LinAlgDM II. 8. gyakorlat: Diagonalizálhatóság

2024. március 22.

1 Elméleti összefoglaló

Definition 1. Algebrai multiplicitás

Legyen az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix egy sajátértéke λ. Azt mondjuk, hogy a λ sajátérték *algebrai multiplicitása (AM)* k, ha λ k-szoros gyöke A karakterisztikus polinomjának.

Megjegyzés 1. Az algebra alaptétele szerint egy n-ed fokú polinomnak a komplex számok halmazán pontosan n db gyöke van, ha a többszörös gyököket külön-külön számoljuk. (Ugyanennek a polinomnak a valós számok halmazán maximum n db gyöke van, de mi egyenlőre olyan mátrixokkal foglalkozunk, amelyek sajátértékei mind valósak, így n db valós gyökünk lesz).

Definition 2. Geometriai multiplicitás

Legyen az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix egy sajátértéke λ. A λ sajátérték *geometriai multiplicitása (GM)* alatt a hozzá tartozó sajátaltér dimenzióját értjük.

Megjegyzés 2. Egy sajátérték geometriai multiplicitása mindig kisebb vagy egyenlő, mint az algebrai multiplicitása ($GM \leq AM$)!

Proposition 3.

Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorai lineárisan függetlenek.

Theorem 4.

Tegyük fel, hogy az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix sajátvektorai bázist alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben. Ekkor az A mátrix felírható sajátvektorainak bázisában. A sajátvektorainak bázisában felírt mátrix (D-vel jelöljük) diagonális lesz, melynek főátlójában a sajátértékei szerepelnek.

Megjegyzés 3. Az A-t *diagonalizálhatónak* nevezzük, ha létezik a sajátvektoraiból álló bázis $\mathbb{R}^n$-ben.

Megjegyzés 4. Ehhez az szükséges, hogy minden sajátértékének algebrai és geometriai multiplicitása megegyezzen.

Megjegyzés 5. Az A mátrix diagonalizálását az S transzformációs mátrixszal végezzük, melynek oszlopai a sajátvektorokból álló bázis vektorai. Ekkor:

$$D = S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

2 Feladatok: Diagonalizálás

Feladat 1. Legyen az $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ mátrix egy lineáris leképezés mátrixa. Adjuk meg a sajátértékeit, sajátvektorait, sajátaltereit! Hány dimenziósak a sajátalterek? Adjuk meg az egyes sajátértékek algebrai multiplicitását (AM) és geometriai multiplicitását (GM)! Van-e sajátvektorokból álló bázis $\mathbb{R}^2$-en? Ha igen, írjuk fel ebben a bázisban a lineáris leképezés mátrixát! Adjuk meg a transzformációs mátrixot is!

Feladat 2. Legyen egy lineáris leképezés mátrixa $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Adjuk meg ennek a mátrixnak a sajátértékeit, sajátvektorait, sajátaltereit! Állapítsuk meg a sajátalterek dimenzióját! Döntsük el, hogy van-e sajátvektorokból álló bázis $\mathbb{R}^3$-ban! Ha van, ebben a bázisban írjuk fel a leképezés mátrixát!

Feladat 3. Legyen az $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ mátrix egy lineáris leképezés mátrixa. Adjuk meg ennek a mátrixnak a sajátértékeit, sajátvektorait, sajátaltereit! Hány dimenziósak lesznek a sajátalterek? Létezik-e sajátvektorokból álló bázis $\mathbb{R}^3$-ban? Ha igen, írjuk fel ebben a bázisban a lineáris leképezés mátrixát!