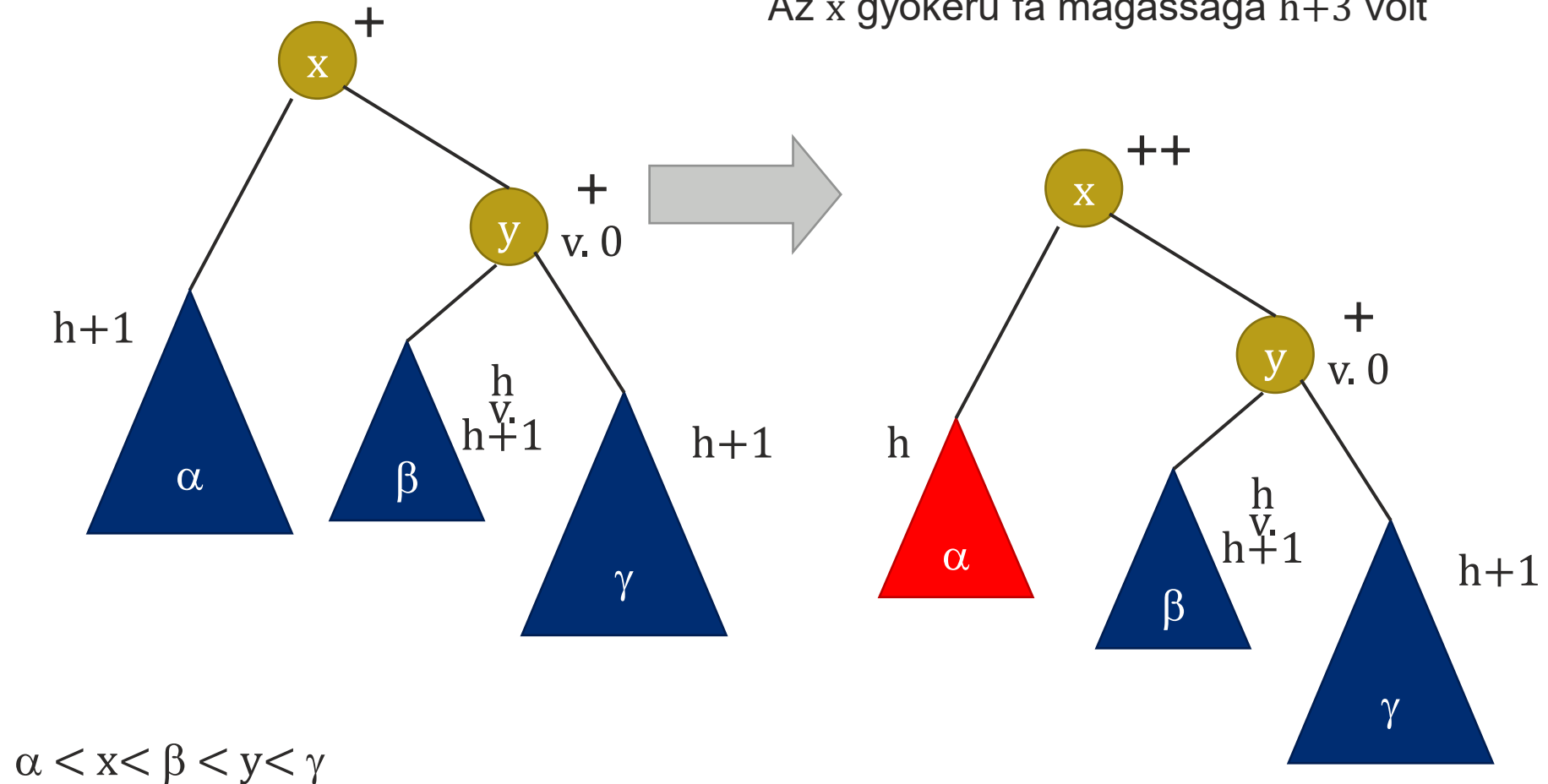


ADATSZERKEZETEK ÉS ALGORITMUSOK

AVL fa törlés

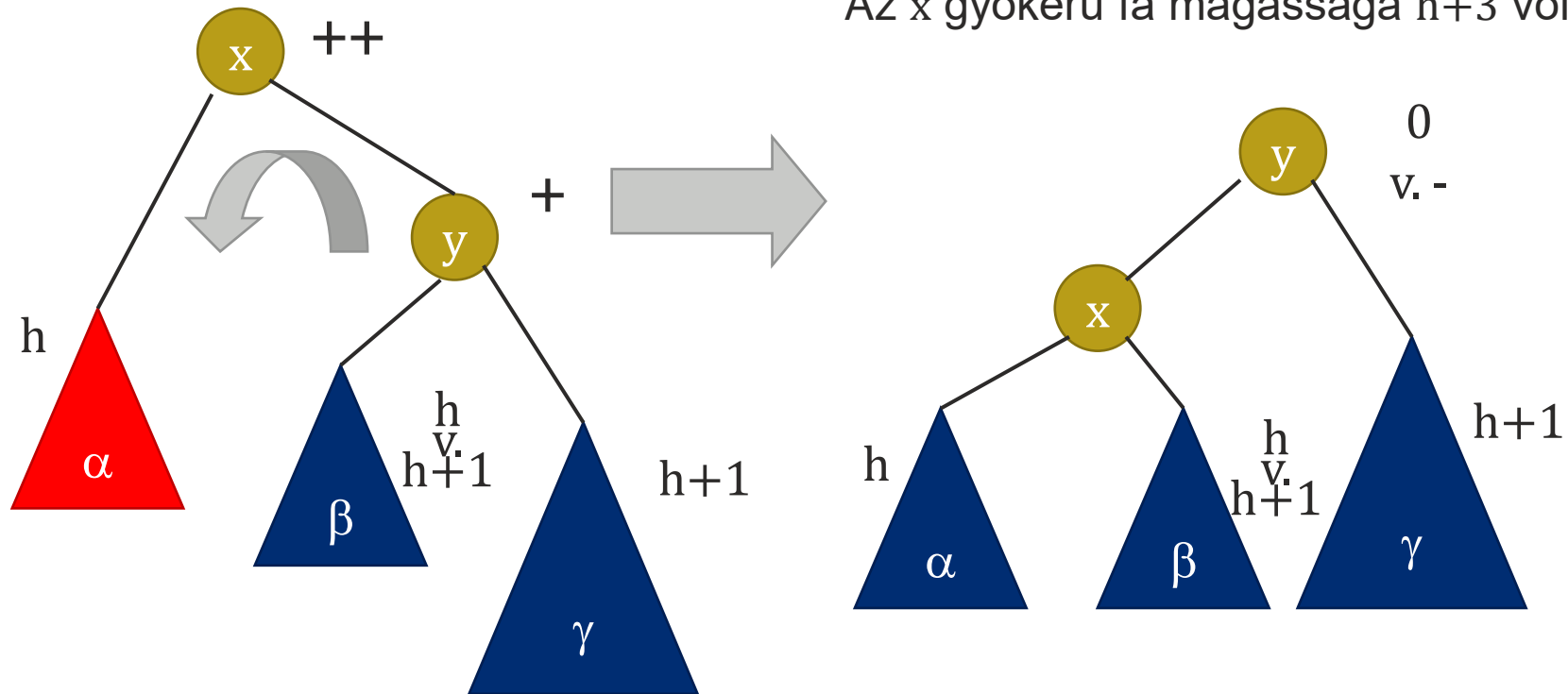
AVL fák – újrakegyensúlyozás törlésnél

A törlés az α részében történt.
Ennek a magassága $h+1$ volt és h lett.
Az x gyökerű fa magassága $h+3$ volt



A $(++,+)$ $(++,0)$ szabályok

A törlés az α részében történt.
Ennek a magassága $h+1$ volt és h lett.
Az x gyökerű fa magassága $h+3$ volt. Forgatás:

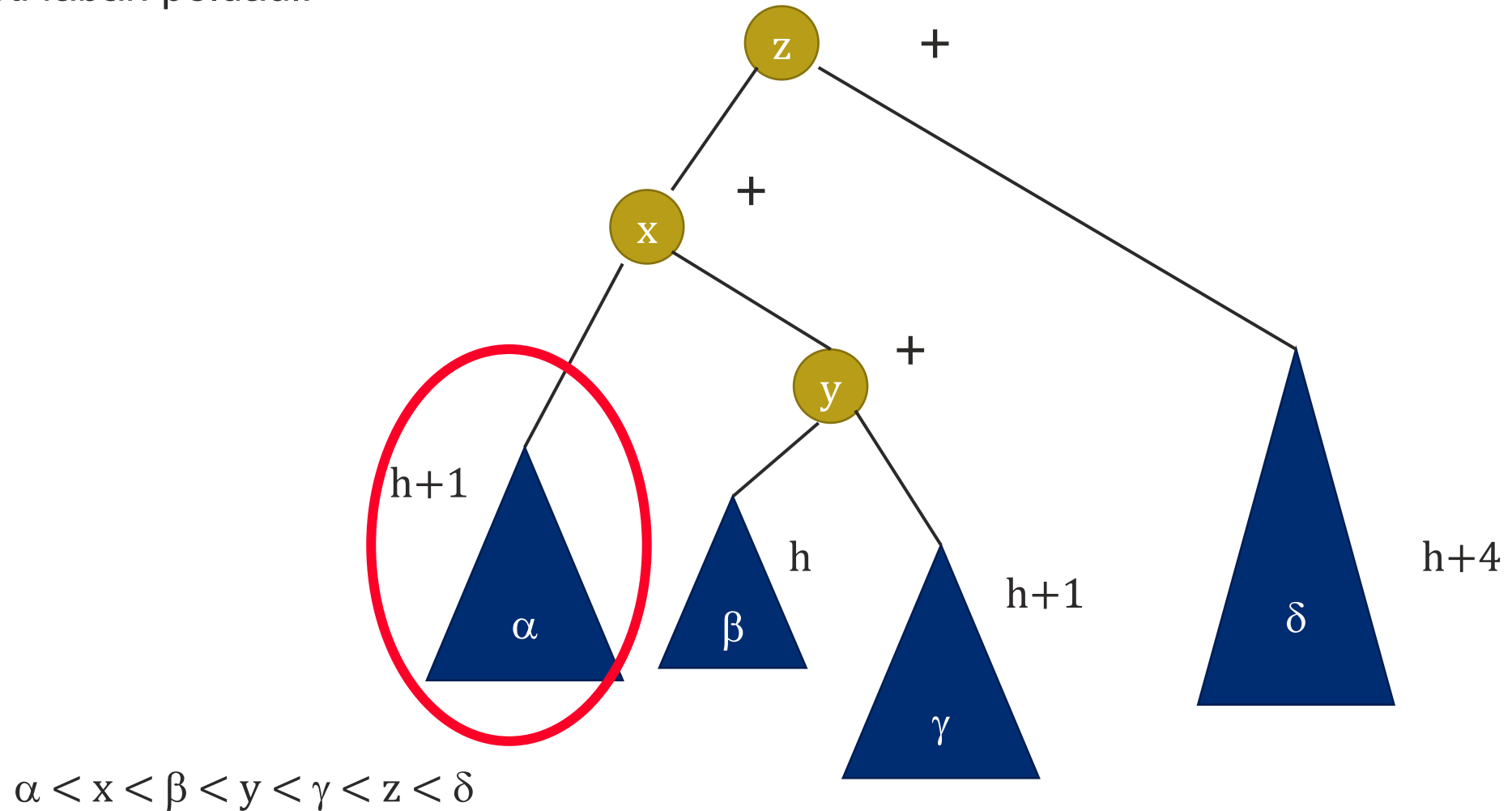


$$\alpha < x < \beta < y < \gamma$$

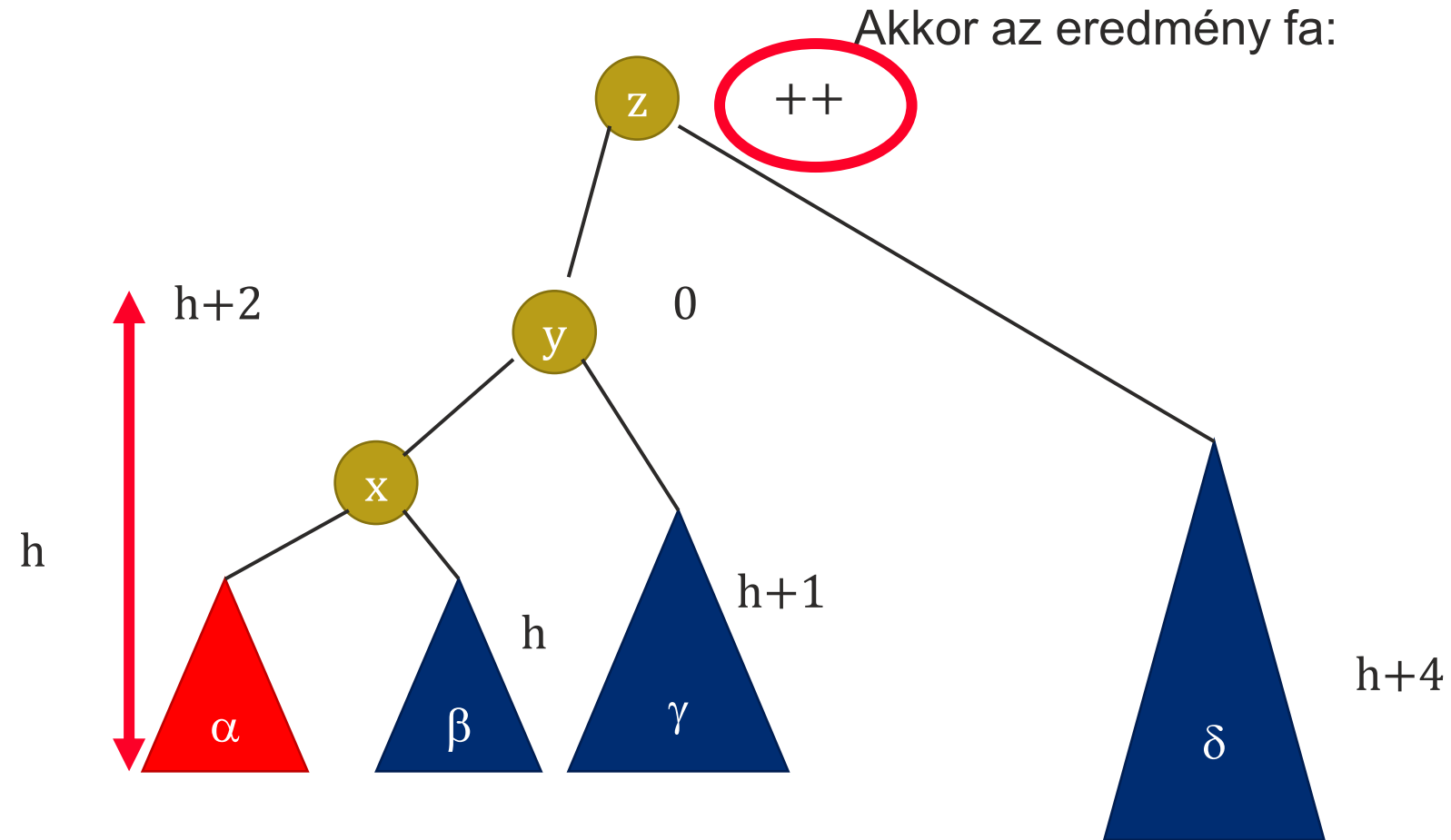
A forgatás után $h+2$ a magasság. Ezért feljebb, a befoglaló fában (ha van), nem biztos, hogy változatlanul érvényes az AVL tulajdonság, **feljebb kell menni** ellenőrizni, amíg a gyökérig nem jutunk.

