LinAlgDM II. 9-11. gyakorlat: Komplex számok I.

2024. április 04-05.

1 Gyorstalpaló tippek

A tippek önmagukban nem elegendő definíciók/tételek, a megértést és emlékezést segítik, és a feladatmegoldáshoz mutatnak utat!

1. Hint. Komplex szám fogalma

A valós számok halmazán a gyökvonás NEM zárt művelet. Azaz a gyök alatti negatív számok esetén nincsen értelmezett valós értékünk. Ezért ki kell terjesztenünk a valós számok halmazát egy olyan számhalmazra, amelyben minden gyök alatt szereplő negatív számnak is értelmet tulajdonítunk. Ez lesz a komplex számok halmaza.
Elképzelhetjük úgy, hogy a számegyenes már megtelt, így a számsíkra kell kibővítenünk azt. Könnyen megfoghatjuk úgy (nem matematikai megfogalmazás, csak intuíció!), hogy az 1-es szám és a $\sqrt{-1}$ lineáris kombinációjával felírjuk, hogy az adott számban hányszor szerepel a $\sqrt{-1}$.
Például: $\sqrt{-9} = \sqrt{9}\sqrt{-1} = 3\underbrace{\sqrt{-1}}_{?}$

Később látni fogjuk, hogy egy komplex számnak pontosan két négyzetgyöke lesz a komplex számok halmazán. Ezért valódi felírásban a fentieket "fordítva" definiáljuk: bevezetjük az i **képzetes egységet**, amelyre igaz, hogy $i^2 = -1$.
Az előző példánk megoldása pl. a $3i$, mert ezt négyzetre emelve -9-et kapunk eredményül. Itt is láthatjuk, hogy igazából két megoldásunk is van: a $3i$ és a $-3i$, vagyis a -9-nek két komplex négyzetgyöke lesz.

A valós számokat úgy terjesztjük ki a komplex számokra, hogy a valós összeadás és szorzás jó tulajdonságait megtartsuk.

2 Elméleti összefoglaló

Definition 2. Komplex számok három alakja

A komplex számokat ábrázolhatjuk a síkon. A vízszintes tengely, az ún. *valós tengely* - jelölése: $Re(z)$ - a valós számoknak felel meg, míg a függőleges tengely az ún. *képzetes tengely* - jelölése: $Im(z)$ -, melyen az i képzetes egység is van.

A komplex számoknak három alakját használjuk:

1. **Algebrai alak:**

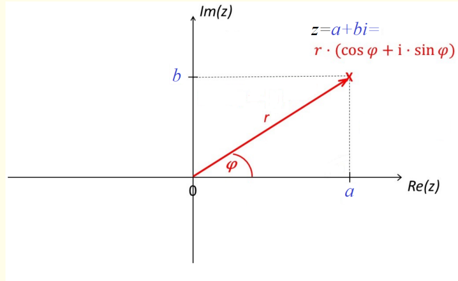
$$z = \underbrace{a}_{\text{valós rész}} \cdot 1 + \underbrace{b}_{\text{képzetes rész}} \cdot i$$

Ezt értelmezhetjük úgy, hogy az **1** és az $\boldsymbol{i}$ "lineáris kombinációja" maga a komplex szám, így tekinthető kétdimenziós vektornak is, amelynek koordinátái rendre a és b. Persze a komplex számok jóval többet "tudnak", mint a síkbéli vektorok, hiszen ezek is számtestet alkotnak az összeadás és szorzás műveletekkel, csakúgy, mint a valós számok.

A fenti képletben az $a \in \mathbb{R}$ számot a z komplex szám *valós részének*, a $b \in \mathbb{R}$ számot a z *képzetes részének* hívjuk, és a következőképpen jelöljük:

$$Re(z) = a, \quad Im(z) = b$$

2. **Trigonometrikus alak:** $z = r \cdot (\cos(\phi) + i \sin(\phi))$



Ahol r a komplex *abszolút értéke* (hossza), ϕ pedig a komplex szám *argumentuma* (valós (Re) tengely pozitív felével bezárt szöge).

3. **Exponenciális alak:** $z = r \cdot e^{i \cdot \phi}$
   Ez az alak szintén a fent leírt hosszal és szöggel dolgozik.

Megjegyzés 1. Az utóbbi két alak (a trigonometrikus és az exponenciális) valójában a komplex számsík vektorának *polárkoordinátás* felírása, azaz hossza és szöge van. Mérnöki jelöléssel: $r\angle\phi$

Megjegyzés 2. Az exponenciális alak és a trigonometrikus alak egymásból származtatható az **Euler-formulával**:

$$e^{i \cdot \phi} = \cos(\phi) + i \cdot \sin(\phi).$$

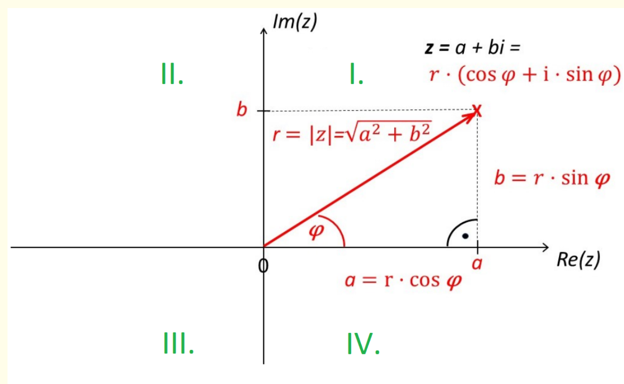
Definition 3. Átváltás a koordináták között

