

Matematikai analízis II. - 2. és 4. csoport

2. heti órai és házi feladatok

Amennyiben a Fourier soros feladatok máshogy nem rendelkeznek, a függvényt a $(-\pi, \pi]$ tartományon értelmezzük és periodikusan kiterjesztjük a teljes számegyenesre.

Órai feladatok

1. Határozzuk meg az alábbi függvények Taylor sorát, illetve azok konvergenciahalmazát!

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x} \quad f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad f(x) =$$

2. Határozzuk meg az alábbi függvények Fourier sorát!

$$f(x) = \sin^2 x \quad f(x) = \cos^2 x \quad f(x) = \sin^3 x \quad f(x) = \cos^3 x \quad f(x) = \sin^4 x \quad f(x) = \cos^4 x$$

3. Határozzuk meg az alábbi függvények Fourier sorát!

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 0 & x \in 0, \pi \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases} \quad f(x) = |x| \quad f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \leq 0 \\ x & 0 < x < \pi \\ \frac{\pi}{2} & x = \pi \end{cases}$$

Típusfeladatok

1. Határozzuk meg az alábbi függvény Fourier sorát!

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < \frac{\pi}{4} \\ 0.5 & |x| = \frac{\pi}{4} \\ 0 & \frac{\pi}{4} < |x| < \pi \end{cases}$$

2. Határozzuk meg az alábbi függvény Fourier sorát!

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi < x < 0 \\ -1 & 0 < x < \pi \\ 0 & x \in \{0, \pi\} \end{cases}$$

3. Határozzuk meg az alábbi függvény Fourier sorát!

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - x & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ x & |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

Elgondolkodtatóbb feladatok

- *1. Határozzuk meg az alábbi függvénytörök konvergenciáját!

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n^2} e^{-nx} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n} (n!)^3}{(3n)!} \operatorname{tg}^n x$$

2. Határozzuk meg az $f(x) = |\cos x|$ függvény Fourier sorát!

3. Határozzuk meg az alábbi függvény Fourier sorát, ha $a, b \in \mathbb{R}$!

$$f(x) = \begin{cases} ax & -\pi < x \leq 0 \\ bx & 0 < x < \pi \\ \frac{b-a}{2}\pi & x = \pi \end{cases}$$

4. Határozzuk meg az $f(x) = \sin |x|$ függvény Fourier sorát!

5. Határozzuk meg az alábbi függvény Fourier sorát!

$$f(x) = \operatorname{sign}(x)\pi - x = \begin{cases} -\pi - x & -\pi < x \leq 0 \\ \pi - x & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

6. Határozzuk meg az $f(x) = \frac{\pi}{2} - |x|$ függvény Fourier sorát!

7. Határozzuk meg az $f(x) = e^x$ függvény Fourier sorát!

8. Határozzuk meg az $f(x) = \operatorname{sh} x$ függvény Fourier sorát!

- *9. Milyen jellegzetes tulajdonsága van adott π -periódusú függvény $(-\pi, \pi]$ intervallumon vett Fourier sorának?
- *10. Milyen jellegzetes tulajdonsága van az $f(x)$ függvény $(-\pi, \pi]$ intervallumon vett Fourier sorának ha f antiperiodikus, azaz $f(x + \pi) = -f(x)$?
- *11. Milyen kapcsolat van az $f(x)$ és $g(x)$ függvény Fourier együtthatói között, ha $f(-x) = g(x)$?
- *12. Milyen kapcsolat van az $f(x)$ és $g(x)$ függvény Fourier együtthatói között, ha $f(-x) = -g(x)$?
- **13. Adott $f(x)$ függvény Fourier együtthatóinak ismeretében számítsuk ki az $f(x + h)$ függvény Fourier együtthatóit rögzített $h \in \mathbb{R}$ esetén!