

# ADATSZERKEZETEK ÉS ALGORITMUSOK

Piros-Fekete Fa Törlés

# Piros-Fekete fák – törlés

Egy z csúcs törlése egy bináris keresőfából:

1. eset: z-nek nincs nem-nil gyereke

- töröljük a csúcsot ( a szülőt a nil-elemmel kötjük össze)

2. eset: z-nek egy nem-nil gyereke van

- töröljük a csúcsot ( a szülőt a gyerek-elemmel kötjük össze)

3. eset: z-nek két nem-nil gyereke van

- megkeressük a közvetlen rákövetkezőjét
  - átmásoljuk belőle az adatot z-be (z színe változatlan marad)
  - töröljük a rákövetkezőt (ennek csak 0 v. 1 gyereke lehet)
- Jelöljük y-nal a ténylegesen kitörölt elemet.

# Piros-Fekete fák – törlés

Ha a kitörölt elem (y) **piros** volt

## Tulajdonság és leírása

Igaz?

1. Minden csúcs piros vagy fekete
2. A gyökér fekete
3. Minden levél (nil[T]) fekete
4. Ha egy csúcs piros, mindkét gyerek fekete
5. Minden út egy csúcstól a leszármazott levelekig ugyanannyi fekete csúcsot tartalmaz

igen

igen

igen

igen

igen

Ebben az esetben nincs tennivaló.

# Piros-Fekete fák – törlés

Ha a kitörölt elem (y) fekete volt

## Tulajdonság és leírása

Igaz?

1. Minden csúcs piros vagy fekete
2. A gyökér fekete
3. Minden levél (nil[T]) fekete
4. Ha egy csúcs piros, mindkét gyerek fekete
5. Minden út egy csúcstól a leszármazott levelekig ugyanannyi fekete csúcsot tartalmaz

igen

???

igen

???

???

Az „elvesztett” fekete csúcsot kell „pótolni”.

# Piros-Fekete fák – törlés

- Ahhoz, hogy helyreállítsuk a fekete csúcsok számát minden úton, a gyerekének adjuk a kitörölt csúcs fekete színét
- Úgy képzeljük, hogy a gyerekének most van egy extra feketéje
  - Ha a gyerek színe fekete, akkor most dupla-fekete,
  - Ha a gyerek színe **piros**, akkor most piros-fekete
    - Ténylegesen nem változtatjuk a csúcsot a kódban, csak úgy vesszük, mintha...
- Ezzel a legnehezebb, 5. tulajdonságot teljesítjük
  - Cserébe az 1., 2. tulajdonságot nem
  - A gyerek se nem piros, se nem fekete.

# Piros-Fekete fák – törlés

- Az 1. tulajdonság helyreállítására ezt az „extra” feketét visszük felfelé a fában, míg a következők egyike igaz nem lesz:
  - x egy **piros**-fekete csúcsra mutat
    - Ekkor feketére színezzük, és kész
  - x a fa gyökerére mutat
    - Ha dupla-fekete, eltávolítjuk az egyik feketéjét, és kész, mert ha a gyökérből viszünk el egy extra feketét, akkor egyforma marad a levelekhez vezető utakon a feketék száma
- Olyan ponthoz érünk, ahol forgatásokkal és átszínezésekkel el tudjuk távolítani az extra feketét úgy, hogy nem sértjük meg a **piros**-fekete tulajdonságokat többé

# Piros-Fekete fák – törlés

**PF-FÁBÓL-TÖRÖL(T,z)** -- törlés, mint bináris keresőfából, majd p-f helyreállítás

```
if bal[z]=nil[T] or jobb[z]=nil[T]    -- jelölő strázsa
  then y←z                            -- 0 vagy 1 gyerek
  else y←FÁBAN-KÖVETKEZŐ(T,z)        -- 2 gyerek
if bal[y]≠nil[T]
  then x←bal[y]                       -- x az y 0 vagy 1 gyerekére mutat
  else x←jobb[y]
szülő[x] ←szülő[y]                   -- ha volt (egy) gyereke, befűzzük
if szülő[y]= nil[T]
  then gyökér[T]←x
  else if y = bal[szülő[y]]
    then bal[szülő[y]]←x
    else jobb[szülő[y]]←x
if y≠z
then kulcs[z]←kulcs[y]               -- ha két gyerek volt (ha van egyéb mező, azt is)
```

# Piros-Fekete fák – törlés

```
PF-FÁBÓL-TÖRÖL(T,z)  -- folytatás
if szín[y]=FEKETE      -- ha y PIROS, akkor PF tulajdonság OK
                        (fm nem változott sehol,piros-piros szülő-gyerek
                        kapcsolat nem keletkezett.)
then PF-FÁBÓL-TÖRÖL-JAVÍT(T,x)
                        -- az x ténylegesen a törlendőnek a gyereke!

return y
```



# Piros-Fekete fák – törlés

- Mi sérül?
  - Ha az  $y$  fekete volt, akkor most minden út, ami az  $y$ -n keresztül haladt, eggyel kevesebb fekete pontot fog tartalmazni
    - $y$  őseire nem teljesül a 5. tulajdonság
- Amikor  $y$ -t eltávolítjuk, fekete értékét „továbbadjuk” a gyerekének
  - Ha  $x$  is fekete volt, akkor most „kétszeresen fekete” lesz
    - Ez sérti az 1. tulajdonságot

# Piros-Fekete fák – törlés

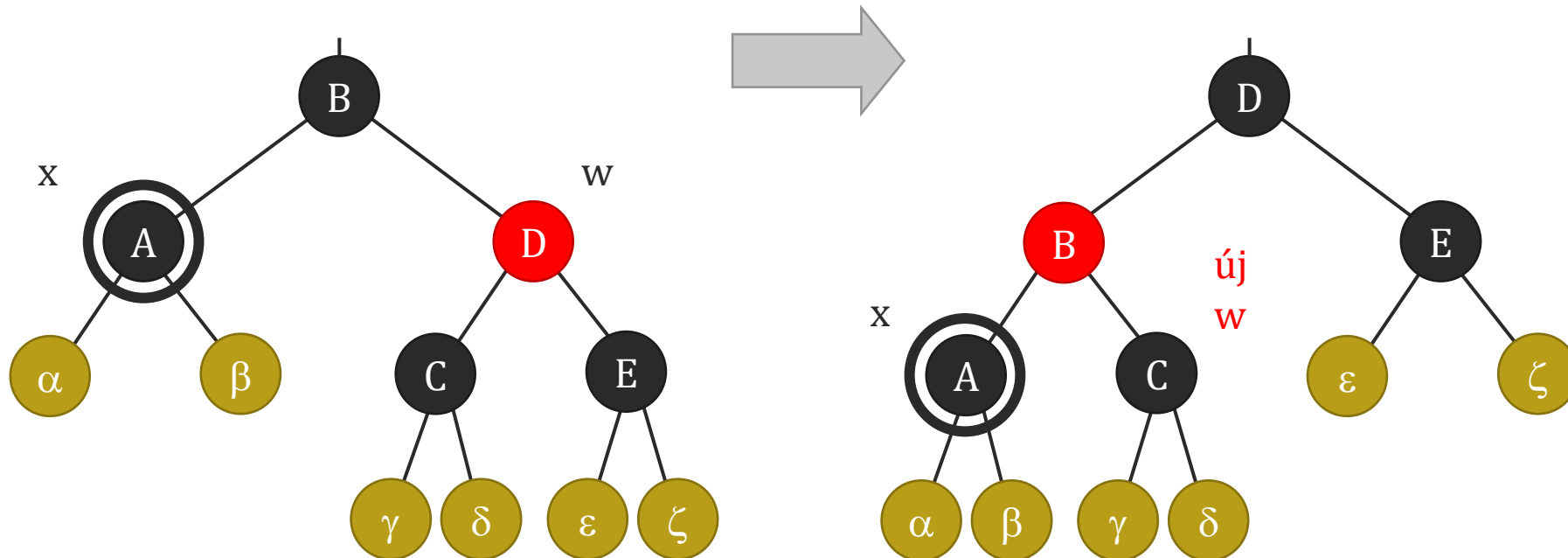
- Lehetséges esetek:

- Csak azokat vesszük figyelembe, ahol  $x$  balgyerek, ahol jobb, az szimmetrikusan adódik.
- $w$  jelöli  $x$  testvérét ( $w \leftarrow \text{jobb}[\text{szülő}[x]]$  )

1. eset:  $x$  testvére  $w$  piros
2. eset:  $x$  testvére  $w$  fekete és  $w$  mindkét gyereke fekete
3. eset:  $x$  testvére  $w$  fekete,  $w$  balgyereke piros, jobbgyereke fekete
4. eset:  $x$  testvére  $w$  fekete,  $w$  jobbgyereke piros

# 1. eset

- x duplán fekete, és a testvére (w) piros
  - w-nek van fekete fia
  - így w és szülő[x] színét felcserélve és balra forgatva a szülő[x]-t, az x új testvére fekete lesz
  - 2., 3., vagy 4. eset



# Piros-Fekete fák - törlés

- 1. eset: x testvére w piros

- Pszeudokód:

```
if szín[w]=PIROS
```

```
then szín[w]←FEKETE
```

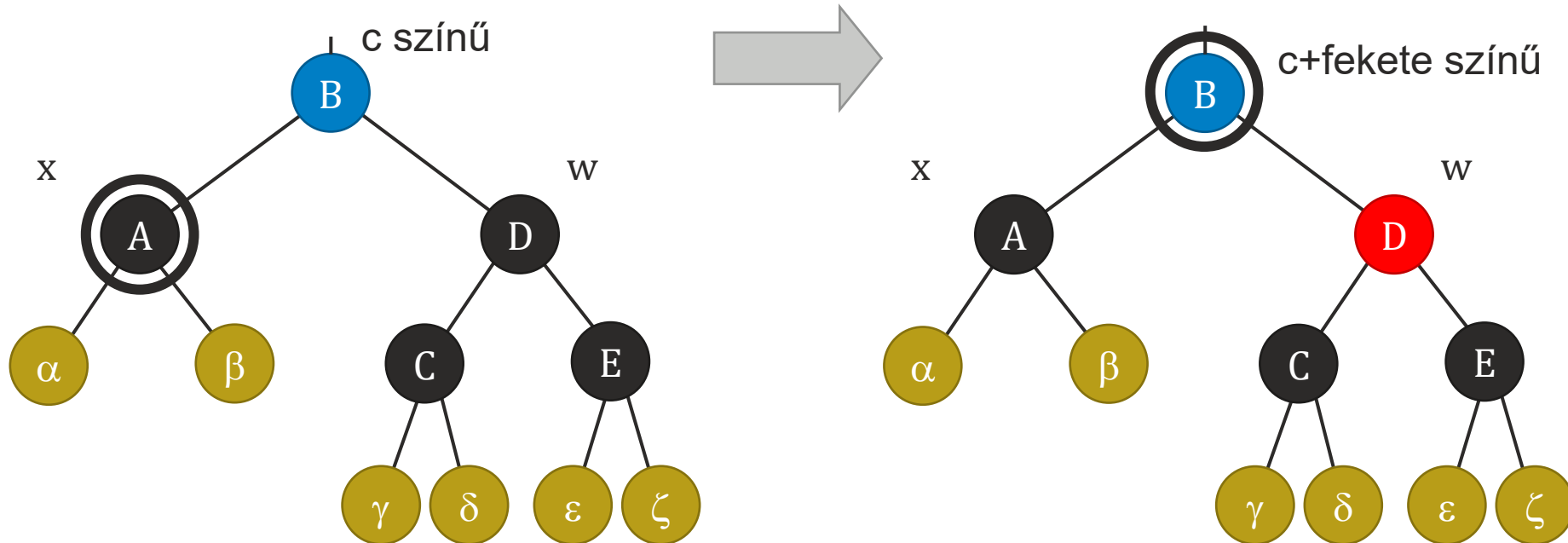
```
    szín[szülő[x]]←PIROS
```

```
    BALRA-FORGAT (T, szülő[x])
```

```
    w←jobb[szülő[x]]
```

## 2. eset

- A w is fekete, így nézzük az ő gyerekeinek a színét
  - ha mindkét fia fekete: elvehetünk egy feketét x-től és w-től így x egyszer fekete, w piros lesz, és szülő[x] kap extra feketét,
  - Ezután folytatjuk a helyreállítási ciklust a szülő[x]-re



# Piros-Fekete fák - törlés

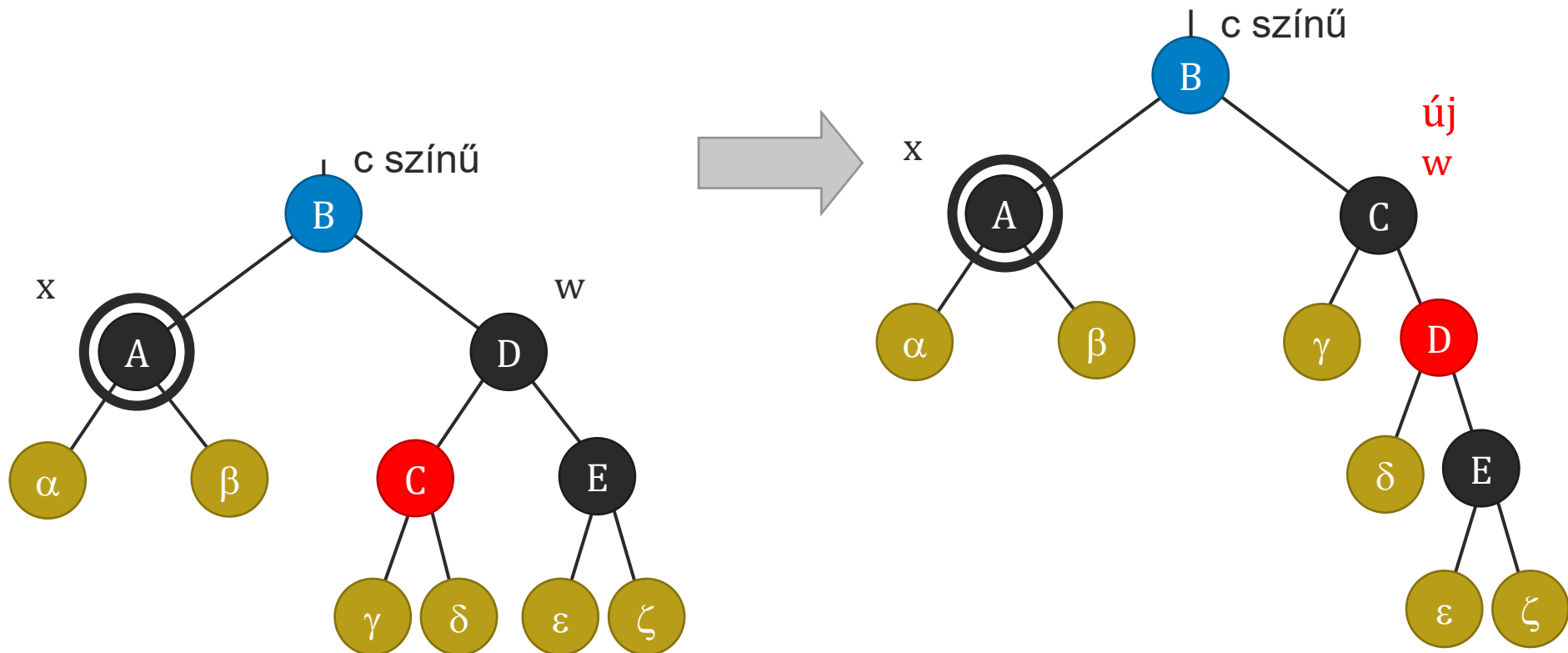
- 2. eset: x testvére w fekete és w mindkét gyereke fekete

- Pszeudokód:

```
if szín[bal[w]]=FEKETE and  
   szín[jobb[w]]=FEKETE  
then szín[w]←PIROS  
     x←szülő[x]
```

# 3. eset

- w fekete, bal fia piros, jobb fia fekete
  - w és bal[w] színét cseréljük, majd jobbforgatás w-re, az új w fekete, és jobb fia piros
  - A 4. esettel folytatjuk



