Segítség, valszám 2. zh-t írok

Koves Boldizsar

2024. november 9.

1. feladattípus: általános eloszlás és sűrűség fv.

Def: Legyen X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye F(X). Ha F(X) abszolút folytonos, akkor legyen f(x)=F'(X), ha pedig egy pontban F(X) nem differenciálható, ott f(x) értéke legyen 0. Az így definiált f(x) függvény az X valószínűségi változó ***sűrűségfüggvénye***

$f(x)$ tulajdonságai:

- $f(x) \geq 0$ (Nem negatív)
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

továbbá:

- $P(X < a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$
- $P(X \geq a) = \int_{a}^{infty} f(x)dx$
- $P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$
$E^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx$

Feladatban:

- Ha F(X) adott és f(x) a kérdés, lederiválom F(X)-et $f(x) = F'(X)$
- Ha f(x) adott és F(X) a kérdés, integrálom f(x)-et $F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ (a felső határ x, paraméteresen kapom a végét)

Mindkét esetben figyelek a határokra, hogy hol vannak definiálva az egyes szakaszok.

- Ha ellenőriznem kell, hogy f(x) sűrűségfüggvény e, megnézem hogy $f(x) \geq 0$ illetve integrálja 1
- Ha ellenőriznem kell, hogy F(X) eloszlásfüggvény e, megnézem hogy $0 \leq F(X) \leq 1$, monoton nő, a 0-hoz és 1-het a két szélén tart (vagy felveszi)
- Ha paraméteresen van megadva f(x) és ki kell számítani, hogy mikor sűrűségfüggvény, megnézem, hogy nem negatív, kiszámítom, hogy milyen paraméterrel 1 az integrál értéke

2. feladattípus: Egyenletes eo.

Az X valószínűségi változó egyenletes az (a,b) intervallumon, ha sűrűságfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{, ha } a < x < b, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}, \; F(X) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{ha } a < x \leq b \\ 1 & \text{ha } x > b \end{cases}, \; E(X) = \frac{a+b}{2}, \; D(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

Ha feladatban kapom: behelyettesítek f(x)-be vagy F(X)-be kívánság szerint. Nem olyan vészes. Észben tartom, hogy

- Definíció szeint $P(X < a) = F(a)$, tehát elég csak behelyettesíteni a képletbe
- $P(X \geq a) = 1 - P(X < a) = 1 - F(a)$
- $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$
- $P(X = a) = 0$, hisz folytonos eloszlás

3. feladattípus: Exponenciális eo.

Az X valószínűségi változó $\lambda > 0$ paraméterű exponenciális eloszlású, ha sűrűségfüggvénye
$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$, $F(X) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \cdot x} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$, $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, $D(X) = \frac{1}{\lambda}$

Az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonságú, tehát a jövő nem függ a múlttól. Érthetően, ha az a kérdés, hogy mi a valószínűsége, hogy valami a időn belül bekövetkezik, feltéve hogy b ideje nem következett be, az ugyan az, mint ha nem tudnám, hogy b ideje nem következett be, és most kezdeném a vizsgálatot a ideig.

$$P(X > a + b | X > b) = P(X > a)$$

Ha feladatban kapom: vagy λ adott, ekkor csak behelyettesítek f(x)/F(X)-be igény szerint. Vagy $P(X < a)$ vagy $P(X > a)$ valószínűség értéke adott, és akkor abból tudom számítani λ-t
Észben tartom, hogy

- Definíció szeint $P(X < a) = F(a)$, tehát elég csak behelyettesíteni a képletbe
- $P(X \geq a) = 1 - P(X < a) = 1 - F(a)$
- $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$
- $P(X = a) = 0$, hisz folytonos eloszlás
- Örökifjú tulajdonságot

4. feladattípus: Normális eo.