A (++,+) szabály

Ha az eredeti fában például:



A (++,+) szabály

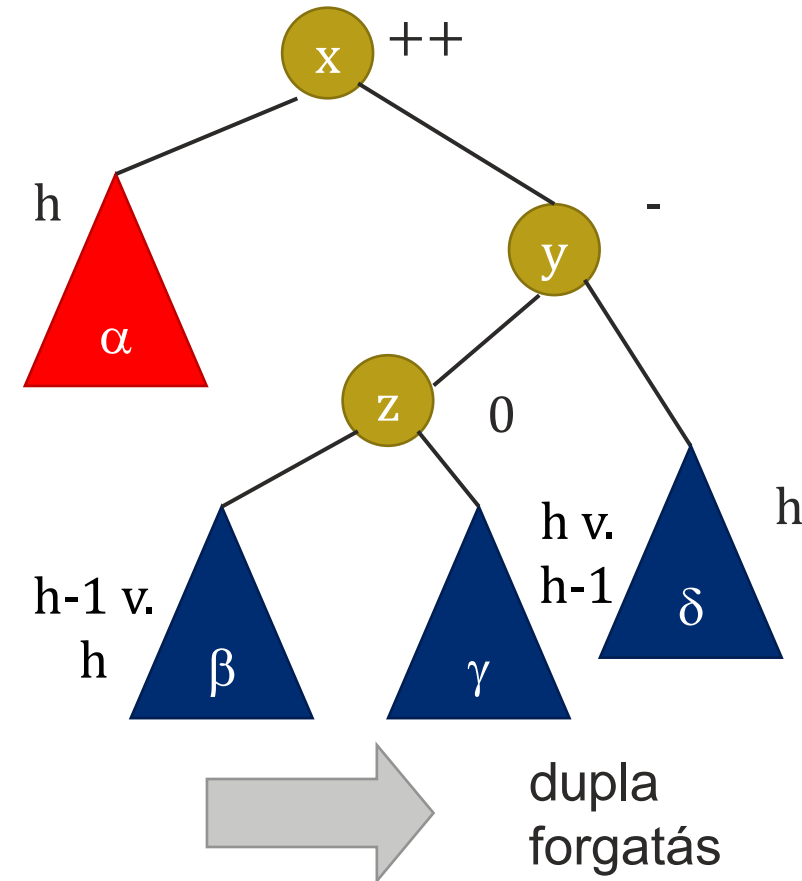
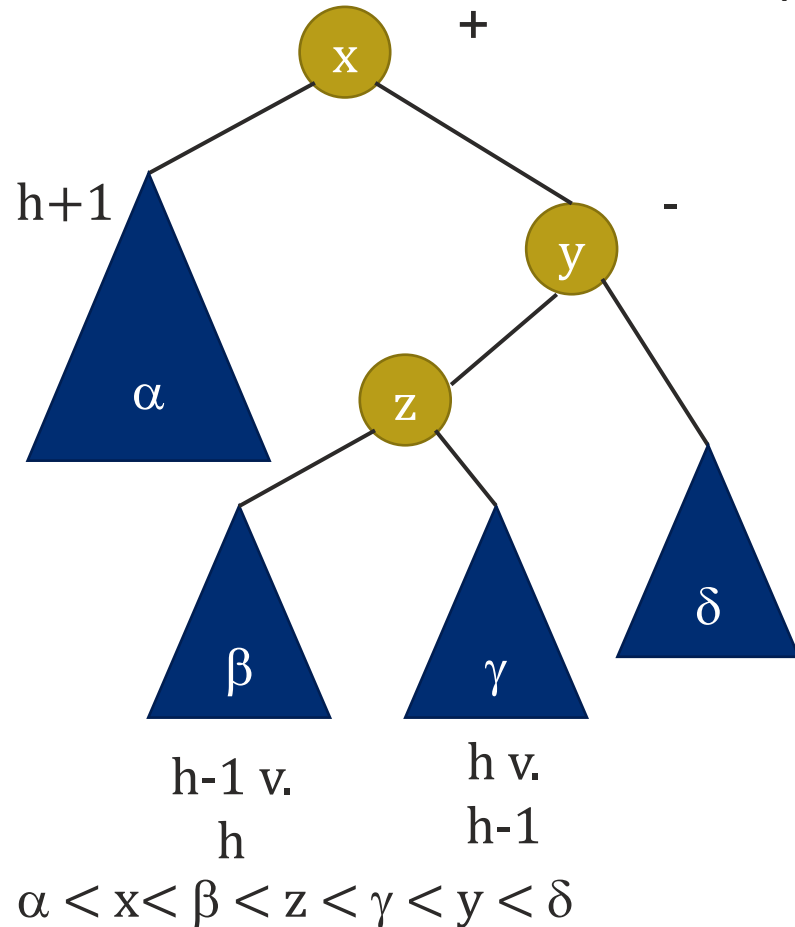


$$\alpha < x < \beta < y < \gamma < z < \delta$$

feljebb kell menni ellenőrizni, és szükség szerint helyreállítani, amíg a gyökérig nem jutunk.

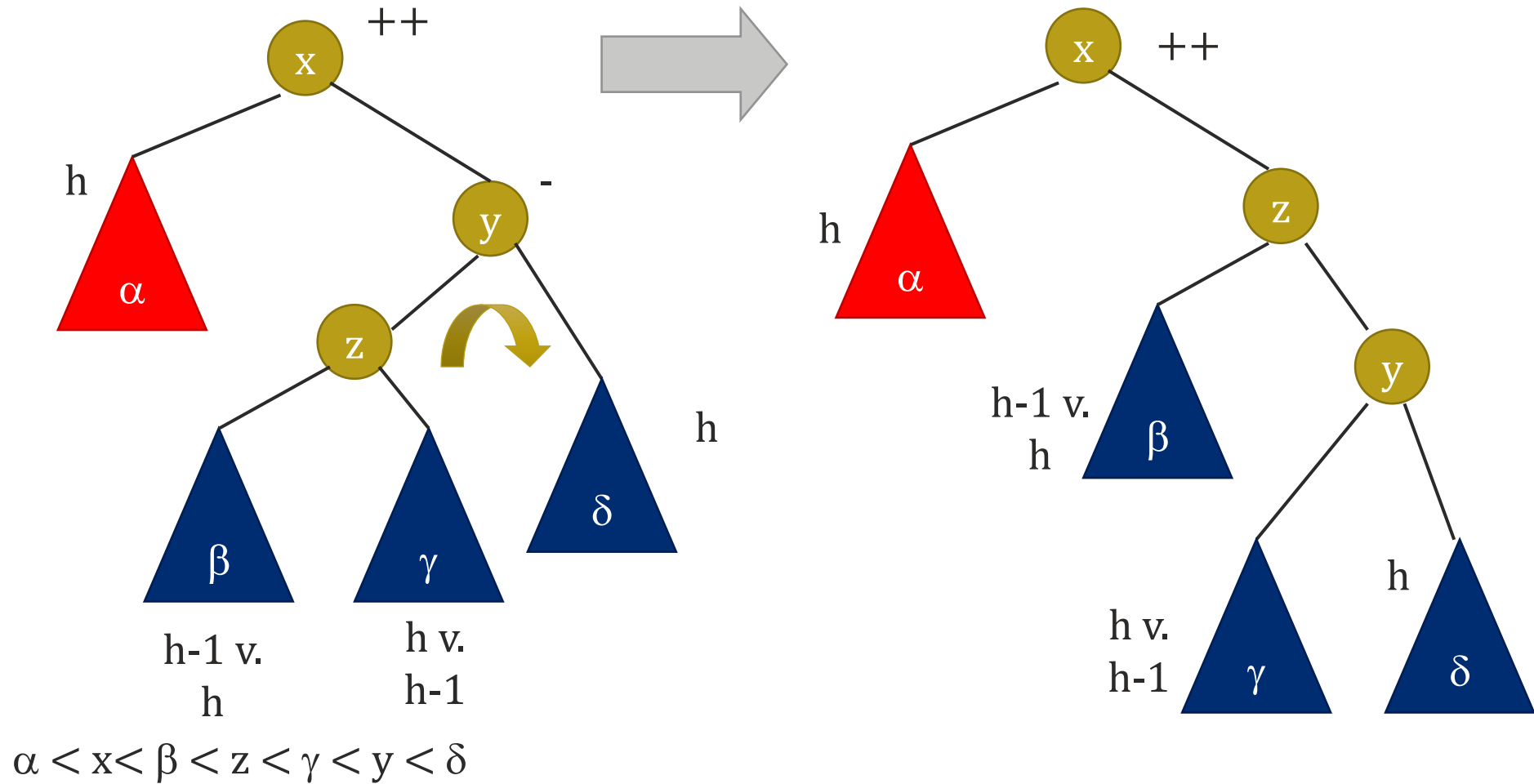
A (++,-) szabály

A törlés az α részében történik. Ennek a magassága $h+1$ volt és h lett. Az x gyökerű fa magassága $h+3$.



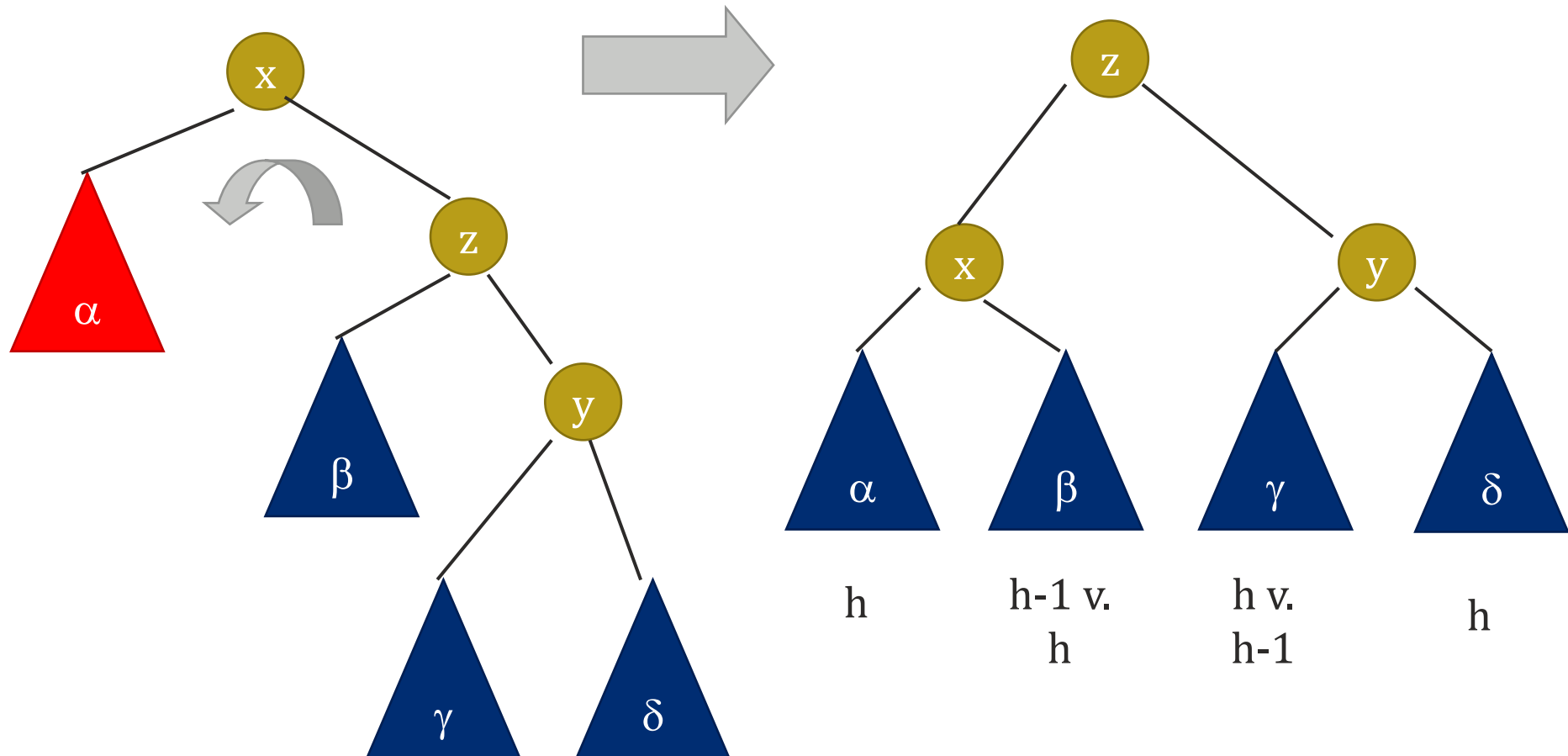
A (++, -) szabály

Dupla forgatás kell: először jobbra:



A (++, -) szabály

Dupla forgatás kell: azután balra:

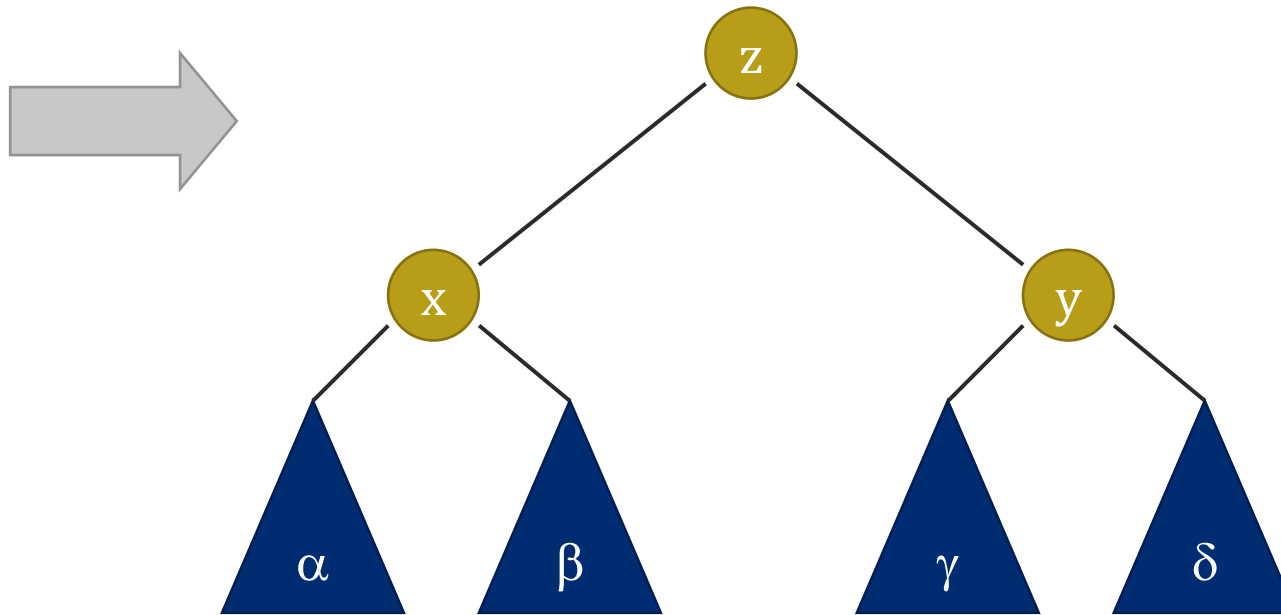


A (++, -) szabály

Végeredmény

A forgatás után $h+2$ a magasság.

Ezért feljebb, a befoglaló fában (ha van), nem biztos, hogy változatlanul érvényes az AVL tulajdonság, **feljebb kell menni** ellenőrizni, amíg a gyökérig nem jutunk.



Továbbra is igaz:

$$\alpha < x < \beta < z < \gamma < y < \delta$$

Újrakegyensúlyozás törlésnél

- Összefoglalva:

- Mivel az x gyökerű fa magassága csökkent a forgatással, ezért feljebb is, ha van befoglaló fa, elromolhatott az AVL tulajdonság
- A **törlés** után a törölt elem szülőjétől kezdve felfelé haladva a gyökér felé újra számoljuk a csúcsok címkéit ezen az útvonalon
- Ha egy x csúcs címkéje $++$ vagy $--$ lesz, akkor az x gyökerű (rész)fa (esetleg dupla) forgatásával helyreállítjuk annak AVL tulajdonságát
- Ha x nem a gyökér, akkor feljebb kell lépni és folytatni kell az ellenőrzést
- Szükséges esetben az adott útvonal minden pontjában forgatni kell

Újrakegyensúlyozás törlésnél

- Tétel
 - Az n pontú AVL-fából való törlés után legfeljebb $1,44\log_2 n$ (sima vagy dupla) forgatás helyreállítja az AVL-tulajdonságot.
- Bizonyítás
 - az előzőekből következik.

