1.Tétel: Alternáló sor. Leibniz sor
Leibniz sor konvergenciája. Feltételesen konvergens sor.

A **alternáló sorokra vonatkozó kritérium** akkor használható, ha a sor tagjai alternálnak. Tegyük fel, hogy adott a következő sor $A_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ahol a_n alternál, felváltva pozitív és negatív. Ha $|a_{n+1}| < |a_n|$ (azaz, a sor tagjai egyre kisebb abszolútértékűek) és ha $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, akkor a sor konvergens. Ha a $\Sigma\,|a_n|$ sor konvergens, akkor a $\Sigma\, a_n$ sor is konvergens lesz és azt mondjuk **abszolút konvergens**. Ha $\Sigma\,|a_n|$ divergens, de $\Sigma\, a_n$ konvergens, akkor azt mondjuk $\Sigma\, a_n$ **feltételesen konverges**.

2.2.6. Leibniz sorok

2.12. Definíció. $(\sum a_n)$ ***Leibniz sor***, *ha az* (a_n) *sorozat rendelkezik az alábbi három tulajdonsággal.*

1. *Váltakozó előjelű, azaz* $a_n a_{n+1} < 0$,
2. $(|a_n|)$ *monoton fogyó,*
3. (a_n) *nullsorozat.*

Alternatív definició. *Adott egy* (b_n) *pozitiív tagú számsorozat, mely monoton fogyó nullsorozat. Ekkor a*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} b_n$$

alakú sorok ***Leibniz típusúak***.

2.10. Tétel. *Minden Leibniz sor konvergens.*

2.15. Allítás. *(Osszeadás sorrendje és a sor összege)*

1. *Abszolút konvergens sor esetén a sor összege független az összeadandók sorrendjétől.*
2. *(Riemann-féle átrendezési tétel.) Feltételesen konvergens sor esetén a sor átrendezésével az összeg* ***bármi*** *lehet.*

New Section 1 Page 1

2.Tétel: n-ed fokú Taylor polinom.
n-ed fokú Taylor polinom hibatag: Lagrange-féle maradéktag. Taylor sor, konvergenciája (B vázlat) Pl e x , sin(x), cos(x)

7.3. Definíció. *Az f függvény **n-ed rendű Taylor polinomja**, mely az x_0-hoz tartozik:*

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k. \end{aligned} \tag{7.2}$$

7.4. Definíció. *Az $L_n(x) := f(x) - T_n(x)$ a **Lagrange-féle maradéktag**.*

7.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy az f függvény $(n+1)$-szer differenciálható x_0 egy U környezetében. Ekkor létezik olyan $\xi \epsilon U$, melyre:*

$$L_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)},$$

ahol ξ az x és x_0 között van.

7.5. Definíció. *Az f függvény x_0 körüli **Taylor sora** az alábbi függvény:*

$$T(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k.$$

7.6. Definíció. *Az f függvényt az x_0 pontban **analitikus**nak nevezzük, ha x_0-nak létezik olyan $(x_0 - R, x_0 + R)$ környezete, melyben a Taylor sor konvergens és $f(x) = T(x)$, ahol $T(x)$ az x_0 körüli Taylor sor. Az f függvény egy D tartományban analitikus, ha minden $x_0 \epsilon D$-ben analitikus.*

7.3. Állítás. *Adott az $f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}$ végtelen sokszor differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy ennek $f^{(k)}$ deriváltjai egyenletesen korlátosak, azaz $\exists K > 0$:*

$$|f^{(k)}(x)| \leq K, \qquad \forall x \epsilon (x_0 - R, x_0 + R), \qquad \forall k = 0, 1, 2, \ldots$$

Ekkor a függvényt előállítja Taylor sora:

$$f(x) = T(x), \qquad \forall x \epsilon (x_0 - R, x_0 + R).$$

3.Tétel: Hatványsor. Konvergencia halmaz. Konvergenciasugár.Hatványsor általános középponttal. Konvergenciatartomány ebben az esetben. Hatványsor összegfüggvénye, tulajdonságai

1.1. Definíció. *Legyen* (c_n) *egy számsorozat,* $x_0 \epsilon \mathbb{R}$ *egy rögzített szám.* ***Hatványsor*** *egy ilyen alakú formális összeget jelent:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n, \qquad (c_n) \subset \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

1.2. Definíció. *Adott a* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *hatványsor. A* **konvergencia halmaz** *(vagy konvergencia tartomány) azon* $x \epsilon \mathbb{R}$ *számok halmaza, ahol a hatványsor konvergens, azaz:*

$$\mathcal{H} = \{x \epsilon \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n < \infty\},$$

Ezen a halmazon az összeg jól értelemzett. Az összegfüggvény

$$f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

1.1. Állítás. *A konvergencia halmaz alaptulajdonságai:*

1. $0 \epsilon \mathcal{H}$.
2. *Tegyük fel, hogy* $\xi \epsilon \mathcal{H}$. *Akkor minden* x, *melyre* $|x| < |\xi|$, *szintén* $x \epsilon \mathcal{H}$.
3. *Tegyük fel, hogy* $\eta \notin \mathcal{H}$. *Akkor minden* x, *melyre* $|x| > |\eta|$, *szintén* $x \notin \mathcal{H}$.

1.3. Definíció. *A hatványsor* ***konvergencia sugarát*** (ρ) *így definiáljuk:*

- *Tegyük fel, hogy van* $\xi \neq 0$, *melyre* $\xi \epsilon \mathcal{H}$, *és van* $\eta \notin \mathcal{H}$. *Ekkor*

$$\rho := \sup\{|x| : x \epsilon \mathcal{H}\}, \qquad 0 < \rho < \infty.$$

- *Tegyük fel, hogy nincs* $\xi \neq 0$, *melyre* $\xi \epsilon \mathcal{H}$, *azaz* $\mathcal{H} = \{0\}$. *Ekkor* $\rho := 0$..
- *Tegyük fel, hogy nincs* $\eta \notin \mathcal{H}$, *azaz* $\mathcal{H} = \mathbb{R}$. *Ekkor* $\rho := \infty$.

1.3. Általános eset

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n.$$

1. $\mathcal{H} = \{x_0\}$,
2. $\mathcal{H} = \mathbb{R}$,
3. $\mathcal{H} = [(x_0 - \rho, x_0 + \rho)]$.

1.4. Összegfüggvény deriválása és integrálása

1.2. Állítás. *Adott egy hatványsor, melynek összegfüggvénye*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \qquad x \epsilon \mathcal{H}.$$

1. *Ekkor a konvergenciatartomány belső pontjaiban f folytonos*

2. *A hatványsor összegfüggvénye konvergencia halmazának minden belső pontjában akárhányszor tagonként deriválható, és k-dik deriváltja:*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)\, c_n\, x^{n-k}.$$

3. *Ha $[\alpha, \beta]$ a konvergeciatartomány belsejének része, akkor $f \epsilon \mathcal{R}[\alpha, \beta]$, és*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^{n+1}}{n+1}\Bigg|_{\alpha}^{\beta}.$$

4.Tétel: R2 pontjai, távolság. Pontsorozat a síkon, konvergencia. Kétváltozós függvény. Felület, szintvonalak Folytonosság, határérték adott pontban.

