Lokális szélsőértékek

- szükséges feltétel

$$\nabla f(x_0, y_0) = 0$$

(ez tetszőleges dimenzióban működik)

- elégséges feltétel I.,

$H(x,y)$ Hesse mátrix

  - $\det H(x_0, y_0) > 0$, akkor lok. sz.é.
    - $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, akkor lok. min.
    - $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) < 0$, akkor lok. max.
  - $\det H(x_0, y_0) < 0$, akkor nyeregpont
  - $\det H(x_0, y_0) = 0$, akkor ???
  - ez csak 2D-ben működik :(

- elégséges feltétel II.,
  - $H(x_0, y_0) \succ 0$ pozitív definit, akkor lok. min.
  - $H(x_0, y_0) \prec 0$, akkor lok. max.
  - $H(x_0, y_0)$ szemidefinit, akkor ???

    (van nulla sajátérték, de a többi előjele azonos)
  - $H(x_0, y_0)$ indefinit, akkor nyeregpont

    (poz. és neg. sajátérték is)
  - ez tetszőleges dimenzióban működik :)

II., => I.:

hiszen

$\det A$ = sajátértékek szorzata

1., $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$

<u>Haditerv</u>

- ∇f és H kiszámítása
- (x_0, y_0), melyre $\nabla f(x_0, y_0) = 0$
- $H(x_0, y_0)$ vizsgálata

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -4x + 3y^2 + 4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$, $H(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 6y \end{bmatrix}$

I., keressük az (x_0, y_0) pontokat, melyekre

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} 2x_0 - 4y_0 \\ -4x_0 + 3y_0^2 + 4 \end{bmatrix} = 0$$

$2x_0 - 4y_0 = 0 \rightarrow x_0 = 2y_0$

$-4x_0 + 3y_0^2 + 4 = -8y_0 + 3y_0^2 + 4 = 0 \rightarrow y_0 = 2,\ x_0 = 4$; $\rightarrow y_0 = \frac{2}{3},\ x_0 = \frac{4}{3}$

II., • $H(4,2) = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 12 \end{bmatrix}$, $\det H(4,2) = 2 \cdot 12 - (-4)^2 = 8 > 0$,

így $(4,2)$ lok. sz. é., és $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(4,2) = 2 > 0$,

így lok. min. és $f(4,2) = 0$.

• $H(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}) = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$, $\det H(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}) = 2 \cdot 4 - (-4)^2 = -8 < 0$,

így $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ nyeregpont.

2., $f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4x + 4y^3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2$$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 4x^3 - 4y \\ -4x + 4y^3 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{bmatrix}$$

I., $\nabla f(x_0, y_0) = 0$, azaz

$$4x_0^3 - 4y_0 = 0 \rightarrow y_0 = x_0^3$$

$$-4x_0 + 4y_0^3 = 0 \longrightarrow -4x_0 + 4(x_0^3)^3 = 0, \text{ azaz}$$

$$0 = -4x_0 + 4x_0^9 = 4x_0(x_0^8 - 1)$$

$x_0 = 0$, $y_0 = 0^3 = 0$

$x_0 = 1$, $y_0 = 1^3 = 1$

$x_0 = -1$, $y_0 = (-1)^3 = -1$

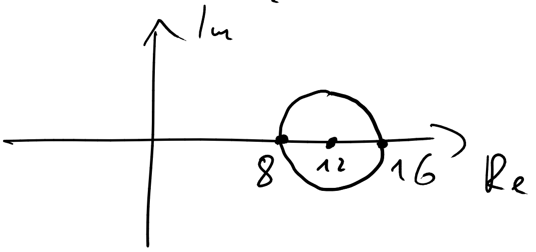
II., • $H(-1,-1) = \begin{bmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{bmatrix}$

Gerschgorin tétel

- a_i = i. sor i. eleme $\rightarrow a_1 = 12$, $a_2 = 12$
- $r_i = \sum\limits_{\substack{i.\text{ sor} \\ \text{kivéve } a_i}} |\text{elemek}| \longrightarrow r_1 = |-4|$, $r_2 = |-4|$

állítás: $\{\text{sajátértékek}\} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$

↳ a_i középpontú r_i sugarú kör a komplex számsíkon



$\Rightarrow$ két pozitív sajátérték van $\Rightarrow \det H(-1,-1) > 0$

és $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) = 12 > 0$

így lok. min.

és $f(-1,-1) = -2$.

