Diszkrét Matematika II

Erdélyi Áron

2019.05.07.

Tartalomjegyzék

1 Kombinatorika

1.1 Permutáció

1.1.1 Ismétlés nélküli

Definíció: Adott n külömböző elem. Az elemek egy meghatározott sorrendjét az adott n elem egy ismétlés nélküli permutációjának nevezzük. Jele: P_n.

Tétel: Az n külömböző elem permutációjáinak száma $P_n = n!$, ahol $n! = n(n-1)(n-2)...1$, és $0! = 1$.

Bizonyítás: Az első helyen az $1, 2, ..., n$ elem bármelyike állhat, utána a maradék $(n-1)$ elem összes lehetséges sorrendje követi. És így tovább az utolsó elemig. Az összefüggéseket visszafelé felírva adódik az állítás:

$$P_n = n \cdot P_{n-1}$$

$$P_{n-1} = (n-1) \cdot P_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$P_1 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$P_n = n(n-1)(n-2)...1 = n!$$

1.1.2 Ismétléses

Definíció: Adott n elem, melyek között k_1 darab egyenlő, másik k_2 egyenlő, ...k_s darab egyenlő, ahol $k_v \geq 2$, ha $v = 1, 2, ..., s$, és $k_1 + k_2 + ... + k_s \leq n$. Az adott n elem egy meghatározott sorrendjét ezen elemek ismétléses permutációjának nevezzük. Jele: $P_n^{(k_1,k_2,...,k_s)}$.

Tétel: Adott n, és $k_1, k_2, ..., k_s$ esetén az ismétléses permutációk száma:

$$P_n^{(k_1,k_2,...,k_s)} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_s!}.$$

Bizonyítás: Tekintsük az n elem egy tetszőleges permutációját. Ekkor
k_1 azonos elemekhez $k_1!$ külömböző indexet rendelhetünk.
k_2 azonos elemekhez $k_2!$ külömböző indexet rendelhetünk.
...
k_s azonos elemekhez $k_s!$ külömböző indexet rendelhetünk.
Ekkor fennáll a következő összefüggés, amiből következik a bizonyítandó:

$$k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_s! \cdot P_n^{(k_1,k_2,...,k_s)} = P_n = n!$$

1.2 Variáció

1.2.1 Ismétlés nélküli

Definíció: Adott n külömböző elem. Ha n elem közü k elemet $(0 < k \leq n)$ úgy választunk ki, hogy mindegyik elem csak egyszer szerepel, és a kiválasztás sorrendje is számít, akkor az n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli variációját kapjuk. Jele: V_n^k.

Tétel: Az n külömböző elem k-ad osztályú ismétlés nélküli variációinak száma:

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1).$$

Bizonyítás: Rögzített n mellett, k szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk.
$k = 1$ esetén az állítás igaz, mivel n elemből 1-et pontosan n féle képpen lehet kiválasztani.
Tegyük fel, hogy igaz k-ra, és igazoljuk $(k+1)$-re. Bármelyik $(h_1, h_2, ...h_k)$ k-ad osztályú variációhoz $(n-k)$ elem közül választhatunk, egy h_{k+1}-ediket, hogy egy $(h_1, h_2, ..., h_{k+1})$ $(k+1)$-es osztályú variációt kapjunk. Azaz igaz a következő összefüggés: $V_n^k \cdot (n-1) = V_n^{k+1}$.

1.2.2 Ismétléses

Definíció: Adott n külömböző elem. Ha az n elem közül úgy választunk ki k elemet, hogy egy elem többször is szerepelhet, és a sorrend számít, akkor n k-ad osztályű ismétléses variációját kapjuk. Jele: $V_n^{k,i}$.

Tétel: Az n külömböző elem k-ad osztályú ismétléses variációjainak száma $V_n^{k,i} = n^k$.

Bizonyítás: Írjuk föl a kiválasztott elemeket, sorrenben. Az első helyre az adott n elemek bármelyikét választhatjuk, így $V_n^{1,i} = n$. Mivel az kiválasztott elemeknek nem kell feltétlenül külömbözni egymástól, így a következő helyre is az adott n elemek bármelyikét választhatjuk, ekkor ezeknek a száma $V_n^{2,i} = n^2$ lesz, és így tovább:

$$V_n^{k,i} = n^k.$$

1.3 Kombináció

1.3.1 Ismétlés nélküli

Definíció: Adonn n külömböző elem. Ha n elem közül k $(0 < k \leq n)$ elemet úgy választunk ki, hogy mindegyik csak egyszer szerepelhet, és a sorrend nem számít, akkor az n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációját kapjuk.

Tétel: Az n külömböző elem ismétléses kombinációinak száma

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{a}{b}.$$

Bizonyítás: Az n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációinak száma annyiban külömbözik az ismétlés nélküli variációtól, hogy a kombinációnál nem vesszük figyelembe a sorrendet, azaz osszuk le az ismétlés nélküli variációk számát a kiválasztott elemek ismétlés nélküli permutációjának számával:

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{P_n} = \frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

1.3.2 Ismétléses

Definíció: Adott n külömböző elem. Ha n elem közül k elemet úgy választunk ki, hogy egy elem töbször is sorra kerülhet, és a kiválasztás sorrendje nem számít, akkor az n elem k-ad osztályú ismétléses kombinációját kapjuk. Jele: $C_n^{k,i}$

Tétel: Az n külömböző elem k-ad osztályú ismétléses kombinációinak száma:

$$C_n^{k,i} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Bizonyítás: Írjuk fel az n elemet egy tetszőleges, de a továbbiakban rögzített sorrendben. Menjünk végig az elemeken és egy elem alá írjunk fel annyi "l"-t, amennyiszer kiválasztjuk. majd mikor lépünk a következő elemre, rajzoljunk a két elem "l"-jei közé egy $*$ jelet.
Ekkor lesz k darab "l", és $n-1$ darab $*$. Mivel a sorrend nem számít, ezért ezt megfeleltethetjük egy ismétléses permutációnak:

$$C_n^{k,i} = P_n^{k,n-1} = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}.$$

1.4 Binomiális tétel

1.4.1 Binomiális együtthatók

Definíció: Az $\binom{n}{k}$ kifejezést binomiális együtthatónak nevezzük. Megállapodás szerint:

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{0}{0} = 1.$$

A binomiális együttható fogalma általánosítható tetszőleges valós számra:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha!}{k! \cdot (\alpha - k)!}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}.$$

1.4.2 Binomiális tétel

Tétel: Kéttagú kifejezés (binom) bármely nemnegatív egész kitevőjű hatványa polinommá alakítható a következőképp:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + ... + \binom{n}{n}a^0 b^n = \sum_k = 0^n \binom{n}{k}a^{n-k}b^k,$$

ahol $n \in \mathbb{Z}$, és $a, b \in \mathbb{R}$.

Bizonyítás: Tudjuk, hogy kommutatív gyűrűben a több tag szorzását több taggal úgy végezzük, hogy minden tagot szorzunk minden taggal. Írjuk fel az n tényezős $(a+b)(a+b)...(a+b)$ szorzatot. Ha mindegyik tényezőből az a-kat szorozzuk össze, a^n-t kapjuk. Ha $(n-1)$ tagból az a-t, és egy tényezőből a b-t választjuk, ezt éppen n féle képpen tehetjük meg, így $na^{n-1}b$-t kapunk. Ha $(n-2)$ tényezőből az a-kat és 2 tényezőből a b-ket választjuk, ezt $\binom{n}{2}$ féle képpen tehetjük meg, akkor $\binom{n}{2}a^{n-2}b^2$ lesz az eredmény. Ezt folytatva kapjuk a polinomot.

1.5 Binomiális együtthatók tulajdonságai

Legyen n nemnegatív egész szám és legyen k $(0 < k \leq n)$ szintén egész. Ekkor fennálnak a következő összefüggések:

1. Szimetria:
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

2. Összegzés:
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

3. Kettőhatvány:
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n} = 2^n.$$

4. $$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + ... + (-1)^n \binom{n}{n} = \begin{vmatrix} 0, han > 0 \\ 1, han = 0 \end{vmatrix}$$

Bizonyítás:

1. $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k}.$$

2. $$\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} =$$
$$= \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}.$$

3. Helyettesítsük be a binomiális tételbe $a = 1$ és $b = 1$-et!

4. Helyettesítsük be a binomiális tételbe $a = 1$ és $b = -1$-et!

2 Halmazok

2.1 Halmazok egyenlősége

Definíció: Az A és a B halmaz egyenlők, ha ugyanazok az elemeik. Jelölés $A = B$.

2.2 Üres halmaz

Definíció: Egy halmazt akkor hívunk üres halmaznak, ha nem tartalmaz elemet. Jele: $\emptyset$.

2.3 Részhalmaz definíciója

Definíció: Az A halmaz részhalmaza a B halmaznak, ha A minden eleme B eleme is. Jelölés: $A \subseteq B$. Ha $A \subseteq B$ és $A \neq B$, akkor A valódi részhalmaza B-nek. Jelölése: $A \subset B$.

2.4 Hatványhalmaz

Az A halmaz hatványhalmazán A részhalmazainak halmazát értjük.