3.1.1. Pontok és pontsorozatok $\mathbb{R}^2$-ben.

A sík pontjait rögzített koordináta-rendszerben megadott rendezett számpárokkal jellemezzük: $P = (x, y)$. Ezen pontok halmazát $\mathbb{R}^2$-vel jelöljük.

3.1. Definíció. *Legyen $P_1 = (x_1, y_1)$ és $P_2 = (x_2, y_2)$ két pont $\mathbb{R}^2$-ben. Ezek távolsága:*

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

3.3. Definíció. Pontsorozat *alatt síkbeli pontok sorozatát értjük:*

$$P_n = (x_n, y_n), \qquad n = 1, 2 \ldots$$

3.5. Definíció. *A (P_n) sorozat* ***konvergens*** *és határértéke Q, ha*

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n - Q\| = 0.$$

3.3. Kétváltozós függvények

Adott $S \subset \mathbb{R}^2$ tartomány. $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, amely S elemeihez egy valós számot rendel. Értelmezési tartományát D_f -fel jelöljük (="domain"), értékkészletét R_f-fel (="range").

Függvény megadása azt jelenti, hogy megadjuk az értelmezési tartományt és a hozzárendelés módját $u = f(x, y)$.

Elnevezések: (x, y): független változó, u: függő változó.

Legegyszerűbb példák:

1. *Lineáris függvény.*

$$f(x, y) = ax + by + c,$$

ahol $a, b, c \epsilon \mathbb{R}$ rögzítettek. Értelmezési tartománya $\mathbb{R}^2$.

2. *Másodfokú polinom.*

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + j,$$

ahol $a, b, c, d, e, j \epsilon \mathbb{R}$ rögzítettek. Értelmezési tartománya $\mathbb{R}^2$.

Egyváltozós függvényt görbe segítségével lehet reprezentálni, a kétváltozós függvényt felületként fogjuk megadni. Tekintjük a háromdimenziós koordinátarendszert, melyben a koordináta tengelyek x, y és u. Itt az (x, y) síkot képzelhetjük a vízszintes síknak. A függvény értelmezési tartományának tetszőleges (x, y) pontja fölött kijelöljük azt a P pontot, melynek harmadik koordinátája $u = f(x, y)$. Ha (x, y) bejárja a függvény értelmezési tartományát, akkor a megfelelő P pontok egy felületet fognak megadni.

Tehát az $f : S \to \mathbb{R}$ függvényt a térben az alábbi számhármasok írják le:

$$\{(x, y, f(x, y)) : \ (x, y) \epsilon S\} .$$

Ezek a pontok felületet alkotnak a térben.

A háromdimenziós ábrázolás nem mindig megfelelő. Egyrészt ezt több független változóra nem tudjuk kiterjeszteni. Másrészt még két független változó esetén is szerencsésebb az (x, y) síkban dolgozni, itt gond nélkül tudunk rajzolni. Ehhez adnak segítséget a **szintvonalak**. Rögzített $k \epsilon \mathbb{R}$ mellett ábrázoljuk azokat az (x, y) pontokat, melyekre $f(x, y) = k$.

A szintvonalakkal történő ábrázolás kiterjeszthető háromváltozós $f(x, y, z)$ függvényekre. Ekkor szintvonalak helyett $k = f(x, y, z)$ **szintfelület**eket kapunk, ahol k tetszőleges konstans.

Definíció. *Legyen (x_0, y_0) az f függvény értelmezési tartományának egy pontja. f **folytonos** (x_0, y_0)-ban, ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, melyre $\forall (x, y) \epsilon D_f$ esetén*

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

3.17. Definíció. *Az f függvény **sorozatfolytonos** az értelmezési tartomány P_0 pontjában, ha minden $(P_n) \subset D_f$ sorozatra:*

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(P_n) = f(P_0).$$

3.2. Tétel. *f pontosan akkor folytonos P_0-ban, ha ott sorozatfolytonos.*

3.20. Definíció. *Adott $f : S \to \mathbb{R}$ kétváltozós valós függvény, $P_0 = (x_0, y_0)$ az ÉT egy torlódási pontja. Az f függvény **határértéke** (x_0, y_0)-ban L, ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz létezik $\delta > 0$, hogy $\forall (x, y) \epsilon S$ esetén*

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

Jelölés

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L.$$

Megfogalmazható az **átviteli elv**.

5.Tétel: Parciális deriváltak, szemléletes jelentés. Magasabb rendű parciális deriváltak, ezek kiszámítása. Láncszabály, 3 eset.

3.21. Definíció. *Legyen $f : S \to \mathbb{R}$ kétváltozós valós függvény. Legyen (x_0, y_0) az S halmaz belső pontja. A függvény x **szerinti parciális deriváltja** az (x_0, y_0) pontban az alábbi határérték, ha létezik és véges:*

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

*Hasonlóan, a függvény y **szerinti parciális deriváltja** (x_0, y_0)-ban az alábbi véges határérték, ha létezik:*

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

A parciális deriválást értelmezhetjük a következőképpen is. Rögzített y_0 mellett definiáljuk az $f_1(x) = f(x, y_0)$ egyváltozós valós függvényt. Ekkor

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = f'_1(x_0).$$

Hasonlóan, fix x_0-ra definiáljuk az $f_2(y) = f(x_0, y)$ egyváltozós függvényt. Ekkor

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) = f'_2(y_0).$$

Példa. $f(x, y) = 3x^2 + y^2$. Az elsőrendű parciális deriváltak

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 6x \\ f'_y(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 2y. \end{aligned}$$

A másodrendű parciális deriváltak

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x, y) &= 6 \qquad & f''_{yy}(x, y) &= 2 \\ f''_{yx}(x, y) &= 0 \qquad & f''_{xy}(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Láncszabály, 3. speciális eset

Adott $f(u, v)$ kétváltozós függvény, ahol az u és v változók helyére kétváltozós függvényeket helyettesítünk:

$$u = \phi(x, y), \qquad v = \Psi(x, y).$$

Legyenek $\psi, \phi : R \to \mathbb{R}$, $R \subset \mathbb{R}^2$ adott kétváltozós függvények. Jelölje:

$$S := \{(u, v) : u = \phi(x, y),\ v = \psi(x, y),\ (x, y) \epsilon R\}.$$

Ekkor az összetett függvény az alábbi $F : R \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény:

$$F(x, y) = f(\phi(x, y), \psi(x, y))$$

6.Tétel: Érintősík. Teljes derivált. Gradiens. Második derivált: Hesse mátrix. Deriválhatóság és folytonosság.

