BINÁRIS RELÁCIÓK (és hasonló mátrixok is itt!)

Definíció: Az R **bináris reláció**, ha $R \subseteq A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$

Bináris relációk lehetséges tulajdonságai:

1. Reflexív ha $(x,x) \in R$
2.(a). Szimmetrikus ha $(x,y) \in R \rightarrow (y,x) \in R$
2.(b). Antiszimmetrikus ha $(x,y) \in R$ és $(y,x) \in R$ csak úgy lehet ha $x = y$
3. Tranzitív ha $(x, y \in R)$ és $(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

Pl:

- Oszthatóság
- Ismeretség
- Háromszög – hasonlóság, egybevágóság

Ekvivalencia reláció:

Reflexív: $(a,a) \in R$
Szimmetrikus: $(a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R$
Tranzitív: $(a,b \in R)$ és $(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$

Rendezési reláció:

Reflexív : $(x,x) \in R$
Antiszimmetrikus: $(x,y) \in R$ és $(y,x) \in R$ csak úgy lehet ha $x = y$
Tranzitív: $(x,y \in R)$ és $(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

Definíció: az A négyzetes mátrix hasonló a B négyzetes mátrixhoz, ha

$$\exists \mathbf{C} \qquad \mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$$

Jelölés: $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$

Tétel : A mátrixok hasonlósága ekvivalencia reláció.

Bizonyítás:

Azt kell bizonyítani, hogy a reláció reflexív, szimmetrikus és tranzitív.

Reflexív: $\mathbf{A} \cong \mathbf{A} \quad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{A} = \mathbf{E}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{E}$, tehát C –nek az n x n –es egységmátrixot választjuk.

****

$$\mathbf{A} \cong \mathbf{B} \qquad \mathbf{B} \cong \mathbf{A}$$

Szimmetrikus: $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ / $\mathbf{C}$ -vel balról és $\mathbf{C}^{-1}$ -gyel jobbról szorozva

$$\left[\mathbf{C}^{-1}\right]^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{B}$$

****

Tranzitív:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \\ \mathbf{B} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}\end{array}\right| \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\left(\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}\right) \cdot \mathbf{C} = \left(\mathbf{F} \cdot \mathbf{C}\right)^{-1} \cdot \mathbf{D}\left(\mathbf{F} \cdot \mathbf{C}\right)$$

Felhasználtuk a következőt:

Állítás: mátrixok szorzatának inverze a fordított sorrendben felírt tényezők inverzénel szorzatával egyenlő.

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} \neq \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{-1}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \left(\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}\right) = \mathbf{A} \cdot \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{-1}\right) \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

Az utolsó egyenlőség abból fakad, hogy az inverz egyértelmű (minden asszociatív műveletnél).

Tétel : Modulo k maradékosztályok

$R \subseteq N \times N$, $\{(a,b) \in R \mid a = n_1 k + m,\ b = n_2 k + m,\ ahol\, n_1, n_2, m \in N\}$

(vagyis, ha *a* azt a maradékot adja *k*-val való osztáskor, mint *b*)

Jelölés: $a \equiv b \bmod(k)$. Ezt így kell olvasni: *a* kongruens *b* modulo *k*

M_0	M_1	M_2		$(0,3) \in M_0$ $\quad (Maradék\, osztályok)$
0	1	2		$(3,0) \in M_0$
3	4	5		$(3,6) \in M_0$
6	7	8		$(0,0) \in M_0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$(1,7) \in M_1$
$3k$	$3k+1$	$3k+2$		$(1,1) \in M1$........

$$M_0 \cup M_1 \cup M_2 = N = \bigcup_{i=0}^{2} M_i$$

$$M_0 \cap M_1 = \emptyset$$
$$M_0 \cap M_2 = \emptyset$$
$$M_1 \cap M_2 = \emptyset$$

Partíció: A H halmaz olyan részhalmaz – rendszere, amelyre $H_i \cap H_j = \emptyset$ és $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = H$

Példa: Az előző példában a maradékosztályok a természetes számok egy partícióját adják

Tétel: Ha $R \subseteq H \times H$ ekvivalencia reláció, akkor a H azon részhalmazai, amelyek az egymással relációban álló elemeket tartalmazzák, azok a H halmaz egy partícióját adják.

Bizonyítás:

Ha $i \neq j$ akkor $H_i \cap H_j = \emptyset$

$H_i \cap H_j = \emptyset$ $a \in H_i \cap H_j$ lenne akkor

$$\left.\begin{array}{l} a \in H_i \to \forall b_k \in H_i \leftrightarrow aRb_i \\ a \in H_j \to \forall c_l \in H_j \leftrightarrow aRc_j \\ szimm.: b_i Ra \end{array}\right\} \xrightarrow{Tranzitív} b_i Rc_j \Rightarrow H_i = H_j$$

, egyetlen halmaz lenne, a H.

$\bigcup_{i=1}^{n} H_i = H \leftrightarrow H$ tetszőleges eleme valamelyik H_i -ben van.

Mivel $aRa \Rightarrow \exists i \quad a \in H_i$

Tétel (az előző megfordítása): Ha a H_i halmazrendszer a H halmaz egy partíciója, akkor ezek a H-n egy ekvivalencia relációt definiálnak.

Bizonyítás:
Konstruktív, megadjuk az ekvivalencia relációt.

