Tavalyi Zh

1., hatványsor

$$(x-x_0)^n, \quad x_0 = 0$$

a, $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 3^n} \longrightarrow c_n = \frac{1}{n\cdot 3^n}$$

hányados kritérium

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \underbrace{\frac{1}{(n+1)3^{n+1}}}_{c_{n+1}} \cdot \underbrace{n\cdot 3^n}_{\frac{1}{c_n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}}_{=1} = \frac{1}{3} = \gamma \Rightarrow \rho = \frac{1}{\gamma} = 3$$

konvergenciasugár

ez alapján

$$(-3,3) \subset H \subset [-3,3]$$

$$(x_0-\rho, x_0+\rho)$$

konvergenciatartomány / konvergenciahalmaz

gyökkritérium

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n\cdot 3^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\cdot 3}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{3} = \gamma$$

$$\Downarrow$$

$$\rho = \frac{1}{\gamma} = 3$$

ez alapján

$$(-3,3) \subset H \subset [-3,3]$$

végpontok

- $x = -3$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$, ez konvergens

így $-3 \in H$

- $x = 3$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

így $3 \notin H$

Tehát $H = [-3, 3)$.

Megjegyzés

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$ → mértani sor, így $H = (-3, 3)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 \cdot 3^n}$ → $H = [-3, 3]$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot (-3)^n}$ → $H = (-3, 3]$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} n! \, x^n$ → $x_0 = 0$ → $c_n = n!$

hányados kritérium

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty = \gamma \Rightarrow \delta = \text{"}\frac{1}{\gamma}\text{"} = 0$$

azaz

$$H = \{0\}$$

x_0

2) Fourier sor

A csoport

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x, & x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ 0, & x = 0 \text{ vagy } x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi] \\ -\frac{\pi}{2} - x, & x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \end{cases}$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{\ell=1}^{\infty}\left(a_\ell \cos(\ell x) + b_\ell \sin(\ell x)\right)$$

ahol

$$a_\ell = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(\ell x)\,dx$$

$$b_\ell = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(\ell x)\,dx$$

Speciális esetek

- f páros

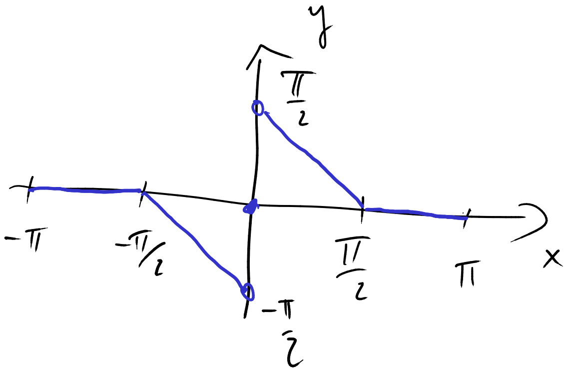
$$a_\ell = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(\ell x)\,dx$$

$$b_\ell = 0$$

- f páratlan

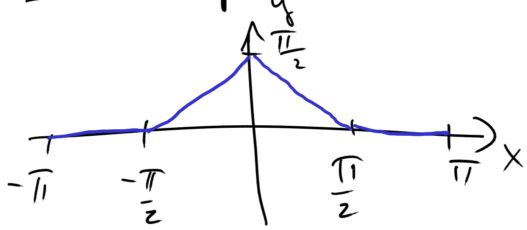
$$a_\ell = 0$$

$$b_\ell = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(\ell x)\,dx$$



páratlan

B csoport



páros

$$a_\ell = 0$$

$$\frac{\pi}{2} b_\ell = \int_0^{\pi} f(x)\sin(\ell x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(x)\sin(\ell x)\,dx = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin(\ell x)\,dx$$

hiszen $f = 0$ $[\pi/2, \pi]$-n

$f' = \sin(\ell x) \longrightarrow f = -\frac{\cos(\ell x)}{\ell}$

$g = \frac{\pi}{2} - x \qquad g' = -1$

$$= -\frac{\cos(\ell x)}{\ell}\left(\pi/2 - x\right)\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(\ell x)}{\ell}\,dx$$