A derivált geometriai jelentése is hasonló az egydimenziós esethez. Ha a függvény differenciálható egy pontban, akkor a pont közelében a függvény értékét az érintősík segítségével közelíthetjük. A sík megadásához megadjuk egy pontját - ez $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ - és megadjuk a sík meredekségét, ami a két parciális derivált. Az érintősík egyenlete tehát ez lesz:

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0). \qquad (3.4)$$

3.4.2. Teljes differenciálhatóság

3.22. Definíció. *Legyen $f : S \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, és $(x, y) \epsilon \text{ int} S$. Az f függvény* ***differenciálható*** *(x, y)-ban, ha léteznek olyan A, B, C számok, melyekre elegendően kicsi Δx és Δy mellett teljesül, hogy*

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = A\Delta x + B\Delta y + C + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \qquad (3.2)$$

ahol A, B, C függetlenek Δx-től és Δy-tól.

3.8. Tétel. *Ha f differenciálható az (x, y) pontban, akkor ott folytonos is és léteznek az adott pontban vett parciális deriváltak. Továbbá a (3.2) képletben szereplő konstansokra*

$$C = f(x, y); \qquad A = f'_x(x, y); \qquad B = f'_y(x, y).$$

3.23. Definíció. *Ha az f függvény differenciálható az (x, y) pontban, akkor ebben a pontban a* ***derivált*** *egy kétdimenziós vektor lesz, melyet gradiensnek nevezünk:*

$$\text{grad } f(x, y) = \nabla f(x, y) = (f'_x(x, y), f'_y(x, y)).$$

Ha az f függvény egy S_0 halmaz minden pontjában differenciálható, akkor a deriváltfüggvény

$$\text{grad } f : \ S_0 \to \mathbb{R}^2$$

típusú lesz.

3.27. Definíció. *Ha a függvény kétszer differenciálható (x_0, y_0)-ban, akkor függvény* ***második deriváltja*** *az alábbi mátrix:*

$$H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{yx}(x_0, y_0) \\ \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Ez az (x_0, y_0) ponthoz tartozó ***Hesse mátrix.***

3.6. Tétel. $f : S \to \mathbb{R}$ *kétváltozós függvény,* $(x_0, y_0) \epsilon \ \mathrm{int}S$. *Tegyük fel, hogy az f'_x és f'_y parciális deriváltak léteznek (x_0, y_0) valamely $U \subset S$ környezetében. Tegyük fel továbbá, hogy a parciális deriváltak itt korlátosak, azaz*

$$|f'_x(x, y)| \leq M, \quad |f'_y(x, y)| \leq M \qquad \forall (x, y) \epsilon U.$$

Ekkor az f függvény folytonos az (x_0, y_0)-ban.

3.7. Tétel. *Adott* $f : S \to \mathbb{R}$ *kétváltozós függvény,* $(x, y) \epsilon \ \mathrm{int}S$. *Ha a pont egy környezetében léteznek az f''_{xy} és f''_{yx} másodrendű parciális deriváltak, és az adott pontban folytonosak, akkor itt a deriválások sorrendje felcserélhető:*

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

7.Tétel: Lokális és globális szélsőérték, definíció. Szükséges feltétel. Elégséges feltétel lokális szélsőértékre.

3.28. Definíció. $(x_0, y_0)\epsilon S$ ***lokális maximum (ill. minimum)***, *ha létezik a pontnak olyan U környezete, hogy*

$$f(x,y) \leq f(x_0,y_0) \qquad (ill.\ f(x,y) \geq f(x_0,y_0)) \qquad \forall (x,y)\epsilon U \cap D_f.$$

(x_0, y_0) ***globális maximum (ill. minimum)***, *ha minden*

$$f(x,y) \leq f(x_0,y_0) \qquad (ill.\ f(x,y) \geq f(x_0,y_0)) \qquad \forall (x,y)\epsilon D_f.$$

3.13. Tétel. *(Szükséges feltétel a szélsőérték létezésére) Tegyük fel, hogy az f differenciálható függvénynek (x_0, y_0)-ban lokális szélsőértéke van. Ekkor $f'_x(x_0,y_0) = 0$, és $f'_y(x_0,y_0) = 0$, azaz*

$$\operatorname{grad} f(x_0,y_0) = (0,0).$$

3.14. Tétel. *(Elégséges feltétel a szélsőérték létezésére)*
Tétel *(Az előző tétel átfogalmazása.) Tegyük fel, hogy (x_0, y_0) egy stacionárius pontja f-nek. Ekkor ha a $H(x_0, y_0)$ Hesse mátrix*

- *pozitív definit, akkor itt a függvénynek lokális minimuma van,*
- *negatív definit, akkor lokális maximuma van,*
- *indefinit, akkor nincs szélsőértéke,*
- *szemidefinit, akkor még nem eldönthető a lokális szélsőérték létezése*

8.Tétel: Feltételes szélsőérték, feladat kitűzés Lagrange féle multiplikátor módszer.

3.30. Definíció. *Legyen $f : S \to \mathbb{R}$ kétváltozós differenciálható függvény. Ennek tekintjük megszorítását azon a halmazon, melyet egy implicit függvény ad meg, ahol a $\phi(x, y) = 0$ összefüggés teljesül. Tömören a feladat tehát:*

$$\min_{\{(x,y):\ \phi(x,y)=0\}} f(x, y). \tag{3.6}$$

3.15. Tétel. *(Szükséges feltétel feltételes szélsőértékre) Tegyük fel, hogy az $f(x, y)$ és $\phi(x, y)$ függvények differenciálhatók, és (x_0, y_0) pont a (3.6) feltételes optimalizálás megoldása. Tegyük fel, hogy* $\operatorname{grad} \phi(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. *Ekkor létezik olyan $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ konstans, melyre*

$$f'_x(x_0, y_0) - \lambda_0 \phi'_x(x_0, y_0) = 0,$$

$$f'_y(x_0, y_0) - \lambda_0 \phi'_y(x_0, y_0) = 0.$$

A fenti tételt átfogalmazva kimondjuk a *Lagrange-féle multiplikátor szabályt. Definiáljuk az $F : D_f \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ háromváltozós függvényt:*

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \phi(x, y).$$

Ha (x_0, y_0) megoldása a feltételes szélsőérték feladatnak, akkor van olyan λ_0, melyre (x_0, y_0, λ_0) stacionárius pontja $F(x, y, \lambda)$-nak.

Tekinsük az alábbi feltételes optimalizálási feladatot:

$$\min_{\{\phi(x,y)=0\}} f(x, y) \qquad \text{vagy} \qquad \max_{\{\phi(x,y)=0\}} f(x, y).$$

Ehelyett tekinthetjük az

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \phi(x, y), \qquad (x, y) \in D_f, \lambda \in \mathbb{R}$$

függvény *feltétel nélküli* szélsőérték feladatát.

