# Lin Alg DM II. 6-7. gyakorlat: Bázistranszformáció, SAS-TAS

2024. március 21.

## 1 Elméleti összefoglaló

#### Proposition 1. Bázistranszformáció

Adott egy V vektortér annak  $[\mathbf{b}] = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots \underline{b}_n\}$  bázisával. Ekkor, ha szeretnénk áttérni egy másik,  $[\mathbf{b}'] = \{\underline{b}'_1, \underline{b}'_2, \dots, \underline{b}'_n\}$  bázisra, azt a következő transzformációval tudjuk megtenni:

$$\underline{x}_{[\mathbf{b}']} = U^{-1}\underline{x}_{[\mathbf{b}]} \tag{1}$$

ahol

$$U = \begin{bmatrix} \underline{b}'_{1,[\mathbf{b}]} & \underline{b}'_{2,[\mathbf{b}]} & \dots & \underline{b}'_{n,[\mathbf{b}]} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

**Megjegyzés 1.** A bázistranszformáció az adott vektornak a "régi"  $[\mathbf{b}]$  bázisban felírt koordinátás alakjából ugyanennek a vektornak az "új"  $[\mathbf{b}']$  bázisban felírt koordinátás alakját adja meg.

**Megjegyzés 2.** Az U mátrixban azon "új" [ $\mathbf{b}'$ ] bázis elemeit rakjuk oszlopvektorként egymás mellé, amelyre szeretnénk áttérni, de figyelni kell, hogy a "régi" [ $\mathbf{b}$ ] bázisban kell felírni [ $\mathbf{b}'$ ] elemeit!

Megjegyzés 3. Az (1) összefüggés felírható a következő formában is:

$$\underline{x}_{[\mathbf{b}]} = U\underline{x}_{[\mathbf{b}']} \tag{3}$$

Vagyis az U segítségével az adott vektorunknak az "új" koordinátás alakjából a "régi" koordinátás alakját kapjuk meg. De ha az U inverzét használjuk, akkor a "régiből" az "újat", mint (1)-nél.

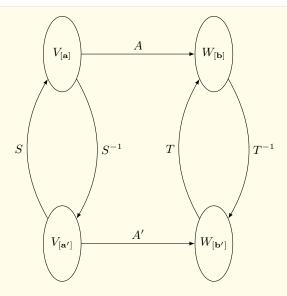
 $\mathbf{Megjegyzes}$  4. A  $[\mathbf{b}']$ -ről  $[\mathbf{b}]$ -re való áttérés mátrixa a  $[\mathbf{b}]$ -ről  $[\mathbf{b}']$ -re való áttérés mátrixának az inverze.

### Proposition 2. "TAS"

Adott egy  $L:V\to W$  lineáris leképezés. Legyen a kiindulási tér bázisa  $[\mathbf{a}]=\{\underline{a}_1,\underline{a}_2,\ldots,\underline{a}_n\}$ , valamint a képtér bázisa  $[\mathbf{b}]=\{\underline{b}_1,\underline{b}_2,\ldots,\underline{b}_k\}$ , és legyen az L lineáris leképezés mátrixa ezen bázispárban A. Továbbá legyen a kiindulási tér egy másik bázisa  $[\mathbf{a}']=\{\underline{a}'_1,\underline{a}'_2,\ldots,\underline{a}'_n\}$ , valamint a képtér egy másik bázisa  $[\mathbf{b}']=\{\underline{b}'_1,\underline{b}'_2,\ldots,\underline{b}'_k\}$ . Ekkor az A mátrix ezen "másik" bázisokra vonatkoztatott A' megfelelőjét megkapjuk a következőképp:

$$A' = T^{-1}AS,$$

ahol S és T áttérési mátrixok, melyek az  $\underline{x} = S \cdot \underline{x}'$  kiindulási térbeli, és az  $\underline{y} = T \cdot \underline{y}'$  képtérbeli transzformációkat definiálják. (Itt a változóvektor eredeti bázisban felírt koordinátavektorát  $\underline{x}$ , az új bázisban felírtat  $\underline{x}'$  jelöli. Hasonlóan, a régi és az új bázisban felírt képvektorok y és y'.)



