Analízis II. vizsgatételek

Vághy Mihály

Tartalomjegyzék

1. Tétel

1.1. Függvénysorozat

Függvénysorozat egy olyan hozzárendelés, mely $\forall n \in \mathbb{N}$-hez hozzárendel egy

$$f_n(x) : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$$

függvényt. Ekkor a sorozatot (f_n)-el jelöljük.

1.2. Pontonként konvergens függvénysorozat

Adott az $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvénysorozat. Ekkor azt mondjuk, hogy az (f_n) sorozat pontonként konvergál az $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvényhez, ha $\forall x \in [a, b]$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

azaz $\forall \varepsilon > 0$ és $\forall x \in [a, b]$ esetén $\exists N(\varepsilon, x)$, melyre $\forall n \geq N$ esetén

$$\Big|f_n(x) - f(x)\Big| < \varepsilon.$$

Ekkor $\lim f_n = f$.

1.3. Egyenletesen konvergens függvénysorozat

Adott az $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvénysorozat. Ekkor azt mondjuk, hogy az (f_n) sorozat egyenletesen konvergál az $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvényhez, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon)$, melyre $\forall n \geq N$ esetén

$$\Big|f_n(x) - f(x)\Big| < \varepsilon$$

teljesül $\forall x \in [a, b]$.

1.4. Pontonként konvergens függvénysor

Adottak az $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvények. Ekkor azt mondjuk, hogy a $\left(\sum f_n\right)$ függvénysor pontonként konvergál az $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvényhez, ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$$

teljesül $\forall x \in [a, b]$, azaz $\forall \varepsilon > 0$ és $\forall x \in [a, b]$ esetén $\exists N(\varepsilon, x)$, melyre $\forall n \geq N$ esetén

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x)\right| < \varepsilon.$$

Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f.$$

1.5. Egyenletesen konvergens függvénysor

Adottak az $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvények. Ekkor azt mondjuk, hogy a $\left(\sum f_n\right)$ függvénysor egyenletesen konvergál az $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvényhez, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N(\varepsilon)$, melyre $\forall n \geq N$ esetén

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x)\right| < \varepsilon$$

teljesül $\forall x \in [a, b]$.

1.6. Weierstrass kritérium

Adottak az $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvények. Tegyük fel, hogy az f_n függvények korlátosak, és $|f_n(x)| < a_n$. Ekkor ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

egyenletesen konvergens.

Bizonyítás
A végtelen sorokra vonatkozó Cauchy kritérium miatt tudjuk, hogy $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N$, melyre

$$\sum_{k=m}^{n} a_k < \varepsilon.$$

Ekkor

$$\left| \sum_{k=m}^{n} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m}^{n} \left| f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m}^{n} a_k < \varepsilon.$$

1.7. Összegfüggvény folytonossága

Tegyük fel, hogy az $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvények folytonosak, továbbá a

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$$

egyenletesen konvergens. Ekkor $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ is folytonos.

Bizonyítás
Legyen

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) = F_n(x) + R_n(x).$$

Az egyenletes konvergencia miatt tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $\exists N$ küszöbindex, melyre $n > N$ esetén

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| = \left| R_n(x) \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Ebből kapjuk, hogy $\left| R_n(x) - R_n(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall x, x_0 \in [a, b]$.
Mivel $F_n(x)$ véges sok folytonos függvény összege, ezért önmaga is folytonos, tehát $\exists \delta > 0$, melyre $|x - x_0| < \delta$ esetén $\left| F_n(x) - F_n(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Azt kaptuk tehát, hogy $|x - x_0| < \delta$ esetén

$$\left| f(x) - f(x_0) \right| \leq \left| F_n(x) - F_n(x_0) \right| + \left| R_n(x) - R_n(x_0) \right| < \varepsilon$$

tehát a függvény folytonos.

1.8. Összefüggvény integrálhatósága

Tegyük fel, hogy az $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvényekre $f_n \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$, ahol $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, továbbá a

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$$

egyenletesen konvergens. Ekkor

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f_n(x) \, \mathrm{d}x \,.$$

1.9. Összegfüggvény deriválhatósága

Tegyük fel, hogy az $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak, továbbá az

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$$

és

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = g(x)$$

egyenletesen konvergensek. Ekkor $g(x) = f'(x)$, azaz

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

2. Tétel

2.1. Fourier sor

Az $f : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$ $[-\pi, \pi]$-n integrálható függvény Fourier sora

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \Big)$$

ahol a Fourier együtthatók

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \, \mathrm{d}x$$

és

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \, \mathrm{d}x \, .$$

A sort közelíthetjük az n-edik Fourier polinommal

$$s_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \Big).$$

2.1.1. Deriváltfüggvény Fourier sora

Adott $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ 2π periódusú, differenciálható függvény. Ekkor f' Fourier sora tagonkénti deriválással kiszámítható, azaz

$$f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \Big(- a_k k \sin(kx) + b_k k \cos(kx) \Big).$$

Bizonyítás

Vizsgáljuk meg f' Fourier együtthatóit!

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \, \mathrm{d}x = 0$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos(kx) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \left(f(x) \cos(kx) \Big|_{-\pi}^{\pi} + k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \right) =$$

$$= \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \, \mathrm{d}x = k b_k.$$

Hasonlóan belátható, hogy

$$\beta_k = -k a_k.$$

2.2. Fourier sorok konvergenciája

Adott $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ 2π periódusú függvény. Tegyük fel, hogy a $[-\pi, \pi]$ intervallumon f megfelel a Dirichlet feltételnek, azaz szakaszonként folytonos, legfeljebb véges sok szakadási hellyel, amelyek elsőfajú szakadások. Legyen továbbá az x_0 szakadási pontokban

$$f(x_0) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$$

Ekkor f-t előállítja a Fourier sora.

2.3. Bessel-egyenlőtlenség

Tegyük fel, hogy
$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\Big).$$
Ekkor $\forall n\in\mathbb{N}$ esetén
$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Bizonyítás
Tudjuk, hogy
$$0\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-\frac{a_0}{2}-\sum_{k=1}^{n}\Big(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\Big)\right)^2=$$
$$=\frac{1}{\pi}\Bigg(\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0^2}{4}\,\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{n}\left\{a_k^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(kx)\,\mathrm{d}x+b_k^2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(kx)\,\mathrm{d}x\right\}-$$
$$-a_0\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x+2\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\ne j}}^{n}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}a_ja_k\cos(jx)\cos(kx)\,\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}b_jb_k\sin(jx)\sin(kx)\,\mathrm{d}x\right\}+$$
$$+2\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\ne j}}^{n}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}a_jb_k\cos(jx)\sin(kx)\,\mathrm{d}x\right\}-$$
$$-2\sum_{k=1}^{n}\left\{a_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x+b_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x\right\}+$$
$$+a_0\sum_{k=1}^{n}\left\{a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\,\mathrm{d}x+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\,\mathrm{d}x\right\}\Bigg).$$
Ekkor a trigonometrikus függvényrendszer ortogonalitása miatt azt kapjuk, hogy
$$0\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x+\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)-\frac{a_0}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x-$$
$$-2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x+\frac{b_k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x\right)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x+\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)-a_0^2-2\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right).$$
Átrendezve az egyenlőtlenséget kapjuk, hogy
$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

2.4. Parseval egyenlőség Fourier soroka

Tegyük fel, hogy
$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\Big).$$
Ekkor
$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

3. Tétel

3.1. Kétváltozós függvény értelmezése, ábrázolása

Adott $S \subset \mathbb{R}^2$. Ekkor

$$f : S \mapsto \mathbb{R}$$

kétváltozós függvény, ahol S pontjaihoz $(x, y) \mapsto u$. Ekkor x, y független változók, u függő változó.
Kétváltozós függvényeket három dimenzióban könnyen tudunk ábrázolni, az xy sík legyen az értelmezési tartomány, és az $(x, y, 0)$ ponthoz rendeljük hozzá az $\big(x, y, f(x, y)\big)$ pontot. Ábrázolhatjuk még két dimenzióban a felület szintvonalait, ilyenkor az $f(x, y) = k$ görbét ábrázoljuk.

3.2. Folytonosság pontban

Adott f kétváltozós függvény és $(x_0, y_0) \in D_f$. Ekkor f folytonos az (x_0, y_0) pontban, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta > 0$, melyre $\forall (x, y) \in D_f$, $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$ esetén $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$.

3.3. Sorozatfolytonosság pontban

Adott f függvény sorozatfolytonos a $P_0 \in D_f$ pontban, ha $\forall (P_n) \subset D_f$ sorozatra $\lim_{n\to\infty} P_n = P_0$ esetén $\lim_{n\to\infty} f(P_n) = f(P_0)$.

3.4. Bolzano tétel

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ folytonos függvény, ahol S összefüggő. Legyen $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S$, melyekre $a = f(x_1, y_1) < f(x_2, y_2) = b$. Ekkor $\forall c \in (a, b)$ számhoz $\exists (x_0, y_0) \in S$, melyre $f(x_0, y_0) = c$.

Bizonyítás

Mivel S folytonos, létezik az (x_1, y_1) és (x_2, y_2) pontokat összekötő folytonos görbe, azaz létezik $\gamma : [\alpha, \beta] \mapsto \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ függvény, melyre $\gamma(\alpha) = (x_1, y_1)$ illetve $\gamma(\beta) = (x_2, y_2)$. Ekkor az $F(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$ függvényre az egydimenziós Bolzano tétel miatt $\exists \xi \in (\alpha, \beta)$, melyre $F(\xi) = c$. Ekkor $(x_0, y_0) := \gamma(\xi)$-re valóban $f(x_0, y_0) = c$.

3.5. Weierstrass tétel

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ folytonos függvény, ahol S korlátos és zárt. Ekkor R_f korlátos és zárt.

3.6. Egyenletes folytonosság

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$, ahol $S \subset \mathbb{R}^2$. Azt mondjuk, hogy f egyenletesen folytonos S-ben ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, melyre $\forall P, P' \in S$, $\|P - P'\| < \delta$ esetén $|f(P) - f(P')| < \varepsilon$. Ekkor $\delta = \delta(\varepsilon)$ az ε-hoz tartozó folytonossági modulus.