Fontos hangsúlyozni, hogy a fenti Lagrange-féle multiplikátor szabály csak *szükséges* feltételt ad a feltételes szélsőérték helyére. Tehát az F függvény stacionárius pontja lehetséges feltételes szélsőérték, és minden esetben további meggondolás szükséges.

9.Tétel: Kettős integrál definíciója, alsó és felső közelítő összegekkel Kettős integrál téglalapon. Iteratív integrál számítás téglalap tartományon. Normál tartomány, x vagy y szerinti. Integrálás

4.1.1. Kettős integrál

Legyen $R \subset \mathbb{R}^2$ korlátos és zárt tartomány. $f : R \to \mathbb{R}^+$ folytonos függvény. Célunk, hogy meghatározzuk az $f(x, y)$ felülete alatti térrész, azaz a következő három dimenziós tartomány térfogatát, $V(S)$-t:

$$S = \{(x, y, z) : \ (x, y)\epsilon R, \ 0 \leq z \leq f(x, y)\},$$

Tekintsük az R halmaz felosztását olyan halmazokra, melyeknek nincs közös belső pontjuk: $R = R_1 \cup \ldots \cup R_n$. Az R halmaz területét jelölje $A(R)$.

Az i-dik halmazon a függvény infimuma m_i és suprémuma M_i:

$$m_i = \inf\{f(x, y) : \ (x, y)\epsilon R_i\}, \qquad M_i = \sup\{f(x, y) : \ (x, y)\epsilon R_i\}.$$

Ekkor a felosztáshoz tartozó alsó- és felső közelítő összegek:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i A(R_i) \quad \text{és} \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i A(R_i) \quad \Longrightarrow \quad s_n \ \leq V(S) \ \leq \ S_n.$$

4.2. Definíció. *Legyen $f : R \to \mathbb{R}$ korlátos függvény (nem feltétlenül nemnegatív), R korlátos tartomány $\mathbb{R}^2$-ben. Legyen $(\xi_i, \eta_i)\epsilon R_i$ az i-dik tartomány tetszőleges pontja, a hozzá tartozó függvényérték $f_i := f(\xi_i, \eta_i)$. A felosztáshoz tartozó* **Riemann-féle közelítő összeg***:*

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} f_i \ A(R_i).$$

*Az f függvény **Riemann-integrálható**, ha létezik az alábbi határérték:*

$$\lim_{\substack{n\to\infty,\\ \max\delta(R_i)\to 0}} V_n = V,$$

ahol V értéke független a (ξ_i, η_i) pontok választásától. Ekkor ezt így jelöljük:

$$\iint_R f(x, y)\, dR = \iint_R f(x, y)\, d(x, y).$$

4.1. Következmény. *Ha az f folytonos egy R korlátos és zárt tartományon, akkor f ezen a tartományon integrálható is.*

Integrálás téglalap tartományon

Legyen R kétdimenziós intervallum, $R = [a,b] \times [c,d]$ és $f : R \to \mathbb{R}$ integrálható függvény (nem feltétlenül szeparábilis).

4.2. Tétel. *Minden $y \epsilon [c,d]$ esetén értelmezzük a $\Phi : [c,d] \to \mathbb{R}$ függvényt:*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx.$$

Ekkor Φ integrálható, és

$$\int\limits_c^d \Phi(y)dy = \iint\limits_R f(x,y)dR.$$

Integrálás normáltartományon

4.3. Definíció. *$R \subset \mathbb{R}^2$ egy x szerinti* ***normáltartomány****, ha $\exists [a,b]$ intervallum és $\exists \Phi_1, \Phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ szakaszonként folytonos függvények, melyekre $\Phi_1(x) \leq \Phi_2(x)$ minden x-re, és*

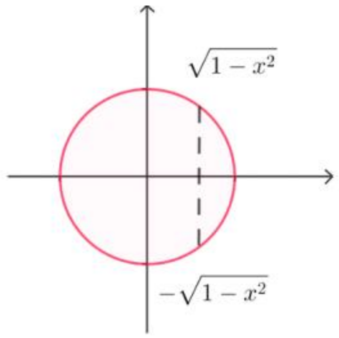
$$R = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ \Phi_1(x) \leq y \leq \Phi_2(x)\}.$$

4.3. Tétel. *Ha R x szerinti normáltartomány, $f : R \to \mathbb{R}$ integrálható, akkor*

$$\iint\limits_R f(x,y)dR = \int\limits_a^b \int\limits_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} f(x,y)\ dy\ dx,$$

10.Tétel: Integrál kör és körgyűrű tartományon. Áttérés polárkoordinátákra. Általános helyettesítés kettős integrálban

Integrálás kör alakú tartományon



1. Példa. Legyen R_1 az egységkör:

$$R_1 = \{(x,y) : \quad x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

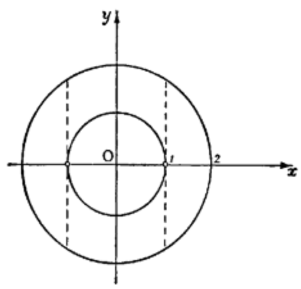
Ez tekinthető például x szerinti normáltartományként.

$$R_1 = \{(x,y) : \; -1 \leq x \leq 1, \quad -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

Ekkor az integrál így számolható:

$$\iint_{R_1} f(x,y)dR = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\; dy\; dx. \tag{4.1}$$

Látható, hogy "belülről kifelé" végezve a számolást, tipikusan nehéz számolás várható.



2. Példa. Legyen R_2 az alábbi körgyűrű:

$$R_2 = \{(x,y) : \; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Ez a tartomány nem normáltartomány. De fel tudjuk osztani olyan részekre, amelyek már normáltartományok, és ott elvileg tudunk integrálni.

Ekkor az integrál, ha $f(x,y)$-ban az (x,y) argumentumokat nem írjuk ki:

$$\iint_{R_2} f\,dR = \int_{-2}^{-1} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f\; dydx + \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f\; dydx + \int_{-1}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f\; dydx + \int_{1}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f\; dydx.$$

Ez már "reménytelenül nehéz" számolás bármely tipikus függvény esetén.

$$x = r\cos(\theta) \quad \text{és} \quad y = r\sin(\theta). \tag{4.2}$$

Ekkor átírva polárkoordinátákra ezt kapjuk:

$$R_1 = \{(x,y):\ x^2+y^2 \le 1\} \implies R_1' = \{(r,\theta)\ 0 \le r \le 1,\ \ 0 \le \theta < 2\pi\}.$$

$$R_2 = \{(x,y):\ 1 \le x^2+y^2 \le 4\} \implies R_2' = \{(r,\theta):\ 1 \le r \le 2,\ 0 \le \theta < 2\pi\}.$$

Látható, hogy a polárkoordinátákat használva R_1 és R_2 téglalap tartomány:

$$R_1' = [0,1] \times [0,2\pi), \qquad R_2' = [0,1] \times [0,2\pi).$$

Téglalap tartományon pedig könnyen integrálhatunk. Érdemes tehát az integrálban helyettesíteni.

