LA-DM II előadás

2024.05.15.
Lászlóffy András
Bércesné Dr. Novák Ágnes előadásai nyomán

1

Összefüggő gráf éleinek száma

Definíció: Ha egy gráfban bármely két pont között van út, akkor a gráfot összefüggőnek (öf.) nevezzük.

Tétel: Az n pontú összefüggő gráfnak legalább $n-1$ éle van.

Bizonyítás: teljes indukcióval.

Ha a G n pontú öf. gráfnak van levele (1 fokú csúcsa)

→ ezt törölve a hozzá tartozó éllel épp $n-1$ pontú és $n-2$ élű öf. gráfot kapunk, indukciós feltétel teljesül.

– ezt a lépést ismételjük, amíg el nem jutunk az 1 pontú és 0 élű gráfhoz

Ha valamely, m pontú gráfnál nincs levél, akkor a legkisebb fokszám legalább 2 (hisz a gráf összefüggő). Ennek fokainak száma legalább $2m$, élek száma legalább m (fele a fokszámok összegének), ami nagyobb, mint $m-1$.

2

Összefüggő gráf – kör

Definíció: Az olyan <u>összefüggő</u> gráfokat, melyekben minden pont foka 2, **kör**nek nevezzük.

Tétel: Ha egy gráfban minden pont foka legalább 2, akkor a gráfban van kör.

Bizonyítás: leghosszabb út módszer:

- L út a G gráf egy leghosszabb útja, ennek egy végpontja v
- v-re illeszkedik egy másik él is, de ez benne van a leghosszabb útban, különben nem ez lenne a leghosszabb
- ez csak úgy lehet, ha v az út másik végpontja is, azaz kör.

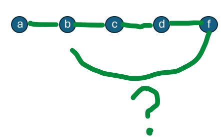
Megj.: hurokél is kör, 1 pont ami 2 fokú.

3

Mikor van kör a gráfban?

Tétel: Ha egy n pontú gráfnak legalább n éle van, akkor van benne kör.

Bizonyítás: teljes indukcióval



- $n=1$-re hurokél, igaz.
- G: $n+1$ csúcsú és $n+1$ élű gráf
  - ha van levél, ezt törölve élével együtt indukciós feltevés teljesül
  - visszavesszük a törölt csúcsot, de ez tartalmazza a fenti részgráfot, amiben van kör, így G-ben is van kör
- G-ben nincs levél, ekkor minden pont foka legalább 2 → előző tétel szerint G-ben van kör

4

Fa = fagráf

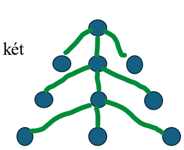
Def.: Összefüggő körmentes gráfot fagráfnak (fának) nevezzük

Tétel: Az n pontú fagráf éleinek száma $n-1$

Biz.: fenti tételekből közvetlenül (HF)

Tétel: Egy összefüggő gráf a.cs.a. fa, ha bármely két pontja között pontosan egy út van.

Tétel: Az n pontú $n-1$ élű összefüggő gráf fa



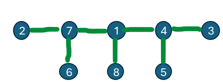
5

Fa – Prüfer-kód

Fa kódolása számsorozattal

n csúcsú fa → $n-2$ szám, kölcsönös megfeleltetés

mindig a legkisebb levelet töröljük, szomszédját leírjuk



Törölt csúcs	2	3	5	4	6	7	1
Szomszéd	7	4	4	1	7	1	8

Prüfer-kód

6

Fa – visszaállítás Prüfer-kódból

Prüfer-kód: 744171 → 6 szám, 8 csúcs

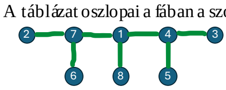
Hiányzó“ számok”: 2, 3, 5, 6, 8

Állítsuk vissza a táblázatot:
Prüfer-kóda alul +8 (csúcsok száma)

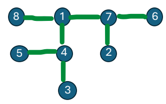
Törölt csúcs	2	3	5	4	6	7	1
Szomszéd	7	4	4	1	7	1	8

Felső sort kell visszaállítani, balról jobbra választjuk a legkisebb “ hiányzó számot”. Ha egy szám nem szerepel többször az alsó sorban, hozzávesszük a “hiányzó számokhoz”.

A táblázat oszlopai a fában a szomszédok.



Izomorfak? Sőt!



