Differenciálegyenletek

1., $y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = 0$

megoldást $y(x) \sim e^{\lambda x}$ alakban keresünk

behelyettesítés után

$$(\lambda^2 + 4\lambda + 3)\underbrace{e^{\lambda x}}_{>0} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$0 = \underbrace{\lambda^2 + 4\lambda + 3}_{\text{karakterisztikus polinom}} = (\lambda+3)(\lambda+1) \Rightarrow \lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = -1$$

alapmegoldások: $y_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{-3x}$, $\quad y_2(x) = e^{-x}$

általános megoldás: $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x}$

Vajon y_1 és y_2 valóban $\underbrace{\text{lineárisan függetlenek}}$?

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \equiv 0$$
$$\Updownarrow$$
$$c_1 = c_2 = 0$$

Állítás: y_1 és y_2 lineárisan összefüggő

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}$$ nem teljes rangú (rang $\neq$ méret)

$$\Updownarrow$$

van 0 sajátérték

$$\Updownarrow$$

$$\det \equiv 0$$

Megjegyzés: ez egy szükséges feltétel, tagadása:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \not\equiv 0 \Rightarrow y_1 \text{ és } y_2 \text{ lineárisan függetlenek}$$

$$\begin{vmatrix} e^{-3x} & e^{-x} \\ -3e^{-3x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^{-3x}e^{-x} - e^{-x}(-3e^{-3x}) = 2e^{-4x} \neq 0$$

$\Downarrow$

y_1 és y_2 lineárisan függetlenek

2., $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 0$

karakterisztikus polinom: $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2 = 0$

$\Downarrow$

többszörös gyök ún. rezonancia $\rightarrow$ $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$

alapmegoldások: $y_1(x) = e^{-2x}$, $y_2(x) = x\,e^{-2x}$

ekkor

$$\begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & e^{-2x} - 2xe^{-2x} \end{vmatrix} = e^{-2x}\left(e^{-2x} - 2xe^{-2x}\right) - xe^{-2x}\left(-2e^{-2x}\right)$$
$$= e^{-4x} - 2xe^{-4x} + 2xe^{-4x}$$
$$= e^{-4x}$$

$\Rightarrow$ tehát e^{-2x} és xe^{-2x} lineárisan függetlenek

és $(xe^{-2x})'' + 4(xe^{-2x})' + 4(xe^{-2x})$

$$= \left(e^{-2x} - 2xe^{-2x}\right)' + 4\left(e^{-2x} - 2xe^{-2x}\right) + 4xe^{-2x}$$
$$= \left(-2e^{-2x} - 2e^{-2x} + 4xe^{-2x}\right) + 4e^{-2x} - 8xe^{-2x} + 4xe^{-2x}$$
$$= (-2-2+4)e^{-2x} + (4-8+4)xe^{-2x} = 0$$

általános megoldás: $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$.

3., $y'''(x) + 3y''(x) + 3y'(x) + y(x) = 0$

karakterisztikus polinom: $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda+1)^3 = 0$

$\Downarrow$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$

alapmegoldások: $y_1(x)=e^{-x}$, $y_2(x)=xe^{-x}$, $y_3(x)=x^2e^{-x}$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$$ ez sem azonosan nulla

$\Rightarrow$ függetlenek

4., $y'''(x)+y''(x)-12y'(x)=0$

karakterisztikus polinom: $\lambda^3+\lambda^2-12\lambda=\lambda(\lambda^2+\lambda-12)$

$$=\lambda(\lambda+4)(\lambda-3)=0$$

$$\lambda_1=0 \quad \lambda_2=-4 \quad \lambda_3=3$$

alapmegoldások: $y_1(x)=e^{0\cdot x}=1$, $y_2(x)=e^{-4x}$, $y_3(x)=e^{3x}$

általános megoldás: $y(x)=c_1+c_2e^{-4x}+c_3e^{3x}$

5., $y'(x)+2y(x)=e^{3x}$

I., homogén megoldás

$y_h'+2y_h(x)=0 \Rightarrow y_h(x)=ce^{-2x}$, hiszen kar. pol.