4.4. Tétel. *Adott egy $f : R \to \mathbb{R}$ integrálható függvény, ahol R korlátos tartomány. Tekintsük a (4.2) polárkoordináta helyettesítést. Legyen továbbá*

$$R' = \{(r,\theta):\ (r\cos\theta, r\sin\theta)\epsilon R\}.$$

Ekkor

$$\iint\limits_R f(x,y)\,d(x,y) = \iint\limits_{R'} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,d(r,\theta).$$

4.5. Tétel. *Adott egy $f : R \to \mathbb{R}$ integrálható függvény, ahol R korlátos tartomány. Tekintsünk egy transzformációt:*

$$\begin{aligned} x &= \Phi(u,v) \\ y &= \Psi(u,v), \end{aligned}$$

, melyről feltesszük, hogy Jacobi mátrixa sehol sem szinguláris, azaz

$$J(u,v) = \begin{pmatrix} \Phi_u'(u,v) & \Phi_v'(u,v) \\ \\ \Psi_u'(u,v) & \Psi_v'(u,v) \end{pmatrix}.$$

jelöléssel $\det J(u,v) \neq 0$ *R-ben. Legyen továbbá*

$$R' = \{(u,v):\ (\Phi(u,v), \Psi(u,v))\epsilon R\}.$$

Ekkor

$$\iint\limits_R f(x,y)\,d(x,y) = \iint\limits_{R'} f(\Phi(u,v), \Psi(u,v)) D(u,v)\,d(u,v).$$

11.Tétel: Hármas integrál téglalapon. Gömbi polárkoordináták Helyettesítés hármas integrálban gömbi polár

Speciálisan legyen $S = [a,b] \times [c,d] \times [e,g]$ háromdimenziós téglalap, azaz

$$S = \{(x,y,z): \ x \epsilon [a,b], \ y \epsilon [c,d], z \ \epsilon [e,g]\},$$

ahol $a < b, \ c < d, \ e < g \epsilon \mathbb{R}$. Legyen $f : R \to \mathbb{R}$ korlátos függvény.

4.6. Tétel. *A fenti feltételek mellett*

$$\iiint\limits_R f(x,y,z) dR = \int\limits_a^b \int\limits_c^d \int\limits_e^g f(x,y,z) dz \ dy \ dx,$$

ahol az integrálások sorrendje felcserélhető.

4.3.2. Gömbi koordináták $\mathbb{R}^3$-ban.

4.5. Definíció. $\mathbb{R}^3$*-ban. Egy* (x,y,z) *pont* ***gömbi koordinátái*** (r,θ,φ), *melyeket a következőképpen definiálunk.*

1. *r a pontba mutató vektorhossza.* $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $r \geq 0$. .
2. *θ a pontba mutató vektor (x,y) síkra vett vetületének az x tengely pozitív részével bezárt szöge.* $\theta \epsilon [0, 2\pi)$
3. *φ a pontba mutató vektor és a z tengely pozitív részének a szöge.* $\varphi \epsilon [0,\pi]$

A gömbi koordinátákkal az (x,y,z) pont így írható le:

$$\begin{aligned} x &= r \sin\varphi \ \cos\theta \\ y &= r \sin\varphi \ \sin\theta \\ z &= r \cos\varphi. \end{aligned}$$

Határozzuk meg az $(r,\theta,\varphi) \mapsto (x,y,z)$ transzformáció Jacobi mátrixát:

$$J(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

Példa. Az előző fejezetben láttuk a gömbi polárkoordinátákat, ez egy lehetséges koordinátatranszformáció. Számoljuk ki az egységgömb térfogatát. Legyen

$$R = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}.$$

A gömbi koordinátákkal R' téglalap-tartomány:

$$R' = \{(r,\varphi,\theta) \ : \ r \leq 1, \ 0 \leq \varphi \leq \pi, \ 0 \leq \theta < 2\pi\}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \iiint\limits_R 1 \ d(x,y,z) &= \int\limits_0^1 \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} r^2 \sin\varphi \ d\theta \ d\varphi \ dr = \\ &= 2\pi \int\limits_0^1 r^2 dr \int\limits_0^\pi \sin\varphi \ d\varphi = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

12.Tétel: Vonal a síkon, paraméterezett megadás. Valós függvény, vektormező vonalintegrálja. Szemléletes jelentés. Vektormező potenciálfüggvénye Potenciálos vektormező vonalintegrálja, alaptétel

Vonal a síkon

3.11. Definíció. *Legyen P és P' két $\mathbb{R}^2$-beli pont. Ezeket összekötő folytonos* ***vonalat*** *egy $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ függvénnyel tudunk megadni. A vonal:*

$$\Gamma = \{\gamma(t) \ : \ t\epsilon[\alpha, \beta]\}, \qquad \gamma(\alpha) = P, \quad \gamma(\beta) = P'.$$

A $\gamma(t)\epsilon\mathbb{R}^2$ pont koordinátáit jelölje $\gamma(t) =: (x(t), y(t))$. Feltesszük, hogy ezek az $x(t)$ és $y(t)$ koordináta-függvények:

$$x, y : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R} \qquad \textit{folytonosak.}$$

3.12. Definíció. *Az $S \subset \mathbb{R}^2$ tartomány* ***összefüggő****, ha bármely két pontját kiválasztva tartalmaz egy őket összekötő folytonos vonalat.*

3.13. Definíció. *Legyen $P = (x, y)$ és $P' = (x', y')$ két $\mathbb{R}^2$-beli pont. A két pontot összekötő* ***szakaszt*** *az alábbi függvény írja le:*

$$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) := P + t(P' - P).$$

Speciálisan tehát $\gamma(0) = P$, $\gamma(1) = P'$.

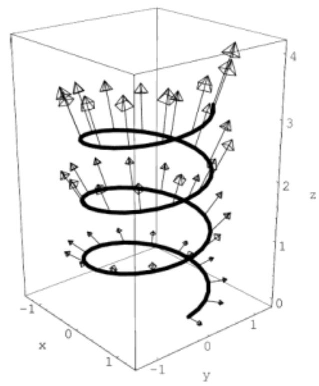
A szakasz is folytonos vonal, mégpedig az alábbi koordináta-függvényekkel:

$$\begin{aligned} x(t) &= x + t(x' - x), \\ y(t) &= y + t(y' - y). \end{aligned}$$

4.5.2. Vektormező vonalintegrálja

4.10. Definíció. *(Térbeli Jordan görbe) Adott egy $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallum, és ezen az intervallumon három valós függvény $x, y, z \ : \ [a, b] \to \mathbb{R}$, melyek folytonosan differenciálhatók az (a, b)-ban. Legyen $\gamma \ : \ [a, b] \to \mathbb{R}^3$ az a vektorértékű függvény, melynek ezek a koordináta függvényei,*

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \qquad a \leq t \leq b.$$



A γ függvény értékkészlete a $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ ***háromdimenziós Jordan görbe:***

$$\Gamma = \{\gamma(t) \ : \ t\epsilon[a, b]\}.$$

Legyen F egy háromdimenziós vektormező $F : D \to \mathbb{R}^3$, ahol $D \subset \mathbb{R}^3$. F koordináta függvényeit jelölje $f_1, f_2, f_3 : D \to \mathbb{R}$.