7

Fa – Prüfer-kód egyértelműsége

- Fa → Prüfer-kód egyértelmű, adott recept alapján készíthető csak el
- Prüfer-kód → fa
  - $n-1$ él, n csúcs, eddig jó
  - körmentes? Indirekt módon bizonyítjuk

Törölt csúcs	*a*		*b*	*c*		*d*
Szomszédja						

a, *b*, *c*, *d* különböző → az alsó sorban is *a*, *b*, *c*, *d*

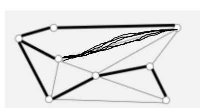
de: *a* nem lehet alul helyen → ellentmondás

Tehát: *n* pont, *n*-1 él, körmentes → fa

8

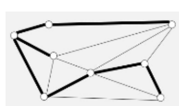
Részgráf

Az R gráf a G részgráfja, ha R megkapható G-ből pontok és élek elhagyásával.



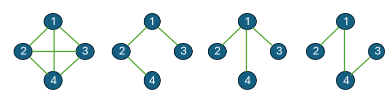
Feszítő részgráf: R tartalmazza G minden pontját. Csak éleket hagyunk el.

Feszítőfa (faváz): Olyan feszítő részgráf, amelyik fa.



9

Hány feszítőfája van az alábbi gráfnak?

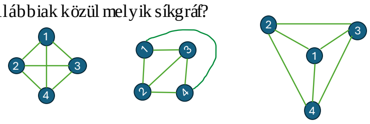


10

Síkgráfok

Def.: Egy gráf síkgráf = síkba rajzolható gráf, ha lerajzolható úgy a síkba, hogy élei csak a gráf csúcsiaban metszik egymást

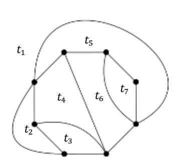
Alábbiak közül melyik síkgráf?



Fáry-Wagner-tétel: Minden síkgráf lerajzolható egyenes szakaszokkal.

11

Játék – rajzoljunk egyszerű, összefüggő síkgráfot



Pontok száma: $p = 8$

Élek száma: $e = 13$

Tartományok száma (végtelen tartománnyal együtt): $t = 7$

Euler poliéder tétel: $\boxed{p - e + t = 2}$

12

Euler poliéder tétel

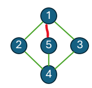
Tétel: A G összefüggő egyszerű síkgráf pontjainak (p), éleinek (e) és területeinek (végtelen területet is beleértve) (t) száma között fennáll az alábbi összefüggés: $p - e + t = 2$

Biz.: konstruktív, pontról pontra megrajzolom a gráfot

- 1 csúcs, 0 él, 1 tartomány ✓
- 2 csúcs, 1 él, 1 tartomány ✓

Teljes indukció, TFH. G-re teljesül, ehhez

1. új csúcsot veszek fel, ekkor kell egy új él is, hogy összefüggő maradjon
   $\rightarrow p' = p + 1, e' = e + 1, t' = t,$
   $p' - e' + t' = p + 1 - (e + 1) + t = p - e + t = 2$
2. új élet veszek fel meglévő csúcsok között
   $\rightarrow p' = p, e' = e + 1, t' = t + 1,$
   $p' - e' + t' = 2$ (HF)



13

Euler poliéder tétel következményei

Tétel 1: Ha egy összefüggő, egyszerű síkgráf pontjainak száma legalább 3, akkor $e \leq 3p - 6$.

Tétel 2: Ha a G egyszerű síkgráf, akkor minimális fokszáma legfeljebb 5.

Tétel 3: Ha az összefüggő síkgráf pontjainak száma legalább 3, és nincs 3 hosszú köre, akkor $e \leq 2p - 4$.

14

Euler poliéder tétel – Következmény 1

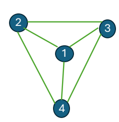
Tétel 1: Ha egy összefüggő, egyszerű síkgráf pontjainak száma legalább 3, akkor $e \leq 3p - 6$.

Biz.: egyszerű gráf, ezért minden területet legalább 3 él határol

$3t \leq 2e$ (lehet több, mint 3), egy él 2 területet határol.

Síkgráf: $p - e + t = 2$

$$p - e + \frac{2e}{3} \geq 2 \Rightarrow \boxed{e \leq 3p - 6}$$



15

K_5 Kuratowski-gráf

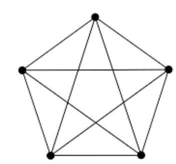
Alkalmazzuk az előbbi következményt

Tétel 1: $e \leq 3p - 6$

K_5-ben $e = 10, p = 5$, azaz

$10 \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$ ellentmondás!

Tehát K_5 **nem rajzolható síkba**



16

Euler poliéder tétel – Következmény 2

Tétel 2: Ha a G egyszerű síkgráf, akkor minimális fokszáma legfeljebb 5.

