ANALÍZIS II.

Gyakorló feladatok. a 3. Zh-hoz

2024. május

1. Hármas integrálok

Számítsa ki az alábbi hármas integrálokat, integráljon más sorrendben is:

2.39.

$$\int_0^2 \int_0^1 \int_0^3 (2x - 4y + 6z - 3)\, dz\, dy\, dx$$

2.40.

$$\int_1^3 \int_1^3 \int_1^3 (x + y + z)\, dx\, dy\, dz$$

2.41.

$$\int_2^3 \int_1^2 \int_1^1 xyz\, dx\, dy\, dz$$

2.45.* Mennyi a

$$\iiint\limits_R (x^2 + z^2)\, dR$$

integrál értéke ahol R az $x^2 + y^2 = 4$ hengernek a $z = 0$ és $z = 8$ síkok közé eső része!

2.47.* Számítsa ki a

$$\iiint\limits_R zyx^2\, dR$$

integrált az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ gömb $x \geqq 0$ nyolcadára!

1. Hármas integrálok. Megoldás.

2.39. 36.

2.40. 48.

2.45. Az integrált henger-koordinátákban számoljuk ki. A helyettesítés:

$$x = r\ \cos\theta, \quad y = r\ \sin\theta, \quad z = z,$$

és

$$dx\ dy\ dz = r\ dr\ d\theta\ dz.$$

Az integrálás határai:

$$0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 8.$$

Az integrál értéke:

$$I = \frac{2144}{3}\pi = 2254.19.$$

2. Homogén LDE, általános megoldás

Határozzuk meg a következő állandó együtthatós lineáris DE-k általános megoldását:

$\boxed{\textbf{4.1.}}$ $y'' - y = 0$

$\boxed{\textbf{4.2.}}$ $y'' + y = 0$

$\boxed{\textbf{4.3.}}$ $y'' + 2y' - 15y = 0$

$\boxed{\textbf{4.4.}}$ $y'' + 2y' + y = 0$

$\boxed{\textbf{4.5.}}$ $y'' + 12y' + 45y = 0$

$\boxed{\textbf{4.6.}}$ $y^{(5)} - y' = 0$

4.7. $y^{(5)} - 8y''' + 16y' = 0$

4.8. $y^{(7)} + 2y^{(5)} + y''' = 0$

4.9. $y^{(4)} - y = 0$

4.10. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

4.11. $y'' - 6y' + 8y = 0$

4.12. $4y'' + 4y' + y = 0$

4.13. $y'' - 2y' + 5y = 0$

4.14. $6y'' - 5y' + y = 0$

2. Feladat megoldások

$\boxed{\textbf{4.1.}}$ $y = c_1e^x + c_2e^{-x},\ c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$

$\boxed{\textbf{4.2.}}$ $y = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x),\ c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$

$\boxed{\textbf{4.3.}}$ $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-5x},\ c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$

$\boxed{\textbf{4.4.}}$ $y = (c_1 + c_2x)e^x,\ c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$

$\boxed{\textbf{4.5.}}$ $y = e^{-6x}(c_1 \cos(6x) + c_2 \sin(6x)),\ c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$

$\boxed{\textbf{4.6.}}$ $y = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x} + c_4 \cos(x) + c_5 \sin(x),\ c_1,\ c_2, c_3\, c_4,\ c_5 \in \mathbb{R}$

4.7. $y = c_1 + (c_2 + c_3x)e^{2x} + (c_4 + c_5x)e^{-2x},\ c_1,\ c_2, c_3\, c_4,\ c_5 \in \mathbb{R}$

3. Homogén LDE, konkrét megoldás

1a Oldja meg az alábbi kezdetiérték feladatot:

$$y'' + 4y' + 13y = 0, \qquad y(0) = 2,\ y'(0) = 1.$$

1b Oldja meg az alábbi perem érték feladatot:

$$y'' + 4y' + 13y = 0, \qquad y(0) = 2,\ y(1) = 1.$$

2a Oldja meg az alábbi kezdetiérték feladatot:

$$y'' - y = 0, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$$

2b Oldja meg az alábbi perem érték feladatot:

$$y'' - y = 0, \qquad y(0) = 1,\ y(1) = e.$$

3a Oldja meg az alábbi kezdeti érték feladatot:

$$y'' + 2y' + y = 0, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$$

3b Oldja meg az alábbi perem érték feladatot:

$$y'' + 2y' + y = 0, \qquad y(0) = 1,\ y(1) = 0.$$

4a Oldja meg az alábbi kezdeti érték feladatot:

$$y'' + y = 0, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 1/2.$$

4b Oldja meg az alábbi perem érték feladatot:

$$y'' + y = 0, \qquad y(0) = 1,\ y(\pi/2) = 1/2.$$

5a Oldja meg az alábbi kezdeti érték feladatot:

$$y''' - y' = 0, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 2.$$

5b Oldja meg az alábbi perem érték feladatot:

$$y''' - y' = 0, \qquad y(0) = 1,\ y(1) = 1 + e,\ y(-1) = 1 + \frac{1}{e}.$$

4. Fourier transzformáció

FT1 Számolja ki az alábbi függvények Fourier-transzformáltját :

$$f(x) = e^{-|5x|}, \qquad g(x) = xe^{-|5x|}, \qquad h(x) = (2-x)e^{-|5x|}.$$

FT2 Számolja ki az alábbi függvény Fourier-transzformáltját: $f(x) = (x+5)e^{-2|x|}$.

FT3 Határozza meg az alábbi függvény Fourier transzformáltját:

$$f(x) = \begin{cases} +2, & \text{ha} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ -2, & \text{ha} \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

FT5 Határozza meg az alábbi függvény Fourier transzformáltját:

$$f(x) = \begin{cases} -3, & \text{ha} \quad -4 \leq x \leq 0 \\ 3, & \text{ha} \quad 0 < x \leq 4 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

FT6 Határozza meg az alábbi függvény Fourier transzformáltját:

$$f(x) = \begin{cases} 5, & \text{ha} \quad 0 < x \leq 5 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

FOURIER-TRANSZFORMÁCIÓ

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f(x)+g(x);\, s) &= \mathcal{F}(f(x);\, s)+\mathcal{F}(g(x);\, s) \\
\mathcal{F}(c\cdot f(x);\, s) &= c\cdot\mathcal{F}(f(x);\, s) \quad (c\in\mathbb{C}) \\
\mathcal{F}(f(ax);\, s) &= \frac{1}{a}\mathcal{F}(f(x);\, \frac{s}{a}) \quad (a>0) \\
\mathcal{F}(f(-x);\, s) &= \mathcal{F}(f(x);\, -s) \\
\mathcal{F}(f(x-x_0);\, s) &= e^{-isx_0}\cdot\mathcal{F}(f(x);\, s) \\
\mathcal{F}(e^{i\omega_0 x}\cdot f(x);\, s) &= \mathcal{F}(f(x);\, s-\omega_0) \\
\mathcal{F}(x\cdot f(x);\, s) &= i\cdot\frac{d}{ds}\mathcal{F}(f(x);\, s) \\
\mathcal{F}(f'(x);\, s) &= is\cdot\mathcal{F}(f(x);\, s)
\end{aligned}$$

Alap-Fourier-transzformáltak:

1. $\mathcal{F}(e^{-|x|};\, s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{1+s^2}$

2. $\mathcal{F}(e^{-x^2/2};\, s)=e^{-s^2/2}$

5. Vonalintegrál

Valós függvény vonalintegrálja

2.61. Legyen a Γ görbe az $x^2 + y^2 = 1$ körvonal x tengely fölötti része. Határozza meg az

$$\int_\Gamma (2 + x^2 y)\, ds$$

vonalintegrál értékét.

$\boxed{\textbf{2.62.}}$ Tekintsünk egy fékör alakú drótot, melyet az

$$x^2 + y^2 = 1, \qquad y \geq 0$$

feltételek határoznak meg. Tegyük fel, hogy a drót sűrűsége y-ban lineárisan változik - a csúcsban a legnagyobb. Mekkora a drót tömege?

Vektormező vonalintegrálja

2.63. Határozza meg az

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ y^2 - x^2 \end{pmatrix}$$

vektormező vonalintegrálját a

$$3y - 2x = 1$$

egyenes $0 \leq x \leq 1$ közötti darabja mentén. Az irányítás 0-ból 1-be vezet.

2.64. Határozza meg az alábbi vektormező vonalintegrálját

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x - y \\ xy \end{pmatrix}$$

a $\gamma(t) = (2t^2, 3t - 5)$, $0 \leq t \leq 2$ görbe mentén.