2.5 Halmazok számossága

Definíció: A halmaz számosságán a halmaz elemeinek számét értjük. Jelölése $|A|$. Ha A számossága véges, az A halmazt is végesnek nevezzük. Ellenkező esetben A végtelen.

2.6 Műveletek halmazok között

2.6.1 Halmazok uniója

Definíció: Az A és B halmazok egyesítése (uniója, összege) az az $A \cup B$-vel jelölt halmaz, amelynek elemei A-nak vagy B-nek elemei.

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}.$$

2.6.2 Halmazok metszete

Definíció: Az A és B halmazok közös része (metszete, szorzata) az az $A \cap B$-vel jelölt halmaz, amelynek elemei A-nak és B-nek elemei.

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}.$$

2.6.3 Halmazok külömbsége

Definíció: Az A és B halmazok külömbsége, vagy a B halmaz A halmazra vonatkozó komplementere$A \setminus B$-vel jelölt halmaz, amely A azon elemeinek halmaza amik nincsenek B-ben.

$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}.$$

2.6.4 Direkt szorzat

Definíció: Legyenek $D_1, D_2, ..., D_n$ adott halmazok. E halmazok Descartes (direkt) szorzata $D_1 \times D_2 \times ... \times D_n := \{(d_1, d_2, ..., d_n) | d_k \in D_k, 1 \leq k \leq n\}$.

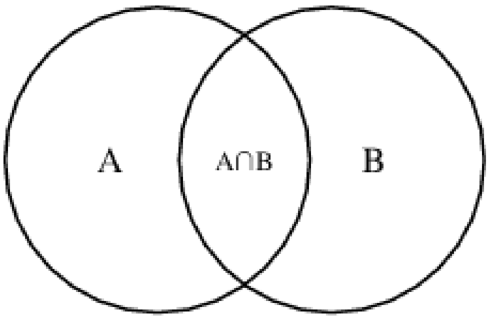
2.7 Műveleti azonosságok

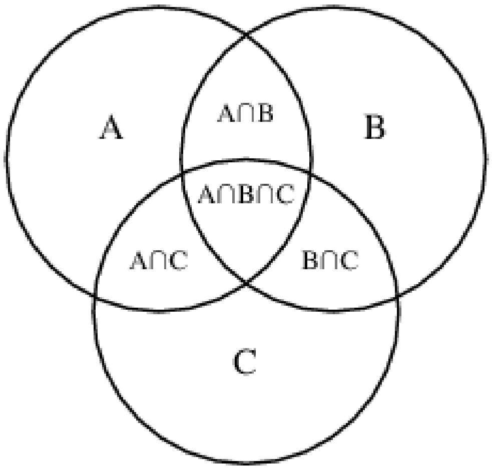
- $A \cup B = B \cup A$ és $A \cap B = B \cap A$.
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ és $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ és $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ és $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

2.8 Szita formula

- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
- $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |C \cap B| + |A \cap B \cap C|$.

2.9 Venn diagramm





2.10 Háló

Definíció 1: A H részben rendezett halmaz háló, ha bármely véges részhalmazának van infimuma és supremuma. A H háló teljes, ha bármely részhalmazának van infimuma és supremuma.

Definíció 2: A H halmaz háló, ha értelmezve van rajta két, $*$ és $\circ$ által jelölt művelet, melyekre $\forall a, b, c \in H$ esetén teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

- kommutatívak
- asszociatívak
- elnyelési tujadonság:
$$a * (a \circ b) = a, \quad a \circ (a * b) = a.$$

Tétel: A háló két fajta definíciója ekvivalensek egymással.

Bizonyítás: Konstruktív módon.
Legyen $a \circ b = inf(a, b)$, és $a * b = sup(a, b)$. Ekkor a második definícióban szereplő tulajdonságok teljesülnek, és megadható egy $\leq$ rendezési reláció:
Legyen $a \leq b$, akkor és csak akkor, ha $a \circ b$=a. Ekkor a $\leq$ reláció:

- Reflexív.
- Antiszimetrikus.
- Tranzitív.

2.11 Tarski hálóelméleti fixpont

Definíció: Valamely H rendezett halmazon értelmezett $f : H \to H$ függvény monoton (rendezéstartó), ha minden $h_1 \leq h_2$-re $f(h_1) \leq f(h_2)$. A $h \in H$ fixpontja f-nek, ha $f(h) = h$.

Tétel: Teljes hálón értelmezett monoton függvénynek van legynagyobb és legkisebb fixpontja.

Bizonyítás: Legyen G azon elemek halmaza, melyre $f(x) \leq x$. Ennek alsó határa, vagyis $g = inf(G)$ lesz a legkisebb fixpont.

Egyrészt $g \in G$, ugyanis $g \leq f(x) \leq x$, ebből $f(g) \leq f(f(x)) \leq f(x) \leq x$, vagyis $f(g)$ alsó korlát. Mivel g a legnagyobb alsó korlát, ezért $f(g) \leq g$, tehát $g \in G$.

Másrészt g fixpont, tehát $g = f(g)$. Mivel $f(g) \leq g$, ezért $f(f(g)) \leq f(g)$, vagyis $f(g) \in G$. De akkor g alsó korlát volta miatt $g \leq f(g)$. A rendezési reláció antiszimetrikus tulajdonsága miatt $g = f(g)$.

Harmadrészt g a legkisebb fixpont. Legyen G^* a fixpontok halmaza és legyen $g^* = inf(G^*)$. Mivel $G^* \subseteq G$, ezért $g \leq g^*$. Továbbá mivel g^* infimuma G^*-nak és g is G^*-beli, ezért $g^* \leq g$. A rendezési reláció antiszimetrikus tulajdonsága miatt $g = g^*$, vagyis g valóban a legkisebb fixpont.

3 Relációk

3.1 Reláció általános fogalma

Definíció: A $D_1 \times D_2 \times ... \times D_n$ direkt szorzat bármely részhalmazát relációnak nevezzük.

3.2 Bináris reláció, tulajdonságok

Definíció: A $\mathfrak{R}$ bináris reláció H halmazon, ha $\mathfrak{R} \subseteq H \times H = \{(a,b)|a,b \in H\}$.

Tulajdonságai:

- Reflexív, ha $(x,x) \in \mathfrak{R}$.
- Szimetrikus, ha $(x,y) \in \mathfrak{R}$ esetén $(y,x) \in \mathfrak{R}$.
- Antiszimetrikus, ha $(x,y) \in \mathfrak{R}$ és $(y,x) \in \mathfrak{R}$ csak akkor teljesül, ha $x = y$.
- Tranzitív, ha $(x,y) \in \mathfrak{R}$ és $(y,z) \in \mathfrak{R}$ esetén $(x,z) \in \mathfrak{R}$.

3.3 Ekvivalencia reláció és partíció

Definíció: Az $\mathfrak{R}$ bináris reláció ekvivalencia reláció, ha reflexív, szimetrikus, és tranzitív.

Definíció: A partíció a H halmaz olyan részhalmazrendszere, ahol $H_i \cap H_j = \emptyset$, és

$$\bigcup_{k=1}^{n} H_k = H.$$

Tétel: Ha az $\mathfrak{R}$ bináris reláció a H halmazon ekvivalencia reláció, akkor a H azon részhalmazai, amelyek egymással relációban álló elemeket tartalmaznak, azok a H halmaz egy partícióját adják.

Bizonyítás: Ha $i \neq j$, akkor $H_i \cap H_j = \emptyset$, ugyan is ha ez nem teljesülne, vagyis lenne olyan a, ahol $a \in H_i \cap H_j$, akkor $\forall b_i \in H_i$-re igaz lenne, hogy $(a, b_i) \in \mathfrak{R}$. Hasonlóan $\forall c_j \in H_j$-re igaz lenne, hogy $(a, c_j) \in \mathfrak{R}$. Továbbá a szimetria miatt $(b_i, a) \in \mathfrak{R}$. Ekkor a tranzitivitás miatt $(b_i, c_j) \in \mathfrak{R}$, amiből az következne, hogy $(b_i, c_j) \in H_i$, és $(b_i, c_j) \in H_j$, $\forall b_i, c_j$ esetén, vagyis $H_i = H_j$.
Az $\bigcup_{k=1}^{n} H_k = H$ miatt H minden eleme benne van valamelyik H_k-ban, a reflexív tulajdonság miatt pedig ezek a H_k halmazok nem üresek, hiszen így $(a,a) \in \mathfrak{R}$, tehát $\exists k$, hogy $a \in H_k$.

Tétel (az előző megfordítása) Ha H_i halmazrendszer egy partíciója H-nak, akkor ez a H-n egy ekvivalencia relációt határoz meg, ha $(a,b) \in \mathfrak{R}$ akkor és csak akkor, ha $a, b \in H_i$.

Bizonyítás: Az ekvivalencia reláció három tulajdonságát kell belátni.

- Reflexív, mert $(a,a) \in \mathfrak{R}$, ha $a \in H_i$ és $a \in H_i$, ez pedig teljesül.
- Szimetrikus, mert $(a,b) \in \mathfrak{R}$ esetén $(b,a) \in \mathfrak{R}$. Ez teljesül, ha $a, b \in H_i$.
- Tranzitív, mert ha $(a,b) \in \mathfrak{R}$ és $(b,c) \in \mathfrak{R}$, akkor $(a,c) \in \mathfrak{R}$, azaz ha $a, b \in H_i$ és $b, c \in H_j$, mivel $H_i \cap H_j = \emptyset$, ahol $i \neq j$, ezért ebben az esetben $i = j$, és $a, b, c \in H_i$.