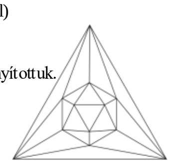
Biz.: Indirekt bizonyítás, TFH. minimális fokszám 6 is lehet.

$$e \leq 3p - 6 \rightarrow 2e \leq 6p - 12$$

Fokszámok összege = élek kétszerese (kézfogási tétel)
Azaz a min. fokszám és pontok számának szorzatára

$$6p \leq 2e$$

A kettő egyszerre nem teljesülhet, ezzel a tételt bizonyítottuk.



17

Euler poliéder tétel – Következmény 3

Tétel 3: Ha az összefüggő síkgráf pontjainak száma legalább 3, és nincs 3 hosszú köre, akkor $e \leq 2p - 4$.

Biz.: Minden tartományt legalább 4 él határol.

$$4t \leq 2e$$

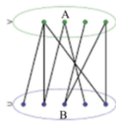
Beírva Euler poliéder tételébe

$$p - e + t = 2 \rightarrow p - e + \frac{e}{2} \geq 2$$
$$e \leq 2p - 4$$

18

Ismétlés: páros gráfok

Valamely gráf páros, ha csúcsai két diszjunkt osztályba sorolhatók, és az egy osztályba tartozó csúcsok között nincsen él.

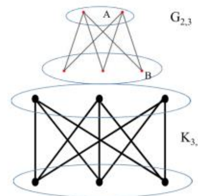


Az ábrán az A halmazhoz tartozó csúcsok között nincsen él, és hasonlóan a B halmazhoz tartozó csúcsok között sincsen él

A megengedett élek két különböző osztályhoz tartozó csúcsot kötnek össze, egy A-belit egy B-belivel

19

Euler poliéder tétel – Következmény 3 alkalmazás páros gráfokra (min. 4 hosszú körök)



$G_{2,3}$ síkba rajzolható (HF)

$e = 6, p = 5$

$e \leq 2p - 4 \rightarrow 6 \leq 2 \cdot 5 - 4$✓

$K_{3,3}$: pl. három ház, közművek: villany, víz, gáz

$e = 9, p = 6$

$e \leq 2p - 4 \rightarrow 9 \leq 2 \cdot 6 - 4 = 8$

ellentmondás

Köv.: $K_{3,3}$ Kuratowski-gráf nem rajzolható síkba

20

Kuratowski-tétel

Tétel: Valamely gráf a.cs.a. síkgráf, ha nem tartalmaz K_5-tel vagy $K_{3,3}$-mal *homeomorf* részgráfot.

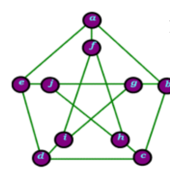
Homeomorf:

- élet új csúccsal "megszakíthatok"
- 2 fokszámú csúcsokat "törölhetek" az élek összevonásával

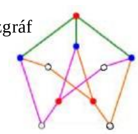
Pl.:

21

Példa – Petersen gráf



Részgráf



Köv.: a Petersen-gráf nem síkgráf.

22

Poliéder

Def.: A poliéder olyan test, amelynek oldallapjai sokszögek.

Tétel: Poliéderekre teljesül az Euler poliéder tétel, $p - e + t = 2$ (lásd később)

Szabályos testek: oldallapok szabályos sokszögek

térszögletek (csúcsok) egybevágóak

Hány szabályos test van?

23

Szabályos (platóni) testek

- Egy csúcsból kiinduló élek száma legyen legyen k
- Fokszámok összege $pk = 2e$

$\rightarrow p = \frac{2e}{k}$

- Egy oldal szabályos n-szög
- Összesen t oldal

$tn = 2e$

$\rightarrow t = \frac{2e}{n}$

$$\frac{2e}{k} - e + \frac{2e}{n} = 2$$

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{n} = \frac{1}{e} + \frac{1}{2} \rightarrow \frac{2}{k} + \frac{2}{n} > 1$$

$$\frac{2n}{kn} + \frac{2k}{kn} > 1 \rightarrow 2n + 2k - kn > 0$$

$$(n-2)(k-2) < 4$$

24

Szabályos (platóni) testek

$$(n-2)(k-2) < 4$$

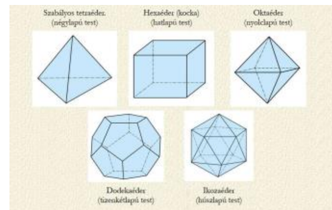
Ez csak úgy lehet, ha a szorzótényezők az alábbiak egyike:

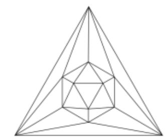
1. 1×1
2. 1×2
3. 1×3
4. 2×1
5. 3×1

n-2	k-2	n	k	e	t	p	
1	1	3	3	6	4	4	tetraéder
1	2	3	4	12	8	6	oktaéder
1	3	3	5	30	20	12	ikozaéder
2	1	4	3	12	6	8	hexaéder
3	1	5	3	30	12	20	dodekaéder

25

Szabályos (platóni) testek – síkba rajzolhatóak?