Törlés vs. beszúrás

- Törlési esetek eltérnek a beszúrástól a következőkben:
 - Lehetséges a $(--,0)$ illetve $(++,0)$ **kiinduló** állapot is
 - A fa gyökeréig fel **kell** menni az ellenőrzés során

Összefoglalás

- AVL fák
 - Az első dinamikusan kiegyensúlyozott fák
 - A magasság az optimális 44%-án belül
 - Újrakiegyensúlyozás forgatásokkal
 - $\mathcal{O}(\log n)$

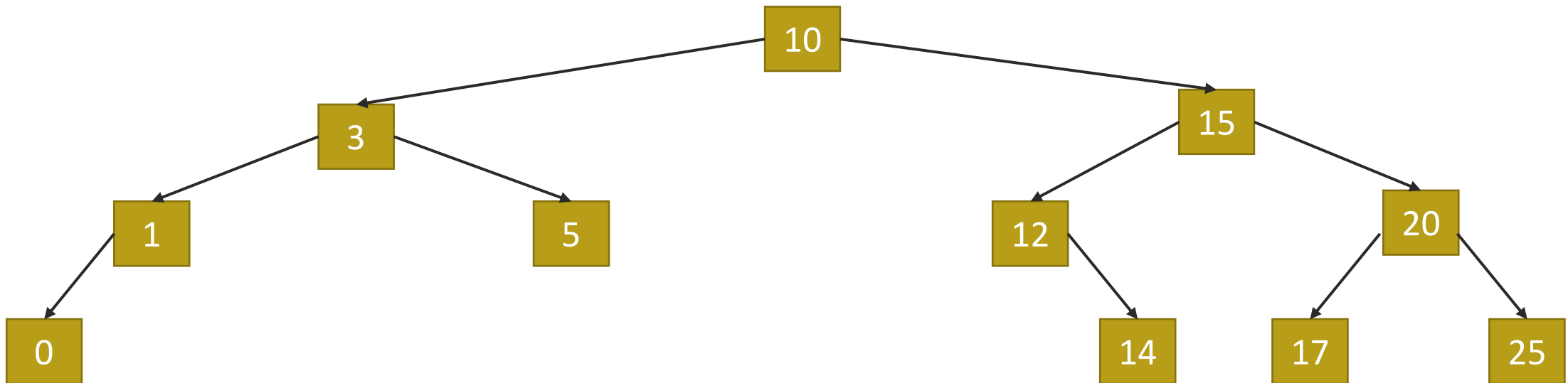
Piros-fekete fa

Következő téma

További példák következnek

• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

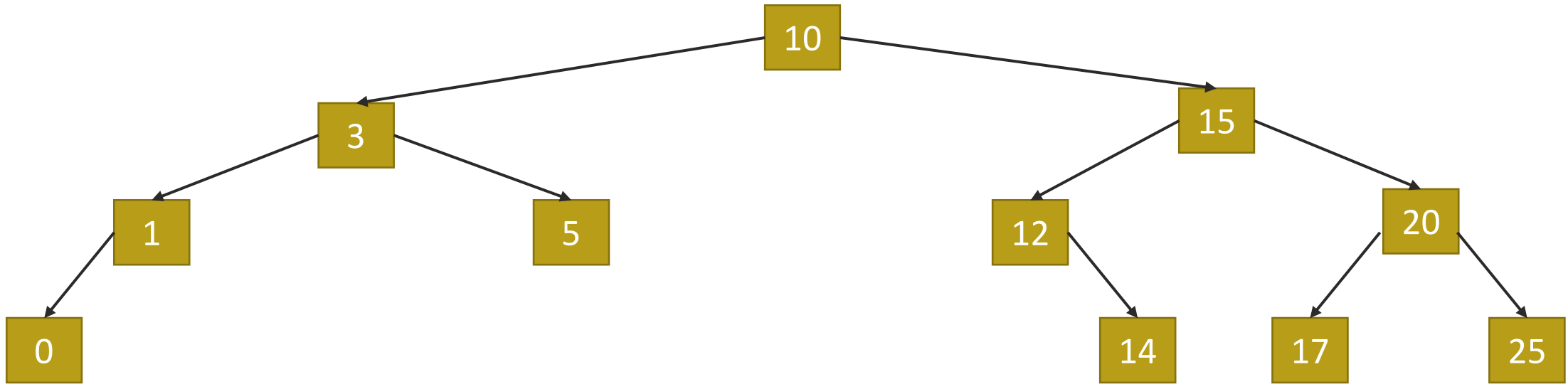
Töröljünk ki elemeket



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

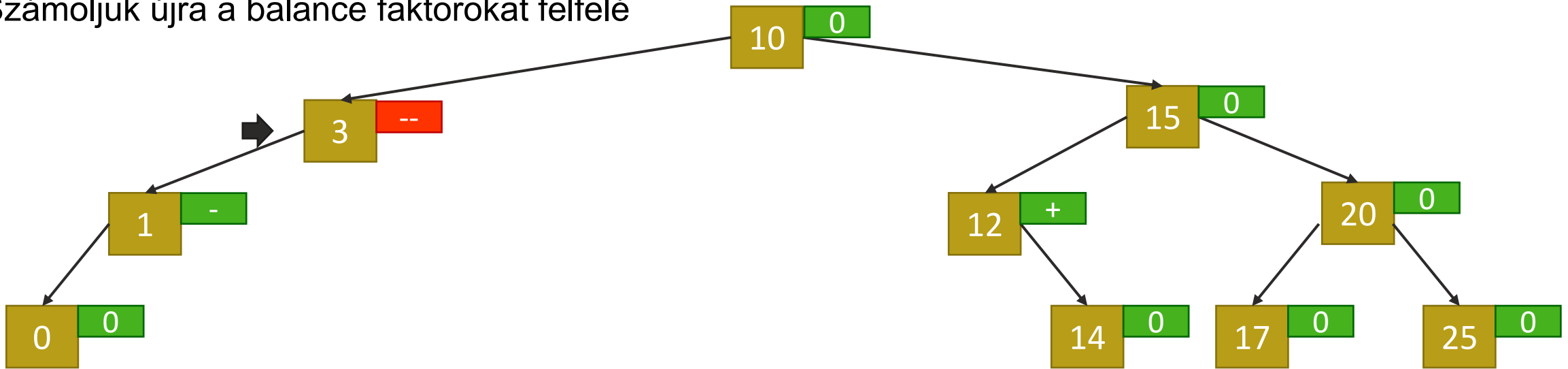
- 5



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

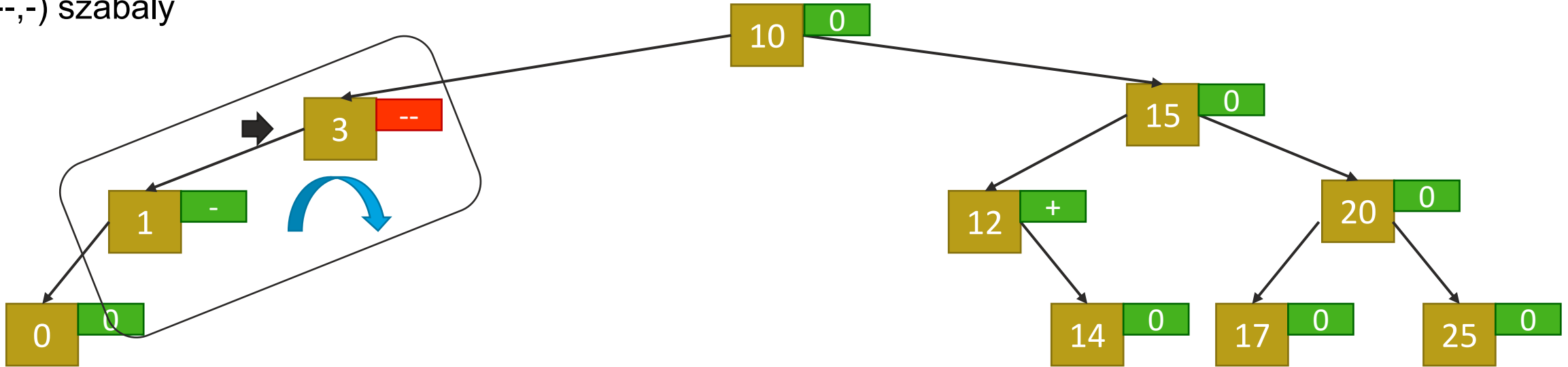
- Számoljuk újra a balance faktorokat felfelé