3.4 Rendezési reláció

Definíció: Az $\mathfrak{R}$ bináris reláció parciális (részben) rendezési reláció, ha reflexiv, antiszimetrikus és tranzitív.

Definíció: A H halmaz részben rendezett, ha rendezési reláció van megadva az elemein. Ezt a relációt a $\leq$ jellel szokták jelölni.

Definíció: A H halmazon értelmezett parciális rendezési reláció teljes, ha a $\forall x, y \in H$ esetén a $(x,y) \in \mathfrak{R}$, illetve $(y,x) \in \mathfrak{R}$ relációk közül legalább az egyik teljesül.

3.5 Hesse diagramm

Egy tetszőleges részbenrendezett halmaz Hasse-diagramja olyan irányított gráf, amelyben a részbenrendezett halmaz alaphalmazának az elemei alkotják a gráf pontjait, és a gráfban az a és b pontok között pontosan akkor halad él, ha $a \leq b$ teljesül és nincs olyan c elem, amelyre $a \leq c \leq b$ teljesülne az adott részbenrendezésben.

Az él irányítását a diagramon úgy ábrázoljuk, hogy a b pontot az a pont fölött helyezzük el. Ezzel az elrendezéssel azért lehet ábrázolni az élek irányítását, mert a Hasse-diagram körmentes.

A reflexivitásból adódó hurokéleket a diagramon nem ábrázoljuk.

3.5.1 Legkisebb, legnagyobb elem

Definíció: A H halmazon adott parciális rendezési reláció szerinti legnagyobb elem N, ha $\forall h \in H$-ra $h \leq N$ teljesül.

Definíció: A H halmazon adott parciális rendezési reláció szerinti legkisebb elem k, ha $\forall h \in H$-ra $k \leq h$ teljesül.

Tétel: Ha van legnagyobb (legkisebb) elem, akkor az egyértelmű.

Bizonyítás: Indirekt módon tegyük fel, hogy két legnagyobb elem létezik, legyenek ezek M_1 ée M_2. A definíció szerint $M_1 \leq M_2$ és $M_2 \leq M_1$. A reláció antiszimetrikus tulajdonsága miatt ez csak akkor teljesül, ha $M_1 = M_2$.

3.5.2 Maximális, minimális elem

Definíció: A H halmazon adott parciális rendezési reláció szerinti maximális elem M, ha $\nexists h \in H$, amelyre $M \leq h$ teljesül.

Definíció: A H halmazon adott parciális rendezési reláció szerinti minimális elem m, ha $\nexists h \in H$, amelyre $h \leq m$ teljesül.

3.5.3 Korlát

Definíció: A részben rendezett H halmaznak valamely H_1 részhalmazának felső korlátja (az adott rendezés és H szerint), $K \in H$, ha $\forall h_1 \in H_1$-re $h_1 \leq K$.

Definíció: A részben rendezett H halmaznak valamely H_1 részhalmazának alsó korlátja (az adott rendezés és H szerint), $k \in H$, ha $\forall h_1 \in H_1$-re $k \leq h_1$.

3.5.4 Határ

Definíció: A részben rendezett H halmaznak valamely H_1 részhalmaza korlátos, ha a részhalmaznak létezik alsó és felső korlátja. Ha létezik alsó korlátok között legnagyobb, akkor ezt infimumnak (alsó határ), ha létezik a felső korlátok között legkisebb, akkor ezt supremumnak (felső határ) nevezzük.

4 Számosságok

Definíció: Az A és B halmazok számossága megegyezik, ha $\exists f : A \to B$ kölcsönösen egyértelmű függvény. Jelölése: $|A| = |B|$.

Definíció: Az A halmaz számossága legalább akkora, mint a B számossága, ha $\exists A_1 \subset A$, hogy $|A_1| = |B|$. Jelölés: $|A| \geq |B|$.

Definíció: Egy A halmaz véges számosságú, ha $\exists k \in \mathbb{N}$, hogy $|\{1, 2, ..., k\}| = |A|$.

Definíció: Egy A halmaz megszámlálhatóan végtelen számosságú, ha a természetes számok halmazával egyenlő számosságú.

Definíció: Egy A halmaz nem megszámlálhatóan végtelen számosságú, ha számossága nem is véges, és nem is megszámlálhatóan végtelen.

4.1 Nevezetes halmazok számossága

4.1.1 Természetes számok

A megszámlálhatóan végtelen számosság definíciójából következtetve az $\mathbb{N}$ számossága megszámlálhatóan végtelen.

4.1.2 Páros és páratlan számok

Állítás: A páros, illetve páratlan számok halmaza megszámlálható.

Bizonyítás: Páros számok hozzárendelése $\mathbb{N}$-hez: $f(n) = 2n$.
Páratlan számok hozzárendelése $\mathbb{N}$-hez: $f(n) = 2n - 1$.

4.1.3 Racionális számok

Állítás: A racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza megszámlálható.

Bizonyítás: Helyezzük az $\{0, 1, -1, 2, -2, ..\}$ egész számokat az A_1 halazba. Legyen $A_2 = \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, ...\}$, az összes olyan tört, aminek nevezője 2, és nem egyszerűsíthető. Legyen $A_3 = \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, ...$, az üsszes olyan tört, aminek nevezője 3 és nem egyszerűsíthető, és így tovább. Ezek a halmazok megszámlálhatóak, hiszen elemeiket fel tudjuk sorolni. Így megszámlálható sok diszjunkt halmazhoz jutunk, aminek tudjuk, hogy számossága megszámlálható, és egyesítve őket megkapjuk a $\mathbb{Q}$ halmazt.

4.1.4 Valós számok

Mivel a valós számok halmazának részhalmaza a $(0, 1)$ intervallum, melyről már beláttuk, hogy kontinuum számosságú, így $\mathbb{R}$ számossága is kontinuum.

4.2 Egységnégyzet és egységszakasz pontjainak száma

4.2.1 Egységszakasz pontjainak száma

Állítás: A $(0, 1)$ intervallumba tartozó összes szám H halmaza a megszámlálhatónál nagyobb számosságú.

Bizonyítás: Ez a $|H|$ legalább megszámlálható, hiszen H tartalmazza például a nyílván megszámlálható $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\}$ részhalmazt. Tegyük fel indirekt módon, hogy H megszámlálható, vagyis elemeit valamilyen $v_1, v_2, ...$ sorrenbe állíthatjuk. Minden ilyen v_i egy 0, és 1 közötti valós szám, tehát felírható végtelen tizedestörtként, $0.v_{i1}v_{i2}...$ alakban. Az indirekt feltevés szerint tehát a következő sorozat H minden elemét tartalmazza:

$$0, v_{11}v_{12}v_{13}...$$

$$0, v_{21}v_{22}v_{23}...$$

$$\vdots$$

A táblázat "átlója" mentén végighaladva készítsünk egy olyan w valós számot, melynek $w = 0, w_1 w_2, ...$ alakjához a következő képp jutunk:

$$w_i = \begin{Bmatrix} w_i = 2, ha v_{ii} = 1 \\ w_i = 1, ha v_{ii} \neq 1 \end{Bmatrix}.$$

Ez a w biztosan nem szerepelt a fenti táblázatban, hiszen minden j-re $v_{jj} \neq w_j$. Mivel így nem minden 0 és 1 közötti valós szám szerepel a H halmazban, így ellentmondáshoz jutunk, tehát $|H|$ nem lehet megszámolható.

4.2.2 Egységnégyzet pontjainak száma

Állítás Az egységnégyzet számossága megegyezik az egységszakasz számosságával.

Bizonyítás: Az egységnégyzet pontjainak halmaza:

$$S = (0,1) \times (0,1) = \{(x,y)|x, y \in (0,1)\}.$$

A Descartes koordinátarendszerben az egységnégyzet pontjai megadhatók $(x,y) \in S$ pontokban. Ezen számpárok és az egységszakasz pontjai között egyértelmű megfeleltetés létesíthető a következőképpen: Írjuk fel az x és y koordinátákat $x = 0, x_1 x_2 ...$, $y = 0, y_1 y_2 ...$ tizedestört alakban. Ekkor a konstruált $z = 0, x_1 y_1 x_2 y_2 ...$ valós szám eleme az egységszakasznak.

4.3 Megszámlálhatóan sok megszámlálható számosságú halmaz uniója

Állítás: Véges sok (k darab) diszjunkt megszámlálható számosságú halmaz uniója is megszámlálható.

Bizonyítás: Az A halmaz elemeit először úgy soroljuk föl, hogy először minden halmaz első elemét, azután minden halmaz második elemét, és így tovább vesszük. Formálisan az egyes halmazok elemeit kettős indexszel látjuk el, vagyis legyen minden $i = 1, 2, ..., k$, értékre $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, ...\}$. Ezután $A = \{b_1, b_2, ...\}$, ahol b_t-t a következő képpen definiáljuk: $t - 1 = \alpha k + \beta, 0 \leq \beta < k$ (vagyis legyen $\beta = (t-1)\%k$), akkor $b_t = a_{\beta+1,\alpha+1}$.

