Vonalintegrál $\mathbb{R}^2$-ben és $\mathbb{R}^3$-ban

Kétváltozós függvény vonalintegrálja

Adott a síkban egy Γ Jordan görbe:

$$\Gamma = \{\gamma(t) \ : \ t \in [a, b]\}, \qquad \gamma(t) = (x(t), y(t)).$$

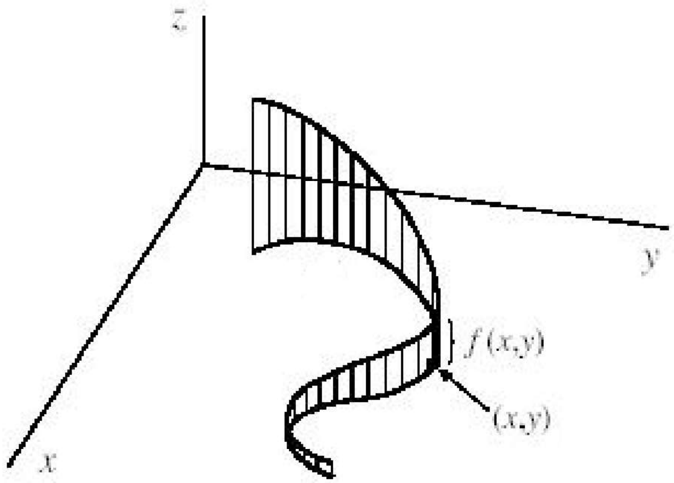
Tfh Γ sima görbe, azaz $x, y : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenciálhatók.

Legyen $R \subset \mathbb{R}^2$, melyre $\Gamma \subset R$. Adott egy $f : R \longrightarrow \mathbb{R}^+$ függvény.

$$\int_\Gamma f(x, y) \, ds?$$

Mi a furcsa ebben a formulában?

Vonalintegrál fizikai interpretációja



1.) Az alábbi felület nagysága:

$$\{(x(t), y(t), z) : 0 \leq z \leq f(x(t), y(t))\}.$$

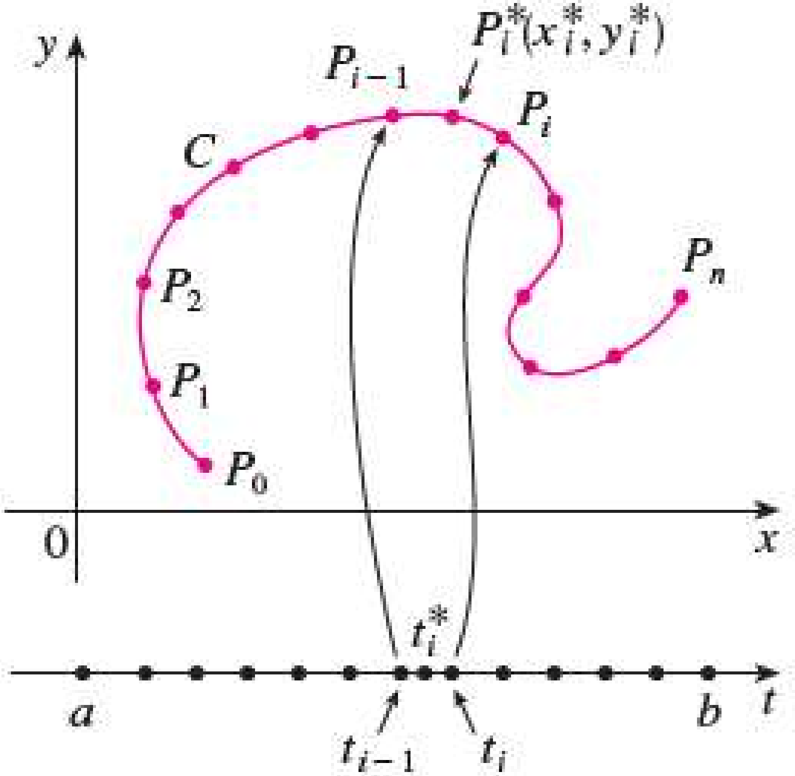
és $t \in [a, b]$

2.) $\Gamma \approx$ hajlított rúd a síkon.

