

LinAlgDM II. 28-30. gyakorlat: Gráfok III: Folyamok, síkgráfok, színezések

2023. május 17-18.

1 Elméleti összefoglaló

Definition 1. Hálózati folyamok

$G = (V, E)$, ahol V a csomópontok (csúcsok) halmaza és E az élek halmaza,
 $s \in V$ a forrás (source) csomópont,
 $t \in V$ a nyelő (sink) csomópont,
 $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ az élek kapacitása,
 $f : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ az élekben áramló folyam mennyisége.

A hálózati folyam matematikai kritériumai a következők:

1. Kapacitáskorlát: Az élekben áramló folyam mennyisége nem haladhatja meg az élek kapacitását:

$$0 \leq f(e) \leq c(e) \quad \forall e \in E$$

2. Forráskorlát: A forrásból kiinduló összes folyam mennyiségének egyenlőnek kell lennie a nyelőbe érkező összes folyam mennyiségével:

$$\sum_{e \in \delta^+(s)} f(e) = \sum_{e \in \delta^-(t)} f(e)$$

Ahol $\delta^+(s)$ az élek halmaza, amelyek kiindulnak a forrásból (s), és $\delta^-(t)$ az élek halmaza, amelyek befutnak a nyelőbe (t).

A hálózati folyam probléma a fenti kritériumok mellett általában a maximális folyam vagy a minimális vágás meghatározására irányul, ami optimalizálási vagy gráfelméleti feladatokban jelentős szerepet játszik.

Definition 2. Homeomorf gráfok

Ekvivalencia relációt határoz meg két gráf között. Két gráf homeomorf, ha másodfokú csúcsok törlésével, vagy hozzáadásával egymásba alakíthatóak.

Definition 3. Kromatikus szám

A kromatikus szám, jelölve $\chi(G)$, a minimális szükséges színek számát jelenti, amelyekkel a gráf csomópontjait be lehet színezni úgy, hogy a szomszédos csomópontok különböző színnel legyenek jelölve.

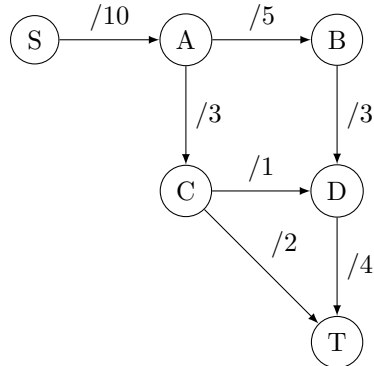
A kromatikus szám felső becslés: a gráfban található maximális fokszám plusz 1, jelölve $\Delta(G) + 1$.

Az alsó becslése a legnagyobb klikkszám: legnagyobb teljes részgráf csúcsszáma. Jele: $\omega(G)$

A pontos kromatikus szám meghatározása nehéz, de felső és alsó becslések léteznek, amelyek korlátozzák az $\chi(G)$ értékét.

2 Feladatok

Feladat 1. Határozd meg az alábbi irányított, súlyozott hálózatok maximális folyamát, minimális vágását.

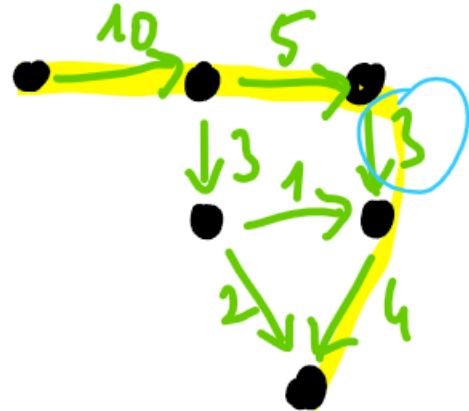
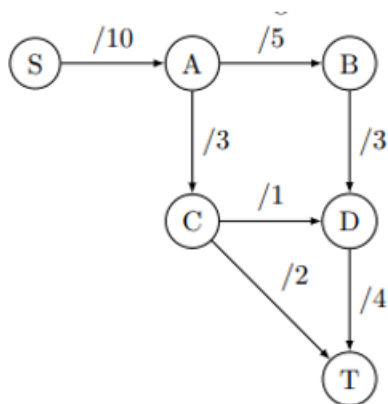


Megoldás. Az első folyamot lehet észre is inicializálni, de akkor figyelni kell, hogy ne legyen szivárgás. Most biztosra megyünk és egyből a segédgráfot használjuk.

Segédgráf lépései: Behúzom az oda éleket (zöld) súlynak megadom, hogy mennyivel lehet még növelni az adott élen (kapacitás-folyam). Ezután behúzom a visszaéleket (visszafelé néz) is (piros) és súlynak megadom, hogy mennyivel lehet csökkenteni az adott élen (folyam).

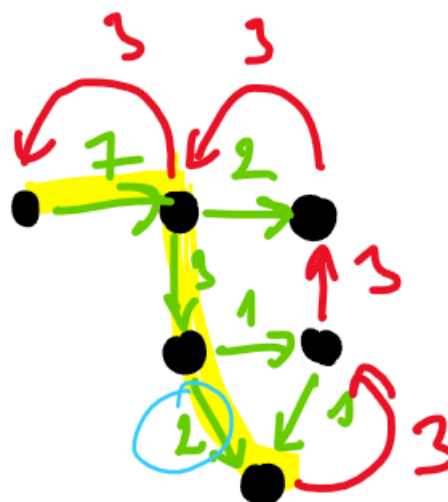
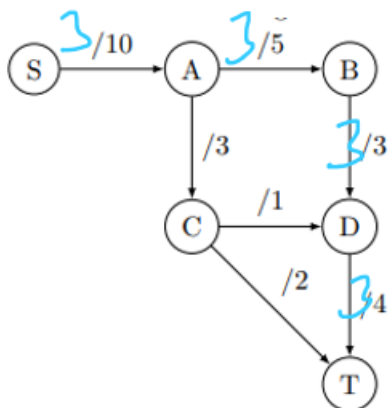
Javítóutat keresek. Javítóút színfüggetlen útvonal a segédgráfon a Sourceból a Targetbe. Tehát csak az élek iránya számít.

Kiválasztom a szűk keresztmetszetet az útvonalon (legkisebb súlyú él, színfüggetlenül). Ez az érték lesz az, amivel majd módosítjuk a folyamot: zöld élen hozzáadok, piros élen kivonok.