4.4 Cantor féle eljárás

Állítás: Legyen A egy véges, vagy megszámlálható számosságú halmaz, és legyen egy tőle diszjunkt, kontinuum számosságú B halmaz. Ekkor $|A \cup B| = |B|$.

Bizonyítás: Legyen B_1 egy megszámlálható részhalmaza, és legyen $B_2 = B \setminus B_1$. A megszámlálható számosságú halmazokra vonatkozó tételek alapján $|A \cup B_1| = |B_1|$, tehát $\exists f : A \cup B_1 \to B_1$, kölcsönösen egyértelmű függvény. Ekkor legyen

$$f_0(x) = \begin{Bmatrix} f(x), & ha \quad x \in A \cup B_1 \\ x, & ha \quad x \in B_2 \end{Bmatrix}.$$

Ez a függvény $A \cup B$ elemeit fogja kölcsönösen egyértelműen rendelni a B elemeihez.

4.5 Kontinuum hipotézis

A kontinuum hipotézis szerint nincs olyan halmaz, amelynek számossága, a természetes számok halmazának és a valós számok halmazának számossága közé esne.

Jelölje a továbbiakban a számosságokat az $\aleph$. A megszámlálható számosság jele legyen $\aleph_0$, a rákövetkező $\aleph_1$ és rekurzívan minden k esetén $\aleph_k$-ra rákövetkező számosságot $\aleph_{k+1}$ jelölje.

A kontinuum hipotézis szerint $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$.

Az általánosított kontinuum hipotézis szerint $\aleph_{k+1} = 2^{\aleph_k}$.

5 Nagyságrendek

5.1 Függvények növekedése

Definíció: f és g két függvény, melyek a valós, vagy az egész számok halmazából képeznek a valós számok halmazába. Azt mondjuk, hogy $f(x) = O(g(x))$ ("nagy ordó $g(x)$"), ha $\exists c, x_0$ pozitív konstansok, hogy $x \geq x_0$ esetén $|f(x)| \leq |c \cdot g(x)|$.
Azt mondjuk ekkor, hogy g aszimptotikus felső korlátja f-nek.

Definíció: : Legyen f, g két függvény, amelyek a valós vagy az egész számok halmazából képeznek a valós számok halmazába. Azt mondjuk, hogy $f(x) = \Omega(g(x))$ ($f(x)$ nagy-Omega $g(x)$), ha $\exists c, n_0$ pozitív konstans, amelyekre: $|f(x)| \geq |c \cdot g(x)|$.
Ekkor azt mondjuk, hogy f aszimptotikus felső korlátja g-nek.

Definíció: : Legyen f, g két függvény, amelyek a valós vagy az egész számok halmazából képeznek a valós számok halmazába. Azt mondjuk, hogy $f(x) = \Theta(g(x))$ ($f(x)$ nagy-Theta $g(x)$), ha teljesül:

$$f(x) = O(g(x)),$$

$$f(x) = \Omega(g(x)).$$

Ekkor azt mondjuk, hogy a két függvény nagyságrendje megegyezik.

5.1.1 Kis ordó

A nagy prdóval szemben a kis ordónál ($f(x) = o(g(x))$), az f határozottan kisebb a g-nél.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0.$$

5.1.2 Függvények növekedése

Nagy ordó rendezés:

$$f(n) = O(f(n)), \quad \forall f.$$

$$(\log(n))^k = O(n), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

$$n^k = O(2^n), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

5.1.3 Függvények nagyságrendje

1. Konstans
2. Logaritmus
3. Elsőfokú polinom
4. Hatvány logaritmusok
5. Polinomok
6. Exponenciális
7. Faktoriális

5.2 Exponenciális növekedés, példa

Exponenciális növekedésnek nevezzük az n^k alakú növekedéseket. Példa: e^n.

6 Logika

6.1 Szintaxis nullad-, és elsőrendben

6.1.1 Nullarendű logika

Jelkészlet:

1. Atomok:
   (a) Betűk
   (b) Igaz, Hamis (I,H)
2. $\neg, \wedge, \vee$
3. Zárójelek

Formula: Minden atom formula. Ha α és β formulák, akkor $\neg\alpha, \alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta, \alpha \rightarrow \beta$ is formulák.
A fenti szabályok véges sokszori alkalmazásával kapjuk a formulákat. Az atomokat latin, a formulákat görög betűkkel jelöljük.

6.1.2 Elsőrendű logika

Jelkészlet:

1. Változószimbólumok: $x, y, z, ...$
2. Konstansszimbólumok: $a, b, c, ...$
3. Prédikátumszimbólumok: $P, Q, S, ...$
4. Függvényszimbólumok: $f, g, h, ...$
5. logikai összekötő jelek (műveleti jelek): $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$
6. Kvantorok: $\forall, \exists$
7. Zárójelek

Kifejezés (term): Minden idividuumváltozó és konstans kifejezés. Ha $t_1, t_2, ..., t_n$ kifejezések és f n-változós függvény szimbóluma, akkor $f(t_1, t_2, ...t_n)$ is kifejezés. A fentiek szerint a függvény argumentumaiba írhatunk áltozókat, konstansokat, de beágyazhatók más, vagy saját függvényértékek is. A kifejezések vagy prédikátumszimbólumok argumentumaiban, vagy függvények argumentumaiban fordulhatnak elő, önállóan nem.

Atomi formulák: Ha P n-argumentumú prédikátumszimbólum, és $t_1, t_2, ..., t_n$ kifejezések, akkor $P(t_1, t_2, ..., t_n)$ atomi formula.

Formula: Minden atom formula.
Ha α és β formulák, akkor $\neg\alpha, \alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta, \alpha \rightarrow \beta$ is formulák.
$\forall x\alpha(x), \exists x\alpha(x)$ is formula.
A fenti szabályok véges sokszori alkalmazásával kapjuk a formulákat.

6.2 Szemantika: kvantorok, interpretációk elsőrendben

Kvantorok hatásköre: Megállapodás szerint a kvantor hatásköre a mögötte álló változó utáni atomi formula vagy zárójelben megadott formula. Az ezekben szereplő változó előfordulásokat kötöttnek nevezzük, a változó egyéb előfordulásait szabadnak.

Interpretáció: Az elsőrendű nyelvben is valamely formula igazságértékét csak úgy tudjuk megmondani, ha interpretáljuk a formulát. Az interpretáció több részből áll. Meg kell adni az alaphalmazt, aminek elemeire vonatkoznak a formulák. Ahogyan nulladrendben is tettük, itt is meg kell mondani az atomi formulák igazságértékét. Ezen túlmenően, a függvényeket is interpretálni kell, meg kell mondani, hogy az egyes individuumokon mi a felvett függvényérték (ami szintén az univerzum egy eleme, vagyis egy individuum).
Ezután az elsőrendben tanult kvantorok jelentése, és a műveletek nulladrendben tanult jelentése alapján kiértékelhető a formula.

Definíció: Az elsőrendű mondat kielégíthető, ha van olyan interpretáció, amelyben igaz. Ezt az interpretációt a formula modelljének nevezzük.

Definíció: Az elsőrendű mondat érvényes, ha minden interpretációjában igaz.

Definíció: Az elsőrendű mondat kontradikció, ha minden interpretációjában hamis.

Definíció: Az α és β formulák ekvivalensek, ha minden interpretációban megegyezik az igazságértékük. Jelölése: $\alpha \equiv \beta$.

6.3 Szemantikai következmény nulladrendben, elsőrendben

Definíció: Modellelméleti vagy szemantikus következményfogalom: Azt mondjuk, hogy a $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ formulahalmaz szemantikai következménye β, ha β minden olyan interpretációban igaz, ahol $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ formulák igazak.
Más szavakkal $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ formulahalmaz következménye β, ha β legalább akkor igaz, amikor α_i-k igazak.
Jelölése: $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\} \models_1 \beta$.

6.4 Helyes következtetési sémák

Definíció: Azokat a következtetési sémákat tekintjük helyesnek, amelyekben a következmény valóban a feltételek következménye.

Modus Ponens Azt kell vizsgálnunk, hogy ahol α és $\alpha \to \beta$ igazak ott β is igaz-e. Ha igen, akkor helyes, ha nem, akkor helytelen a következtetési séma.
Csak az első interpretációban teljesül, hogy α és $\alpha \to \beta$ is igazak, és itt β is igaz, tehát a következtetési séma megfelelő.

Tétel: Az $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\} \models_1 \beta$ akkor és csak akkor, ha $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge ... \wedge \alpha_n \models_1 \beta$.

Bizonyítás: Az $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ együttesen akkor és csak akkor igaz, ha $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge ... \wedge \alpha_n$ igaz.

A fenti tétel miatt a $\models_1$ jel bal oldalát jelöljük a továbbiakban egyszerű α-val, ahol $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge ... \wedge \alpha_n$.

Tétel: $\alpha \models_1 \beta \Leftrightarrow \alpha \to \beta$.

