LA-DM II előadás

2024.05.08.

Lászlóffy András

Bércesné Dr. Novák Ágnes előadásai nyomán

1

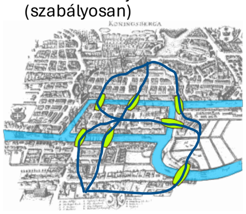
Gráfelmélet

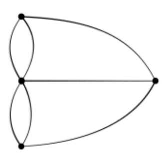
Alkalmazások:
- számítógépes-, út-, víz-, gázhálózatok
- vasúthálózat, legrövidebb út
- agykutatás, neurális hálózatok
- ütemezési feladatok (vizsgák, mintatanterv, órarend, kivitelezési tervek, telefon)
- Feynman-diagrammok (kvantumtérelmélet)
- áramkörök
- MI

2

Königsberg hét hídja (Euler út)

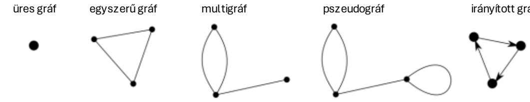
- Feladat: menjünk át minden hídon pontosan egyszer (szabályosan)





3

Gráf típusok

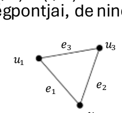


4

Gráf definíció, irányítatlan gráf

Egy irányítatlan gráf G=(V, E) párosból áll, ahol
- V a csúcsok nemüres halmaza
- E az élek (lehet üres) halmaza
- és értelmezett egy f függvény, amely minden $a \in E$ élhez egy (u, v) = (v, u) rendezetlen part rendel hozzá, ahol u, v∈ V az a él végpontjai, de nincs többszörös él, hurokél.

Pl.



$V = \{u_1, u_2, u_3\}$ $\quad f(e_1) = (u_1, u_2)$

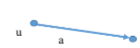
$E = \{e_1, e_2, e_3\}$ $\quad f(e_2) = (u_2, u_3)$

$f(e_3) = (u_3, u_1)$

5

Irányított gráf definíció

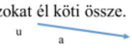
- G = (V, E) páros (V és E a csúcsok és élek halmaza)
- $f: E \to V \times V$, vagyis az élekhez rendezett (u, v) párokat rendel hozzá, de nem lehet többszörös él, hurokél



6

MEGJEGYZÉSEK, SZÓHASZNÁLAT

- A gráf akkor is létezik, ha nem rajzoljuk le
- A geometriai elhelyezkedés (a vonalak alakja) nem számít, csak a pontpárok összekötöttsége.
- A szakaszokkal, vonaldarabokkal reprezentált élek **lerajzolva** keresztezhetik egymást, de az élek (belső) metszéspontja (ha van ilyen) nem pontja a gráfnak.
- A gráf két csúcsát **szomszédos**nak nevezzük, ha azokat él köti össze.
- Az a él u, v végpontjai **illeszkednek** az a élre

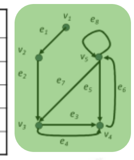


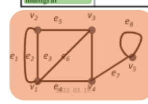
- Ha egy pont egyetlen élre sem illeszkedik akkor **izolált** pontnak mondjuk

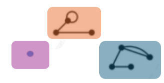
7

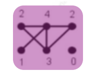
Gráf típusok

Típus	Élek	Lehet-e többszörös él?	Lehet-e hurok?
Egyszerű gráf	irányitatlan	nem	nem
Multigráf	irányitatlan	igen	nem
Pszeudográf	irányitatlan	igen	igen
Irányított gráf	irányitott	nem	igen
Irányított multigraf	irányitott	igen	igen









8

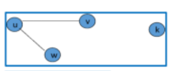
Irányítatlan gráf, pont foka, fokszám

A v pont **fokszáma**, röviden **foka**, a rá illeszkedő élek darabszáma, **deg**(v) vagy **fok**(v)

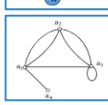
Bizonyos gráfok (fa) esetében ha deg (v) =1, akkor levélnek nevezzük

k-reguláris gráf: minden pontjának foka k.

Példa: V = {u, v, w, k} , E = { {u, w}, {u, v} }, deg (u) = 2, deg (v) = 1, deg (w) = 1, deg (k) = 0,
w és v levelek, k izolált pont



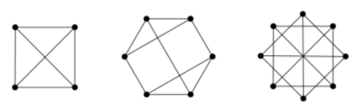
Példa: Az ábrán látható gráfnak 4 pontja van, 7 éle, ebből egy hurokél. A pontok fokszámai: $deg(a_1)=4$, $deg(a_2)=4$, $deg(a_3)=5$, $deg(a_4)=1$



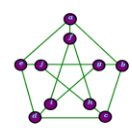
2022. 03. 19. 13

9

3-reguláris gráfok: minden pontjának foka 3



Mi a helyzet a páratlan fokszámú gráfokkal?