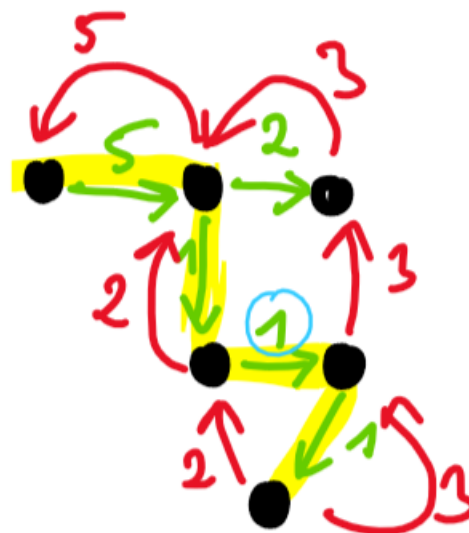
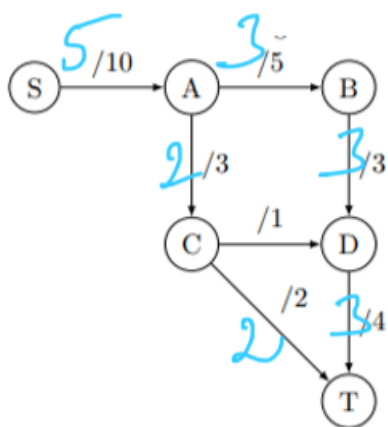
Megismátlem a fenti eljárást, addig amíg létezik javítóút. (Fontos a visszaéleket érdemes mindig berajzolni, hogy ne felejtse el, hiszen a javítóút átmehet piros élen is!).

Most a szűk keresztmetszet a sárgával jelölt útvonalon a 2. Minden él zöld, ezért minden élhez hozzá kell adni 2-t.



Megismátlem a fenti eljárást, addig amíg létezik javítóút. (Fontos a visszaéleket érdemes mindig berajzolni, hogy ne felejtssd el, hiszen a javítóút átmehet piros élen is!).

Most a szűk keresztmetszet a sárgával jelölt útvonalon az 1. Minden él zöld, ezért minden élhez hozzá kell adni 1-t.



Megismátlem a fenti eljárást, addig amíg létezik javítóút. (Fontos a visszaéleket érdemes mindig berajzolni, hogy ne felejtssd el, hiszen a javítóút átmehet piros élen is!).

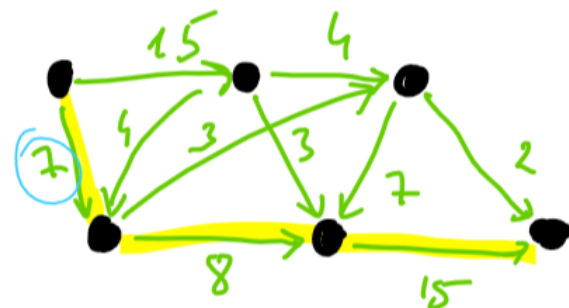
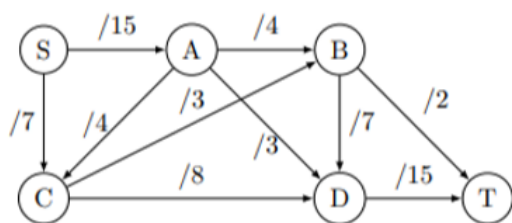
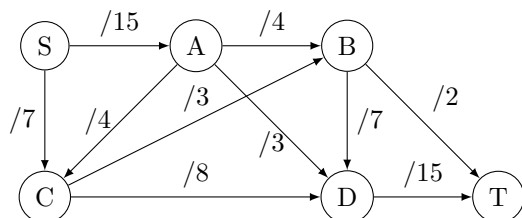
Azt vesszük észre, hogy nincsen több útvonal a Sourceból a Targetbe se zöld, se piros éleken áthaladva sem. Végeztünk.



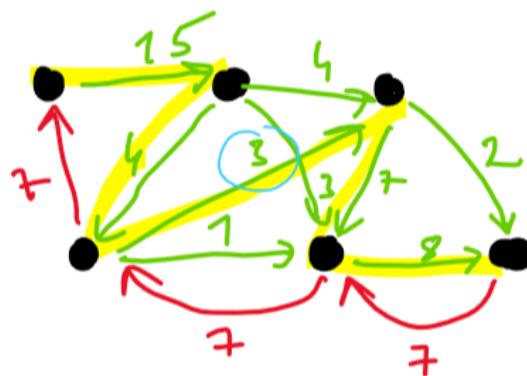
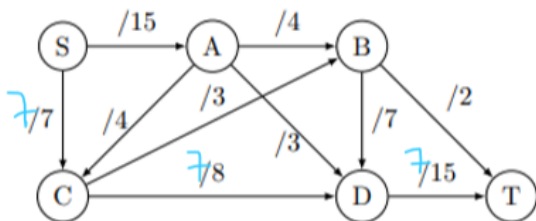
Nézzük meg a minimális vágást: azon csúcsok halmaza az S-t is beleértve, ahova még eljutunk a legutolsó segédgráfon. Értéke a belőle kifolyó élek folyamának összege: 6.