- Polárkoordinátákból algebrai alakba, $(r, \phi) \to (a, b)$:

$$a = r \cdot cos(\phi)$$
$$b = r \cdot sin(\phi)$$

- Algebrai alakból polárkoordinátákba, $(a, b) \to (r, \phi)$:

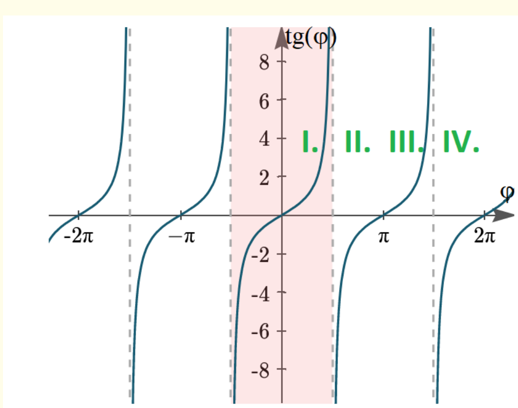
$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \phi = \begin{cases} arctg(\frac{b}{a}) & \text{(I. síknegyed)} \\ arctg(\frac{b}{a}) + \pi & \text{(II-III. síkn.)} \\ arctg(\frac{b}{a}) + 2\pi & \text{(IV. síknegyed)} \\ \frac{\pi}{2} \text{ vagy } \frac{3\pi}{2} & \text{ha } a = 0 \end{cases}$$

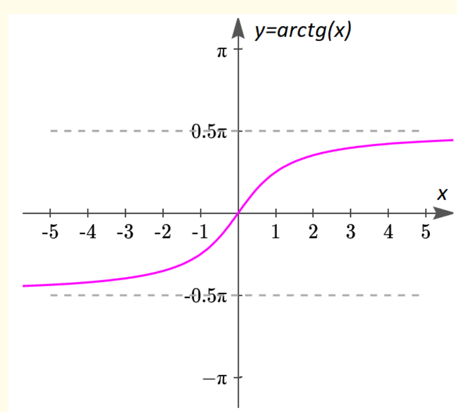


Megjegyzés 3. A negyedik síknegyedben nem kötelező hozzáadni a $+2\pi$-t a szöghöz, ekkor negatív szöget kapunk (pl. $\frac{7\pi}{4} = 315°$ helyett $-\frac{\pi}{4} = -45°$). Így elég annyit megjegyeznünk, hogy a II-III. síknegyedben π-t hozzá kell adnunk az $arctg(\frac{b}{a})$-hoz, míg a másik két síknegyedben nem.

Megjegyzés 4. Nevezetes szögek: $tg(0°) = 0$, $tg(\pm 30°) = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, $tg(\pm 45°) = \pm 1$, $tg(\pm 60°) = \pm\sqrt{3}$

Megjegyzés 5. Átváltáskor mindig ábrázoljunk!





Theorem 4. Komplex számok összege

Összeadni algebrai alakban érdemes, mert itt pontosan úgy számolunk, ahogy a valós számoknál megszoktuk:

$$z_1 = a_1 + b_1 i, \quad z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

Theorem 5. Komplex számok szorzata

1. **Algebrai alakban**

$$z_1 = a_1 + b_1 i, \quad z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 \underbrace{i^2}_{-1} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

Mindenkit mindenkivel összeszorzunk.

2. **Trigonometrikus alakban:**

$$z_1 = r_1(\cos(\phi_1) + i\sin(\phi_1)), \quad z_2 = r_2(\cos(\phi_2) + i\sin(\phi_2))$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2))$$

Hosszak szorzódnak, argumentumok (szögek) összeadódnak.

3. **Exponenciális alakban:**

$$z_1 = r_1 e^{i\phi_1} \quad z_2 = r_2 e^{i\phi_2}$$

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\phi_1} r_2 e^{i\phi_2} = r_1 r_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$$

Hosszak szorzódnak, argumentumok (szögek) összeadódnak.

Theorem 6. Komplex számok hatványa

1. **Trigonometrikus alakban:**

$$z = r(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$$

$$z^n = r^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi))$$

Hossz hatványozódik, argumentum (szög) n-szeres lesz.

2. **Exponenciális alakban:**

$$z = re^{i\phi}$$

$$z^n = r^n e^{in\phi}$$

Hossz hatványozódik, argumentum (szög) n-szeres lesz.

Theorem 7. Komplex számok n. gyöke

Egy komplex számnak pontosan n db n. gyöke van a komplex számok halmazán.