Petersen-gráf

10

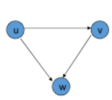
Irányított gráf, kifok, befok

az u csúcs/pont **befoka**= a pontra illeszkedő olyan élek száma, amelyek végpontja u.

az u csúcs/pont **kifoka**= a pontra illeszkedő olyan élek száma, amelyek kezdőpontja u.

hurok esetén befok=1=kifok

Példa: V = {u, v, w} , E = { (u, w), (v, w), (u, v) },
befok(u) = deg^- (u)=0, kifok(u)=deg^+ (u) = 2,
befok(v)=deg^- (v) = 1, kifok(v)=deg^+ (v) = 1,
befok(w)=deg^- (w) = 2 kifok(w)=deg^+ (w) = 0



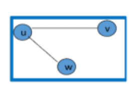
11

Fokszámsorozat

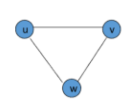
Definíció: G gráf fokszámsorozata pontjai fokszámának nagyság szerint rendezett felsorolása.

Definíció: adott $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_k$ fokszámsorozat realizálható a G gráffal, ha a G-nek ez éppen a fokszámsorozata (a fokszámsorozat **realizálható**).

Példák: {1,1,2} – fa:



{2,2,2} – kör:



{1,1,1} - ??

12

Speciális gráfok – teljes gráf

Teljes gráf: minden pont között van él

K_5 Kuratowski gráf (név szerin kell tudni)

Hány éle van a teljes gráfnak?

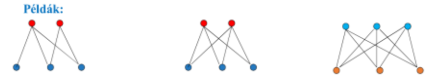
TÉTEL:
Az n csúcsú teljes gráf éleinek száma: $\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$.

13

Speciális gráfok – páros gráf

Definíció: G páros gráf, ha csúcsai két olyan osztályba csoportosíthatók, melyekre igaz, hogy csak a különböző osztályokban lévő csúcsok között lehet él.
Jelölés: $G_{m,n}$: az egyik osztályban m, a másikban n csúcs van.
$K_{m,n}$: az egyik osztályban lévő csúcsok mindegyik össze van kötve a mások osztályban lévő csúcsok mindegyikével.

Példák:



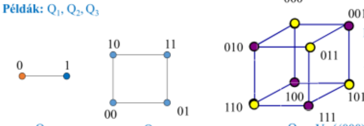
$G_{2,3}$ $K_{2,3}$ K -komplett **$K_{3,3}$ Kuratowski gráf** (név szerint kell tudni)

14

Hiperkocka, N-kocka

N-kocka: Q_n, a csúcsok száma 2^n, 2^n bit hosszú (bit csak 0, 1 lehet). A szomszédos csúcsok egy bitben különböznek egymástól.

Példák: Q_1, Q_2, Q_3

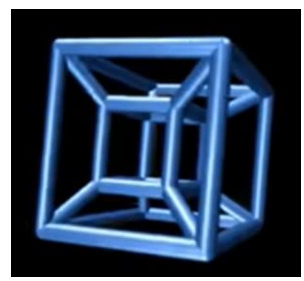


E={ {(000), (001) }, { (000), (010) }, ……}

Q_1 Q_2 Q_3 V={(000), (001), (010), (011), (100), (101), (110), (111) }

15

4-kocka

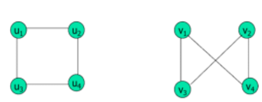


16

Izomorf gráfok

Két gráf **izomorf**, ha egyikük pontjai és élei kölcsönösen egyértelmű és illeszkedéstartó módon megfeleltethetők a másikuk pontjainak, ill. éleinek.