Bizonyítás:

1. Lássuk be hogy ha $\alpha \models_1 \beta$, akkor $\alpha \to \beta$.
   Írjuk föl az igazságtáblázatot. A jelölt sort ez esetben nem lehet figyelembe venni, ugyanis akkor $\alpha \models_1 \beta$ nem teljesülne. A maradék sorokra pedig valóban az I az igazságérték.

	α	β	$\alpha \to \beta$
	I	I	I
$\to$	I	H	H
	H	I	I
	H	H	I

2. Lássuk be, hogy ha $\alpha \to \beta$, akkor $\alpha \models_1 \beta$.
   Ha $\alpha \to \beta$, akkor az igazságtáblában megjelölt sor nem szerepelhet, hanem csak a jelöletlen I sorok. Ezekben a sorokban viszont β legalább akkor igaz, ha α is igaz.

Tétel: $\alpha \models_1 \beta \Leftrightarrow \alpha \wedge \neg\beta$ kielégíthetetlen.

Bizonyítás: Az $\alpha \models_1 \beta$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\alpha \to \beta$ érvényes, vagyis $\neg(\alpha \to \beta) \equiv \neg(\neg\alpha \vee \beta)$ kielégíthetetlen. Ezt kifejezve: $\neg(\neg\alpha \vee \beta) \equiv \neg\neg\alpha \wedge \neg\beta \equiv \alpha \wedge \neg\beta$.

6.5 Ekvivalens formulák nulladrendben és elsőrendben

1. $A \vee B \equiv B \vee A, \qquad A \wedge B \equiv B \wedge A.$
2. $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C), \qquad (A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C).$
3. $A \vee (A \wedge B) \equiv A \qquad A \wedge (A \vee B) \equiv A.$
4. $I \vee A \equiv I, \qquad H \wedge A \equiv H.$
5. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C), \qquad A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C).$
6. $A \vee \neg A \equiv I, \qquad A \wedge \neg A \equiv H.$
7. $\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x), \qquad \neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x).$
8. $\neg\forall x \neg P(x) \equiv \exists x P(x), \qquad \neg\exists x \neg P(x) \equiv \forall x P(x).$
9. $\forall x \forall y A(x, y, ...) \equiv \forall y \forall x A(x, y, ...) \qquad \exists x \exists y A(x, y, ...) \equiv \exists y \exists x A(x, y, ...).$
10. $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \equiv \forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \qquad \exists x(A(x) \vee B(x)) \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x).$
11. $\forall x \forall y(A(x) \wedge B(y)) \equiv \forall x A(x) \wedge \forall y B(y) \qquad \exists x \exists y(A(x) \vee B(y \equiv \exists x A(x) \vee \exists y B(y).$

6.6 Konjunjktív normálforma

Definíció: Atomot, vagy annak tagadását literálnak hívjuk.

Definíció: A literálok diszjunkcióját klózoknak nevezzük.

Definíció: A klózok konjunkcióját konjuktív normálformának nevezzük.

Tétel: Minden formulához létezik vele ekvivalens konjunktív normálforma.

Bizonyítás:

1. Az implikáció felbontható: $\alpha \to \beta \equiv \neq \alpha \vee \beta$.
2. De Morgan azonosságok:
   - $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$.
   - $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$.
3. Disztributivitás: $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$.

6.7 Prenex konjunktív normálforma

A normálformára való átírás algoritmusa:

1. Logikai összekötőjelek átírása $\neg, \wedge, \vee$-ra.
2. A De Morgan szabályok alkalmazása, amíg a $\neg$ hatásköre atomi formula nem lesz.
3. A változók standardizálása (kvantorok átnevezése).
4. A kvantorkiemelési szabálaok alkalmazása, amíg a kvantorok a formula elejére nem kerülnek.
5. A kvantorok és az azokat közvetlenül követő változók sorrendjét meg kell tartani.
6. A formula konjunktív normálformára hozása a disztributív szabályok alkalmazásával.

6.8 Skólem normálforma

A $\forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n$ formulát, ahol a prefixumban csak univerzális kvantorok szerepelnek, Skólem normálformának nevezzük.

Tétel: Minden elsőrendű formulához található olyan Skólem normálformában lévő formula, ami az eredeti formula logikai következménye.

Skólemizálás folyamata: A formula "Skólemizálásához" először átírjuk a formulát prenex formába, az előzőekben már ismertetett módon. Az egzisztenciális kvantorokat az ún. Skólem konstansok, illetve Skólem függvények segítségével kiküszöböljük.
Tekintsük az első exisztenciális kvantort a formulában, legyen ez $\exists x_j$. Ha a formula igaz, akkor az előtte álló $x_1, x_2, ..., x_{j-1}$ változók minden értékkombinációjához létezik legalább egy értéke az x_j-nek, melyre a formula még igaz. Ezt a tényt az $f(x_1, x_2, ..., x_{j-1}) = x_j$ függvénnyel fejezzük ki. Ha az első kvantor éppen egzisztenciális, akkor ez a függvény nulla változós, vagyis konstans.
Ez az f függvény formálisan megadja az x_j változó azon értékét, ami a formulát igazzá teszi. Ezt a formális függvényképzést végrehajtjuk a soron következő egzisztenciális kvantorra is. Addig folytatjuk, amíg minden egzisztenciális kvantort nem elimináltunk. Természetesen ügyelni kell arra, hogy a függvény szimbólumok különbözők legyenek.
Az így kapott formulák az eredeti formula logikai következményei. Azonban az átalakítás NEM ekvivalens, hiszen visszafelé nem jutunk el az eredeti formulához. A gyakorlati alkalmazások szempontjából azonban ez elegendő, hiszen mi csak azt akarjuk eldönteni, lehetséges-e a formulát igazzá tenni, vagyis, más szavakkal: Kielégíthető-e a formula.

6.9 Rezolúció elve nulladrendben és elsőrendben

A rezolúcióhoz a formulát és a következmény tagadását Skólem normálformára alakítjuk. Nevezzük át a változókat úgy, hogy a változónevek különbözőek legyenek a klózokban. A rezolúció tehát csak akkor alkalmazható, ha az egységesítés elvégezhető. Ekkor pedig rezolúció alapelvét adó következtetési sémát alkalmazzuk, és akárcsak nulladrendben, elvégezzük a rezolúciót.

7 Gráfok

7.1 Élszám és fokszám összefüggése irányított és irányítatlan gráfokra

Tétel: (Handshake tétel): Minden gráf fokszáma az élszám kétszeresével egyenlő.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az e él az u és v csúcsokhoz illeszkedik, azaz u és v az él két végpontja. Ekkor ha

- Ha $u \neq v$, akkor az e élt $\Phi(u)$-nál, és $\Phi(V)$-nél is számoltuk.
- Ha pedig $u = v$, akkor az e él hurokél, és így $\Phi(u)$-nál számoltuk kétszer.

Tehát, ha a pontok fokszámát összeadjuk, kapjuk az élek számának kétszeresét.

Tétel: Minden gráfban a páratlan fokszámú csúcsok száma páros.

Bizonyítás: A handshake tételből következik, hogy a teljes gráf fokszáma páros. Ez csak akkor lehet, ha páros számú páratlan fokszámú csúcs van.

Tétel: Az n csúcsú összefüggő, egyszerű gráf éleinek száma legalább $n-1$.

Bizonyítás: Teljes indukcióval. Az $n = 1$ esetre nyílván igaz. Tegyük fel, hogy valamely $n > 1$-re teljesül. Belátjuk, hogy ekkor minden $n+1$ csúcsú összefüggő gráfnak legalább n éle van. Legyen G egy $n+1$ csúcsú gráf, és legyen n éle. Ekkor létezik egy elsőfokú csúcs, úgyanis mivel G összefüggő, ezért izolált csúcsa nincs. Vegyük ezt az elsőfokú csúcsot, és a hozzátartozó éllel együtt töröljük a gráfból. Ekkor n csúcsú összefüggő gráfot kapunk, aminek minimum $n-1$ éle van. Ekkor teljesül az indukciós feltevés. A törölt élt újra hozzáadva G egy $n+1$ csúcsú, n élű gráf lesz.

Tétel: Bármely egyszerű gráfban van két olyan pont, amelyek fokszáma egyenlő.

Bizonyítás: Egy n csúcsú gráfban a csúcsok lehetséges fokszámai: $n = 0, 1, ..., n-1$. Viszont a 0, és az $n-1$ nem teljesülhet egyszerre, ezért a skatulya elv alapján kell lennie legalább két megegyező fokszámú csúcsnak.

7.2 Kör létezésének szükséges feltételei irányítatlan gráfokra

Tétel: Ha egy gráfban minden csúcs fokszáma legalább 2, akkor a gráfban van kör.

Bizonyítás: Alkalmazzuk a leghosszabb út módszerét. Legyen 1 hosszúságú L út a G gráf egy leghosszabb útja, és ennek egy végpontja v. Tekintsük G v-hez illeszkedő éleit. Ezek közül bármelyiknek a végpontja L-hez tartozik, külömben L hossza 1-nél nagyobb lenne, ami ellentmond azzal, hogy L a leghosszabb út. Ha G minden pontjának fokszáma legalább kettő, akkor illeszkedik a v-hez egy e él is. Ha e hurokél, akkor ez G egy körét kijelöli. Ha nem hurokél, akkor u-nak v-től külömböző w végpontja L-ben van, tehát L-nek v és w pontokat összekötő e éllel együtt G körét adják.