4. Tétel

4.1. Függvény határértéke

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ függvény, és legyen $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ torlódási pont D_f-ben. Azt mondjuk, hogy

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

ha $\forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists\delta > 0$, melyre $(x, y) \in S$, $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$ esetén $\big|f(x, y) - L\big| < \varepsilon$.

4.2. Parciális derivált

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ kétváltozós valós függvény. Legyen $(x_0, y_0) \in intS$. Ekkor a függvény x szerinti parciális deriváltja az (x_0, y_0) pontban

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Hasonlóan a függvény y szerinti parciális deriváltja az (x_0, y_0) pontban

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

4.2.1. Geometriai jelentés

Rögzített y_0 mellett definiáljuk az $f_1(x) = f(x, y_0)$ függvényt. Ekkor $f_1'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0)$, tehát a definiált metszetfüggvény meredekségét kapjuk meg. Ez azt jelenti, hogy a parciális deriváltak a felület érintősíkjának x és y irányú meredekségét adják meg.

4.3. Parciális deriváltak és folytonosság

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ ahol $S \subset \mathbb{R}^2$, és legyen $(x_0, y_0) \in intD_f$. Tegyük fel, hogy $\exists U$ környezete (x_0, y_0)-nak, amiben $\exists\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ és $\exists K \in \mathbb{R}$, amire

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \le K \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le K$$

teljesül $\forall(x, y) \in U$ esetén. Ekkor f folytonos (x_0, y_0)-ban.

Bizonyítás

Vizsgáljuk meg az $|f(x, y) - f(x_0, y_0)|$ kifejezést, ahol $(x, y) \in U$.

$$\big|f(x, y) - f(x_0, y_0)\big| = \big|f(x, y) - f(x_0, y) + f(x_0, y) - f(x_0, y_0)\big| \le$$
$$\le \big|f(x, y) - f(x_0, y)\big| + \big|f(x_0, y) - f(x_0, y_0)\big|.$$

Ekkor a Lagrange-féle középértéktételből

$$f(x, y) - f(x_0, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_x, y)(x - x_0)$$
$$f(x_0, y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \xi_y)(y - y_0)$$

alkalmas ξ_x, ξ_y esetén. Ekkor

$$\big|f(x, y) - f(x_0, y_0)\big| \le \left|\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_x, y)(x - x_0)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \xi_y)(y - y_0)\right| \le$$
$$\le K|x - x_0| + K|y - y_0|.$$

Ekkor nyilván

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \big|f(x, y) - f(x_0, y_0)\big| = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy f valóban folytonos.

4.4. Magasabb rendű parciális deriváltak

4.4.1. Másodrendű parciális deriváltak

Tegyük fel, hogy f kétváltozós függvény kétszer differenciálható az értelmezési tartomány (x, y) belső pontjában. Ekkor a másodrendű parciális deriváltak a $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ parciális deriváltjai az (x, y) pontban. A másodrendű parciális deriváltak

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

4.4.2. n-edrendű parciális deriváltak

Tegyük fel, hogy f kétváltozós függvény n-szer differenciálható az értelmezési tartomány (x, y) belső pontjában. Az n-edrendű parciális deriváltak

$$\frac{\partial^n f}{\partial y^k \partial x^m} \qquad \frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^m}$$

alakúak, ahol $k + m = n$.

4.5. Parciális deriválások sorrendje, felcserélhetősége

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$, és legyen $(x_0, y_0) \in intD_f$. Tegyük fel, hogy $\exists U$ környezete (x_0, y_0)-nak, amiben $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ és folytonosak az (x_0, y_0) pontban. Ekkor

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

teljesül $\forall (x, y) \in U$ esetén.

5. Tétel

5.1. Teljes differenciálhatóság

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ és legyen $(x_0, y_0) \in intD_f$. Azt mondjuk, hogy a függvény differenciálható az (x_0, y_0) pontban, ha $\exists A, B, C \in \mathbb{R}$, melyekre

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = A\Delta x + B\Delta y + C + o\big(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\big)$$

teljesül elegendően kicsi $\Delta x, \Delta y$ esetén, ahol A, B, C függetlenek Δx-től és Δy-tól.

5.2. Kapcsolat a parciális deriváltakkal

Ha f differenciálható az $(x_0, y_0) \in intD_f$ pontban, akkor

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \qquad B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \qquad C = f(x_0, y_0).$$

Bizonyítás

1. Legyen $\Delta x = \Delta y = 0$. Ekkor valóban
$$f(x_0, y_0) = C.$$
2. Legyen $\Delta y = 0$. Ekkor
$$f(x_0 + \Delta x, y_0) = A\Delta x + f(x_0, y_0) + o(|\Delta x|).$$
Ebből kapjuk, hogy
$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = A + \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}$$
amiből nyilván
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(A + \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x} \right) = A.$$
3. Az előzőhöz analóg módon kapjuk, hogy
$$B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

5.3. Gradiens

Ha az f függvény differenciálható az (x_0, y_0) pontban, akkor ebben a pontban a derivált egy kétdimenziós vektor, a gradiens

$$\boldsymbol{\nabla} f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

Ha egy függvény egy S tartomány minden pontjában differenciálható, akkor a deriváltfüggvény

$$\nabla f : S \mapsto \mathbb{R}^2$$

típusú lesz.

5.4. Folytonosság és differenciálhatóság

5.4.1. Tétel

Ha f differenciálható az (x_0, y_0) pontban, akkor itt folytonos.

Bizonyítás
Tudjuk, hogyha f differenciálható az (x_0, y_0) pontban, akkor

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + f(x_0, y_0) + o\big(\|(\Delta x, \Delta y)\|\big).$$

Ebből azonnal kapjuk, hogy

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x_0, y_0).$$

5.4.2. Tétel

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ és legyen $(x_0, y_0) \in intD_f$. Tegyük fel $\exists U$ környezete (x_0, y_0)-nak, ahol $\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ és folytonosak. Ekkor f differenciálható (x_0, y_0)-ban.

Bizonyítás
Vizsgáljuk meg az

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

kifejezés értékét!

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Ekkor a Lagrange-féle középértéktételből

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x$$

$$f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta y$$

alkalmas $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$ esetén. Ekkor a parciális deriváltak folytonossága miatt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_1 + \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \varepsilon(\Delta y).$$

Ekkor

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + o(\Delta x, \Delta y)\Delta x + o(\Delta y)\Delta y$$

azaz f valóban differenciálható.

5.5. Érintősík egyenlete, normálvektor

Ha az f függvény differenciálható az (x_0, y_0) pontban, akkor az ehhez a ponthoz tartozó érintősík egyenlete

$$S: \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) - \big(z - f(x_0, y_0)\big) = 0.$$

Ekkor a sík normálvektora

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right).$$

6. Tétel

6.1. Iránymenti derivált

Adott f kétváltozós függvény és $\alpha \in [0, 2\pi)$. Ekkor az α irányú iránymenti derivált (ha létezik a határérték)

$$D_\alpha f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x_0, y_0) = \lim_{\varrho \to 0} \frac{f(x_0 + \varrho \cos \alpha, y_0 + \varrho \sin \alpha) - f(x_0, y_0)}{\varrho}.$$

Adott $v(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ irány esetén, ahol $\|v\| = 1$, az iránymenti derivált

$$D_v(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \lim_{\varrho \to 0} \frac{f(x_0 + \varrho v_1, y_0 + \varrho v_2) - f(x_0, y_0)}{\varrho}.$$

6.1.1. Tétel

Ha f differenciálható az (x_0, y_0) pontban, akkor itt létezik az iránymenti derivált tetszőleges $\alpha \in [0, 2\pi)$ esetén, és

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x_0, y_0) = \cos \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \sin \alpha \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

Hasonlóan

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) v.$$

Bizonyítás

A differenciálhatóság miatt

$$f(x_0 + \varrho \cos \alpha, y_0 + \varrho \sin \alpha) - f(x_0, y_0) = \varrho \cos \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \varrho \sin \alpha \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(|\varrho|).$$

Ekkor

$$\frac{f(x_0 + \varrho \cos \alpha, y_0 + \varrho \sin \alpha) - f(x_0, y_0)}{\varrho} = \cos \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \sin \alpha \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{o(|\varrho|)}{\varrho}$$

így nyilván

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{f(x_0 + \varrho \cos \alpha, y_0 + \varrho \sin \alpha) - f(x_0, y_0)}{\varrho} = \cos \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \sin \alpha \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

6.2. Láncszabály

1. Kétváltozós belső függvény, egyváltozós külső függvény.
   Legyen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, illetve $\varphi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$. Ekkor $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, és
   $$F(x, y) = f\big(\varphi(x, y)\big).$$
   Tegyük fel, hogy φ differenciálható (x, y)-ban, illetve f differenciálható $\varphi(x, y)$-ban. Ekkor F is differenciálható, és
   $$\nabla F(x, y) = \Big(f'\big(\varphi(x, y)\big) \tfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y), f'\big(\varphi(x, y)\big) \tfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)\Big) = f'\big(\varphi(x, y)\big) \nabla \varphi(x, y).$$

2. Két darab egyváltozós belső függvény, kétváltozós külső függvény.
   Legyen $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, illetve $\varphi, \psi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Ekkor $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, és
   $$F(t) = f\big(\varphi(t), \psi(t)\big).$$
   Tegyük fel, hogy φ, ψ differenciálhatók t-ben, illetve f differenciálható $\big(\varphi(t), \psi(t)\big)$-ben. Ekkor F is differenciálható, és
   $$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(t), \psi(t)\big) \varphi'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(t), \psi(t)\big) \psi'(t).$$

3. Két darab kétváltozós belső függvény, kétváltozós külső függvény.
   Legyen $f(u,v) : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, illetve $\varphi, \psi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$. Ekkor $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, és
   $$F(x,y) = f\big(\varphi(x,y), \psi(x,y)\big).$$
   Tegyük fel, hogy φ, ψ differenciálhatók (x,y)-ban, illetve f differenciálható $\big(\varphi(x,y), \psi(x,y)\big)$-ban. Ekkor F is differenciálható, és
   $$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}\big(\varphi(x,y), \psi(x,y)\big)\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}\big(\varphi(x,y, \psi(x,y)\big)\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,y)$$
   $$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}\big(\varphi(x,y), \psi(x,y)\big)\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}\big(\varphi(x,y), \psi(x,y)\big)\frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y)$$
   azaz
   $$\nabla F(x,y) = \nabla f(u,v)\begin{pmatrix}\nabla\varphi(x,y)\\ \nabla\psi(x,y)\end{pmatrix}.$$

6.3. Második derivált

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ és $(x_0, y_0) \in S$. Azt mondjuk, hogy f kétszer differenciálható a pontban, ha a függvény differenciálható a pont egy környezetében, és a $\frac{\partial f}{\partial x}$ és a$\frac{\partial f}{\partial y}$ parciális deriváltak differenciálhatók a pontban.

