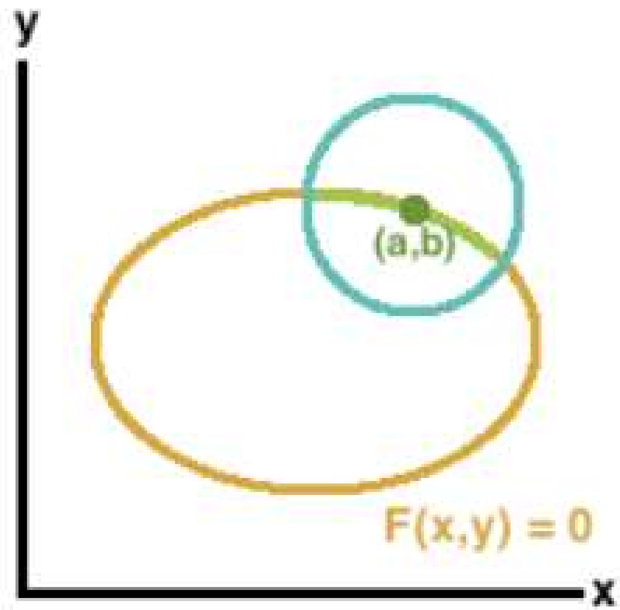
Implicit függvény

Implicit függvény explicit alakja

Példa feladat: Adott a síkban az $F(x, y) = 0$ görbe.

A görbe egy pontja (a, b).



A pont környezetében keressük

azt az $y = f(x)$ fv-t, melyre

$F(x, f(x)) = 0$ és $f(a) = b$.

A görbét megadó $F(x, y) = 0$ *implicit függvény*

EXPLICIT ALAKJA az (a, b) pont körül $y = f(x)$.

Implicit függvény tétel

Vajon mikor létezik $F(x, f(x)) = 0$?

Tétel. Tfh $F(x_0, y_0) = 0$ és F diff-ható (x_0, y_0) egy környezetében.

Tfh $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ (azaz az érintősík "ferde"). Ekkor

- $\exists I = I_1 \times I_2 = (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \times (y_0 - \beta, y_0 + \beta)$, intervallum,
- $\forall x \in I_1$-re az $F(x, y) = 0$ egyenletnek $\exists! y = f(x)$ mo-a
- és $y \in I_2$.

Tétel. *(Implicit függvény tétel, folytatás)*

Tehát létezik egy $f : I_1 \to I_2$ függvény, melyre:

- $f(x_0) = y_0$.
- $f(x) \in I_2$, $\forall x \in I_1$.
- $F(x, f(x)) = 0$, $\forall x \in I_1$.
- $F'_y(x, f(x)) \neq 0$, $\forall x \in I_1$.

Továbbá f differenciálható I_1-ben, és deriváltja:

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}.$$

Megjegyzések

1. Az implicit függvény tétel a görbe *lokális tulajdonság*át mondja.

2. Csak egzisztenciát állít: *létezik* a megfelelő függvény. Nincs konstrukció.

Biz. *Nincs.* Ha már tudjuk, hogy f diff-ható, akkor deriváltja:

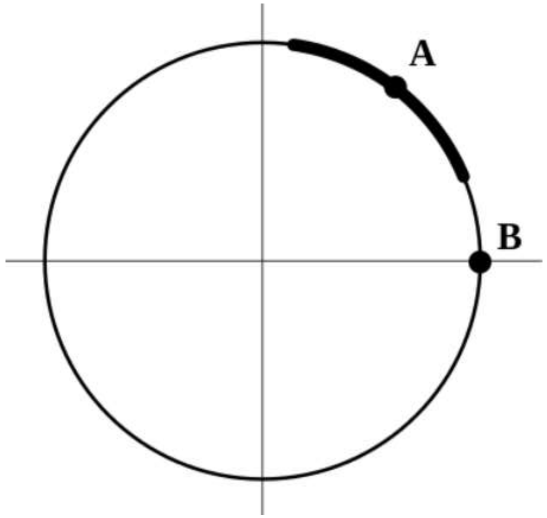
Mivel $F(x, f(x)) = 0$ MINDEN x-re. Ezért deriválva:

$$\Longrightarrow \quad F'_x(x, f(x)) \cdot 1 + F'_y(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0,$$

és innen $f'(x) = -\dfrac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$.

Példa

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = \pm\sqrt{1-x^2}.$$



Konkrét (x_0, y_0) mellett három eset lehetséges.

A. Ha $x_0 \in (-1,1)$ és $y_0 > 0$, akkor $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

A- Ha $x_0 \in (-1,1)$ és $y_0 < 0$, akkor $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$.

B. Ha $x_0 = \pm 1$, akkor $y_0 = 0$. Mi a gond?

Ekkor $F'_y(x_0, 0) = 0$, és a megoldás nem folytatható.