$$= -\frac{\cos(\ell x)}{\ell}\left(\pi/2 - x\right)\Big|_0^{\pi/2} - \frac{\sin(\ell x)}{\ell^2}\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= -\left[\cancel{\frac{\cos\left(\ell\frac{\pi}{2}\right)}{\ell}\cdot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} - \frac{\cos(\ell\cdot 0)}{\ell}\cdot\left(\pi/2 - 0\right)\right]$$

$$- \left[\frac{\sin\left(\ell\pi/2\right)}{\ell^2} - \cancel{\frac{\sin(\ell\cdot 0)}{\ell^2}}\right] = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\ell} - \frac{\sin\left(\ell\pi/2\right)}{\ell^2} \longrightarrow 0, 1, 0, -1, 0, \ldots

azaz
$$b_\ell = \frac{1}{\ell} - \frac{2\sin(\ell\frac{\pi}{2})}{\ell^2\pi}$$

így
$$\sum_{\ell=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\ell} - \frac{2\sin(\ell\pi/2)}{\ell^2\pi}\right)\sin(\ell x).$$

3.,

A csoport

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy+x-3y}{xy+x+3y}$$

B csoport

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy+2x-y}{xy-2x-y}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{xy+x-3y}{xy+x+3y}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot 0+x-3\cdot 0}{x\cdot 0+x+3\cdot 0} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

le tudtunk egyszerűsíteni, ami gyanús → ez azt jelenti, hogy $f(x,0) = \frac{x}{x} = 1$, azaz az x tengely az 1-hez tartozó szintvonal része (az is lehet, hogy az egész)

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{xy+x-3y}{xy+x+3y}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{-3y}{3y} = \lim_{y\to 0} -1 = -1$$

azért tudtunk leegyszerűsíteni, mert $f(0,y) = \frac{-3y}{3y} = -1$, azaz az y tengely a -1-hez tartozó szintvonal része

Tehát az 1-hez és a -1-hez tartozó szintvonalak metszik egymást az origóban, így

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy+x-3y}{xy+x+3y}$$

és itt a függvény nem folytonos.

4., Mutassuk meg, hogy az $u(t,x) = e^{x+at} + (x-at)^2$ kielégíti a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ hullámegyenletet, ahol $a \in \mathbb{R}$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = e^{x+at} \cdot a + 2(x-at)\cdot(-a)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = e^{x+at} \cdot a \cdot a + 2 \cdot (-a) \cdot (-a) = a^2 \underbrace{\left(e^{x+at} + 2\right)}_{\text{ez reméllhetőleg } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x+at} + 2\cdot(x-at)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{x+at} + 2$$

tehát valóban

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

B csoport

$$u(t,x) = (x+at)^2 - e^{x-at}$$

5.,

A csoport

$$f(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy$$

Keressük meg azt az (x_0, y_0) pontot, ahol az érintősík párhuzamos a $8x - 4y + z = 12$ síkkal.

B csoport

$$f(x,y) = -x^2 + y^2 + 2xy$$

$$-4x + 8y + z = 2$$

$8x - 4y + z = 12$

normálvektor $\quad \underline{n}_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$

érintősík

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) - \big(z - f(x_0,y_0)\big) = 0$$

normálvektor

$$\underline{n}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\ -1 \end{bmatrix}$$

Két sík párhuzamos, ha megfelelő $c \in \mathbb{R}$-re

$\underline{n}_1 = c\,\underline{n}_2$.

Tehát

$$8 = c\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

$$-4 = c\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

$$1 = -c \implies c = -1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y + 2x$$

azaz keressük azt az (x_0,y_0) pontot, melyre

$$\left.\begin{aligned} 8 &= -(2x_0 + 2y_0) \\ -4 &= -(-2y_0 + 2x_0) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x_0 &= -1 \\ y_0 &= -3. \end{aligned}$$