6.4. Hesse mátrix

Ha az f függvény kétszer differenciálható az (x_0, y_0) pontban, akkor értelmezhetők a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ és a $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ parciális deriváltak. Ekkor a ponthoz tartozó Hesse mátrix

$$H(x_0,y_0) = \begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\nabla\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\\ \nabla\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\end{pmatrix}.$$

6.5. Lagrange-féle középértéktétel

Adott $f : D \mapsto \mathbb{R}$ függvény. Legyen $(x_0, y_0) \in intD$, és U egy olyan környezete, ahol f differenciálható és $U \subset D$. Ekkor $\forall(x,y) \in U$-hoz $\exists\theta \in (0,1)$, melyre

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \nabla f\big(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y\big)\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}$$

ahol $\Delta x = x - x_0$, illetve $\Delta y = y - y_0$.

Bizonyítás
Legyen

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$$

ahol $F : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható. Ekkor $F(0) = f(x_0,y_0)$ és $F(1) = f(x,y)$. A Lagrange-féle középértéktétel miatt $\exists\theta \in (0,1)$, melyre

$$F'(\theta) = F(1) - F(0).$$

Továbbá a láncszabály miatt

$$F'(t) = \nabla f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy θ-ra

$$F'(\theta) = F(1) - F(0) = f(x,y) - f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}.$$

Éppen ezt kellett bizonyítanunk.

7. Tétel

7.1. Implicitfüggvény-tétel, implicit deriválás

Tegyük fel, hogy F kétváltozós függvény differenciálható az (x_0, y_0) pont környezetében és $F(x_0, y_0) = 0$ illetve $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Ekkor $\exists I = I_1 \times I_2 \subset \mathbb{R}^2$ intervallum, melyre $\forall x \in I_1$ esetén az $F(x, y) = 0$ egyenletnek pontosan egy $y = f(x) \in I_2$ megoldása van. Tehát egyértelműen létezik $f : I_1 \mapsto I_2$ függvény, melyre

1. $f(x_0) = y_0$
2. $\forall x \in I_1$ esetén $f(x) \in I_2$
3. $\forall x \in I_1$ esetén $F\big(x, f(x)\big) = 0$
4. $\forall x \in I_1$ esetén $\frac{\partial F}{\partial y}\big(x, f(x)\big) \neq 0$.

Továbbá f differenciálható I_1-ben és

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\big(x, f(x)\big)}{\frac{\partial F}{\partial y}\big(x, f(x)\big)}.$$

7.2. Másodrendű Taylor formula

Tegyük fel, hogy $f : D \mapsto \mathbb{R}$ kétszer differenciálható $(x_0, y_0) \in intD$-ben. Ekkor

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\Delta y)^2\right) + L_2$$

ahol L_2 a Lagrange-féle maradéktag.

Bizonyítás

Legyen $F : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ függvény és

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y).$$

Ekkor

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$
$$F''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\Delta y)^2.$$

Felírva F-re a másodrendű Taylor formulát

$$F(1) - F(0) = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\Delta y)^2\right) + L_2$$

azonban $F(1) - F(0) = f(x, y) - f(x_0, y_0)$. Ezzel kapjuk is a bizonyítandót.

7.3. Szélsőérték

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$, ahol $S \subset \mathbb{R}^2$. Ekkor $(x_0, y_0) \in S$ lokális minimum (maximum), ha $\exists U$ környezete, ahol $\forall (x, y) \in U$ esetén

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \qquad \Big(f(x, y) \leq f(x_0, y_0)\Big).$$

Ha $U = D_f$, akkor (x_0, y_0) globális szélsőérték.

7.3.1. Szükséges feltétel szélsőérték létezéséhez

Tegyük fel, hogy f differenciálható. Ekkor ha (x, y) szélsőérték, akkor

$$\nabla f(x, y) = (0, 0).$$

Bizonyítás

Legyen $f_1(x) = f(x, y_0)$ a kétváltozós függvény egyik metszetfüggvénye. Ekkor ha x_0 szélsőérték, akkor $f_1'(x_0) = 0$ kell, azonban $f_1'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. Hasonlóan belátható, hogy $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ szükséges.

7.3.2. Stacionárius pont

Azt mondjuk, hogy (x, y) stacionárius pontja f-nek, ha

$$\nabla f(x, y) = (0, 0).$$

7.3.3. Nyeregpont

Azt mondjuk, hogy (x, y) nyeregpont, ha stacionárius pont, de nem szélsőérték.

8. Tétel

8.1. Elégséges feltétel szélsőérték létezéséhez I.

Tegyük fel, hogy f kétszer differenciálható (x_0, y_0)-ban, és $\nabla f(x_0, y_0) = 0$. Ekkor

1. $\det H > 0$ esetén (x_0, y_0)-ban lokális szélsőérték van, ami
   (a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ esetén maximum
   (b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ esetén minimum
2. $\det H = 0$ esetén további vizsgálat szükséges
3. $\det H < 0$ esetén (x_0, y_0) nyeregpont.

8.2. Elégséges feltétel szélsőérték létezéséhez II.

Tegyük fel, hogy f kétszer differenciálható (x_0, y_0)-ban, és $\nabla f(x_0, y_0) = 0$. Ekkor

1. $H > 0$ esetén (x_0, y_0) lokális minimumhely
2. $H < 0$ esetén (x_0, y_0) lokális maximumhely
3. ha H szemidefinit, akkor további vizsgálat szükséges.
4. ha H indefinit, akkor (x_0, y_0) nyeregpont.

8.3. Lokális szélsőérték jellemzése n-változós függvényekre

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$, ahol $S \subset \mathbb{R}^n$. Ekkor $x_0 \in S$ lokális minimum (maximum), ha $\exists U$ környezete, ahol $\forall x \in U$ esetén

$$f(x) \geq f(x_0) \qquad \Big(f(x) \leq f(x_0)\Big).$$

Ha $U = D_f$, akkor x_0 globális szélsőérték.
Szükséges feltétele a szélsőérték létezésének, hogy $\nabla f = 0$ legyen.

Bizonyítás
Legyen $f_1(x) = f(x, x_2, \ldots, x_n)$ az n-válzotós függvény egyik metszetfüggvénye. Ekkor ha y_0 szélsőérték, akkor $f_1'(y_0) = 0$ kell, azonban $f_1'(y_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(y_0)$. Hasonlóan belátható, hogy $\forall \frac{\partial f}{\partial x_k}(y_0) = 0$ szükséges.

8.4. Feltételes szélsőérték feladat megfogalmazása

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ kétválzotós differenciálható függvény és $\varphi(x, y) = 0$ feltétel. A feladat, hogy megkeressük a

$$\min_{\varphi(x,y)=0} f(x, y) \qquad \max_{\varphi(x,y)=0} f(x, y)$$

szélsőértékhelyeket és szélsőértékeket.

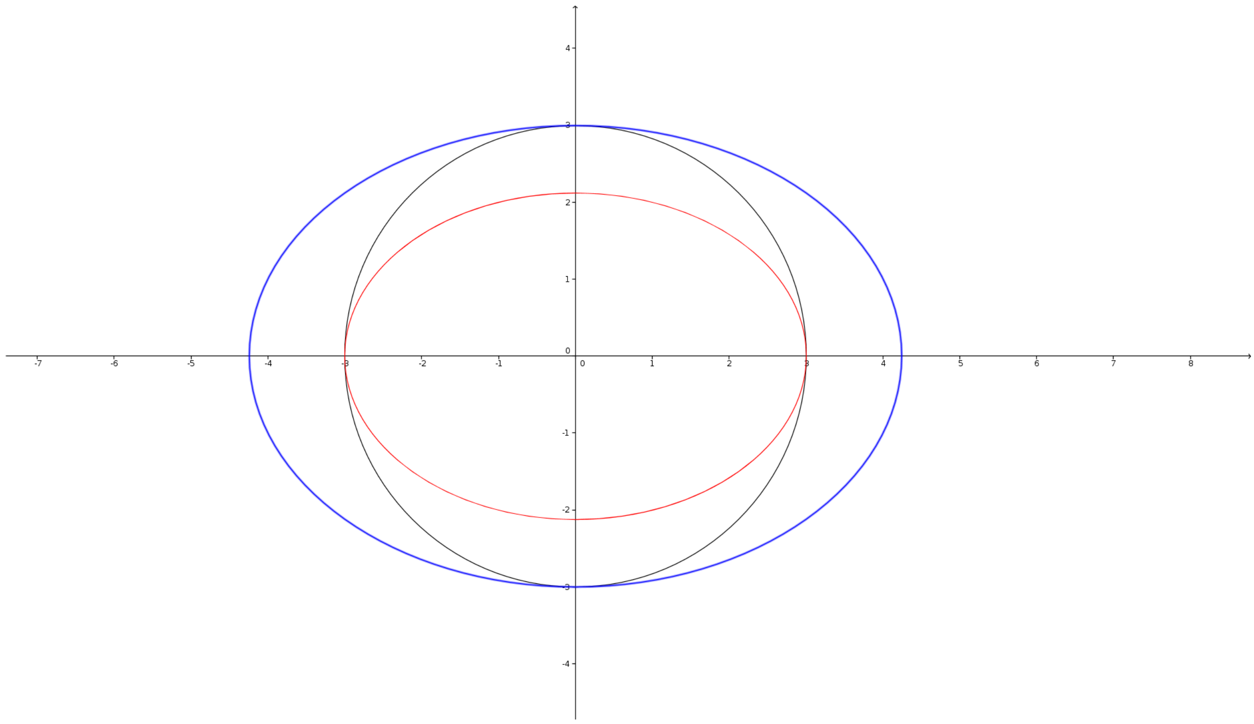
8.4.1. Szemléletes jelentés

Tekintsük a kétdimenzióban a $\varphi(x, y) = 0$ függvényt és az $f(x, y) = c$ szinvonalakat. Mivel f differenciálható, ezért ezek a szintvonalak monoton, folytonos módon változnak. Ekkor azokat a szintvonalakat keressük, amik "először" (minimum esetén) vagy "utoljára" (maximum esetén) metszik a $\varphi(x, y) = 0$ görbét. Ezek a szintvonalak érinteni fogják a görbét, mondjuk az (x, y) pontban. Az érintés miatt

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)} = \lambda.$$

Az egyenletet átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\nabla f(x,y) - \lambda \nabla \varphi(x,y) = 0.$$



A képen a $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 9 = 0$ feltételt láthatjuk (fekete kör), illetve az $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ szinvonalait $c = 9$ (piros ellipszis) és $c = 18$ (kék ellipszis) esetben. A szintvonalak közül a piros az, ami "először" metszi a $\varphi(x,y) = 0$ görbét, így ezen a szintvonalon helyezkednek el a feltételes minimumhelyek. Hasonlóan a kék metszi "utoljára" a görbét, így ezen a szinvonalon helyezkednek el a feltételes maximumhelyek.