- $H(1,1) = H(-1,-1)$, így lok. min. és $f(1,1) = -2$.
- $H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$, $\det H(0,0) = 0^2 - (-4)^2 = -16 < 0$, így nyeregpont

3, $f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{8}{x} + y$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} - \frac{8}{x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{16}{x^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-1}{y^2}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}$

$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{1}{y} - \frac{8}{x^2} \\ -\frac{x}{y^2} + 1 \end{bmatrix}$, $H = \begin{bmatrix} \frac{16}{x^3} & -\frac{1}{y^2} \\ -\frac{1}{y^2} & \frac{2x}{y^3} \end{bmatrix}$

I, $\nabla f(x_0, y_0) = 0$, azaz

$\frac{1}{y_0} - \frac{8}{x_0^2} = 0 \Rightarrow x_0^2 = 8y_0 \searrow (y_0^2)^2 = y_0^4 = 8y_0$

$-\frac{x_0}{y_0^2} + 1 = 0 \Rightarrow x_0 = y_0^2 \nearrow$

azaz

$y_0(y_0^3 - 8) = 0$

$y_0 = 0$ — ez nincs az értelmezési tartományban

$y_0^3 = 8$

$y_0 = 2$

$x_0 = 4$

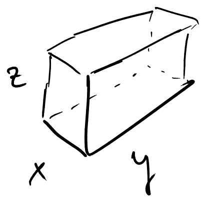
II., $H(4,2) = \begin{bmatrix} \frac{16}{4^3} & -\frac{1}{2^2} \\ -\frac{1}{2^2} & \frac{2\cdot 4}{2^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$

$\det H(4,2) = \frac{1}{4}\cdot 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{16} > 0$

és $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(4,2) = \frac{1}{4} > 0$, így lok. min.

és $f(4,2) = \frac{4}{2} + \frac{8}{4} + 2 = 6$.

4., Téglatest éleinek összege 12. Milyen élhosszúságok esetén lesz maximális a térfogat?



$4(x+y+z) = 12$, azaz $x+y+z=3$

$\Downarrow$

$z = 3-x-y$

$V(x,y,z) = xyz$

$\swarrow$ helyett

$V(x,y,3-x-y) = xy(3-x-y)$

$\frac{\partial V}{\partial x} = y(3-x-y) - xy$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -2y$

$\frac{\partial V}{\partial y} = x(3-x-y) - xy$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -2x$

$\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = (3-x-y) - y - x = 3-2x-2y$

$\nabla V = \begin{bmatrix} y(3-x-y)-xy \\ x(3-x-y)-xy \end{bmatrix}$, $H = \begin{bmatrix} -2y & 3-2x-2y \\ 3-2x-2y & -2x \end{bmatrix}$

I, $\nabla V(x_0, y_0) = 0$, azaz

$$y_0(3-x_0-y_0) - x_0 y_0 = 0$$

$$x_0(3-x_0-y_0) - x_0 y_0 = 0$$

kivonás után

$$(y_0 - x_0)(3-x_0-y_0) = 0$$

$y_0 = x_0$

$3-x_0-y_0=0$, ekkor $V = x_0 y_0 z_0 = x_0 y_0 (3-x_0-y_0) = 0$ nem ez kell nekünk

$$x_0(3-2x_0) - x_0^2 \qquad x_0 = 0$$

$$= 3x_0 - 3x_0^2 = 3x_0(1-x_0) = 0$$

$\hookrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1 \Rightarrow z_0 = 3 - x_0 - y_0 = 1$

II., $H(1,1) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, $\det H(1,1) = (-2)^2 - (-1)^2 = 3 > 0$ és $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(1,1) = -2 < 0$, így lok. max. és $V(1,1,1) = 1$.

Mi van, ha nem tudok deriválni?

ha $x, y, z > 0$, akkor

$$\sqrt[3]{xyz} \le \frac{x+y+z}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$xyz \le \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{3}\right)^3 = 1$$

és egyenlőség ha $x = y = z = 1$.

5.) $2x-y+z=0$ sík mely pontja van a legközelebb a $(-4,1,3)$ ponthoz.

általános pont a síkon: (x_0, y_0, y_0-2x_0)

$2x_0-y_0+z_0=0$

$$D(x,y)=\|(x_0,y_0,y_0-2x_0)-(-4,1,3)\|$$
$$=\sqrt{(x_0-(-4))^2+(y_0-1)^2+(y_0-2x_0-3)^2}$$
$$=\sqrt{5x_0^2-4x_0y_0+20x_0+2y_0^2-8y_0+26}$$

$$\frac{\partial D}{\partial x_0}=\frac{1}{2\sqrt{}}\cdot\frac{\partial}{\partial x_0}\left(5x_0^2-4x_0y_0+20x_0+2y_0^2-8y_0+26\right)$$

helyette vizsgáljuk a $d(x,y)=D^2(x,y)$ függvényt.