# Piros-Fekete fák - törlés

- 3. eset: x testvére w fekete, w balgyereke piros, jobbgyereke fekete

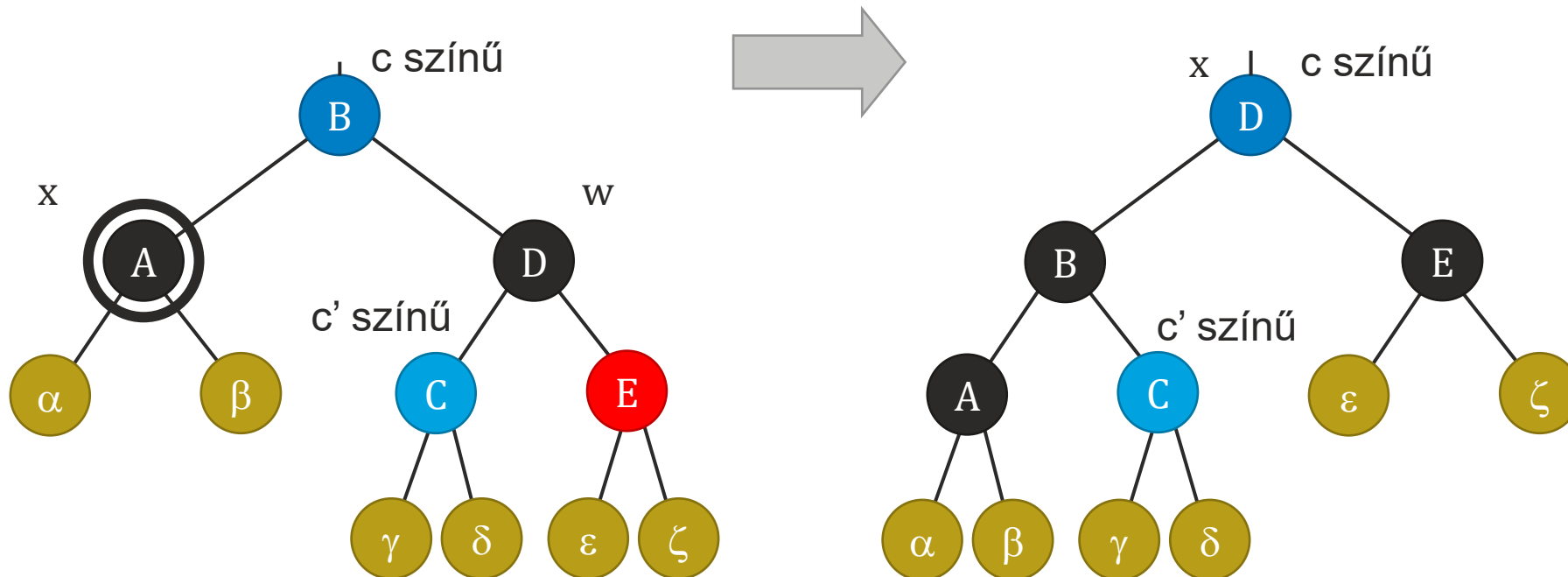
- Pszeudokód:

```
else if szín[jobb[w]]=FEKETE
    then szín[bal[w]]←FEKETE;
        szín[w]←PIROS,
        JOBBRA-FORGAT(T,w);
        w←jobb[szülő[x]]
```



## 4. eset

- $w$  fekete és jobb fia piros
  - $w$ , szülő[ $x$ ] és jobb[ $w$ ] színét váltjuk, majd szülő[ $x$ ] körül balrafordítva úgy törölhetjük le az  $x$  extra feketéjét, hogy a PF tulajdonság marad
  - Ezután kész (a fa gyökerét feketére színezzük)



# Piros-Fekete fák - törlés

- 4. eset: x testvére w fekete, w jobbgyereke piros

- Pszeudokód:

```
szín[w] ← szín[szülő[x]]  
szín[szülő[x]] ← FEKETE;  
szín[jobb[w]] ← FEKETE  
BALRA-FORGAT(T, szülő[x])  
x ← gyökér[T]
```

# Piros-Fekete fák – algoritmusok

## PF-FÁBÓL-TÖRÖL-JAVÍT(T,x)

```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x]= FEKETE
do if x = bal[szülő[x]]
    then w←jobb[szülő[x]]
        if szín[w]=PIROS
            then szín[w]←FEKETE; szín[szülő[x]]←PIROS
                BALRA-FORGAT(T,szülő[x]); w←jobb[szülő[x]]
        if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
            then szín[w]← PIROS; x←szülő[x]
        else if szín[jobb[w]]= FEKETE
            then szín[bal[w]]←FEKETE; szín[w]←PIROS
                JOBBRA-FORGAT(T,w); w←jobb[szülő[x]]
            szín[w]← szín[szülő[x]]
            szín[szülő[x]]←FEKETE; szín[jobb[w]]←FEKETE
            BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
            x←gyökér[T]
    else ua., mint a then, csak a bal és jobb felcserélve
szín[gyökér[T]]←FEKETE
```

# Piros-Fekete fa

## Jelölések:

- Fekete csúcs
- Piros csúcs
- NIL csúcs
- Dupla fekete

20

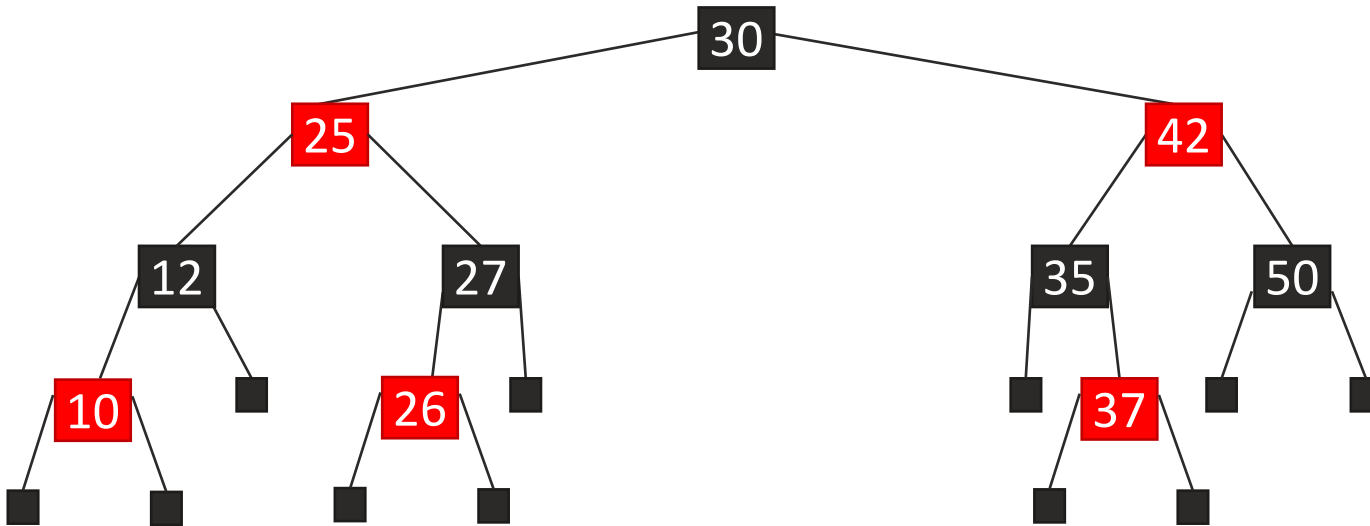
20



20

# Törlés utáni kiegyensúlyozás

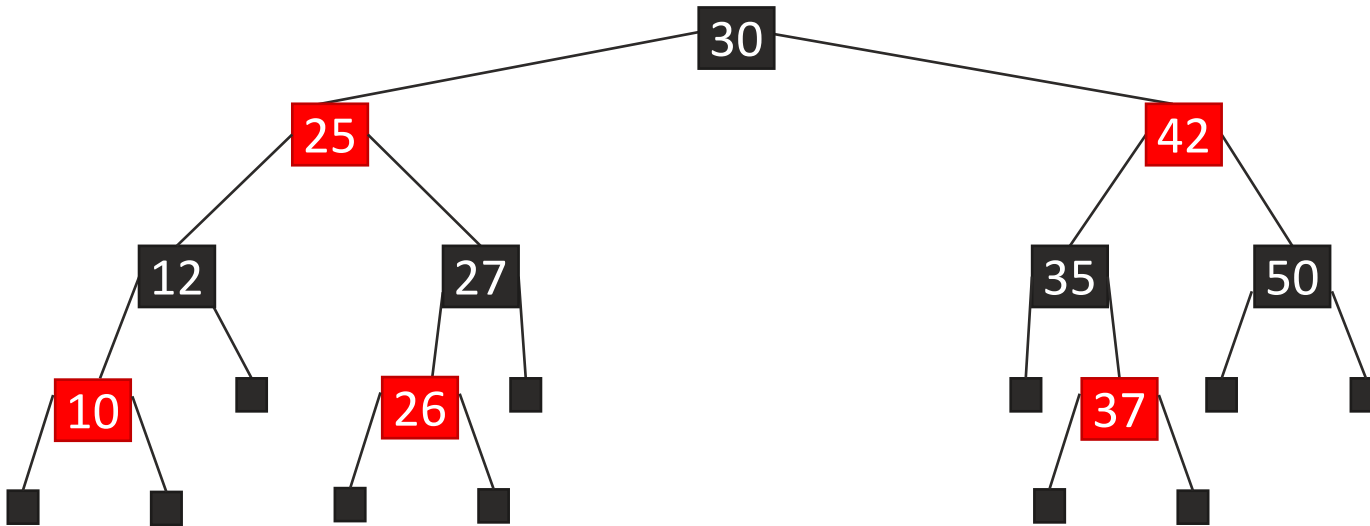
- Töröljünk ki elemeket:



```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x]= FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w←jobb[szülő[x]]
    if szín[w]=PIROS then
      szín[w]←FEKETE;
      szín[szülő[x]]←PIROS
      BALRA-FORGAT(T,szülő[x])
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w]← PIROS
      x←szülő[x]
    else if szín[jobb[w]]= FEKETE then
      szín[bal[w]]←FEKETE
      szín[w]←PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T,w)
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w]← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]]←FEKETE
    szín[jobb[w]]←FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x←gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x]←FEKETE
```

# Törlés utáni kiegyensúlyozás

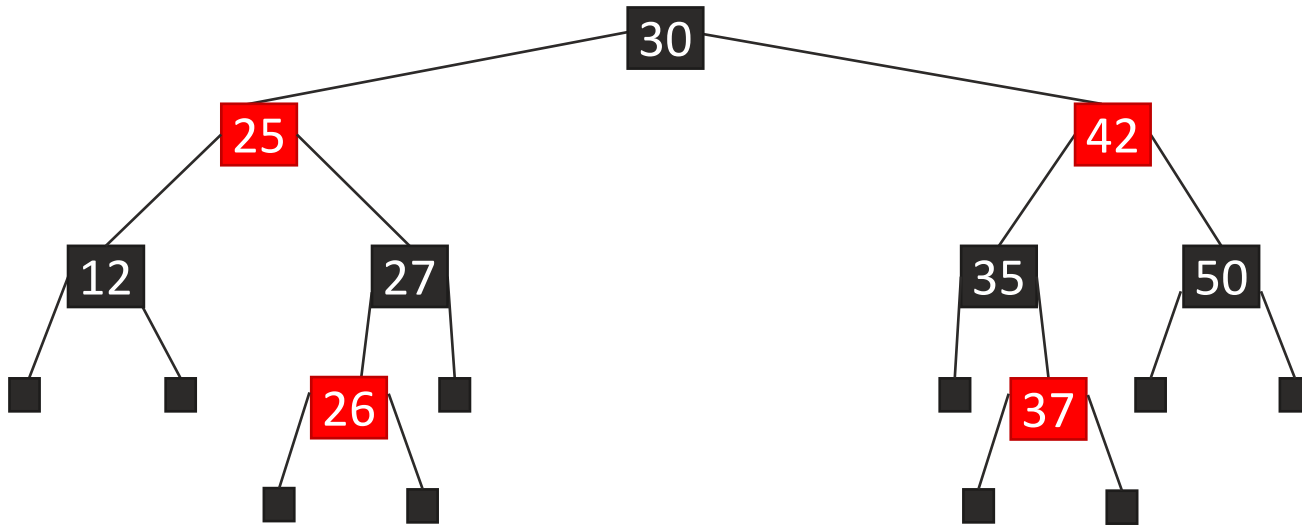
- Töröljük ki elemeket: 10



```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x]= FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w←jobb[szülő[x]]
    if szín[w]=PIROS then
      szín[w]←FEKETE;
      szín[szülő[x]]←PIROS
      BALRA-FORGAT(T,szülő[x])
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w]← PIROS
      x←szülő[x]
    else if szín[jobb[w]]= FEKETE then
      szín[bal[w]]←FEKETE
      szín[w]←PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T,w)
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w]← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]]←FEKETE
    szín[jobb[w]]←FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x←gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x]←FEKETE
```

# Törlés utáni kiegyensúlyozás

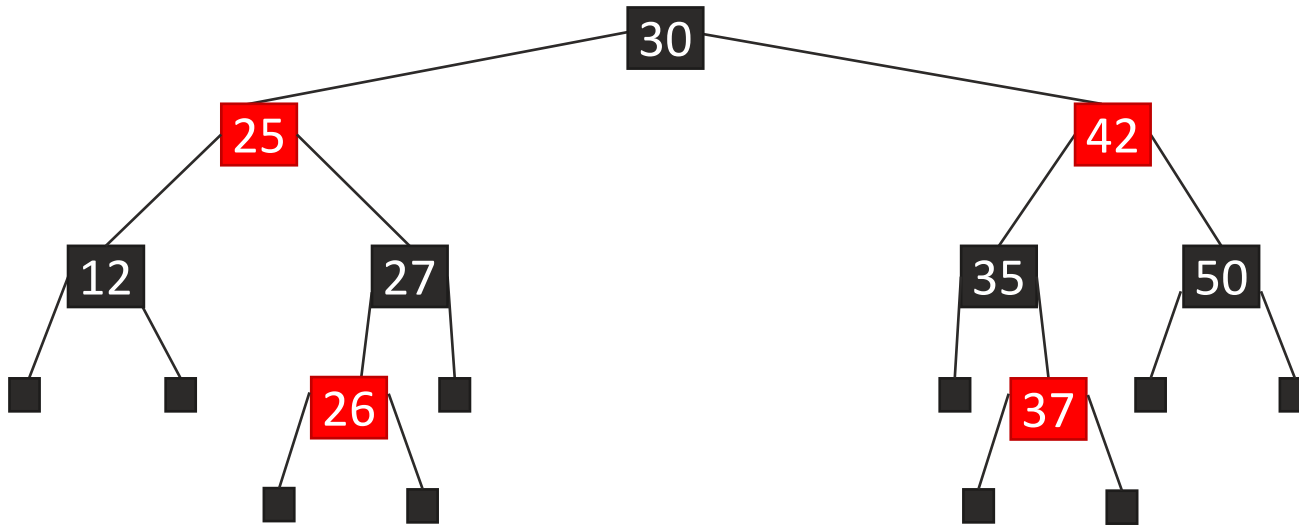
- Töröljük ki elemeket: Piros törlés után nincs helyreállítás



```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x] = FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w ← jobb[szülő[x]]
    if szín[w] = PIROS then
      szín[w] ← FEKETE;
      szín[szülő[x]] ← PIROS
      BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
      w ← jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w] ← PIROS
      x ← szülő[x]
    else if szín[jobb[w]] = FEKETE then
      szín[bal[w]] ← FEKETE
      szín[w] ← PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T, w)
      w ← jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w] ← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]] ← FEKETE
    szín[jobb[w]] ← FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x ← gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x] ← FEKETE
```

