A) \wedge \neg(C \vee B) \equiv (\neg A \vee B) \wedge (C \vee A) \wedge (\neg C) \wedge \neg B \end{aligned}$$

A klózok:

$$K1 = (\neg A \vee B)$$

$$K2 = (C \vee A)$$

$$K3 = (\neg C)$$

$$K4 = \neg B$$

Tétel volt, hogy  $\alpha \models_0 W$  akkor és csak akkor, ha  $\alpha \wedge \neg W$  kontradikció, vagyis  $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n$  miatt  $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n \wedge \neg W$  kontradikció. Ha adott az  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  formulahalmaz, e tétel alapján most **rezolúcióval** fogjuk eldönteni, hogy  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \models_0 W$ .

**Mikor igaz egy KNF?**

Ha minden benne szereplő klóz igaz. A klózokban viszont lehetnek negált és negátlan, azonos literálok. Ezek együttesen nem lehetnek igazak az egész formulában, ezért a rezolúció alap következtetését alkalmazva ezeket a klózpárokból, amelyekben szerepelnek, elhagyjuk, és a „maradékból” egy klózt képezünk, ez a **rezolvens**. Mivel ez logikai következménye az eredeti klózhalmaznak, legalább azokban az interpretációkban igaznak kell lennie, amelyekben az eredetiek igazak. Ezért az így kapott klózzal bővítjük a formulát, és ezen új formula keressük.

**A fentiek alkalmazása a rezolúciós bizonyításban:**

Adott az  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  formulahalmaz. El szeretnénk dönteni, hogy  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \models_0 W$ ?

W-t is, és a feltételhalmaz formuláit is konjunktív normálformára hozzuk. Ekkor világos, hogy az  $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n \wedge \neg W$  formula is KNF-ben van. Azt kell tehát megnézni, hogy van-e modellje. A fenti megjegyzés értelmében olyan klózokat keresünk, amelyekben azonos atom pozitív és negatív



literálja szerepel. Ezekből a fent leírt módon konstruáljuk az új klózt, a rezolvenst. Az eljárás akkor ér véget, ha egy negált és egy negálatlan literál önmaga alkot egy-egy klózt. Ezek rezolvense az üres klóz, az azonosan hamis klóz (NIL-nek is nevezik). Szokásos jele:  $\square$

**Definíció:** Üres klóz, ellentett literálpárból jön létre, neve **NIL**, szokásos jele:  $\square$

$\neg P$   
 $\underline{P}$   
 $\square$

**Példa:** Adott  $\{P_1, P_1 \rightarrow Q_1, Q_1 \rightarrow Q_2\} = AB$  (adatbázis)

**Kérdés:**  $Q_2$  következmény-e?

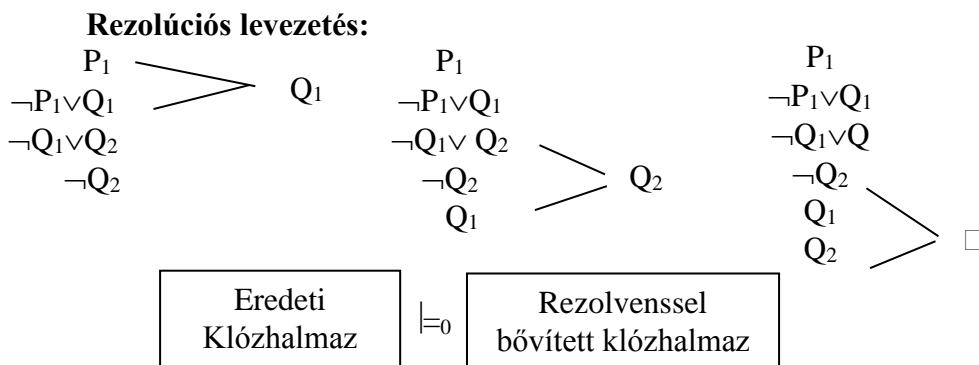
**Megoldás:**  $\{P_1, P_1 \rightarrow Q_1, Q_1 \rightarrow Q_2\}$  a feltételek halmaza, mindegyiket KNF-re kell hozni:

$AB = \{P_1, \neg P_1 \vee Q_1, \neg Q_1 \vee Q_2\}$

$W = Q_2$ , tagadása:  $\neg Q_2$  (tagadás  $\Rightarrow$  indirekt feltevés)

Fentiek értelmében azt kell belátni, hogy az  $AB \cup \{\neg Q_2\}$  formulahalmaz elemeinek nincsen modellje, nincsen olyan interpretáció, amelyben igaz lehetne.

