LA-DM II előadás

2024.04.17.

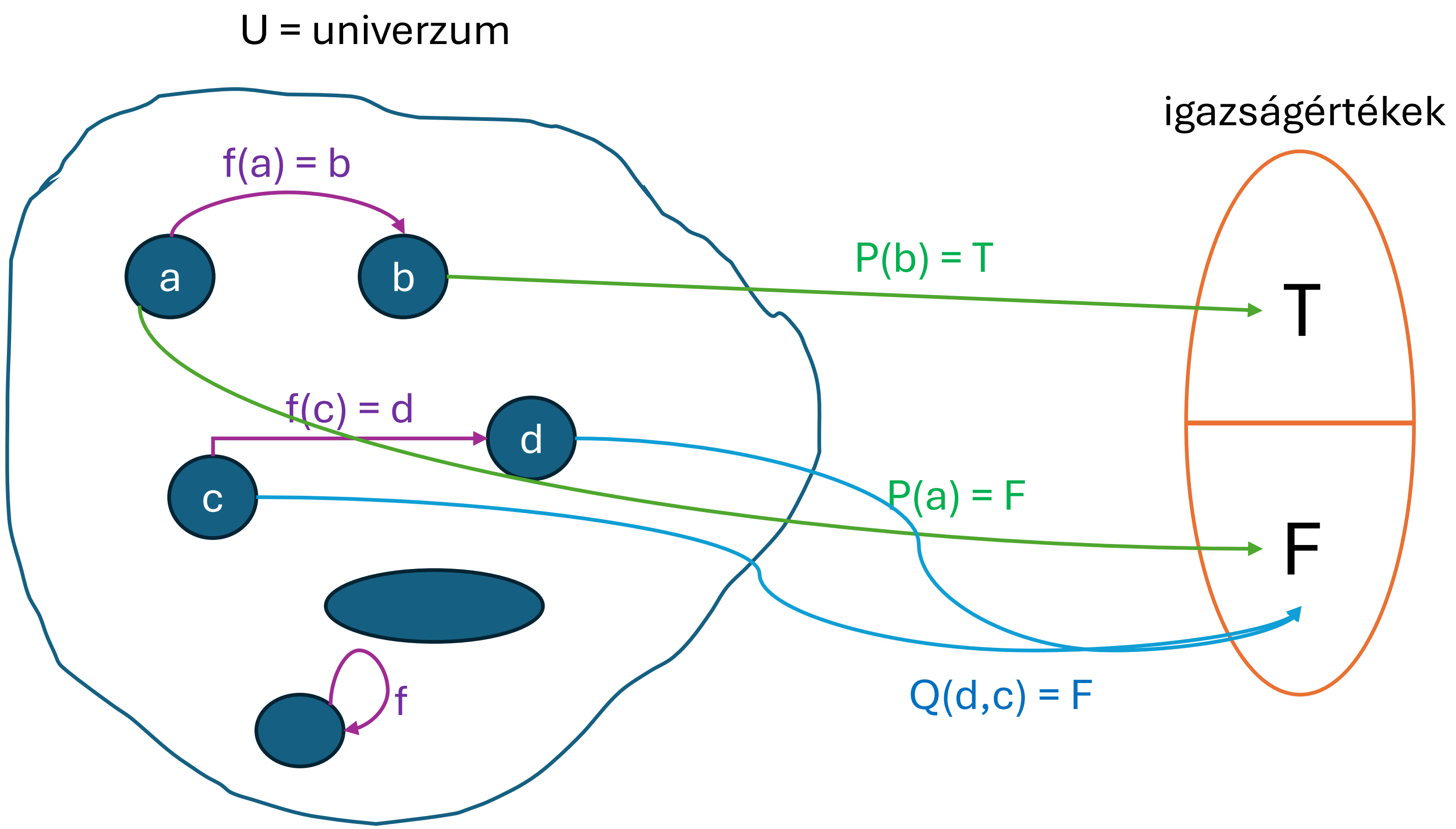
Lászlóffy András

Elsőrendű logika – szemantika

Világot az alábbiak alkotják:

- Objektumok halmaza, Univerzum – amelynek elemeire állításokat fogalmazok meg (pl. emberek, számok, városok…)
- Relációk, prédikátumok – ezek maguk az állítások, értéke T v. F (pl. piros, kerek, prim, testvére, rokona…)
- függvények – objektumok közötti hozzárendelések (pl. apja, legjobb barátja, reciproka, összeg…)

Elsőrendű logika – szintaktika



f(x) függvények

P(x) egyváltozós prédikátum

Q(x,y) kétváltozós prédikátum

művelet: prédikátumokra írhatók fel, ugyanaz, mint nulladrendben, pl.: $P(b) \wedge Q(d,c) = F$

