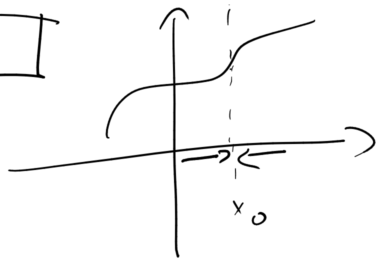
Határérték és folytonosság

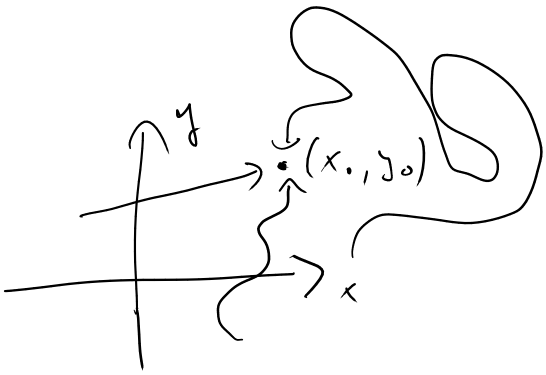
h.é.: minden irányból ugyanazt az értéket kéne kapni

$\boxed{1D}$



$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = \lim_{x \to x_0+} f(x) = L$$
$$\Updownarrow$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

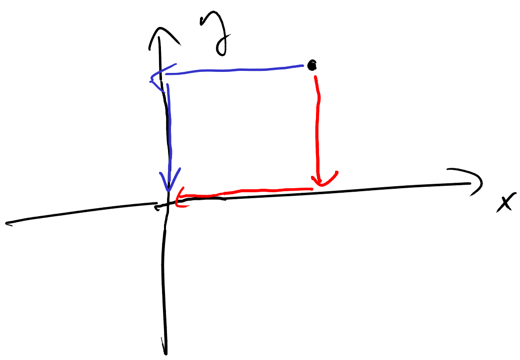
$\boxed{2D}$



folyt.: minden irányból ugyanazt az értéket kéne kapni, ami megegyezik a helyettesítési értékkel

1., $$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x+2y}{x-y}$$

ez egy 2D-s limesz



ez meg 2db 1D-s limesz

ez, mint x függvénye, folytonos

$$\lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} \frac{x+2y}{x-y} \right) = \lim_{y \to 0} \frac{0+2y}{0-y} = \lim_{y \to 0} \frac{2y}{-y} = \lim_{y \to 0} -2 = -2$$

$$\neq$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} \frac{x+2y}{x-y} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{x+2 \cdot 0}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0} 1 = 1$$

$\Longrightarrow \nexists$ h.é.

2.,
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy}{x^2+2y^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{4xy}{x^2+2y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{4\cdot x\cdot 0}{x^2+2\cdot 0^2} = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{4xy}{x^2+2y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{4\cdot 0\cdot y}{0^2+2y^2} = 0$$

ez ígéretes, de még nem biztos, hogy $\exists$ h.é.

Nézzük meg más egyenesek mentén.
Azaz legyen $y = mx$. Két jelölés:

- $$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to mx} \frac{4xy}{x^2+2y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{4\cdot x\cdot (mx)}{x^2+2(mx)^2}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{4mx^2}{x^2+2m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{4m}{1+2m^2} = \frac{4m}{1+2m^2}$$
ez nem mindig nulla
$\Rightarrow \nexists$ h.é.

- $f(x,mx) = \dfrac{4m}{1+2m^2}$ x-től független $\Rightarrow \nexists$ h.é.

$\Downarrow$

tehát a függvény szintvonalai egyenesek, amik az origóban metszik egymást
$\Rightarrow$ origóban $\nexists$ h.é. (ott a fv. nem folytonos)

2. újra) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4xy}{x^2+2y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Keressük f szintvonalait!

$$f(x,y)=\frac{4xy}{x^2+2y^2}=k \Rightarrow 4xy = kx^2+2ky^2$$

$$\Rightarrow 2ky^2-4xy = 2y(ky-x) = -kx^2$$

legyen ez is 2. fokú — ez 2. fokú

$$\Rightarrow y = mx$$

$$2mx(kmx-x) = -kx^2$$

Elég egy adott k-ra megnézni, pl $k=\frac{4}{3}$ esetén $m=1$ megfelelő.

(2. újra) Lerajzoljuk Matlabban :))

A haditerv

- próbálkozunk
- találgatunk a fokszámok alapján
- szintvonalat keresünk

3.,
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4xy^2}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$f(x,mx)=\frac{4x\cdot(mx)^2}{x^2+(mx)^4}=\frac{4m^2x^3}{x^2+m^4x^4} \leftarrow$$ ez függ x-től, így az egyenesek nem szintvonalak

ettől még lehetne $\lim\limits_{x\to0} f(x,mx)\neq 0$, de

$\lim\limits_{x\to0} f(x,mx)=0 \Rightarrow$ tehát ez nem mond ellent a folytonosságnak, sem a h.é. létezésének