26

Síkba és gömbre rajzolható gráfok

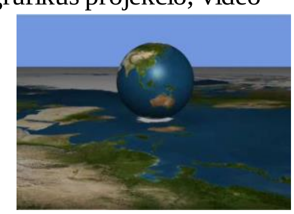
- Sztereografikus projekció

Tétel
Egy gráf pontosan akkor síkbarajzolható, ha gömbre rajzolható.

Bizonyítás
Sztereografikus projekció. A gömböt a síkra helyezzük, (déli pólus), majd az északi pólusból egyeneseket húzunk a gráf pontjaihoz (éleinek pontjaihoz), ezen egyeneseknek a gömbbel levő másik metszéspontja lesz a vetített képpont.

27

Sztereografikus projekció, videó



http://www.youtube.com/watch?v=Utj1qsrBLdE

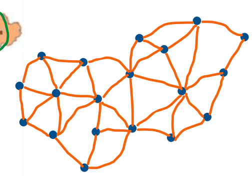
28

Térkép, gráf színezése – pl. vármegyék

5 színnel kiszínezhető

29

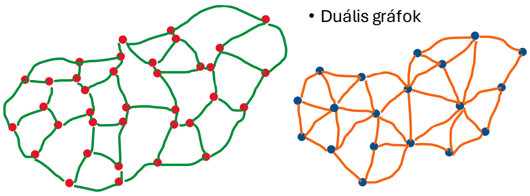
Térkép, gráf színezése – pl. vármegyék



30

Térkép, gráf színezése – pl. vármegyék

- Duális gráfok

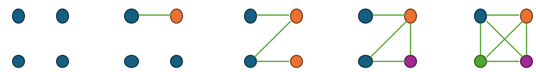


- Tartományok színezése bal oldalt ekvivalens a jobb oldali gráf csúcsainak színezésével

31

Gráf színezése

A csúcsokhoz színeket rendelünk úgy, hogy szomszédos csúcsok nem lehetnek azonos színűek.



G_1	G_2	G_3	G_3	G_3
izolált pontokból áll 1 színnel kiszínezhető	egy él 2 színnel kiszínezhető	3 él 2 színnel kiszínezhető	4 él 3 színnel kiszínezhető	6 él 4 színnel kiszínezhető

32

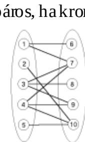
Gráf színezése – kromatikus szám

Def.: $\chi(G)$ a gráf ú.n. kromatikus száma az a szám, ahány szín legalább kell a G gráf csúcsainak kiszínezéséhez, hogy a szomszédok más színűek legyenek.

Az azonos színű pontok halmazát színosztálynak nevezzük

Tétel: Legalább egy élet tartalmazó gráf a.cs.a páros, ha kromatikus száma 2.

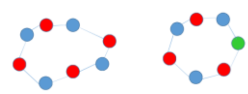
Biz.: ábra alapján triviális



33

Kör kromatikus száma

Tétel: páros hosszú körök kromatikus száma 2, páratlan hosszú körök kromatikus száma 3.

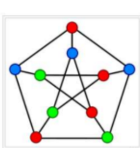


Kérdés: Van-e páros gráf a dián?

Tétel: az n pontú teljes gráf kromatikus száma n.

34

Petersen gráf kromatikus száma



A Petersen-gráf jó csúcsszínezése 3 színnel, ami a legkevesebb lehetséges szín (kromatikus szám=3).

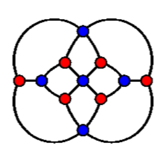
A Petersen-gráf nevezetes speciális gráf:

10 csúcs, 15 él, 3 reguláris (minden csúcs fokszáma 3)

Julius Petersen -1898-ban konstruálta

35

Hresnel gráf kromatikus száma 2



36

Négyszíntétel

Tétel: Ha G síkbarajzolható gráf, akkor $\chi(G) \leq 4$.
Érdekességek:
- George Guthrie fogalmazta meg
- Möebius sikertelenül próbálta bizonyítani 1840-ben
- Haaken és Appel számítógép segítségével bizonyították 1976-ban

37

Ötszíntételt bizonyítjuk – táblánál

38