# Törlés utáni kiegyensúlyozás

- Töröljük ki elemeket: 12

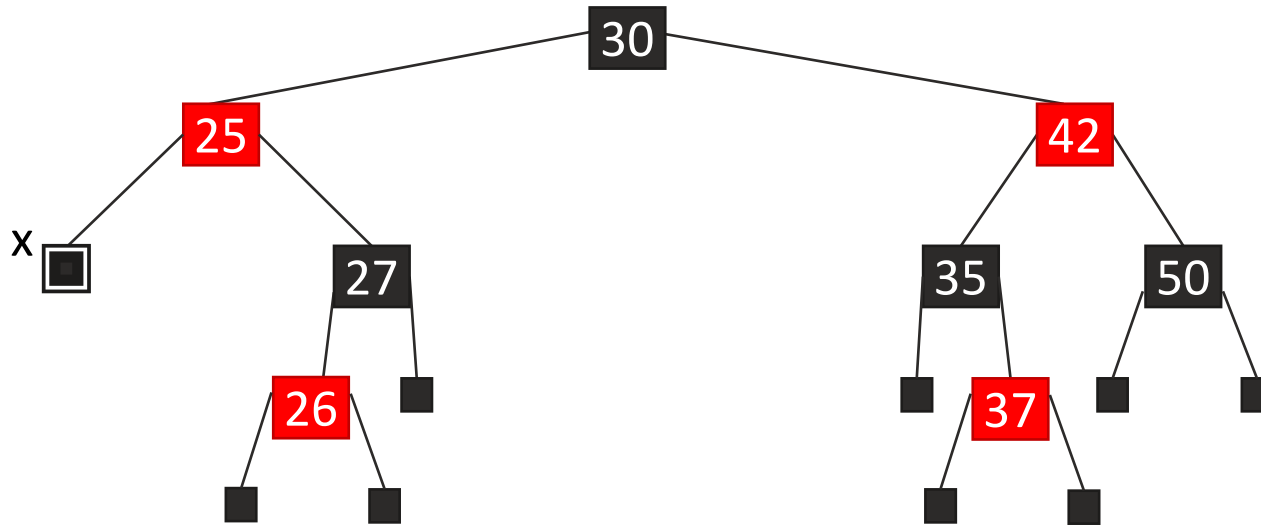


```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x]= FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w←jobb[szülő[x]]
    if szín[w]=PIROS then
      szín[w]←FEKETE;
      szín[szülő[x]]←PIROS
      BALRA-FORGAT(T,szülő[x])
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w]← PIROS
      x←szülő[x]
    else if szín[jobb[w]]= FEKETE then
      szín[bal[w]]←FEKETE
      szín[w]←PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T,w)
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w]← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]]←FEKETE
    szín[jobb[w]]←FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x←gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x]←FEKETE
```



# Törlés utáni kiegyensúlyozás

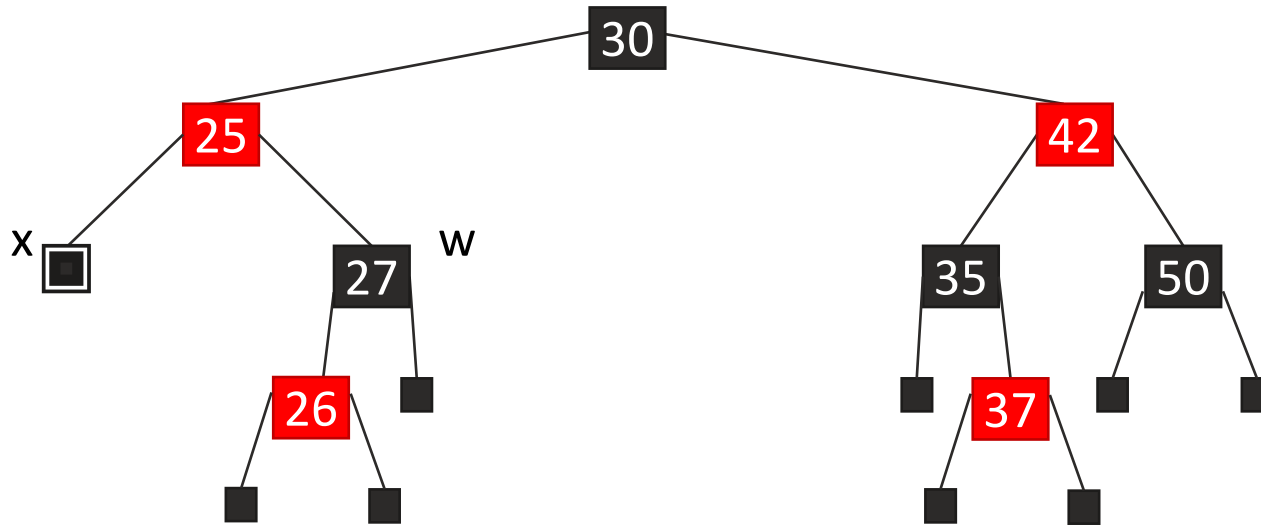
- Töröljük ki elemeket: 12



```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x] = FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w ← jobb[szülő[x]]
    if szín[w] = PIROS then
      szín[w] ← FEKETE;
      szín[szülő[x]] ← PIROS
      BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
      w ← jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w] ← PIROS
      x ← szülő[x]
    else if szín[jobb[w]] = FEKETE then
      szín[bal[w]] ← FEKETE
      szín[w] ← PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T, w)
      w ← jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w] ← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]] ← FEKETE
    szín[jobb[w]] ← FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x ← gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x] ← FEKETE
```

# Törlés utáni kiegyensúlyozás

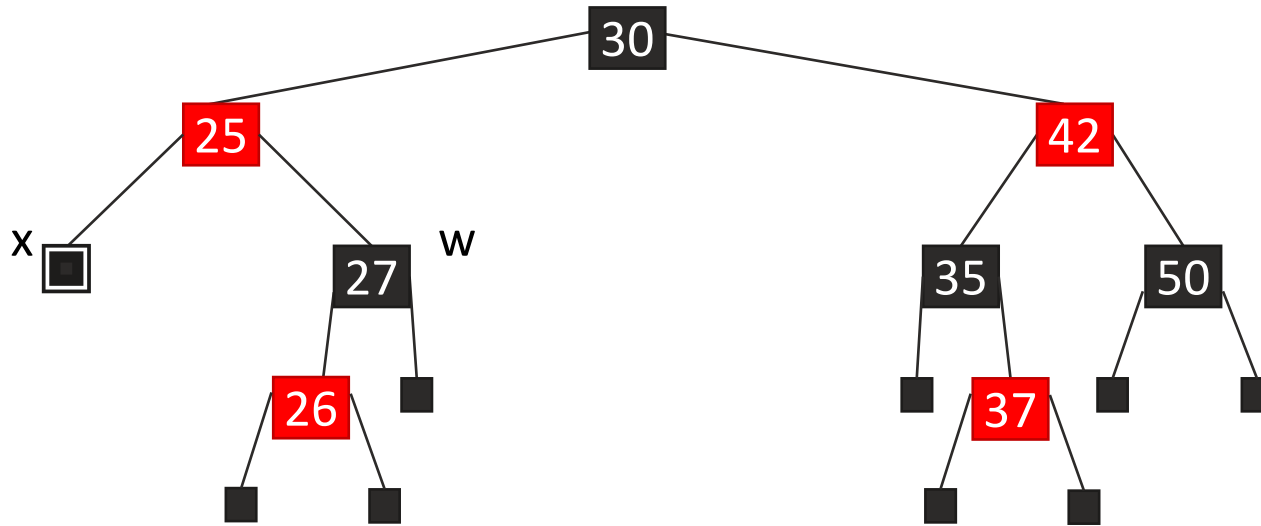
- Töröljük ki elemeket: 12



```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x] = FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w ← jobb[szülő[x]]
    if szín[w] = PIROS then
      szín[w] ← FEKETE;
      szín[szülő[x]] ← PIROS
      BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
      w ← jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w] ← PIROS
      x ← szülő[x]
    else if szín[jobb[w]] = FEKETE then
      szín[bal[w]] ← FEKETE
      szín[w] ← PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T, w)
      w ← jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w] ← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]] ← FEKETE
    szín[jobb[w]] ← FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x ← gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x] ← FEKETE
```

# Törlés utáni kiegyensúlyozás

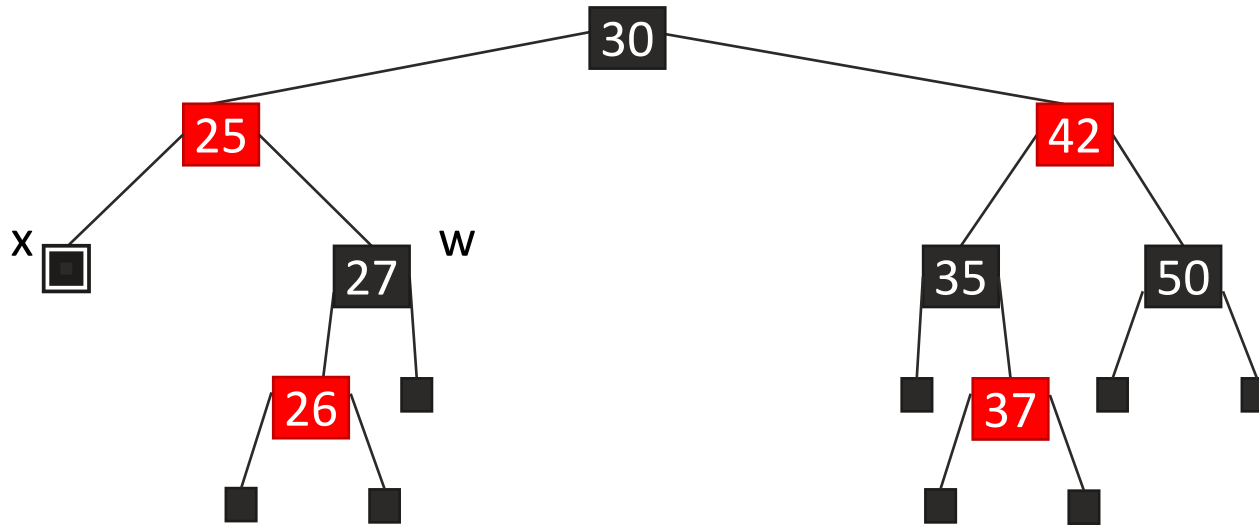
- Töröljük ki elemeket: 12



```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x] = FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w ← jobb[szülő[x]]
    if szín[w] = PIROS then
      szín[w] ← FEKETE;
      szín[szülő[x]] ← PIROS
      BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
      w ← jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w] ← PIROS
      x ← szülő[x]
    else if szín[jobb[w]] = FEKETE then
      szín[bal[w]] ← FEKETE
      szín[w] ← PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T, w)
      w ← jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w] ← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]] ← FEKETE
    szín[jobb[w]] ← FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x ← gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x] ← FEKETE
```

# Törlés utáni kiegyensúlyozás

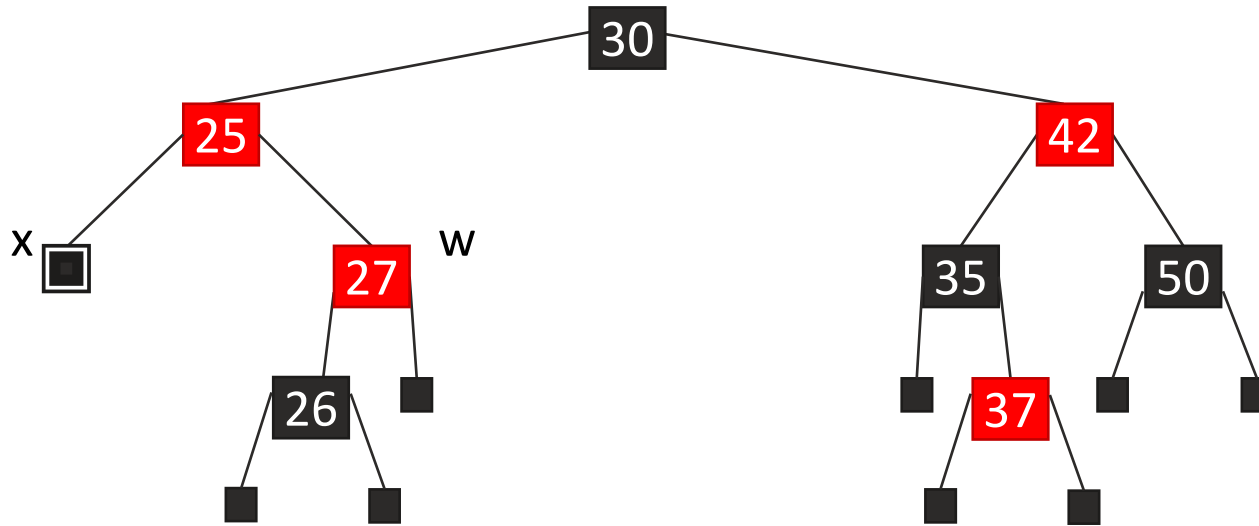
- Töröljük ki elemeket: 12



```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x] = FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w ← jobb[szülő[x]]
    if szín[w] = PIROS then
      szín[w] ← FEKETE;
      szín[szülő[x]] ← PIROS
      BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
      w ← jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w] ← PIROS
      x ← szülő[x]
    else if szín[jobb[w]] = FEKETE then
      szín[bal[w]] ← FEKETE
      szín[w] ← PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T, w)
      w ← jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w] ← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]] ← FEKETE
    szín[jobb[w]] ← FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x ← gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x] ← FEKETE
```

# Törlés utáni kiegyensúlyozás

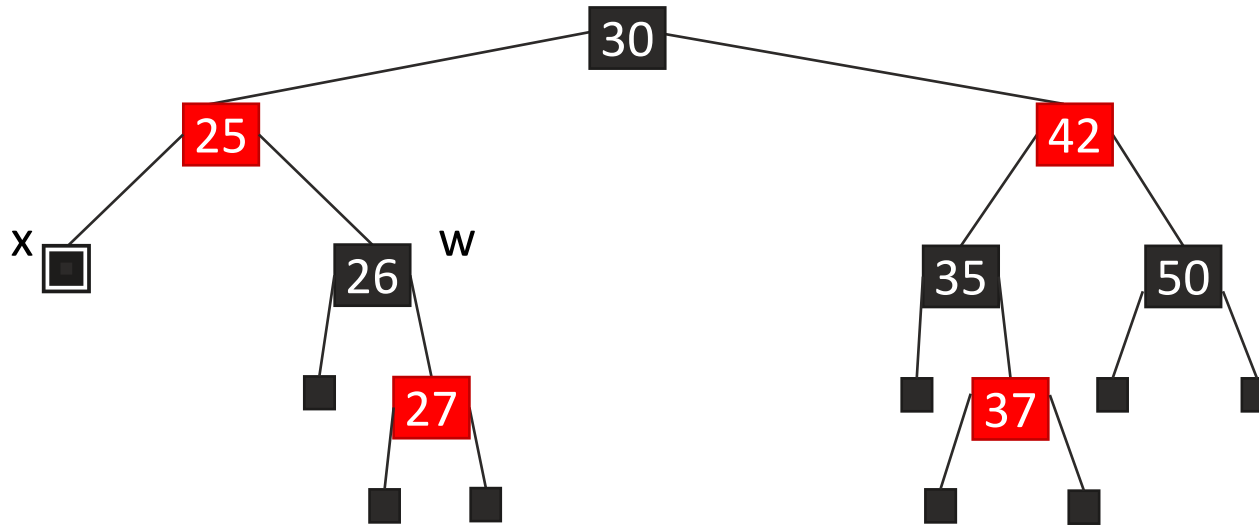
- Töröljük ki elemeket: 12



```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x] = FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w ← jobb[szülő[x]]
    if szín[w] = PIROS then
      szín[w] ← FEKETE;
      szín[szülő[x]] ← PIROS
      BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
      w ← jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w] ← PIROS
      x ← szülő[x]
    else if szín[jobb[w]] = FEKETE then
      szín[bal[w]] ← FEKETE
      szín[w] ← PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T, w)
      w ← jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w] ← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]] ← FEKETE
    szín[jobb[w]] ← FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x ← gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x] ← FEKETE
```

# Törlés utáni kiegyensúlyozás

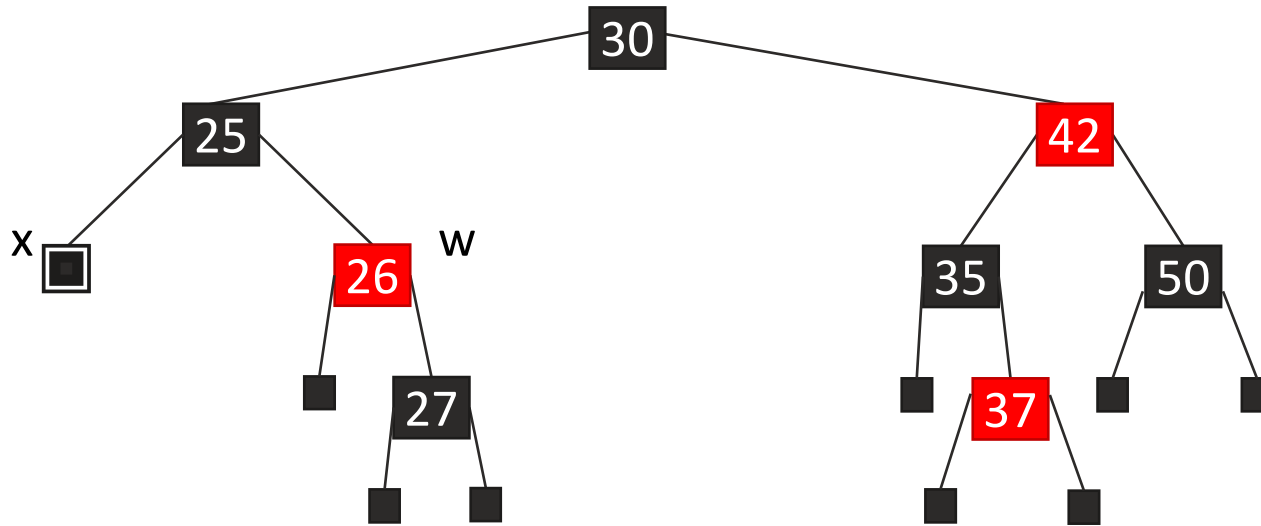
- Töröljük ki elemeket: 12



```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x] = FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w ← jobb[szülő[x]]
    if szín[w] = PIROS then
      szín[w] ← FEKETE;
      szín[szülő[x]] ← PIROS
      BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
      w ← jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w] ← PIROS
      x ← szülő[x]
    else if szín[jobb[w]] = FEKETE then
      szín[bal[w]] ← FEKETE
      szín[w] ← PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T, w)
      w ← jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w] ← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]] ← FEKETE
    szín[jobb[w]] ← FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x ← gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x] ← FEKETE
```