8.5. Lagrange-féle multiplikátor szabály

Adott f kétváltozós, differenciálható függvény, melynek tekintsük a megszorítását az $\big\{(x,y)\big|\varphi(x,y) = 0\big\}$ halmazon. Legyen $F : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\varphi(x,y).$$

Ekkor ha (x_0, y_0)-ban feltételes szélsőértéke van f-nek a $\varphi(x,y) = 0$ feltétel mellett, akkor $\exists\lambda_0 \in \mathbb{R}$, melyre

$$\nabla F(x_0, y_0, \lambda_0) = 0.$$

9. Tétel

9.1. Függvényrendszer, koordinátatranszformáció

Adottak $\Phi, \Psi : D \mapsto \mathbb{R}$, ahol $D \subset \mathbb{R}^2$. Legyen továbbá $\Phi(x,y) = \xi$ és $\Psi(x,y) = \eta$. Ekkor $F : D \mapsto \mathbb{R}^2$ egy függvényrendszer vagy vektormező, melyre

$$F(x,y) = \big(\Phi(x,y), \Psi(x,y)\big) = (\xi, \eta).$$

Az ilyen függvényrendszereket koordinátatranszformációként is felfoghatjuk $(x,y) \mapsto (\xi,\eta)$ hozzárendelésként.

9.2. Jacobi mátrix, Jacobi determináns

Ha a Φ, Ψ függvények differenciálhatóak, akkor F is differenciálható, és a derivált a Jacobi mátrix

$$\mathcal{J}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla \Phi(x,y) \\ \nabla \Psi(x,y) \end{pmatrix}.$$

Ekkor $D(x,y) = \det \mathcal{J}(x,y) = \frac{d(\xi,\eta)}{\mathrm{d}(x,y)}$ a Jacobi determináns.

9.3. Homogén lineáris transzformáció, Jacobi mátrixa

A transzformációt így értelmezzük

$$\begin{aligned} \xi &= ax + by \\ \eta &= cx + \mathrm{d}y\,, \end{aligned}$$

A rendszer Jacobi mátrixa

$$\mathcal{J}(x,y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Jacobi determinánsa $D(x,y) = ad - bc$.

9.4. Invertálhatóság

Tegyük fel, hogy a Φ, Ψ függvények injektívek. Ekkor az F leképezés invertálható, és az inverz rendszer alakja

$$x = g(\xi,\eta)$$

$$y = h(\xi,\eta).$$

9.5. Inverz rendszer Jacobi mátrixa

Tegyük fel, hogy az inverz rendszer függvényei differenciálhatók. Ekkor a Jacobi mátrix

$$\mathcal{K}(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial \xi}(\xi,\eta) & \frac{\partial g}{\partial \eta}(\xi,\eta) \\ \frac{\partial h}{\partial \xi}(\xi,\eta) & \frac{\partial h}{\partial \eta}(\xi,\eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla g(\xi,\eta) \\ \nabla h(\xi,\eta) \end{pmatrix}.$$

9.5.1. Tétel

Tegyük fel, hogy egy vektormező Jacobi mátrixa invertálható egy $(x,y) \in intD$ pontban. Ekkor a vektormező invertálható és

$$\mathcal{K}(\xi,\eta) = \Big(\mathcal{J}(x,y)\Big)^{-1}.$$

Továbbá

$$D(\xi,\eta) = \frac{1}{D(x,y)}.$$

Bizonyítás
Tudjuk, hogy

$$\xi = \Phi\big(g(\xi,\eta), h(\xi,\eta)\big)$$
$$\eta = \Psi\big(g(\xi,\eta), h(\xi,\eta)\big).$$

Ekkor a láncszabály miatt

$$\nabla\xi(\xi,\eta) = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} = \nabla\Phi(x,y)\begin{pmatrix}\nabla g(\xi,\eta)\\ \nabla h(\xi,\eta)\end{pmatrix}$$
$$\nabla\eta(\xi,\eta) = \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} = \nabla\Psi(x,y)\begin{pmatrix}\nabla g(\xi,\eta)\\ \nabla h(\xi,\eta)\end{pmatrix}.$$

Az egyenleteket rendezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial g}{\partial \xi} = \frac{\frac{\partial\Psi}{\partial y}}{\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial y} - \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial\Psi}{\partial y}}{D(x,y)}$$
$$\frac{\partial g}{\partial \eta} = -\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial y}}{\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial y} - \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial x}} = -\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial y}}{D(x,y)}$$
$$\frac{\partial h}{\partial \xi} = -\frac{\frac{\partial\Psi}{\partial x}}{\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial y} - \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial x}} = -\frac{\frac{\partial\Psi}{\partial x}}{D(x,y)}$$
$$\frac{\partial h}{\partial \eta} = \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial x}}{\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial y} - \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial x}}{D(x,y)}.$$

Ezek alapján

$$\mathcal{K}(\xi,\eta) = \frac{1}{D(x,y)}\begin{pmatrix}\frac{\partial\Psi}{\partial y} & -\frac{\partial\Phi}{\partial y}\\ -\frac{\partial\Psi}{\partial x} & \frac{\partial\Phi}{\partial x}\end{pmatrix} = \Big(\mathcal{J}(x,y)\Big)^{-1}.$$

Éppen ezt kellett bizonyítanunk.

10. Tétel

10.1. Riemann integrál két dimenzióban

Legyen $R \subset \mathbb{R}^2$ korlátos és zárt mérhető halmaz, és rajta egy $f : R \mapsto \mathbb{R}^+$ folytonos függvény. Legyen

$$R = \bigcup_{k=1}^{n} R_k$$

felosztás, ahol $\forall R_k$ mérhető és $\forall R_k \cap R_j = \emptyset$. Legyen továbbá

$$m_k = \inf \left\{ f(x,y) \middle| x, y \in R_k \right\}$$

$$M_k = \sup \left\{ f(x,y) \middle| x, y \in R_k \right\}$$

és

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} A(R_k) m_k \leq V(S) \leq \sum_{k=1}^{n} A(R_k) M_k = S_n$$

ahol

$$S = \left\{ (x,y,z) \middle| (x,y) \in R, z \in [0, f(x,y)] \right\}.$$

Ekkor f folytonossága miatt a Heine-tétel által f egyenletesen folytonos. Emiatt $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta_0 > 0$, amelyre $\delta < \delta_0$ esetén $M_k - m_k < \varepsilon$. Ekkor

$$S_n - s_n = \sum_{k=1}^{n} A(R_k)(M_k - m_k) < \sum_{k=1}^{n} A(R_k) \varepsilon = \varepsilon A(R).$$

Tehát

$$\lim_{\delta \to 0} \big(\inf S_n \big) = \lim_{\delta \to 0} \big(\sup s_n \big)$$

azaz az integrál értelmezhető. Ekkor a keresett térfogat

$$V(S) = \iint_R f(x,y) \,\mathrm{d}R = \iint_R f(x,y) \,\mathrm{d}(x,y)\,.$$

10.2. Integrálás télalap alakú tartományon

Legyen $R = [a,b] \times [c,d]$. Ekkor

$$\iint_R f(x,y) \,\mathrm{d}(x,y) = \int_a^b \int_c^d f(x,y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_c^d \int_a^b f(x,y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y\,.$$

Bizonyítás

Osszuk fel az $[a,b]$ intervallumot n egyenlő részre, a $[c,d]$ intervallumot pedig m egyenlő részre. Legyen továbbá az így létrehozott R_{ij} téglalapokra $(\xi_i, \eta_j) \in R_{ij}$. Ekkor az integrál közelítő összege

$$V_{nm} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j) \Delta x \Delta y = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j) \Delta x \Delta y.$$

Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} V_{nm} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_c^d f(\xi_i, y) \,\mathrm{d}y \,\Delta x = \int_a^b \int_c^d f(x,y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x\,.$$

Hasonlóan

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} V_{nm} = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \int_a^b f(x, \eta_j) \,\mathrm{d}x \,\Delta y = \int_c^d \int_a^b f(x,y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y\,.$$

Ekkor nyilván

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} V_{nm} = \iint_R f(x,y) \,\mathrm{d}(x,y) = \int_a^b \int_c^d f(x,y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_c^d \int_a^b f(x,y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y\,.$$

10.3. Normáltartomány

Adott $R \subset \mathbb{R}^2$ x szerinti normáltartomány, ha $\exists[a,b]$, továbbá $\exists \Phi_1 \leq \Phi_2 : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ szakaszonként folytonos függvények, melyekre

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x \in [a,b], y \in \left[\Phi_1(x), \Phi_2(x)\right]\right\}.$$

Hasonlóan $R \subset \mathbb{R}^2$ y szerinti normáltartomány, ha $\exists[c,d]$, továbbá $\exists \Psi_1 \leq \Psi_2 : [c,d] \mapsto \mathbb{R}$ szakaszonként folytonos függvények, melyekre

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| y \in [c,d], x \in \left[\Psi_1(y), \Psi_2(y)\right]\right\}.$$