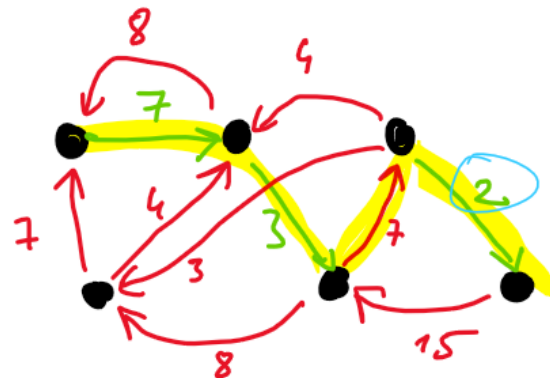
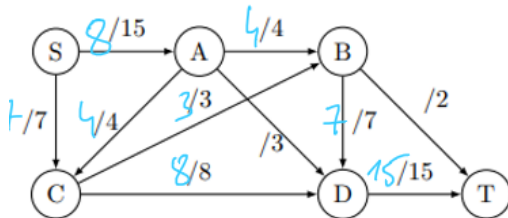
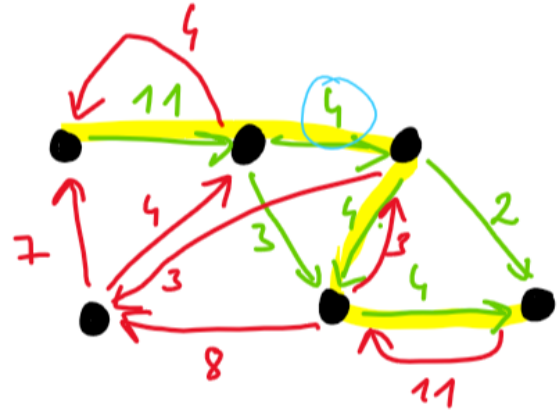
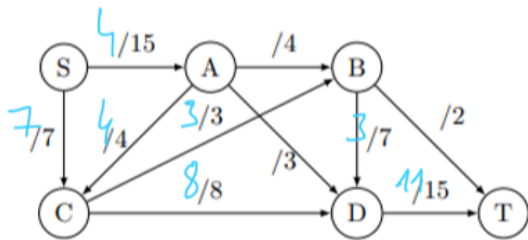
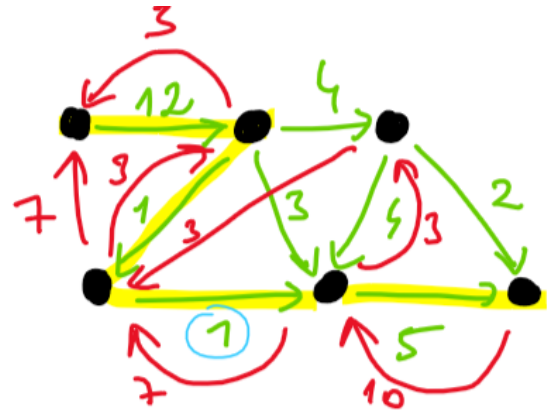
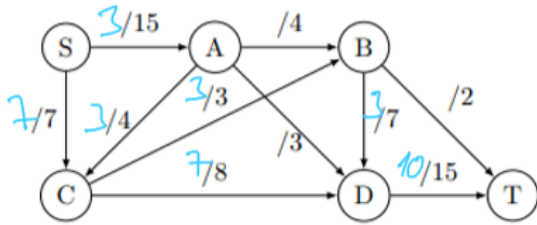
Maximális folyam a Targetbe beérkező élek folyamának összege (az algoritmus végén): 6.

Vedd észre, a két érték megegyezik!

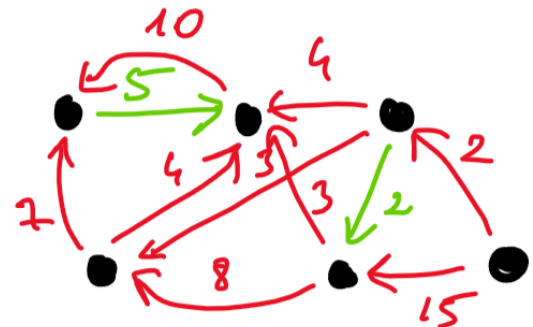
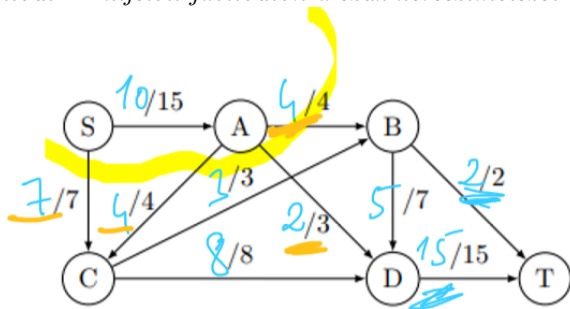


Megoldás.





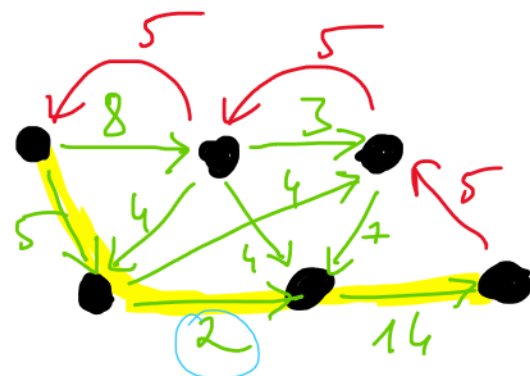
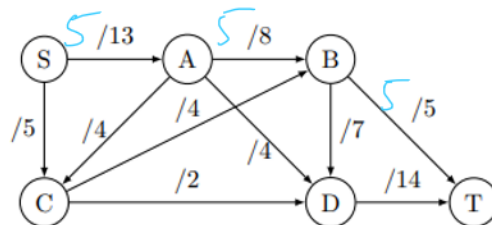
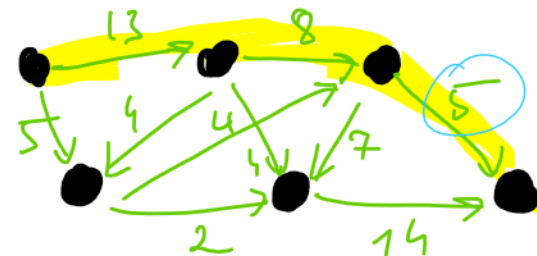
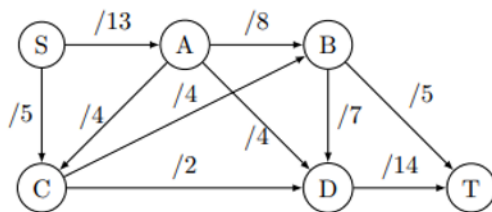
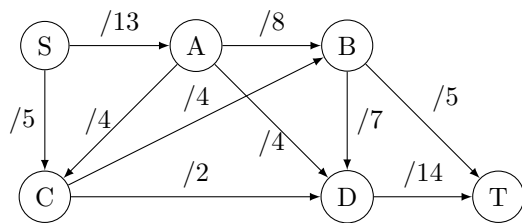
Noha zöld tiszta zöld javítóút már nem létezik, ne felejtse el, hogy a javítóút színfüggetlen - tehát még létezik javítóút. A kijelölt javítóúton a szűk keresztmetszet a 2-es. Zöld éleken hozzáadunk, piros éleken levonunk 2-t.