# Törlés utáni kiegyensúlyozás

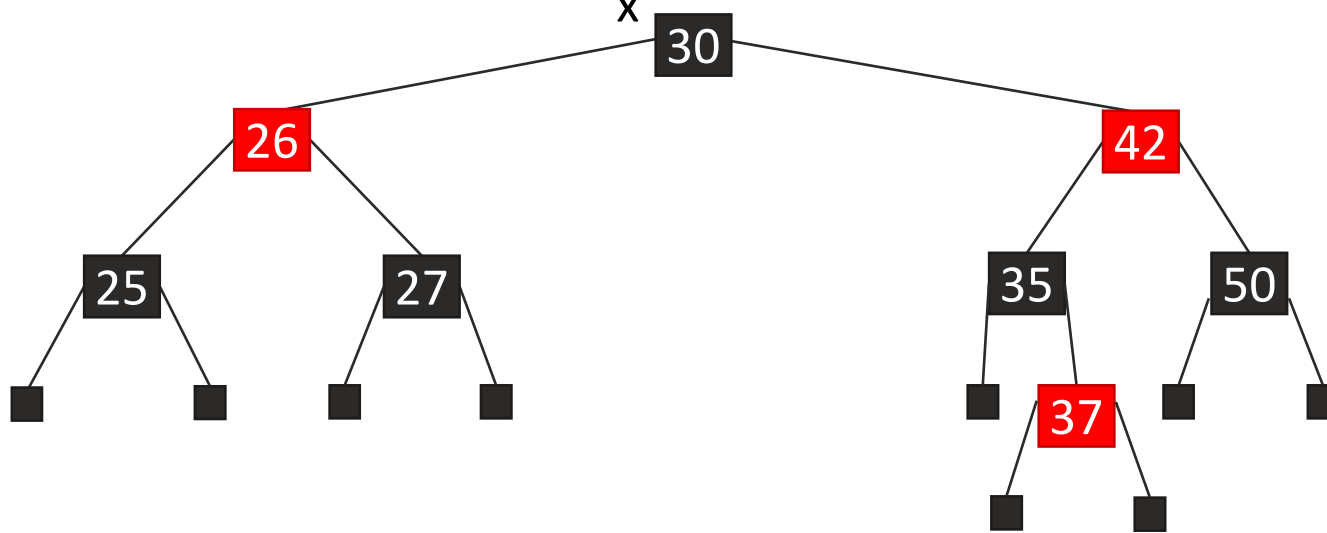
- Töröljük ki elemeket: 12



```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x] = FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w ← jobb[szülő[x]]
    if szín[w] = PIROS then
      szín[w] ← FEKETE;
      szín[szülő[x]] ← PIROS
      BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
      w ← jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w] ← PIROS
      x ← szülő[x]
    else if szín[jobb[w]] = FEKETE then
      szín[bal[w]] ← FEKETE
      szín[w] ← PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T, w)
      w ← jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w] ← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]] ← FEKETE
    szín[jobb[w]] ← FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x ← gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x] ← FEKETE
```

# Törlés utáni kiegyensúlyozás

- Töröljük ki elemeket: 12

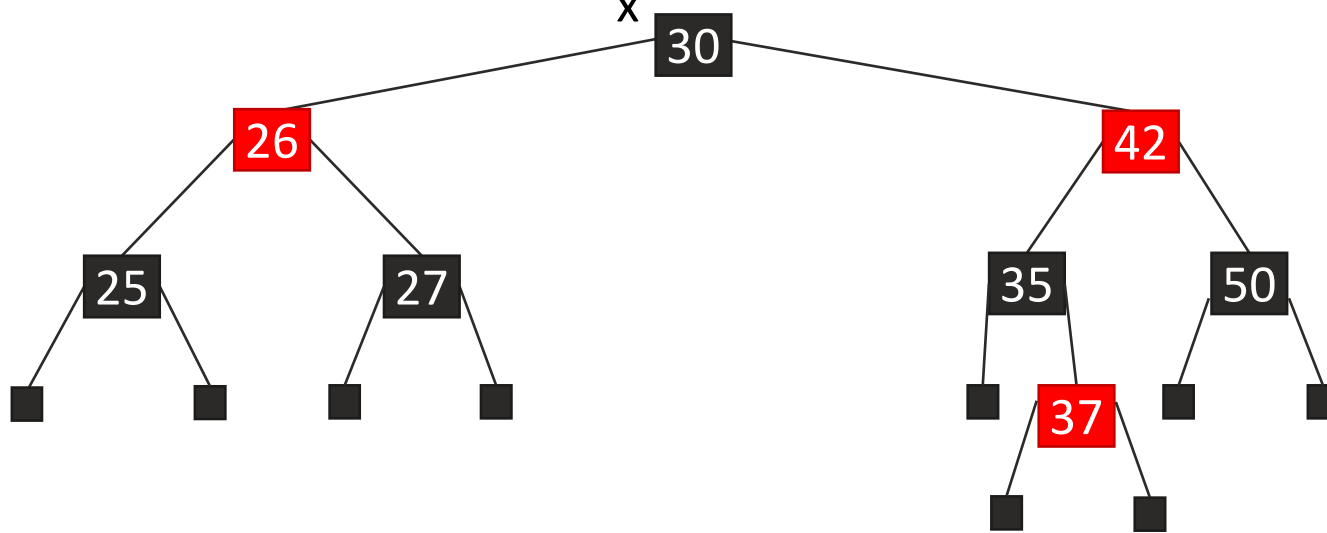


```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x]= FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w←jobb[szülő[x]]
    if szín[w]=PIROS then
      szín[w]←FEKETE;
      szín[szülő[x]]←PIROS
      BALRA-FORGAT(T,szülő[x])
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w]← PIROS
      x←szülő[x]
    else if szín[jobb[w]]= FEKETE then
      szín[bal[w]]←FEKETE
      szín[w]←PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T,w)
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w]← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]]←FEKETE
    szín[jobb[w]]←FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x←gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x]←FEKETE
```



# Törlés utáni kiegyensúlyozás

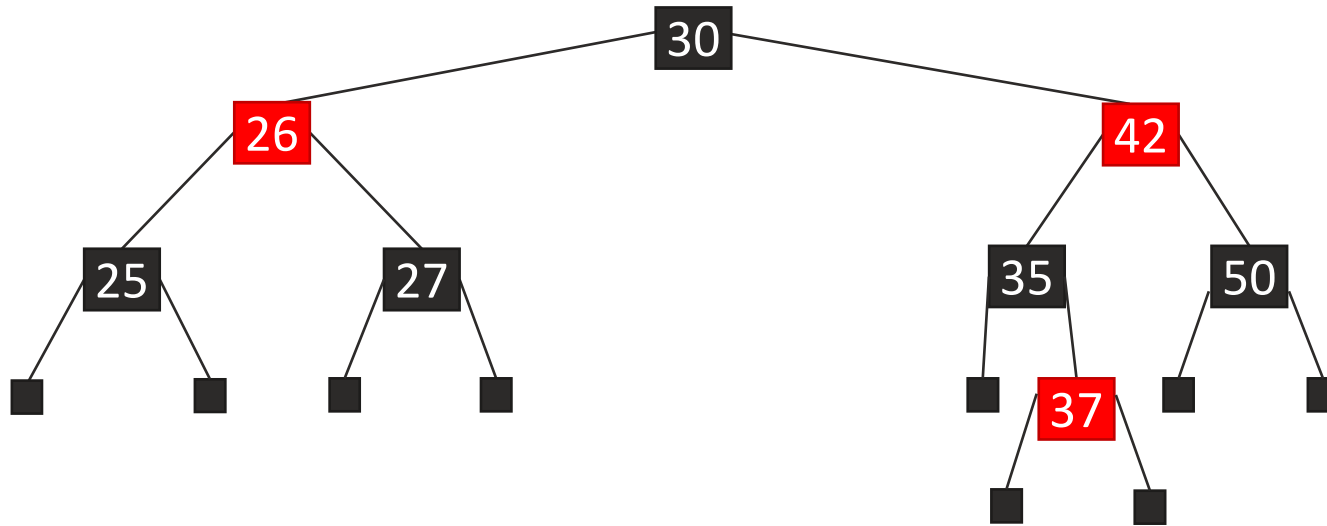
- Töröljük ki elemeket: 12



```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x] = FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w ← jobb[szülő[x]]
    if szín[w] = PIROS then
      szín[w] ← FEKETE;
      szín[szülő[x]] ← PIROS
      BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
      w ← jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w] ← PIROS
      x ← szülő[x]
    else if szín[jobb[w]] = FEKETE then
      szín[bal[w]] ← FEKETE
      szín[w] ← PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T, w)
      w ← jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w] ← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]] ← FEKETE
    szín[jobb[w]] ← FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x ← gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x] ← FEKETE
```

# Törlés utáni kiegyensúlyozás

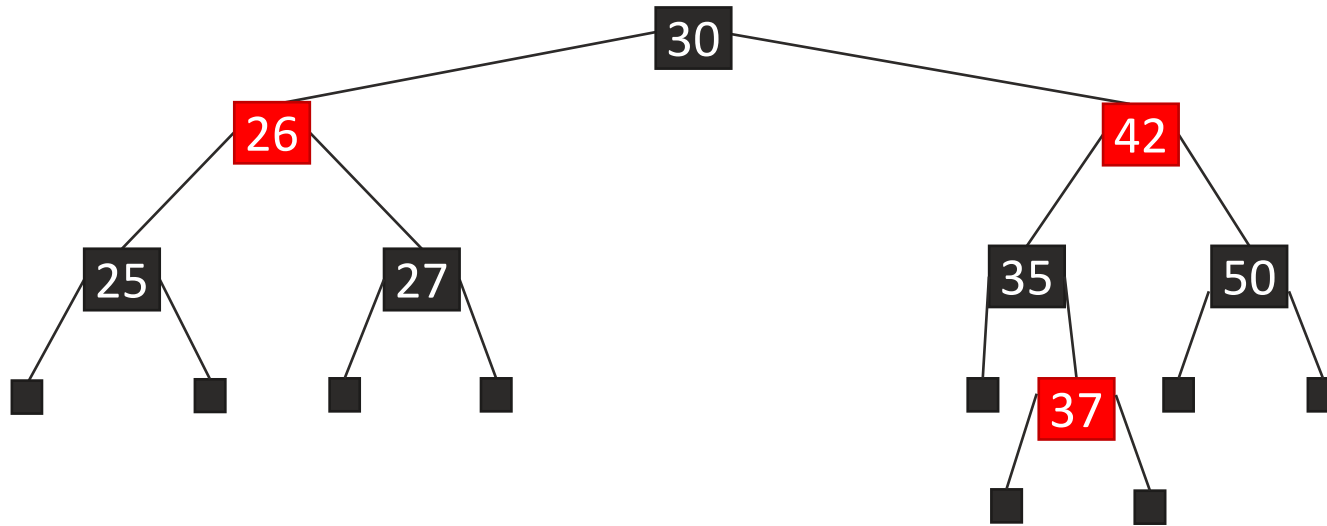
- Töröljük ki elemeket:



```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x]= FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w←jobb[szülő[x]]
    if szín[w]=PIROS then
      szín[w]←FEKETE;
      szín[szülő[x]]←PIROS
      BALRA-FORGAT(T,szülő[x])
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w]← PIROS
      x←szülő[x]
    else if szín[jobb[w]]= FEKETE then
      szín[bal[w]]←FEKETE
      szín[w]←PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T,w)
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w]← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]]←FEKETE
    szín[jobb[w]]←FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x←gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x]←FEKETE
```

# Törlés utáni kiegyensúlyozás

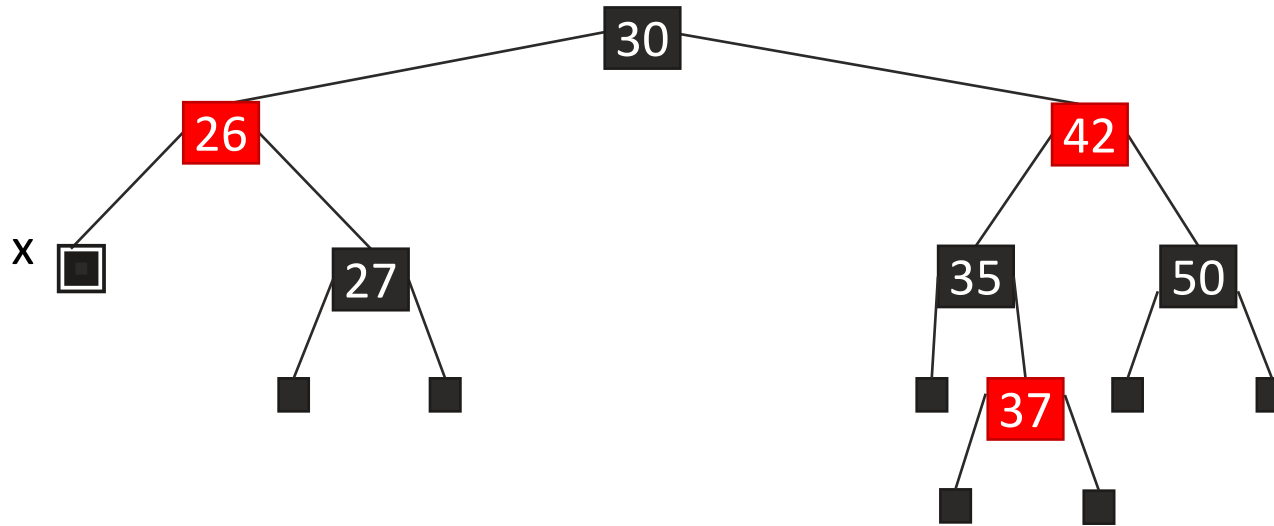
- Töröljük ki elemeket: 25



```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x]= FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w←jobb[szülő[x]]
    if szín[w]=PIROS then
      szín[w]←FEKETE;
      szín[szülő[x]]←PIROS
      BALRA-FORGAT(T,szülő[x])
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w]← PIROS
      x←szülő[x]
    else if szín[jobb[w]]= FEKETE then
      szín[bal[w]]←FEKETE
      szín[w]←PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T,w)
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w]← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]]←FEKETE
    szín[jobb[w]]←FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x←gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x]←FEKETE
```