10.4. Integrálás síkbeli normáltartományon

Legyen R egy x szerinti normáltartomány. Ekkor

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_a^b \int_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,.$$

Hasonlóan, ha R egy y szerinti normáltartomány, akkor

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_c^d \int_{\Psi_1(y)}^{\Psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

10.5. Áttérés polárkoordinátákra kettős integrálban

Az áttérés során az (x,y) koordinátákról térünk át az (r,θ) koordinátkra, ahol r az origótól vett távolság, θ pedig az x-tengellyel bezárt szög. Ekkor

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

így a Jacobi mátrix

$$\mathcal{J}(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

amiből a Jacobi determináns $D(r,\theta) = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$.
Legyen adott $f : D \mapsto \mathbb{R}$ függvény és T az integrálás tartománya. Legyen továbbá a koordinátatranszformáció után az integrálási tartomány T'. Az integrál

$$\iint_T f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \iint_{T'} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}(r,\theta)\,.$$

11. Tétel

11.1. Polárkoordináták a síkon

Adott $P(x, y)$ pont a síkon. Ennek a pontnak a polárkoordinátái (r, θ), ahol r az origótól vett tálvság, θ pedig az x-tengellyel bezárt szög. Ekkor

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \arcsin \frac{y}{x^2 + y^2} = \arccos \frac{x}{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$$

illetve

$$x = r \cos \theta$$
$$y = r \sin \theta.$$

11.1.1. Jacobi mátrixa

Az áttérés során az (x, y) koordinátákról térünk át az (r, θ) koordinátkra, ahol r az origótól vett távolság, θ pedig az x-tengellyel bezárt szög. Ekkor

$$x = r \cos \theta$$
$$y = r \sin \theta$$

így a Jacobi mátrix

$$\mathcal{J}(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

amiből a Jacobi determináns $D(r, \theta) = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$.

11.2. Általános helyettesítés kettős integrálban

Legyen $f : R \mapsto \mathbb{R}$ integrálható függvény. Legyen

$$x = \Phi(u, v)$$
$$y = \Psi(u, v)$$

invertálható és differenciálható függvényrendszer. Legyen továbbá

$$R' = \Big\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \Big| \big(\Phi(u, v), \Psi(u, v) \big) \in R \Big\}.$$

Ekkor

$$\iint_R f(x, y) \, \mathrm{d}(x, y) = \iint_{R'} f\big(\Phi(u, v), \Psi(u, v)\big) D(u, v) \, \mathrm{d}(u, v)$$

ahol $D(u, v)$ a Jacobi determináns.

11.3. Riemann integrál három dimenzióban, szemléletes jelentés

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ háromváltozós függvény. Az

$$\iiint_T f(x, y, z) \, \mathrm{d}(x, y, z)$$

integrált a kétváltozós esettel analóg módon közelítésekkel értelmezzük, először egy mértéket definiálunk, kockás közelítéssel (kétdimenzióban négyzetes). Ezután a közelítőösszeget definiáljuk az eddigiekkel analóg módon. Tegyük fel, hogy adott T tartomány, melyen az f háromváltozós függvény nemnegatív értékeket vesz fel. Ekkor legyen az f függvény sűrűségfüggvény, tehát $f(x, y, z)$ az (x, y, z) pont sűrűségét jelenti. Így az

$$\iiint_T f(x, y, z) \, \mathrm{d}(x, y, z)$$

integrál a T tartomány (háromdimenziós test) tömegét fogja jelenteni.

11.4. Hármas integrál kiszámítása intervallumon

Adott f háromváltozós függvény és $T = [a, b] \times [c, d] \times [e, g] \subset \mathbb{R}^3$ intervallum. Az integrál értéke

$$\iiint_T f(x, y, z)\,\mathrm{d}(x, y, z) = \int_a^b \int_c^d \int_e^g f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

illetve a kettős integrálhoz hasonlóan, az integrálok tetszőleges permutációja megfelelő.

11.5. Hármas integrál kiszámítása normáltartományon

Adott f háromváltozós függvény és

$$T = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \Big| (x, y) \in S \subset \mathbb{R}^2, z \in \big[F_1(x, y), F_2(x, y)\big]\Big\}$$

(x, y) szerinti normáltartomány. Az ingetrál értéke

$$\iiint_T f(x, y, z)\,\mathrm{d}(x, y, z) = \iint_S \int_{F_1(x,y)}^{F_2(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}(x, y)\,.$$

Ha S intervallum, vagy normáltartomány, akkor tovább egyszerűsödik a képlet.

12. Tétel

12.1. Hengerkoordináták, Jacobi determináns

Egy (x, y, z) pont hengerkoordinátái (r, θ, z) ahol (r, θ) a pont vetületének polárkoordinátái és

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z. \end{aligned}$$

A Jacobi mátrix

$$\mathcal{J}(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jacobi determinánsa (harmadik sor szerint kifejtve)

$$D(r,\theta,z) = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$

12.2. Gömbi polárkoordináták, Jacobi determináns

Egy (x, y, z) pont gömbi polárkoordinátái (r, θ, φ), ahol r az origótól vett távolság, θ a pontba mutató vektor vetületének az x-tengellyel bezárt szöge, φ pedig a pontba mutató vektor z-tengellyel bezárt szöge.

$$\begin{aligned} x &= r\sin\varphi\cos\theta \\ y &= r\sin\varphi\sin\theta \\ z &= r\cos\varphi \end{aligned}$$

A Jacobi mátrix

$$\mathcal{J}(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

A Jacobi determinána (utolsó sor szerint kifejtve)

$$D(r,\theta,\varphi) = \cos\varphi\big(r^2\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\theta + r^2\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta\big) +$$

$$+ r\sin\varphi\big(r\sin^2\varphi\cos^2\theta + r\sin^2\varphi\sin^2\theta\big) = r^2\sin\varphi\cos^2\varphi + r^2\sin^3\varphi = r^2\sin\varphi.$$

12.3. Általános helyettesítés hármas integrálban

Legyen $f : R \mapsto \mathbb{R}$ integrálható függvény. Legyen

$$\begin{aligned} x &= \Phi(u,v,w) \\ y &= \Psi(u,v,w) \\ z &= \Xi(u,v,w) \end{aligned}$$

invertálható és differenciálható függvényrendszer. Legyen továbbá

$$R' = \Big\{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \Big| \big(\Phi(u,v,w), \Psi(u,v,w), \Xi(u,v,w)\big) \in R\Big\}.$$

Ekkor

$$\iiint_R f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \iiint_{R'} f\big(\Phi(u,v,w), \Psi(u,v,w), \Xi(u,v,w)\big) D(u,v,w)\,\mathrm{d}(u,v,w)$$

ahol $D(u, v, w)$ a Jacobi determináns.

12.4. Improprius kettős integrál kiszámítása nem korlátos tartományon

Adott $f : R \mapsto \mathbb{R}$ folytonos függvény, ahol R nem korlátos. Tegyük fel, hogy $\exists R_1 \subset R_2 \subset \cdots \subset R$ mérhető tartománysorozat, melyre

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n = R.$$

Ha

$$\exists \lim_{n\to\infty} \iint_{R_n} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) < \infty$$

és független az (R_n) sorozat megválasztásától, akkor f improprius értelemben integrálható

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \lim_{n\to\infty} \iint_{R_n} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)\,.$$

12.4.1. Tétel

Tegyük fel, hogy $\exists (R_n)$ mérhető tartománysorozat, melyre az integrálok egyenletesen korlátosak, azaz $\exists M$, melyre $\forall n$ esetén

$$\iint_{R_n} \big|f(x,y)\big|\,\mathrm{d}(x,y) \le M$$

teljesül. Ekkor f improprius értelemben integrálható és minden más megfelelő (S_n) mérhető tartománysorozatra

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{S_n} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \lim_{n\to\infty} \iint_{R_n} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)\,.$$

12.4.2. Haranggörbe integrálja az egész síkon

Adott $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$. Legyen

$$R_n = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \Big| x^2 + y^2 \in \big[0, n^2\big]\Big\}$$

illetve polárkoordinátákra áttérve

$$R_n' = \Big\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \Big| r \in [0,n], \theta \in [0,2\pi]\Big\}.$$

Ekkor R_n nyilván mérhető, az integrál

$$\iint_{R_n} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}(x,y) = \iint_{R_n'} re^{-r^2}\,\mathrm{d}(r,\theta) = \pi \int_0^n 2re^{-r^2}\,\mathrm{d}r = -\pi e^{-r^2}\Big|_0^n = \pi - \pi e^{-n^2}.$$

Látható, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{R_n} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \pi$$

tehát a függvény improprius értelemben integrálható és

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}(x,y) = \pi.$$

12.4.3. Következmény

Mivel minden más tartománysorozatra ugyanezt az eredményt kapjuk, ezért

$$S_n = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \Big| |x|, |y| \in [0,n]\Big\}$$

esetén

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{S_n} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}(x,y) = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n}\int_{-n}^{n} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \pi.$$

Ebből kapjuk, hogy

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

13. Tétel

13.1. Improprius integrál kiszámítása nem korlátos függvényre

Adott $f : R \mapsto \mathbb{R}$ nem korlátos függvény, azaz legyen f folytonos függvény néhány pont kivételét, ahol nincs véges határértéke. Tegyük fel, hogy $\exists R_1 \subset R_2 \subset \cdots \subset R$ tartománysorozat, ahol f folytonos $\forall R_n$ tartományon és $\lim_{n\to\infty} A(R_n) = A(R)$. Ha

$$\exists \lim_{n\to\infty} \iint_{R_n} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) < \infty$$

és független az (R_n) sorozat megválasztásától, akkor f improprius értelemben integrálható.

13.2. Hatványfüggvény integrálja az egységkörben

Legyen

$$f(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\alpha}}.$$

ahol $\alpha > 0$ és az integrálási tartomány

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2+y^2 \in [0,1]\right\}.$$

Legyen

$$R_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2+y^2 \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]\right\}$$

illetve áttérve polárkoordinátákra

$$R' = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \middle| r \in \left[\frac{1}{n}, 1\right], \theta \in [0, 2\pi]\right\}.$$

Ekkor

$$\iint_{R_n} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \iint_{R'_n} \frac{1}{r^{\alpha}} r\,\mathrm{d}(r,\theta) = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^{\alpha-1}}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = 2\pi \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{r^{\alpha-1}}\,\mathrm{d}r\,.$$

Tudjuk, hogy ez az integrál akkor és csak akkor véges, hogyha $\alpha - 1 < 1$, azaz $\alpha < 2$. Azt kaptuk tehát, hogy a hatványfüggvény $0 < \alpha < 2$ esetében integrálható az egységkörön.

