Feltételes szélsőérték

$f(x,y)$ szélsőértékei a $\phi(x,y)=0$ feltétel mellett

$\downarrow$

megfelelő körülmények között $\exists$ implicit függvény, illetve valamilyen görbe/alakzat

Lagrange-multiplikátor

a keresett pontok stac. pontjai az

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) \underset{(+)}{-} \lambda \phi(x,y)$$ függvénynek

1., $f(x,y) = \sin(x+y)$ $\quad \underbrace{\phi(x,y) = x^2+y^2-1=0}_{\text{origó középpontú egységkör}}$

$$F(x,y,\lambda) = \sin(x+y) - \lambda\left(x^2+y^2-1\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cos(x+y) - \lambda 2x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \cos(x+y) - \lambda 2y$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -\phi(x,y) = -\left(x^2+y^2-1\right) = 0$$

Keressük az (x_0, y_0, λ_0) pontokat, melyre $\nabla F(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$, azaz

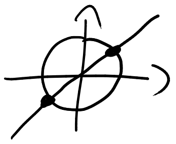
$$\left.\begin{aligned} \cos(x_0+y_0) - \lambda_0 2x_0 &= 0 \\ \cos(x_0+y_0) - \lambda_0 2y_0 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ kivonás után } 2\lambda_0 y_0 - 2\lambda_0 x_0 = 2\lambda_0(y_0 - x_0) = 0$$

$$-\left(x_0^2+y_0^2-1\right) = 0$$

$\lambda_0 = 0$ $\qquad$ $y_0 = x_0$

ez simán lehetne jó, de látni fogjuk, hogy itt most nem $\leftarrow$ ez használhatatlan szélsőértékhez vezet a $\Phi(x_0,y_0)=0$ feltételbe $x_0=y_0$-t írva

$$2x_0^2-1=0 \Rightarrow x_0=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\quad y_0=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$



Mi lenne, ha nem tudnánk deriválni?

$x,y\geq 0$ esetén

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

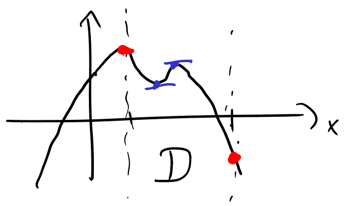
számtani közép $\leq$ négyzetes közép

azaz $x+y\leq\sqrt{2}$, egyenlőség ha $x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Tudjuk, hogy $\sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$ és a sin monoton nő a $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$-n, így max. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$-ben, min. $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

Abszolút szélsőérték

Emlék 1D



I., lok. sz. D belsejében $f'=0$ kritikus pontok

II., D határai kritikus pontok

III., kritikus pontok összehasonlítása

2D

I., lok. szé. D belsejében

$$\nabla f = 0$$

II., felt. szé. D határán

Lagrange-multiplikátor

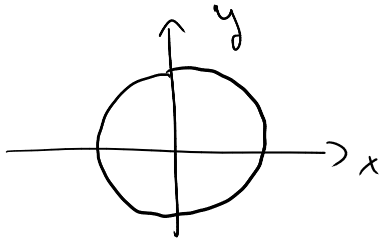
III., kritikus pontok összehasonlítása

2., $f(x,y) = e^{xy}$ $\quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$

= origó középpontú egységkör

I., lok. szé.

$$\nabla f = \begin{bmatrix} y e^{xy} \\ x e^{xy} \end{bmatrix}$$



Keressük az (x_0, y_0) pontokat, melyre $\nabla f(x_0,y_0) = 0$, azaz

$$\left.\begin{aligned} y_0 e^{x_0 y_0} &= 0 \\ x_0 e^{x_0 y_0} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad x_0 = y_0 = 0,$$ ez tényleg D-ben van

II., Lagrange-multiplikátor

$$\phi(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$$

$$F(x,y,\lambda) = e^{xy} - \lambda\left(x^2+y^2-1\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y e^{xy} - 2\lambda x, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = -\left(x^2+y^2-1\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x e^{xy} - 2\lambda y$$

Keressük az (x_0, y_0, λ_0) pontokat, melyre $\nabla F(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$, azaz

$$y_0 e^{x_0 y_0} - 2\lambda_0 x_0 = 0$$
$$x_0 e^{x_0 y_0} - 2\lambda_0 y_0 = 0$$
$$-(x_0^2 + y_0^2 - 1) = 0$$

$x_0 = 0 \iff y_0 = 0$, de $(0,0)$ nincs a körön

$\Rightarrow$ $x_0 \neq 0$ és $y_0 \neq 0$

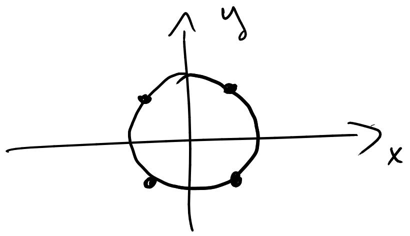
első egyenletből

$$2\lambda_0 = \frac{y_0}{x_0} e^{x_0 y_0}$$

másodikból

$$2\lambda_0 = \frac{x_0}{y_0} e^{x_0 y_0}$$

$$\frac{y_0}{x_0} e^{x_0 y_0} = \frac{x_0}{y_0} e^{x_0 y_0}$$
$$\Downarrow$$
$$x_0^2 = y_0^2$$
$$\Big\Downarrow \; \phi(x_0, y_0) = 1$$



$$x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y_0 = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$$

III, $f(0,0) = e^{0\cdot 0} = 1$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} > 1 \Rightarrow$ ezek absz. max.