Az X folytonos eloszlású valószínűségi változót m, σ ($\sigma > 0$) paraméterű normális eloszlásúnak nevezzük, ha sűrűségfüggvénye:
$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, $F(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$, $E(X) = m$, $D(X) = \sigma$

Ha feladatban kapom: A táblázat a stenderd normális eloszlás értékeit tartalmazza, transzformálnunk kell F(X)-et. Észben tartom, hogy

- Definíció szeint $P(X < a) = F(a)$, tehát elég csak behelyettesíteni a képletbe
- $P(X \geq a) = 1 - P(X < a) = 1 - F(a)$
- $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$
- $P(X = a) = 0$, hisz folytonos eloszlás

Megoldás menete:

1. Felítom $P(X < a) = F(a)$-t (ha kell, akkor komplementerből alakítom át $P(X \geq a) = 1 - P(X < a)$
2. Kiszámolom Φ-t: $F(a) = \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$
3. Kikeresem a táblázatból az $\frac{a-m}{\sigma}$-hoz tartozó értéket (Megtanulom használni a táblázatot!)

4. Ha $\frac{a-m}{\sigma} < 0$ átírom annak segítségével, hogy $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

Ha az a kérdés, hogy a legkisebb k nak mi a teteje, akkor visszafele indulok el.

- Ha $k \geq 0.5$, kikeresem a táblázatból a hozzá legközelebb eső függvényértékhez tartozó értéket és az lesz egyenlő $\frac{a-m}{\sigma}$-val, ahol a a megoldás
- Ha $k < 0.5$, akkor először komplementert kell számolnom (1-k) És utána $1-\Phi(\frac{a-m}{\sigma}) = 1-k$-t számítom ki (kikeresem az 1-k-hoz legközelebbi értéket, és az lesz egyenlő $-\frac{a-m}{\sigma}$-val (- a komplementer képzés miatt)

Ha a kérdés a fölső l aljára kíváncsi, akkor hasonlóan járok el, csak már az elején inverzt kell hogy vegyek, hiszen a valószínűség alulról "töltődik" $F(a) = P(X < a)$ és nem $P(x > a)$.

5. feladattípus: Becslések

Markov-egyenlőtlenség: *X nem negatív valószínűségi változó, várható értéke $E(X)$, $'a'$ tetszőleges pozitív valós szám, ekkor:*

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Csebisev-egyenlőtlenség *X valószínűségi változó, létezik $E(X)$ és $D(X)$. Legyen továbbá λ tetszőleges pozitív szám. Ekkor:*

$$P(|X - E(X)| \geq \lambda \cdot D(X)) \leq \frac{1}{\lambda^2}$$

$$P(|X - E(X)| \geq c) \leq \frac{D^2(X)}{c^2}$$

Ha feladatban kapom:

- ismeretlen eloszlás (nem árulják el micsoda), csak $E(X)$ ismert és $P(X \geq a)$ a kérdés, akkor Markov
- ha $D(X)$ is ismert, és a várható érték környezetébe (/a környezetén kívül) esést kell becsülni akkor Csebisev. Az egyenlőtlenség azt mondja ki, hogy mi a valószínűsége annak, hogy NEM vagyunk benne a tartományba. Ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy mi a valószínűsége hogy beleesünk a tartományba, akkor fordulnak a relációjelek, és 1- lesz a valószínűség:

  $$P(|X - E(X)| < \lambda \cdot D(X)) > 1 - \frac{1}{\lambda^2}$$

  ebben az esetben alsó, és nem fölső becslést adhatunk.
  Ha nem szimmetrikus a tartomány $D(X)$ körül, akkor bővítjük / csökkentjük addig, hogy szimmetrikus legyen (azon múlik, hogy alsó vagy fölső becslés kell, nyagyobb tartomány valószínűsége biztos hogy legalább akkora mint az általa tartalmazott kisebb tartományé)
- Ezt követően ha a feladat kéri (és megnevezi pontosan milyen eloszlásunk van, adott képlettel megmondhatjuk a pontos értéket