Tétel: Ha egy n csúcsú gráfnak legalább n éle van, akkor van benne kör.

Bizonyítás: Teljes indukcióval. $n = 1$-re nyílván igaz. Tegyük fel, hogy valamilyen $n > 1$-re minden n csúcsú, legalább n élű gráfban van kör. Legyen G egy $n+1$ csúcsú, legalább $n+1$ élű gráf. Visszatérve a bizonyításra, vegyük G egy L leghosszabb útját. Ha L valamelyik végpontja G-nek nem elsőfokú csúcsai, akkor az előzőek szerint G-ben van kör. Ellenkező esetben töröljük G elsőfokú csúcsát az éllel együtt. Ekkor egy n csúcsú, legalább n élű gráfot kapunk, tehát az indukciós feltevés miatt tartalmaz kört, amit G is tartalmaz.

7.3 Részgráfok

Definíció: R részgráfja G-nek, ha R előállítható a G-ből csúcsok és élek elhagyásával.

7.4 Izomorfia fogalma, felismerése, megadása

Definíció: Két gráf izomorf, ha egyik csúcsai és élei kölcsönösen egyértelmű és illeszkedéstartó módon megfeleltethetők a másik pontjainak és éleinek.

Definíció: Legyenek $G = (V, E)$, és $G' = (V', E')$ homeomorf gráfok, ha $\exists f : V \to V'$ függvény, melyre $\{u, v\} \in E$ esetén $\{f(u), f(v)\} \in E'$, mindezt úgy, hogy ha két csúcs szomszédos a G-ben, akkor G'-ben is szomszédos.

7.5 Gráfbejárások

Adott gráfban keresünk szisztematikusan adott tulajdonságú (pl. címkéjű) csúcsot. A szizté- ma sokféle lehet, a két alap a szélességi és a mélységi keresés.

7.5.1 Szélességi bejárás

Algoritmus: Meglátogatjuk az első csúcsot, majd ennek a csúcsnak az összes szomszédját. Aztán e szomszédok összes olyan szomszédját, ahol még nem jártunk, és így tovább. Berakjuk az épp meglátogatott csúcsot, hogy majd a megfelelő időben a szomszédjaira is sort keríthessünk.
Általános lépés: vesszük a sor elején levő x csúcsot, töröljük a sorból, meglátogatjuk azokat az y szomszédait, amelyeket eddig még nem láttunk, majd ezeket az y csúcsokat a sor végére tesszük.

7.5.2 Mélységi bejárás

Algoritmus: Tetszés szerinti csúcstól elindulva egy úton addig megyünk "mélyre", ameddig lehet: vagy nincsen további szomszédos csúcs, vagy már jártunk ott. Ha így megakadunk, akkor visszalépünk (backtrack) az előző csúcshoz, ha onnan tudunk továbbmenni, akkor megint elindulunk, és a lehető legmélyebbre együnk, ha nem, akkor visszalépünk.

7.6 Euler kör, út

Definíció: A G gráf Euler-köre egy olyan zárt élsorozat, mely G összes élét pontosan egyszer érinti. Euler-útról akkor beszélünk, ha az élsorozat nem feltétlenül zárt.

Tétel: Egy összefüggő G gráfban akkor és csak akkor létezik Euler-kör, ha minden csúcsának fokszáma páros.

Bizonyítás: Először belátjuk, hogy ha a gráf tartalmaz Euler-kört, akkor minden csúcsának fokszáma páros.
Ha a gráfot az Euler-köre mentén járjuk be, akkor minden csúcsba pontosan annyiszor haladunk be, mint ahányszor kihaladunk belőle. Ezért nyilvánvalóan a bemenések és kijövetelek csúcsonkénti száma páros, mely éppen a csúcsok fokszámát adja.
Másodszor bizonyítandó, hogy ha minden pont fokszáma páros, akkor valóban tartalmaz Euler-kört. Ezt G pontszámára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.
A legkisebb pontszámú, minden csúcsában páros fokszámú gráf a három pontú teljes gráf (háromszög). Ebben van Euler-kör. Tegyük fel, hogy minden $k < |V(G)|$ esetén igaz az állítás.
Induljunk el G egyik csúcsából, és haladjunk úgy az élek mentén, hogy egyiken sem megyünk át egynél többször. Ha elakadunk, vagyis az egyik csúcsból már nem vezet ki él, akkor az biztosan a kiindulási csúcs a páros fokszáma miatt. Ekkor kaptunk egy zárt élsorozatot. Legyen F egy olyan zárt élsorozat Gben, melyben a lehető legtöbb él szerepel. A fenti eljárásban azért álltunk meg, mert a kezdőpontból nem indult ki újabb él, tehát az ebből a pontból kiinduló összes él F-ben van. Ha F G-nek Euler-köre, akkor készen vagyunk.
Amennyiben F nem Euler-köre -nek, akkor vizsgáljuk G-nek azt a részgráfját, mely pontosan azokat az éleket tartalmazza, amelyeket F nem tartalmaz. Ennek a részgráfnak kevesebb csúcsa van, mint G-nek, hiszen nem tartalmazza azt a csúcsot, amely a fenti eljárásban a kiindulópont volt. Az indukciós feltevés miatt ennek a részgráfnak minden komponensében található Euler-kör. Ennek a részgráfnak valamely komponense tartalmaz egy olyan pontot, mely F-ben is szerepel. Ha ugyanis nem lenne közös pontjuk, akkor G nem lenne összefüggő. Az előbb említett komponens Euler-körét járjuk be a közös pontból elindulva, majd járjuk be F-et. Ekkor egy F-nél nagyobb élszámú zárt élsorozatot kapunk. Ez azonban ellentmond a feltevésünknek, tehát Euler-kör.

Tétel: (Szükséges és elégséges feltétel Euler-út létezésére): Egy összefüggő gráf akkor és csak akkor tartalmaz Euler utt, ha a páratlan fokszámú csúcsok száma 0, vagy 2.

Bizonyítás: Az előző tétel alapján 0 páratlan fokszámú csúcs esetén Euler-kört kapunk, ami egyben Euler-út is. Ha 2 páratlan fokú él van, akkor ezeket összekötve egy Euler-kört kapunk. Ezt az élt elhagyva egy olyan élsorozatot kapunk, melynek kezdő és végpontja a két páratlan fokszámú csúcs.

Tétel: (Szükséges és elégséges feltétel irányított gráfokra) Egy összefüggő, irányított gráfban pontosan akkor van Euler-kör, ha minden csúcsnál a bemenő és kimenő élek száma megegyezik.
Egy összefüggő, irányított gráfban pontosan akkor van Euler-út, ha van benne Euler-kör, vagy ha két csúcs kivételével a bemenő és kimenő élek száma minden csúcsban megegyezik, a kivételeknél pedig az egyik (kiindulási) csúcsban a kimenő élek száma eggyel több, a másik (érkezési) csúcsban pedig a bemenő élek száma több eggyel.

Bizonyítás: A fenti gondolatmenet alapján belátható a tétel állítása.

7.6.1 Hamilton kör, út

Definíció: Egy P kör egy $G = (V, E)$ gráfban Hamilton-kör, ha P a V összes elemét pontosan egyszer tartalmazza. Hamilton-útról akkor beszélünk, ha P kör helyett út.

Tétel: (Szükséges feltétel Hamilton-kör létezésére) Ha egy gráfban k pontot elhagyva k-nál több komponens keletkezik, akkor nem tartalmazhat Hamilton-kört.

Bizonyítás: Indirekt módon. Tegyük fel, hogy van a gráfban Hamilton-kör, legyen ez $(v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_n})$ és legyen $v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_k}$ az a k pont, melyet elhagyva a gráf több, mint k komponensre esik szét. Vegyük észre azonban, hogy az elhagyott pontok közötti ”ívek” biztosan összefüggő komponenseket alkotnak. Pl.: a $(v_{i_1+1}, v_{i_1+2}, ..., v_{i_2-1})$ ív is biztosan összefüggő lesz, hiszen két szomszédos pontja között az eredeti Hamilton-kör egy éle fut. Mivel éppen k ilyen ívet kapunk, nem lehet több komponens k-nál. Kevesebb lehet, hiszen különböző ívek között futhatnak élek.

Tétel: (Ore tétel) Ha G gráfra teljesül, hogy két nem szomszédos u, v csúcsok fokszámának összege nagyobb a G gráf csúcsainak számánál, akkor G-nek Hamilton-köre van.