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} < 1 \Rightarrow$ ezek absz. min.

Mi lenne, ha nem tudnánk deriválni?

$x, y \geq 0$

$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \leq \sqrt[k]{\frac{x^k+y^k}{2}}$$

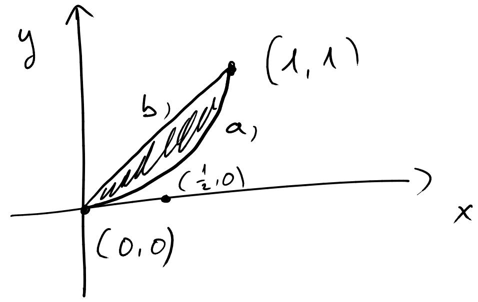
harmonikus közép; mértani közép $\leq$ számtani közép $\leq$ négyzetes közép; $k > 2$

$$\sqrt{xy} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

egyenlőség ha $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3., $f(x,y) = 2xy - y$ $\qquad D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[0,1],\ y\in[x^2, x]\}$

=



I., stac. pontok D-ben

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 2y \\ 2x-1 \end{bmatrix}$$

azaz

$$\nabla f(x_0,y_0) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} y_0 = 0 \\ x_0 = \frac{1}{2} \end{matrix}$$

ez nincs D-ben, nem foglalkozunk vele

II., felt. szé. határokon

a) $\phi(x,y) = y - x^2 = 0 \Leftarrow y = x^2$ parabola

$$F(x,y,\lambda) = 2xy - y - \lambda(y - x^2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2y + 2\lambda x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2x - 1 - \lambda, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = -(y - x^2)$$

Keressük az (x_0, y_0, λ_0) pontokat, melyre $\nabla F(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$, azaz

$$2y_0 + 2\lambda_0 x_0 = 0 \longrightarrow 2x_0^2 + 2(2x_0 - 1)x_0 = 0$$

$$2x_0 - 1 - \lambda_0 = 0 \to \lambda_0 = 2x_0 - 1$$

$$-(y_0 - x_0^2) = 0 \to y_0 = x_0^2$$

$$6x_0^2 - 2x_0 = 0$$

$$2x_0(3x_0 - 1) = 0$$

$$x_0 = 0 \qquad\qquad x_0 = \frac{1}{3}$$

$$y_0 = 0^2 = 0 \qquad\qquad y_0 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

b) $\phi(x,y) = y - x = 0 \leftarrow y = x$ egyenes

$$F(x,y,\lambda) = 2xy - y - \lambda(y-x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2y + \lambda, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2x - 1 - \lambda, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = -(y-x)$$

Keressük az (x_0, y_0, λ_0) pontokat, melyre $\nabla F(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$, azaz

$$2y_0 + \lambda_0 = 0$$
$$2x_0 - 1 - \lambda_0 = 0$$
összeadás $\longrightarrow 2x_0 + 2y_0 = 1$

$$-(y_0 - x_0) = 0 \rightarrow x_0 = y_0 \longrightarrow 4x_0 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$x_0 = \frac{1}{4}, \quad y_0 = \frac{1}{4}$$

+ lépés) tartomány "sarkai" is kritikus pontok

$x_0 = 1, \quad y_0 = 1$

III) kritikus pontok összehasonlítása

$$f(0,0) = 2 \cdot 0 \cdot 0 - 0 = 0$$
$$f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}\right) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = -\frac{1}{27}$$
$$f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}$$
$$f(1,1) = 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 = 1$$

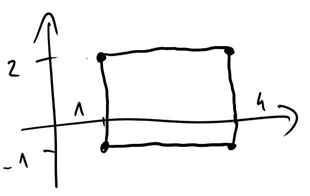
absz. max. $(1,1)$-ben

absz. min. $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$-ben

Integrálás téglalapon

Descartes-szorzat

$$D = [1,4] \times [-1,2]$$



$$\iint_D f(x,y)\, d(x,y) = \int_{-1}^{2} \left[\int_{1}^{4} f(x,y)\, dx \right] dy$$ ← 2db 1D integrál :)

2D integrál :(

$$= \int_{1}^{4} \left[\int_{-1}^{2} f(x,y)\, dy \right] dx$$

$f(x,y) = xy^2$

$$\int_{-1}^{2} \left(\int_{1}^{4} x y^2 \, dx \right) dy = \int_{-1}^{2} \left[\frac{x^2}{2} \cdot y^2 \right]_1^4 dy = \int_{-1}^{2} \frac{15}{2} y^2 \, dy$$

$$= \frac{5}{2} y^3 \Big|_{-1}^{2} = \frac{35}{2}$$

$$\int_{1}^{4} \int_{-1}^{2} x y^2 \, dy \, dx = \int_{1}^{4} \left[x \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^{2} dx = \int_{1}^{4} \frac{7}{3} x \, dx$$

$$= \frac{7}{6} x^2 \Big|_{1}^{4} = \frac{7}{6} \cdot 15 = \frac{35}{2}$$

ha $f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$, akkor $\iint_D f(x,y) \, d(x,y) = \left(\int_1^4 g(x) dx \right) \cdot \left(\int_{-1}^{2} h(y) dy \right)$

$$\left(\int_1^4 x \, dx \right) \cdot \left(\int_{-1}^{2} y^2 dy \right) = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^4 \cdot \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-1}^{2} = \frac{15}{2} \cdot \frac{7}{3} = \frac{35}{2}.$$