# Törlés utáni kiegyensúlyozás

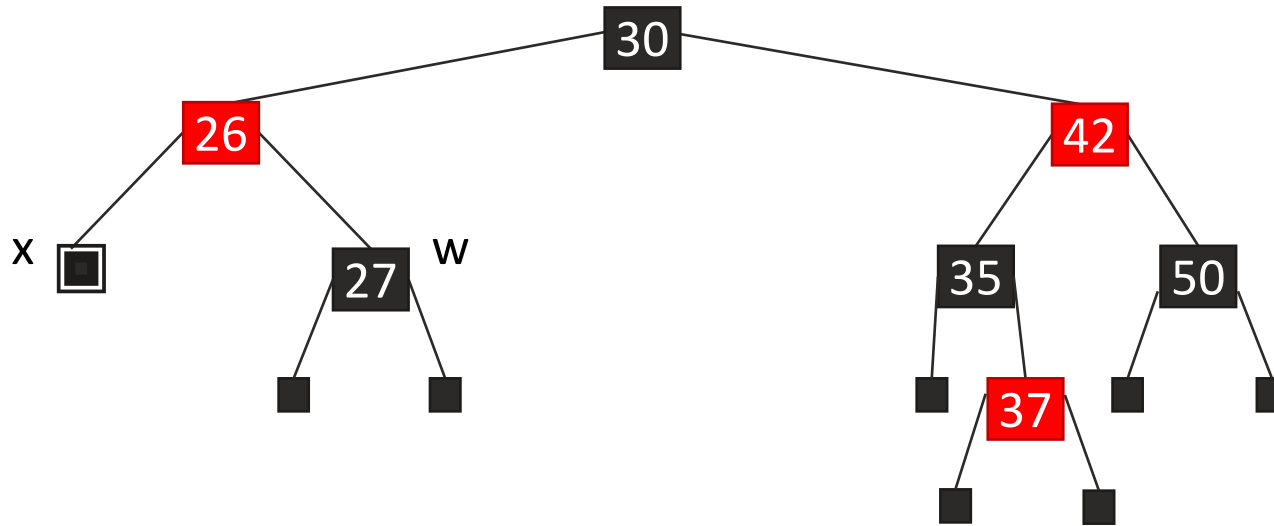
- Töröljük ki elemeket: 25



```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x]= FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w←jobb[szülő[x]]
    if szín[w]=PIROS then
      szín[w]←FEKETE;
      szín[szülő[x]]←PIROS
      BALRA-FORGAT(T,szülő[x])
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w]← PIROS
      x←szülő[x]
    else if szín[jobb[w]]= FEKETE then
      szín[bal[w]]←FEKETE
      szín[w]←PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T,w)
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w]← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]]←FEKETE
    szín[jobb[w]]←FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x←gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x]←FEKETE
```

# Törlés utáni kiegyensúlyozás

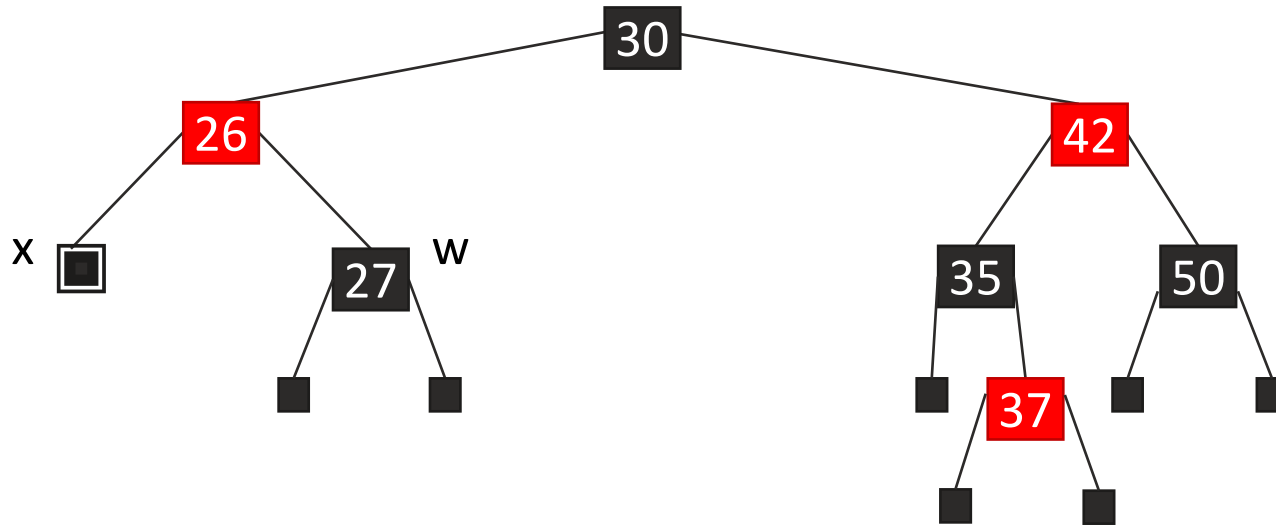
- Töröljük ki elemeket: 25



```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x] = FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w ← jobb[szülő[x]]
    if szín[w] = PIROS then
      szín[w] ← FEKETE;
      szín[szülő[x]] ← PIROS
      BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
      w ← jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w] ← PIROS
      x ← szülő[x]
    else if szín[jobb[w]] = FEKETE then
      szín[bal[w]] ← FEKETE
      szín[w] ← PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T, w)
      w ← jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w] ← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]] ← FEKETE
    szín[jobb[w]] ← FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x ← gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x] ← FEKETE
```

# Törlés utáni kiegyensúlyozás

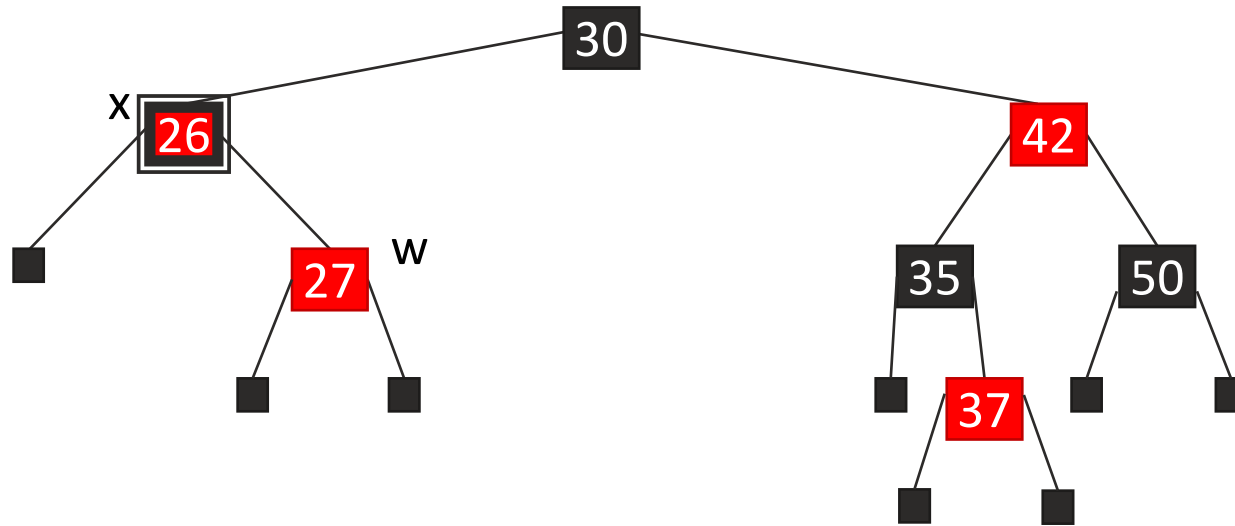
- Töröljük ki elemeket: 25



```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x] = FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w ← jobb[szülő[x]]
    if szín[w] = PIROS then
      szín[w] ← FEKETE;
      szín[szülő[x]] ← PIROS
      BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
      w ← jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w] ← PIROS
      x ← szülő[x]
    else if szín[jobb[w]] = FEKETE then
      szín[bal[w]] ← FEKETE
      szín[w] ← PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T, w)
      w ← jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w] ← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]] ← FEKETE
    szín[jobb[w]] ← FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x ← gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x] ← FEKETE
```

# Törlés utáni kiegyensúlyozás

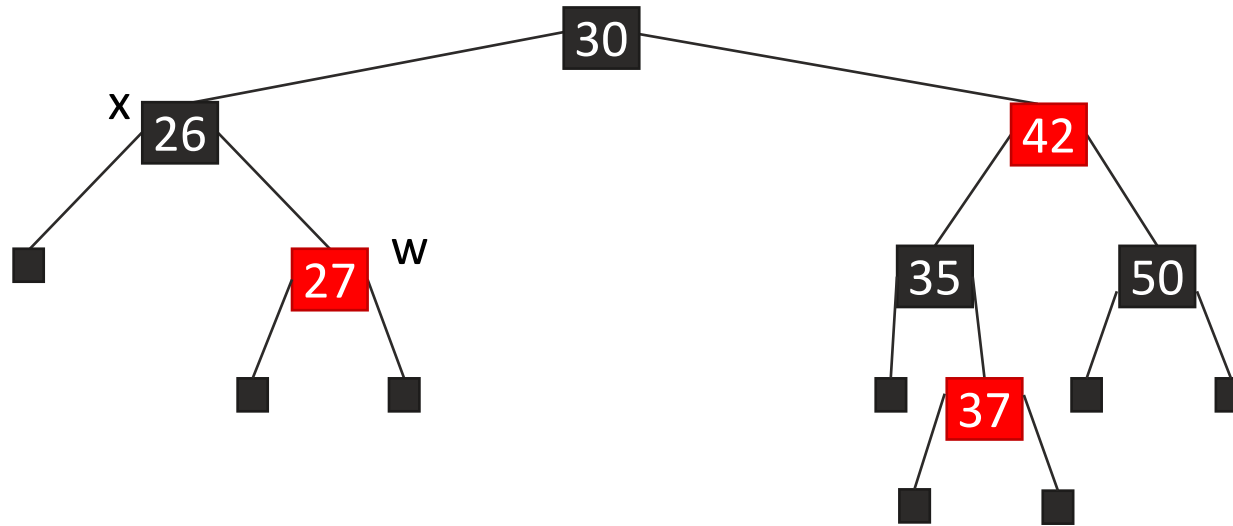
- Töröljük ki elemeket: 25



```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x] = FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w ← jobb[szülő[x]]
    if szín[w] = PIROS then
      szín[w] ← FEKETE;
      szín[szülő[x]] ← PIROS
      BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
      w ← jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w] ← PIROS
      x ← szülő[x]
    else if szín[jobb[w]] = FEKETE then
      szín[bal[w]] ← FEKETE
      szín[w] ← PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T, w)
      w ← jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w] ← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]] ← FEKETE
    szín[jobb[w]] ← FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x ← gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x] ← FEKETE
```

# Törlés utáni kiegyensúlyozás

- Töröljük ki elemeket: 25

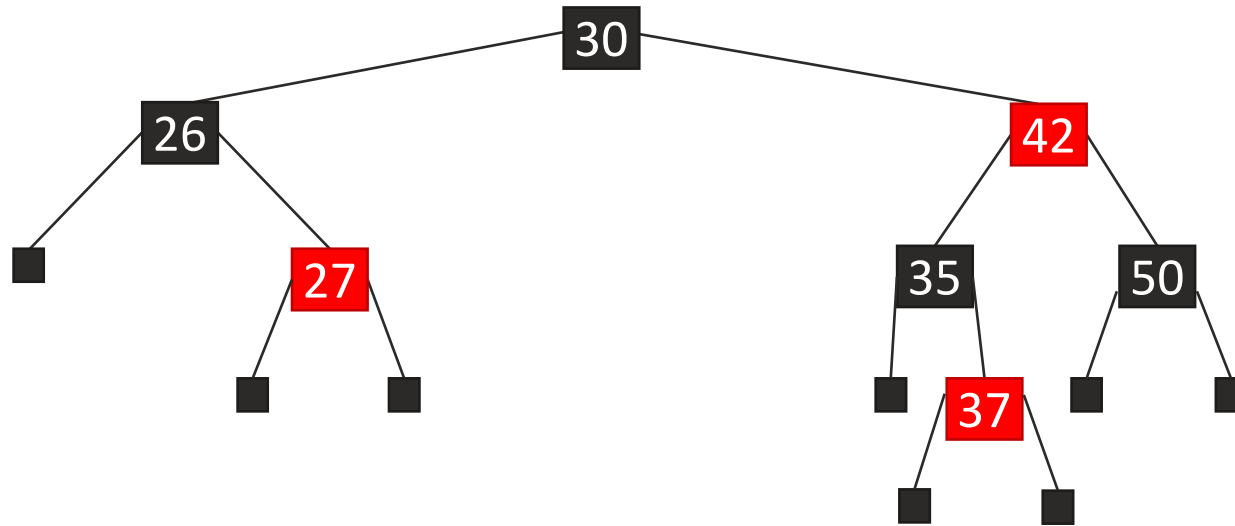


```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x] = FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w ← jobb[szülő[x]]
    if szín[w] = PIROS then
      szín[w] ← FEKETE;
      szín[szülő[x]] ← PIROS
      BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
      w ← jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w] ← PIROS
      x ← szülő[x]
    else if szín[jobb[w]] = FEKETE then
      szín[bal[w]] ← FEKETE
      szín[w] ← PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T, w)
      w ← jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w] ← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]] ← FEKETE
    szín[jobb[w]] ← FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x ← gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x] ← FEKETE
```



# Törlés utáni kiegyensúlyozás

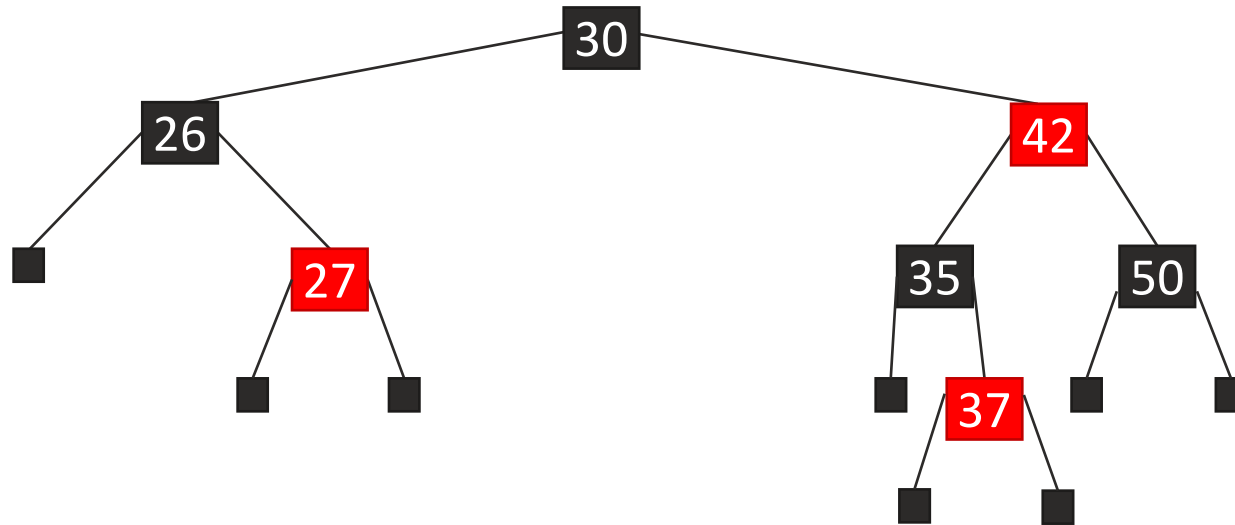
- Töröljünk ki elemeket:



```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x]= FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w←jobb[szülő[x]]
    if szín[w]=PIROS then
      szín[w]←FEKETE;
      szín[szülő[x]]←PIROS
      BALRA-FORGAT(T,szülő[x])
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w]← PIROS
      x←szülő[x]
    else if szín[jobb[w]]= FEKETE then
      szín[bal[w]]←FEKETE
      szín[w]←PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T,w)
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w]← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]]←FEKETE
    szín[jobb[w]]←FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x←gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x]←FEKETE
```

# Törlés utáni kiegyensúlyozás

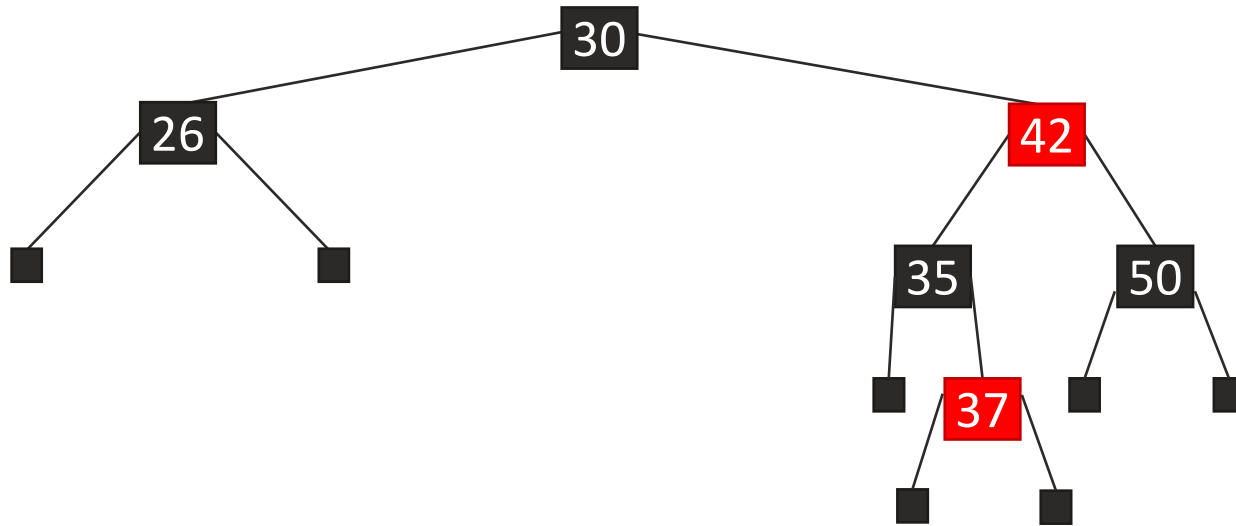
- Töröljük ki elemeket: 27 – Piros



```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x]= FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w←jobb[szülő[x]]
    if szín[w]=PIROS then
      szín[w]←FEKETE;
      szín[szülő[x]]←PIROS
      BALRA-FORGAT(T,szülő[x])
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w]← PIROS
      x←szülő[x]
    else if szín[jobb[w]]= FEKETE then
      szín[bal[w]]←FEKETE
      szín[w]←PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T,w)
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w]← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]]←FEKETE
    szín[jobb[w]]←FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x←gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x]←FEKETE
```