13.3. Integrálhatóság feltétele nem korlátos függvényre

Tegyük fel, hogy az $f : R \mapsto \mathbb{R}$ folytonos függvény nem korlátos az R mérhető tartomány egy pontjának környezetében, legyen ez (az egyszerűség kedvéért) az origó. Tegyük fel, hogy $\exists 0 < \alpha < 2, M > 0$ melyekre

$$\left|f(x,y)\right| \leq \frac{M}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\alpha}}$$

teljesül R-en. Ekkor f improprius értelemben integrálható.

13.4. Komplex függvény értelmezése, ábrázolás

Adott $S \subset \mathbb{C}$. Ekkor $f : S \mapsto \mathbb{C}$ komplex függvény, ahol S pontjaihoz $z = x + iy \mapsto w = u + iv$. Ekkor z független változó, w függő változó.
Komplex függvényeket két komplex sík segítségével tudunk ábrázolni. Ebben az esetben az első számsíkra az értelmezési tartományt, a másikra az értékkészletet rajzoljuk. Ilyenkor célszerű egyszerű alakzatok képét megvizsgálni (egyenesek, körök, téglalapok), illetve egyes pontok képét is ábrázolhatjuk.

14. Tétel

14.1. Vonal definíciója

14.1.1. $\mathbb{R}^2$

Adott $[a,b] \in \mathbb{R}$ véges intervallum és $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^2$ függvény, ahol $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$. Ekkor legyen Γ görbe

$$\Gamma = \Big\{ y(t) \in \mathbb{R}^2 \Big| t \in [a,b] \Big\}.$$

A görbe folytonos, ha a koordináta-függvényei folytonosak, illetve sima, ha a koordináta-függvényei simák. Zárt görbe esetén $\gamma(a) = \gamma(b)$.

14.1.2. $\mathbb{R}^3$

Adott $[a,b] \in \mathbb{R}$ véges intervallum és $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^3$ függvény, ahol $\gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$. Ekkor legyen Γ görbe

$$\Gamma = \Big\{ y(t) \in \mathbb{R}^3 \Big| t \in [a,b] \Big\}.$$

A görbe folytonos, ha a koordináta-függvényei folytonosak, illetve sima, ha a koordináta-függvényei simák. Zárt görbe esetén $\gamma(a) = \gamma(b)$.

14.2. Kétváltozós valós függvény integrálja vonal mentén

Adott $f : R \mapsto \mathbb{R}$ kétváltozós függvény és

$$\Gamma = \Big\{ \gamma(t) \Big| t \in [a,b] \Big\} \in R$$

sima görbe, ahol $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$. Ekkor f Γ görbe menti vonalintegrálja

$$\int_\Gamma f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Bizonyítás

Írjunk fel egy közelítő összeget! Legyen

$$\mathcal{F} = \big\{ a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b \big\}$$

felosztás. Közelítsük a vonalintegrált téglalapokkal, melynek a magassága $f\big(\gamma(t_i)\big)$ az alapja pedig

$$\sqrt{\big(x(t_{i+1}) - x(t_i)\big)^2 + \big(y(t_{i+1}) - y(t_i)\big)^2}.$$

Ekkor a közelítő összeg

$$I_n = \sum_{i=0}^{n-1} f\big(\gamma(t_i)\big)\sqrt{\big(x(t_{i+1}) - x(t_i)\big)^2 + \big(y(t_{i+1}) - y(t_i)\big)^2} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f\big(\gamma(t_i)\big)\sqrt{\left(\frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i}\right)^2 + \left(\frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i}\right)^2}(t_{i+1} - t_i).$$

A Lagrange-féle középértéktétel miatt $\exists \xi_i, \eta_i \in [t_i, t_{i+1}]$, melyekre

$$\frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = x'(\xi_i) \qquad \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = y'(\eta_i).$$

Ekkor

$$I_n = f\big(\gamma(t_i)\big)\sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\eta_i)^2}\Delta t_i.$$

Vegyük észre, hogy ez egy Riemann összeg, azaz

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta(\mathcal{F})\to 0}} I_n = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

14.2.1. Szemléletes jelentés

Állítsunk a görbe minden (x, y) pontjában az xy síkra merőleges $f(x, y)$ hosszú szakaszt. A vonalintegrál értéke megadja a keletkező felület nagyságát.

14.3. Vektormező vonalintegrálja görbe mentén

Adott $F : R \mapsto \mathbb{R}^2$

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$$

vektormező és

$$\Gamma = \left\{ \gamma(t) \middle| t \in [a, b] \right\} \in R$$

sima görbe. Ekkor a vektormező vonalintegrálja

$$\int_\Gamma F(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_a^b \left\langle F\big(\gamma(t)\big), \dot\gamma(t) \right\rangle \mathrm{d}t = \int_a^b \Big(f\big(\gamma(t)\big)\dot x(t) + g\big(\gamma(t)\big)\dot y(t) \Big)\,\mathrm{d}t\,.$$

14.3.1. Szemléletes jelentés

Egy testet mozgatva a Γ görbe mentén, ha minden (x, y) pontban $F(x, y)$ erő hat a testre, akkor a vonalintegrál értéke megadja a végzett munkát.

14.4. Potenciálos vektormező

Azt mondjuk, hogy F potenciálos vektormező, ha $\exists f$ differenciálható függvény, melyre $F = \nabla f$.

14.4.1. Tétel

Adott F potenciálos vektormező, aminek potenciálja f és adott

$$\Gamma = \left\{ \gamma(t) \middle| t \in [a, b] \right\}$$

sima görbe. Ekkor

$$\int_\Gamma F(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\mathbf{r} = f\big(\gamma(b)\big) - f\big(\gamma(a)\big).$$

Bizonyítás

$$\int_\Gamma F(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_a^b \left\langle F\big(\gamma(t)\big), \dot\gamma(t) \right\rangle \mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\big(\gamma(t)\big)\,\mathrm{d}t = f\big(\gamma(b)\big) - f\big(\gamma(a)\big).$$

14.5. Potenciálkeresés

Adott

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} g(x, y) \\ h(x, y) \end{pmatrix}$$

vektormező. Ahhoz, hogy F potenciálos legyen

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}$$

kell. Ekkor g-t integrálva x szerint, illetve h-t integrálva y szerint kapjuk a $G(x, y), H(x, y)$ függvényeket. Ezen függvények közös része lesz a keresett potenciál.

14.5.1. Potenciál létezésének szükséges és elégséges feltétele

Adott F vektormező és Γ zárt, sima görbe. Ekkor F potenciálos akkor és csak akkor, ha

$$\oint_\Gamma F(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\mathbf{r} = 0.$$

Bizonyítás

(Csak szükségesség)

Tegyük fel, hogy F potenciálos, potenciálja f. Ekkor

$$\oint_\Gamma F(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\mathbf{r} = f\big(\gamma(b)\big) - f\big(\gamma(a)\big) = 0.$$

15. Tétel

15.1. Fourier sor komplex alakja, együtthatók meghatározása

Legyen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ 2π szerint periodikus, szakaszonként folytonosan differenciálható függvény, melynek csak elsőfajú szakadása van, ahol

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Ekkor

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx}$$

ahol

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, \mathrm{d}x \, .$$

Bizonyítás
Tudjuk, hogy

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx}$$

ahol

$$\alpha_n = \frac{a_n - i b_n \operatorname{sgn}(n)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, \mathrm{d}x \, .$$

15.2. Fourier transzformáció

Legyen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ szakaszonként folytonosan differenciálható, abszolút integrálható függvény, azaz

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big|f(x)\big| \, \mathrm{d}x < \infty$$

melynek csak elsőfajú szakadása van, ahol

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Ekkor a függvény Fourier transzformáltja $\hat{f} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$

$$\mathcal{F}(f, s) = \hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} \, \mathrm{d}x \, .$$

15.3. Fourier transzformáció tulajdonságai

1. Ha f páros, akkor
$$\hat{f}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t) \cos(st) \, \mathrm{d}t \, .$$
2. Ha f páratlan, akkor
$$\hat{f}(s) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t) \sin(st) \, \mathrm{d}t \, .$$
3. $\hat{f}$ folytonos

4. Linearitás
$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g, s) = \alpha\mathcal{F}(f, s) + \beta\mathcal{F}(g, s)$$

5. Átskálázás
$$\mathcal{F}\big(f(ax), s\big) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}\bigg(f(x), \frac{s}{a}\bigg) \qquad (a \neq 0)$$

6. Időeltolás
$$\mathcal{F}\big(f(x - x_0), s\big) = e^{-ix_0 s}\mathcal{F}\big(f(x), s\big)$$

7. Frekvenciaeltolás
$$\mathcal{F}\Big(e^{ikx} f(x), s\Big) = \mathcal{F}\big(f(x), s - k\big)$$

Bizonyítás

1. Tudjuk, hogy
$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(st)\,\mathrm{d}t - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(st)\,\mathrm{d}t\,.$$
Ekkor ha f páros, akkor
$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(st)\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t)\cos(st)\,\mathrm{d}t\,.$$

2. Tudjuk, hogy
$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(st)\,\mathrm{d}t - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(st)\,\mathrm{d}t\,.$$
Ekkor ha f páratlan, akkor
$$\hat{f}(s) = -i\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(st)\,\mathrm{d}t = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t)\sin(st)\,\mathrm{d}t\,.$$

3. Az egyenletes konvergenciából következik.

4. Az integrálás linearitásából következik.

5.
$$\mathcal{F}\big(f(ax), s\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{-isx}\,\mathrm{d}x \underset{\substack{\frac{1}{a}y = x \\ \frac{1}{a}\mathrm{d}y = \mathrm{d}x}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\operatorname{sgn} a\infty}^{\operatorname{sgn} a\infty} f(y)e^{-i\frac{s}{a}y}\frac{1}{a}\,\mathrm{d}y =$$
$$= \frac{1}{|a|\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\frac{s}{a}y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}\bigg(f(x), \frac{s}{a}\bigg)$$