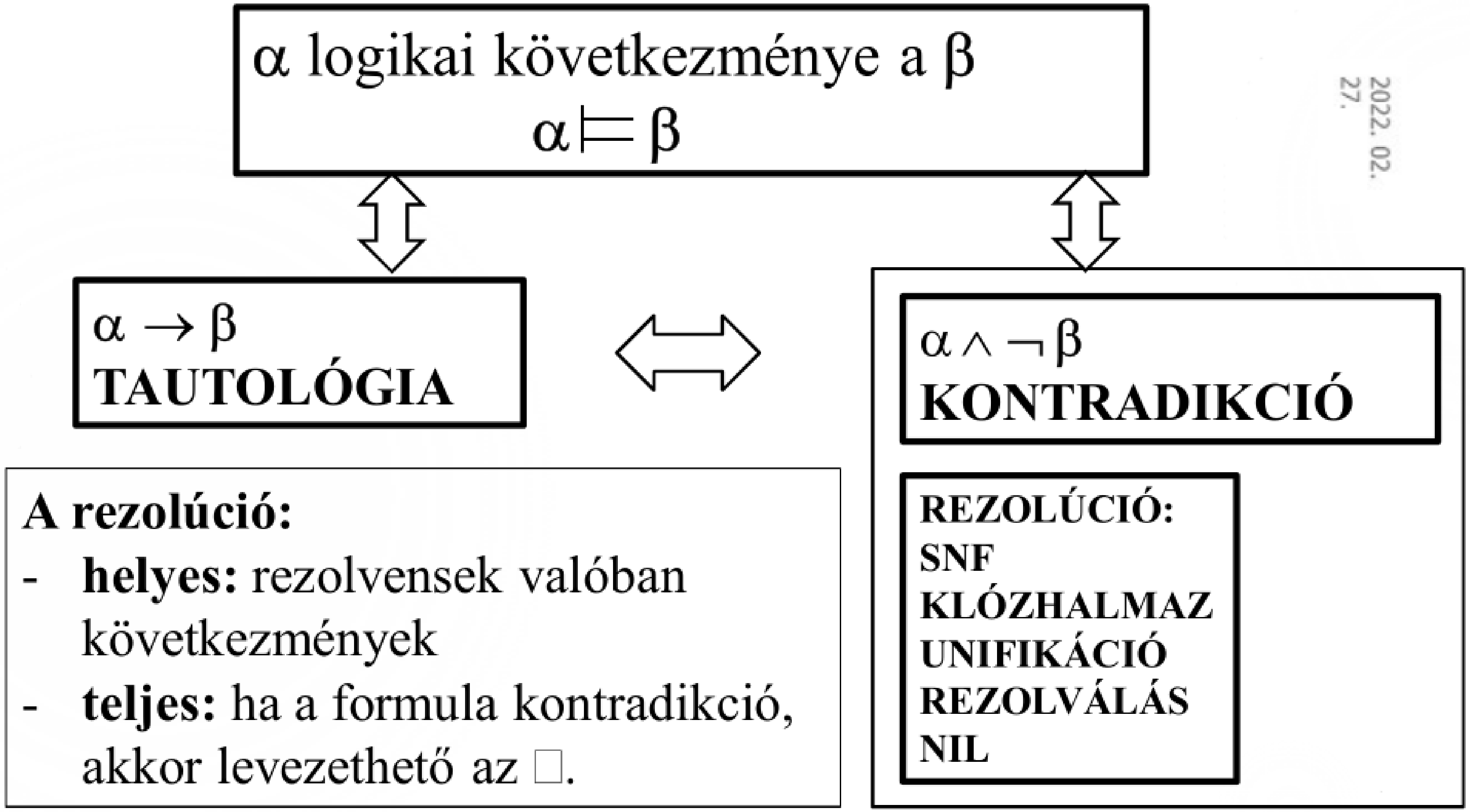
Kvantorok

nyílt mondat, pl. “alma piros”, vagy osztály tanulói között “x és y barátok”

zárt mondat: lezárás kvantorral

- exisztenciális kvantor (∃ létezik): “Van olyan alma, amelyik piros.”
- univerzális kvantor (∀ minden): “Minden alma piros.”
- “Mindenkinek van barátja.”, $\forall x \exists y Q(x, y)$, ahol $Q(x, y)$ azt jelenti, hogy “y barátja x-nek”.

Rezolúció elsőrendben, tételbizonyítás
Cél: helyes következtetési sémák megtalálása



- Konjunktív normálforma (KNF) nem elég
- Skólem (prenex) normálformára kell hozni a kifejezéseket (SNF)

Egységesítő helyettesítés

$$\frac{\forall x\big(P(x)\vee Q(x)\big), \neg P(a)}{Q(a)}$$

premisszák

következmény

Ha $P(x)\vee Q(x)$ minden x-re igaz, akkor az a konstansra is igaz, $P(a)\vee Q(a)$

$\forall x\big(P(x)\vee Q(x)\big) \models \big(P(a)\vee Q(a)\big)$, de visszafele nem igaz

$\forall x\big(P(x)\vee Q(x)\big) \equiv \big(P(a)\vee Q(a)\big)\wedge\big(P(b)\vee Q(b)\big)\wedge\cdots\wedge\big(P(c)\vee Q(c)\big)$ már ekvivalensek. Ha a bal oldal igaz, akkor a konjunkcióban szereplő formulák külön-külön igazak.

