1. Az alábbi függvények melyike lehet eloszlásfüggvény?

(a) $F(x) = \begin{cases} 1 + \mathrm{e}^{1-x} & \text{, ha } x > -1, \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$

(b) $F(x) = \begin{cases} 2 - \dfrac{2}{x+1} & \text{, ha } x \geq 0, \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$

(c) $F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{, ha } x \geq 0, \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$

(d) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } x \leq 0, \\ \dfrac{x}{4} \cdot (4 - x) & \text{, ha } 0 < x \leq 2, \\ 1 & \text{, ha } x > 2 \end{cases}$

2. Az alábbi függvények melyike lehet sűrűségfüggvény?

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x} & \text{, ha } x > 1, \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{2} & \text{, ha } 0 < x < 2, \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 3^{x-1}\ln(3) & \text{, ha } x \leq 0, \\ \dfrac{1}{3}\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) & \text{, ha } 0 < x < \pi, \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{-2x} & \text{, ha } x > 0, \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$

3. Számítsuk ki az

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{, ha } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$$

sűrűségfüggvényt követő X valószínűségi változó várható értékét és szórását.

4. Mennyi az előző feladatban a $\mathbb{P}\{m - \sigma < X < m + \sigma\}$ illetve a $\mathbb{P}\{m - 2\sigma < X < m + 2\sigma\}$ valószínűségek értéke, ha m jelöli a várható értéket és σ jelöli a szórást?

5. Tekintsük az

$$f(x) = \begin{cases} c(2x - x^3) & \text{, ha } 0 < x < \dfrac{5}{2}, \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$$

függvényt. Lehet-e f sűrűségfüggvény? Ha igen, milyen c érték esetén?

Ismételjük meg a vizsgálatot az

$$f(x) = \begin{cases} c(2x - x^2) & \text{, ha } 0 < x < \frac{5}{2}, \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$$

függvényre.

6. Egy benzinkút hetente egyszer kap benzint. Hogy ha a heti eladás (ezer literben mérve) egy valószínűségi változó
$$f(x) = \begin{cases} 5(1 - x)^4 & \text{, ha } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$$
sűrűségfüggvénnyel, akkor mekkora méretű tartály szükséges ahhoz, hogy egy adott héten a benzinkút 0.01 valószínűséggel fogyjon ki a benzinből?

7. Számoljuk ki $\mathbb{E}(X)$ értékét, ha X sűrűségfüggvénye

   (a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} x e^{-x/2} & \text{, ha } x > 0, \\ 0 & \text{, egyébként;} \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} c(1 - x^2) & \text{, ha } -1 < x < 1, \\ 0 & \text{, egyébként;} \end{cases}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{x^2} & \text{, ha } x > 5, \\ 0 & \text{, egyébként?} \end{cases}$

8. Egy alkatrész napokban kifejezett élettartamának sűrűségfüggvénye $f(x) = 2/x^3$, ha $x > 1$. Mi annak a valószínűsége, hogy ha január 26-án hoztuk haza a boltból, akkor február 1-én még működik? Érdemesebb-e azt az alkatrészt megvenni, melynek élettartama az $f(x) = 1/x^2$, ha $x > 1$ sűrűségfüggvényt követi? Átlagosan mennyit bír a kétféle alkatrész?

9. Mi a valószínűsége, hogy éjszaka álmomból felriadva a nagymutató az óralap képzeletbeli függőleges középvonalához képest jobbra van? És annak a valószínűsége, hogy a körív 5-ös és 6-os számjegy közötti $\frac{1}{12}$ részén van?

10. Mi a valószínűsége, hogy három független (0, 1)-en választott pont közül pontosan 1-1 essen a $(0, \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $(\frac{2}{3}, 1)$ intervallumba?

11. Egy hosszú, magas kerítés egymástól L távolságra leszúrt, D átmérőjű függőleges rudakból áll. Egy d átmérőjű labdát elég messziről, csukott szemmel a kerítés felé dobunk. A labda vagy nekiütődik valamelyik rúdnak, vagy érintés nélkül átrepül közöttük. Mi a valószínűsége annak, hogy a labda a rudak érintése nélkül átrepül a rudak között?

12. A felé a vonatok 15 percenként indulnak 7:00-tól kezdve, míg B felé 15 percenként indulnak 7:05-től kezdve.

(a) Ha egy utas 7:00 és 8:00 közötti egyenletes eloszlású időben érkezik az állomásra, majd felszáll arra a vonatra amelyik hamarabb indul, az esetek hányadrészében megy A felé, és hányadrészében B felé?

