Parciális deriváltak

1.) $f(x,y) = \ln(xy^2)$

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f'_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$$

$$= \frac{1}{x \cdot y^2} \cdot y^2 = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x \cdot y^2} \cdot 2xy = \frac{2}{y}$$

ez lehetne furcsa is, hogy csak egy változótól függenek azért van, mert

$$\ln(xy^2) = \ln x + 2\ln y$$

2.) $f(x,y) = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$ $\qquad \left((\mathrm{arctg}\,x)' = \frac{1}{1+x^2} \right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x + \frac{y^2}{x}} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

3.) $f(x,y) = -x^3y^2\cos(x^2+y^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2y^2\cos(x^2+y^2) - x^3y^2 \cdot (-\sin(x^2+y^2)) \cdot 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x^3y \cdot \cos(x^2+y^2) - x^3y^2 \cdot (-\sin(x^2+y^2)) \cdot 2y$$

4., $u(t,x) = \sin(x-at)$, $a \in \mathbb{R}$

Mutassuk meg, hogy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(u kielégíti a hullámegyenletet)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \cos(x-at)\cdot(-a), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\sin(x-at)\cdot(-a)^2 = -a^2 \sin(x-at)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos(x-at), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin(x-at)$$

tehát valóban $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

5., Milyen $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ -re teljesül, hogy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = xy \quad \text{és} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = y + \frac{x^2}{2} \; ?$$

ötlet: integráljunk! azt várjuk, hogy

"$f = \int \frac{\partial f}{\partial x}\, dx = \int \frac{\partial f}{\partial y}\, dy$"

$$f(x,y) = \int xy\, dx = \frac{x^2 y}{2} + c_1(y)$$

konstans az integrál változója szerint

$$f(x,y) = \int \left(y + \frac{x^2}{2}\right) dy = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2 y}{2} + c_2(x)$$

Tehát

$$\cancel{\frac{x^2 y}{2}} + c_1(y) = \frac{y^2}{2} + \cancel{\frac{x^2 y}{2}} + c_2(x).$$

$$c_1(y) = \frac{y^2}{2} + c_2(x)$$

csak y-tól függ $\Rightarrow$ csak y-tól függhet

$$\Rightarrow \quad c_2(x) \equiv c_2 \in \mathbb{R}$$

$$c_1(y) = \frac{y^2}{2} + c_2$$

azaz

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{2} + \frac{y^2}{2} + c_2$$

Érintősík

1D

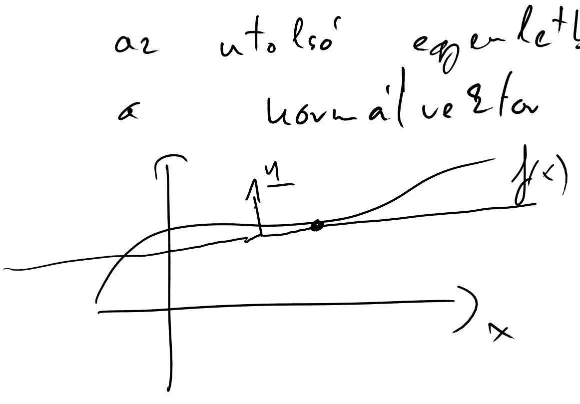
érintőegyenes

$$y = y(x) = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$

$$\Rightarrow \quad 0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0) - y$$

$$\Rightarrow \quad 0 = f'(x_0)\,(x - x_0) - \big(y - f(x_0)\big)$$

az utolsó egyenletből leolvasható, hogy a normálvektor $\underline{n} = \begin{bmatrix} f'(x_0) \\ -1 \end{bmatrix}$



2D

érintősík

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) - (z - f(x_0,y_0))$$

normálvektor $\quad \underline{n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\ -1 \end{bmatrix}$

sík egyenlete

$P = (x,y,z)$

$P_0 = (x_0, y_0, f(x_0,y_0))$

$0 = \underline{n}\cdot(P - P_0)$

- 1D: érintőegyenes = 1. fokú Taylor polinom = lineáris közelítés
- 2D: érintősík = 1. fokú Taylor polinom = lineáris közelítés

6./ $f(x,y) = x^2 + 3y^2$, $(x_0,y_0) = (1,2)$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)\cdot(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\cdot(y-2) - (z - f(1,2))$$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 6y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 12$

$f(1,2) = 13 = 1^2 + 3\cdot 2^2$

$\Rightarrow 0 = 2(x-1) + 12(y-2) - (z-13)$

7., $f(x,y)=2e^{-x}\cos y$, $(x_0,y_0)=(0,\pi/3)$

érintősík

$$0=\frac{\partial f}{\partial x}(0,\pi/3)\cdot(x-0)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,\pi/3)\cdot\left(y-\frac{\pi}{3}\right)-\left(z-f(0,\pi/3)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-2e^{-x}\cos y,\quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,\pi/3)=-2\cdot e^{-0}\cdot\cos\frac{\pi}{3}=-2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=-1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-2e^{-x}\sin y,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,\pi/3)=-2\cdot e^{-0}\cdot\sin\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$$

$$f(0,\pi/3)=2\cdot e^{-0}\cdot\cos\frac{\pi}{3}=1$$

$$\Rightarrow 0=-x-\sqrt{3}\left(y-\pi/3\right)-(z-1)$$

8., $f(x,y)=\ln(xy)$

A függvény mely pontjában párhuzamos az érintősík az $x+y+z=0$ síkkal?

Mikor párhuzamos két sík?

ha a normálvektorok egymás többszörösei

$x+y+z=0$ sík normálvektora

$$\underline{n}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)-\left(z-f(x_0,y_0)\right)=0$$

sík normálvektora

$$\underline{n}_2=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\\\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\\-1\end{bmatrix}$$

Azt szeretném, hogy valamilyen $c \in \mathbb{R}$-re

$$\underline{n}_1 = c\,\underline{n}_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} \frac{1}{x_0} \\ \frac{1}{y_0} \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad 1 = \frac{c}{x_0} \qquad x_0 = -1$$

$$1 = \frac{c}{y_0} \qquad y_0 = -1$$

$$\underline{1 = c(-1)} \Rightarrow c = -1$$

azaz a keresett sík

$$0 = -(x+1) - (y+1) - (z - \underbrace{\ln((-1)\cdot(-1))}_{0})$$

$$= -(x+1) - (y+1) - z$$