6.
$$\mathcal{F}\big(f(x - x_0), s\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_0)e^{-isx}\,\mathrm{d}x \underset{\substack{y = x - x_0 \\ \mathrm{d}y = \mathrm{d}x}}{=}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-is(y + x_0)}\,\mathrm{d}y = e^{-isx_0}\mathcal{F}\big(f(x), s\big)$$

7.
$$\mathcal{F}\Big(e^{ikx} f(x), s\Big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(s-k)x}\,\mathrm{d}x = \mathcal{F}\big(f(x), s - k\big)$$

15.4. Inverz Fourier transzformáció

Legyen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ szakaszonként folytonosan differenciálható, abszolút integrálható függvény, azaz

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(x)\right| \mathrm{d}x < \infty$$

melynek csak elsőfajú szakadása van, ahol

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Ekkor

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{isx} \, \mathrm{d}s\,.$$

16. Tétel

16.1. Parseval egyenlet Fourier transzformációra

Tegyük fel, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|f'(x)\right| \mathrm{d}x < \infty \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \left|f''(x)\right| \mathrm{d}x < \infty .$$

Ekkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(x)\right|^2 \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(s)\right|^2 \mathrm{d}s\,.$$

Bizonyítás

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)e^{isx}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{isx}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)\hat{f}(-s)\,\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(s)\right|^2 \mathrm{d}s$$

16.2. Konvolúció

Adottak $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ abszolút integrálható függvények. Ekkor a két függvény konvolúciója

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y\,.$$

16.3. Konvolúció és FT kapcsolata

1.
$$\mathcal{F}(f * g, s) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f, s)\mathcal{F}(g, s)$$

2.
$$\mathcal{F}(fg, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}(f, s) * \mathcal{F}(g, s)$$

Bizonyítás

1.
$$\mathcal{F}(f * g, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x)e^{-isx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y\right)e^{-isx}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-isy}\,\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)e^{-is(x-y)}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f, s)\mathcal{F}(g, s)$$

2.
$$\mathcal{F}(fg, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-isx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(r)e^{irx}\,\mathrm{d}r\,g(x)e^{-isx}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(r)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i(s-r)x}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(r)\hat{g}(s-r)\,\mathrm{d}r =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}(f, s) * \mathcal{F}(g, s)$$

16.4. Dirac delta

Adott $\varepsilon > 0$. Ekkor legyen

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & \text{ha } |x| < \varepsilon \\ 0, & \text{ha } |x| \geq \varepsilon \end{cases}.$$

A Dirac delta

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(x).$$

17. Tétel

17.1. n-edrendű lineáris differenciálegyenlet

Adott L lineáris operátor, melyre

$$L[y] = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} y^{(k)}.$$

Homogén differenciálegyenlet (HDE) esetén $L[y] = 0$ megoldásait keressük, inomogén differenciálegyenlet (IDE) esetén $L[y] = f(x)$ megoldásait keressük.

17.2. Függvények függetlensége

Adottak az $y_1, y_2, \ldots, y_n : D \mapsto \mathbb{R}$ függvények. Azt mondjuk, hogy a függvények lineárisan függetlenek, ha

$$\sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x) \equiv 0$$

akkor és csak akkor teljesül, ha $\forall c_k = 0$.

17.3. Wronski determináns

Adottak $y_1, y_2, \ldots, y_n$ $(n-1)$-szer differenciálható függvények. Ekkor a Wronski determináns

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)}. \end{vmatrix}$$

17.4. Tétel

Az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ függvények lineárisan összefüggők akkor és csak akkor, ha

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = 0.$$

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy a függvények összefüggők. Ekkor van köztük egy y_k függvény, melyre

$$y_k = -\sum_{j \neq k} \frac{c_j}{c_k} y_j.$$

Hasonlóan

$$y_k' = -\sum_{j \neq k} \frac{c_j}{c_k} y_j'.$$

A gondolatmenetet követve láthatjuk, hogy a mátrix k-adik oszlopa előáll a többi lineáris kombinációjaként, ezért a determináns nulla.
Most tegyük fel, hogy a determináns nulla. Tudjuk, hogy ekkor az oszlopok összefüggő rendszert alkotnak, amiből az előző gondolatmenet mentén láthatjuk, hogy az y_k függvények összefüggő rendszert alkotnak.

17.5. Megoldások terének jellemzése

Az $L[y] = 0$ egyenletnek létezik n darab lineárisan független megoldása, melyekre az összes többi megoldás ezek lineáris kombinációja.

Bizonyítás
A tétel második részét látjuk be. Tudjuk, hogy $L[y] = L[y_k] = 0$, tehát

$$W[y, y_1, \ldots, y_n] = 0.$$

Mivel

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \neq 0$$

így

$$y = \sum_{k=1}^{n} a_k y_k.$$

18. Tétel

18.1. Homogén lineáris, állandó együtthatós differenciálegyenlet

Ebben az esetben

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0 \qquad a_k \in \mathbb{R}.$$

A differenciálegyenlet karakterisztikus polinomja

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n.$$

A HDE megoldásait $y = e^{\lambda x}$ alakban keresve

$$L\big[e^{\lambda x}\big] = e^{\lambda x}P(\lambda) = 0 \implies P(\lambda) = 0.$$

18.1.1. Első eset

Tegyük fel, hogy P n különböző gyöke mind valós, legyenek a gyökök $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Ekkor az alapmegoldások

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{\lambda_1 x} \\ y_2(x) &= e^{\lambda_2 x} \\ &\vdots \\ y_n(x) &= e^{\lambda_n x} \end{aligned}$$

illetve az általános megoldás

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k x} \qquad c_k \in \mathbb{R}.$$

18.1.2. Második eset

Tegyük fel, hogy P m darab gyöke k_m-szeres gyök, ahol nyilván $\sum_{j=1}^{m} k_j = n$. Ekkor az alapmegoldások

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{\lambda_1 x} \\ &\vdots \\ y_{k_1}(x) &= x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x} \\ y_{k_1+1}(x) &= e^{\lambda_2 x} \\ &\vdots \\ y_{k_1+k_2}(x) &= x^{k_2-1}e^{\lambda_2 x} \\ &\vdots \\ y_{k_1+k_2+\cdots+1}(x) &= e^{\lambda_m x} \\ &\vdots \\ y_n(x) &= x^{k_m-1}e^{\lambda_m x} \end{aligned}$$

illetve az általános megoldás

$$y(x) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=0}^{k_j-1} c_{jl}x^l e^{\lambda_j x}.$$

18.1.3. Harmadik eset

Tegyük fel, hogy az egyenletnek gyöke a $\lambda = \alpha + i\beta$ komplex szám. Ekkor tudjuk, hogy $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ is gyök. A két alapmegoldás

$$u_1(x) = e^{\lambda x} = e^{\alpha x}\big(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\big)$$
$$u_2(x) = e^{\overline{\lambda} x} = e^{\alpha x}\big(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)\big).$$

Tudjuk, hogy alapmegoldások lineáris kombinációja is megoldás, ezért a fenti megoldásokból definiáljuk az új, valós alapmegoldásokat

$$y_1(x) = \frac{u_1(x) + u_2(x)}{2} = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$
$$y_2(x) = \frac{u_1(x) - u_2(x)}{2i} = e^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

18.1.4. Negyedik eset

Többszörös komplex gyököknél hasonlóan kell eljárni, mint többszörös valós gyököknél.

18.2. IDE megoldások struktúrája

Adott $L[y] = f(x)$ IDE. Ha y_1, y_2 megoldások, akkor $y = y_1 - y_2$ megoldása az $L[y] = 0$ HDE-nek. Ha y_1 megoldása az HDE-nek és y_2 megoldása a IDE-nek, akkor $y = y_1 + y_2$ megoldása az IDE-nek.

18.3. Állandók variálása

Adott

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x).$$

Legyenek az $L[y] = 0$ homogén differenciálegyenlet alapmegoldásai az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ függvények. Ekkor a partikuláris megoldás

$$y_p(x) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k(x) y_k(x)$$

ahol

$$\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix} = \int W^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0 & \ldots & f\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} d\begin{pmatrix}x\\ x\\ \vdots\\ x\end{pmatrix}.$$

ahol W a Wronski mátrix. Ekkor az általános megoldás

$$y(x) = y_p(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x).$$

Bizonyítás

Állítsuk az γ_k, y_k függvényekre a következő feltételeket

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k' y_k = 0$$
$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k' y_k' = 0$$
$$\vdots$$
$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k' y_k^{(n-1)} = f$$

azaz

$$W \begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \\ \vdots \\ \gamma_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f \end{pmatrix}.$$

Ekkor $y_p = \sum_{k=1}^n \gamma_k y_k$ esetén

$$y_p' = \sum_{k=1}^n \gamma_k' y_k + \sum_{k=1}^n \gamma_k y_k' = \sum_{k=1}^n \gamma_k y_k'.$$

Hasonlóan

$$y_p^{(m)} = \sum_{k=1}^n \gamma_k' y_k^{(m-1)} + \sum_{k=1}^n \gamma_k y_k^{(m)} = \sum_{k=1}^n \gamma_k y_k^{(m)}$$

illetve

$$y_p^{(n)} = \sum_{k=1}^n \gamma_k' y_k^{(n-1)} + \sum_{k=1}^n \gamma_k y_k^{(n)} = f + \sum_{k=1}^n \gamma_k y_k^{(n)}.$$

Ebből

$$L[y_p] = f + \sum_{k=1}^n \gamma_k L[y_k] = f.$$

Tehát $y_p = \sum_{k=1}^n \gamma_k y_k$ valóban megoldása az IDE-nek. Mivel $W \neq 0$, így a feltételekből azonnal következik, hogy

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = \int W^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & f \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} d \begin{pmatrix} x \\ x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix}.$$

18.4. Kezdetiérték feladat

Olyan megoldást keresünk, melyre $y^{(k)}(x_0) = \xi_{k+1}$ teljesül, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Ekkor létezik egyértelmű megoldás.