# Törlés utáni kiegyensúlyozás

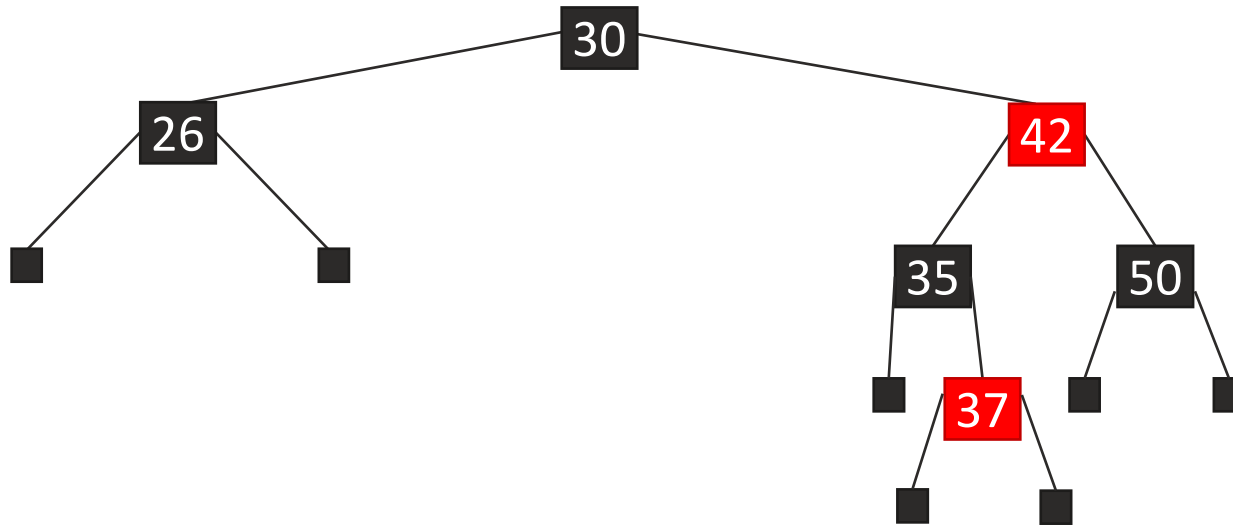
- Töröljük ki elemeket: 27 – Piros



```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x]= FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w←jobb[szülő[x]]
    if szín[w]=PIROS then
      szín[w]←FEKETE;
      szín[szülő[x]]←PIROS
      BALRA-FORGAT(T,szülő[x])
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w]← PIROS
      x←szülő[x]
    else if szín[jobb[w]]= FEKETE then
      szín[bal[w]]←FEKETE
      szín[w]←PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T,w)
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w]← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]]←FEKETE
    szín[jobb[w]]←FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x←gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x]←FEKETE
```

# Törlés utáni kiegyensúlyozás

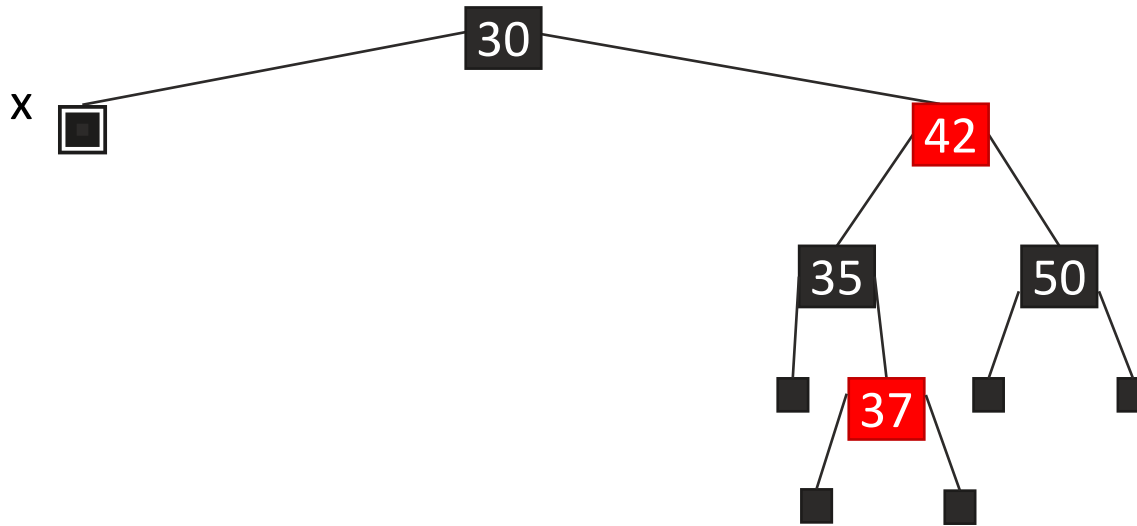
- Töröljük ki elemeket: 26



```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x]= FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w←jobb[szülő[x]]
    if szín[w]=PIROS then
      szín[w]←FEKETE;
      szín[szülő[x]]←PIROS
      BALRA-FORGAT(T,szülő[x])
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w]← PIROS
      x←szülő[x]
    else if szín[jobb[w]]= FEKETE then
      szín[bal[w]]←FEKETE
      szín[w]←PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T,w)
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w]← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]]←FEKETE
    szín[jobb[w]]←FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x←gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x]←FEKETE
```

# Törlés utáni kiegyensúlyozás

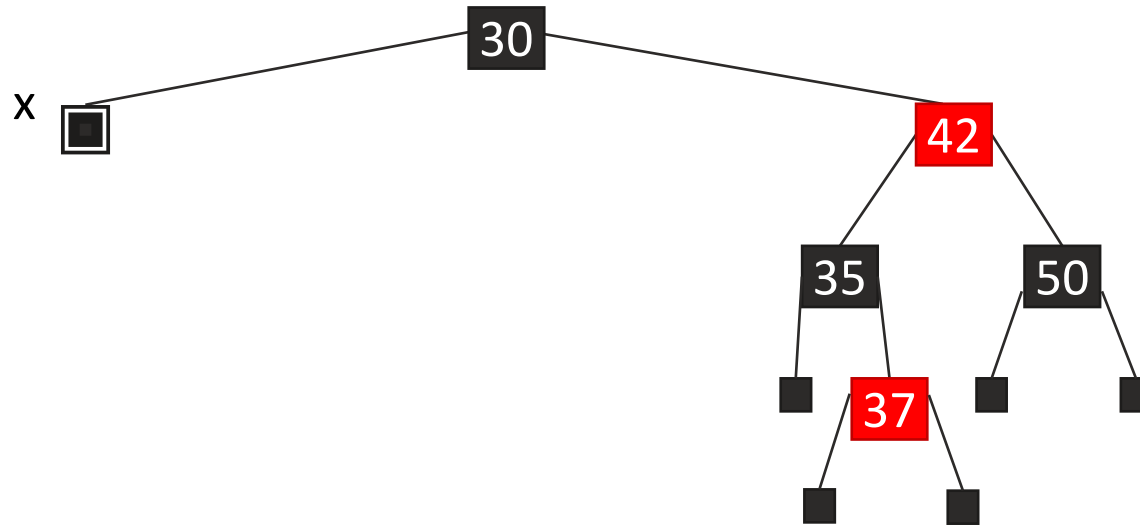
- Töröljük ki elemeket: 26



```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x]= FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w←jobb[szülő[x]]
    if szín[w]=PIROS then
      szín[w]←FEKETE;
      szín[szülő[x]]←PIROS
      BALRA-FORGAT(T,szülő[x])
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w]← PIROS
      x←szülő[x]
    else if szín[jobb[w]]= FEKETE then
      szín[bal[w]]←FEKETE
      szín[w]←PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T,w)
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w]← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]]←FEKETE
    szín[jobb[w]]←FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x←gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x]←FEKETE
```

# Törlés utáni kiegyensúlyozás

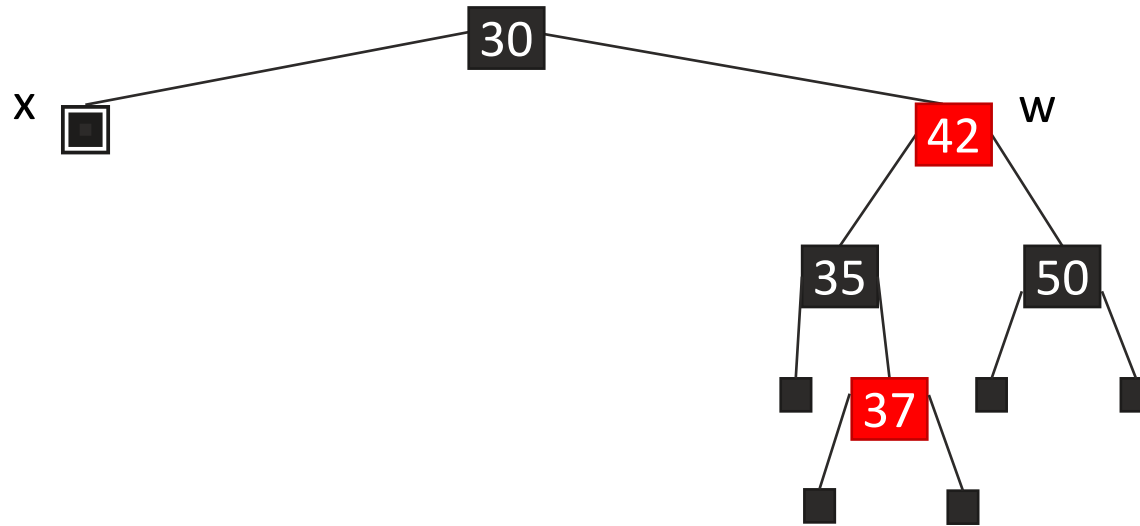
- Töröljük ki elemeket: 26



```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x]= FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w←jobb[szülő[x]]
    if szín[w]=PIROS then
      szín[w]←FEKETE;
      szín[szülő[x]]←PIROS
      BALRA-FORGAT(T,szülő[x])
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w]← PIROS
      x←szülő[x]
    else if szín[jobb[w]]= FEKETE then
      szín[bal[w]]←FEKETE
      szín[w]←PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T,w)
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w]← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]]←FEKETE
    szín[jobb[w]]←FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x←gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x]←FEKETE
```

# Törlés utáni kiegyensúlyozás

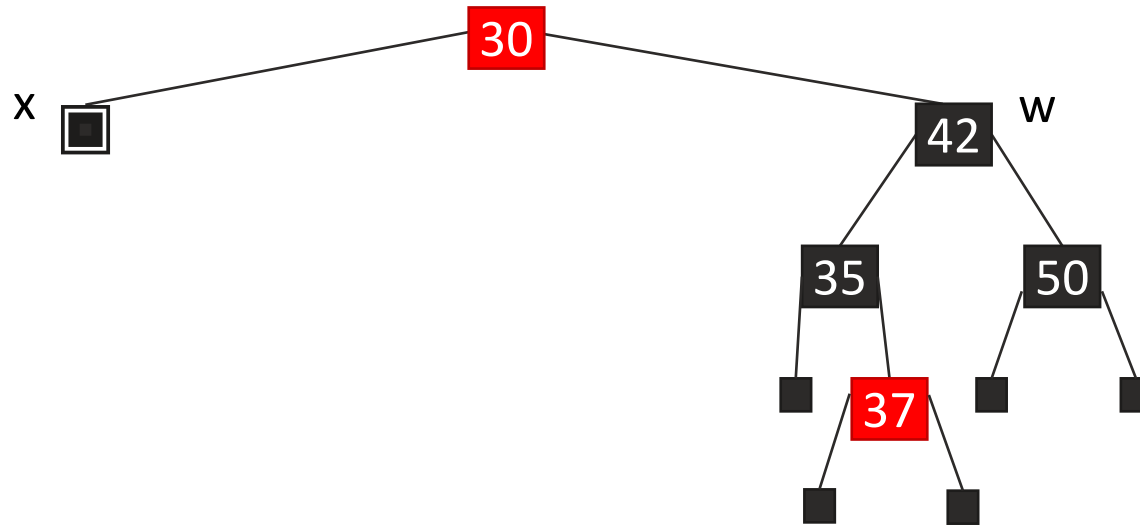
- Töröljük ki elemeket: 26



```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x] = FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w ← jobb[szülő[x]]
    if szín[w] = PIROS then
      szín[w] ← FEKETE;
      szín[szülő[x]] ← PIROS
      BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
      w ← jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w] ← PIROS
      x ← szülő[x]
    else if szín[jobb[w]] = FEKETE then
      szín[bal[w]] ← FEKETE
      szín[w] ← PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T, w)
      w ← jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w] ← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]] ← FEKETE
    szín[jobb[w]] ← FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x ← gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x] ← FEKETE
```

# Törlés utáni kiegyensúlyozás

- Töröljük ki elemeket: 26

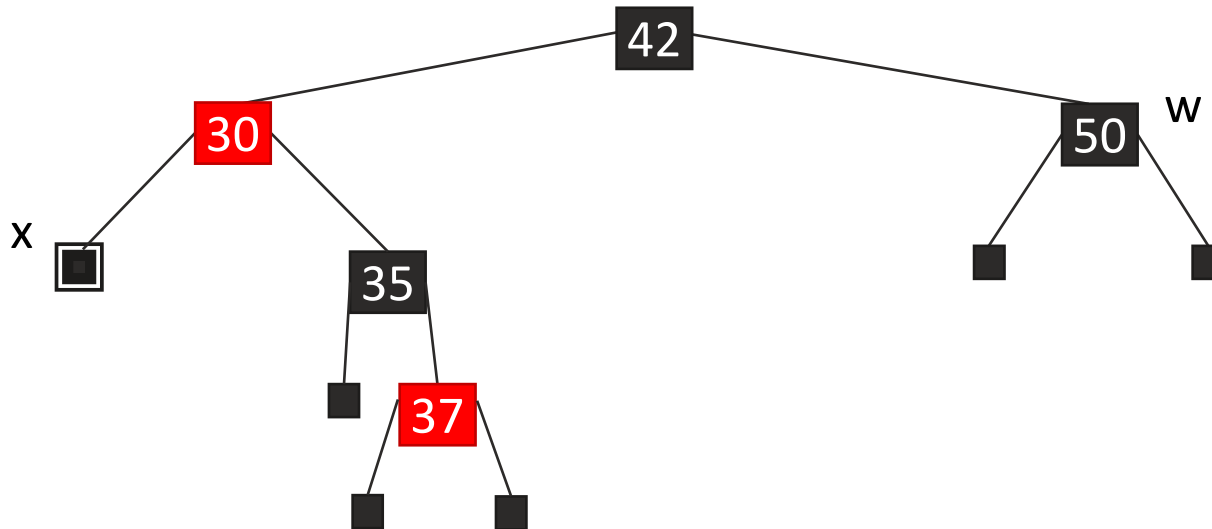


```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x]= FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w←jobb[szülő[x]]
    if szín[w]=PIROS then
      szín[w]←FEKETE;
      szín[szülő[x]]←PIROS
      BALRA-FORGAT(T,szülő[x])
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w]← PIROS
      x←szülő[x]
    else if szín[jobb[w]]= FEKETE then
      szín[bal[w]]←FEKETE
      szín[w]←PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T,w)
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w]← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]]←FEKETE
    szín[jobb[w]]←FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x←gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x]←FEKETE
```