1. **Trigonometrikus alakban:**

$$z = r \cdot (\cos(\phi) + i\sin(\phi))$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\phi + k2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\phi + k2\pi}{n}\right)\right), \quad k = 0, ..., n-1$$

A hosszból n. gyököt vonunk (valós számokon értelmezett gyökvonással!), az argumentumot (szöget) n-nel osztjuk és figyelembe vesszük a szögek periódusát, azaz k-szor elforgatjuk.

2. **Exponenciális alakban:**

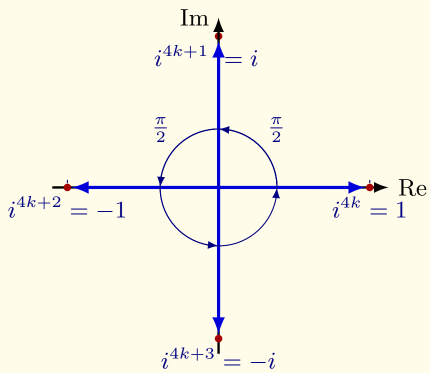
$$z = r \cdot e^{i\phi}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\phi + k2\pi}{n}}, \quad k = 0, ..., n-1$$

Az n. gyökök hossza az eredeti hossz n. (valós) gyöke lesz, az argumentum (szög) n-nel osztódik és figyelembe vesszük a szögek periódusát, azaz k-szor elforgatjuk.

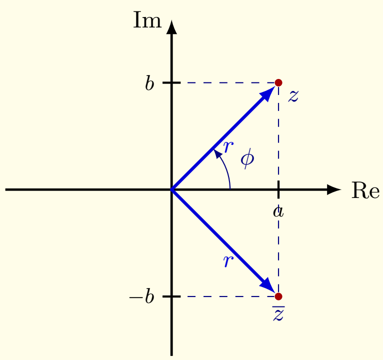
Theorem 8. Az i képzetes egység hatványai

$$\begin{aligned} i^0 &= 1 \\ i^1 &= i \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= i^2 \cdot i = -i \\ i^4 &= i^3 \cdot i = -i^2 = 1 = i^0 \\ i^5 &= i^4 \cdot i = i = i^1 \\ &\vdots \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} i^{4k} &= 1 \\ i^{4k+1} &= i \\ i^{4k+2} &= -1 \\ i^{4k+3} &= -i \end{aligned} \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$



Definition 9. Komplex szám konjugáltja

$$\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi$$



Megjegyzés 6. Egy komplex szám konjugálása tulajdonképpen a valós (Re) tengelyre való tükrözése.

Megjegyzés 7. Tulajdonságai:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$$
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$$
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$$
$$\overline{\overline{z}} = z$$
$$|\overline{z}| = |z|$$
$$z = \overline{z} \quad \Leftrightarrow \quad Im(z) = 0$$
$$z \cdot \overline{z} = |z|^2 \,, \quad \text{mert } z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = r^2 = |z|^2$$

Theorem 10. Algebra alaptétele

Minden n-edfokú polinomnak n db gyöke van a komplex számok halmazán. (Ez már tartalmazza a valós gyököket is: ezek azok a komplex gyökök, melyek képzetes része 0.)

3 Feladatok

Feladat 1. Határozzuk meg a következő kifejezések értékét:

(a) $z_1 = (3-4i)(7+8i)$

(a2) $z_1 = \overline{(3+4i)(7-8i)}$

(b) $z_2 = \dfrac{3-4i}{2-i}$

(c) $z_3 = \dfrac{3-i}{1+i} - \dfrac{8-i}{2+3i}$

(d) $z_4 = i^{2023}$

(e) $z_5 = (1+i)^4$, $\quad \overline{z_5} =?$ $\quad |z_5| =?$

(f) $z_6 = (1+i)^9$, $\quad Re(z_6) =?$ $\quad Im(z_6) =?$

(g) $z_7 = \dfrac{(1+2023i)^{2023}}{(1-2023i)^{2023}}$, $\quad |z_7| =?$

(h) $z_8 = (2+i)^5$, $\quad \overline{z_8} =?$ $\quad |z_8| =?$

Feladat 2. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket a komplex számok körében:

(a)

$$(3-i)x + (4+2i)y = 2+6i$$
$$(4+2i)x - (2+3i)y = 5+4i$$

(b)

$$(2+i)x + (2-i)y = 6$$
$$(3+2i)x + (3-2i)y = 8$$

Feladat 3. Határozzuk meg azokat a komplex számokat, amelyekre teljesül, hogy a szám konjugáltja egyenlő az eredeti szám négyzetével!

Feladat 4. Írjuk át algebrai alakba a következő komplex számokat:

(a) $z_1 = \dfrac{1}{2}\left(\cos(300^\circ) + i\sin(300^\circ)\right)$

(b) $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)\right)$

Feladat 5. Írjuk fel trigonometrikus alakban a következő számokat:

(a) $z_1 = -1-i$

(b) $z_2 = -3i$

(c) $z_3 = -1$

(d) $z_4 = -3 + \sqrt{3}i$

(e) $z_5 = \dfrac{10}{\sqrt{3}-i}$