**Informálisan:** Ha például  $P_1$  igaz  $\Rightarrow \neg P_1$  nem lehet igaz a 2. klózban, ezért mivel minden klóznak igaznak kell lennie, a  $Q_1$  literálnak igaznak kell lennie  $\Rightarrow \neg Q_1$  ekkor hamis a 3. klózban, ami szerint tehát  $Q_2$  igaz, de ekkor már ellentmondásra jutottunk, hiszen  $Q_2$  és  $\neg Q_2$  egyszerre nem lehet igaz. (Azért kellene nekik egyszerre igaznak lenni, mert különböző klózokban szerepelnek, és az egész formula igazságát az összes klóz igaz értéke garantálja. Így azonban nagyon nehéz **bizonyítani**, hiszen minden lehetséges értékadásra végig kellene nézni. Ezt oldja meg a rezolúció.



(a vonalak kezdőpontjai a rezolválható klózek, a végpontjai pedig a rezolvensek)

Rezolvense  $\Rightarrow$  kielégíthetetlen

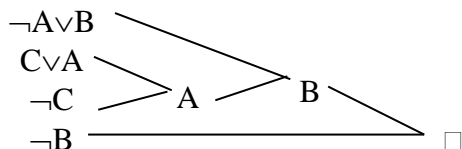
$\left. \begin{array}{l} P_1 \\ \neg P_1 \vee Q_1 \\ \neg Q_1 \vee Q_2 \\ \neg Q_2 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ \square \end{array} \right\} \text{ Ennek a klózhalmaznak nincsen modellje } \\ \text{a } \square \text{ miatt.}$

**Példa:** Igazoljuk, hogy az alábbi  $\varphi$  formula tautológia!

$$\varphi = [(A \rightarrow B) \rightarrow [(C \vee A) \rightarrow (C \vee B)]]$$

**Megoldás:**  $\varphi$  akkor és csak akkor tautológia, ha  $\neg\varphi$  kielégíthetetlen  $\Rightarrow \neg\varphi$ -t KNF-re írjuk át.

$$\neg\varphi = \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow [(C \vee A) \rightarrow (C \vee B)]] \equiv \dots \equiv (\neg A \vee B) \wedge (C \vee A) \wedge (\neg C) \wedge (\neg B)$$



Tehát az eredeti formula tautológia (hiszen tagadása kielégíthetetlen)

**Példa:**

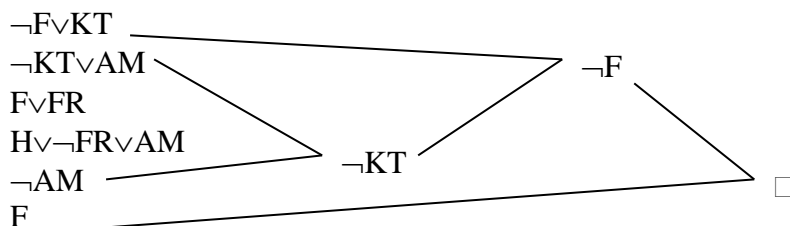
Részlet egy nyomozás jegyzőkönyvéből (Páosztorné Varga Katalin: Matematikai logika és alkalmazásai, ELTE, 1991.):

1. Ha férfi a tettes (**F**), akkor kistermetű(**KT**). ( $F \rightarrow KT \equiv \neg F \vee KT$ )
2. Ha kistermetű a tettes(**KT**), akkor az ablakon keresztül mászott be(**AM**). ( $KT \rightarrow AM \equiv \neg KT \vee AM$ )
3. A tettes férfi(**F**), vagy férfiruhát hordott(**FR**). ( $F \vee FR$ )
4. Ha a tettes férfiruhát hordott(**FR**) – és a szemtanú hiteles(**H**) – akkor az ablakon keresztül mászott be(**AM**) ( $H \wedge FR \rightarrow AM \equiv \neg(H \wedge FR) \vee AM \equiv \neg H \vee \neg FR \vee AM$ )
5. Helyszíni szemle: a tettes nem az ablakon mászott be. ( $\neg AM$ ).

Kérdés: férfi,  $F$ , vagy nő,  $\neg F$ , a tettes?

Adott  $\{\neg F \vee KT, \neg KT \vee AM, F \vee FR, \neg H \vee \neg FR \vee AM, \neg AM\}$  klózhalmoz.

1. Tegyük fel, hogy nő a tettes:  $\neg F$ . A klózhalmozhoz hozzávesszük  $\neg F$  tagadását:  $F$
2. Rezolúcióval eldöntjük a klózhalmoz kielégíthetlenségét.