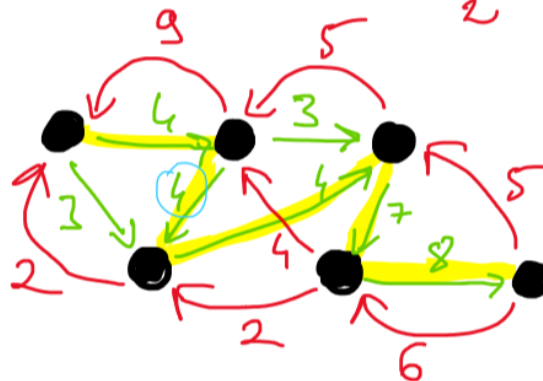
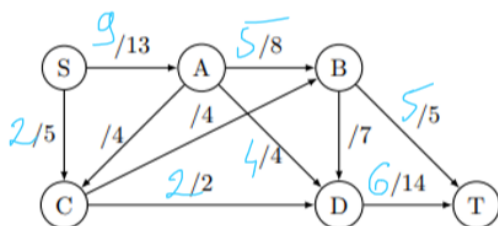
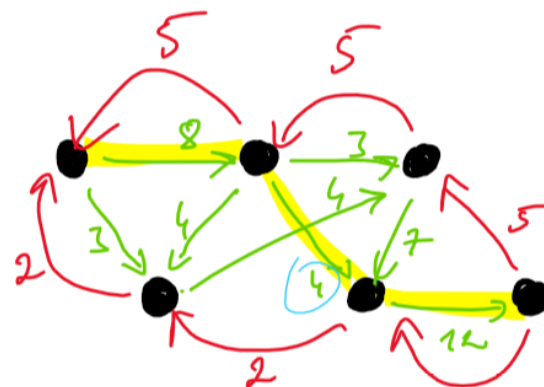
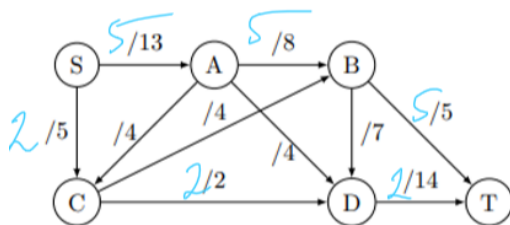
Nincs több javítóút. Tehát végeztünk. A minimális vágás az $\{S, A\}$ értéke 17. A maximális folyam is 17.

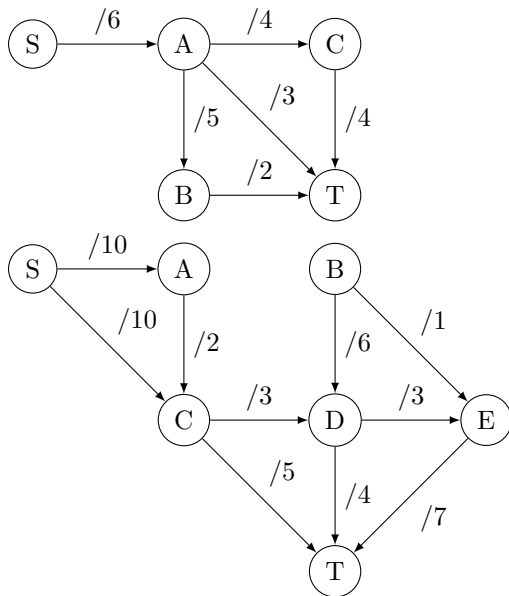
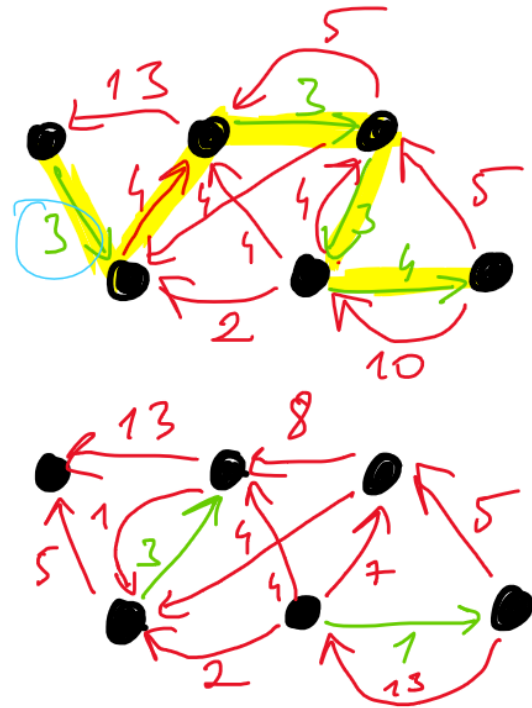
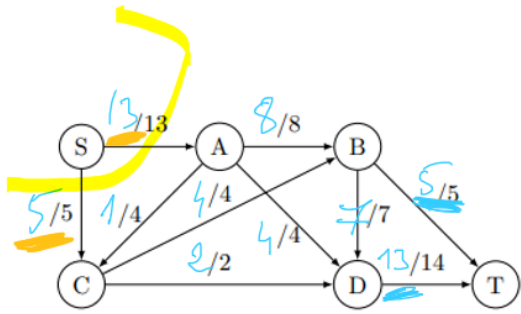
Az első gráf egy 6 csúcsból álló súlyozott, irányított gráf. A Source csúcsból (S) indul ki a folyam, amely a Target csúcsba (T) kell, hogy érjen. Az élek súlyai a nyilak mellett vannak feltüntetve, ahol az első hiányzó szám

a folyam értéke, a második szám pedig az él kapacitása.