Bizonyítás: Tegyük fel indirekt módon, hogy a gráf kielégíti a feltételt, de nincsen benne Hamilton-kör. Ez az ellenpélda gráfunk legyen G'. Húzzunk be G'-be további éleket úgy, hogy az új gráf is ellenpélda legyen (továbbra sincs benne Hamiltonkör). Így kapunk egy G gráfot, ami továbbra is ellenpélda, hisz új élek behúzásá- val ”rossz pontpárt” nem lehet létrehozni, de ha még egy élet akárhogyan behú- zunk, akkor már tartalmaz a gráf Hamilton-kört. Biztosan van két olyan pont, hogy $\{x, y\} \notin E(G)$, hiszen egy n csúcsú teljes gráfban ($n \geq 3$ esetén) van Hamilton-kör. Ekkor viszont a $G \cup \{x, y\}$ gráfban van Hamilton-kör, tehát G-ben van Hamilton-út. ($n = 2$ esetén is van Hamilton-út, $n = 1$ esetén pedig a gráfunk egy izolált pont, nincs éle, nincs benne Hamilton-kör). Legyenek P a Hamilton-út csúcsai: $v_1, v_2, ..., v_n$, és $v_1 = x$ és $v_2 = y$. Ha x szomszédos a P út valamely v_i pontjával, akkor y nem lehet összekötve v_{i-1}-gyel, mert ez esetben $(v_1, v_2, ..., v_{i-1}, v_n, v_{n-1}, ..., v_i, v_1)$ egy Hamilton-kör lenne. Így tehát y nem lehet összekötve legalább $d(x)$ darab ponttal, ezért

$$d(y) \leq n - 1 - d(x)$$

$$d(y) + d(x) \leq n - 1$$

ami viszont ellentmondás, hiszen $d(y) + d(x) \geq n$ volt feltéve.

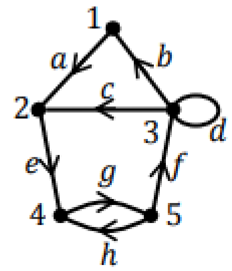
Tétel: (Dirac tétele) Ha az $n = 2k$ csúcsszámú gráfnak minden csúcsa legalább k fokú, akkor van G-nek Hamilton köre.

Bizonyítás: A Dirac tétel az Ore tételnél erősebb feltételt fogalmaz meg, mivel ha minden pont fokszáma legalább $\frac{|V(G)|}{2}$, akkor teljesül az Ore tétel feltétele.

7.7 Dijkstra algorimusa minimális út kresésére

Algoritmus: Választunk egy kiindulási csúcsot. Mindegyik csúcshoz rendeljük hozzá azt, hogy mekkora volt az élsúlyok összege, amik mentén a csúcsba eljutottunk. Kezdetben mindegyik végtelen. Válasszuk a kiindulási csúcsunkhoz illeszkedő éleket, és az élek másik végén lévő csúcsokhoz rendeljük hozzá az élsúlyok összegét, amin eljutunk a csúcsba. Ezt követően minden lépésben a legkisebb összegű csúcsból indulunk ki, és nézzük meg a többi csúcsba vezető élek súlyösszegét. Ha ez kevesebb, mint az adott csúcshoz hozzárendelt érték, akkor erre módosítjuk, ha nagyobb, akkor változatlanul hagyjuk. Végül, ha már nem találunk semelyik csúcshoz sem kisebb összeget, végeztünk.

7.8 Irányított és irányítatlan gráfok mátrixai



Szomszédsági mátrix

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Illeszkedési mátrix (nem irányított)

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

8 Síkgráfok és színezésük

Definíció: Egy gráf síkba rajzolható gráf, ha lerajzolható úgy a síkba, hogy élei csak a szögpontokban metszik egymást. Ezt az így lerajzol gráfot síkgráfnak nevezzük.

8.1 Euler poliéder tétele

Tétel: A G összefüggő, egyszerű síkgráf esetén, ahol p a csúcsok, e az élek, és t a G gráf által létrehozott területek száma, a végtelen területet is számítva, akkor $p - e + t = 2$.

Bizonyítás: Rajzoljuk le lépésenként az adott gráfot:

1. 1 csúcsra igaz az állítás: $1 - 0 + 1 = 2$.
2. 2 csúcsra és egy élre igaz az állítás: $2 - 1 + 1 = 2$.

Tegyük fel, hogy $(n - 1)$ esetre igazoltuk a formulát. A következő lépés két féle lehet:

1. Egy új csúcs és egy új él hozzáadása.
   Ekkor mivel az egyenlethez hozzáadnék és levonnánk egyet, ezért a formula teljesül.
2. Két csúcs között egy új élet húzunk.
   Ekkor az új éllel létrehozok egy új területet is, tehát hasonlóan az előzőhöz, az egyenlethez hozzáadva, majd levonva egyet, az eredeti értéket kapjuk vissza

8.1.1 Következményei

Következmény: Ha G összefüggő, egyszerű síkgráf csúcsainak száma legalább 3, akkor $e \leq 3p - 6$.

Bizonyítás: Mivel G egyszerű gráf, ezért minden területet legalább 3 él határol. A területeket határoló éleket összeadva az élek számának kétszeresét kapjuk, hiszen minden területet határoló él két területhez tartozik. Ekkor felírható, hogy $2e \geq 3t$, hiszen ha mindegyik terület háromszög lenne, akkor lenne a fokszáma 3. Így $t \leq \frac{2}{3}e$. Ebből kifejezve az Euler poliéder tételt:

$$e = p + t - 2 \leq p + \frac{2}{3}e - 2.$$

Ebből következik az állítás.

Következmény: Ha G összefüggő, síkba rajzolható, egyszerű gráf, akkor a minimális fokszáma legfeljebb 5.

Bizonyítás: Indirekt módon tegyük fel, hogy a minimális fokszám 6. A fokszámok összege az élek kétszerese (handshake tétel), így tudhatjuk, hogy $6n \leq 2e$. ugyanakkor az előző következmény alapján: $e \leq 3p - 6$, tehát $2e \leq 6n - 12 \leq 6n$, ami viszont ellentmondás.

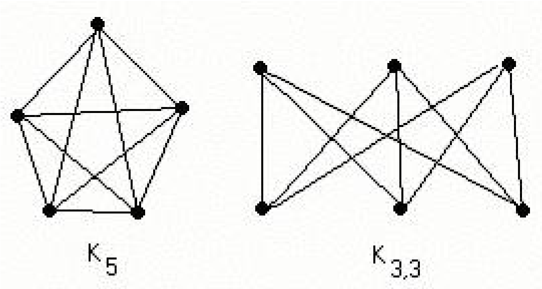
Következmény: Ha G összefüggő, síkba rajzolható, egyszerő gráf csúcsainak száma legalább 3, és nincs 3 hosszú köre, akkor $e \leq 2p - 4$.

Bizonyítás: A feltételek miatt most a területek fokszáma legalább 4, így $2e \geq 4t$, amiből $t \leq \frac{1}{2}e$. Az Euler poliéder tételbe visszahelyettesítve kapjuk:

$$e = p + t - 2 \leq p + \frac{1}{2}e - 2.$$

Ebből következik az állítás.

8.2 Kuratowski-gráfok



8.3 Kurakowski tétel

Tétel: A G gráf síkba rajzolható, ha nem tartalmaz K_5-el, illetve $K_{3,3}$-al izomorf, vagy homeomorf részgráfot.

Bizonyítás: Az esetek az Euler tétel következményei miatt megdőlnek.

8.4 Fáry-Wagner tétel

Tétel: Ha G síkba rajzolható gráf, akkor lerajzolható a síkba úgy is, hogy minden éle egyenes szakasz.

8.5 Síkba rajzolható gráfok és gömbre rajzolható gráfok

Tétel: A G gráf akkor és csak akkor síkba rajzolható, ha gömbre rajzolható.

Bizonyítás: Sztereografikus projekció (bijekció) révén konstruktívan, az adott gráfot a gömbről a síkra vetítve bizonyítható.

8.6 Színezés fogalma, alkalmazásai

Definíció: A $\chi(G)$ a G gráf kromatikus száma, vagyis az a szám, amely megmutatja, legkevesebb hány szín kell a gráf csúcsainak olyan kiszínezéséhez, hogy a szomszédos csúcsok más színűek legyenek.

Definíció: Egy egyszerű gráf n-színezhető, ha minden csúcsához hozzárendelhető úgy egy szín hogy két szomszédos csúcshoz rendelt szín különböző.

8.7 4-szín tétel

Tétel: Minden térkép kiszínezhető 4 színnel úgy, hogy a szomszédos területek más színűek lesznek.

8.8 5-szín tétel

Tétel: Minden térkép kiszínezhető 5 színnel úgy, hogy a szomszédos területek más színűek lesznek.

Bizonyítás: Teljes indukcióval. Ha a G gráfnak maximum 5 csúcsa van. Ekkor nyílván teljesül.
Tegyük fel, hogy $n > 5$ csúcsú gráf színezhető 5 színnel.
$(n+1)$-re: Ekkor az élek száma: $e \leq 3p - 6$, azaz lesz olyan csúcsa, amelynek fokszáma max 5.

- Ha x foka 4, akkor x-t elhagyva, teljesül az indukciós feltevés, tehát a kapott gráf színezhető 5 színnel. Visszarakva az x-t mivel 4 fokú, ezért biztosan van olyan szín, amit a szomszédokon még nem használtunk föl, tehát az eredeti gráf színezhető 5 színnel.