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

Adott egy háromváltozós, valós értékű $f(x, y, z)$ függvény $f : R \to \mathbb{R}$, ahol $R \subset \mathbb{R}^3$. Ha a függvény differenciálható a tartományban, akkor gradiense vektormező:

$$\text{grad } f : R \to \mathbb{R}^3.$$

Ennek 'fordítottját' kérdezzük. Ha adott egy

$$F : R \to \mathbb{R}^3$$

4.12. Definíció. *Adott egy $F : R \to \mathbb{R}^3$ vektormező. Az F* **a vektormező potenciálos**, *más szóval* **van primitív függvénye**, *ha $\exists f : R \to \mathbb{R}$ valós függvény, melyre $F = \text{grad } f$.*

4.12. Tétel. *Adott az F vektormező egy $R \subset \mathbb{R}^3$ egyszeresen összefüggő tartományon. F-nek pontosan akkor létezik potenciálja, ha minden R-beli zárt görbe mentén az F vektormező vonalintegrálja 0.*

2.1.Tétel: Trigonometrikus polinom, sor. Trionometrikus függvényrendszer. "Ortogonalitás". Trig. polinom együtthatói.

2.1. Definíció. *Az f függvény n-ed fokú* ***trigonometrikus polinom,*** *ha*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right), \qquad x \epsilon \mathbb{R}$$

valamely a_k, b_k valós együtthatókkal. A $\sin(kx)$ és $\cos(kx)$ függvények argumentumában szereplő k konstansokat ***frekvenciának*** *nevezzük.*

2.2. Definíció. *Adottak az (a_k), (b_k) valós számsorozatok, ezek együtthatók. Az alábbi formális végtelen sort* ***trigonometrikus sornak*** *nevezzük:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right), \qquad x \epsilon \mathbb{R}.$$

Az összegfüggvény 2π szerint periodikus lesz. Emiatt elegendő lesz $x \epsilon [-\pi, \pi]$ pontokat tekinteni. (Bármely más 2π hosszú intervallumot is lehet.)

2.2. A trigonometrikus függvényrendszer

Definiáljuk az alábbi alapfüggvényeket $x \epsilon [-\pi, \pi]$ esetén:

$$\begin{array}{cc} & \phi_0(x) = 1, \\ \phi_1(x) = \sin(x), & \phi_2(x) = \cos(x), \\ \vdots & \vdots \\ \phi_{2k-1}(x) = \sin(kx), & \phi_{2k}(x) = \cos(kx), \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

2.1. Lemma. *Tetszőleges $n \neq m$ mellett*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(x)\phi_m(x) = 0.$$

2.2. Lemma. *Tetszőleges n mellett*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_n^2(x)dx = \begin{cases} 2\pi, & \text{ha } n = 0, \\ \pi, & \text{ha } n \neq 0. \end{cases}$$

Megjegyzés. A Lemmában megfogalmazott tulajdonságot szokás úgy nevezni, hogy a (ϕ_n) *függvényrendszer ortogonális*

2.2.Tétel: Fourier sor, Fourier együtthatók. Spec esetek: páros ill. páratlan függvény Fourier sora.

2.3. Fourier sorok

2.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy f egy trigonometrikus polinom:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Ekkor

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, \qquad k = 0, 1, 2, \dots N \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx, \qquad k = 1, 2, \dots N. \end{aligned}$$

2.3. Definíció. *Legyen f egy 2π szerint periodikus függvény, mely integrálható $[-\pi, \pi]$-ben. Az f függvény **Fourier együtthatóit** így definiáljuk:*

$$a_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, \qquad k = 0, 1, 2, \dots \tag{2.2}$$

$$b_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx, \qquad k = 1, 2, \dots. \tag{2.3}$$

2.4. Definíció. *A fenti f függvény **Fourier sorát** így értelmezzük:*

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

*ahol a_k és b_k a fenti (2.2) és (2.3) képletekkel definiált Fourier együtthatók. A Fourier sor közelítése az **n-dik Fourier polinom**:*

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

1. *Példa.* Tegyük fel, hogy f páros függvény. Ekkor f Fourier sorában a b_k együtthatók mind 0-k lesznek, így

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx), \qquad a_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx.$$

2. *Példa.* Hasonlóképp, ha f páratlan, akkor Fourier sora:

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx), \qquad b_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx.$$

2.3.Tétel: Derivált függvény Fourier sora, Fourier sorok alaptétele. Komplex együtthatós Fourier sorok.

2.2. Tétel. *(Deriváltfüggvény Fourier sora) Legyen az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós függvény 2π szerint periodikus és tegyük fel, hogy f differenciálható. Ekkor az f' deriváltfüggvény Fourier sora tagonkénti deriválással kiszámítható:*

$$f' \sim \sum_{k=1}^{\infty}(-a_k k \sin(kx) + b_k k \cos(kx)).$$

2.4. Tétel. *(Fourier sorok alaptétele) Legyen az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény 2π szerint periodikus. Tegyük fel, hogy f teljesíti az alábbi feltételeket:*

1. *Szakaszonként folytonosan differenciálható $[-\pi, \pi]$-ben.*
2. *Legfeljebb véges sok szakadási hely van $[-\pi, \pi]$-ben, amelyek elsőfajú szakadások.*
3. *Ha x_0 szakadási pont, akkor itt a függvényérték:*

$$f(x_0) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$$

Ekkor a függvényt előállítja Fourier sora:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ikx},$$

2.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy f ilyen alakú:*

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ikx}.$$

Ekkor az együtthatók:

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \qquad -n \leq k \leq n.$$

2.4.Tétel: Fourier transzformáció, Dirichlet feltételekkel. Páros, ill páros függvény esetén. Tulajdonságok.

5.1. Fourier transzformáció bevezetése

Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós függvény kielégíti az alábbi feltételeket:

1. Tetszőleges $I \subset \mathbb{R}$ véges intervallum esetén f leszűkítése az I intervallumra véges sok pontot kivéve folytonosan differenciálható.