# Törlés utáni kiegyensúlyozás

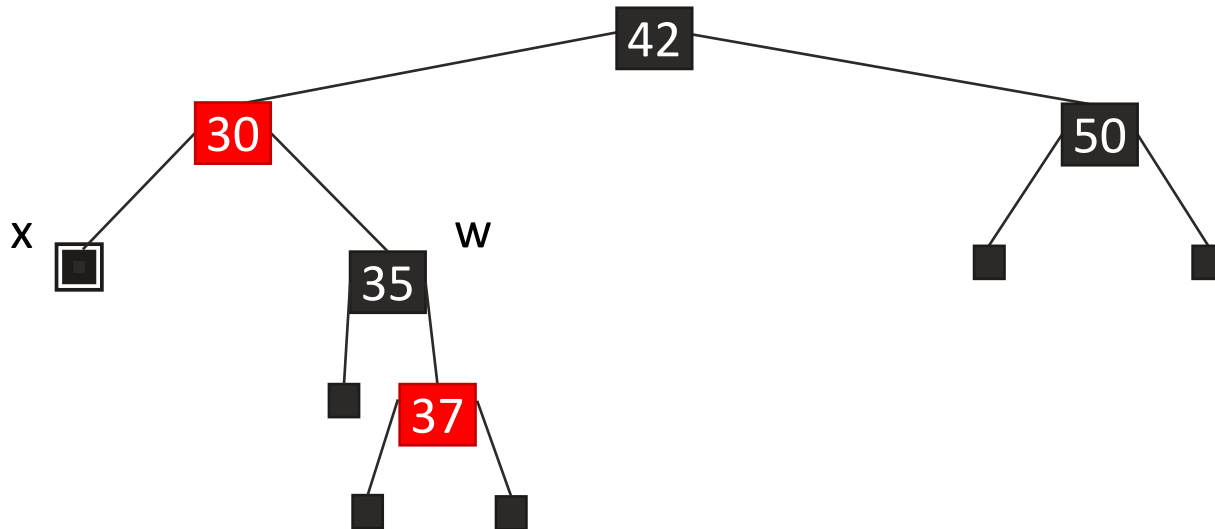
- Töröljük ki elemeket: 26



```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x] = FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w ← jobb[szülő[x]]
    if szín[w] = PIROS then
      szín[w] ← FEKETE;
      szín[szülő[x]] ← PIROS
      BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
      w ← jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w] ← PIROS
      x ← szülő[x]
    else if szín[jobb[w]] = FEKETE then
      szín[bal[w]] ← FEKETE
      szín[w] ← PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T, w)
      w ← jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w] ← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]] ← FEKETE
    szín[jobb[w]] ← FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x ← gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x] ← FEKETE
```

# Törlés utáni kiegyensúlyozás

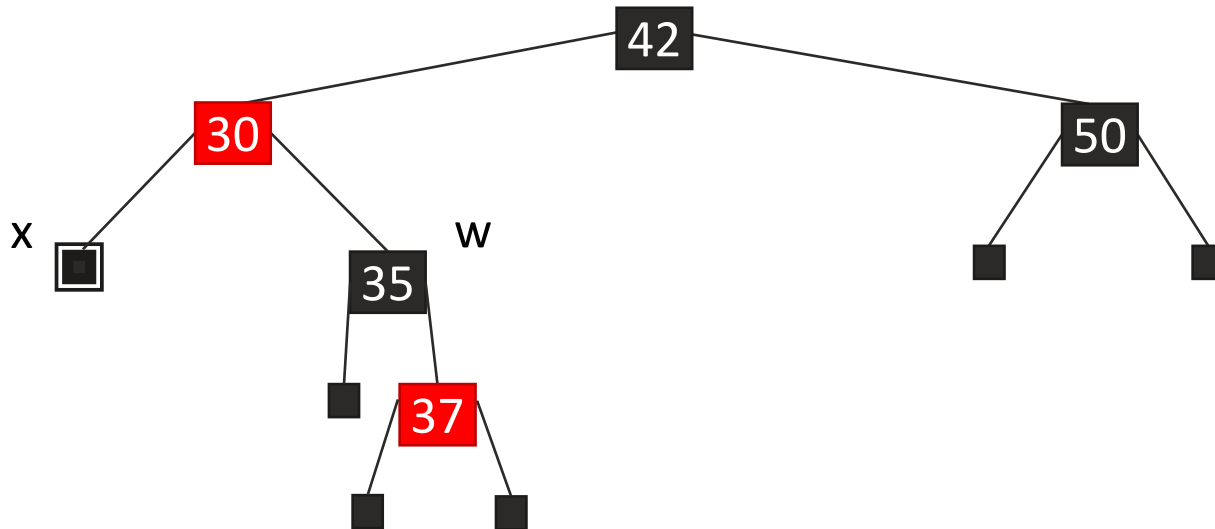
- Töröljük ki elemeket: 26



```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x]= FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w←jobb[szülő[x]]
    if szín[w]=PIROS then
      szín[w]←FEKETE;
      szín[szülő[x]]←PIROS
      BALRA-FORGAT(T,szülő[x])
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w]← PIROS
      x←szülő[x]
    else if szín[jobb[w]]= FEKETE then
      szín[bal[w]]←FEKETE
      szín[w]←PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T,w)
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w]← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]]←FEKETE
    szín[jobb[w]]←FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x←gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x]←FEKETE
```

# Törlés utáni kiegyensúlyozás

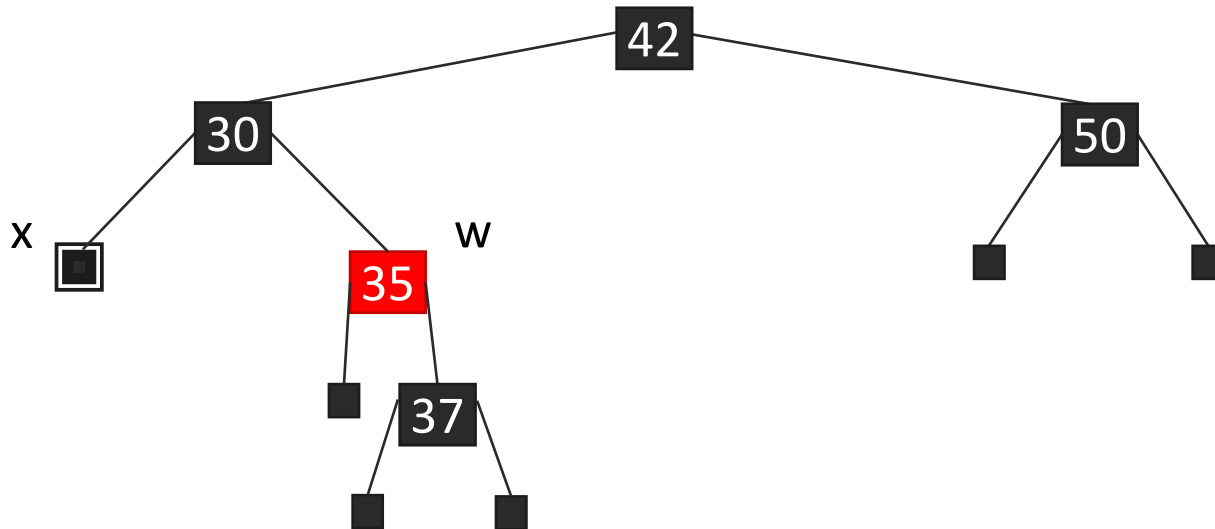
- Töröljük ki elemeket: 26



```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x]= FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w←jobb[szülő[x]]
    if szín[w]=PIROS then
      szín[w]←FEKETE;
      szín[szülő[x]]←PIROS
      BALRA-FORGAT(T,szülő[x])
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w]← PIROS
      x←szülő[x]
    else if szín[jobb[w]]= FEKETE then
      szín[bal[w]]←FEKETE
      szín[w]←PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T,w)
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w]← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]]←FEKETE
    szín[jobb[w]]←FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x←gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x]←FEKETE
```

# Törlés utáni kiegyensúlyozás

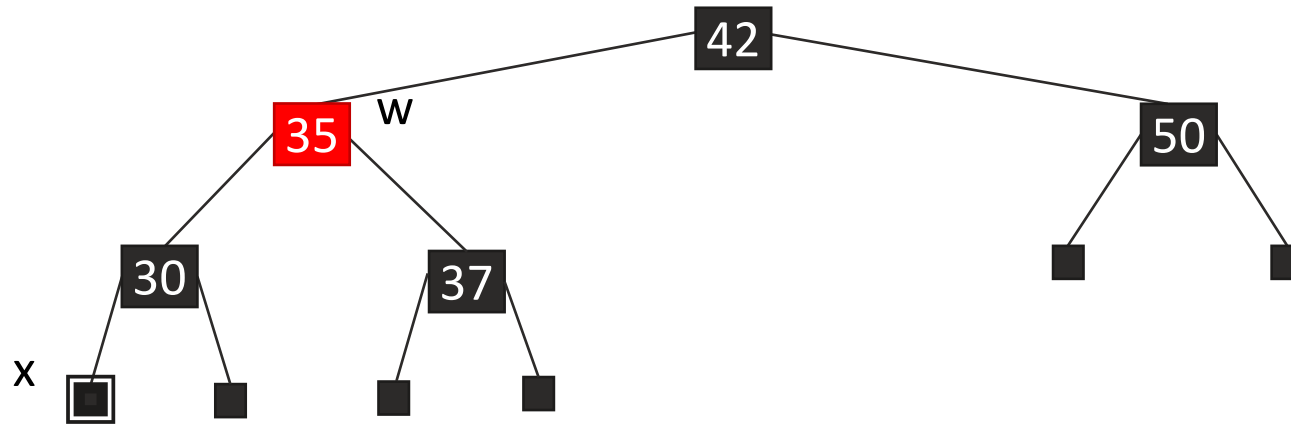
- Töröljük ki elemeket: 26



```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x]= FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w←jobb[szülő[x]]
    if szín[w]=PIROS then
      szín[w]←FEKETE;
      szín[szülő[x]]←PIROS
      BALRA-FORGAT(T,szülő[x])
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w]← PIROS
      x←szülő[x]
    else if szín[jobb[w]]= FEKETE then
      szín[bal[w]]←FEKETE
      szín[w]←PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T,w)
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w]← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]]←FEKETE
    szín[jobb[w]]←FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x←gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x]←FEKETE
```

# Törlés utáni kiegyensúlyozás

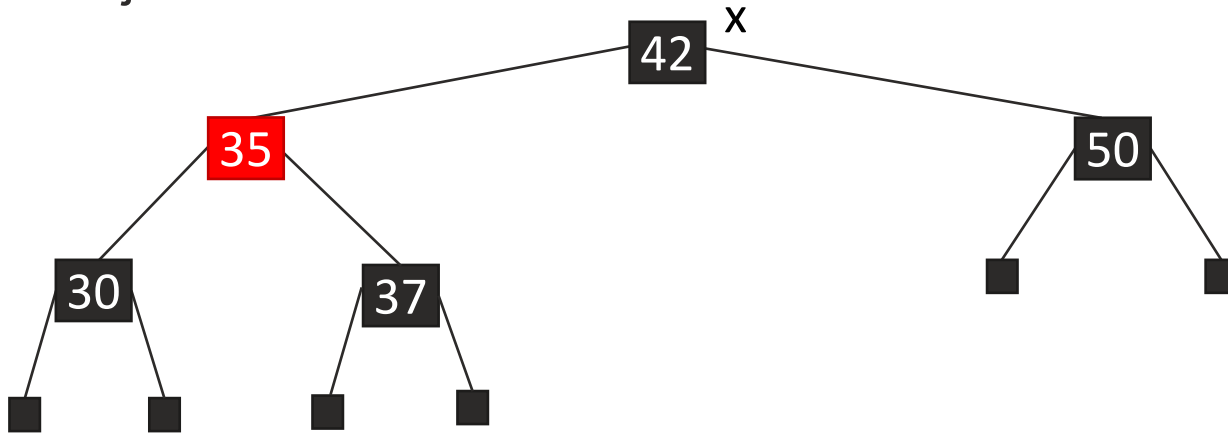
- Töröljük ki elemeket: 26



```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x] = FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w ← jobb[szülő[x]]
    if szín[w] = PIROS then
      szín[w] ← FEKETE;
      szín[szülő[x]] ← PIROS
      BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
      w ← jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w] ← PIROS
      x ← szülő[x]
    else if szín[jobb[w]] = FEKETE then
      szín[bal[w]] ← FEKETE
      szín[w] ← PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T, w)
      w ← jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w] ← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]] ← FEKETE
    szín[jobb[w]] ← FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x ← gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x] ← FEKETE
```

# Törlés utáni kiegyensúlyozás

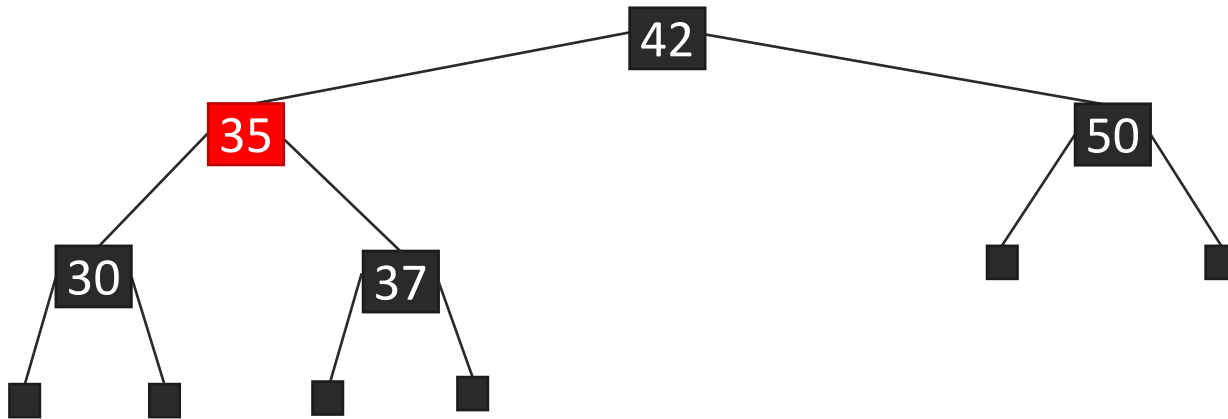
- Töröljük ki elemeket: 26



```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x]= FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w←jobb[szülő[x]]
    if szín[w]=PIROS then
      szín[w]←FEKETE;
      szín[szülő[x]]←PIROS
      BALRA-FORGAT(T,szülő[x])
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w]← PIROS
      x←szülő[x]
    else if szín[jobb[w]]= FEKETE then
      szín[bal[w]]←FEKETE
      szín[w]←PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T,w)
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w]← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]]←FEKETE
    szín[jobb[w]]←FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x←gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x]←FEKETE
```

# Törlés utáni kiegyensúlyozás

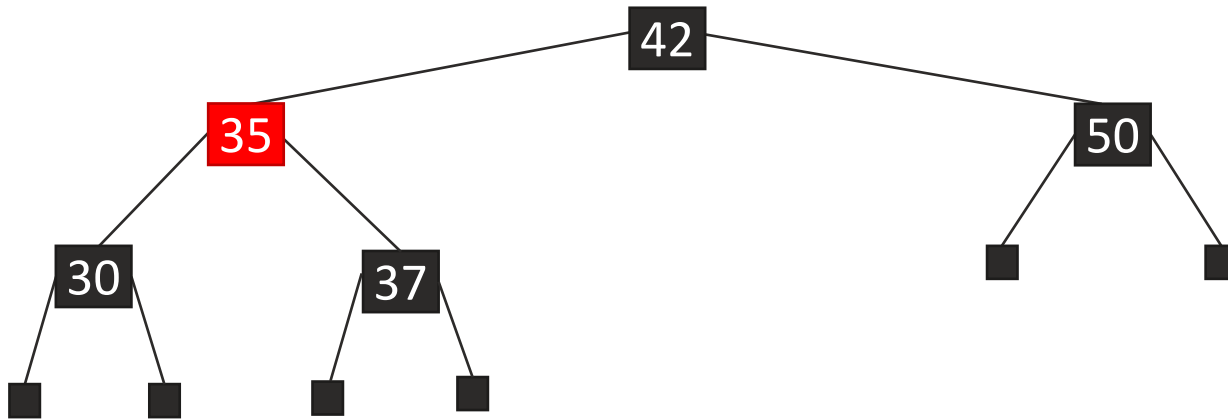
- Töröljük ki elemeket:



```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x]= FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w←jobb[szülő[x]]
    if szín[w]=PIROS then
      szín[w]←FEKETE;
      szín[szülő[x]]←PIROS
      BALRA-FORGAT(T,szülő[x])
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w]← PIROS
      x←szülő[x]
    else if szín[jobb[w]]= FEKETE then
      szín[bal[w]]←FEKETE
      szín[w]←PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T,w)
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w]← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]]←FEKETE
    szín[jobb[w]]←FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x←gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x]←FEKETE
```