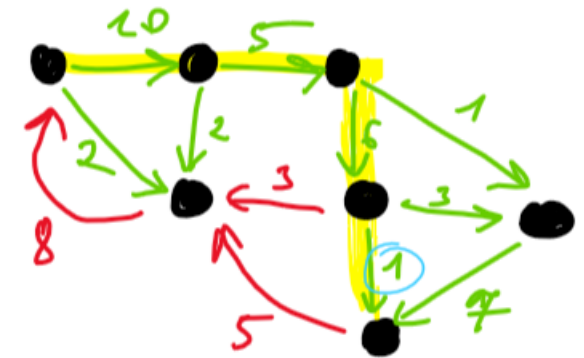
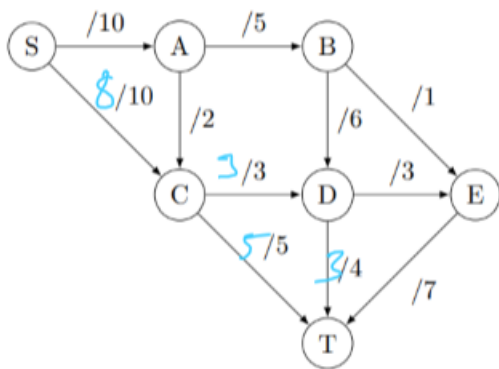
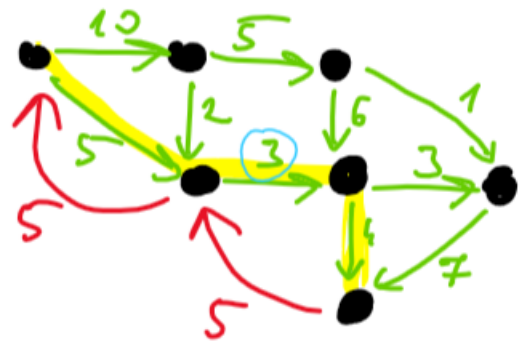
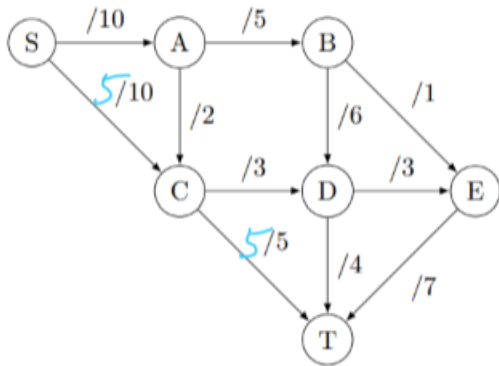
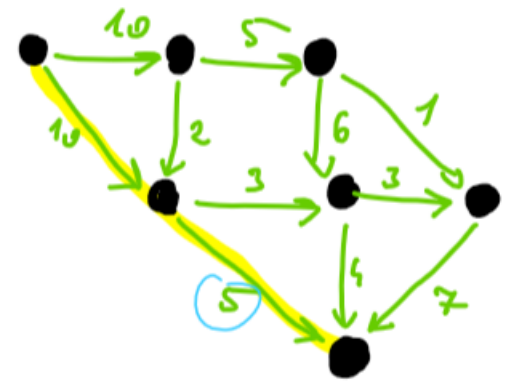
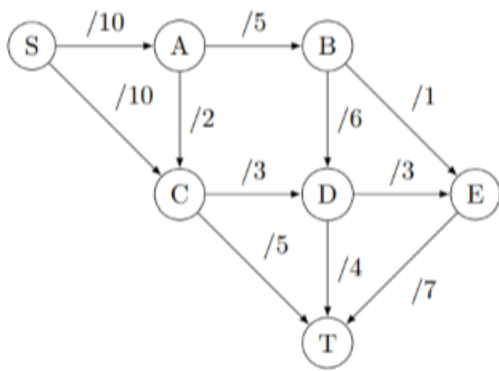


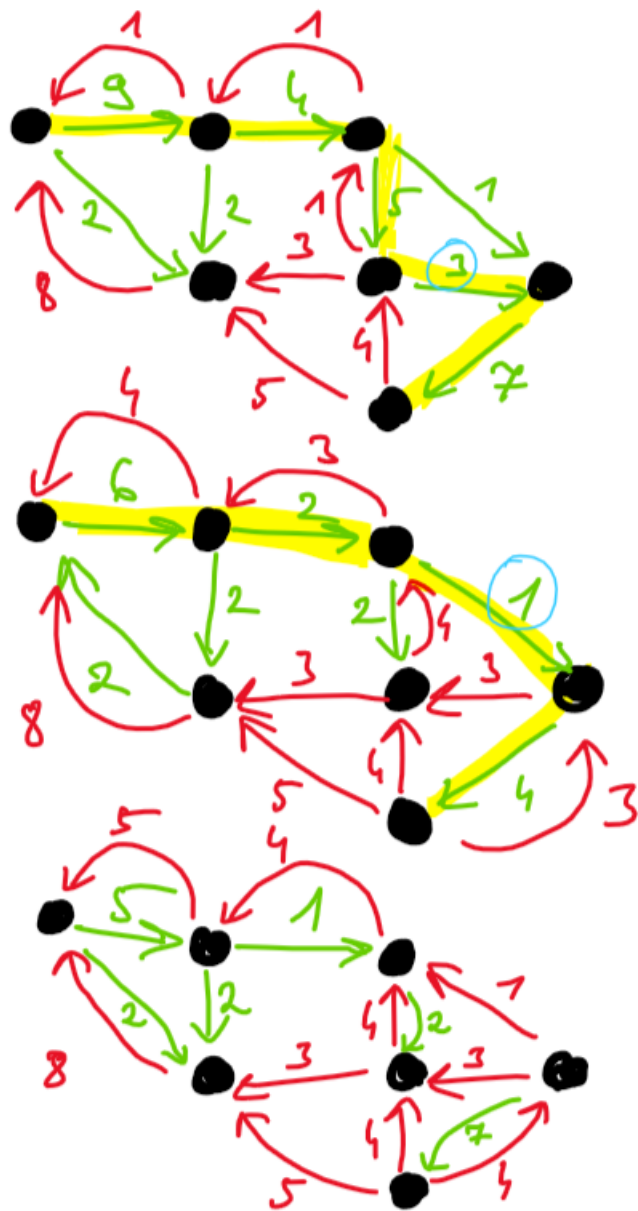
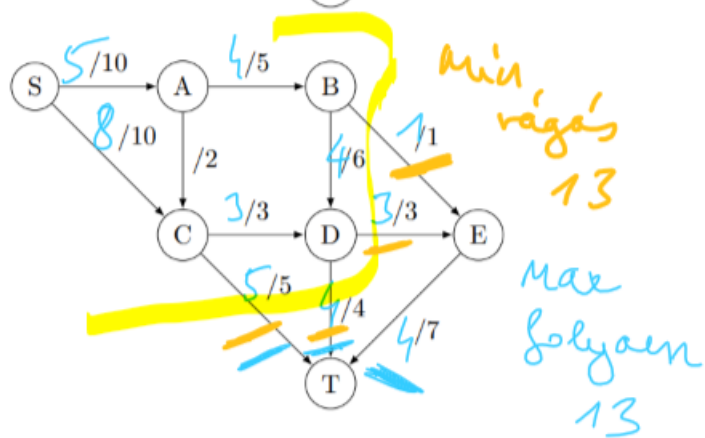
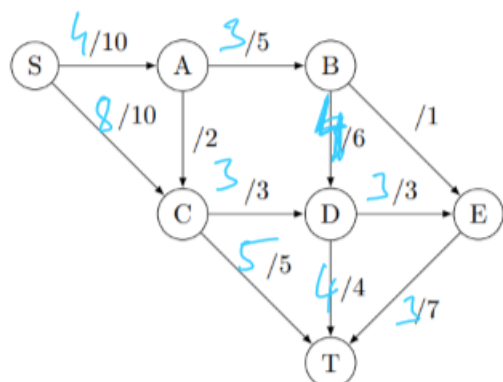
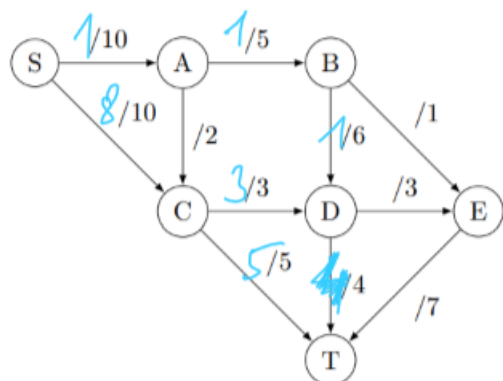
Megoldás.