2. A függvény abszolút integrálható, azaz
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

3. Ha x_0 szakadási pont, akkor ez a szakadás csak elsőfajú lehet, és itt a függvényérték:
$$f(x_0) = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}.$$

5.1. Definíció. *Tegyük fel, hogy f teljesíti az 1. 2. feltételeket. f* ***Fourier transzformáltja*** *az az $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ komplex értékű függvény, melyet így definiálunk:*
$$\widehat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx. \tag{5.2}$$

Fourier transzformált másik jelölése
$$\mathcal{F}(f, s) = \widehat{f}(s).$$

5.1. Állítás. *1. Ha f páros függvény, akkor Fourier transzformáltja valós:*
$$\widehat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(st)dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t)\cos(st)dt.$$

2. Ha f páratlan függvény, akkor Fourier transzformáltja tisztán képzetes:
$$\widehat{f}(s) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(st)dt = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t)\sin(st)dt.$$

5.2. Állítás. *A Fourier transzformált alaptulajdonságai:*

1. *A hozzárendelés lineáris, azaz*

$$\mathcal{F}(cf, s) = c\mathcal{F}(f, s), \qquad \mathcal{F}(f + g, s) = \mathcal{F}(f, s) + \mathcal{F}(g, s).$$

2. *Ha f folytonos, akkor $\mathcal{F}(f)$ folytonos függvény.*

3. *(Átskálázás)*

$$\mathcal{F}(f(ax), s) = \frac{1}{a}\mathcal{F}(f(x), \frac{s}{a}), \qquad \text{ha } a > 0.$$

4. *(Idő megfordítása)*

$$\mathcal{F}(f(-x), s) = \mathcal{F}(f(x), -s).$$

5. *(Idő eltolás)*

$$\mathcal{F}(f(x - x_0), s) = e^{-ix_0 s}\mathcal{F}(f(x), s).$$

6. *(Frekvencia eltolás)*

$$\mathcal{F}(e^{ikx} f(x), s) = \mathcal{F}(f(x), s - k).$$

Bizonyítás:

1. Ez könnyen látható, hisz az intergál lineáris operátor.

2.5.Tétel: Inverz Fourier transzformáció, alaptétel. Parseval egyenlőség. További tulajdonságok: deriválás időtartományban ill. frekvenciatartományban

5.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy f teljesíti az 1.-2.-3. feltételeket. Ekkor f előállítható Fourier transzformáltja segítségével:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s) e^{isx} ds. \tag{5.4}$$

Ez az **inverz Fourier transzformáció.**

2.5. Tétel. *(Parseval egyenlőség) A Fourier együtthatókra teljesül az alábbi egyenlőség:*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

5.4. Állítás. *A Fourier transzformált további tulajdonságai:*

7. *Tegyük fel, hogy*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x||f(x)| dx < \infty.$$

Ekkor

$$\mathcal{F}(xf(x), s) = i \frac{d}{ds} \mathcal{F}(f(x), s).$$

8. *Ha*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)| dx < \infty,$$

akkor

$$\mathcal{F}(f', s) = is\mathcal{F}(f, s).$$

2.6.Tétel: Konvulúció. "Jelentés". Tulajdonságok. FT és konvolúció. "Szorzat FT". Dirac delta. Dirac delta és konvolúció. FT-ja

5.4. Konvolúció

Adott két valós függvény, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Feltesszük, hogy mindkettő abszolút integrálható:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx < \infty.$$

5.2. Definíció. *A két függvény konvolúciója az $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, melyet így értelmezünk:*

$$(f * g)\ (x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy.$$

5.5. Állítás. *A konvolúció alaptulajdonságai:*

1. *$f * g$ jól értelmezett, azaz az improprius integrál létezik és véges:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy < \infty \qquad \forall x \epsilon \mathbb{R}.$$

Továbbá $f * g$ is abszolút integrálható, és

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|(f * g)\ (x)\right|\ dx < \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx.$$

2. *Kommutatív: $f * g = g * f$.*
3. *Asszociatív: $(f * g) * h = f * (g * h)$.*
4. *Disztributív tulajdonság: $(f + g) * h = f * h + g * h$.*

5.6. Állítás. *Konvolúció az időtartományban és a frekvenciatartományban így változik meg:*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g, s) &= \sqrt{2\pi}\ \mathcal{F}(f, s) \cdot \mathcal{F}(g, s), \\ \mathcal{F}(f, s) * \mathcal{F}(g, s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathcal{F}(f \cdot g, s). \end{aligned}$$

5.6. Dirac-delta függvény

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, és minden ε-ra definiáljuk az alábbi függvényt:

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x = 0, \\ \frac{1}{2\varepsilon}, & \text{ha} \quad 0 < |x| < \varepsilon, \\ 0, & \text{ha} \quad |x| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Ekkor minden ε-ra $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x)dx = 1$.

Összefoglalva az előzőket, ha létezne a határértékfüggvény, $\delta(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \delta_\varepsilon(x)$, akkor ez ilyen tulajdonságú lenne:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1,$

2. Tetszőleges folytonos, abszolút integrálható függvény esetén

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x)dx = f(0).$$

A Dirac-delta függvény konvolúciója tetszőleges f függvénnyel:

$$\big(\delta * f\big)\ (x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(y)f(x-y)dy = f(x)$$

Tehát a Dirac-delta a konvolúció művelet egysége.

A Dirac-delta függvény Fourier transzformáltja:

$$\mathcal{F}(\delta, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixs}\delta(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

minden s-re. Fourier transzformáltja tehát konstans.

2.7.Tétel: Magasabb rendű LDE. Lineáris diferenciál operátor. Függvények függetlensége. Pl. ex, e−x. (B) HLDE megoldásainak tere. Állandó együtthatós HLDE. Karakterisztikus polinom.

6.1. Definíció. *Adott n darab függvény, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, közös $D \subset \mathbb{R}$ értelmezési tartománnyal. Ezek* ***lineárisan függetlenek****, ha*

$$c_1y_1(x) + \ldots + c_ny_n(x) = 0 \quad \forall x \epsilon D, \qquad \Longleftrightarrow \qquad c_1 = \ldots = c_n = 0.$$

Jelölje $\mathcal{C}^n(D)$ azon D-n értelmezett folytonos függvények halmazát, melyek n-szer folytonosan differenciálhatók.