# Törlés utáni kiegyensúlyozás

- Töröljük ki elemeket:

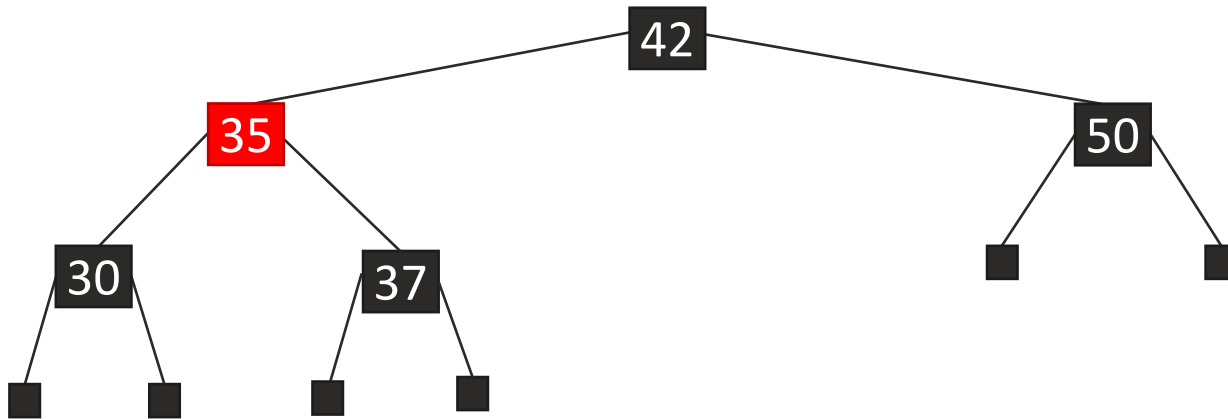


```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x]= FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w←jobb[szülő[x]]
    if szín[w]=PIROS then
      szín[w]←FEKETE;
      szín[szülő[x]]←PIROS
      BALRA-FORGAT(T,szülő[x])
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w]← PIROS
      x←szülő[x]
    else if szín[jobb[w]]= FEKETE then
      szín[bal[w]]←FEKETE
      szín[w]←PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T,w)
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w]← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]]←FEKETE
    szín[jobb[w]]←FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x←gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x]←FEKETE
```



# Törlés utáni kiegyensúlyozás

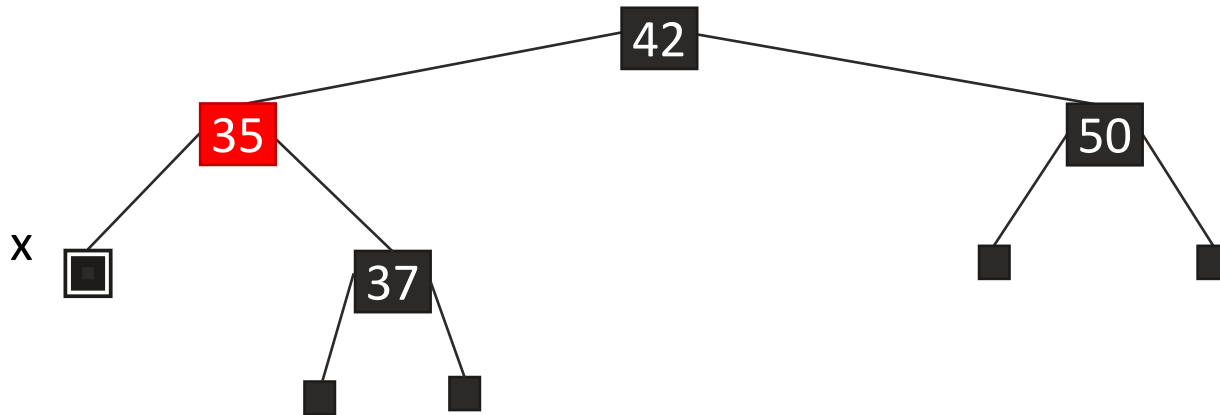
- Töröljük ki elemeket: 30



```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x]= FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w←jobb[szülő[x]]
    if szín[w]=PIROS then
      szín[w]←FEKETE;
      szín[szülő[x]]←PIROS
      BALRA-FORGAT(T,szülő[x])
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w]← PIROS
      x←szülő[x]
    else if szín[jobb[w]]= FEKETE then
      szín[bal[w]]←FEKETE
      szín[w]←PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T,w)
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w]← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]]←FEKETE
    szín[jobb[w]]←FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x←gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x]←FEKETE
```

# Törlés utáni kiegyensúlyozás

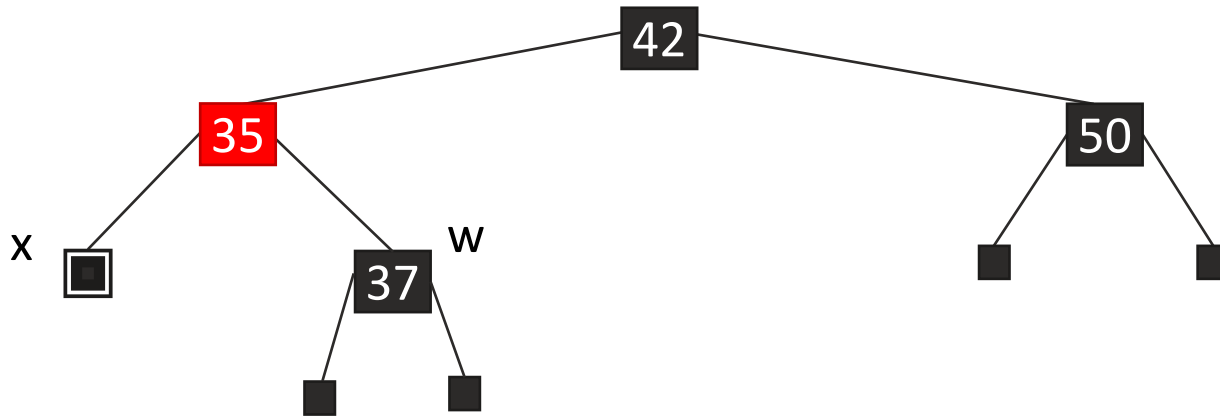
- Töröljük ki elemeket: 30



```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x]= FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w←jobb[szülő[x]]
    if szín[w]=PIROS then
      szín[w]←FEKETE;
      szín[szülő[x]]←PIROS
      BALRA-FORGAT(T,szülő[x])
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w]← PIROS
      x←szülő[x]
    else if szín[jobb[w]]= FEKETE then
      szín[bal[w]]←FEKETE
      szín[w]←PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T,w)
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w]← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]]←FEKETE
    szín[jobb[w]]←FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x←gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x]←FEKETE
```

# Törlés utáni kiegyensúlyozás

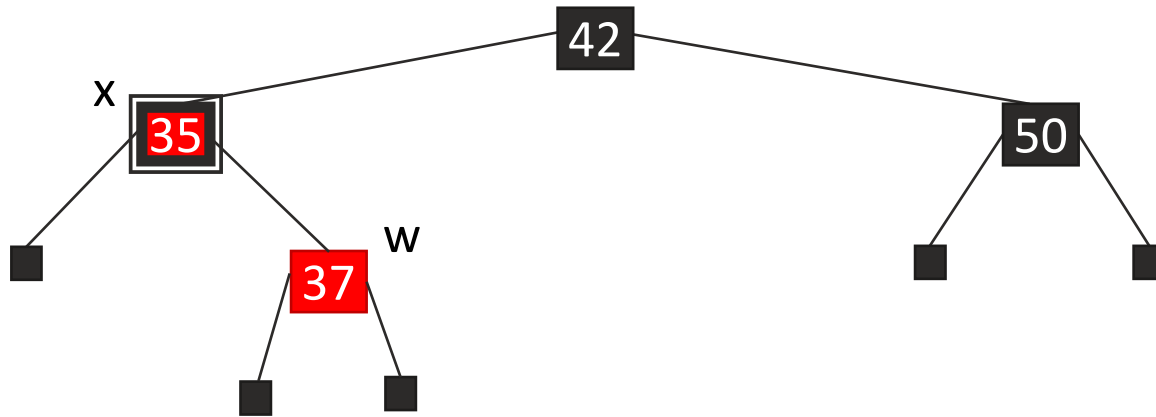
- Töröljük ki elemeket: 30



```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x] = FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w ← jobb[szülő[x]]
    if szín[w] = PIROS then
      szín[w] ← FEKETE;
      szín[szülő[x]] ← PIROS
      BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
      w ← jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w] ← PIROS
      x ← szülő[x]
    else if szín[jobb[w]] = FEKETE then
      szín[bal[w]] ← FEKETE
      szín[w] ← PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T, w)
      w ← jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w] ← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]] ← FEKETE
    szín[jobb[w]] ← FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x ← gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x] ← FEKETE
```

# Törlés utáni kiegyensúlyozás

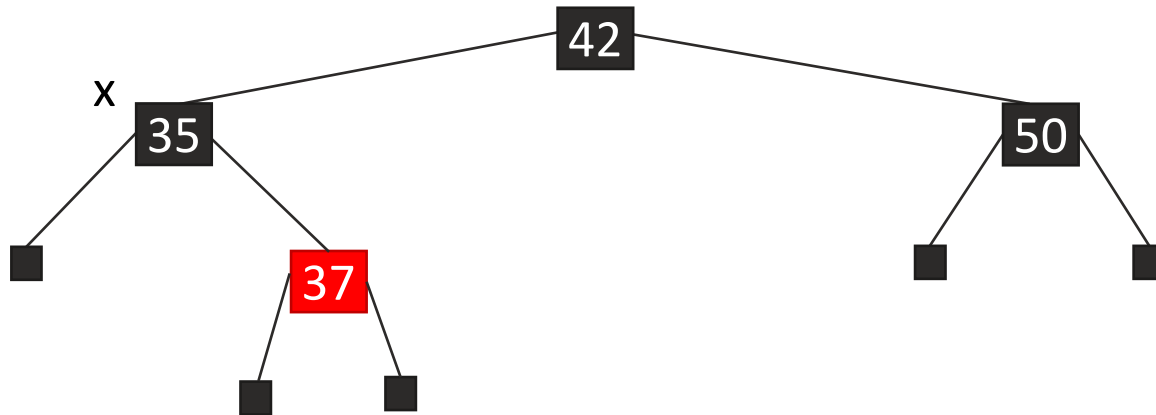
- Töröljük ki elemeket: 30



```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x] = FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w ← jobb[szülő[x]]
    if szín[w] = PIROS then
      szín[w] ← FEKETE;
      szín[szülő[x]] ← PIROS
      BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
      w ← jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w] ← PIROS
      x ← szülő[x]
    else if szín[jobb[w]] = FEKETE then
      szín[bal[w]] ← FEKETE
      szín[w] ← PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T, w)
      w ← jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w] ← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]] ← FEKETE
    szín[jobb[w]] ← FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x ← gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x] ← FEKETE
```

# Törlés utáni kiegyensúlyozás

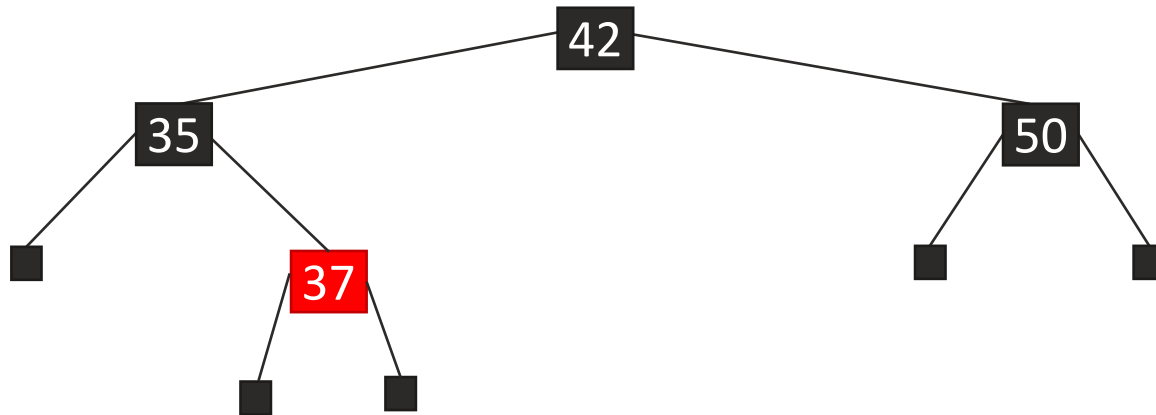
- Töröljük ki elemeket: 30



```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x] = FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w ← jobb[szülő[x]]
    if szín[w] = PIROS then
      szín[w] ← FEKETE;
      szín[szülő[x]] ← PIROS
      BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
      w ← jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w] ← PIROS
      x ← szülő[x]
    else if szín[jobb[w]] = FEKETE then
      szín[bal[w]] ← FEKETE
      szín[w] ← PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T, w)
      w ← jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w] ← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]] ← FEKETE
    szín[jobb[w]] ← FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x ← gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x] ← FEKETE
```

# Törlés utáni kiegyensúlyozás

- A további elemek törlése hasonlóan történik ...



```
while x ≠ gyökér[T] and szín[x]= FEKETE do
  if x = bal[szülő[x]] then
    w←jobb[szülő[x]]
    if szín[w]=PIROS then
      szín[w]←FEKETE;
      szín[szülő[x]]←PIROS
      BALRA-FORGAT(T,szülő[x])
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    if szín[bal[w]] = FEKETE and szín[jobb[w]] = FEKETE
    then
      szín[w]← PIROS
      x←szülő[x]
    else if szín[jobb[w]]= FEKETE then
      szín[bal[w]]←FEKETE
      szín[w]←PIROS
      JOBBRA-FORGAT(T,w)
      w←jobb[szülő[x]]
    end if
    szín[w]← szín[szülő[x]]
    szín[szülő[x]]←FEKETE
    szín[jobb[w]]←FEKETE
    BALRA-FORGAT(T, szülő[x])
    x←gyökér[T]
  end if
else
  tükörkép
end if
end while
szín[x]←FEKETE
```

# Összegzés

# Piros-Fekete fák – Elemzés

- Hozzáadás
  - Beszúrás
    - Összehasonlítások  $\mathcal{O}(\log_2 n)$
    - PF-tulajdonsághoz  $\mathcal{O}(\log_2 n)$ 
      - Minden lépésnél  $x$  felfelé mozog a fában legalább egy szintet
  - Összesen  $\mathcal{O}(\log_2 n)$
- Törlés
  - Összesen szintén  $\mathcal{O}(\log_2 n)$
- Bonyolultabb, de  $\mathcal{O}(\log_2 n)$  viselkedést ad dinamikus esetekben is!



# Dinamikus fák: PF vagy AVL?

- Beszúrás
  - AVL: két menet a fán keresztül
    - lefelé a csúcs beszúrásához
    - felfelé az újrakegyensúlyozáshoz
  - Piros-Fekete: két menet a fán keresztül
    - lefelé a csúcs beszúrásához
    - felfelé az újrakegyensúlyozáshoz
- A Piros-Fekete népszerűbb?

# Dinamikus fák: PF vagy AVL?

- Beszúrás

- Ha a Cormen et al. könyvet olvassuk,
  - nem indokolja, hogy miért részesíti előnyben a Piros-Fekete fákat
- Weiss könyvében szerepel, hogy egy Piros-Fekete fát *ki lehet egyensúlyozni egy menetben*
  - M A Weiss, Algorithms, Data Structures and Problem Solving with C++, Addison-Wesley, 1996
  - Így a Piros-Fekete fák hatékonyabbak lesznek, mint az AVL fák!

- Fontos olvasni a szakirodalmat

# Dinamikus fák

- Beszúrás egy menetben
  - Ahogy megyünk lefelé a fán, ha találunk egy csúcsot két **piros** gyerekkel, változtassuk a színét pirosra és a gyerekeket feketére
  - Ez nem változtatja a fekete csúcsok számát egyetlen úton sem
  - Ha ennek a csúcsnak a szülője **piros** volt, akkor forgatás kell ...
    - A forgatás lehet sima, vagy dupla

# Hasításos technikák

Következő téma