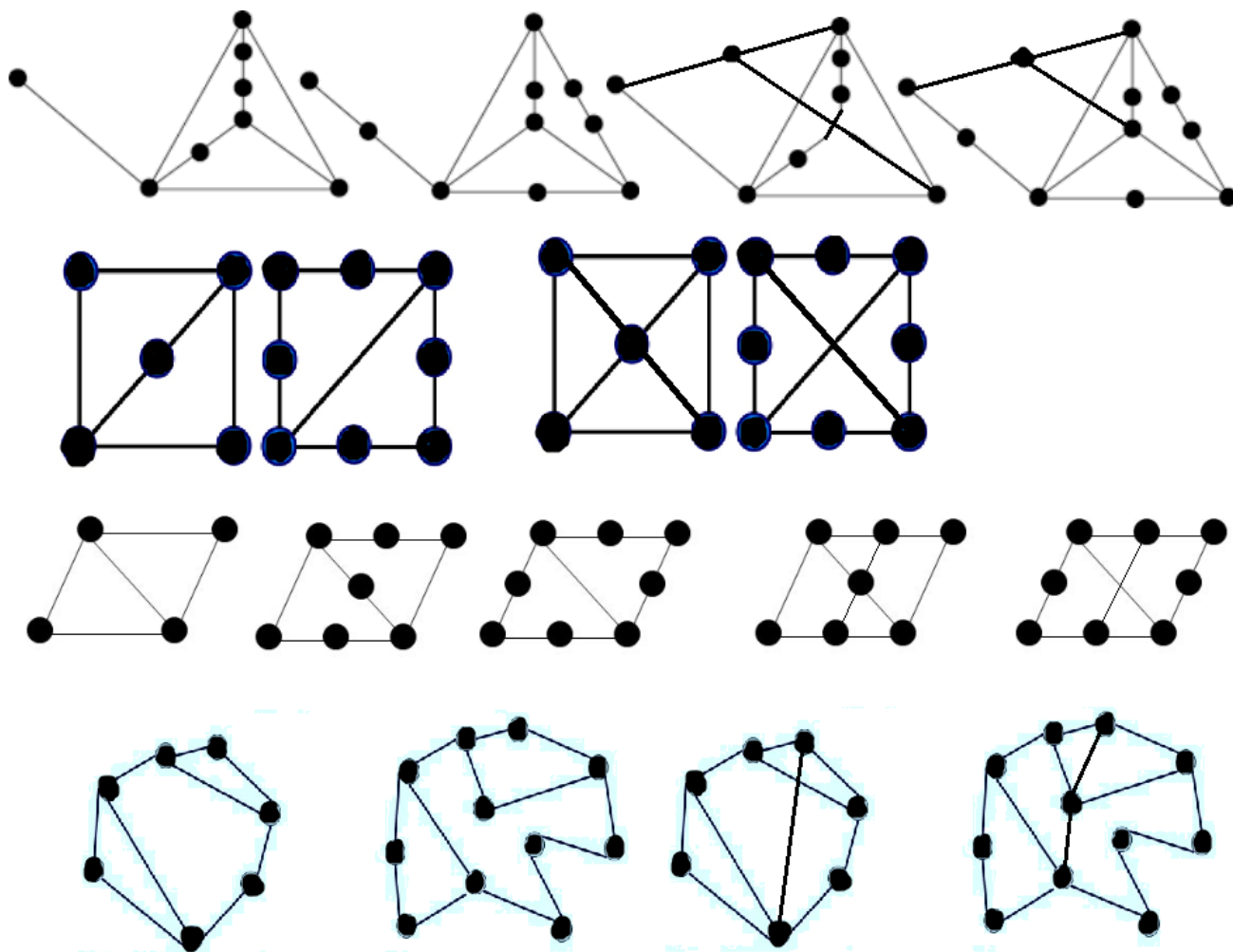


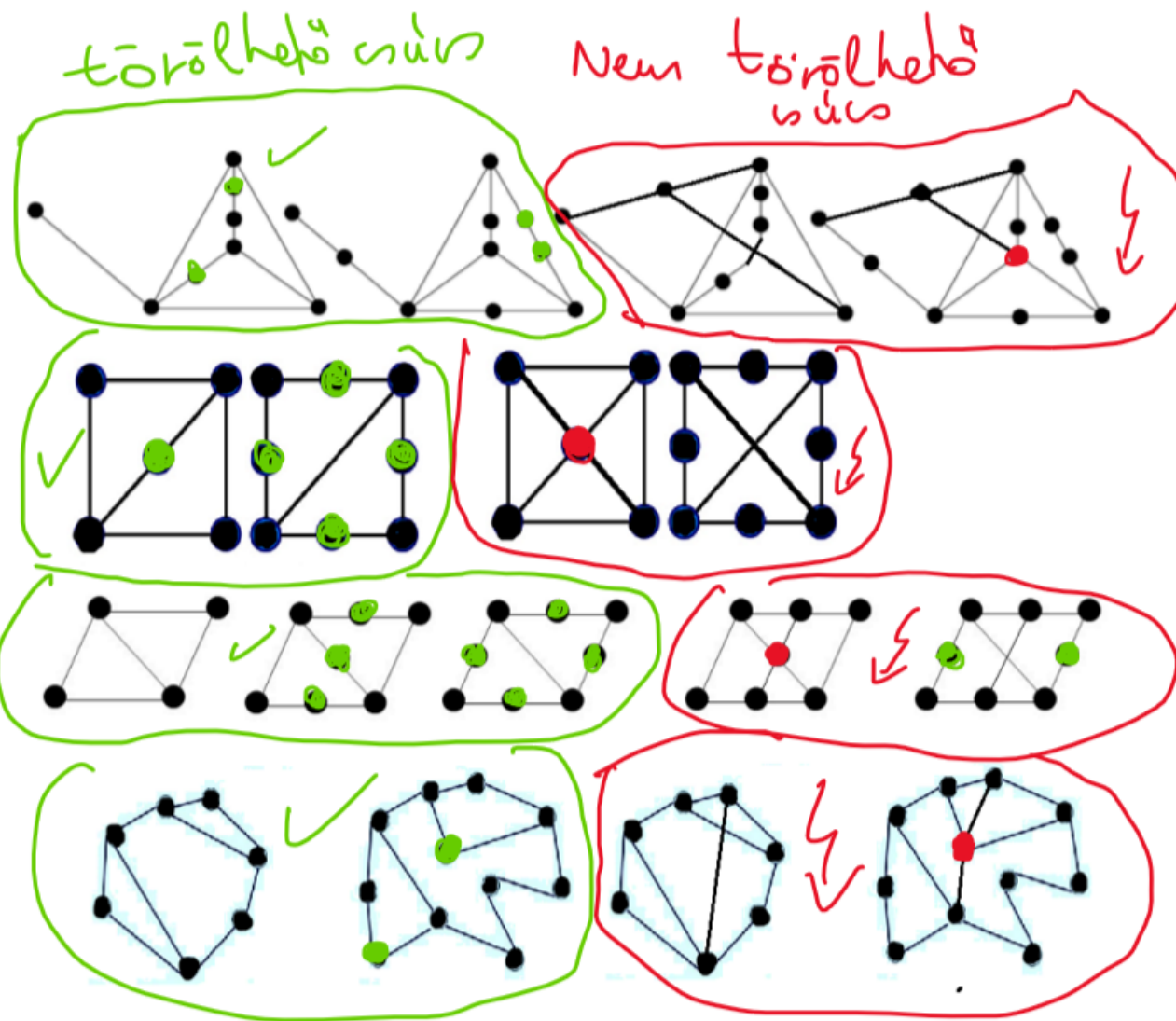
7





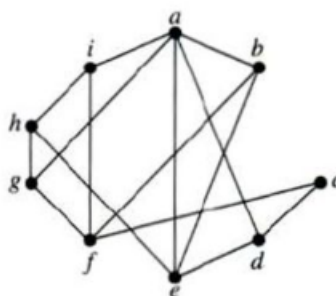
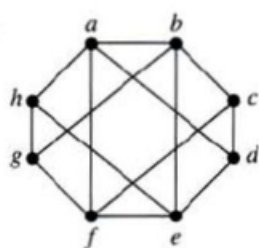
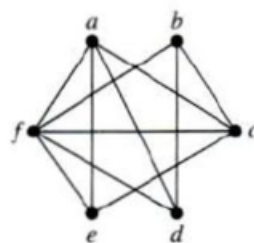
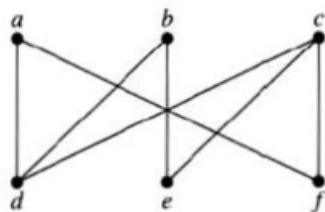
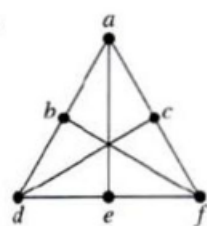
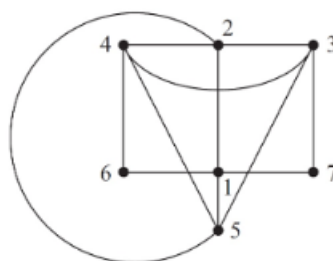
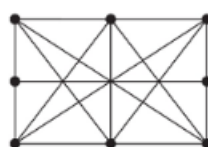
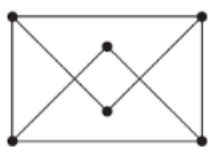
Feladat 2. Homeomorfak-e az alábbi gráfok egymással?