Legyen $x = my^2$ (a fokszámok miatt, hiszen y kitevője mindig kétszerese az x kitevőjének)

$$f(my^2, y) = \frac{4 \cdot (my^2) \cdot y^2}{(my^2)^2 + y^4} = \frac{4my^4}{m^2y^4 + y^4} = \frac{4m}{m^2+1}$$

ez konstans, tehát szintvonalat kaptunk

4.)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\left(x \sin\frac{1}{y} + y \sin\frac{1}{x}\right)}_{f(x,y)}$$

$$f(x, mx) = x \sin\frac{1}{mx} + mx \sin\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0}\left(x \sin\frac{1}{mx} + mx \sin\frac{1}{x}\right) = 0$$

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{1}{mx}}{\frac{1}{x}} = m \cdot 0 = 0$
- $x \to 0$, $\sin\frac{1}{x}$ és $\sin\frac{1}{mx}$ korlátos
- $\lim_{x\to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x}$ rendőrelv

$$-|x| \le x \sin\frac{1}{x} \le |x|$$

Rendőrelv:

$$-(|x|+|y|) \le x \sin\frac{1}{y} + y \sin\frac{1}{x} \le |x| + |y|$$

mivel $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| + |y| = 0$, így

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \sin\frac{1}{y} + y \sin\frac{1}{x} = 0$$

5.,
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^2+2y^2}$$

$f(x,mx)$, $f(x,mx^2)$, $f(my^2,y)$ stb. mind 0-ba tart

$\Rightarrow$ az a gyanúnk, hogy $\exists$ h.é. és 0

Átviteli-elv

"minden irányból" $\equiv$ $\forall P_n$ pontsorozatra

tehát elég megmutatni, hogy tetszőleges P_n sorozatra $P_n \to (0,0)$ esetén $f(P_n)\to 0$.

$P_n\to(0,0) \iff \|P_n\|\to 0$ azaz $P_n=(x_n,y_n)$

$\|P_n\| = \sqrt{x_n^2+y_n^2}\to 0$

ez azt jelenti, hogy polárkoordinátákban

$P_n = (r_n\cos\Theta_n, r_n\sin\Theta_n)$, $\|P_n\|=r_n$

tehát $r_n\to 0$, Θ_n-ről nem tudunk semmit

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{n\to\infty} f(P_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n^3y_n}{x_n^2+2y_n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(r_n\cos\Theta_n)^3\cdot r_n\sin\Theta_n}{(r_n\cos\Theta_n)^2+2(r_n\sin\Theta_n)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{r_n^4\cos^3\Theta_n\sin\Theta_n}{r_n^2\cos^2\Theta_n+2r_n^2\sin^2\Theta_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{r_n^2}_{\text{ez 0-ba tart}}\cdot\frac{\cos^3\Theta_n\sin\Theta_n}{\cos^2\Theta_n+2\sin^2\Theta_n}$$

$\hookrightarrow$ ha ez korlátos, akkor 0·korlátos = 0 és kész vagyunk

$$\left|\frac{\cos^3\theta_n \cdot \sin\theta_n}{\cos^2\theta_n + 2\sin^2\theta_n}\right| \leq \frac{1}{\underbrace{|\cos^2\theta_n + 2\sin^2\theta_n|}_{1 \leq |1+\sin^2\theta_n| \leq 2}} \leq 1$$

$\Rightarrow$ tehát kész vagyunk, a határérték 0.

5. újra, $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$ $\overbrace{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|}^{\text{két pont közötti távolság}} < \delta$

$\Downarrow$

$|f(x,y) - L| < \varepsilon$

nekünk

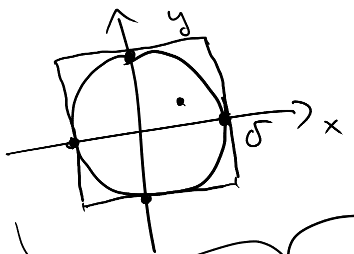
$(x_0,y_0) = (0,0)$

$L = 0$, azaz kéne, hogy

$$\|(x,y)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y)| = \left|\frac{x^3y}{x^2+2y^2}\right| < \varepsilon$$

$\sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow |x| < \delta$

$|y| < \delta$



ha a körben vagyunk, akkor a négyzetben is

azaz

$$\left|\frac{x^3y}{x^2+2y^2}\right| < \frac{\overbrace{\delta^3\cdot\delta}^{\delta^4}}{x^2+2y^2}$$ kéne, hogy ez kisebb legyen, mint ε

$$\frac{\delta^4}{x^2+2y^2} < \varepsilon \longrightarrow \delta^4 < \varepsilon(x^2+2y^2) < \varepsilon 3\delta^2$$

$$\Rightarrow \delta^2 < 3\varepsilon \Rightarrow \delta < \sqrt{3\varepsilon}$$

azaz $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Haditerv

próbálgatunk, vagy kitevők alapján tippelünk
különböző görbéket, vagy számolunk sorozatot

ha ugyanaz
a határérték,
akkor lehet, hogy
∃ h.é. / folytonos a fv.

polárkoordináták

ε-δ

ha nem ugyanaz
a határérték, akkor
∄ h.é. / nem folytonos a fv.

+ segítség: Matlab