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

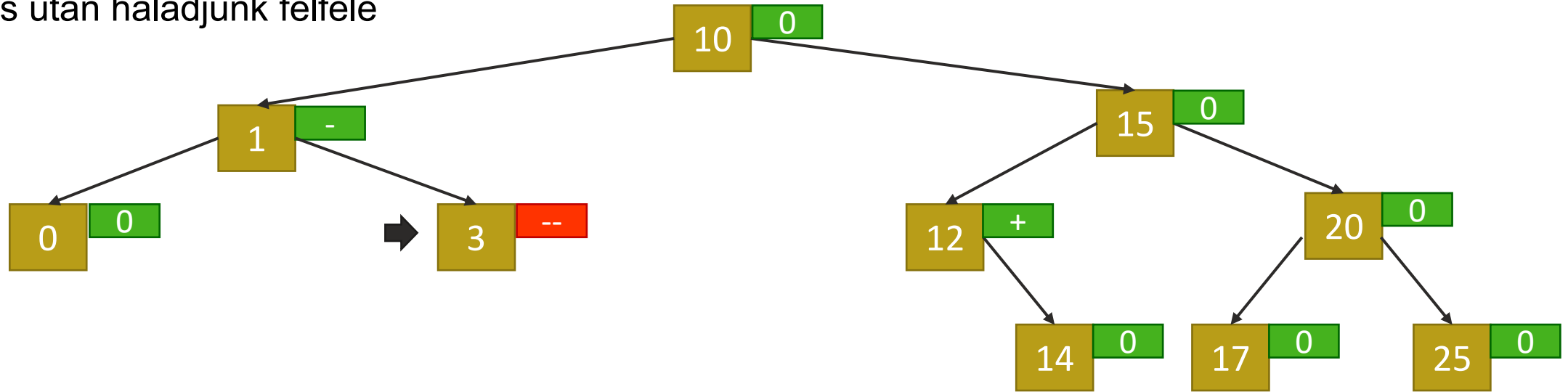
- (--,-) szabály



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

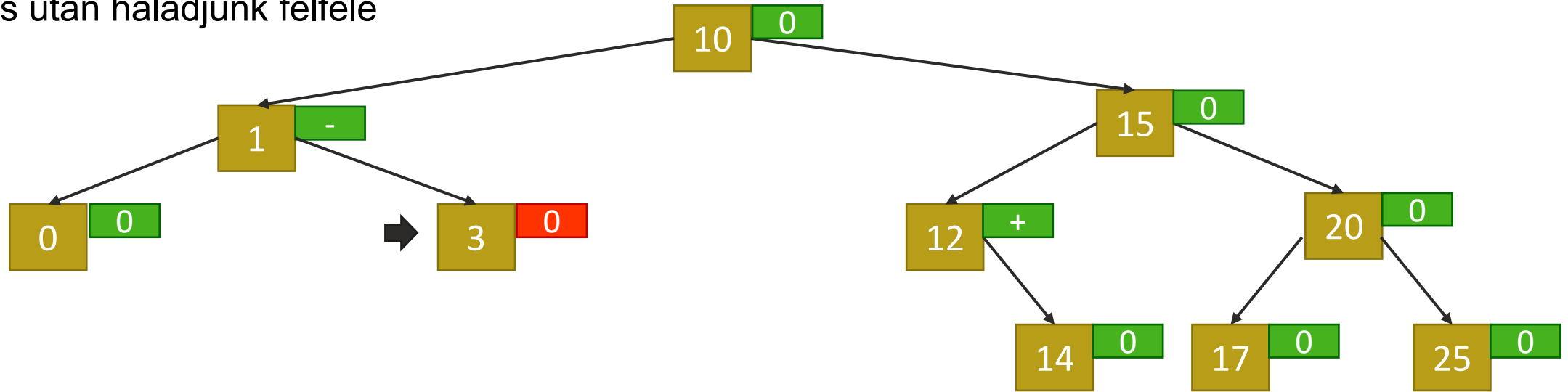
- Forgatás után haladjunk felfelé



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

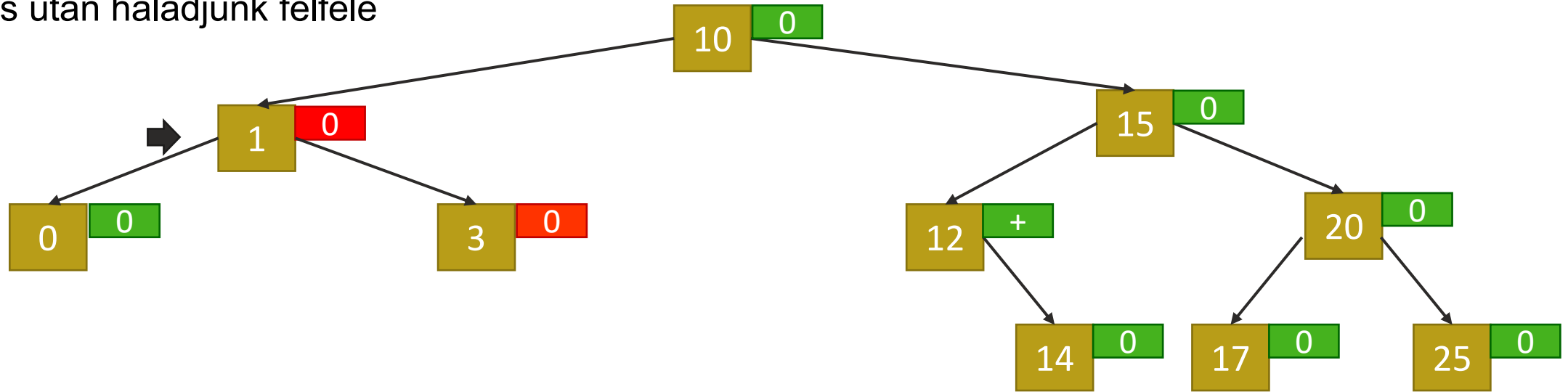
- Forgatás után haladjunk felfelé



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

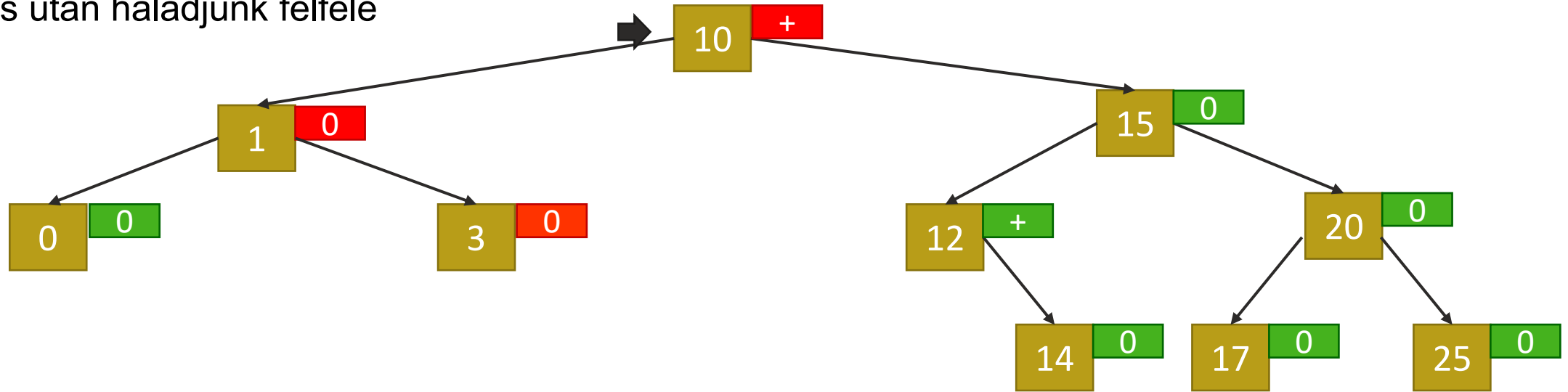
- Forgatás után haladjunk felfelé



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

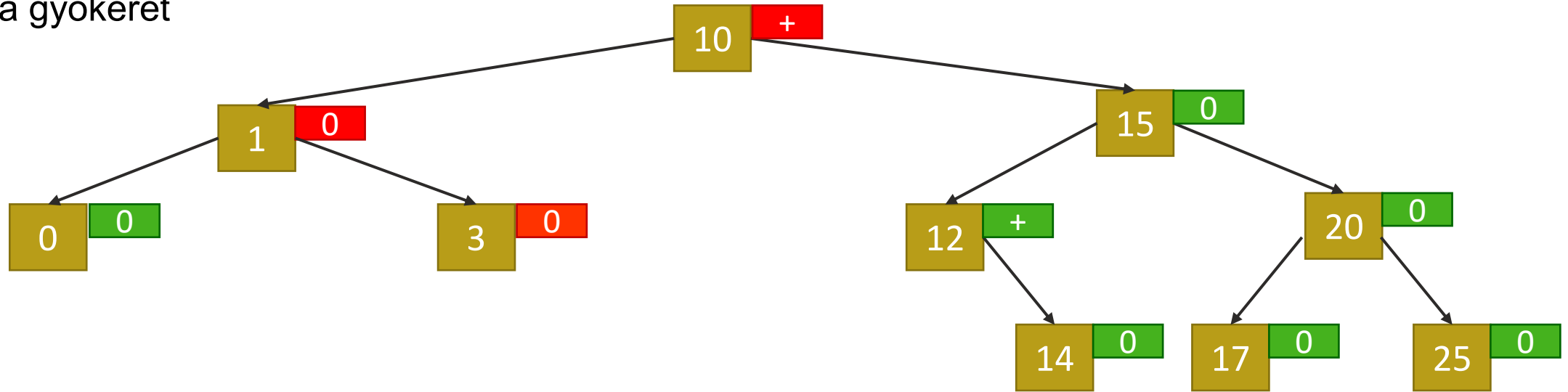
- Forgatás után haladjunk felfelé



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

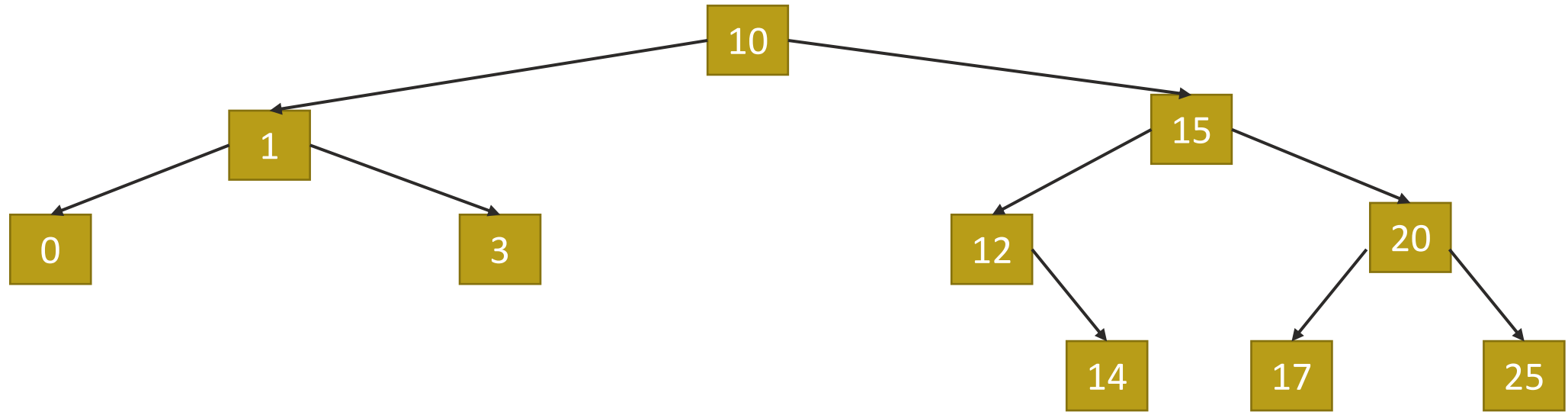
- Elértük a gyökeret



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

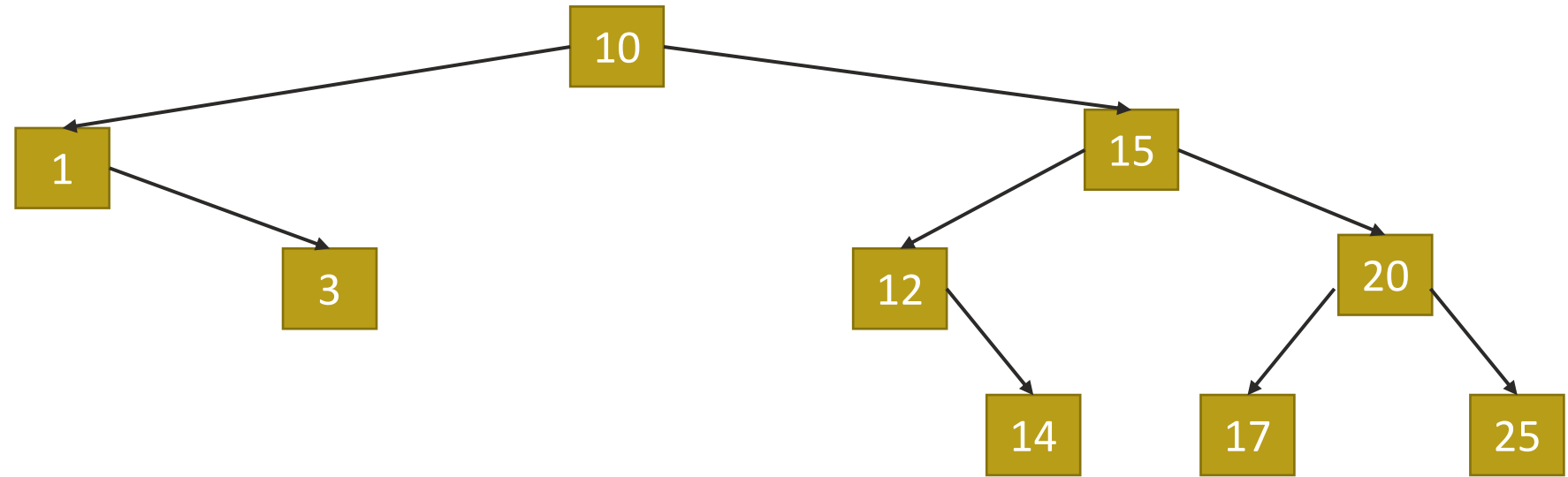
- 0



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

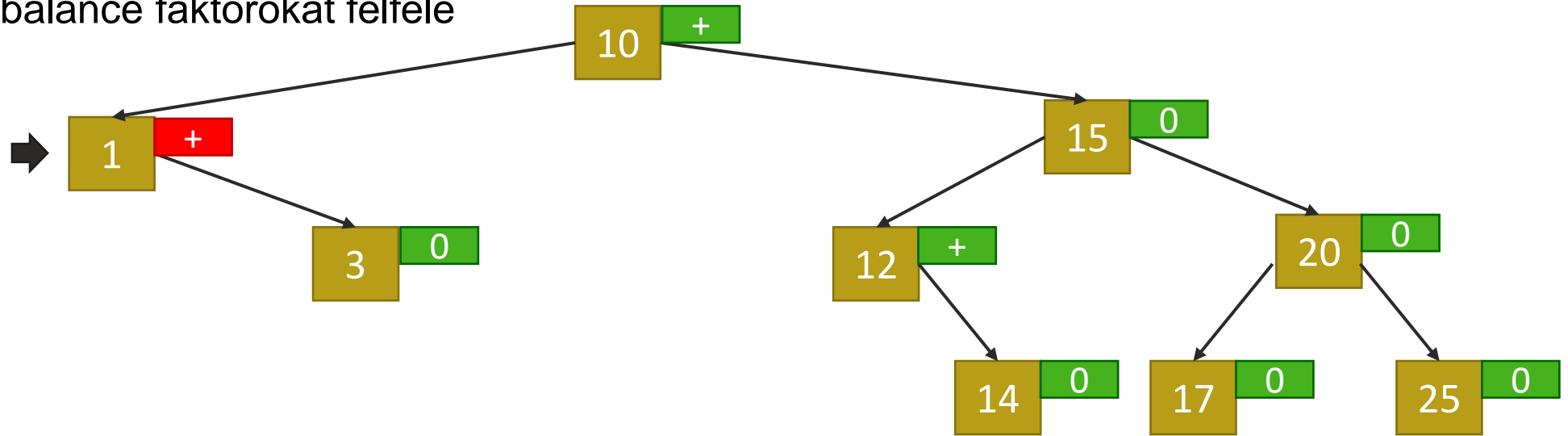
- 0



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

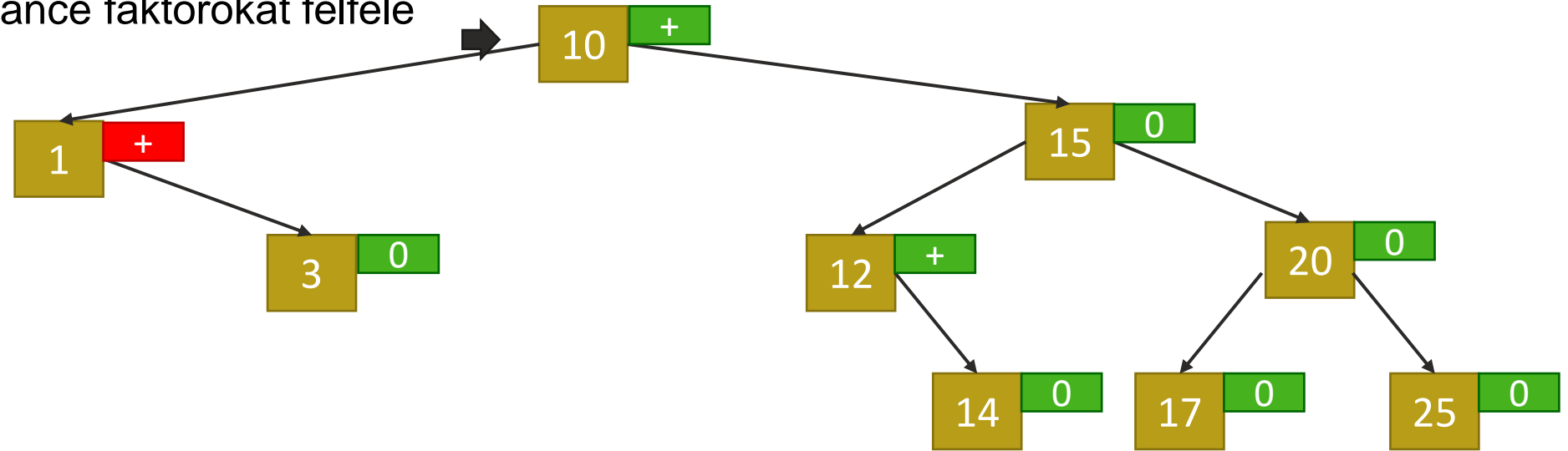
- Számoljuk újra a balance faktorokat felfelé



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

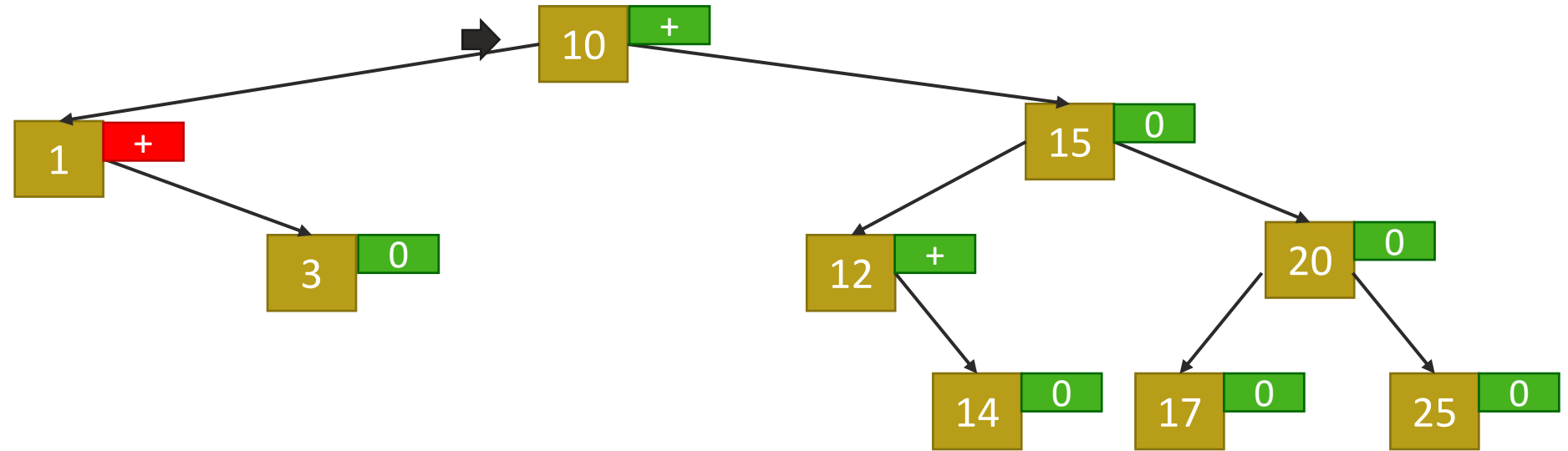
- Számoljuk újra a balance faktorokat felfelé



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

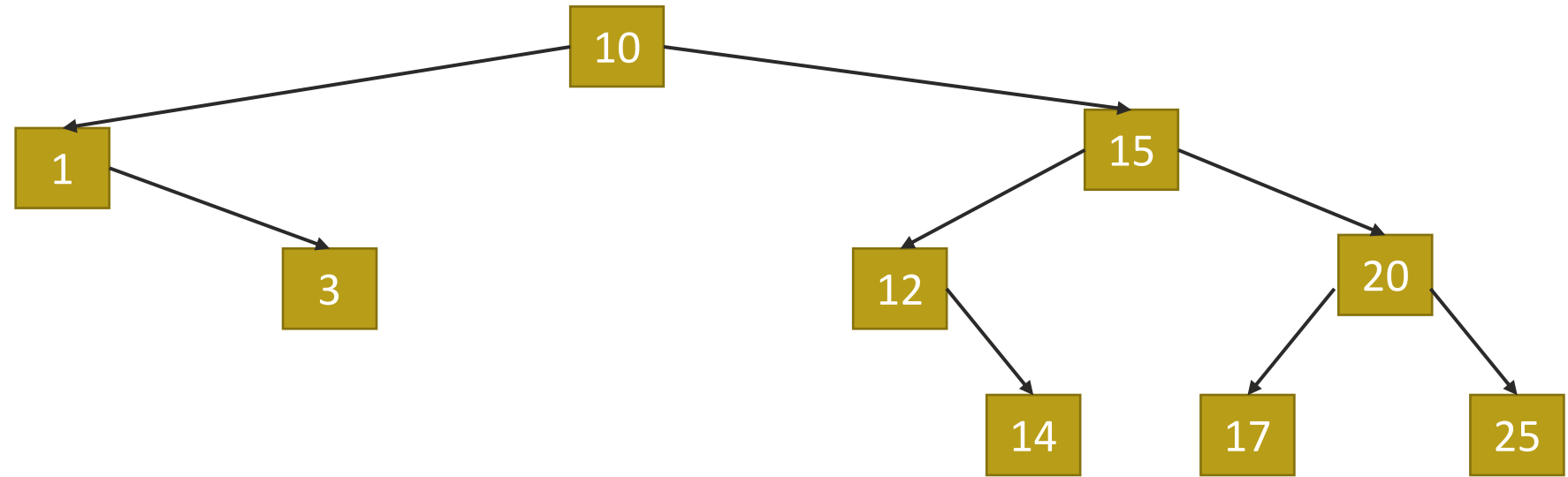
- Elértük a gyökeret



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

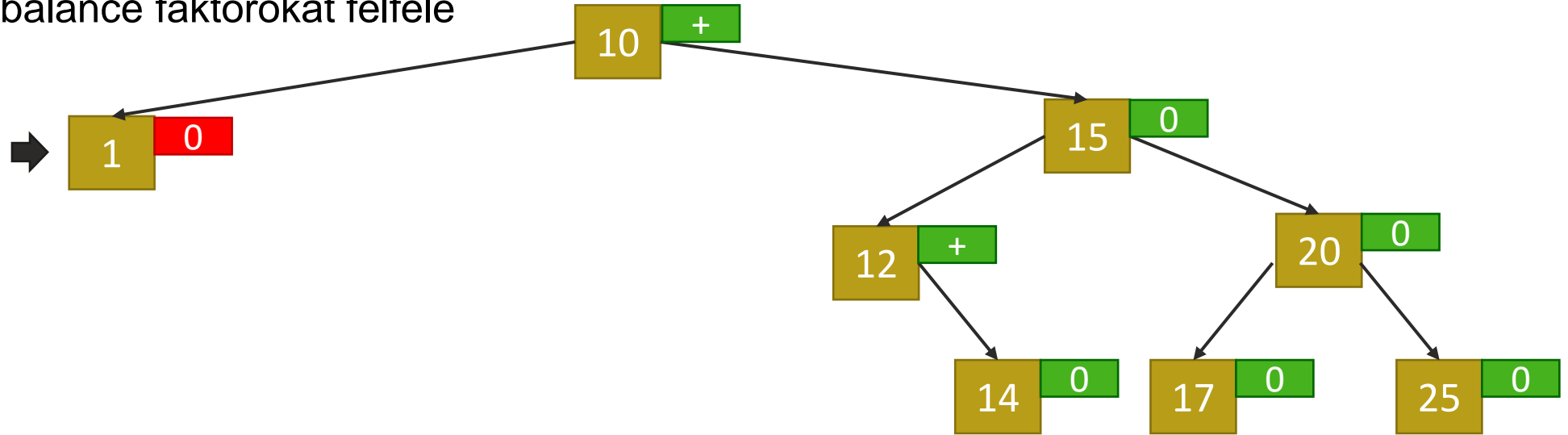
- 3



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

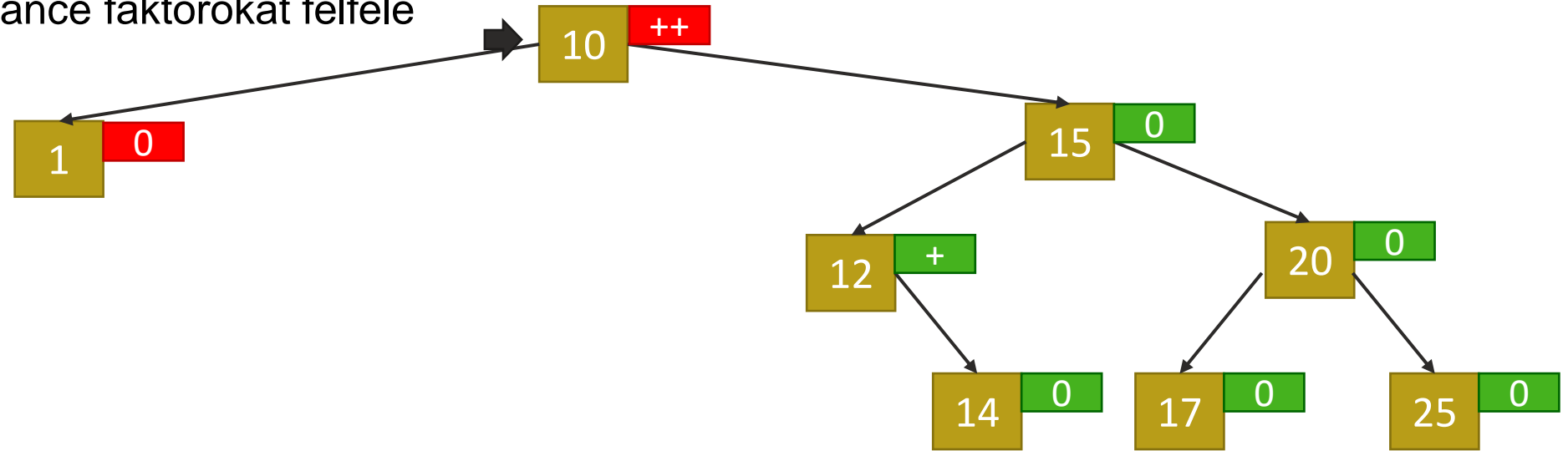
- Számoljuk újra a balance faktorokat felfelé