Példa: G1 = (V1, E1) , G2 = (V2, E2)
$f(u_1) = v_1$, $f(u_2) = v_4$, $f(u_3) = v_3$, $f(u_4) = v_2$

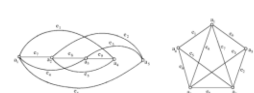


17

Izomorf gráfok

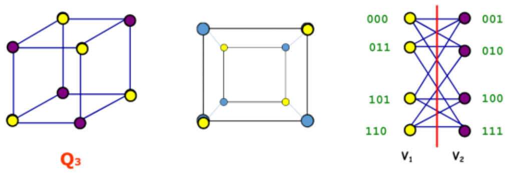
Invariáns adatok: G1 és G2 ha izomorf, szükségképpen megegyezik a

- pontok és élek száma
- fokszámsorozat
- körök száma és hossza



18

Izomorf gráfok



Nem az számít, hogy hogy neveztem el a csúcsokat, hanem hogy találok-e megfeleltetést a két gráf pontjai között

$G_{4,4}$

Kézfogási tétel

Fokszámok és élek száma közti összefüggés

Tétel: Minden (irányítatlan) gráfban a fokszámok összege az élek számának kétszeresével egyenlő.

Tétel: Irányítatlan gráfokban a páratlan fokszámú pontok száma páros

Bizonyítás: A fokszámok összege páros, $2|E|$.

Az n db páros fokszámú pontra:
$2k_1+2k_2+\ldots.+2k_n=2(k_1+k_2+\ldots.+k_n)=$ páros

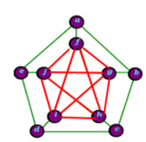
Az m db páratlan fokszámú pontra:
$(2l_1+1)+(2l_2+1)+\ldots.+(2l_m+1)=2(l_1+l_2+\ldots.+l_m)+1+1+\ldots+1=2(l_1+l_2+\ldots.+l_m)+m$:
$2|E|$=párosak összege+páratlanok összege
$2|E|= 2(k_1+k_2+\ldots.+k_n)+2(l_1+l_2+\ldots.+l_m)+m$ – mikor lesz páros?

Kézfogási tétel irányított gráfokra

Tétel: Minden irányított gráfban a fokszámok összegére igaz, hogy a befokok összege=kifokok összege
Bizonyítás: házi feladat

Részgráf

Definíció: Egy G* gráfot a G gráf részgráfjának nevezzük, ha G* csak G-beli pontokat és éleket **tartalmaz**. Ha a G* nem azonos G-vel, akkor a G gráf valódi részgráfjának nevezzük.

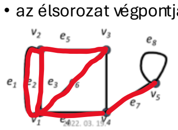


G:= Petersen gráf kiegészítve **fj, ji, ih, hg, és gf** élekkel

G*= Kuratowski $\mathbf{K_5}$ gráf

Élsorozat

"Egymás után" következő élek rendezett halmaza, azaz
- egyik él végpontja a következő él kezdőpontja
- minden él csak egyszer fordul elő
- az élsorozat kezdőpontja az első él kezdőpontja
- az élsorozat végpontja az utolsó él végpontja



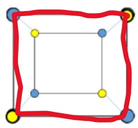
Pl. $\{e_1, e_6, e_5, e_3, e_4, e_7\}$ egy élsorozata bal oldali gráfban.

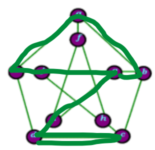
Élsorozat – utak, körök, séták

Nyílt az élsorozat, ha a kezdő- és végpont különböző.
Ha megegyezik, zárt az élsorozat, neve: kör
Út ill. kör hosszán a benne lévő élek számát értjük.
Egy élsororozathoz tartozó gráf az a gráf, amelyet az élsorozat élei és a rá illeszkedő pontok alkotnak.
Az u és v pontok közötti út olyan nyílt élsorozat, melyben
- u és v kezdő és végpontok
- ezek foka 1, a többié 2
- minden csúcs csak egyszer szerepel

Séta: a csúcsok és élek többször is szerepelhetnek

Élsorozat – utak, körök, séták

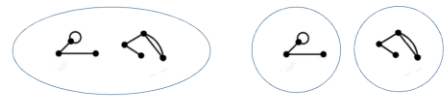




25

Összefüggő gráf

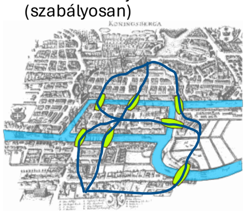
- Ha egy gráfban bármely két pont úttal elérhető, akkor a **gráfot összefüggőnek** nevezzük.
- Azt mondjuk, hogy egy gráf A és B csúcsa relációban áll egymással, ha van köztük út.
- Bizonyítható, hogy ez ekvivalencia reláció. (Házi feladat) Ezen ekvivalencia reláció egy osztályba tartozó csúcsai **a gráf (összefüggő) komponensei**.