Megjegyzés 5. Levezetjük a fenti összefüggést. A hozzárendelési szabály az eredeti és az új bázispárban az alábbi:

$$\underline{y} = A\underline{x} , \quad \underline{y}' = A'\underline{x}'$$

Az összefüggést a régi és az új koordináták között megadják a bázistranszformációk mátrixai:  $\underline{x} = S \cdot \underline{x}', \underline{y} = T \cdot \underline{y}'$ . Ekkor:

$$\underline{y}' = T^{-1}\underline{y} = T^{-1}A\underline{x} = \underbrace{T^{-1}AS}_{A'}\underline{x}'.$$

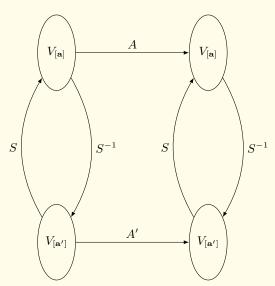
### Proposition 3. "SAS"

Adott egy  $L:V\to V$  lineáris leképezés és annak A mátrixa. Legyen kiindulási és a képtérnek a bázisa  $[\mathbf{a}]=\{\underline{a}_1,\underline{a}_2,\ldots,\underline{a}_n\}$ . Továbbá legyen ugyanezen két térnek egy másik bázisa  $[\mathbf{a}']=\{\underline{a}'_1,\underline{a}'_2,\ldots,\underline{a}'_n\}$ . Ekkor az A mátrix ezen bázisokra vonatkoztatott A' megfelelőjét megkapjuk a következőképp:

$$A' = S^{-1}AS,$$

ahol ${\cal S}$ a bázistranszformáció mátrixa.

Megjegyzés 6. Ez az eset a "TAS" egy speciális esete, amikor a két transzformációs mátrix megegyezik: T = S.



Megjegyzés 7. A "SAS" leggyakoribb alkalmazása az, amikor a leképezés sajátvektorainak bázisára térünk át. Ekkor a leképezés mátrixa diagonális lesz, főátlójában a sajátértékekkel.

# 2 Feladatok: Bázistranszformáció, SAS, TAS

**Feladat 1.** Az  $\underline{x}$  vektor koordinátavektora az  $\{\underline{i}, \underline{j}\}$  bázisban  $\underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Mik lesznek ugyanezen  $\underline{x}$  vektornak a koordinátái, ha áttérünk a  $\underline{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  és  $\underline{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  bázisra?

**Feladat 2.** Adjuk meg azt a mátrixot, amely egy adott vektornak a  $\underline{c}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $\underline{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$  bázisban felírt koordinátás alakjából az  $\{\underline{i}, j\}$  bázisban felírt koordinátás alakját adja meg!

**Feladat 3.** Adjuk meg azt a bázistranszformációs mátrixot, ami egy adott vektor  $\{\underline{i},\underline{j}\}$  bázisban felírt koordinátás alakjából a  $\underline{c}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $\underline{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$  bázisban felírt koordinátás alakját adja meg!

**Feladat 4.** Adjuk meg azt a bázistranszformációt, amely a  $\underline{c}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ,  $\underline{c}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\underline{c}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$  bázisban megadott

koordinátás alakból a  $\underline{d}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \underline{d}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \underline{d}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$  bázisban felírt koordinátás alakot állítja elő!

Feladat 5. Adott az  $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$  lineáris leképezés mátrixa, ha mind a kiindulási, mind a képtérben a kanonikus bázist használjuk:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Írjuk fel az L leképezés mátrixát, ha a kiindulási térben a bázis  $[\mathbf{a}']$ , melynek vektorai  $\underline{a}'_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\underline{a}'_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , a képtérben pedig  $[\mathbf{b}']$ , melynek vektorai  $\underline{b}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\underline{b}'_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\underline{b}'_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ !

**Feladat 6.** Legyen adott az  $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$  leképezés, melynek mátrixa a kiindulási és a képtérben egyaránt a kanonikus bázist tekintve

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Adjuk meg azt a mátrixot, amely ugyanezt a leképezést írja le, azonban a kiindulási térben a  $[\mathbf{c}] = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3\}$ bázist, a képtérben pedig a  $[\mathbf{d}] = \{\underline{d}_1, \underline{d}_2\}$  bázist tekintve, ahol

$$\underline{c}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$
 ,  $\underline{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  ,  $\underline{c}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$  ,  $\underline{d}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  ,  $\underline{d}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$  !

**Feladat 7.** Adott az  $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$  lineáris leképezés, amelynek az  $[\mathbf{a}] = \{\underline{i}, \underline{j}\}$  bázisban felírt mátrixa  $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ .

a) Mi lesz ugyanezen leképezés mátrixa, ha áttérünk az

$$[\mathbf{a}'] = \{\underline{i} + j, -\underline{i} + j\}$$

bázisra mind a kiindulási, mind a képtérben?

- b) Mi lesz ugyanezen leképezés mátrixa, ha áttérünk az A mátrix sajátvektorainak bázisára mind a kiindulási, mind a képtérben?
- c) Mi lesz az eredeti A mátrix 5. hatványa?