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

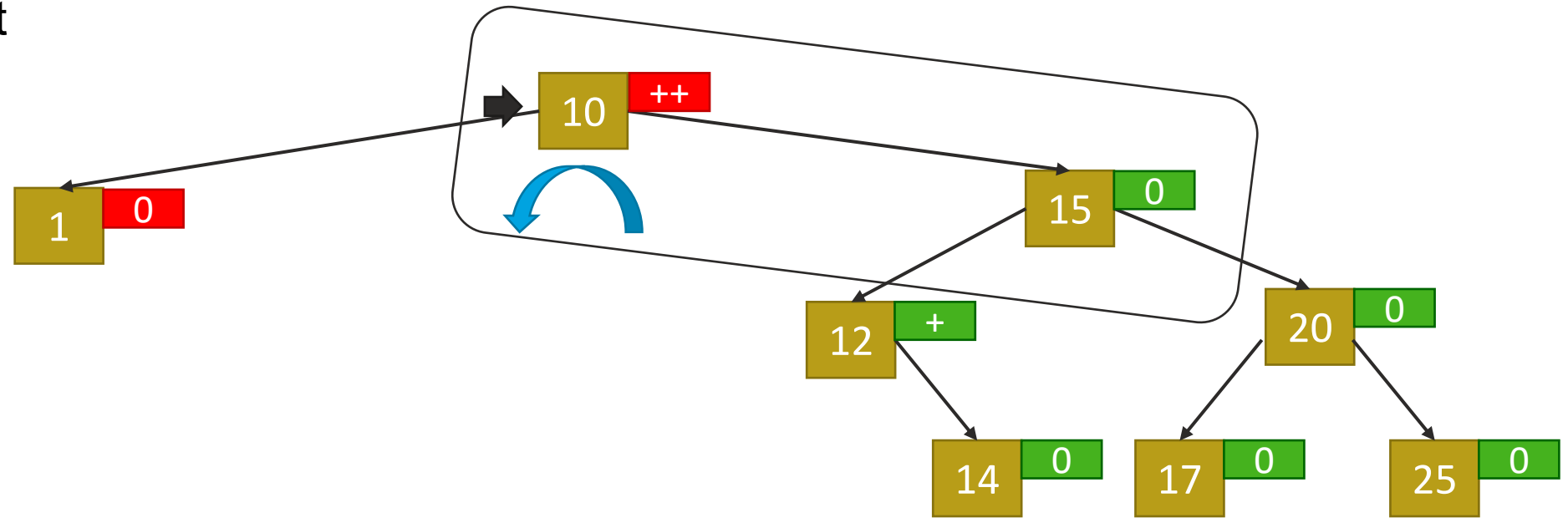
- Számoljuk újra a balance faktorokat felfelé



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

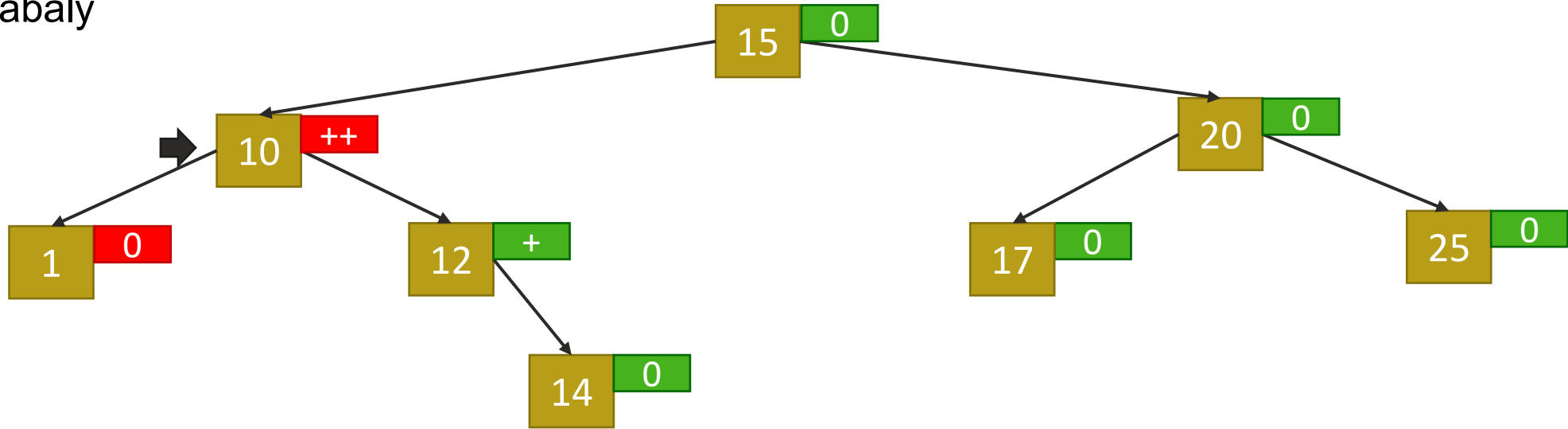
- (++,0) szabály



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

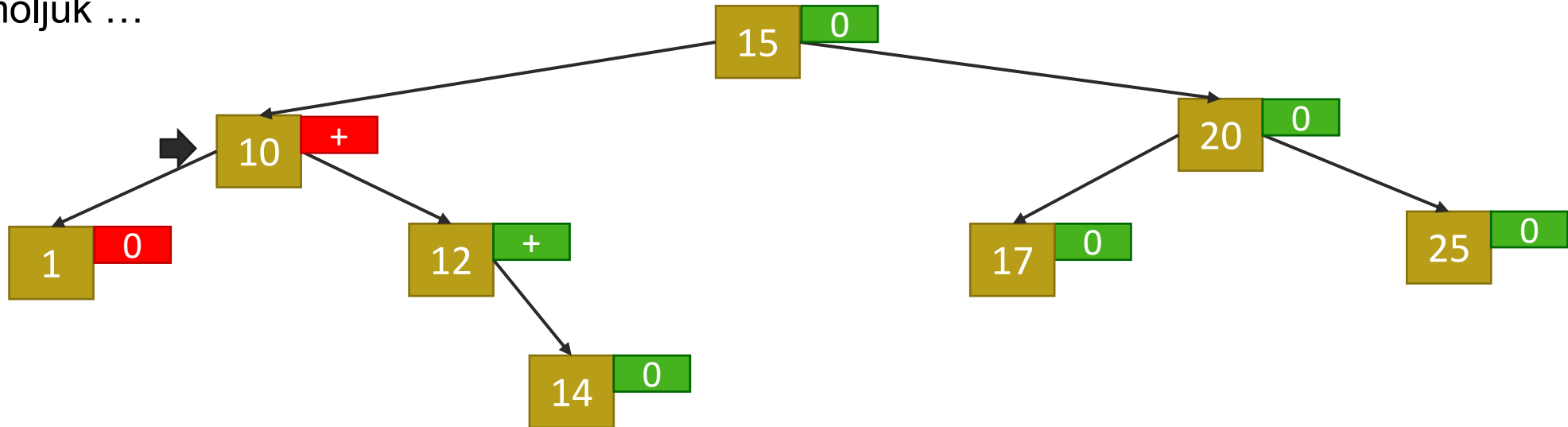
- (++,0) szabály



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

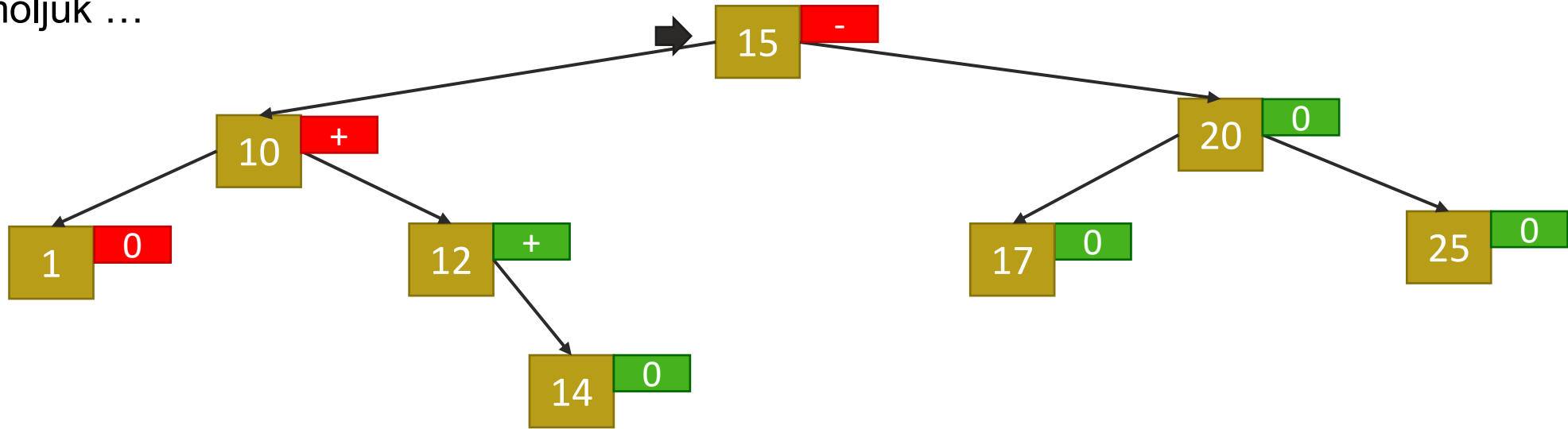
- Újraszámoljuk ...



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

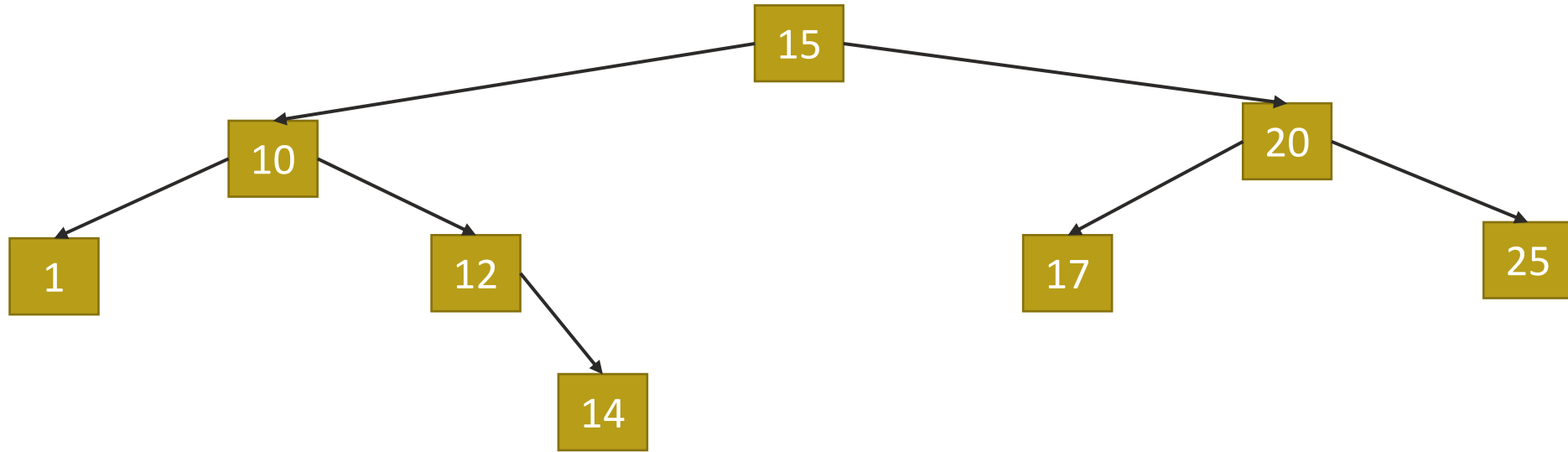
- Újraszámoljuk ...



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljük ki elemeket

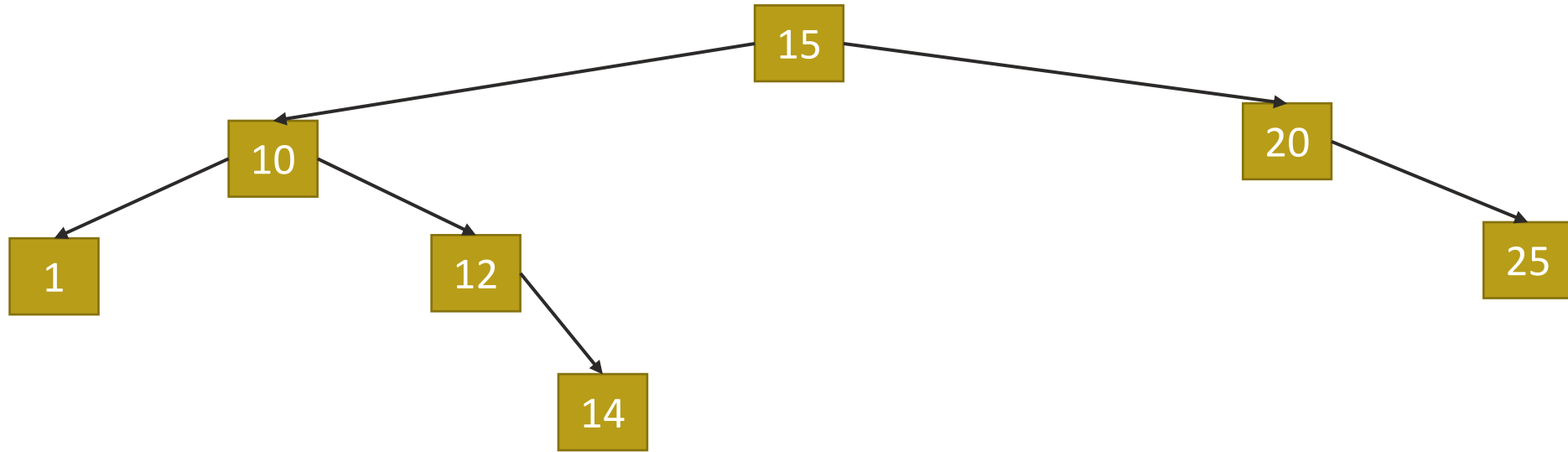
- 17



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

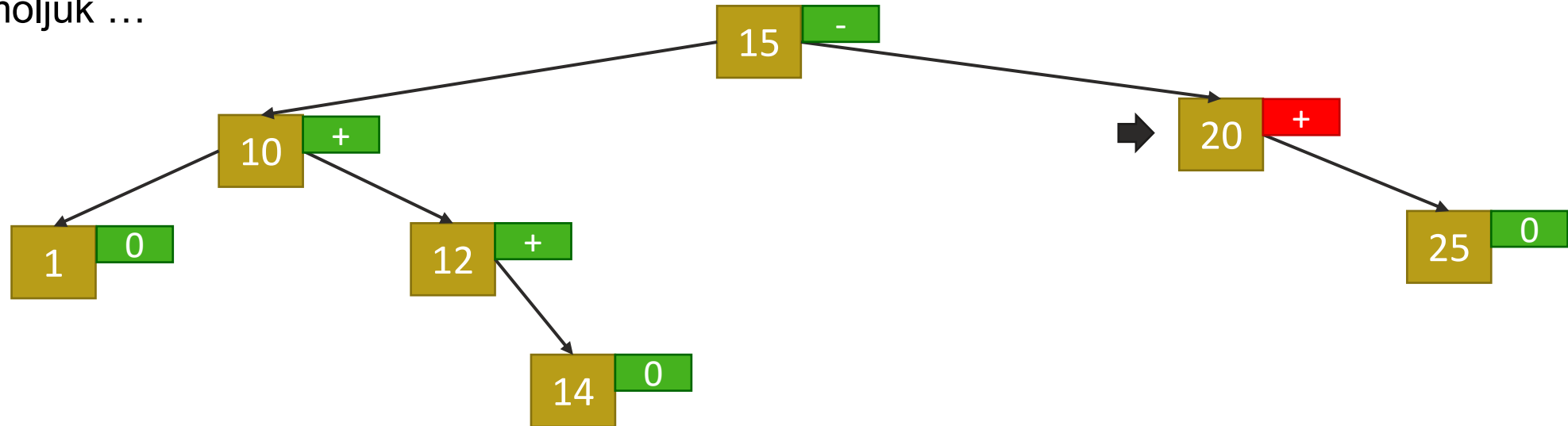
- 17



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

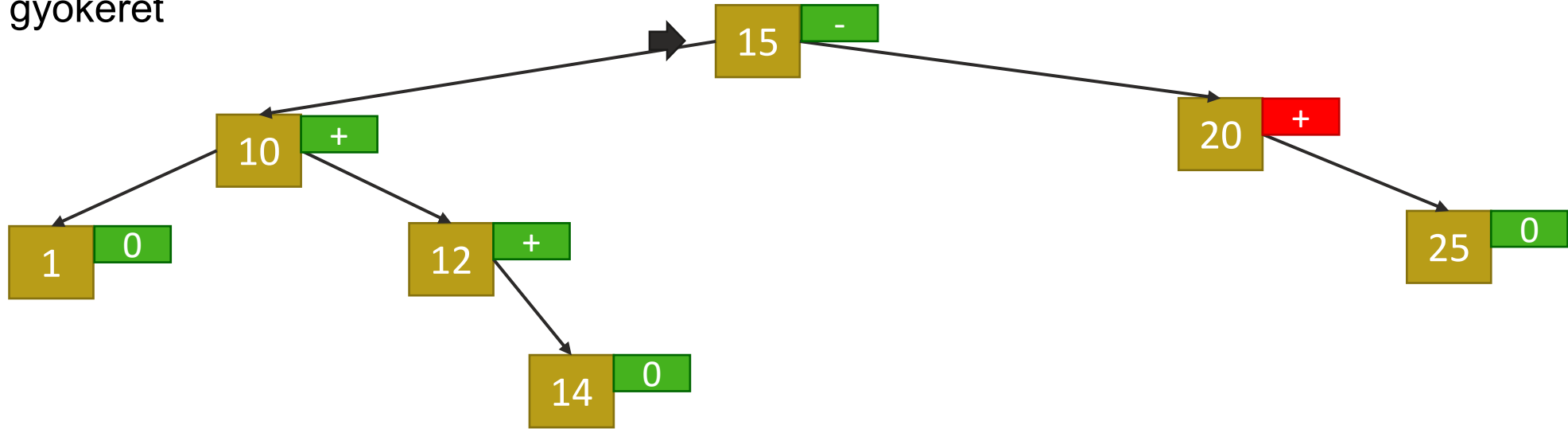
- Újrászámoljuk ...



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

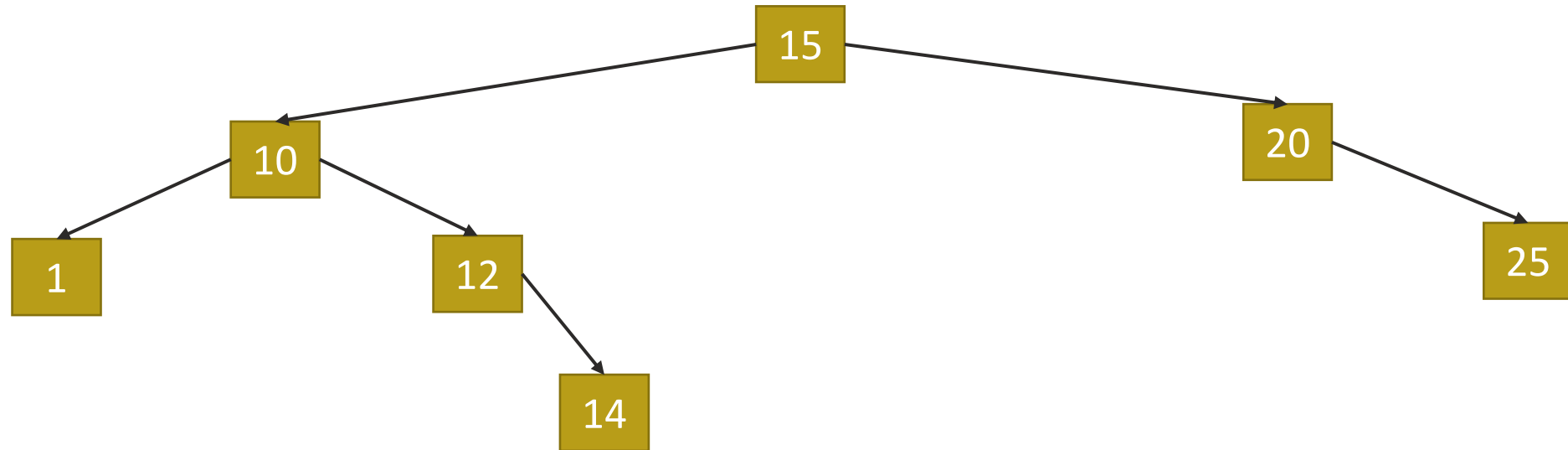
- Elértük a gyökeret



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

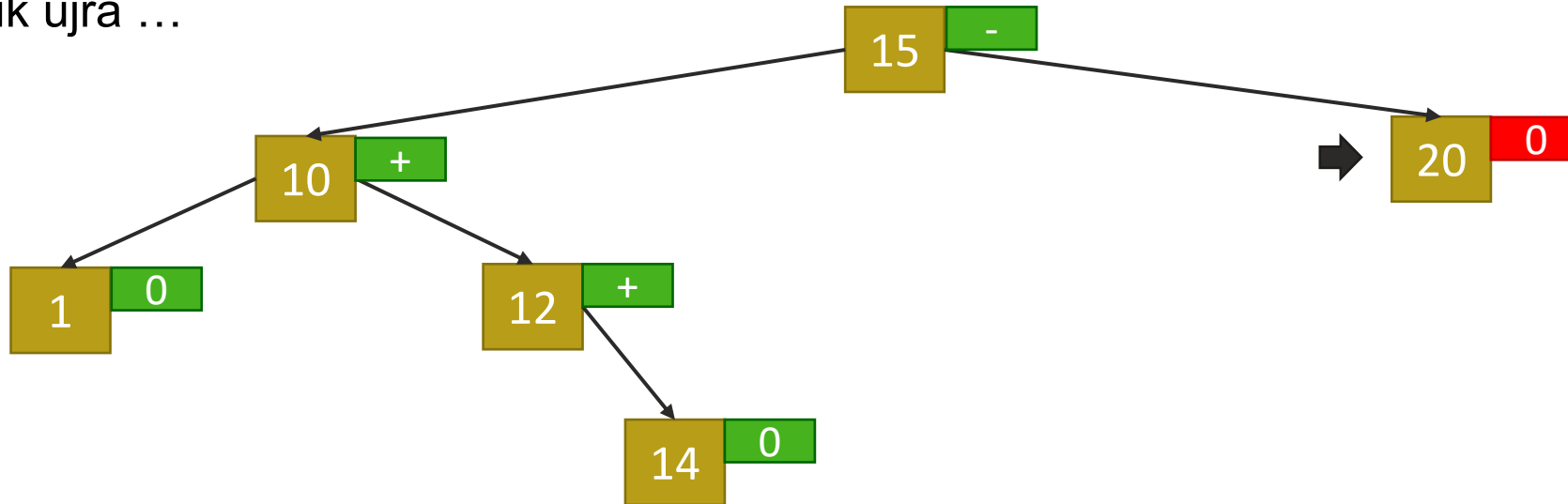
- 25



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljük ki elemeket

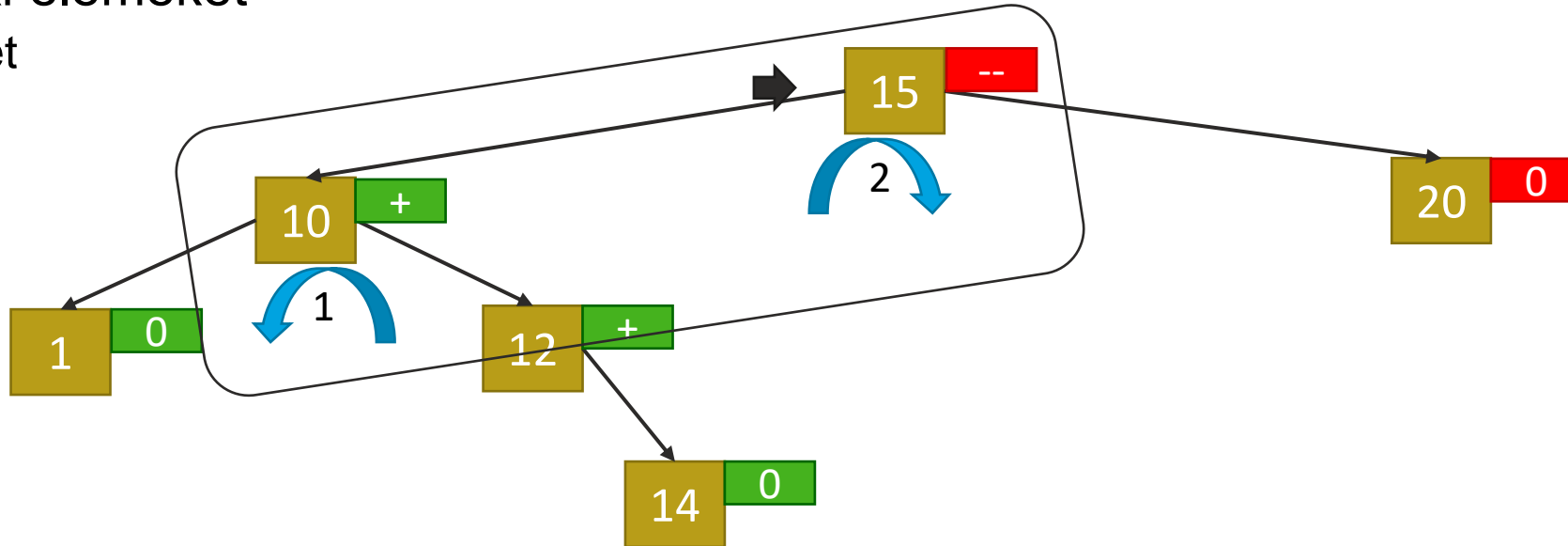
- Számoljuk újra ...



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

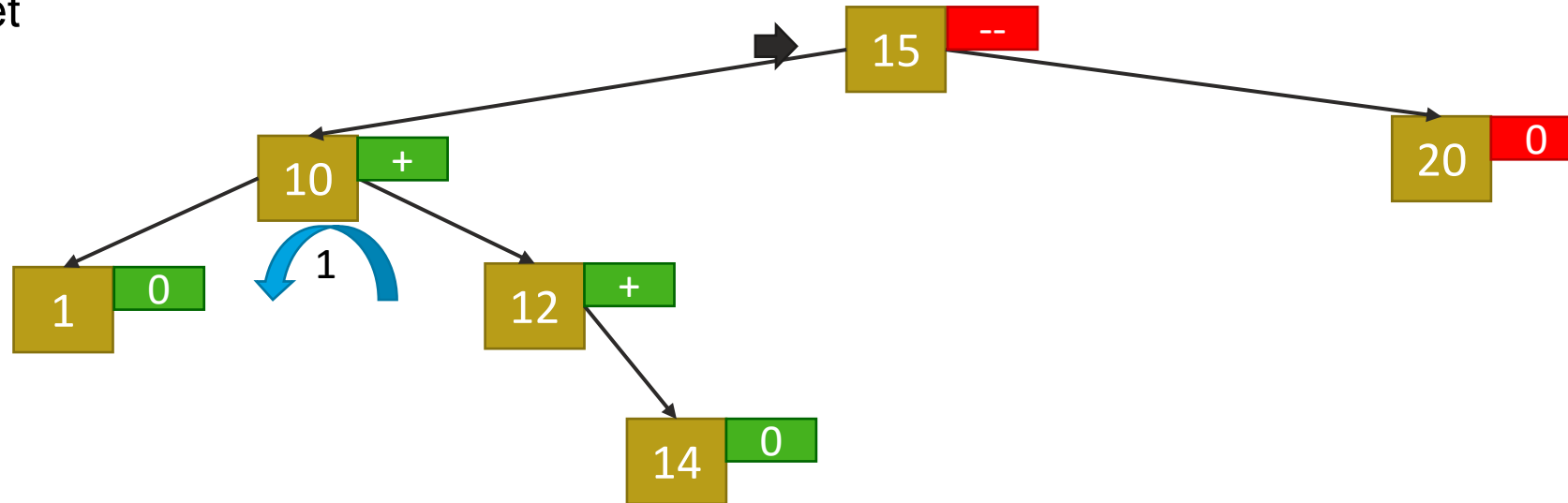
- (--,+) eset



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

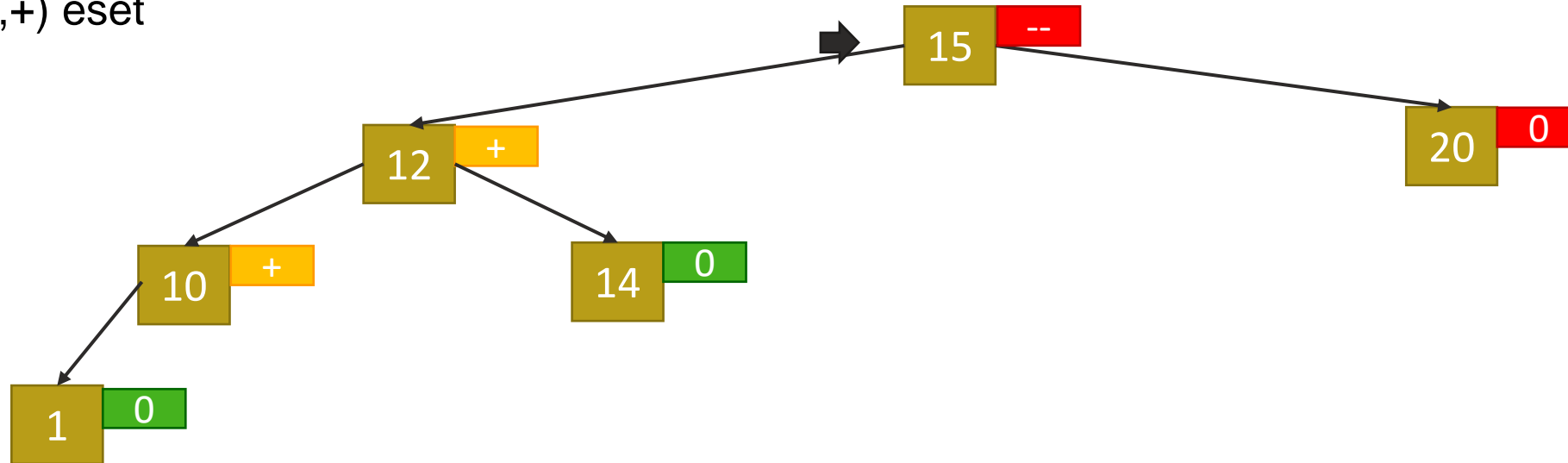
- (--,+) eset



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

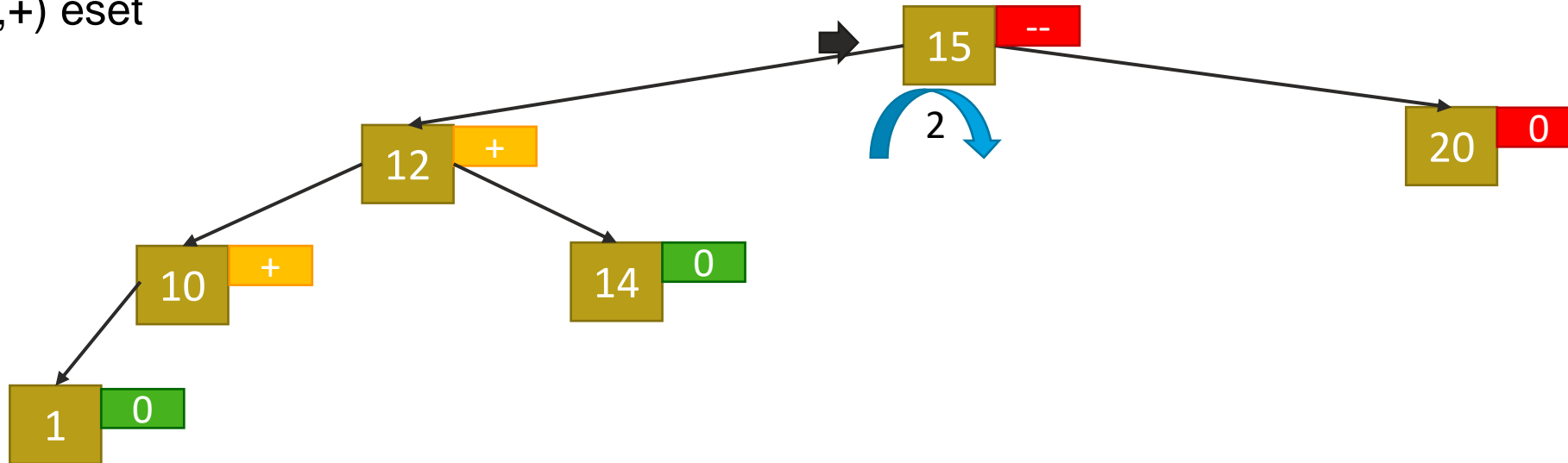
- (--,+) eset



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljük ki elemeket

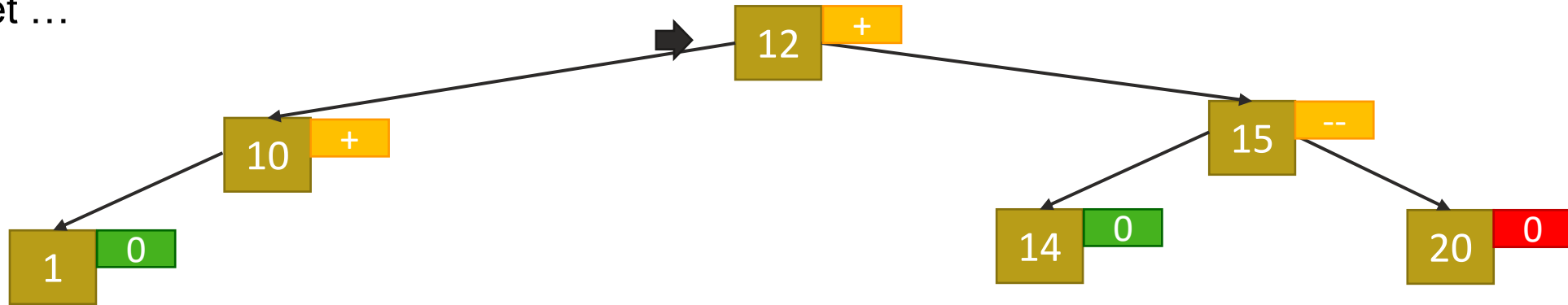
- (--,+) eset



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

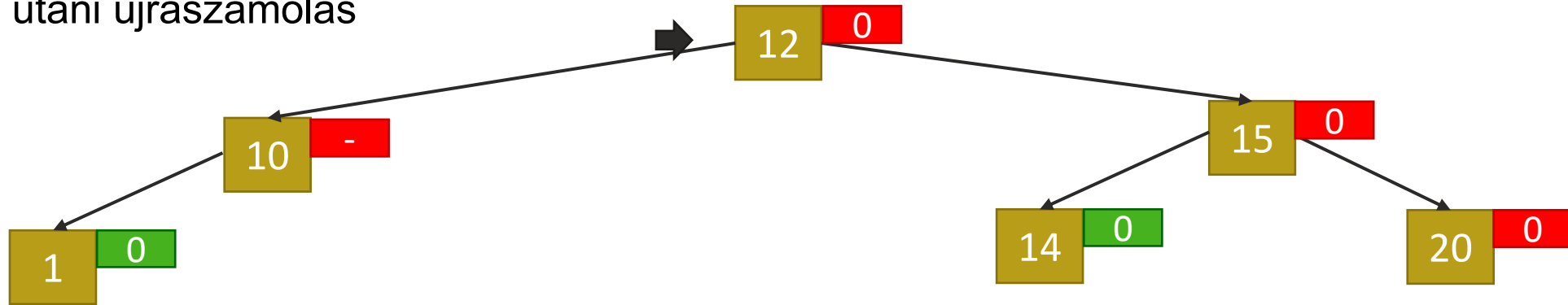
- (--,+) eset ...