18.5. Peremérték feladat

Olyan megoldást keresünk, melyre $y(x_k) = \xi_k$ teljesül, $k = 1, 2, \dots, n$. Ekkor létezik egyértelmű megoldás.

19. Tétel

19.1. Komplex függvény kanonikus alakja

Adott $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$. Ekkor a függvény kanonikus alakja

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

ahol $u, v : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$.

19.2. Függvény határértéke

Adott f függvény határértéke a z_0 pontban H, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta > 0$, melyre $0 < |z - z_0| < \delta$ esetén $\left|f(z) - H\right| < \varepsilon$ teljesül.

19.3. Folytonos függvény

Adott $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ komplex függvény. Ekkor f folytonos $z_0 \in D_f$, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta > 0$, melyre $\forall z \in D_f$, $|z - z_0| < \delta$ esetén $\left|f(z) - f(z_0)\right| < \varepsilon$.

19.4. Differenciálhatóság

Adott $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ komplex függvény. Ekkor f differenciálható a $z_0 \in intD_f$ pontban, ha

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} < \infty.$$

19.5. Analitikus függvény

Azt mondjuk, hogy az f komplex függvény analitikus, ha differenciálható $\forall z \in D_f$-ben.

19.6. Cauchy-Riemann egyenletek

Adott $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ komplex függvény. f differenciálható a $z_0 \in intD_f$ pontban akkor és csak akkor, ha

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy f differenciálható a z_0 pontban. Ekkor

$$f'(z_0) = \lim_{r \to 0} \frac{u(x_0 + r, y_0) + iv(x_0 + r, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{r} =$$

$$= \lim_{r \to 0} \frac{u(x_0 + r, y_0) - u(x_0, y_0)}{r} + i \lim_{r \to 0} \frac{v(x_0 + r, y_0) - v(x_0, y_0)}{r} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Hasonlóan

$$f'(z_0) = \lim_{s \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + s) + iv(x_0, y_0 + s) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{is} =$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + s) - u(x_0, y_0)}{is} + i \lim_{s \to 0} \frac{v(x_0, y_0 + s) - v(x_0, y_0)}{is} = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Ebből azonnal kapjuk az állítást.

Most tegyük fel, hogy a függvény kielégíti a Cauchy-Riemann egyenleteket. Ekkor

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{r + is \to 0} \frac{u(x_0 + r, y_0 + s) + iv(x_0 + r, y_0 + s) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{r + is} =$$

$$= \lim_{r+is\to 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial x}r + \frac{\partial u}{\partial y}s + i\frac{\partial v}{\partial x}r + i\frac{\partial v}{\partial y}s + o(|h|)}{r+is} = \lim_{r+is\to 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial x}r - \frac{\partial v}{\partial x}s + i\frac{\partial v}{\partial y}r + i\frac{\partial u}{\partial x}s + o(|h|)}{r+is} =$$

$$= \lim_{r+is\to 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(r+is) + \frac{\partial v}{\partial x}(-s+ir) + o(|h|)}{r+is} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0).$$

Azt kaptuk tehát, hogy a határérték létezik, így a függvény differenciálható.

19.7. Harmonikus függvény

Adott $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ folytonos, kétszer differenciálható függvény. Azt mondjuk, hogy u harmonikus, ha

$$\Delta u = 0$$

teljesül D_u-n.

19.8. Harmonikus függvények kapcsolata az analitikus fügvénnyel

Ha az $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ differenciálható, akkor u, v harmonikusak.

Bizonyítás

A Cauchy-Riemann egyenletekből

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Az első egyenletet x szerint, a másodikat y szerint deriválva

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Ebből

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0.$$

Hasonlóan be lehet látni, hogy v harmonikus.

19.9. Harmonikus társ

Adott $u : D \mapsto \mathbb{R}$ harmonikus függvény, ahol D egyszeresen összefüggő tartomány. Ekkor $\exists v : D \mapsto \mathbb{R}$ harmonikus függvény, amelyre $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ differenciálható. Akkor v az u harmonikus társa és fordítva.

20. Tétel

20.1. Elemi függvények

20.1.1. Exponenciális függvény

Az exponenciális függvény

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y).$$

1. A függvény analitikus és $\big(e^z\big)' = e^z$.
2. $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ esetén
$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$
3. A függvény $2\pi i$ szerint periodikus.

Bizonyítás

1. A függvény kanonikus alakja
$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y).$$
Legyen $u(x,y) = e^x\cos y$ és $v(x,y) = e^x\sin y$ így $e^z = u(x,y) + iv(x,y)$.
$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x\cos y = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x\sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$
Azt látjuk, hogy a függvény eleget tesz a Cauchy-Riemann egyenleteknek, tehát differenciálható.
$$\big(e^z\big)' = e^x\cos y + ie^x\sin y = e^z.$$
2. $$e^{z_1+z_2} = e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} = e^{x_1+x_2}\big(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)\big) =$$
$$= e^{x_1+x_2}\big(\cos y_1\cos y_2 - \sin y_1\sin y_2 + i(\sin y_1\cos y_2 + \sin y_2\cos y_1)\big) =$$
$$= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) = e^{z_1}e^{z_2}$$
3. $$e^{z+2\pi i} = e^x\big(\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)\big) = e^z.$$

20.1.2. Logaritmus függvény

A logaritmus függvény $z \neq 0$ esetén

$$\ln z = \ln|z| + i(\operatorname{arc} z + 2k\pi) \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

A logaritmus főértéke $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{arc} z$.

1. $$e^{\ln z} = z$$
2. $z_1, z-2 \in \mathbb{C}$ esetén
$$\ln(z_1z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2 + 2k\pi i \qquad k \in \mathbb{Z}.$$
3. $$\frac{d}{\mathrm{d}z}\operatorname{Ln} z = \frac{1}{z}$$

Bizonyítás

1.
$$e^{\ln z} = e^{\ln|z| + i(\operatorname{arc} z + 2k\pi)} = |z| e^{i \operatorname{arc} z} = |z| \big(\cos(\operatorname{arc} z) + i \sin(\operatorname{arc} z) \big) = z$$

2.
$$\ln(z_1 z_2) = \ln|z_1 z_2| + i\big(\operatorname{arc}(z_1 z_2) + 2k\pi \big) = \ln|z_1| + \ln|z_2| + i(\operatorname{arc} z_1 + \operatorname{arc} z_2 + 2k\pi) =$$
$$= \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2 + 2k\pi i$$

3.
$$\big(e^{\operatorname{Ln} z} \big)' = e^{\operatorname{Ln} z} \operatorname{Ln}' z = 1 \implies \operatorname{Ln}' z = \frac{1}{z}$$

20.1.3. Hatványfüggvény

A hatványfüggvény
$$z^\lambda = e^{\lambda \ln z}.$$
A függvény főértékét kapjuk meg, ha a logaritmus főértékét használjuk.

20.2. Komplex vonalintegrál

Legyen az L görbe egy felosztása $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$, illetve legyen a k-adik ív tetszőleges pontja ξ_k. Ekkor
$$\int_L f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \delta_n \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\big(z(t_k) - z(t_{k-1}) \big)$$
ahol δ_n a leghosszabb ív hossza. Ha a görbe zárt, akkor az $\oint_L$ jelölést használjuk.

20.3. Vonalintegrál tulajdonságai

1. Linearitás
$$\int_L (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}z = \alpha \int_L f\,\mathrm{d}z + \beta \int_L g\,\mathrm{d}z$$
2.
$$\int_{-L} f\,\mathrm{d}z = -\int_L f\,\mathrm{d}z$$
3. Ha $L = L_1 + L_2$, ahol $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, akkor
$$\int_L f\,\mathrm{d}z = \int_{L_1} f\,\mathrm{d}z + \int_{L_2} f\,\mathrm{d}z\,.$$
4. Ha f folytonos, akkor létezik $\int_L f\,\mathrm{d}z$.
5. Ha f korlátos és $\big|f(z)\big| \le M$ $\forall z \in L$ esetén, akkor
$$\left| \int_L f\,\mathrm{d}z \right| \le M s(L).$$

20.4. Vonalintegrál kiszámítása

Legyen az L görbe paraméteres megadása
$$z(t) = x(t) + iy(t) = r(t)e^{i\theta(t)} \qquad t \in [\alpha, \beta].$$
Ekkor
$$\int_L f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f\big(z(t)\big) z'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f\big(x(t) + iy(t)\big)\big(x'(t) + iy'(t)\big)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_\alpha^\beta f\Big(r(t)e^{i\theta(t)}\Big)\Big(r'(t)e^{i\theta(t)} + ir(t)e^{i\theta(t)}\theta'(t)\Big)\,\mathrm{d}t\,.$$

20.4.1. Newton-Leibniz formula

Adott $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ komplex függévény. Tegyük fel, hogy létezik F analitikus komplex függvény, melyre $F' = f$. Ekkor

$$\int_L f(z)\,\mathrm{d}z = F\big(z(\beta)\big) - F\big(z(\alpha)\big)$$

ahol

$$L = \Big\{ z(t) = x(t) + iy(t) \Big| t \in [\alpha, \beta] \Big\}.$$

20.5. Cauchy féle alaptétel

Tegyük fel, hogy $D \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány és $L \subset D$ egy sima, zárt görbe. Ekkor ha az $f : D \mapsto \mathbb{C}$ függvény analitikus, akkor

$$\oint_L f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

20.6. Cauchy féle integrálformula

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány és $f : D \mapsto \mathbb{C}$ analitikus függvény. Adott $z_0 \in intD$ és $L \subset D$ olyan görbe, amely körbeveszi z_0-t. Ekkor

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z\,.$$

20.7. Taylor sorfejtés

Legyen $f : D \mapsto \mathbb{C}$ függvény, amely differenciálható z_0 környezetében. Ekkor f z_0-ban Taylor sorba fejthető és

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

ahol $L \subset D$ olyan görbe, amely körbeveszi z_0-t és

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z\,.$$

20.8. Laurent sorfejtés

Legyen f analitikus egy

$$D = \Big\{ z \in \mathbb{C} \Big| |z - z_0| \in (r, R) \Big\}$$

körgyűrűben. Ekkor ebben a körgyűrűben f Laurent sorba fejthető és

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

ahol $L \subset D$ olyan görbe, amely körbeveszi z_0-t és

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z\,.$$