Ekvivalencia reláció definíciója: $aRb \leftrightarrow a \in H_i$ és $b \in H_i$
Reflexív mert $aRa \quad ha \quad a \in H \quad és \quad a \in H$
Szimmetrikus mert $aRb \Rightarrow bRa \quad ha \quad a \in H \quad és \quad b \in H$
Tranzitív mert $aRb \quad és \quad bRc \Rightarrow aRc \quad ha \quad a \in H \quad és \quad b \in H \quad és \quad c \in H$

(Részben) rendezett halmazok

Definíció: A H halmaz **részben rendezett**, ha rendezési reláció van megadva a H elemein. Ezt a szokás a $\leq$ relációjellel jelölni, mivel a valós számok körében megszokott „kisebb-egyenlő" reláció is rendezési reláció.

Rendezési reláció:

Reflexív : $(x,x) \in R$ ($x \leq x$)

Antiszimmetrikus: $(x,y) \in R$ és $(y,x) \in R$ csak úgy lehet ha $x = y$,
($x \leq y$ *és* $y \leq x$ *csak úgy lehetséges, ha* $x = y$)

Tranzitív: $(x, y \in R)$ és $(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$
($x \leq y$ *és* $y \leq z$*, akkor* $x \leq z$)

Elnevezés oka: Nem biztos, hogy mindegyik elem mindegyik elemmel összehasonlítható. Vannak olyan elemi a halmaznak, amelyek összehasonlíthatók e rendezés szerint, vagyis a belőlük képzett rendezett párok elemei a relációnak, de vannak, amelyek nem.

Definíció: Teljes a rendezési reláció, ha ≤ reláció adott H-n és x≤y és y≤x közül legalább egyik teljesül. (Bármely két elem összehasonlítható). Ekkor **H teljesen rendezett halmaz**.

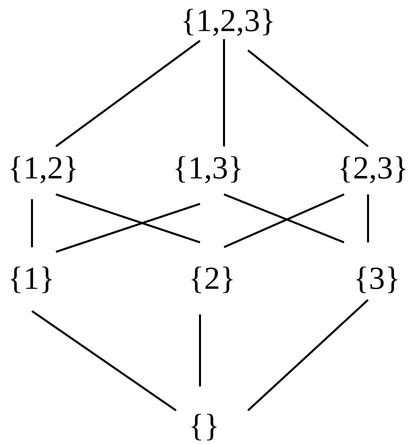
Példák:

1. Tetszőleges H halmaz hatványhalmaza a halmaz-tartalmazás szerint részben rendezés:

H:={1,2,3}, 2^H ={{}{1}{2}{3}{1,2}{1,3}{2,3}{1,2,3}}

Például: {1}≤ {1,2,3}
{1}≤ {1,2}
{1}≤ {1,3}
DE például {1} és {2,3} nem összehasonlítható

Hasse-diagram: x≤y, akkor y-t feljebb rajzolva összekötjük x-szel, de nem kötjük össze a tranzitivitás miatt fennálló párokat (pl. {1} nincsen összekötve az {1,2,3}-mal):



<u>**Példa**: </u>Valós számok és a szokásos ≤ teljes rendezés, minden szám öszehasonlítható.

Legnagyobb és maximális, legkisebb és minimális elem fogalma

Legnagyobb elem LN, ha minden $h \in H$-ra $h \leq LN$ (és LN különbözik h-tól)
(mindegyik elemmel összehasonlítható!)

Maximális elem M, ha nincsen olyan $h \in H$, hogy $M \leq h$ teljesülne.
(Nem biztos, hogy mindegyik elemmel összehasonlítható)

Legkisebb elem lk, ha minden $h \in H$-ra $lk \leq h$ (és lk különbözik h-tól)
(mindegyik elemmel összehasonlítható!)

Minimális elem m, ha nincsen olyan $h \in H$, hogy $h \leq m$ teljesülne.
(Nem biztos, hogy mindegyik elemmel összehasonlítható)

Tétel: Ha van legnagyobb (legkisebb elem), akkor az egyértelmű.

Biz.: Tfh., M1 és M2 legnagyobb elemek. Akkor $M1 \geq M2$ és $M2 \geq M1$ a def. szerint.
A rendezési relácó def. szerint ekkor $M1 = M2$

Legnagyobb és maximális, legkisebb és minimális elem fogalma

Példák:

1. H:= {2,3, 4, 5, 6}, és a≤b, ha a osztója b-nek. Ekkor
   Minimális elemek: 2,3,5
   Maximális elemek: 4, 5, 6 (egyiknek sincsen többszöröse e halmazban)
   E rendezésben nincsen sem legkisebb, sem legnagyobb elem.

2. Hatványhalmaz és tartalmazás: legnagyobb elem H, legkisebb elem ∅.

2. A természetes számok a szokásos rendezésre: 0 a legkisebb és egyben minimális elem, maximális és legnagyobb nincsen.

Feladat: Rajzolja fel az 1, példa Hesse diagrammját!

Korlátos halmazok

A részben rendezett H halmaz valamely H1 részhalmazának a $K \in H$ **felső korlátja** (az adott rendezés és H szerint!) ha minden $h1 \in H1$-re $h1 \leq K$

A részben rendezett H halmaz valamely H1 részhalmazának a $k \in H$ **alsó korlátja** (az adott rendezés és H szerint!) ha minden $h1 \in H1$-re $k \leq h1$.

H1 korlátos, ha van alsó és felső korlátja.

Ha van a korlátok között legkisebb felső korlát, akkor azt **felső határnak (supremum-nak),** ha van a korlátok között legnagyobb alsó korlát, akkor azt **alsó határnak (infimum-nak),** nevezzük.