$(x, y) \in \Gamma$ pontban a rúd sűrűsége $f(x, y)$ $\Longrightarrow$ A rúd tömege:

$$\int_{\Gamma} f(x, y)\, ds.$$

Kétváltozós függvény vonalintegrálja



$[a, b]$ egy felosztása:

$$a = t_0 < t_1 \ldots < t_n = b.$$

$x_i = x(t_i), \ y_i = y(t_i)$

A görbe pontjai $P_i = (x_i, y_i)$

A vonalintegrál közelítése:

$$\int_\Gamma f(x.y)\, ds \approx S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*) \cdot \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*) \cdot \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

Kis trükk...

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*) \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta x(t_i)}{\Delta t_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y(t_i)}{\Delta t_i}\right)^2} \Delta t_i$$

Határátmenettel:

$$I = \int_{\Gamma} f(x, y)\, ds := \int_{a}^{b} f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt.$$

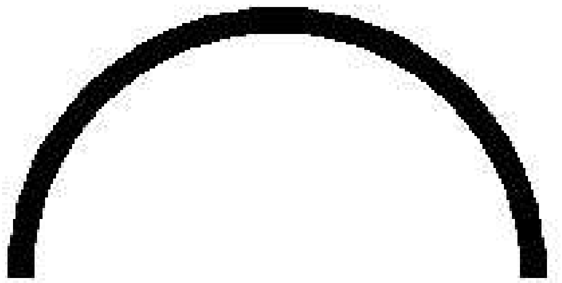
Definíció. Az f függvény VONALINTEGRÁLJA a Γ görbe mentén:

$$\int_{\Gamma} f(x, y) ds = \int_{a}^{b} f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Példa. Speciálian $f(x, y) \equiv 1$. Ekkor $\int_{\Gamma} 1 ds = s(\Gamma)$, ívhossz.

Példa. **Gyakorlatokon**

Adott egy félkör alakú rúd.



$$\Gamma = \{x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0.\}$$

Sűrűsége csökken, ha y nő.

$$f(x, y) = 1 - y.$$

Tömege $\displaystyle\int_\Gamma (1 - y)\, ds$.

A görbe paraméterezése: $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $t \in [0, \pi]$.

Ekkor $ds = \left(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)\right)^{1/2} dt = dt$, ezért

$$\int_\Gamma (1 - y)\, ds = \int_0^\pi (1 - \sin t)\, dt = \pi - 2.$$

Vektormező vonalintegrálja.

$F : D \to \mathbb{R}^2$, $D \subset \mathbb{R}^2$ *vektormező*. Koordináták $f_1, f_2 : D \to \mathbb{R}$.

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}.$$

Adott $\Gamma \subset D$ Jordan görbe.

Fizikai háttér: $F \approx$ erőtér. Egy egységnyi tömegű részecske a Γ görbe mentén mozog. *Mekkora munkát végez?*

Jelölés $\underline{r} = (x, y)$. A vektormező vonalintegrálja:

$$\int_\Gamma F(\underline{r})d\underline{r}$$

$$\int_\Gamma F(\underline{r})d\underline{r} = ?$$

Közelítés: $[a, b]$ felosztása $\mathcal{F}_n = \{a = t_o < t_1 < \cdots < t_n = b\}$

Γ megfelelő pontjai $\underline{r}_i = (x(t_i), y(t_i))$.

Az integrál közelítése $I(\mathcal{F}_n) = \sum_{i=1}^{n} \langle F(\underline{r}_i), (\underline{r}_i - \underline{r}_{i-1}) \rangle$

Tfh $n \to \infty$, és $\delta(\mathcal{F}_n) = \max_{i=1,\dots n} (t_i - t_{i-1}) \to 0$.

Tétel.

$$\int_\Gamma F(\underline{r})d\underline{r} := \lim_{n\to\infty} I(\mathcal{F}_n) = \int_a^b \langle\ F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)\ \rangle dt$$

ahol $\dot{\gamma}(t)$ jelöli a $\gamma(t)$ függvény koordinátánkénti deriváltját.