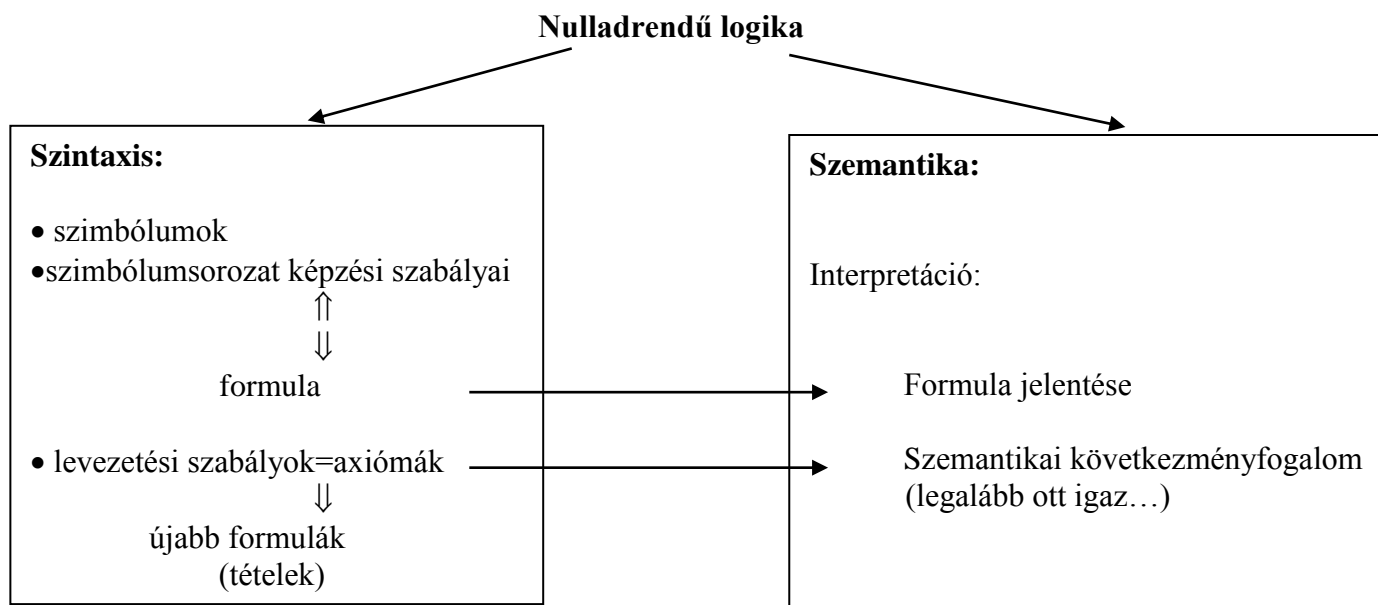


$\square \rightarrow$  tautológia  $\Rightarrow \neg F$  (tehát nem férfi a tettes)

Eddig a nulladrendű logikák szemantikájával foglalkoztunk.

Felvetődik a kérdés, hogy vajon a szintaktika ad-e lehetőséget a következmény fogalmára?

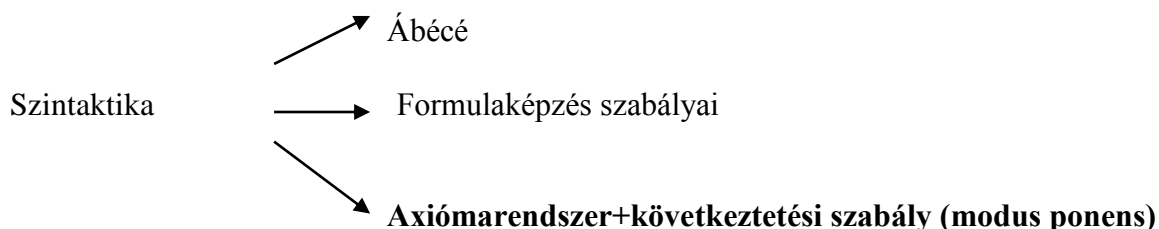
A válasz igen, az alábbi táblázat tartalmazza a megfelelő elnevezéseket.



szemantikai tulajdonságok	szintaktikai tulajdonságok
tautológia vagy logikailag igaz	bizonyítható
F-nek következménye G	F-ből levezethető G
F kielégíthetetlen, nincs modellje	F ellentmondásos

A fenti táblázatok alapján érthető, hogy a logikai következmény szintaktikai úton is megfogalmazható, csak le kell rögzíteni, mik a levezetési szabályok.

A szintaktika fogalmát tehát kibővítjük az axiómákkal és levezetési szabályokkal:



**ALAPKÉRDÉSEK:**

**Helyesség:** Helyes-e a nulladrendű logika? Ha egy formula valamely formulahalmazból (szintaktikailag) levezethető, akkor az vajon ugyenezen formulahalmaznak szemantikai következménye-e, és fordítva?

**Tétel:** Ha  $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \vdash_0 G$  akkor  $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \models_0 G$ . (**Helyesség**)

**Teljesség:** Ha valamely formula egy formulahalmaznak szemantikai következménye, akkor vajon levezethető-e ezen formulahalmazból?