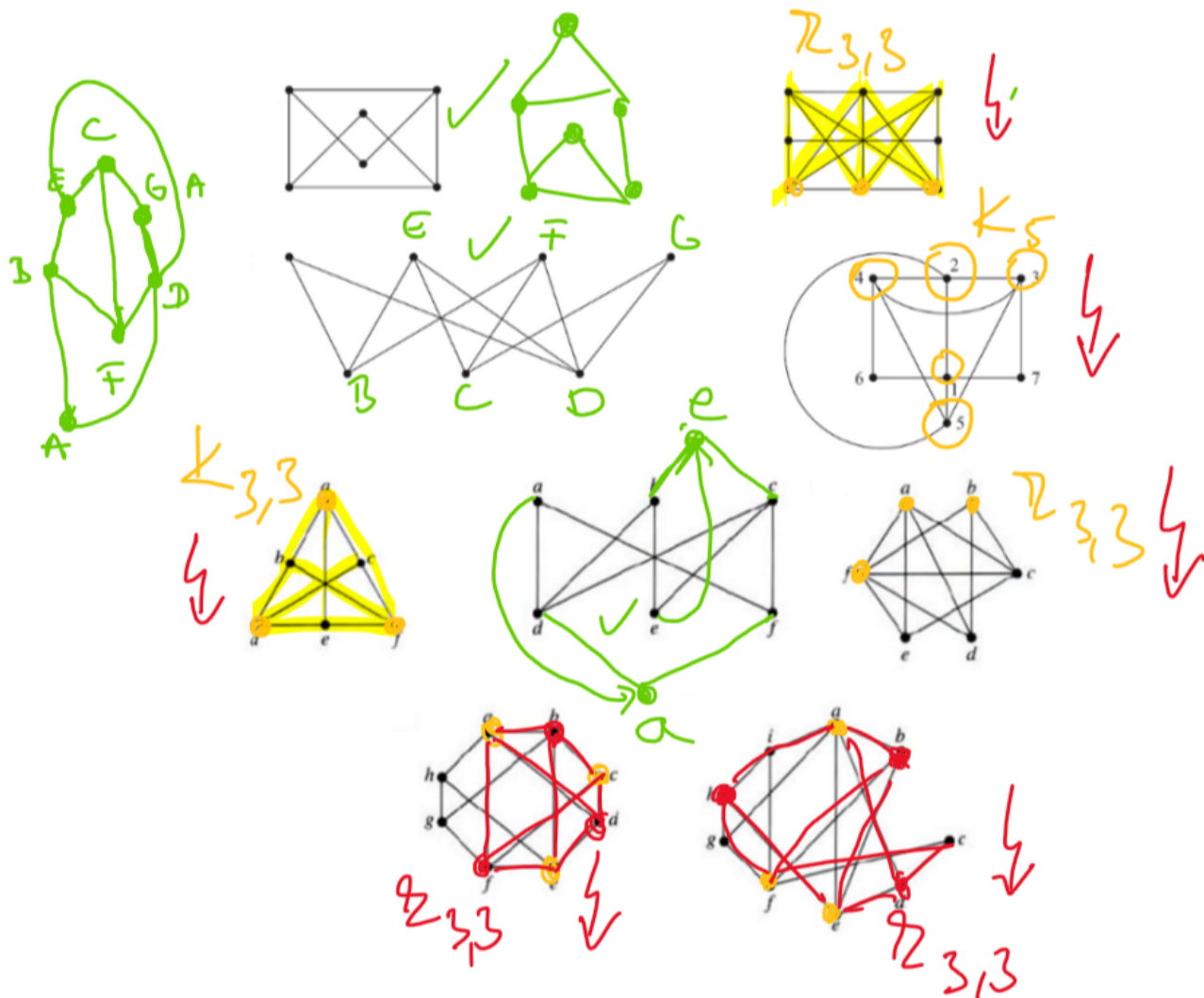




Megoldás.

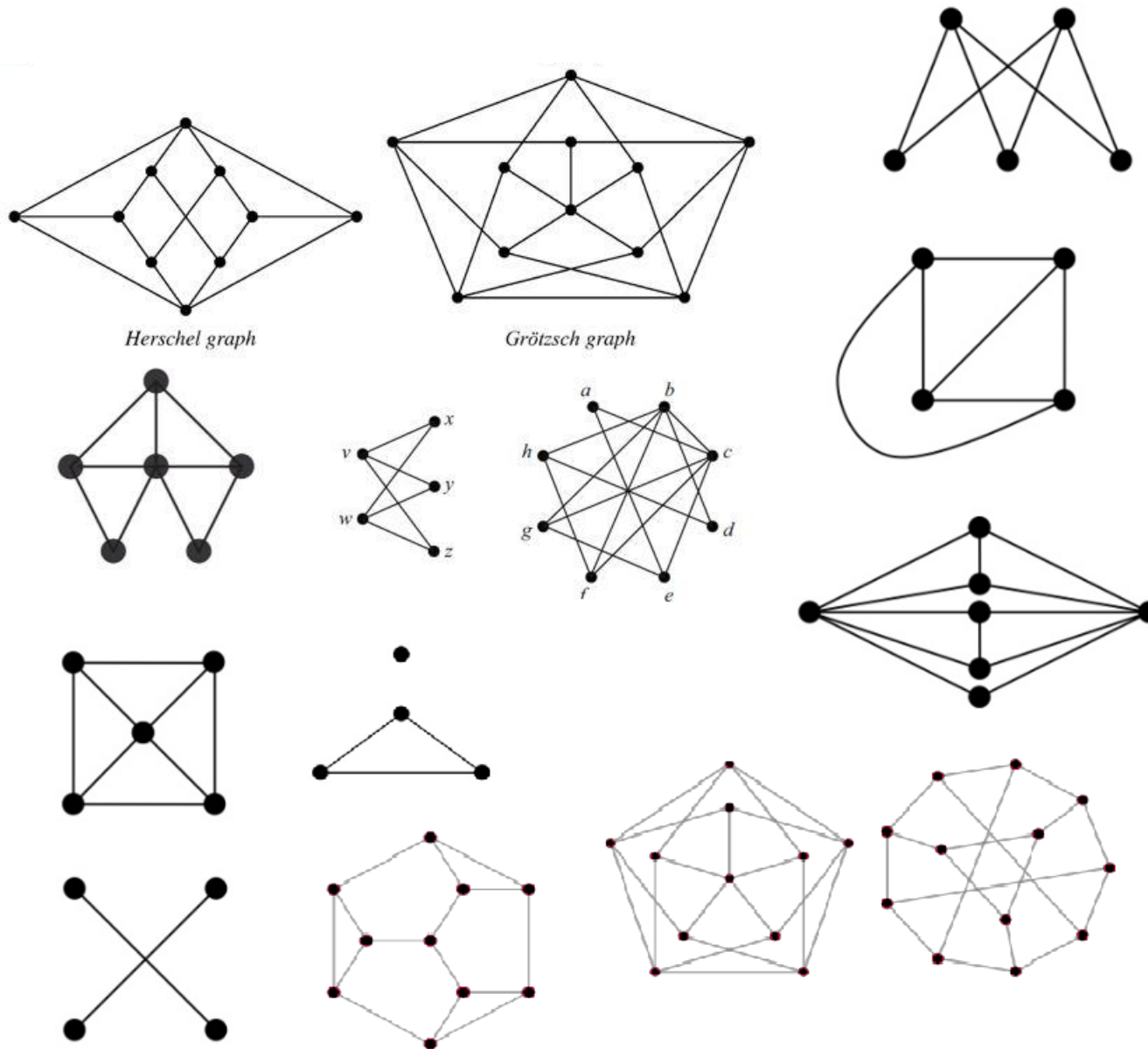
Feladat 3. Döntsd el, hogy síkbarajzolhatóak-e az alábbi gráfok. Ha igen, rajlzd is le, ha nem, keresd meg, hogy tartalmaz-e $K_{3,3}$ -al, vagy K_5 -el homeomorf részgráfot.





Megoldás.

Feladat 4. Becsüld meg az alábbi gráfok kromatikus számát. Ha tudod, színezd is ki a lehető legkevesebbel.



Feladat 5. Az alábbi térképet színezd ki a lehető legkevesebb színnel:

