Analízis I. vizsgatételek

Vághy Mihály

Tartalomjegyzék

1. Tétel

1.1. Természetes számok

A természetes számok halmazán ($\mathbb{N}$) két művelet, az összeadás és a szorzás van értelmezve. Ezen felül egy $\leq$ rendezési relációt is értelmezünk a halmazon. Két fontos tulajdonsága a halmaznak, hogy van legkisebb elem (1) és minden elem után van közvetlenül következő.

1.2. Teljes indukció

Adottak az $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ állítások. A bizonyítási elv:

1. Belátjuk, hogy A_1 teljesül.
2. Belátjuk, hogy ha A_n teljesül valamilyen $n \in \mathbb{N}$ esetén, akkor A_{n+1} is.

Ezzel bebizonyítottuk az A_n állításokat.

1.3. Valós számok bevezetése, axiómák

A valós számok halmazán ($\mathbb{R}$) két művelet, az összeadás és a szorzás van értelmezve. Ezen felül egy $\leq$ rendezési relációt is értelmezünk a halmazon.

1.3.1. Műveletek alaptulajdonságai

1. Az összeadás asszociatív.
2. Az összeadásnak van egysége (0).
3. Minden elemnek van az összeadásra nézve inverze, ez a szám ellentettje.
4. Az összeadás kommutatív.
5. A szorzás asszociatív.
6. A szorzásnak van egysége (1).
7. Minden elemnek, kivéve a nullának van a szorzásra nézve inverze, ez a szám reciproka.
8. A szorzás kommutatív.
9. A szorzás disztributív az összeadásra nézve.

1.3.2. Rendezési reláció tulajdonságai

1. A reláció antiszimmetrikus.
2. A reláció tranzitív.
3. A reláció reflexív.
4. Ha $x \leq y$ akkor $\forall z \in \mathbb{R}$ esetén $x + z \leq y + z$.
5. Ha $x \leq y$ és $0 \leq z$, akkor $xz \leq yz$.

1.3.3. Archimédészi axióma

A valós számok halmazában nincs legnagyobb elem.

1.3.4. Cantor-féle axióma

Adottak az $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots \subset \mathbb{R}$ egymásba skatulyázott, zárt intervallumok, melyekre

$$I_{n+1} \subset I_n.$$

Ekkor $\exists x \in \mathbb{R}$ amire $x \in I_n \forall n$ esetén.

1.4. Cantor-féle közöspont tétel

Adottak az $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots \subset \mathbb{R}$ egymásba skatulyázott, zárt intervallumok, melyekre

$$I_n \subset I_{n+1}.$$

Ha $\lim_{n\to\infty} |I_n| = 0$, akkor $\exists! x \in \mathbb{R}$ amire $x \in I_n \forall n$ esetén.

Bizonyítás
Indirekten bizonyítunk. Tegyük fel ugyanis, hogy két ilyen szám van, azaz legyen $x, y \in I_n\ \forall n$ esetén. Legyen $x - y = \delta$. Mivel $\lim_{n\to\infty} |I_n| = 0$ ezért $|I_n| < \delta$ tud teljesülni. Ez viszont ellentmond azzal, hogy $x, y \in I_n\ \forall n$ esetén.

1.5. Halmaz korlátossága

Adott H halmaz korlátos, ha $\exists K \in \mathbb{R}$, amire

$$K \geq |x| \quad \forall x \in H.$$

1.6. Infimum

Adott H alulról korlátos halmaz. Ekkor a legnagyobb alsó korlát a halmaz infimuma, $\inf(H)$.

1.6.1. Tétel

Adott H alulról korlátos halmaznak létezik infimuma.

Bizonyítás
Legyen a_1 az alsó korlát. Ha $a_1 \in H$ akkor kész vagyunk. Tehát legyen $a_1 \notin H$, és legyen $b_1 \in H$ egy tetszőleges elem, ahol $b_1 > a_1$. Legyen $I_1 = [a_1, b_1]$ és definiáljuk a $c_1 := \frac{a_1+b_1}{2}$ számot.
Ha c_1 alsó korlát, akkor legyen $a_2 := c_1$ és $b_2 := b_1$. Ha c_1 nem alsó korlát, akkor legyen $a_2 := a_1$ és $b_2 := c_1$. Legyen továbbá $I_2 = [a_2, b_2]$.
Ezt a lépést a végtelenségig ismételve egy egymásba skatulyázott, zárt intervallumrendszert kapunk, melyre $\lim_{n\to\infty} |I_n| = 0$, hiszen minden lépésben feleződik az intervallum hossza. Tehát a Cantor-féle közöspont tétel miatt létezik egy darab közös pont. Ez a közös pont kisebb vagy egyenlő, mint a b_k számok, tehát biztosan alsó korlát. Továbbá nagyobb vagy egyenlő az összes a_k számnál, így nincs nála nagyobb alsó korlát. Tehát valóban létezik infimum.

1.7. Szuprémum

Adott H felülről korlátos halmaz. Ekkor a legkisebb felső korlát a halmaz szuprémuma, $\sup(H)$.

1.7.1. Tétel

Adott H felülről korlátos halmaznak létezik szuprémuma.

Bizonyítás
Az infimum analógiájára.

2. Tétel

2.1. Háromszög egyenlőtlenség általános eset

Legyen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, ekkor

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Egyenlőség, ha $\forall i, j \quad a_i = a_j$.

Bizonyítás

Teljes indukcióval könnyen látható. Ugyanis $n = 2$-re triviális, hiszen

$$\pm a_1 \leq |a_1| \qquad \pm a_2 \leq |a_2|$$

így ezeket összegezve

$$\pm(a_1 + a_2) \leq |a_1| + |a_2|$$

amiből $|a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2|$.

Tegyük fel, hogy valamilyen n-re teljesül az állítás! Kéne, hogy $n + 1$-re is teljesüljön.

$$\sum_{k=1}^{n+1} |a_k| = \sum_{k=1}^{n} |a_k| + |a_{n+1}| \geq \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| + |a_{n+1}| \geq \left|\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right|$$

Ezzel beláttuk az állítást.

2.2. Bernoulli egyenlőtlenség

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $h \in \mathbb{R}$, ekkor

$$(1 + h)^n \geq 1 + hn.$$

Egyenlőség, ha $h = 0$, $n = 0$ vagy $n = 1$.

2.3. Számtani és mértani közép, kapcsolatuk

Legyen $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0 \in \mathbb{R}$, ekkor

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}.$$

Egyenlőség, ha $\forall i, j \quad a_i = a_j$.

Bizonyítás

Először egy gyengébb állítást fogunk bebizonyítani.

Legyen $n \geq 2 \in \mathbb{N}$, és legyenek az $x_k \geq 0 \in \mathbb{R}$ olyan számok, amelyek között van legalább kettő különböző és

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} = 1.$$

Ekkor

$$\prod_{k=1}^{n} x_k < 1.$$

Alkalmazzunk teljes indukciót! $n = 2$ esetén az állítás triviális. Tegyük fel, hogy valamilyen n-re teljesül az állítás! Kéne, hogy $n + 1$-re is teljesüljön.

Tekintsük az x_k számokat, ahol $k = 1, 2, \ldots, n + 1$ és legyen $x_k := 1 + t_k$. Legyen továbbá az x_k számok számtani közepe 1. Ez azt jelenti, hogy $\sum_{k=1}^{n+1} t_k = 0$, azaz van köztük pozitív és negatív is, hiszen nem mind egyforma. Az általánosság sérülése nélkül feltehetjük, hogy $t_n < 0 < t_{n+1}$. Legyen ekkor $x_n^* = 1 + t_n + t_{n+1} >$

$1 + t_n + t_{n+1} + t_n t_{n+1} = x_n \cdot x_{n+1}$.
Ekkor azt látjuk, hogy

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n^* = \sum_{k=1}^{n-1}(1 + t_i) + 1 + t_n + t_{n+1} = n + \sum_{k=1}^{n+1} t_k = n$$

azaz az $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^*$ számtani átlaga 1 és nem mind egyforma. Ekkor az indukciós feltevés miatt a szorzatuk valóban kisebb, mint 1.
Könnyen látható, hogyha az összes x_k szám egyenlő, akkor $x_k = 1$, így a szorzatuk is 1. Tehát megfogalmazhatjuk, hogy tetszőleges $x_k \geq 0$ számokra ahol $k = 1, 2, \ldots, n$, és

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} = 1$$

teljesül, akkor

$$\prod_{k=1}^{n} x_k \leq 1.$$

Legyenek adottak az a_k számok, ahol $k = 1, 2, \ldots, n$. Legyen továbbá

$$A = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}$$

és legyenek $x_k = \frac{a_k}{A}$. Ekkor az x_k számok számtani közepe 1, így

$$\prod_{k=1}^{n} x_k = \frac{\prod_{k=1}^{n} a_k}{A^n} \leq 1$$

azaz

$$\prod_{k=1}^{n} a_k \leq A^n = \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}\right)^n$$

amiből kapjuk is a bizonyítandót.

2.4. Belső pont

Adott H halmaz belső pontja $x_0 \in \mathbb{R}$, ha $\exists \varepsilon > 0$ amire

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset H.$$

A belső pontok halmaza $int(H)$.

2.5. Külső pont

Adott H halmaz külső pontja x_0, ha $\exists \varepsilon > 0$ amire

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap H = \emptyset.$$

A külső pontok halmaza $ext(H)$.

2.6. Határpont

Adott H halmaz határpontja x_0, ha $\forall \varepsilon > 0$

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap H \neq \emptyset$$

és

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap H^C \neq \emptyset$$

ahol H^C a H halmaz komplementere. A határpontok halmaza ∂H.

2.7. Számsorozat

Számsorozat egy olyan $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ hozzárendelés, mely $\forall n \in \mathbb{N}$-hez hozzárendel egy $a_n \in \mathbb{R}$ számot. Ekkor a sorozatot (a_n)-el jelöljük.

2.8. Határérték

Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat konvergens, és

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

ha $\forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists n_0$ küszöbindex, melyre $\forall n > n_0$ esetén

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

egyértelmű.

2.9. Divergencia

Ha (a_n) nem konvergens, akkor divergens.

2.9.1. Típusai

1. Azt mondjuk, hogy
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$$
ha $\forall K \in \mathbb{R}$-hez ($\forall k \in \mathbb{R}$-hez) $\exists n_0$ küszöbindex, melyre $\forall n > n_0$ esetén $a_n > K$ ($a_n < k$).
2. Divergens az olyan (a_n) sorozat, melynek több torlódási pontja van (de adott esetben korlátos lehet a sorozat). Ilyen például az $a_n = (-1)^n$ sorozat.

2.10. Konvergencia és korlátosság

Konvergens sorozat korlátos.

Bizonyítás

Rögzítsünk egy ε-t, és a hozzátartozó n_0 küszöbindexet. Legyen továbbá $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Ekkor az (a_n) sorozatnak az $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ intervallumon kívül véges sok eleme van, így ennek a véges sok elemnek létezik minimuma és maximuma, tehát létezik

$$m := \min\{a_n \big| n < n_0\} \qquad M := \max\{a_n \big| n < n_0\}.$$

Ekkor felső korlátnak jó lesz $\max(M, A + \varepsilon)$, alsó korlátnak pedig $\min(m, A - \varepsilon)$.

3. Tétel

3.1. Konvergens sorozatok tulajdonságai

1. Konvergens sorozat korlátos.
2. Ha egy sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens.

3.2. Cauchy sorozat

Azt mondjuk, hogy az (a_n) Cauchy sorozat, vagy teljesíti a Cauchy kritériumot, hogyha $\forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists n_0$ küszöbindex, melyre $\forall n, m > n_0$ esetén

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

teljesül.

3.2.1. Konvergenciája

Az (a_n) sorozat akkor és csak akkor konvergens, hogyha teljesíti a Cauchy kritériumot.

Bizonyítás

Legyen (a_n) konvergens. Azt fogjuk belátni, hogy ekkor Cauchy sorozat.
Tudjuk, hogy valamilyen küszbindex után

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ekkor

$$|a_n - a_m| = |a_n - A + A - a_m| \leq |a_n - A| + |a_m - A| < \varepsilon.$$

Legyen (a_n) Cauchy sorozat. Azt fogjuk belátni, hogy ekkor konvergens.
Először lássuk be, hogy egy Cauchy sorozat korlátos!
Tudjuk, hogy valamilyen n_0 küszöbindex után $|a_n - a_m| < \varepsilon$, azaz $a_n \in (a_m - \varepsilon, a_m + \varepsilon$. Ekkor ezen az invertvallumon kívül csak véges sok eleme van a sorozatnak, azaz

$$K := \max\left\{(|a_m| + \varepsilon) \cup \{|a_k| \big| k < n_0\}\right\}$$

jó korlát. Tehát az (a_n) Cauchy sorozat korlátos, emiatt van konvergens részsorozata.
Legyen a részsorozat (a_{n_k}) ahol $\lim_{\to\infty} a_{n_k} = A$.
Tudjuk, hogy valamilyen küszöbindex után

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad |a_{n_k} - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül. Ekkor

$$|a_n - A| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - A| = |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - A| < \varepsilon.$$

3.3. Rész-sorozat

Adott az (a_n) sorozat, és az (n_k) végtelen index-sorozat, ahol $\forall k \in \mathbb{N}$ esetén $n_k \in \mathbb{N}$ teljesül, és $\forall k < j$ esetén $n_k < n_j$. Ekkor az (a_{n_k}) az (a_n) részsorozata.

3.3.1. Csúcselem

Adott (a_n) sorozatban a_m csúcselem, ha $\forall n > m$ esetén $a_n \leq a_m$.

3.3.2. Monoton rész-sorozat

Minden sorozatnak van monoton részsorozata.

Bizonyítás
Legyen először az (a_n) sorozatnak végtelen sok csúcseleme. Ekkor legyen e csúcselemek indexe n_k ahol $n_i < n_j$ ha $i < j$. Ekkor az (a_{n_k}) sorozat monoton fogyó.
Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozatnak csak véges sok csúcseleme van. Legyen ekkor az utolsó csúcs indexe n, és legyen $n_1 := n + 1$. Mivel a_{n_1} már nem lehet csúcs, ezért létezik nála nagyobb elem, legyen ez a_{n_2}. Mivel a_{n_2} sem csúcs, ennél is létezik nagyobb elem. Ezt a végtelenségig folytatva tudunk konstruálni egy (a_{n_k}) monoton növő sorozatot.

3.4. Nullsorozat

Az (a_n) sorozat nullsorozat, ha
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

3.4.1. Tulajdonságok

1. Látható, hogy (a_n) nullsorozat akkor és csak akkor, hogyha $(|a_n|)$ nullsorozat.
2. Azt mondjuk, hogy
$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$
ha az $(a_n - A)$ sorozat nullsorozat.
3. Legyen (a_n) nullsorozat, és (b_n) korlátos sorozat. Ekkor $(a_n \cdot b_n)$ is nullsorozat.
4. Legyen (a_n) és (b_n) nullsorozat, ekkor $(a_n \pm b_n)$ is nullsorozat. Legyen továbbá $c \in \mathbb{R}$, ekkor $(c \cdot a_n)$ is nullsorozat.
5. Legyen $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ és
$$b_n := \begin{cases} \frac{1}{a_n}, & \text{ha} \quad a_n > 0 \\ 0, & \text{ha} \quad a_n \leq 0. \end{cases}$$
Ekkor $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, azaz (b_n) nullsorozat.
6. Legyen $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ és (b_n) alulról korlátos sorozat. Ekkor
$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \infty.$$
Hasonlóan, ha $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ és (b_n) felülről korlátos sorozat, akkor
$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = -\infty.$$
7. Legyen $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Ekkor $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n$ lehet 0, konstans, vagy $\pm\infty$.

3.5. Torlódási pont

Az adott (a_n) sorozatban $t \in \mathbb{R}$ torlódási pont, ha $\forall \varepsilon > 0$-ra a $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ intervallum végtelen sok elemét tartalmazza az (a_n) sorozatnak.

4. Tétel

4.1. Bolzano-Weierstrass tétel

Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

4.1.1. Csúcselem

Adott (a_n) sorozatban a_m csúcselem, ha $\forall n > m$ esetén $a_n \leq a_m$.

4.1.2. Lemma

Minden sorozatnak van monoton részsorozata.

Bizonyítás
Legyen először az (a_n) sorozatnak végtelen sok csúcseleme. Ekkor legyen e csúcselemek indexe n_k ahol $n_i < n_j$ ha $i < j$. Ekkor az (a_{n_k}) sorozat monoton fogyó.
Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozatnak csak véges sok csúcseleme van. Legyen ekkor az utolsó csúcs indexe n, és legyen $n_1 := n + 1$. Mivel a_{n_1} már nem lehet csúcs, ezért létezik nála nagyobb elem, legyen ez a_{n_2}. Mivel a_{n_2} sem csúcs, ennél is létezik nagyobb elem. Ezt a végtelenségig folytatva tudunk konstruálni egy (a_{n_k}) monoton növő sorozatot.

Bizonyítás
Beláttuk, hogy korlátos sorozatnak létezik monoton részsorozata. Mivel ez a részsorozat korlátos és monoton, konvergens is.

4.2. Számtani-átlag-sorozat határértéke

Ha (a_n) konvergens, akkor (A_n) is konvergens, és

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} A_n.$$

Bizonyítás
Legyen $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.
A háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$|A_n - A| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k - nA\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |a_k - A|.$$

Legyen az (a_n) sorozatnál az $\frac{\varepsilon}{2}$ számhoz tartozó küszöbindex n_1. Legyen továbbá a $n_2 = \frac{2n_1K}{\varepsilon}$ ahol $|a_n - A| \leq K$. Világos, hogy létezik ilyen K, hiszen a sorozat konvergens. Ekkor

$$|A_n - A| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |a_k - A| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_1} |a_k - A| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_1+1}^{n} |a_k - A| \leq \frac{n_1}{n}\cdot K + \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{n-n_1}{n} < \frac{n_1}{n}\cdot K + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Világos, hogy $n \geq \max(n_1, n_2) = \max\left(n_1, \frac{2n_1K}{\varepsilon}\right)$ esetén

$$|A_n - A| < \frac{n_1}{n}\cdot K + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

4.3. Az e szám értelmezése, kétféle előállítása

4.3.1. Sorozat határértéke

Az e szám az alábbi sorozat határértéke

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

4.3.2. Sor összege

Az e szám az alábbi sor összege

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

5. Tétel

5.1. Határérték monotonitása

Legyen $a_n < b_n$ valamilyen küszöbindex után. Ekkor (ha léteznek a határértékek)

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n.$$

5.2. Rendőrelv sorozatokra

Legyen $a_n < b_n < c_n$ valamilyen küszöbindex után. Legyen továbbá

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Ekkor (ha léteznek a határértékek)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Bizonyítás

Legyen $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = B$. Ekkor a határérték definíciójából valamilyen küszöbindex után

$$B - \varepsilon < a_n < b_n < c_n < B + \varepsilon.$$

5.3. Nevezetes sorozat határértékek

1.
$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} \infty, & \alpha > 0 \\ 1, & \alpha = 0 \\ 0, & \alpha < 0 \end{cases}$$

2.
$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & |a| < 1 \\ \nexists, & a \le -1 \end{cases}$$

3.
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad a > 0$$

4.
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

5.
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

6.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^m a_k n^k}{\sum_{k=1}^l b_k n^k} = \begin{cases} \infty, & m > l, a_m b_l > 0 \\ \frac{a_m}{b_l}, & m = l \\ 0, & m < l \\ -\infty, & m > l, a_m b_l < 0 \end{cases}$$

5.4. Végtelen sor

Adott egy (a_n) sorozat, ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

egy végtelen sor.

5.4.1. Konvergencia

Egy végtelen sor n-edik részletösszege

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

ahol

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Ekkor a $\left(\sum a_n\right)$ sorozat konvergens, ha $\exists \lim_{n\to\infty} s_n = S$. Azt mondjuk, hogy S a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor összege. Ha (s_n) divergens, akkor azt mondjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor divergens.

5.4.2. Szükséges feltétel konvergenciára

Ha $\left(\sum a_n\right)$ konvergens, akkor (a_n) nullsorozat.

5.5. Divergencia-teszt

Ha (a_n) nem nullsorozat, akkor $\left(\sum a_n\right)$ divergens.

Bizonyítás

Mivel $\left(\sum a_n\right)$ konvergenciájának szükséges feltétele az, hogy (a_n) nullsorozat legyen, kapjuk is a bizonyítandót.

6. Tétel

6.1. Végtelen mértani sor

Legyen $a_n = aq^{n-1}$, ekkor $\left(\sum a_n\right)$ egy mértani sor.

6.1.1. Konvergencia feltétele, sor összege

Adott $a_n = aq^{n-1}$ mértani sor. Ekkor $|q| < 1$ esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}.$$

Bizonyítás
Tudjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} aq^{n-1} = \frac{a\big(1-q^n\big)}{1-q}.$$

Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} aq^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a\big(1-q^n\big)}{1-q} = \frac{a\Big(1-\lim_{n\to\infty} q^n\Big)}{1-q} = \frac{a}{1-q}.$$

6.2. Cauchy kritérium sorokra

Azt mondjuk, hogy a $\left(\sum a_n\right)$ végtelen sor teljesíti a Cauchy kritériumot, hogyha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists n_0$ küszöbindex, melyre $\forall n > m \geq n_0$ esetén

$$\big|s_n - s_m\big| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon.$$

6.3. Összehasonlító kritériumok végtelen sorokra

1. Majoráns kritérium
   Adott két sor, melyekre $0 \leq b_n \leq a_n$ teljesül $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén. Tegyük fel, hogy $\left(\sum a_n\right)$ konvergens. Ekkor $\left(\sum b_n\right)$ is konvergens.

2. Minoráns kritérium
   Adott két sor melyekre $a_n \leq b_n$ teljesül $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén. Tegyük fel, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty.$$

   Ekkor $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

6.4. Abszolút konvergens sor

Azt mondjuk, hogy a $\left(\sum a_n\right)$ sor abszolút konvergens, ha $\left(\sum |a_n|\right)$ konvergens.

6.4.1. Kapcsolat konvergenciával

Ha a $\left(\sum a_n\right)$ abszolút konvergens, akkor konvergens is.

Bizonyítás

A háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=m}^{n} a_k\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \le \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|.$$

Mivel $\left(\sum a_n\right)$ abszolút konvergens,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} |a_k| - \sum_{k=m}^{n} |a_k|\right| < \varepsilon$$

azaz

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon$$

tehát $\left(\sum a_n\right)$ konvergens.

7. Tétel

7.1. Hányadoskritérium

1. Tegyük fel, hogy $\exists q < 1$, amire
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$$
teljesül $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor a sor abszolút konvergens.

2. Tegyük fel, hogy
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$$
teljesül $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor a sor divergens.

Bizonyítás

1. Tudjuk, hogy
$$\left|\frac{a_2}{a_1}\right| \leq q \quad \left|\frac{a_3}{a_2}\right| \leq q \quad \dots \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q.$$
Ezeket összeszorozva kapjuk, hogy
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_1}\right| \leq q^n \implies |a_{n+1}| \leq q^n |a_1|.$$
Ez azt jelenti, hogy a sort majorálhatjuk egy 1-nél kisebb kvóciensű mértani sorral, ami nyilván konvergens.

2. A divergencia-teszt miatt egyből kapjuk a bizonyítandót.

7.1.1. Gyengített változat

Tegyük fel, hogy létezik a
$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = A$$
határérték. Ekkor

1. ha $A < 1$, akkor a sor abszolút konvergens
2. ha $A > 1$, akkor a sor divergens
3. ha $A = 1$, akkor a sor lehet konvergens és divergens is.

7.2. Gyökkritérium

1. Tegyük fel, hogy $\exists 0 < q < 1 \in \mathbb{R}$, melyre $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ teljesül $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor a $\left(\sum a_n\right)$ sor abszolút konvergens.
2. Tegyük fel, hogy $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ teljesül $\forall n \in \mathbb{N}$. Ekkor a $\left(\sum a_n\right)$ sor divergens.

Bizonyítás

1. Tudjuk, hogy
$$|a_n| \leq q^n < 1$$
azaz a sort majorálhatjuk egy 1-nél kisebb kvóciensű mértani sorral, ami nyilván konvergens.

2. A divergencia-teszt miatt egyből kapjuk a bizonyítandót.

7.2.1. Gyengített változat

Tegyük fel, hogy létezik a

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = A$$

határérték. Ekkor

1. ha $A < 1$, akkor a $\left(\sum a_n\right)$ sor abszolút konvergens
2. ha $A > 1$, akkor a $\left(\sum a_n\right)$ sor divergens
3. ha $A = 1$, akkor a sor lehet konvergens és divergens is.

7.3. Feltételesen konvergens sor

Azt mondjuk, hogy a $\left(\sum a_n\right)$ feltételesen konvergens, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.

7.3.1. Példa

Adott $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ végtelen sor. Ez egy Leibniz-sor, így konvergens, azonban $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|$ nem konvergens.

7.4. Riemann tétel

Ha a $\left(\sum a_n\right)$ feltételesen konvergens, akkor $\forall c \in \mathbb{R}$-hez létezik olyan átrendezés, amikor a sor összege c-vel egyenlő.

7.5. Függvény definíció, alaptulajdonságok

Adott az $f : X \mapsto Y$ leképezés, mely során $\forall x \in X$ elemhez hozzárendelünk egy $y \in Y$ elemet. Ekkor ezt a leképezést függvénynek nevezzük.

7.5.1. Értelmezési tartomány

Egy függvény értelmezési tartományát D_f-el jelöljük, azon X-beli elemeket tartalmazza, melyekhez hozzárendel a függvény.

7.5.2. Értékkészlet

Egy függvény értékkészletét R_f-el jelöljük, azon Y-beli elemeket tartalmazza, melyek előállnak képként.

7.5.3. Injektív függvény

Adott f függvény injektív, ha $\forall x_1 \neq x_2 \in D_f$ esetén $f(x_1) \neq f(x_2)$ teljesül.

7.5.4. Szürjektív függvény

Adott f függvény szürjektív, ha $\forall y \in R_f$-hez $\exists x \in X$, amire $f(x) = y$.

7.5.5. Bijektív függvény

Adott f függvény bijektív, ha injektív és szürjektív.

7.5.6. Páros függvény

Adott f függvény páros, ha $\forall x \in D_f$ esetén $f(-x) = f(x)$ teljesül.

7.5.7. Páratlan függvény

Adott f függvény páratlan, ha $\forall x \in D_f$ esetén $f(-x) = -f(x)$ teljesül.

7.5.8. Monoton növő függvény

Adott f függvény monoton növő függvény, ha $\forall x_1 \leq x_2 \in D_f$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$ teljesül.

7.5.9. Monoton csökkenő függvény

Adott f függvény monoton csökkenő függvény, ha $\forall x_1 \leq x_2 \in D_f$ esetén $f(x_1) \geq f(x_2)$ teljesül.

7.5.10. Periodikus függvény

Adott f függvény periodikus p prediódussal, ha $\forall x, x + p \in D_f$ esetén $f(x) = f(x + p)$ teljesül.

7.6. Inverz függvény

Adott egy $f : X \mapsto Y$ bijekció. Ekkor az f függvény inverze egy olyan $f^{-1} : Y \mapsto X$ bijekció, melyre $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$.

7.6.1. Inverz függvény létezése

f invertálható akkor és csak akkor, ha szigorúan monoton.

8. Tétel

8.1. Leibniz-sor

Azt mondjuk, hogy $\left(\sum a_n\right)$ Leibniz-típusú sor, ha az (a_n) sorozat

1. oszcilláló sorozat, azaz $a_n \cdot a_{n+1} < 0$ teljesül $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén
2. $(|a_n|)$ monoton fogyó
3. (a_n) nullsorozat.

8.1.1. Konvergenciája

A Leibniz-típusú sorok konvergensek.

Bizonyítás

Legyen $a_1 > 0$. Ekkor a páratlan indexű tagok pozitívak, a páros indexú tagok pedig negatívak. Legyen továbbá

$$\alpha_k := \sum_{k=1}^{2k} a_k$$

$$\beta_k := \sum_{k=1}^{2k-1} a_k$$

$$I_k := [\alpha_k, \beta_k].$$

Ekkor az I_k intervallumsorozat teljesíti a Cantor-féle közöspont tétel feltételeit, így létezik egy közös pont, azaz

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

8.2. Folytonosság adott pontban

Adott $f : X \mapsto \mathbb{R}$ folytonos az $x_0 \in D_f$ pontban, ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, melyre $\forall |x - x_0| < \delta$ esetén

$$\big|f(x) - f(x_0)\big| < \varepsilon.$$

8.2.1. Geometriai jelentés

Tekintsünk $f(x_0)$ körül egy $\big(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon\big)$ között vízszintes sávot. Ekkor létezik x_0 körül egy $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ függőleges sáv, melyre a függvény gráfja az $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times \big(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon\big)$ téglalapban van.

8.3. Sorozatfolytonosság

Adott $f : X \mapsto \mathbb{R}$ folytonos az $x_0 \in D_f$ pontban, ha $\forall (x_n) \subset X$ sorozatra, melyre $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

teljesül.

8.3.1. Kapcsolat folytonossággal

Adott $f : X \mapsto \mathbb{R}$ folytonos az $x_0 \in D_f$ pontban akkor és csak akkor, ha f sorozatfolytonos az $x_0 \in D_f$ pontban.

Bizonyítás
Tegyük fel, hogy f folytonos az x_0 pontban. Legyen továbbá $(x_n) \subset D_f$ egy olyan sorozat, amelyre $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Ekkor $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, melyre $\forall |x - x_0| < \delta$ esetén

$$\big|f(x) - f(x_0)\big| < \varepsilon.$$

Mivel $x_n \to x_0$, valamilyen küszöbindex után

$$\big|x_n - x_0\big| < \delta \implies \big|f(x_n) - f(x_0)\big| < \varepsilon.$$

Tehát valóban $\lim_{x\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.
Most tegyük fel, hogy f sorozatfolytonos az x_0 pontban, azonban nem folytonos, tehát $\exists \varepsilon > 0$, melyre $\forall \delta > 0$-hoz $\exists x$, melyre $|x - x_0| < \delta$, de $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy $\delta = \frac{1}{n}$-hez is $\exists x_n$, melyre $|x_n - x_0| < \delta$, mégis $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Ekkor erre az (x_n) sorozatra $x_n \to x_0$, de $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$, ami ellentmondás, hiszen f sorozatfolytonos x_0-ban. Tehát f folytonos is x_0-ban.

8.4. Folytonos függvény tulajdonságai

8.4.1. Folytonosság intervallumon

Azt mondjuk, hogy az $f : X \mapsto \mathbb{R}$ adott $Y \subset D_f$ intervallumon folytonos, ha $\forall x_0 \in Y$ pontban folytonos.
Ha $D_f = [a, b]$, akkor f folytonos D_f-en, ha $\forall x_0 \in (a, b)$ pontban folytonos, és

$$\lim_{x\to a+} = f(a) \qquad \lim_{x\to b-} = f(b).$$

8.5. Határérték és folytonosság

Ha f folytonos $x_0 \in int(D)$-ben, akkor

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

9. Tétel

9.1. Bolzano tétel

Legyen $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ folytonos függvény, ahol $f(a) < f(b)$. Ekkor $\forall c \in \big(f(a), f(b)\big)$-hez $\exists \xi \in (a, b)$, amire $f(\xi) = c$.

Bizonyítás
Legyen $c_1 := \frac{a+b}{2}$. Legyen továbbá

$$a_2 := a_1 \qquad b_2 := c_1$$

ha $f(c_1) > c$, és

$$a_2 := c_1 \qquad b_2 := b_1$$

ha $f(c_1) < c$. Hasonlóan konstruáljuk az $I_k := [a_k, b_k]$ intervallumsorozatot. Nyilván az I_k invervallumsorozat teljesíti a Cantor-féle közöspont tétel feltételeit, így létezik egy közös pont, azaz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi$$

tehát

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(\xi).$$

Tehát $f(\xi) \leq c \leq f(\xi)$. Emiatt nyilván $f(\xi) = c$.

9.1.1. Következmények

1. Ha f folytonos függvény és felvesz pozitív és negatív értékeket is, akkor van zérushelye.
2. Páratlan fokú polinomnak van legalább egy valós gyöke.

9.2. Függvény határértéke véges pontban

Adott $f : D \mapsto \mathbb{R}$ függvény és tegyük fel, hogy $\exists x_0$ olyan $U_{x_0} = (x_0 - r, x_0 + r)$ környezete, amire

$$U_{x_0} \setminus \{x_0\} \subset D$$

teljesül. Ekkor $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$ ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, melyre $\forall x \in D$, $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén

$$\big|f(x) - \alpha\big| < \varepsilon$$

teljesül.

9.3. Egyoldali határértékek

Adott az $f : D \mapsto \mathbb{R}$ függvény és tegyük fel, hogy $\exists U_{x_0} = (x_0 - r, x_0) \subset D$ ($\exists U_{x_0} = (x_0, x_0 + r) \subset D$). Ekkor f baloldali (jobboldali) határértéke az x_0 pontban α, azaz

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \alpha$$

$$\left(\lim_{x\to x_0+} f(x) = \alpha\right)$$

ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, melyre $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ ($\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$) esetén

$$\big|f(x) - \alpha\big| < \varepsilon$$

teljesül.

9.4. Szakadási helyek osztályozása

1. Az f függvénynek elsőfajú szakadása van x_0-ban, ha léteznek a

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) < \infty \qquad \lim_{x\to x_0-} f(x) < \infty$$

határértékek. Ha

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x)$$

akkor megszüntethető a szakadás.

2. Az f függvénynek másodfajú szakadása van x_0-ban, ha nem elsőfajú a szakadás.

9.4.1. Példák

Elsőfajú szakadásra jó példa az $\operatorname{sgn}(x)$ függvény 0-ban. Ez nem megszüntethető szakadás.
Másodfajú szakadásra jó példa az $\frac{1}{x}$ függvény 0-ban.

9.5. Határértékek tulajdonságai

1. Linearitás

$$\lim_{x\to x_0} \big(\alpha \cdot f(x) + \beta g(x)\big) = \alpha \cdot \lim_{x\to x_0} f(x) + \beta \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

2.

$$\lim_{x\to x_0} f \cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

Tegyük fel, hogy $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$. Ekkor

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}.$$

3. Kompozíció határértéke
Legyen $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$ és $\lim_{x\to \alpha} g(x) = \beta$. Ekkor

$$\lim_{x\to x_0} g \circ f(x) = \beta.$$

4. Monotonitás
Legyen $f(x) < g(x)$ $\forall x \neq x_0$-ra. Ekkor (ha léteznek a határértékek)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x).$$

5. Rendőr-elv
Legyen $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$, $g : D_g \mapsto \mathbb{R}$ és $h : D_h \mapsto \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $\exists U_{x_0}$, amire $\forall x \neq x_0 \in U_{x_0}$ esetén

$$f(x) < g(x) < h(x).$$

Ekkor ha

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x)$$

akkor

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x).$$

6. Monoton függvények határértéke
Legyen $f : D \mapsto \mathbb{R}$ olyan függvény, amire tegyük fel, hogy $\exists U_{x_0}$ környezet, ahol a függvény monoton nő (csökken), azaz $\forall x_1 < x_2 \in U_{x_0}$, ahol $x_1 \neq x_0$ és $x_2 \neq x_0$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) \geq f(x_2))$. Ekkor $\exists f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$, ahol
$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \inf\left\{f(x)\middle|x > x_0\right\}$$
$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \sup\left\{f(x)\middle|x < x_0\right\}$$
(illetve
$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \sup\left\{f(x)\middle|x > x_0\right\}$$
$$\left.\lim_{x\to x_0-} f(x) = \inf\left\{f(x)\middle|x < x_0\right\}.\right)$$

9.6. Nevezetes függvény határértékek

1. $$\lim_{x\to 0} x^x = 1$$
2. $$\lim_{x\to \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$$
3. $$\lim_{x\to \infty} \frac{\log x}{x} = 0$$
Megjegyzés: A logaritmus alapja itt nem releváns.
4. $$\lim_{x\to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$
5. $$\lim_{x\to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$$
6. $$\lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$
7. $$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$
8. $$\lim_{x\to \infty} x \sin\frac{1}{x} = 1$$

10. Tétel

10.1. Határérték-fogalom kiterjesztése

Adott $f : D \mapsto \mathbb{R}$ függvény.

1. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \alpha$ ha $\forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists K \in \mathbb{R}$, melyre $\forall x > K \in D$ $(\forall x < K \in D)$ esetén $\big|f(x) - \alpha\big| < \varepsilon$ teljesül.
2. $\lim_{x\to x_0} = \pm\infty$, ha $\forall K \in \mathbb{R}$-hez $\exists\delta > 0$, melyre $\forall 0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $f(x) > K$ $(f(x) < K)$ teljesül.
3. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$ ha $\forall K \in \mathbb{R}$-hez $\exists L \in \mathbb{R}$, melyre $\forall x > L \in D$ esetén $f(x) > K$ $(f(x) < K)$.

10.2. Átviteli elv határérték kiszámítására

Adott $f : D \mapsto \mathbb{R}$ függvény.

1. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\forall(x_n) \subset D$ sorozatra $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ $(x_n \neq x_0)$ esetén
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha.$$
2. $\lim_{x\to x_0+} f(x) = \alpha$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\forall(x_n) \subset D$ sorozatra $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, $x_n > x_0$ esetén
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha.$$
3. $\lim_{x\to x_0-} f(x) = \alpha$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\forall(x_n) \subset D$ sorozatra $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, $x_n < x_0$ esetén
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha.$$

10.3. $[a, b]$-n értelmezett folytonos függvények

10.3.1. Bolzano tétel

Legyen $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ folytonos függvény, ahol $f(a) < f(b)$. Ekkor $\forall c \in \big(f(a), f(b)\big)$-hez $\exists\xi \in (a, b)$, amire $f(\xi) = c$.

10.3.2. Weierstrass tétel

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor R_f korlátos és zárt.

10.3.3. Heine tétel

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor f egyenletesen folytonos.

10.4. Weierstrass 1-2. tétele

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor R_f korlátos és zárt.

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy f felülről nem korlátos. Ekkor $\forall n$-hez $\exists x_n \in [a, b]$, melyre $f(x_n) > n$. Ez az (x_n) sorozat korlátos, hiszen $a \leq x_n \leq b$, így a Bolzano-Weierstrass tétel miatt $\exists(x_{n_k})$ konvergens részsorozata, melyre

$$\lim_{n_k\to\infty} x_{n_k} = \xi$$

ahol $\xi \in [a, b]$. Mivel a függvény folytonos, sorozatfolytonos is, tehát

$$\lim_{n_k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi).$$

Azonban ez ellentmondás, hiszen $f(x_{n_k}) > n_k$. Tehát valóban korlátos.
Legyen $\beta = \sup\left\{f(x)\middle|x \in [a,b]\right\}$. Ekkor nyilván $\forall n$-hez $\exists x_n \in [a,b]$, melyre

$$\beta - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq \beta$$

azaz

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \beta.$$

Azonban a Bolzano-Weierstrass tétel miatt $\exists(x_{n_k})$ konvergens részsorozat, amelyre

$$\lim_{n_k\to\infty} x_{n_k} = \xi$$

ahol $\xi \in [a,b]$. Azonban a sorozatfolytonosság miatt

$$\lim_{n_k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi).$$

Tehát $\beta = f(\xi)$, azaz $\beta = \max\left\{f(x)\middle|x \in [a,b]\right\}$.

11. Tétel

11.1. Egyenletes folytonosság

Adott $f : D \mapsto \mathbb{R}$ egyenletesen folytonos D-ben, ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta$, ami ε-ra jellemző, melyre $\forall x_1, x_2 \in D$-re $|x_1 - x_2| < \delta$ esetén

$$\big|f(x_1) - f(x_2)\big| < \varepsilon$$

teljesül.

11.1.1. Példa

Legyen $f(x) = x^2$ és az értelmezési tartomány legyen $[0, 1]$. Ekkor

$$\big|f(x) - f(x_0)\big| = \big|x^2 - x_0^2\big| = \big|(x - x_0)(x + x_0)\big| \leq 2|x - x_0|$$

azaz tetszőleges ε-hoz $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ megfelelő.

11.2. Lipschitz folytonosság

Adott f Lipschitz-folytonos D_f-en, ha $\exists L > 0$, amire $\forall x_1, x_2 \in D_f$ esetén

$$\big|f(x_1) - f(x_2)\big| \leq L \cdot |x_1 - x_2|$$

teljesül.

11.2.1. Példa

Legyen $f(x) = x^2$ és az értelmezési tartomány legyen $[0, 1]$. Ekkor

$$\big|f(x) - f(x_0)\big| = \big|x^2 - x_0^2\big| = \big|(x - x_0)(x + x_0)\big| \leq 2|x - x_0|.$$

11.3. Heine tétel

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor f egyenletesen folytonos.

11.4. Differenciahányados

Adott $f : D \mapsto \mathbb{R}$ függvény és $x_0 \in int(D)$. Ekkor az $x \in D_f$ ponthoz tartozó differenciahányados

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

11.5. Differenciálhányados

Azt mondjuk f differenciálható x_0-ban, ha létezik

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

azaz létezik és véges a differenciálhányados.

11.5.1. Geometriai és fizikai jelentés

A differenciálhányados a függvény grafikonjának adott $\big(x_0, f(x_0)\big)$ pontjához tartozó érintő meredekségét adja meg.
Legyen adott $s(t)$ útfüggvény. Ekkor t_0 időpillanatban a pillanatnyi sebesség $v(t_0) = \dot{s}(t_0)$.

11.6. Folytonosság-differenciálhatóság kapcsolata

Ha f differenciálható x_0-ban, akkor folytonos x_0-ban.

Bizonyítás

f differenciálhatósága azt jelenti, hogy

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

azaz $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, melyre $|x-x_0| < \delta$ esetén

$$f'(x_0) - \varepsilon \le \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le f'(x_0) + \varepsilon.$$

Ekkor

$$\left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right| \le K$$

ahol

$$K = \max\big(|f'(x_0)-\varepsilon|, |f'(x_0)+\varepsilon|\big).$$

Ekkor nyilván

$$\big|f(x)-f(x_0)\big| \le K|x-x_0|.$$

Ez azt jelenti, hogy $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$ esetén

$$\big|f(x)-f(x_0)\big| \le K|x-x_0| < K\cdot\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$$

tehát valóban folytonos.

11.7. Elemi függvények deriváltja

1. $f(x) = c$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{c-c}{x-x_0} = 0$$

2. $f(x) = x^n$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)\Big(\sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-1-k}\Big)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-1-k} = n x_0^{n-1}$$

3. $f(x) = \sqrt[n]{x}$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}}{\big(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}\big)\Big(\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt[n]{x}^k \sqrt[n]{x_0}^{n-1-k}\Big)} = \frac{1}{n} x_0^{\frac{1-n}{n}}$$

4. $f(x) = \sin x$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{2\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) = \cos x_0$$

5. $f(x) = \cos x$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{-2\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{x-x_0} = -\sin x_0$$

6. $f(x) = c^x$

$$f'(x) = \big(c^x\big)' = \big(e^{x\ln c}\big)' = \ln c e^{x \ln c} = c^x \ln c$$

7. $f(x) = \log_c x$

$$f'(x) = \big(\log_c x\big)' = \left(\frac{\ln x}{\ln c}\right)' = \frac{1}{x\ln c}$$

12. Tétel

12.1. Differenciálási szabályok

Legyenek f és g differenciálható függvények.

1. Linearitás

$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

2. Szorzat deriváltja

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

3. Reciprok deriváltja
   Legyen $g(x) \neq 0$.

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

4. Hányados deriváltja
   Legyen $g(x) \neq 0$.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

5. Inverz deriváltja
   Legyen f szigorúan monoton, és legyen $f'(x) \neq 0$.

$$\Big(f^{-1}(x)\Big)' = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}$$

Bizonyítás

1. A határérték tulajdonságaiból következik.

2.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x)g(x_0)}{x - x_0} =$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$
$$= \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0) \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

3.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{(x - x_0)f(x)f(x_0)} =$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)f(x_0)} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x - x_0} = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$$

4. Az előző kettő tulajdonságból triviális.

5.

$$\Big(f\big(f^{-1}(x)\big)\Big)' = f'\big(f^{-1}(x)\big)\big(f^{-1}(x)\big)' = 1 \implies \big(f^{-1}(x)\big)' = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}$$

12.2. Érintő egyenes egyenlete

Adott f függvény gráfjának $\big(x_0, f(x_0)\big)$ pontjában az érintő egyenes egyenlete

$$y = f(x) + f'(x_0)(x - x_0).$$

12.3. Rolle középérték tétel

Legyen $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ folytonos, (a, b)-n differenciálható függvény, ahol $f(a) = f(b)$. Ekkor $\exists\xi \in (a, b)$ amire

$$f'(\xi) = 0.$$

Bizonyítás

A Weierstrass tételek miatt f-nek létezik szélsőértéke. Ha $f(a) = f(b)$ szélsőérték, akkor konstans a függvény, így $f'(\xi) \equiv 0$.
Ha $f(a)$ és $f(b)$ nem szélsőérték, akkor $\exists\xi \in (a, b)$ amire $f(\xi)$ szélsőérték, ami miatt azonban $f'(\xi) = 0$.

12.4. Láncszabály

Adottak f, g függvények. Legyen f differenciálható $g(x)$-ben. Ekkor

$$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x).$$

Bizonyítás

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f\big(g(x)\big) - f\big(g(x_0)\big)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f\big(g(x)\big) - f\big(g(x_0)\big)}{x - x_0} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{g(x) - g(x_0)} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f\big(g(x)\big) - f\big(g(x_0)\big)}{g(x) - g(x_0)} \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'\big(g(x_0)\big)g'(x_0)$$

13. Tétel

13.1. Inverz függvény deriváltja

Legyen f szigorúan monoton függvény és legyen $f'(x) \neq 0$. Ekkor

$$\Big(f^{-1}(x)\Big)' = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}.$$

Bizonyítás

$$\Big(f\big(f^{-1}(x)\big)\Big)' = f'\big(f^{-1}(x)\big)\big(f^{-1}(x)\big)' = 1 \implies \big(f^{-1}(x)\big)' = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}$$

13.1.1. Szemléletes jelentése

Legyen adott f függvény és $x_0 \in R_f$ tetszőleges pont. Ekkor f^{-1} érintő egyenesét az x_0 pontban megkaphatjuk úgy, hogy az f függvény $f^{-1}(x_0)$ ponthoz tartozó érintő egyenesét tükrözzük a síkfelezőre.

13.2. Lagrange féle középérték tétel

Legyen $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ folytonos, (a, b)-n differenciálható függvény. Ekkor $\exists \xi \in (a, b)$ amire

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Bizonyítás
Legyen

$$h(x) := \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a).$$

Ekkor $h(a) = f(a)$ és $h(b) = f(b)$. Emiatt a

$$g(x) := f(x) - h(x)$$

függvényhez a Rolle-tétel miatt $\exists \xi \in (a, b)$, amire

$$g'(\xi) = f'(\xi) - h'(\xi) = 0 \implies f'(\xi) = h'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

13.3. Monoton differenciálható függvények jellemzése

Adott $f : D \mapsto \mathbb{R}$ függvény.

1. f monoton növő akkor és csak akkor, ha $f'(x) \geq 0$ teljesül $\forall x \in D$ esetén.
2. f monoton fogyó akkor és csak akkor, ha $f'(x) \leq 0$ teljesül $\forall x \in D$ esetén.

Bizonyítás

1. Először tegyük fel, hogy $f(x)$ monoton nő. Ekkor nyilván
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$
teljesül $\forall x_0 \in I$ esetén.
Most tegyük fel, hogy $f'(x) \geq 0$. Ekkor legyen $x_1 < x_2 \in I$. A Lagrange-féle középérték-tétel miatt $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ amire
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \geq 0$$
így nyilván $f(x_1) \leq f(x_2)$.
2. Az előzőhöz analóg módon.

13.4. Integrálszámítás I. alaptétele

Adottak $g, f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható függvények, melyekre $f'(x) = g'(x)$ $\forall x \in (a, b)$ esetén. Ekkor
$$f(x) = g(x) + c.$$

13.4.1. Lemma

Legyen $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, melyre $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a, b)$ esetén. Ekkor $f(x)$ konstans függvény.

Bizonyítás

Legyen $f : [x_1, x_2] \mapsto \mathbb{R}$ megszorítása f-nek. Ekkor a Lagrange-féle középérték-tétel miatt $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ amire
$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \implies f(x_2) = f(x_1).$$

Bizonyítás

A $h(x) = f(x) - g(x)$ függvény deriváltja $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, így $h(x) = c$. Ebből azonnal kapjuk a bizonyítandót.

14. Tétel

14.1. Cauchy féle középérték tétel

Legyen $f, g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ folytonos, (a, b)-n differenciálható függvények. Tegyük fel, hogy $g(a) \neq g(b)$ és $g'(x) \neq 0$. Ekkor $\exists \xi \in (a, b)$ amire

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

14.2. L'Hospital-szabály

Adott $g, f : I \mapsto \mathbb{R}$ differenciálhatóak az $x_0 \in int(I)$ pont egy U_{x_0} környezetében. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \qquad (\text{vagy } \pm\infty).$$

Ekkor ha létezik a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

határérték, akkor

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Bizonyítás
Legyen $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$. Ekkor

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}.$$

A Cauchy-féle középérték-tétel miatt $\exists \xi$ x és x_0 között, amire

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{\xi \to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Így valóban

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

14.2.1. Általános esetek

1. A szabály akkor is alkalmazható, ha a függvények határértéke az adott pontban $\pm\infty$.
2. A szabály akkor is alkalmazható, ha $x_0 = \pm\infty$.
3. A szabály többször is alkalmazható.

14.3. Lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele

Ha f-nek lokális szélsőértéke van $x_0 \in int(D_f)$-ben, akkor

$$f'(x_0) = 0.$$

Bizonyítás
Tegyük fel, hogy x_0-ban lokális minimuma van a függvénynek. Ez azt jelenti, hogy $\exists U_{x_0}$ környezet, melyre $f(x_0) \leq f(x)$ teljesül $\forall x \in U_{x_0}$ esetén. Világos, hogy ekkor $x < x_0$ esetén

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Azonban $x > x_0$ esetén

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Ekkor $0 \leq f'(x_0) \leq 0$, amiből $f'(x_0) = 0$.

15. Tétel

15.1. Magasabb rendű deriváltak

Ha f' deriválható x_0-ban akkor a függvény második deriváltja

$$f''(x_0) = \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

Hasonlóan

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}.$$

15.2. Konvex és konkáv függvények

Egy $f : D \mapsto \mathbb{R}$ függvény $(a, b) \subset D$-ben konvex (konkáv), ha $\forall a \leq x_1 < x_2 \leq b$ és $\forall t \in [0, 1]$ esetén

$$f\big(tx_1 + (1-t)x_2\big) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

teljesül. Egy f függvény konkáv, ha $-f$ konvex.

15.2.1. Jellemzés differenciálható függvények esetén

Egy $f : D \mapsto \mathbb{R}$ függvény $(a, b) \subset D$-ben konvex (konkáv), ha $\forall a \leq x_1 < x_2 \leq b$ és $\forall t \in [0, 1]$ esetén

$$f\big(tx_1 + (1-t)x_2\big) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

teljesül. Egy f függvény konkáv, ha $-f$ konvex.

15.3. Inflexió

Az $x_0 \in D_f$ inflexiós pont, ha itt a függvény konvexből konkávba, vagy konkávból konvexbe vált.

15.3.1. Kapcsolat a deriválttal

Legyen $f : D \mapsto \mathbb{R}$ háromszor differenciálható, és legyen $f''(x_0) = 0$ valamilyen x_0-ra. Ekkor x_0 inflexiós pont, ha $f'''(x_0) \neq 0$.
Ha $f''(x_0) = 0$ és $f''(x)$ előjelet vált x_0-ban, akkor x_0 inflexiós pont.

15.4. Taylor-polinom

Tegyük fel, hogy az f függvény n-szer differenciálható az $x_0 \in D_f$ pontban. Ekkor

$$T_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

az f függvény x_0-hoz tartozó n-edik Taylor-polinomja.

15.4.1. Tulajdonságok

Pontosan egy olyan $P_n(x)$ polinom létezik, amire

$$P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$$

ha $k \leq n$ és

$$P_n^{(n+1)}(x_0) = 0$$

ez a polinom pedig $T_n(x)$.

Bizonyítás
Könnyen látható, hogy

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0).$$

Az egyértelműség azonnal következik abból, hogyha két azonos fokszámú polinom minden deriváltja megegyezik, akkor az együtthatóik páronként megegyeznek, így a két polinom azonos.

15.5. Lagrange-féle maradéktag

Az $L_n(x) := f(x) - T_n(x)$ a Lagrange-féle maradéktag.

15.5.1. Tétel

Legyen f $(n+1)$-szer differenciálható x_0 egy U_{x_0} környezetében. Ekkor $\forall x \in U_{x_0}$-hoz $\exists \xi$ x és x_0 között, amire

$$L_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

16. Tétel

16.1. Lokális szélsőérték létezésének elégséges feltétele

Legyen $f : D \mapsto \mathbb{R}$ kétszer differenciálható, és legyen $f'(x_0) = 0$ valamilyen x_0-ra. Ekkor x_0 lokális szélsőérték, ha $f''(x_0) \neq 0$. Továbbá x_0 lokális maximum (minimum), ha $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$).
Ha $f'(x_0) = 0$ és $f'(x)$ előjelet vált x_0-ban, akkor x_0 lokális szélsőérték.

Bizonyítás
Legyen $f''(x_0) > 0$. Ekkor $\exists U_{x_0}$ környezet, amire $\forall x \in U_{x_0}$ esetén $f''(x) > 0$. Ez azt jelenti, hogy f' szigorúan monoton nő U_{x_0}-ban, ami miatt $x < x_0$ esetén $f(x)$ csökken, és $x_0 < x$ esetén $f(x)$ nő. Tehát x_0-ban valóban minimum van.

16.2. Primitív függvény

Adott egy $f : I \mapsto \mathbb{R}$ függvény, ahol $I \subset \mathbb{R}$. Ekkor az $F : I \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható függvény az f primitív függvénye, ha $\forall x \in I$ esetén

$$F'(x) = f(x)$$

teljesül.

16.3. Határozatlan integrál alaptulajdonságai

1.
$$\int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

2.
$$\int f'\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = f\big(\varphi(x)\big) + c$$

3.
$$\int f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t \bigg|_{t=\varphi(x)}$$

4.
$$\int f(x)^\alpha \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad \alpha \neq -1$$

5.
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c \left(= \begin{cases} \ln\big(f(x)\big) + c, & \text{ha} \quad f(x) > 0 \\ \ln\big(-f(x)\big) + c, & \text{ha} \quad f(x) < 0 \end{cases} \right)$$

6.
$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = e^{f(x)} + c$$

16.4. Riemann integrál

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ korlátos függvény. Azt mondjuk, hogy f Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon, ha

$$\sup\big\{s(\mathcal{F}) \big| \mathcal{F} \in \mathbb{F}\big\} = \inf\big\{S(\mathcal{F}) \big| \mathcal{F} \in \mathbb{F}\big\}.$$

Ekkor

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\big\{s(\mathcal{F}) \big| \mathcal{F} \in \mathbb{F}\big\} = \inf\big\{S(\mathcal{F}) \big| \mathcal{F} \in \mathbb{F}\big\}.$$

16.4.1. Szemléletes jelentés

A Riemann integrál a görbe alatti területet adja meg.

17. Tétel

17.1. Integrál közelítő összegek

17.1.1. Alsó közelítő összeg

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ korlátos függvény. Legyen $\mathcal{F}$ az $[a, b]$ intervallum egy felosztása, és legyen

$$m_k = \inf \big\{ f(x) \big| x \in [x_{k-1}, x_k] \big\}.$$

Ekkor a felosztáshoz tartozó alsó közelítő összeg

$$s(\mathcal{F}) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k.$$

17.1.2. Felső közelítő összeg

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ korlátos függvény. Legyen $\mathcal{F}$ az $[a, b]$ intervallum egy felosztása, és legyen

$$M_k = \sup \big\{ f(x) \big| x \in [x_{k-1}, x_k] \big\}.$$

Ekkor a felosztáshoz tartozó felső közelítő összeg

$$S(\mathcal{F}) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k.$$

17.1.3. Tulajdonságok

1. Tetszőleges $\mathcal{F}$ felosztás esetén
$$s(\mathcal{F}) \leq S(\mathcal{F}).$$
2. Új osztópont felvételekor az alsó közelítő összeg nem csökken, a felső közelítő összeg pedig nem nő. Legyen tehát az $\mathcal{F}$ felosztásból egy osztópont felvételével képzett felosztás $\mathcal{F}'$. Ekkor
$$s(\mathcal{F}) \leq s(\mathcal{F}') \leq S(\mathcal{F}') \leq S(\mathcal{F}).$$
3. Legyen $\mathcal{F}$ és $\mathcal{F}'$ két felosztás. Ekkor
$$s(\mathcal{F}) \leq S(\mathcal{F}').$$

Bizonyítás

1. Mivel minden
$$\inf \big\{ f(x) \big| x \in [x_{k-1}, x_k] \big\} \leq \sup \big\{ f(x) \big| x \in [x_{k-1}, x_k] \big\}$$
így egyből apjuk a bizonyítandót.
2. Tegyük fel, hogy az új osztópontra $x_{k-1} < x* < x_k$. Ekkor legyen
$$m_1 = \inf \big\{ f(x) \big| x \in [x_{k-1}, x^*] \big\}$$
és
$$m_2 = \inf \big\{ f(x) \big| x \in [x^*, x_k] \big\}.$$
Ekkor
$$s(\mathcal{F}') - s(\mathcal{F}) = m_1(x^* - x_{k-1} + m_2(x_k - x^*) - m_k(x_k - x_{k-1}) =$$
$$= (m_1 - m_k)(x^* - x_{k-1}) + (m_2 - m_k)(x_k - x^*) \geq 0.$$
Tehát $s(\mathcal{F}') \geq s(\mathcal{F})$. Hasonlóan belátható a felső közelítő összegekre vonatkozó állítás.
3. Az első két állításból azonnal következik.

17.2. Nem integrálható függvényre példa

Jó példa a Dirichlet függvény.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

17.3. Integrálhatóság elégséges feltételei

17.3.1. Tétel

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ korlátos és monoton függvény integrálható.

Bizonyítás
Tegyük fel, hogy f monoton növő. Ekkor $\forall \varepsilon > 0$ esetén

$$o(\mathcal{F}) = \sum_{k=1}^{n} \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big)\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big)\delta(\mathcal{F}) = \big(f(b) - f(a)\big)\delta(\mathcal{F}).$$

Ekkor $\delta(\mathcal{F}) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ esetén $o(\mathcal{F}) < \varepsilon$.

17.3.2. Tétel

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ folytonos függvény integrálható.

Bizonyítás
A Heine-tétel miatt a függvény egyenletesen is folytonos. Ekkor $\forall \frac{\varepsilon}{b-a} > 0$ esetén $\exists \delta$, melyre $\forall |x_k - x_{k-1}| < \delta$ esetén $|f(x_k) - f(x_{k-1})| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Ekkor

$$o(\mathcal{F}) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1} = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

17.3.3. Tétel

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ korlátos, és véges sok szakadási helytől eltekintve folytonos függvény integrálható.

Bizonyítás
Legyen szakadási pont $x^* \in [a, b]$. Legyen továbbá

$$[a, b] = I_1 \cup I_2 \cup I_3 = [a, x^* - \delta] \cup (x^* - \delta, x^* + \delta) \cup [x^* + \delta, b].$$

Ekkor f folytonos az I_1 és I_3 intervallumokon, azaz $\exists \mathcal{F}_1$ felosztás, melyre $o(\mathcal{F}_1) < \frac{\varepsilon}{3}$, illetve $\exists \mathcal{F}_3$, melyre $o(\mathcal{F}_3) < \frac{\varepsilon}{3}$. Ekkor az I_2 intervallumon egy $\mathcal{F}_2$ felosztásra

$$o(\mathcal{F}_2) = (M - m)2\delta \leq 4K\delta$$

ahol $M := \sup\big\{f(x)\big|x \in (x^* - \delta, x^* + \delta)\big\}$, $m := \inf\big\{f(x)\big|x \in (x^* - \delta, x^* + \delta\big\}$, és $|f(x)| \leq K$. Ekkor $\delta < \frac{\varepsilon}{12K}$ esetén $o(\mathcal{F}_2) < \frac{\varepsilon}{3}$. Ekkor

$$o(\mathcal{F}) = o(\mathcal{F}_1) + o(\mathcal{F}_2) + o(\mathcal{F}_3) < \varepsilon.$$

17.4. Integrálközép

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ integrálható függvény integrálközepe

$$\kappa = \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \mathrm{d}x} = \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}.$$

17.4.1. Integrál középérték tétel

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ integrálható, folytonos függvény. Ekkor $\exists \xi \in [a, b]$, melyre

$$f(\xi) = \kappa = \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b - a}.$$

Bizonyítás
A Weierstrass-tétel miatt tudjuk, hogy $\exists \xi_1, \xi_2 \in [a, b]$, melyre

$$m = f(\xi_1) \quad M = f(\xi_2).$$

Ekkor a Bolzano-tétel miatt $\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2)$, melyre

$$f(\xi) = \kappa.$$

18. Tétel

18.1. Newton-Leibniz-formula

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ integrálható függvény. Legyen f egy primitív függvénye F. Ekkor

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_a^b.$$

Bizonyítás

Legyen $\mathcal{F}_n$ egy felosztása $[a, b]$-nek. Ekkor f primitív függvényének megszorítása a részintervallumokon $F : [x_{k-1}, x_k] \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható. Ekkor a Lagrange-féle középérték-tétel miatt $\exists \xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$, melyre

$$F'(\xi_k) = \frac{F(x_k) - F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f(\xi_k).$$

Ekkor írjuk fel azt a Riemann-összeget, melyben ezeket a ξ_k számokat választjuk ki. Ekkor

$$\sigma(\mathcal{F}_n) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \big(F(x_k) - F(x_{k-1})\big) = F(b) - F(a).$$

Világos, hogy ekkor

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sigma(\mathcal{F}_n) = F(b) - F(a).$$

18.2. Integrálfüggvény

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ integrálható függvény. Ekkor az f integrálfüggvénye $F : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

18.3. Integrálszámítás II. alaptétele

Adott függvény integrálfüggvénye folytonos. Ha f folytonos x_0 egy környezetében, akkor F differenciálható, és

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Bizonyítás

Tudjuk, hogy f korlátos, így legyen $|f(x)| \le K$. Ekkor

$$\big|F(x) - F(x_0)\big| = \left|\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le K|x - x_0|$$

tehát F Lipschitz-folytonos, így folytonos is.
Legyen továbbá x_0 rögzített. Ekkor

$$F'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x - x_0} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ \xi\in(x,x_0)}} f(\xi) = f(x_0).$$

18.4. Függvény gráf

Adott f függvény gráfja a $\big\{\big(x, f(x)\big)\big| x \in D_f\big\}$ ponthalmaz.

18.4.1. Ívhossz

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható függvény gráfjának hossza az $[a, b]$ intervallumon

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(t)\right)^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Bizonyítás

Vegyünk egy $\mathcal{F}$ felosztást. Ekkor az $[x_{k-1}, x_k]$ intervallumokban becsülhetjük az ívhosszt , mint

$$s_k = \sqrt{\left(x_k - x_{k-1}\right)^2 + \left(f(x_k) - f(x_{k-1})\right)^2}.$$

Továbbá a Lagrange-féle középérték-tétel miatt $\exists \xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$, melyre

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Ekkor

$$s_k = \Delta x_k \sqrt{1 + \left(f'(\xi_k)\right)^2}.$$

Ekkor az ívhossz

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \sqrt{1 + \left(f'(\xi_k)\right)^2} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(t)\right)^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

18.5. Forgástest térfogata

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^+$ differenciálható függvény x-tengely körüli megforgatásával nyert forgástest térfogata

$$\pi \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

19. Tétel

19.1. Helyettesítés integrálban, határozott alak

Adott $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ integrálható függvény, és $\varphi : [\alpha,\beta] \mapsto \mathbb{R}$ szigorúan monoton, differenciálható függvény, melyre

$$\varphi(\alpha) = a \qquad \varphi(\beta) = b.$$

Ekkor

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t\Bigg|_{t=\varphi(x)}$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

19.2. Improprius integrál

Az $f \in \mathcal{R}^{loc}(I)$ függvény imprprius értelemben integrálható, ha

$$\lim_{\substack{a\to\alpha\\ b\to\beta}} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$$

határérték létezik, és véges.

19.2.1. Tulajdonságok

Az improprius integrál tulajdonságai megegyeznek a határozott integrál tulajdonságaival.

19.3. Hatványfüggvény integrálja a $(0,1]$ intervallumon

Tudjuk, hogy a hatványfüggvény primitív függvénye

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \begin{cases} \ln|x|, & \alpha = 1 \\ \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1. \end{cases}$$

1. $\alpha = 1$ esetén
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \ln|x|\Bigg|_0^1 = \infty.$$
2. $\alpha \neq 1$ esetén
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_0^1 = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & 1-\alpha > 0 \\ \infty, & 1-\alpha < 0. \end{cases}$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ \infty, & \alpha \geq 1. \end{cases}$$

20. Tétel

20.1. Parciális integrálás

Adottak $f, g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható függvények. Ekkor

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

20.1.1. Alapesetek

1. $$\int \text{polinom} \cdot e^x\,\mathrm{d}x$$

   Ekkor legyen $f'(x) = e^x$ és $g(x) = \text{polinom}$.

2. $$\int \text{polinom} \cdot \begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \\ \operatorname{sh} x \\ \operatorname{ch} x \end{Bmatrix} \mathrm{d}x$$

   Ekkor legyen $f'(x)$ a trigonometrikus függvény és $g(x)$ a polinom.

3. $$\int e^x \cdot \begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix} \mathrm{d}x$$

   Ekkor legyen $f'(x) = e^x$ és $g(x) = \begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix}$.

20.2. Hatványfüggvény integrálja az $[1, \infty)$ intervallumon

Tudjuk, hogy a hatványfüggvény primitív függvénye

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \begin{cases} \ln|x|, & \alpha = 1 \\ \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1. \end{cases}$$

1. $\alpha = 1$ esetén
   $$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \ln|x|\Big|_1^\infty = \infty.$$

2. $\alpha \neq 1$ esetén
   $$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^\infty = \begin{cases} \infty, & 1-\alpha > 0 \\ \frac{1}{\alpha-1}, & 1-\alpha < 0. \end{cases}$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \begin{cases} \infty, & \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1. \end{cases}$$

20.3. Majoráns és minoráns kritériumok

1. Minoráns kritérium
   Adottak $f, g : I \mapsto \mathbb{R}$ függvények, melyekre
   $$|g(x)| \leq |f(x)|$$
   teljesül $\forall x \in I$ esetén. Ekkor ha
   $$\int_I g(x)\,\mathrm{d}x = \infty$$
   akkor $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$ végtelen.