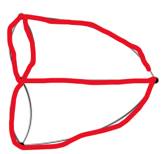


26

Königsberg hét hídja (Euler út)

- Feladat: menjünk át minden hídon pontosan egyszer (szabályosan)





27

Euler út, kör

- G gráfban **Euler-útnak** nevezünk egy olyan élsorozatot, amely G összes élét pontosan egyszer tartalmazza. Ha ez az élsorozat zárt, akkor **Euler-kör**ről beszélünk.
- Ha egy gráfban van Euler-**kör**, akkor azt **Euler gráf**nak nevezzük.

Megjegyzés:

- Ezen definíció alapján minden Euler-kör Euler-út is.
- Általában egy Euler-kör, vagy Euler-út, nem kör vagy út, hiszen egy csúcson többször is áthaladhat. Az elnevezés csak a hagyományt követi.

28

Euler út, kör tétel

G-ben a.cs.a. van Euler-kör, ha G összefüggő, és minden csúcsának fokszáma páros.

G-ben a.cs.a. van Euler-út, ha G összefüggő, és pontosan két páratlan fokszámú csúcsa van (vagy Euler-kör)

29

Fokszámok, tétel

Tétel: Minden 1-nél több csúcsú egyszerű gráfban van két azonos fokú csúcs.

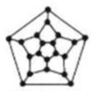
- TFH. van egy izolált pont, ennek fokszáma 0, és elkezdjük kiosztani a fokszámokat 1-től n-1-ig (n a csúcsok száma)
- Az utolsó pontnak mindegyik másik ponttal van közös éle, így lehet csak n-1 a fokszáma -> ellentmondás!

Következmény: baráti összejövetelnél mindig van két olyan személy, aki ugyanannyiszor fogott kezet. ☺

30

IKOZAÉDER JÁTÉK – UTAZÓK DODEKAHEDRONJA - 1857

Dodecahedron

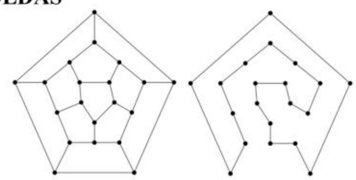


dodecahedron

Utazása a világ körül (tüskék, gumiszalag) - 25 font
A dodekaéder csúcsai a városok: a cél, minden városba pontosan egyszer eljutni a dodekaéder élein, és visszajutni a kiinduló városba.

31

IKOZAÉDER JÁTÉK – UTAZÓK DODEKAHEDRONJA - MEGOLDÁS



32

HAMILTON ÚT, KÖR

- A G gráf egy H útját Hamilton-útnak mondjuk, ha a csúcsok mind különbözők és e csúcspontokon kívül más csúcspontja nincs G-nek.
- A G gráf K körét Hamilton-körnek mondjuk, ha K tartalmazza G minden csúcspontját.

33

UTAZÓ ÜGYNÖK PROBLÉMA

Az ügynöknek városokat kell meglátogatnia, majd visszatérni a kiindulási városba, de minden városba csak egyszer mehet, még átutazóban sem érintheti kétszer ugyanazt a helyet.

Ha minden városba egyforma költséggel lehet utazni, akkor Hamilton kört keresünk. Ha azonban figyelembe vesszük az egye utak/élek költségeit, vagyis a gráf éleit súlyozzuk, akkor a feladat a legkisebb költségű Hamilton kör megkeresése

34

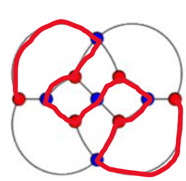
TSP – NP NEHÉZ – ld. Függvények növekedése c. előadás!

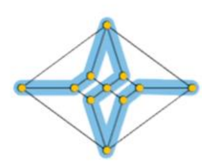
A probléma megoldása nem egy egyszerű feladat, bár kézenfekvő, hogy minden Hamilton-kört megkeresünk és kiválasztjuk az optimális utat, ez azonban nagyobb gráfoknál szinte lehetetlen. Ugyanis egy n pontú gráfnál $\frac{(n-1)!}{2}$ lehetőséget kellene kipróbálnunk. Ha számítógépünk 1000000 Hamilton-kört tud megtalálni másodpercenként, akkor is 15 városra már több mint egy napba telne megtalálni az optimális eredményt, míg 20 városra több mint 20 millió évbe telne megtalálni a megoldást. Így tehát a 'brute force' megoldás nem célra vezető.
Bár 1962-ben Bellman [23], Held és Karp [24] kitalált egy algoritmust, ami redukálta a 'brute force' eljárás időigényét, de még az is csak $O(n^2 2^n)$ időigényű, ez azt jelenti, hogy 50 város esetén már ez is túlságosan időigényes, nem használható. De vajon van-e olyan algoritmus, amely ésszerű időben meg tudja oldani a problémát? Ehhez arra lenne szükségünk, hogy az eljárás polinomiális időben lecsengjen. Azonban sajnos a feladat NP nehéz.

