

# ADATSZERKEZETEK ÉS ALGORITMUSOK

Piros-Fekete Fák

# Piros-Fekete fák

- A piros-fekete fa olyan bináris keresőfa, melynek minden pontja egy extra bit információt hordoz:
  - ez a pont színe, amelynek értékei:
    - **PIROS** vagy
    - FEKETE
- A pontok színezésének korlátozásával biztosítható:
  - piros-fekete fában bármely, a gyökértől levélíg vezető út hossza nem lehet nagyobb, mint a legrövidebb ilyen út hosszának kétszerese.
  - Tehát az ilyen fák megközelítőleg kiegyensúlyozottak.

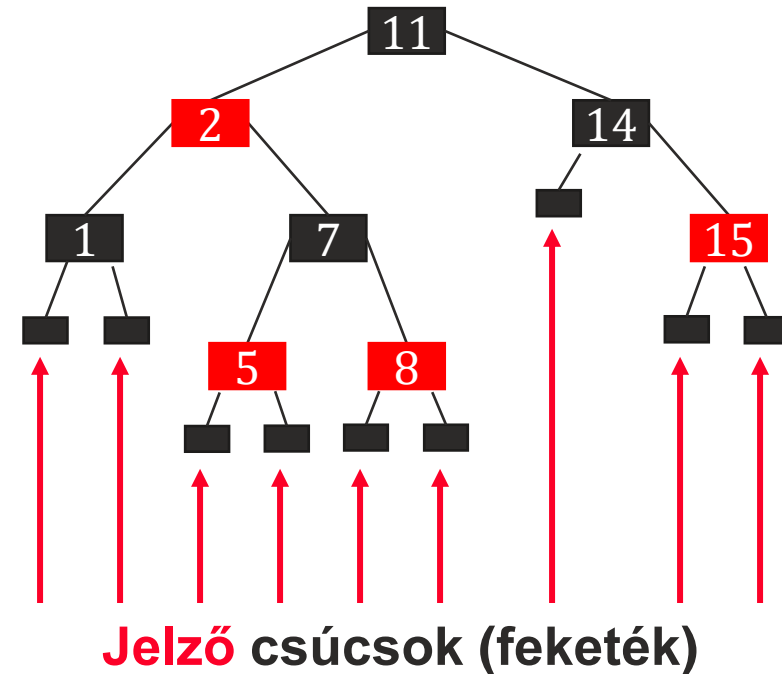
# Piros-Fekete fa tulajdonságok

- A fa minden pontja tartalmazza a *szín*, *kulcs*, *bal*, *jobb* és *szülő* mezőket.
- A szokásos bináris keresési fa minden olyan csúcspontját, aminek kevesebb, mint két gyereke van kiegészítjük további gyerekekkel.
  - Ezek lesznek a fa levelei.
  - Speciális, NIL értéket tartalmazó csúcsok lesznek.
  - Így a fa azon pontjai, amelyek valódi adatot tartalmaznak, azok nem lesznek levelek.
- Erre a szerkezeti tulajdonságra épít a definíció.
  - Az implementálás során nem (feltétlen) tároljuk ezeket a csúcsokat.

# Piros-Fekete fák

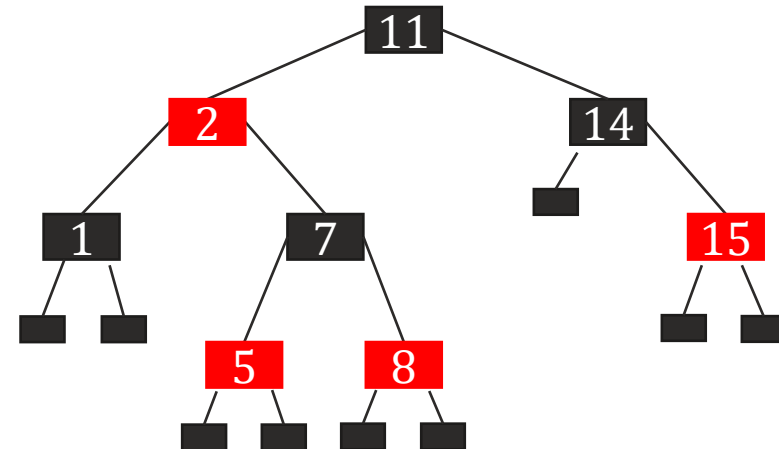
- Egy Piros-Fekete fa
  - Minden csúcs **PIROS** vagy FEKETE
  - A gyökér, és minden levél FEKETE

- A levelek FEKETE „jelző” csúcsok, nem tartalmaznak adatot



# Piros-Fekete fák

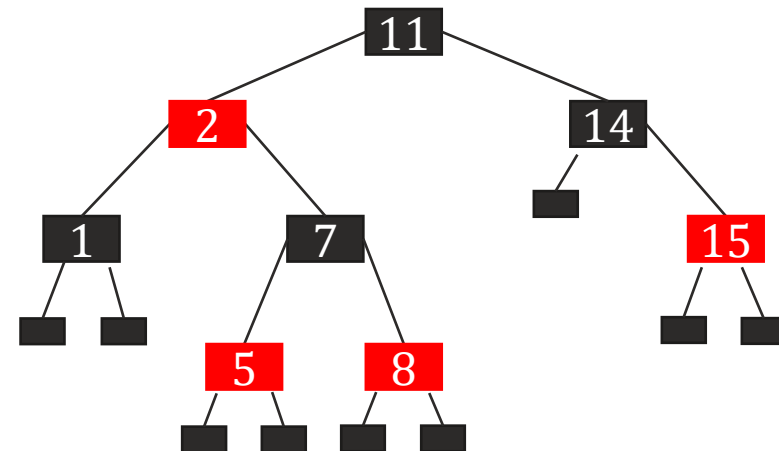
- Egy Piros-Fekete fa
  - Minden csúcs **PIROS** vagy FEKETE
  - A gyökér, és minden levél FEKETE
  - Ha egy csúcs **PIROS**, akkor mindkét gyereke FEKETE
- Ebből következik, hogy egyik úton sem lehet két egymást követő **PIROS** csúcs.
  - De akárhány egymást követő FEKETE csúcs lehet.



# Piros-Fekete fa definíciója

- Egy Piros-Fekete fa
  - Minden csúcs **PIROS** vagy **FEKETE**
  - A gyökér, és minden levél **FEKETE**
  - Ha egy csúcs **PIROS**, akkor mindkét gyereke **FEKETE**
  - Minden csúcsból minden út egy levélig ugyanannyi **FEKETE** csúcsot tartalmaz

- A gyökértől minden úton  
3 **FEKETE** csúcs van



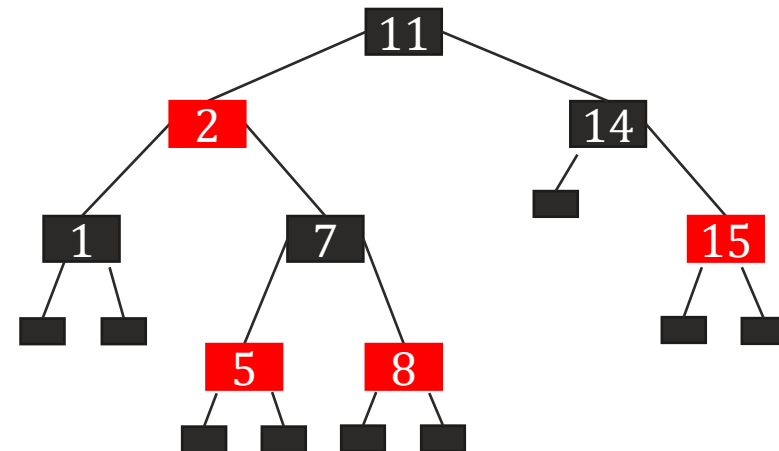
# Piros-Fekete fa definíciója

- Egy Piros-Fekete fa

- Minden csúcs **PIROS** vagy **FEKETE**
- A gyökér, és minden levél **FEKETE**
- Ha egy csúcs **PIROS**, akkor mindkét gyereke **FEKETE**
- Minden csúcsból minden út egy levélig ugyanannyi **FEKETE** csúcsot tartalmaz

- Az  $x$  pont fekete-magassága

- $fm(x)$  – az  $x$  pontból induló, levélig vezető úton található,  $x$ -t nem tartalmazó fekete pontok száma.
- A fa fekete-magassága:  
 $fm(\text{a fa gyökere})$



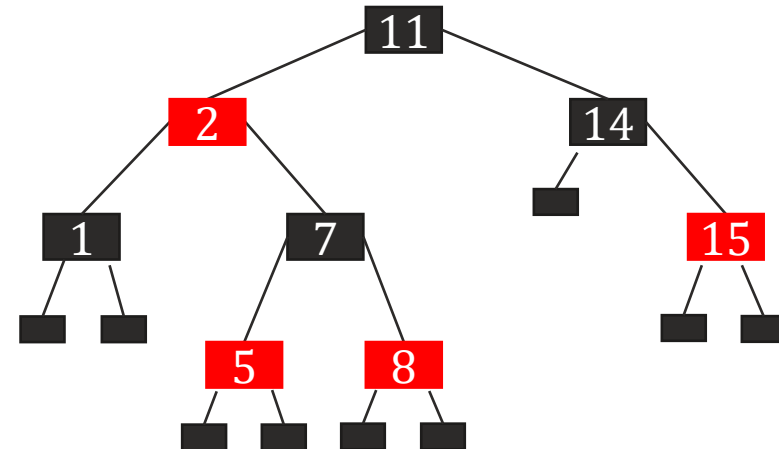
# Piros-Fekete fák

- Lemma

- Bármely  $n$  belső pontot tartalmazó piros-fekete fa magassága  $\leq 2 \log_2(n + 1)$
- A bizonyítás alapja, hogy a magasság  $\leq 2 * \text{fekete-magasság}$ 
  - A részletek a Cormen könyven megtalálhatók

- Keresési idő

- $\mathcal{O}(\log_2 n)$ 
  - Látható ebből a PF fák hatékonysága





# Piros-Fekete fa beszúrás

Következő téma