2. Majoráns kritérium
   Adottak $f, g : I \mapsto \mathbb{R}$ függvények, melyekre
   $$0 \leq |f(x)| \leq g(x)$$
   teljesül $\forall x \in I$ esetén. Ekkor ha
   $$\int_I g(x)\,\mathrm{d}x < \infty$$
   akkor $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$.

20.4. Elégséges feltételek a hatványfüggvényhez kapcsolódóan

Adott $f : [a, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ ahol $a > 0$. Tegyük fel, hogy $\exists \alpha > 1, c \in \mathbb{R}$, melyre
$$\big|f(x)\big| \leq cx^{-\alpha}$$
teljesül $\forall x \geq a$ esetén. Ekkor $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ létezik.

21. Tétel

21.1. Differenciálegyenlet értelmezése, megoldása

Azt mondjuk, hogy egy egyenlet differenciálegyenlet, ha az ismeretlen egy függvény, és az egyenletben szerepel ennek az ismeretlen függvénynek valamely deriváltja is. Tehát elsőrendű esetben egy $y' = f(x, y)$ egyenlet y megoldását keressük.

21.2. Cauchy-feladat

Cauchy feladat, vagy kezdetiérték feladat során a differenciálegyenletnek azt a megoldását keressük, melyre

$$y(x_0) = y_0$$

ahol x_0 és y_0 adottak.

21.3. Fizikai példák

21.3.1. Növekedési folyamat

Tegyük fel, hogy y egy populáció nagysága, legyen továbbá a növekedés a populációval arányos, azaz $y' = ay$. Ekkor $y = ce^{ax}$, ahol x az időt jelöli. Ha adott kezdeti populáció $y(x_0) = y_0$, akkor $y = ce^{a(x-x_0)}$.

21.3.2. Robbanás egyenlete

Tegyük fel, hogy a növekedés arányos a populáció négyzetével, azaz $y' = ay^2$. Ekkor $y = \frac{1}{c-ax}$.

21.4. Szeparábilis differenciálegyenlet

Egy differenciálegyenlet szeparábilis, ha a jobboldala

$$f(x, y) = h(x)g(y)$$

vagy

$$f(x, y) = \frac{\alpha(x)}{\beta(y)}$$

alakú, azaz

$$y' = h(x)g(y)$$

vagy

$$y' = \frac{\alpha(x)}{\beta(y)}.$$

21.4.1. Megoldása

Legyen $y' = \frac{\alpha(x)}{\beta(y)}$, ebből $\beta(y)y' = \alpha(x)$, illetve $\int \beta(y)\,\mathrm{d}y = \int \alpha(x)\,\mathrm{d}x$. Legyen $B(y) = \int \beta(y)\,\mathrm{d}y$ és $A(x) = \int \alpha(x)\,\mathrm{d}x$. Azt kapjuk, hogy $B(y) = A(x) + c$, amiből y már meghatározható.

22. Tétel

22.1. Homogén lineáris DE általános megoldása

Legyen
$$y' = a(x)y$$
és legyen
$$A(x) = \int a(x)\,\mathrm{d}x\,.$$
Ekkor
$$y(x) = ce^{A(x)}$$
valamilyen $c \in \mathbb{R}$ konstanssal.

Cauchy feladat esetén legyen
$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t$$
ebből
$$A(x_0) = 0.$$
Így
$$y(x_0) = ce^{A(x_0)} = c \implies c = y_0.$$
Ekkor
$$y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\mathrm{d}t}.$$

Bizonyítás
Formálisan felírhatjuk, hogy
$$\frac{y'}{y} = a(x) \implies \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \ln|y| = \int a(x)\,\mathrm{d}x = A(x) + c.$$
Ebből azonnal kapjuk, hogy
$$|y| = e^{A(x)+c}$$
azaz $y = ce^{A(x)}$.

22.2. Állandó együtthatós inhomogén LDE

Az inhomogén LDE $y' = a(x)y + b(x)$ alakú. Állandó együtthatós inhomogén LDE esetén az $a(x), b(x)$ függvények konstansok. Ekkor a megoldás $y = ce^{ax} - \frac{b}{a}$.

22.2.1. Inhomogén LDE, megoldások struktúrája

Adott $y' = a(x)y + b(x)$ inhomogén LDE. Ha y_1, y_2 megoldások, akkor $y = y_1 - y_2$ megoldása az $y' = a(x)y$ homogén LDE-nek. Ha y_1 megoldása a homogén LDE-nek és y_2 megoldása az inhomogén LDE-nek, akkor $y = y_1 + y_2$ megoldása az inhomogén LDE-nek.

22.2.2. Általános és partikuláris megoldás

Az előző alapján az inhomogén LDE általános megoldása előáll $y = y_h + y_p$ alakban, ahol $y_h = ce^{A(x)}$ az $y' = a(x)y$ homogén LDE általános megoldása, y_p pedig az inhomogén LDE partikuláris megoldása.

22.3. Állandók variálása

Adott $y' = a(x)y + b(x)$ inhomogén LDE és legyen $y_h = ce^{A(x)}$ a homogén megoldás. Keressük a partikuláris megoldást $y_p = u(x)e^{A(x)}$ alakban! Ekkor

$$u'(x)e^{A(x)} + u(x)a(x)e^{A(x)} = a(x)u(x)e^{A(x)} + b(x)$$

amiből $u'(x)e^{A(x)} = b(x)$, azaz $u(x) = \int b(x)e^{-A(x)} \, \mathrm{d}x$. Tehát az inhomogén LDE általános megoldása

$$y = ce^{A(x)} + e^{A(x)} \int b(x)e^{-A(x)} \, \mathrm{d}x \, .$$

23. Tétel

23.1. Hatványsor

Hatványsoron egy

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$$

sort értünk, ahol x_0 rögzített valós szám.

23.2. Konvergenciahalmaz

Adott

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$$

hatványsor. Ennek konvergenciahalmaza

$$\mathcal{H} = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n < \infty \right\}.$$

23.2.1. Jellemzés

1. $x_0 \in \mathcal{H}$.
2. Ha $\xi \in \mathcal{H}$, akkor $\forall x$, melyre $|x-x_0| < |\xi|$, $x \in \mathcal{H}$ teljesül.
3. Ha $\eta \notin \mathcal{H}$, akkor $\forall x$, melyre $|x-x_0| > |\eta|$, $x \notin \mathcal{H}$ teljesül.

Bizonyítás

1. Triviális.
2. Tudjuk, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\xi-x_0)^n < \infty$. Ekkor a számsorok konvergenciájára vonatkozó szükséges feltétel miatt $\left(c_n(\xi-x_0)^n\right)$ nullsorozat, azaz $\exists K$, melyre $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left|c_n(x-x_0)^n\right| < K.$$

Tudjuk továbbá, hogy $|x-x_0| < |\xi-x_0|$, azaz

$$\left|\frac{x-x_0}{\xi-x_0}\right| < 0.$$

Ekkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\xi-x_0)^n \left(\frac{x-x_0}{\xi-x_0}\right)^n$$

így

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\xi-x_0)^n \left(\frac{x-x_0}{\xi-x_0}\right)^n\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} \left|c_n(\xi-x_0)^n\right| \left|\frac{x-x_0}{\xi-x_0}\right|^n < K \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x-x_0}{\xi-x_0}\right|^n.$$

Egy olyan végtelen mértani sort kaptunk, amelynek a kvóciensének abszolútértéke kisebb, mint 1. Emiatt a sor nyilván konvergens.

3. Tegyük fel, hogy $x \in \mathcal{H}$. Ekkor az előző tétel miatt $\eta \in \mathcal{H}$, azonban ez ellentmondás.

23.3. Konvergenciasugár

Adott hatványsor konvergenciasugara

$$\varrho := \sup\left\{|x - x_0| \,\middle|\, x \in \mathcal{H}\right\}.$$

Ha $\mathcal{H} = \{x_0\}$, akkor $\varrho := 0$.
Ha $\mathcal{H} = \mathbb{R}$, akkor $\varrho := \infty$.

23.4. Összegfüggvény tulajdonságai

23.4.1. Összegfüggvény folytonossága

Tegyük fel, hogy az $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvények folytonosak, továbbá a

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$$

egyenletesen konvergens. Ekkor $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ is folytonos.

23.4.2. Összefüggvény integrálhatósága

Tegyük fel, hogy az $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvényekre $f_n \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$, ahol $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, továbbá a

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$$

egyenletesn konvergens. Ekkor

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f_n(x) \,\mathrm{d}x \,.$$

23.4.3. Összegfüggvény deriválhatósága

Tegyük fel, hogy az $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak, továbbá az

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$$

és

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = g(x)$$

egyenletesen konvergensek. Ekkor $g(x) = f'(x)$, azaz

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

23.5. Függvény előállítása hatványsorként

1. Tegyük fel, hogy f egy hatványsor összegeként reprezentálható. Ekkor az előállítás egyértelmű.
2. Ha

   $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

   akkor

   $$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

23.6. Taylor sor

Legyen adott $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ függvény, mely egy $x_0 \in (a,b)$ pontban végtelen sokszor differenciálható. Ekkor az f függvény x_0 körüli Taylor sora

$$T(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

23.6.1. Konvergencia feltétele

Tegyük fel, hogy az $f : (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \mapsto \mathbb{R}$ függvény végtelen sokszor differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy $\exists K$, melyre $\forall k$ és $\forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ esetén

$$\left|f^{(k)}(x)\right| \leq K$$

teljesül. Ekkor

$$f(x) = T(x)$$

teljesül $\forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ esetén.

Bizonyítás
Legyen

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Ekkor a Lagrange-féle maradéktagot használva

$$f(x) - T(x) = \lim_{n\to\infty}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

ahol ξ x és x_0 között van. Ekkor azonban

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leq K \lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy $T(x)$ egyenletesen konvergál $f(x)$-hez.

23.7. Speciális függvények Taylor sora

1. $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

2. $$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

3. $$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$