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

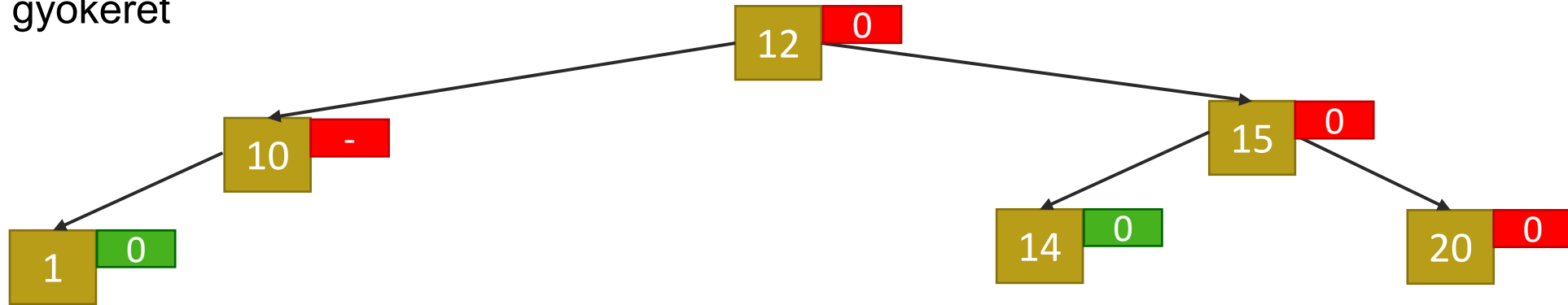
- Forgatás utáni újraszámolás



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

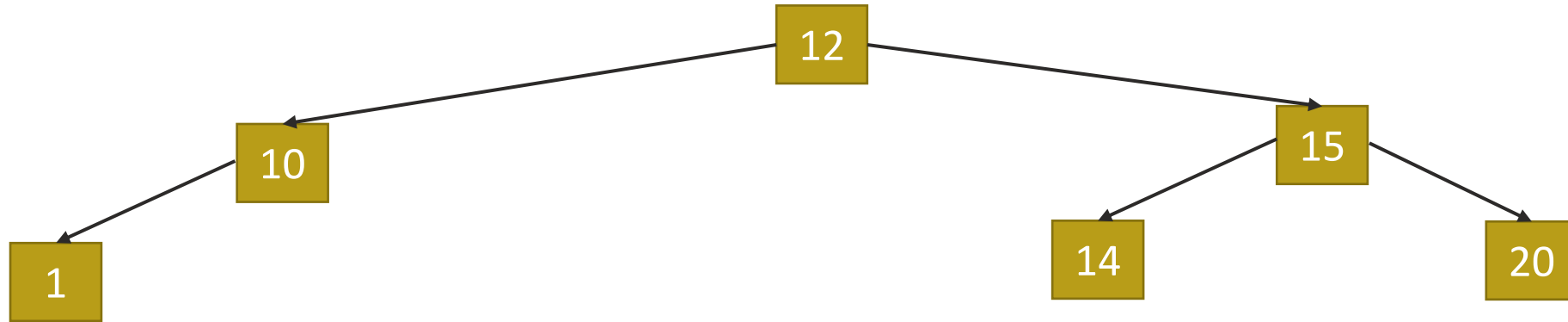
- Elértük a gyökeret



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

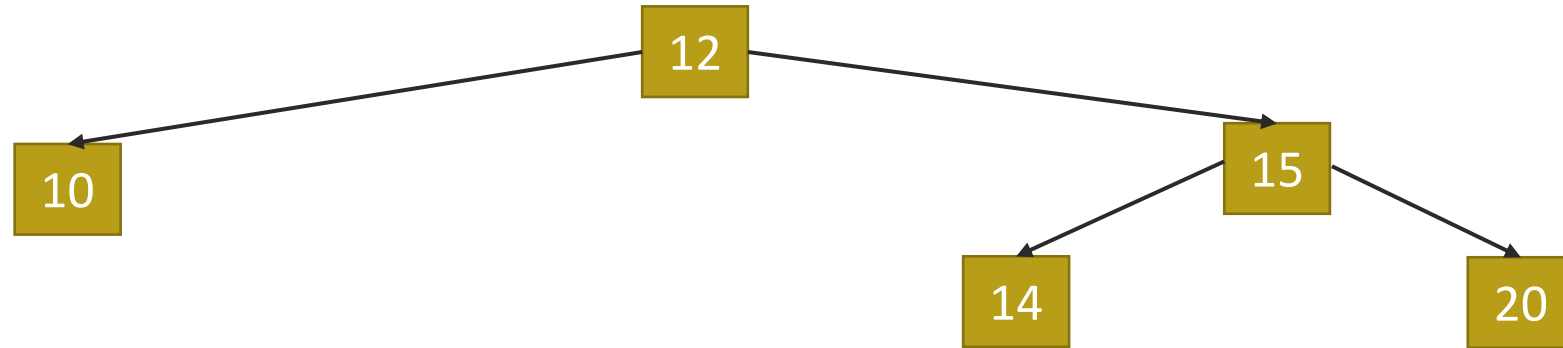
- 1



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

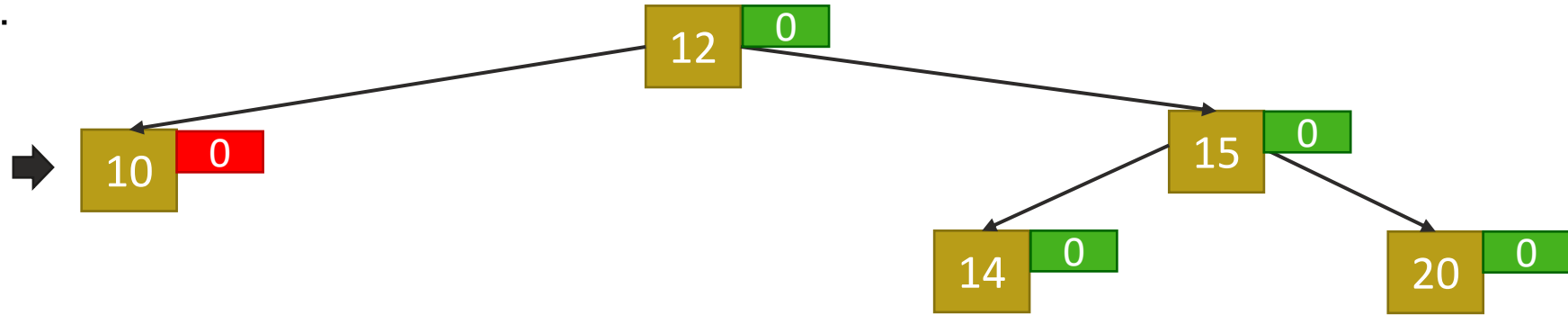
- 1



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

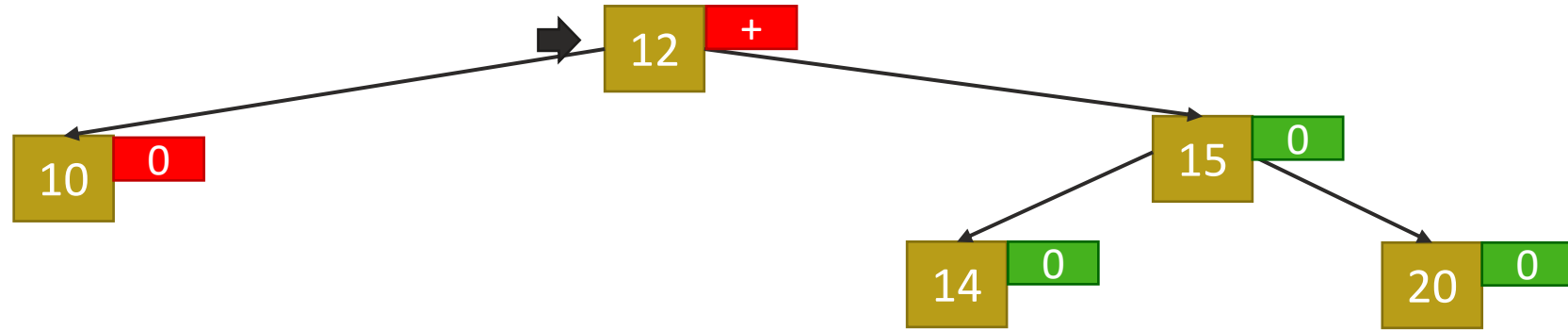
- Számoljuk újra ...



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

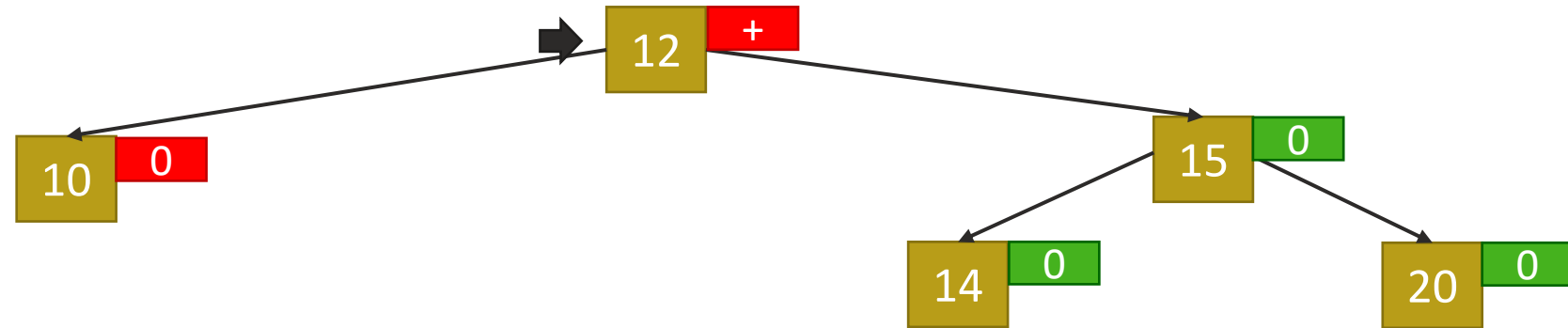
- Számoljuk újra ...



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

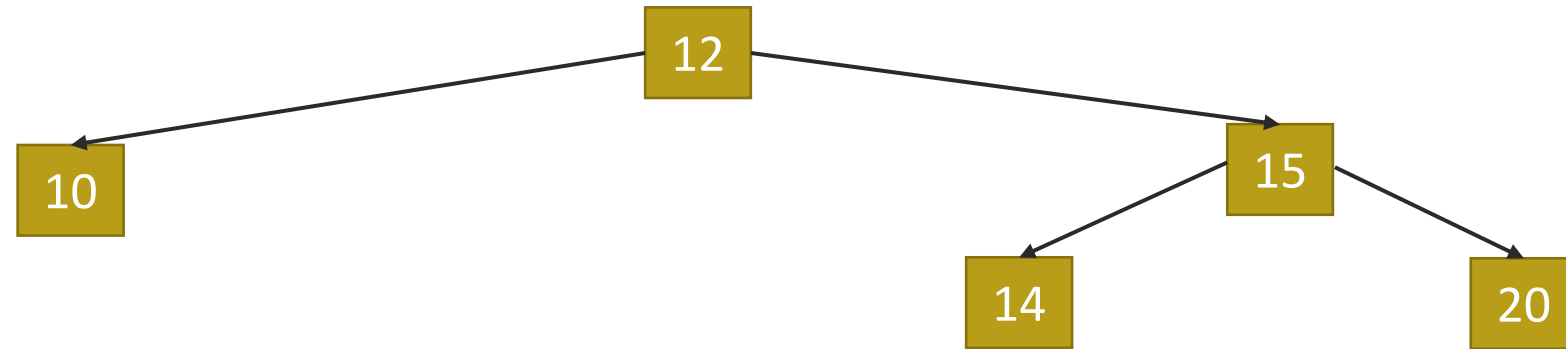
- Elértük a gyökeret



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljük ki elemeket

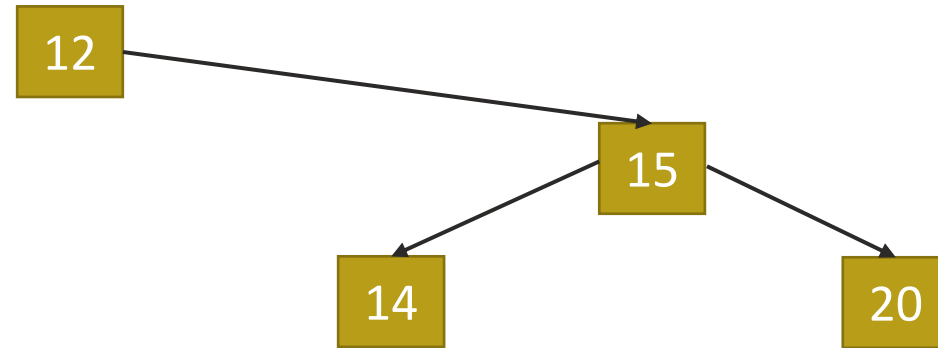
- 10



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

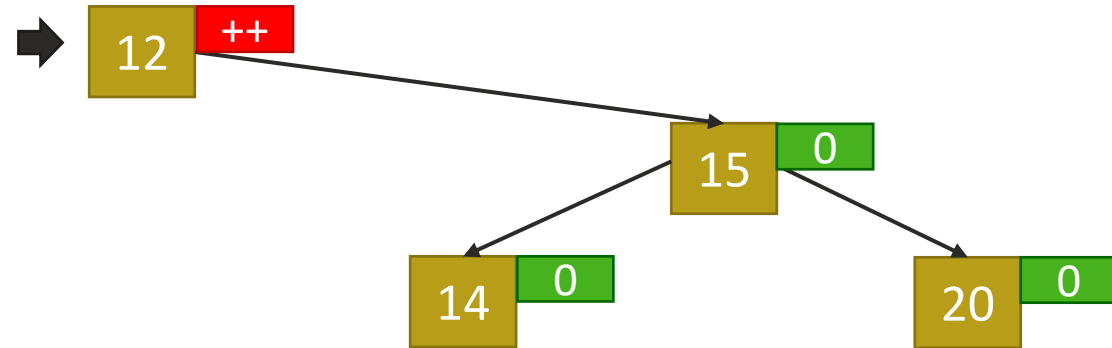
- 10



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

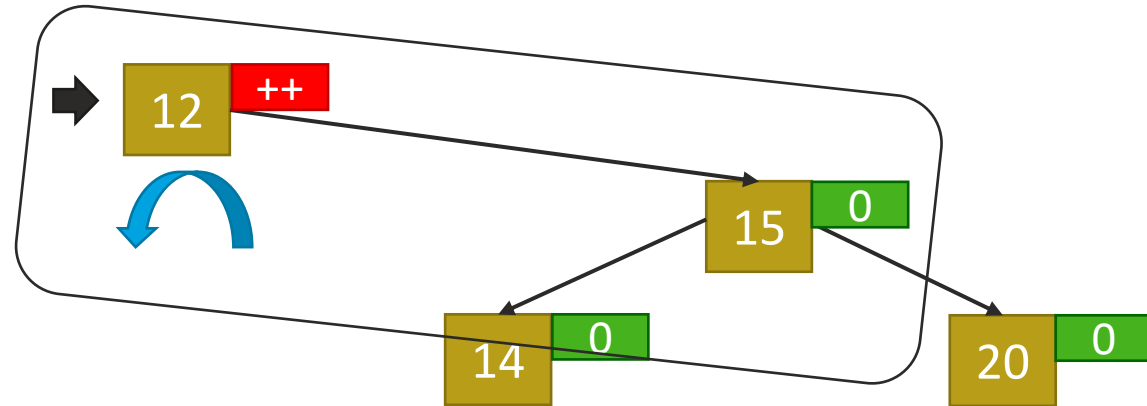
- Számoljuk újra ...



