

Pázmány Péter Katolikus Egyetem Információs  
Technológiai és Bionikai Kar  
P-ITMAT-0030B - próbaZH #1 A  
Homogén lineáris leképezések, Magtér/Képtér,  
sajátérték/sajátvektor, TAS/SAS

2024/03/21

1. Legyen az  $L$  térbeli transzformáció mely során megnyújtjuk a vektorokat 2-vel, majd tükrözzük az  $yz$  síkra, s ezt vetítjük az  $xy$  síkra (maradjon meg a kieső koordináta nullaként, hogy 3D-ből 3D-ben maradjunk).
  - (a) (2 pont) Add meg a hozzárendelési szabályt általánosan  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow ?$
  - (b) (2 pont) Bizonyítsd be, hogy homogén.
  - (c) (2 pont) Bizonyítsd be, hogy lineáris.
  - (d) (2 pont) Add meg SZÁMOLÁS NÉLKÜL az  $L$  magterét és képterét a definíció alapján.
  - (e) (1 pont) Az előző kérdés/feladat alapján mit tudsz mondani biztosra a sajátértékekről?
  - (f) (2 pont) Add meg SZÁMOLÁS NÉLKÜL az  $L$  sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátvektorokat és sajátalttereket, definíció szerint.  
(2 pont) Add meg a leképezés mátrixát.
2. Egy 3D-s akció-kaland játékban a játékos karakterének egy adott mozgását az alábbi  $A$  mátrix által reprezentált transzformáció hajtja végre. Elemezzük ennek a mozgásnak a tulajdonságait, számítsuk ki

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) (4 pont) magterét és képterét;
- (b) (5 pont) sajátértékeit, a sajátértékekhez tartozó sajátalttereket. Ha az a) feladat alapján tudsz valamit, nyugodtan hivatkozz rá. - Létezik-e a  $\lambda = 0$ ?

- (c) (2 pont) Add meg az algebrai és geometriai multiplicitás táblázatát.
- (d) (2 pont) A játék során nagyon fontos, hogy real-time zavartalanul tudjunk mozogni, máskülönben könnyen idegesek leszünk és elveszítjük a játékot. Add meg azt a bázist, ha létezik, amelyben csökkenthetjük a karakter mozgásának számítási költségeit a játékban, ami lehetővé teszi a sima mozgást, még alacsonyabb számítási erőforrásokkal is rendelkező eszközön.
- (e) (1 pont) Add meg ezt a mátrixot.
- (f) (2 pont) A mozgást egy adott billentyűkombinációval egyből meg lehet csinálni 10-szer. Mi lesz ennek a mozgásnak a mátrixa? Számold ki az  $A^{10}$  mátrixot.

3. Adott egy 3D nyomtatóm, melynek a léptetőmotorja az alábbi irányokban

képes a fejet mozgatni:  $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,  $b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

A nyomtatást a  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  pozícióban szeretném elkezdni. Melyik irányban, mennyit kell léptetni a nyomtató fejét?

- (a) (2 pont) Amennyiben valódi bázis, adja meg a  $v$  vektor koordinátáit a  $[b]$  bázisban. Az egyenletrendszert inverzmátrix segítségével olda meg. Az inverz mátrixot az adjungált segítségével számold ki!
- (b) (2 pont) Miért bázis, indokolja.

4. Minecraft játékot szeretnénk megjeleníteni egy kétdimenziós monitoron. A megjelenítést az  $L$  leképezés hajtja végre.

Átrakjuk az ablakot egy másik monitorra, a monitor másfajta beállítása és felbontása miatt bázistranszformációval áttérünk a  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$  bázisra, hogy a játék képe továbbra is élvezhető maradjon.

A Minecraft azonban a jobbra, balra, fel (i, j, k) helyett a következő koordinátarendszerben gondolkodik: "X" a hosszúságodat jelenti. Ha az X pozitív, akkor keletre vagy a kiinduló blokkodtól. ha az X negatív, akkor nyugatra vagy a kiinduló blokkodtól. "Y" a magasságodat jelenti. 63 a tengerszint, és 0 a sziklaalap. "Z" a szélességedet jelenti. Ha a Z pozitív, akkor délre vagy a kiinduló blokkodtól. Ez az alábbi bázist jelenti, ha a kiindulóblokkod a sziklaalapon van:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Az  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  lineáris leképezés mátrixa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

ha mind a kiindulási, mind a képtérben a kanonikus bázist használjuk.

- (a) (4 pont) Írd fel az  $L$  leképezés mátrixát, ha a Minecraft világot szeretnénk a másik monitorunkon megjeleníteni.
- (b) (2 pont) Mi lesz az  $\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$ , blokk pozíciója az eredeti képernyőn?
- (c) (2 pont) Mi lesz az új képernyőn?
- (d) (2 pont) Mi lesz az  $\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$ , blokk pozíciója Minecraft koordináták szerint?
- (e) (2 pont) Végezd el a leképezést a Minecraft koordinátákon és az új monitorra képezz. Ugyanaz lett, mint a c) pontban? ( Akkor jó )