Az egységesítés, és minden új klóz az előzőek **Logikai következménye**, de nem ekvivalensek, nem alakítható vissza

Az orvos, a mérnök és a matematikus

- Kép forrása:

[Svájci tehenek szellentik tele metánnal a légkört]

Prenex konjunktív normálforma – kihozom a kvantorokat előre

$\forall x(x > 0 \vee \exists y(y > 0 \wedge x = y^2))$ – nem PRENEX

$\forall x \exists y(x > 0 \rightarrow (y > 0 \wedge x = y^2))$ – ez PRENEX

a) $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ ($\leftrightarrow$ kiküszöbölése)

$A \rightarrow B = \neg A \vee B$ ($\rightarrow$ kiküszöbölése)

b) $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$ De Morgan szabályok

$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$ ($\neg$ hatáskörének redukálása)

$\neg\forall x\, A(x) = \exists x\, \neg A(x)$

$\neg\exists x\, A(x) = \forall x\, \neg A(x)$ és persze ☺ : $\neg\neg A = A$

c) változók **standardizálása**

- változók **átnevezése**, hogy az egyes kvantorok által lekötött változók különbözzenek (nem csak egy rész formulán belül!)

$\forall x\ P(x) \rightarrow \exists x\, Q(x)$

$\forall x\ P(x) \rightarrow \exists y\, Q(y)$

Skólem normálforma (SNF) – skólemizálás

d) egzisztenciális kvantorok kiküszöbölése=Skólemizálás

$\exists x\, P(x) \quad \models \quad P(a)$ **Skolem konstans**

$\forall x\, \exists y\, P(x,y)$

$\forall x\, P(x,\ g(x))$

$\forall x_1, \ldots, x_n\, \exists y\, P(x,y)$ nem jó,mert y fügvénye az x-eknek

$\forall x_1, \ldots, x_n\, P(x, g(x_1, \ldots, x_n))$

Skólem függvény

Annyi változós, ahány univerzális kvantor szerepel az egzisztenciális kvantor előtt.

$\forall \mathbf{x_1}\, \forall \mathbf{x_2}\, \forall \mathbf{x_3}\ldots$ **(** kvantormentes konjunktív normálforma Skólem konstansokkal, Skólem függvényekkel)

$\forall \mathbf{x} \forall \mathbf{y}\, \{\neg P(x) \vee \neg P(y) \vee P(f(x,y))\ \} \wedge \{\neg P(x) \vee Q(x,g(x)\} \wedge \{\neg P(x) \vee \neg P(g(x))\ \}$

Skólem normálforma, klózok létrehozása

e) **prenex** formára hozás - $\exists$ kvantort skólemizálással kiküszöböltük

->csak $\forall$-k maradtak ->a változókat átneveztük (standardizáltuk)

->$\forall$ kvantor előre hozható (kiemelhető).

$\forall \mathbf{x_1} \ldots \forall \mathbf{x_n}\, A(x_1, \ldots, x_n)$

KÉSZ A SKÓLEM NORMÁLFORMA!!!

REZOLVÁLÁSHOZ KÉNYELMESEBB FORMÁLISAN FOLYTATNI, KLÓZHALMAZT KIALAKÍTANI:

f) univerzális kvantorok elhagyása **(Fontos! Minden mondat zárt)**

g) klózok kialakítása - csak $\wedge$ és $\vee$ műveletek

$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

klózok konjunkciójának létrehozása

h) konjunkciók elhagyása $\rightarrow$ klózhalmaz

TÉTELBIZONYÍTÁS ELSŐRENDŰ REZOLÚCIÓVAL

A_1: Van olyan páciens, aki minden doktorban megbízik.

A_2: A kuruzslókban egyetlen páciens sem bízik meg.

A_3: Egyetlen doktor sem kuruzsló.

F_1: $\exists x\ \forall y\ \{P(x) \wedge [D(y) \rightarrow M(x,y)]\} \Rightarrow P(a)$

F_2: $\forall x\ \{P(x) \rightarrow \forall y\ [K(y) \rightarrow \neg M(x, y)]\} = \forall x\ \forall y(\neg P(x) \vee \neg K(y) \vee \neg M(x, y))$

F_3: $\forall x\ [D(x) \rightarrow \neg K(x)]$

F_3 negáltja: $\neg \forall x\ [D(x) \rightarrow \neg K(x)] = \exists x\ \neg[\ D(x) \rightarrow \neg K(x)] =$
$\exists x\ \neg[\neg\ D(x) \vee \neg K(x)] = \exists x\ (\ D(x) \wedge K(x)]) \Rightarrow\ K_4$: $D(b) \wedge K(b)$

KLÓZ FORMA:

K_1: $P(a)$

K_2: $\neg D(y) \vee M(a, y)$

K_3: $\neg P(x) \vee \neg K(y) \vee \neg M(x, y)$

K_4: $\mathbf{D(b)}$

K_5: $\mathbf{K(b)}$

TÉTELBIZONYÍTÁS ELSŐRENDŰ REZOLÚCUIÓVAL