(b) És ha az utas 7:10 és 8:10 közötti egyenletes eloszlású időben érkezik az állomásra?

13. Tudjuk, hogy a busz 10:00 és 10:30 közötti egyenletes időben érkezik a megállóba, ezért 10:00-ra a megállóba megyünk.

    (a) Mi a valószínűsége, hogy legalább 10 percet kell a buszra várnunk?

    (b) Ha 10:15-kor még mindig várjuk a buszt, mi a valószínűsége, hogy még legalább 10 percet fogunk a buszra várni?

14. Egy busz A és B városok között jár, mely városok egymástól 100 kilométerre vannak egymástól. Ha a busz lerobban, akkor azt egyenletes eloszlású helyen teszi a két város közötti úton. Pillanatnyilag egy buszszerviz található az A városban, egy a B városban, és egy a két város között félúton. Egy javaslat szerint ehelyett gazdaságosabb lenne a három szervizt az A várostól 25, 50, és 75 kilométerre elhelyezni. Egyetértünk-e a javaslattal? Miért? Mi lenne a szervizek legjobb elhelyezése?

15. Egy l hosszúságú ropit találomra választott pontban ketté törünk. Mi az így keletkezett darabok közül a rövidebbiknek az eloszlásfüggvénye?

16. Egy utcai telefonfülke foglalt, amikor odaérek. A beszélgetés hossza véletlen, percekben mérve 1/3 paraméterű exponenciális eloszlású. Mi a valószínűsége, hogy 5 perc múlva sem kerülök sorra? Mi a helyzet akkor, ha tudjuk, hogy odaérkezésünkkor már 2 perce tart a beszélgetés?

17. Egy rádió élettartama években mérve exponenciális eloszlású, $\lambda = 1/8$ paraméterrel. Ha Józsi vesz egy ilyen típusú használt rádiót, mi a valószínűsége, hogy a következő nyolc évben végig működni fog?

18. Adott típusú elektomos berendezések 2%-a 1000 üzemórán belül elromlik. Tegyük fel, hogy a meghibásodásig eltelt idő exponenciális eloszlást követ. Mekkora a valószínűsége, hogy egy ilyen berendezés az átlagosnál tovább működik?

19. Egy ketyere javítási ideje (órákban mérve) exponenciális eloszlású valószínűségi változó, $\lambda = 1/2$ paraméterrel.

    (a) Mi a valószínűsége, hogy a javítás 2 óránál tovább tart?

    (b) Mi a feltételes valószínűsége, hogy a javítás összesen 10 óránál tovább tart, feltéve, hogy már 9 órája zajlik?

20. Egy örökifjú tulajdonságú villanykörténél 2/3 annak a valószínűsége, hogy 2000 óránál többet üzemel. Egy városban 200 ilyen égőt helyezünk el. Mi a valószínűsége annak, hogy 1000 óra elteltével éppen 150 égő világít?

21. Számítsuk ki a következő valószínűségeket, ha X standard normális valószínűségi változó:

    (a) $\mathbb{P}\{-1 < X < 1\}$

(b) $\mathbb{P}\{-2 < X < 2\}$

(c) $\mathbb{P}\{-3 < X < 3\}$

22. Legyen X egy normális eloszlású valószínűségi változó $\mu = 10$, $\sigma^2 = 36$ paraméterekkel. Határozzuk meg a következő valószínűségeket:

    (a) $\mathbb{P}\{X > 5\}$;

    (b) $\mathbb{P}\{4 < X < 16\}$;

    (c) $\mathbb{P}\{X < 8\}$;

    (d) $\mathbb{P}\{X < 20\}$;

    (e) $\mathbb{P}\{X > 16\}$.

23. Tegyük fel, hogy X normális eloszlású, 5 várható értékkel. Ha $\mathbb{P}\{X > 9\} = 0.2$, közelítőleg mennyi X szórásnégyzete?

24. Tegyük fel, hogy a 25 éves fiatalemberek magassága centiméterben mérve normális eloszlású, $\mu = 180$ és $\sigma^2 = 169$ paraméterekkel. A 25 éves fiatalemberek hány százaléka magasabb 2 méternél? A két méteres klub tagjai közül hány százalék magasabb 2 méter 10 cm-nél?

25. Egy X valószínűségi változó várható értéke 0, szórása 1. Melyik esetben valószínűbb, hogy $X > 1/2$; akkor, ha X eloszlása normális, vagy akkor, ha egyenletes?

26. Legyen f a μ várható értékű és σ^2 szórásnégyzetű normális eloszlás sűrűségfüggvénye. Mutassuk meg, hogy $\mu \pm \sigma$ a függvény két inflekciós pontja.