Idézet: Kulcsár Zoltán: Az utazó ügynök probléma és megoldásai

35

https://en.wikipedia.org/wiki/Herschel_graph





36

HAMILTON ÚT, KÖR

Mely gráfoknak van **biztosan** Hamilton köre, útja?

- Teljes gráf
- Kör ☺

37

HAMILTON ÚT, KÖR

Tétel: Ha a G n pontú egyszerű gráf minden pontjának foka legalább n/2, akkor a G összefüggő – később: H-gráf!

Bizonyítás:
Legyen u és v két különböző csúcsa G-nek. A feltétel szerint u-val és v-vel is legalább n/2, n/2 pont van összekötve az u-ból illetve v-ből induló élek által, a fokszám feltétel miatt. Az előbb említett u-val, illetve v-vel közvetlenül összekötött pontok között van olyan, mely u-val is v-vel is össze van kötve, (ha nem lenne ilyen akkor G csúcsainak a száma nagyobb egyenlő volna, mint [n/2+n/2+2]) azaz u és v között vezet út.

38

ORE (Øystein) TÉTELE

1899 – Norvégia, Christiana (Oslo)
1927 – Yale, USA
1968 – ban halt meg
120 cikk, 10 könyv
Hálóemlélet, Galois elmélet, gráfelmélet, gyűrűk elmélete

Elégséges feltétel Hamilton kör létezésére
Ha a legalább 3 pontú G gráf bármely két nem szomszédos pontjának fokszámösszege legalább n:
$\delta(u)+\delta(v)\geq n$ akkor G-ben van Hamilton kör

39

ORE TÉTELE

Elégséges feltétel Hamilton kör létezésére
$\delta(u)+\delta(v)\geq n$ → **H-kör**

Bizonyítás:
-indirekt tfh. ∃ olyan gráf, amely teljesíti a felételt és nincs H-köre

-a csúcsok megtartásával vegyünk éleket a gráfhoz mindaddig, amíg egy Hamilton kör keletkezik

- az utolsó *u,v* él elhagyásával H-út van, ez látható fekete vonallal az ábrán

-a halvány élek NEM létezhetnek, mert akkor lenne H-kör
-*u* szomszédjai nem lehetnek *v* szomszédjainak szomszédjai
-becslés *u* fokszámára: $\delta(u)\leq$ **(n-1)** - $\delta(v)$ ↯ $\delta(u)+\delta(v)\geq n$
nincs hurokél *v* szomszédai

21. Bércesné dr. Novák Ágnes

40

DIRAC TÉTELE

Ha az n=2k csúcspontú egyszerű G gráf bármely pontjának a foka legalább k, akkor van G-nek Hamilton-köre.

Bizonyítás:
Valóban G-ben létezik Hamilton-kör, mivel az ORE tétel feltételei teljesülnek

41

PÓSA LAJOS (1947-)

Erdős Pál büszkesége, Erdős száma 1, 13 évesen
ELTE TTK tanára
Fazekas, Radnóti Gimnázium tanára
Elismerések: 1981 – Beke Manó Emlékdíj
1989 – „Gyermekekért" díj
1994 – A Bolyai János Matematikai Társulat Beke Manó Emlékdíj I. fokozata
1998 – A Magyar Köztársasági Érdemrend tisztikeresztje
2000 – Charles Simonyi Ösztöndíj
2008 – MOL **„Tehetséggondozásért" díj**
2011 – Széchenyi-díj
2014 – Prima díj https://www.youtube.com/watch?v=IQkYzDLSMto
http://www.termeszetvilaga.hu/tv2001/tv0103/posa.html

42

PÓSA LAJOS TÉTELE

Legyenek az n csúcsú G egyszerű gráf csúcsai fokszám szerint rendezve:

$$\delta(u_1) \le \delta(u_2) \le \delta(u_3) \ldots \le \delta(u_k) \ldots$$

Ha minden k < n/2-re teljesül, hogy $\delta(u_k) \ge k+1$ akkor van G-ben Hamilton kör

43