$\boxed{\textbf{2.65.}}$ Határozza meg az alábbi vektormező vonalintegrálját a Γ görbe mentén, ahol

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \end{pmatrix}$$

$$\Gamma = \{\gamma(t) \ : \ 0 \leq t \leq 1\}, \quad \gamma(t) = (t, t^2, t^3).$$

2.66. Integrálja az

$$F(x,y)=\begin{pmatrix} x^2 \\ -y^2 \end{pmatrix}$$

vektormezőt azon Γ görbe mentén, melynek koordinátafüggvényei

$$x(t)=a\cos t,\quad y(t)=b\sin(t),\qquad 0\le t\le \pi/2.$$

2.67. Határozza meg az alábbi vektormező vonalintegrálját a Γ görbe mentén

$$F(x,y,z)=\begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix},$$

ahol $\Gamma=\{\gamma(t)\ :\ 0\le t\le 1\},\quad \gamma(t)=(t^2,t,\frac{1}{t})$.

2.68.* Számítsa ki az

$$F(x,y,z)=\begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$$

vektormező vonalintegrálját Γ mentén.

a) $\Gamma=\{\gamma(t)=(2t^2,3t-5)\ :\ 0\le t\le 3\}$.

b) Γ a $P_1(-1,2,0)$ és $P_2(5,5,9)$ pontok közötti, koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenes szakaszokból álló út. Az irányítás P_1-ből P_2-be vezet.

Potenciálos-e a vektromező?

$\boxed{\textbf{2.69.}}$ Számítsa ki az

$$F(x,y,z)=\begin{pmatrix} 3x^2y^2z \\ 2x^3yz \\ x^3y^2 \end{pmatrix}$$

vektormező vonalintegrálját a $P(1,2,3)$ pontot az origóval összekötő egyenes szakasz mentén. Az irányítás 0-ból P-be vezet.

Vonalintegrál megoldások

Valós függvény vonalintegrálja

2.61. $I = 2(\pi - \frac{1}{3})$.

$\boxed{\textbf{2.62.}}$ Adjuk meg a görbét paraméteresen:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \qquad 0 \le t \le \pi.$$

A sűrűségfüggvény:

$$\rho(x, y) = k(1 - y),$$

ahol k az arányossági konstans.

Így a tömeg:

$$m = \int_\Gamma k(1 - y)\, ds = \int_0^\pi k(1 - \sin t)\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt =$$

$$= k\pi + k \cos t \Big|_0^\pi = k(\pi - 2).$$

Vektormező vonalintegrálja

2.63. $\frac{74}{81}$.

2.64. 32.

$\boxed{\textbf{2.65.}}$ Behelyettesítve a paraméterezett görbe egyenletét a vektromező koordinátáiba:

$$F(\underline{r}) = \begin{pmatrix} tt^2 \\ t^2t^3 \\ tt^3 \end{pmatrix}.$$

A görbe t szerint deriváltja: $\dot\gamma(t) = (1, 2t, 3t^2)$.

Így a vonalintegrál:

$$\int_\Gamma F(\underline{r}) d\underline{r} = \int_0^1 \left\langle (t^3, t^5, t^4), (1, 2t, 3t^4) \right\rangle dt = \int_0^1 (t^3 + 5t^6) dt = \frac{27}{28}.$$

2.66. $-\frac{a^3 + b^3}{3}$.

2.67. $\frac{1}{2}$.

2.68.* a) 225

b) 225

A vektromező potenciálos.

$\boxed{\textbf{2.69.}}$ *1. Megoldás.* Az egyenes szakasz egy lehetséges paraméterezése, és annak deriváltja

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 3t \end{pmatrix}, \qquad 0 \le t \le 1, \qquad \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

A vektorrmező a görbe mentén

$$F(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} 36t^5 \\ 12t^5 \\ 4t^5 \end{pmatrix},$$

ezért

$$F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) = 72t^5.$$

A vonalintegrál értéke

$$\int_\Gamma F(\underline{r})d\underline{r} = \int_0^1 72t^5 dt = 12.$$

2. Megoldás. Legyen $U(x, y, z) = x^3y^2z$. Ekkor

$$F(x, y, z) = \text{grad } U(x, y, z).$$

Így

$$\int_\Gamma F(\underline{r})d\underline{r} = U(P) - U(0) = 12.$$

.