**Tétel:** Ha  $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \models_0 G$ , akkor  $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \vdash_0 G$ . (**Teljesség**)

**Definíció:** Azt mondjuk, hogy az  $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$  formulahalmazból levezethető a  $G$  formula, ha van olyan  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_k$  formulasorozat, amelyre a  $\varphi_k$  formulák :

- $F$ -ből valók vagy
- axiómák vagy
- Modus Ponenssel keletkezett a megelőző formulákból

Jelölés:  $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \vdash_0 G$

**Ha üres formulahalmazból is levezethető a  $G$ , akkor tételnek nevezzük, és a levezetést bizonyításnak.**

**Szokásos axiómarendszer nulladrendben (vannak más axiómarendszerek is):**

A1:  $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

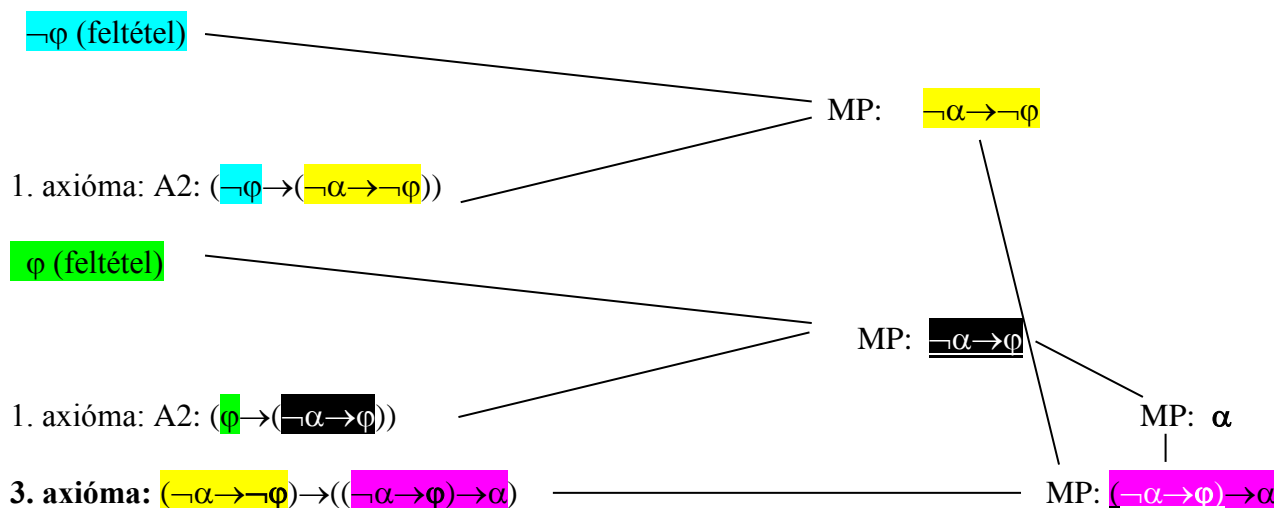
A2:  $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

A3:  $(\neg \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\neg \alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow \alpha)$

Modus Ponens következtetési szabály:  $\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha\} \vdash_0 \beta$

**Példa (ellentmondásos rendszerből minden levezethető):  $\{\neg \varphi, \varphi\} \vdash_0 \alpha$**

**Levezetés:**



**Példa (indirekt bizonyítás):**
 $\{\neg\alpha \rightarrow \neg\beta, \beta\} \vdash_0 \alpha$ 
 $\varphi_1: \beta$  (feltétel)

1. Axióma:

 $\varphi_2: \beta \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$ 

Az **axiómák** a könnyebb olvashatóság kedvéért:

A1:  $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

A2:  $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

A3:  $(\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \alpha)$

Modus Ponens (MP) következtetési szabály:  $\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha\} \vdash_0 \beta$

MP:  $\varphi_3: \neg\alpha \rightarrow \beta$

 $\varphi_4: \neg\alpha \rightarrow \neg\beta$  (feltétel)

3. Axióma:

MP:  $\varphi_6: (\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha$

MP:  $\varphi_7: \alpha$

 $\varphi_5: (\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha)$ 
 $\varphi_6: (\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha$ 

A  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots \varphi_7$  formulasorozattal levezettük  $\alpha$ -t a kiindulási formulákból.

A nulladrendű logikában tehát az alapkérdések:

**SZINTAXIS**
 $\vdash_0 \varphi$ 

Ha  $\varphi$  tétel, vajon tautológia-e?

**SZEMANTIKA**
 $\models_0 \varphi$ 

Ha  $\varphi$  tautológia, vajon tétel-e?

**Gödel (1906-1978) bizonyította be az első, ún. teljességi tételt.**

**Tétel:** A nulladrendű logika helyes és teljes. (Bizonyítás nélkül)

**Teljes:** Minden tautológiának van levezetése.

**Helyes:** Minden tétel tautológia.