- Ha x foka 5, akkor a szomszédainak a foka nem lehet 5, mert a K_5 nem síkba rajzolható, ezért lesz legalább egy olyan szín, amit két szomszédján is használhatunk. Az előző ponthoz analóg módon bizonyítjuk, hogy 5 színnel színezhető:

- Legyen z, y az x olyan szomszédjai, melyek nincsenek összekötve, ezeket vonjuk össze egy ponttá, hagyjuk el x-et. Az ind. feltevés miatt a maradék kiszínezhető 5 színnel. Visszavéve és szétszedve x-y-z csúcsokat, ezek kiszínezhetők max 3 színnel, hiszen x-nek összesen 5 szomszédja van, az y és z-kívüli csúcsok 3 színt lefoglalnak, de y és z egyszínű (nem szomszédok), marad egy szín x-nek.

9 Fák

9.1 Fa ekvivalens definíciói

Definíció: Ha egy gráf összefüggő, és nincs benne kör, akkor azt fagráfnak hívjuk.

Tétel: Az n csúcsú, $n-1$ élű gráfok fagráfok.

Bizonyítás: Tegyül fel, hogy a G gráf nem fa, azaz tartalmaz kört. Ekkor ha eltöröljük a kör egyik élét, egy összefüggő, n csúcsú, $n-2$ élű gráfot kapnánk, ami ellentmondás. Be kell még látnunk, hogy ha egy összefüggő gráf valamely körének egy tetszőleges élét töröljük, akkor ismét összefüggő gráfot kapunk. Tegyük fel ehhez, hogy a törölt él nem hurokél, hiszen hurokél törlése nem szünteti meg az összefüggőséget. Töröljük a G gráf K körének (u, v) élét. A G gráfban viszont még mindíg eljuthatunk u-ból v-be, ha a K kör megmaradt élein keresztül, tehát a törlés után is eljuthatunk bármelyik pontból bármelyik pontba, tehát a G gráf összefüggő.

Tétel: Az n csúcsú fagráf énszáma $n-1$.

Bizonyítás: Tudjuk, hogy minden n csúcsú, összefüggő gráfnak legalább $n-1$ éle van, valamint ha egy n csúcsú, összefüggő gráfban legalább n él van, akkor van benne kör. Ezért mivel a fa körmentes, összefüggő gráf, pontosan $n-1$ éle kell, hogy legyen.

9.2 Prüfer kód

A Prüfer kód fák tárolására alkalmas. A fa csúcsát $k = 1, 2, ..., n$ számokkal tetszőlegesen címkézzük. A Prüfer kód alkalmazásához tudjuk, hogy minden legalább két csúcsú fában van legalább két csúcs, amelyek fokszáma 1.

Algoritmus: Kiindulásként meg van adva egy fa (ábrával, mátrixszal stb.) Első lépésként sorszámozzuk a csúcsokat 1-től n-ig. A következő lé- pésben megkeressük a legkisebb sorszámú csúcsot a (maradék) fán. Hagyjuk el ezt a csúcsot a rá illeszkedő éllel együtt, és fűzzük a lista végéhez az él másik végén található csúcs sorszámát. Ezt a lépést addig ismételve, míg a fából csak egy csúcs marad, kapjuk a Prüfer kódot.

9.3 Feszítőfák keresésére vonatkozó algoritmusok: Prim, Kurskal

Definíció: Egy gráf minden csúcsát tartalmazó fát a gráf feszítőfájának nevezzük.

Tétel: Minden (összefüggő) gráfnak van feszítőfája.

Bizonyítás: Legyen G a gráf, melyben feszítőfát keresünk. Ha G fa, akkor készen vagyunk. Ha G nem fa, vagyis tartalmaz köröket, akkor minden körből egy élt elhagyva fához jutunk

Tétel: (Caeley tétel) Feszítőfák száma n csúcsú teljes gráfban n^{n-2}.

Bizonyítás: Prüfer kód segítségével, $n-2$ hosszú különböző sztringek száma n számjegy ismételt felhasználása esetén n^{n-2}.

Minimális feszítőfa keresése A probléma lényege, hogy egy élsúlyozott összefüggő egyszerű gráfban keressük a legkisebb élsúlyösszegű feszítőfát.

Algoritmus: (Prim algoritmus) Választunk egy kiindulási csúcsot. Az ebből kiinduló élek közül a legkisebb súlyú mentén választjuk a következő csúcsot. A legkisebb súlyú élhez fűzzük a rá illeszkedő legkisebb súlyú élet, ha az nem alkot kört az eddig vizsgált élekkel. Ha már van $n-1$ él, akkor készen vagyunk.

Algoritmus: (Kruskal algoritmus) Az éleket súlyuk szerint növekvő sorrendbe rendezzük. A legkisebbtől kezdve vesszük őket (nem feltétlenül illeszkedően) úgy, hogy ne képezzenek kört. Ha már van $n-1$ él, akkor készen vagyunk.

9.4 Fabejárások: pre-,in-,post-order

Megkülönböztetünk egy csúcsot, ezt gyökérnek nevezzük. A gyökér őse (szülője) a szomszédos csúcsainak, és ezek a csúcsok az ősök (szülők) utódai (gyerekei). Az az utód, aki nem szülő, a fa levele. A fában egy út nevezhető "ág"-nak is.

Definíció: Ha egy fában minden csúcsnak legfeljebb két gyereke van, akkor a fát bináris fának nevezzük.

Algoritmus: Preorder bejárás: azaz a gyökér elem majd a bal oldali részfa preorder bejárása, végül a jobboldali részfa preorder bejárása.

Algoritmus: Inorder bejárás: azaz először a bal részfa inorder bejárása, majd a gyökérelem, végül a jobboldali részfa inorder bejárása.

Algoritmus: Postorder bejárás: azaz először a bal részfa posztorder bejárása, majd a jobboldali részfa posztorder bejárása, végül a gyökérelem feldolgozása.

10 Hálózati folyamok

10.1 Hálózat

Definíció: Adott $G = (N, E)$ irányított gráf, és ennek kettő külömböző pontja s és t, melyeket forrásnak és nyelőnek nevezünk (a forrásból csak kifelé, a nyelőbe csak befelé jönnek élek). Adott továbbá az éleken értelmezett $c : E \to \mathbb{R}^+$, nemnegatív értékű kapacitásfüggvény.
Ekkor a $G = (N, E)$ gráfot a c függvénnyel együtt (G, c) hálózatnak nevezzük.

10.2 Folyam

Definíció: Az $f : E \to \mathbb{R}$ függvényt folyamnak nevezzük, ha teljesülnek rá:

$$f(n_1, n_2) = -f(n_2, n_1), \quad \forall (n_1, n_2) \in E, n_1, n_2 \in N.$$

$$f(n_1, n_2) \leq c(n_1, n_2), \quad \forall (n_1, n_2) \in E.$$

10.3 Vágás

Definíció: Legyen $H = (G, c)$ hálózat, s forrás és t nyelő és legyen adott N_1, N_2 az N partíciója. Legyen továbbá $s \in N_1$, $t \in N_2$. Ekkor az N_1, N_2 halmazt s,t vágásanak hívjuk. Az N_1, N_2 kapacitásán a

$$c(N_1, N_2) \sum_{n_i \in N_1, n_j \in N_2} c(n_i, n_j)$$

számot értjük.

10.4 Javító út

Definíció: Adott $H = (G, c)$ háló s forrással, és t nyelővel. Jelölje $r : E \to \mathbb{R}$ a maradék.kapacitás függvény, amely $\forall n_1, n_2 \in N$ esetén $r(n_1, n_2) = c(n_1, n_2) - f(n_1, n_2)$. Az f folyamhoz tartozó javító gráf a $G_f = (N, E_f)$, az élein értelmezett maradék-kapacitás függvénnyel, ahol $E_f = \{(n_1, n_2) | n_1, n_2 \in N, r(n_1, n_2) > 0\}$.
A G_f beli irányított s, t utakat javító utaknak nevezzük.

10.5 Ford-Fulkerson tétel

Tétel: Ha $s \in N_0$ és $t \in N \setminus N_0$, akkor a folyam akkor és csak akkor maximáélis, ha nincsen javítóút.

Bizonyítás: Ha a folyam maximális, nem létezhet javítóút, mert akkor azt használva a folyam értéke növelhető lenne.
Ha nincsen javító út, akkor a folyam maximális. Ennek belátásához tekintsük azokat a csúcsokat, ahová még nem vezet javító út, legyen ezek halmaza N_0 és s is kerüljön ebbe a halmazba. Tekintsük az $(N_0, N \setminus N_0)$ vágást. Tekintsük azokat az $i \to j$ előremutató éleket, melyek N_0-ból $N \setminus N_0$-ba mutatnak. Ezeknek a folyamértéke egyenlő a kapacitásukkal, külömben j is N_0-hoz tartozna. Ehhez hasonló hátramutató $j \to i$ éleken a folyam 0.

Tétel: (Ford-Fulkerson tétel) Legyen $H = (G, c)$ hálózat. Ekkor a maximális folyamérték egyenlő a minimális vágással.

Bizonyítás: Az előző tételnél láttuk, hogy a maximális folyam egyenlő egy alkalmas vágás kapacitásával. Másrészt azt is bizonyítottuk, hogy bármely folyam nem lehet nagyobb bármely vágás kapacitásánál. Ezért az előző tétel bizonyításában szereplő $(N_0, N \setminus N_0)$ vágás minimális vágás kell legyen.