Legyen L egy olyan operátor, amely egy n-szer folytonosan differenciálható függvényhez egy folytonos függvényt rendel a következőképpen:

$$L[y] := y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y, \tag{6.2}$$

ahol $a_1, \ldots, a_n$ adott folytonos függvények. Az L operátor lineáris, azaz

$$L[\alpha y_1 + \beta y_2] = \alpha L[y_1] + \beta L[y_2]$$

6.2. Tétel. *(Homogén lineáris DE megoldásainak struktúrája)*
1. Az $L[y] = 0$ egyenletnek létezik n darab lineárisan független megoldása, ezeket jelölje $y_1, \ldots, y_n$.
2. Tetszőleges y megoldás felírható ezek lineáris kombinációjaként,

$$y = c_1y_1 + \ldots + c_ny_n.$$

Tekintsük az egyenletet

$$L[y] = y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = 0,$$

ahol $a_1, \ldots, a_n \epsilon \mathbb{R}$ adott számok. Speciális megoldásokat keresünk, melyek

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

alakúak. Ekkor

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x} \quad \ldots \quad y^{(n)}(x) = \lambda^n e^{\lambda x}.$$

Ezeket visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$L[y] = e^{\lambda x}(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n) = 0.$$

A jobboldalon álló függvény csak úgy lehet 0, ha

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

6.3. Definíció. *A DE-hez tartozó* **karakterisztikus polinom***:*

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n.$$

2.8.Tétel: IH LDE általános megoldása. Tétel. Partikuláris megoldás: Állandók variálása vagy próbafüggvény módszer Peremérték feladat. Kezdeti érték feladat

6.3.4. Inhomogén lineáris differenciálegyenletek

Keressük az alábbi inhomogén LDE megoldását:

$$y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)y(x) = f(x), \tag{6.4}$$

feltéve, hogy a homogén egyenlet megoldásai ismertek.

6.5. Állítás. *1. Ha y_1, y_2 megoldásai a (6.4) inhomogén egyenletnek, akkor $y = y_1 - y_2$ a (6.3) homogén egyenlet megoldása.*

2. Ha y_1 a homogén egynlet, y_2 pedig az inhomogén megoldása, akkor $y = y_1 + y_2$ szintén megoldása az IH LDE-nek.

6.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $L[y] = f$ egyenletnek ismert egyetlen y_p megoldása. Akkor az egyenlet összes megoldás felírható ilyen alakban:*

$$y = y_p + c_1y_1 + \ldots + c_ny_n,$$

ahol y_1, …, y_n a (6.3) homogén egyenlet n darab lineárisan független alapmegoldása.

Állandók variálása

Legyen adott az $L[y] = 0$ homogén egyenlet n darab lineárisan független megoldása $y_1, \ldots, y_n$. Ekkor az általános megoldás

$$y = c_1, y_1 + c_2y_2 + \ldots c_ny_n, \tag{6.5}$$

ahol c_1, c_2, $\ldots c_n \epsilon \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok.

A következő módszert úgy hívjuk, hogy **állandók variálása.**

Az inhomogén egyenlet egyetlen megoldását a (6.5) felíráshoz hasonló alakban keressük azzal a különbséggel, hogy a c_k *konstansok helyett függvények* lesznek a szorzók. Tehát a keresett megoldás a következő:

$$y(x) = \gamma_1(x)y_1(x) + \cdots + \gamma_n(x)y_n(x).$$

Próbafüggvények alkalmazása

A fent bemutatott módszer mindig alkalmazható. Azonban ha az állandó együtthatós lineáris DE-nek speciális jobboldala van, akkor érdemes az inhomogén egyenlet megoldását speciális alakban keresni. A megoldandó egyenlet:

$$L[y] = y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n y(x) = f(x).$$

2. *Példa.* Tekintsük az alábbi kezdeti érték problémát:

$$y' = e^{2y+x} - \frac{1}{2}, \qquad y(0) = 0.$$

Lineáris helyettesítést alkalmazva legyen $u = 2y + x$. Ekkor

$$u' = 2y' + 1 = 2(e^u - \frac{1}{2}) + 1 = 2e^u.$$

Az $u' = 2e^u$ egyenlet megoldása:

$$\int e^{-u} du = \int 2dx,$$

$$-e^{-u} = 2x + c, \qquad e^{-2y-x} = -2x - c.$$

A kezdeti értéket behelyettesítve $e^0 = 0 - c$, vagyis $c = -1$, így a megoldás

$$y = \frac{-x - \ln(1-2x)}{2}.$$

2.9.Tétel: DER fogalma. Megoldás létezése. "Tétel". Állandó együtthatós DER. A megoldás. eA értelmezése. Megoldás a mátrix sajátértékei és sajátvektorai alapján

6.4. Differenciálegyenlet-rendszerek

Elsőként csak kétdimenziós rendszerekkel foglalkozunk. Keressünk olyan $y(x)$ és $z(x)$ függvényeket, melyek deriváltjai egymástól is függhetnek. Ez azt jelenti, hogy kielégítenek egy ilyen típusú differenciálegyenlet rendszert:

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x), z(x)) \\ z'(x) &= g(x, y(x), z(x)), \end{aligned}$$

ahol f és g adott három változós függvények.

6.4. Tétel. *Legyen $T \subset \mathbb{R}^3$ egy tartomány, (x_0, y_0, z_0) ennek belső pontja. Adottak az $f, g : T \to \mathbb{R}$ függvények, melyekről feltesszük, hogy a második és harmadik változókban Lipschitz folytonosak, azaz*

$$\exists M > 0 \qquad |f(x,y,z) - f(x,\overline{y},\overline{z})| \le M(|y-\overline{y}| + |z-\overline{z}|),$$

Ekkor az

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y,z) \\ z' &= g(x,y,z), \\ y(x_0) &= y_0, \qquad z(x_0) = z_0 \end{aligned}$$

kezdetiérték feladatnak létezik egyértelmű megoldása valamely $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ intervallumban.

6.4.2. Lineáris, állandó együtthatós homogén DER

A könnyebb áttekinthetőség kedvéért most $n = 3$ dimenzióban dolgozunk. (Minden ugyanígy elmondható általános n dimenziós lineáris rendszerekre is.) Tekintsük az alábbi háromdimenziós rendszert:

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ y_3' &= a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3, \end{aligned}$$

a hozzá tartozó kezdeti feltétellel

$$y_1(0) = y_{01}, \qquad y_2(0) = y_{02}, \qquad y_3(0) = y_{03}.$$

A keresett függvényeket rendezzük el egy vektorba:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix},$$

ennek deriváltja

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ y_3'(x) \end{pmatrix}.$$

Az együtthatókat gyűjtsük egy mátrixba:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

A differenciálegyenlet rendszer tehát kompakt módon így írható

$$Y'(x) = AY(x), \qquad Y(0) = Y_0. \tag{6.6}$$

6.5. Tétel. *A (6.6) lineáris egyenletrendszer megoldása*

$$Y(x) = e^{Ax}Y_0.$$

6.6. Tétel. *Tegyük fel, hogy A sajátértékei mind különbözőek, legyenek ezek $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Ekkor a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok egymásra merőlegesek, ezeket jelölje s_1, s_2, s_3.*

Ekkor a lineáris differenciálegyenlet rendszer lineárisan független megoldásrendszere

$$Y_k = e^{\lambda_k x}s_k.$$

Ezen felül tetszőleges $Y(0) = Y_0$ kezdetiértékhez létezik egyértelműen Y megoldás és ez felírható

$$Y = c_1Y_1 + c_2Y_2 + c_3Y_3$$

alakban megfelelő c_1, c_2, c_3 konstans együtthatókkal.