$\lambda+2=0$

II., inhomogén / partikuláris megoldás próbafüggvénnyel

$y_p'(x)+2y_p(x)=e^{3x}$

$y_p(x)=Ae^{3x}$ $\leftarrow$ tudom, hogy ekkor a bal oldal e^{3x} többszöröse

$y_p'(x)=3Ae^{3x}$

behelyettesítés után

$3Ae^{3x}+2Ae^{3x}=5Ae^{3x}=e^{3x} \Rightarrow A=\frac{1}{5}$, azaz $y_p(x)=\frac{1}{5}e^{3x}$

III., teljes megoldás: $y(x)=y_h(x)+y_p(x)=ce^{-2x}+\frac{1}{5}e^{3x}$

6., $y'(x)+2y(x)=e^{-2x}$

I., homogén megoldás

$y_h(x)=ce^{-2x}$

II., inhomogén megoldás

$y_p'(x)+2y_p(x)=e^{-2x}$

$y_p(x)=Ae^{-2x}$ nem jó, mert homogén megoldás (ez is rezonancia)

$y_p'(x)+2y_p(x)=-2e^{-2x}+2e^{-2x}=0\neq e^{-2x}$:(

$y_p(x)=Axe^{-2x}$ ez jó lehet, mert e^{-2x} és xe^{-2x} lineárisan függetlenek

$y_p'(x)=Ae^{-2x}-2Axe^{-2x}$

behelyettesítés után

$y_p'(x)+2y_p(x)=Ae^{-2x}-2Axe^{-2x}+2Axe^{-2x}=Ae^{-2x}=e^{-2x}$

azaz $A=1$ és $y_p(x)=xe^{-2x}$

III., teljes megoldás

$y(x)=y_h(x)+y_p(x)=ce^{-2x}+xe^{-2x}$

7., $y''(x)-2y'(x)+y(x)=6xe^{x}$

I., homogén megoldás

karakterisztikus polinom: $\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2=0$

$\Downarrow$

$\lambda_1=\lambda_2=1$, rezonancia

alapmegoldások: $y_1(x)=e^{x}$, $y_2(x)=xe^{x}$

homogén megoldás: $y(x)=c_1e^{x}+c_2xe^{x}$

II., inhomogén megoldás

$y_p''(x)-2y_p'(x)+y_p(x)=6xe^{x}$

$y_p(x)=Ax^2e^{x}$, hiszen e^{x} és xe^{x} alapmegoldás

$y_p'(x) = 2Axe^x + Ax^2e^x$

$y_p''(x) = 2Ae^x + 2Axe^x + 2Axe^x + Ax^2e^x$
$= 2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2e^x$

behelyettesítés után

$2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2e^x - 2(2Axe^x + Ax^2e^x) + Ax^2e^x$
$= (1-2+1)Ax^2e^x + (4 - 2\cdot 2)Axe^x + 2Ae^x = 6xe^x$
$= 2Ae^x = 6xe^x$ hiányzik x, nincs megoldás ☹

legyen inkább

$y_p(x) = Ax^3e^x$, lineár jobb oldalt is van rezonancia

$y_p'(x) = 3Ax^2e^x + Ax^3e^x$

$y_p''(x) = 6Axe^x + 3Ax^2e^x + 3Ax^2e^x + Ax^3e^x$
$= 6Axe^x + 6Ax^2e^x + Ax^3e^x$

behelyettesítés után

$6Axe^x + 6Ax^2e^x + Ax^3e^x - 2(3Ax^2e^x + Ax^3e^x) + Ax^3e^x$
$= (1-2+1)Ax^3e^x + (6 - 2\cdot 3)Ax^2e^x + 6Axe^x$
$= 6Axe^x = 6xe^x$

azaz $A = 1$ és $y_p(x) = x^3e^x$

III., teljes megoldás

$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1e^x + c_2xe^x + x^3e^x$

9., $y'''(x) + y''(x) - 12y'(x) = 0$ nincs $y(x)$, ezért szabad integrálni

$y''(x) + y'(x) - 12y(x) = C$

I., homogén megoldás (4., feladatból)

$y_h(x) = c_1e^{3x} + c_2e^{-4x}$

II., inhomogén megoldás

$y_p(x) = A$, $y_p'(x) = y_p''(x) = 0$

behelyettesítés után

$-12A = C \rightarrow$ nyilván ezt nem ismerjük

III., teljes megoldás

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-4x} - \frac{C}{12} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-4x} + C_3$$