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

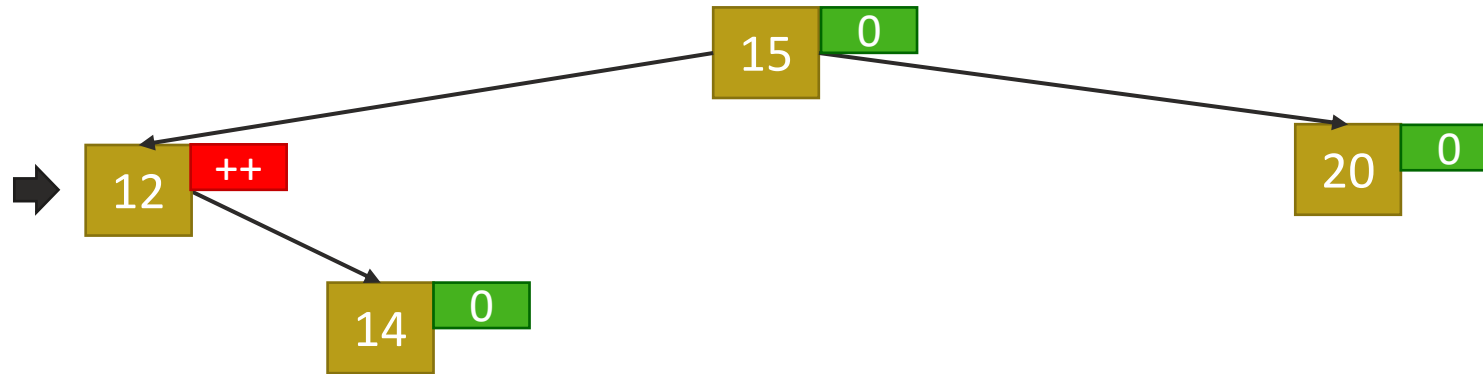
- $(++,0)$



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

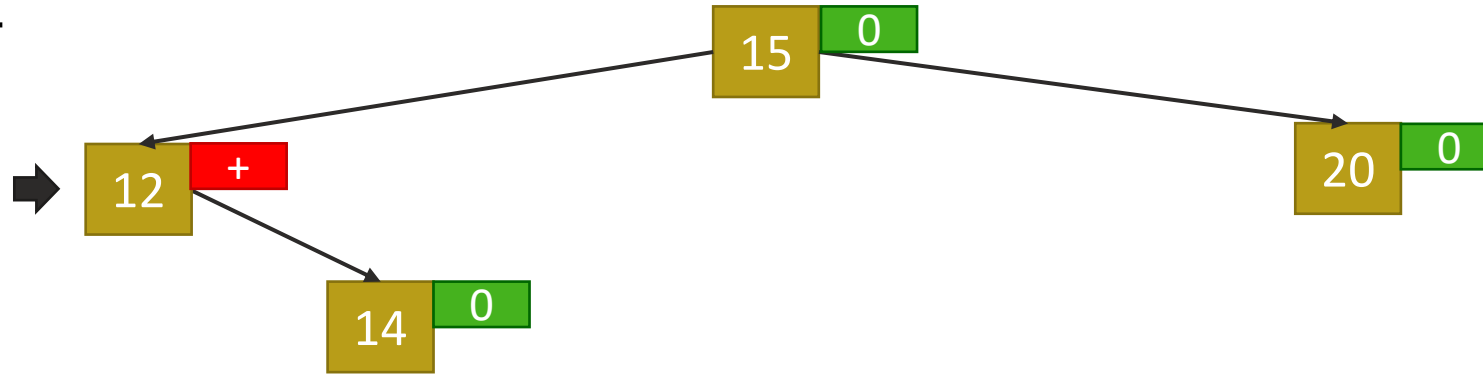
- $(++,0)$



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

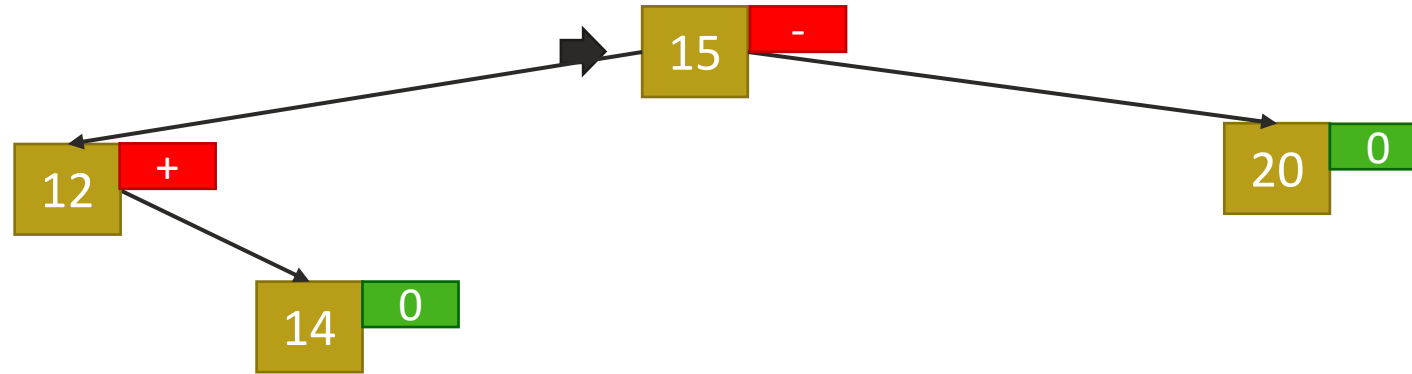
- Számoljuk újra ...



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

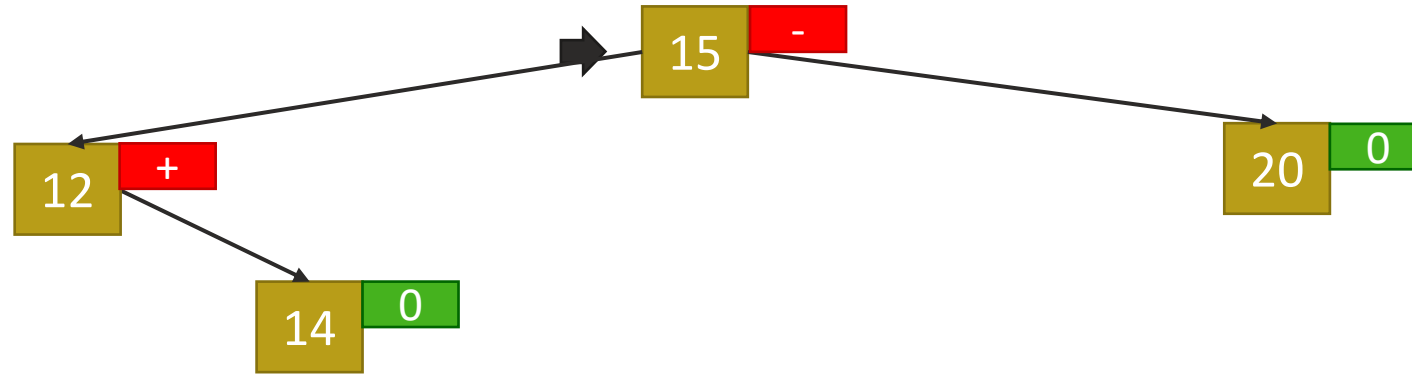
- Számoljuk újra ...



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

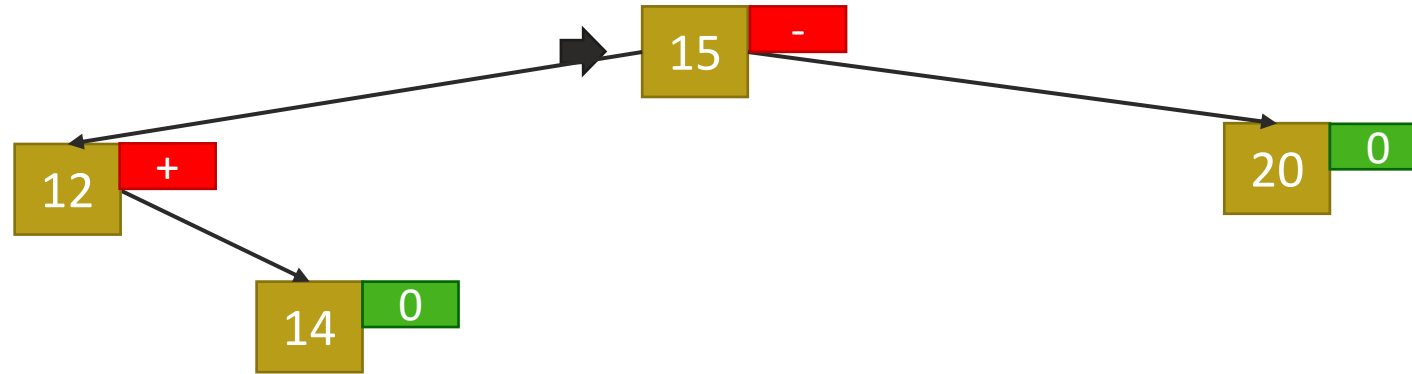
- Számoljuk újra ...



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

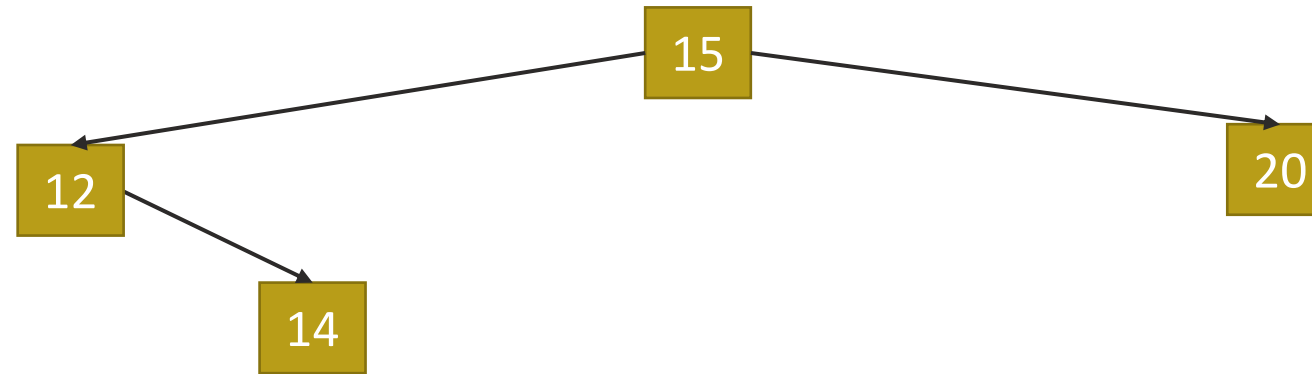
- Elértük a gyökeret



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

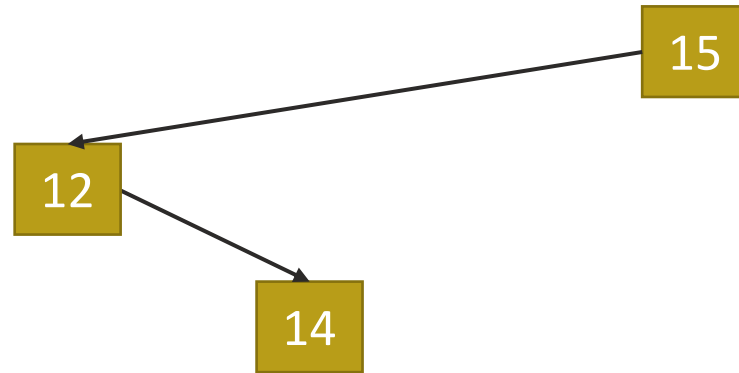
- 20



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljük ki elemeket

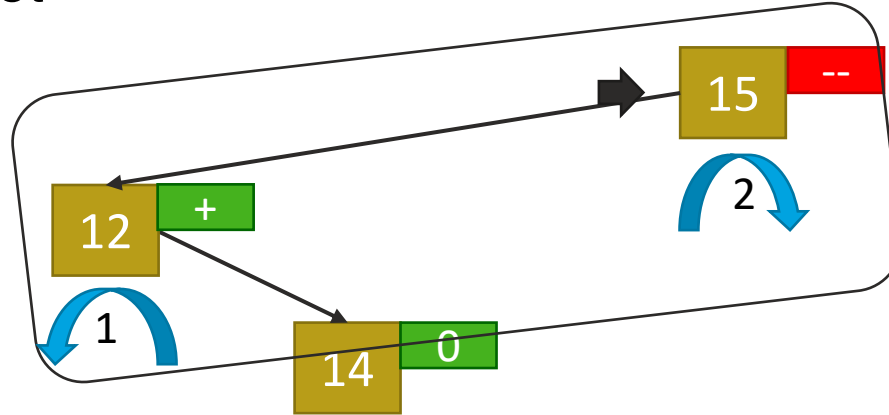
- 20



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

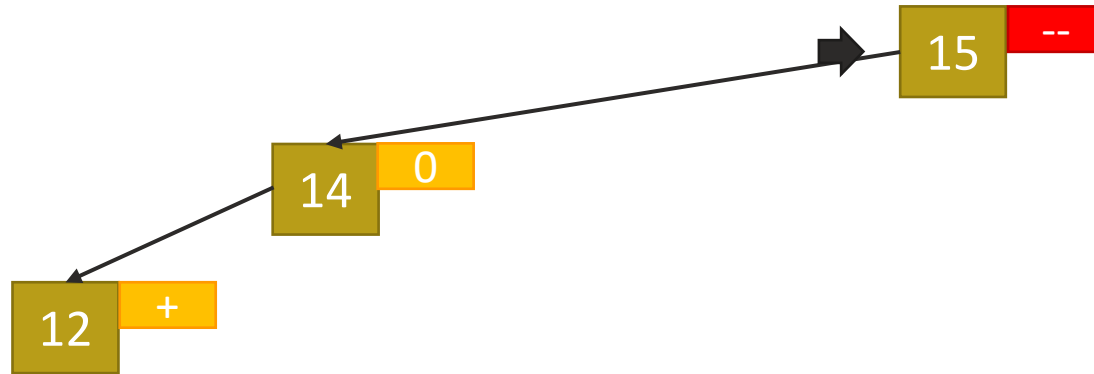
- (--, +)



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

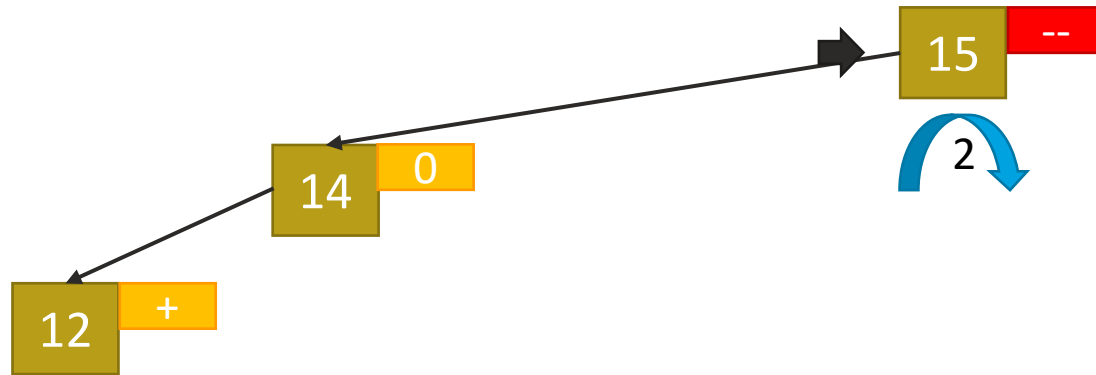
- (--, +)



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

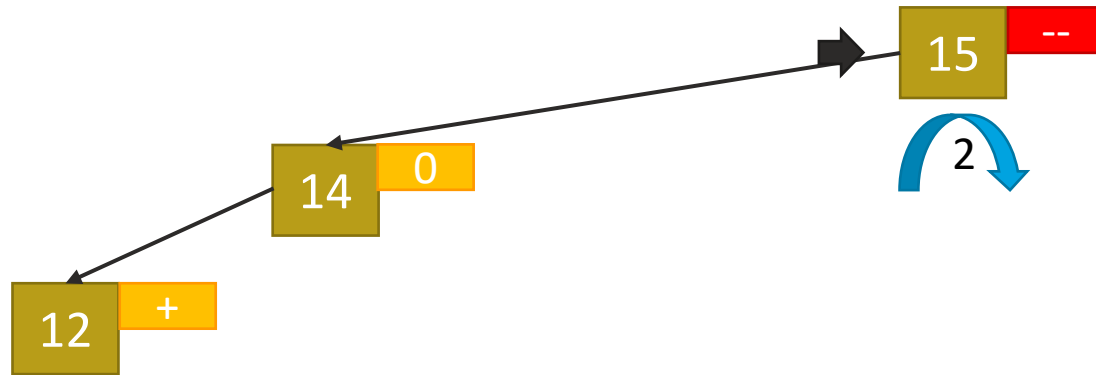
- (--, +)



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

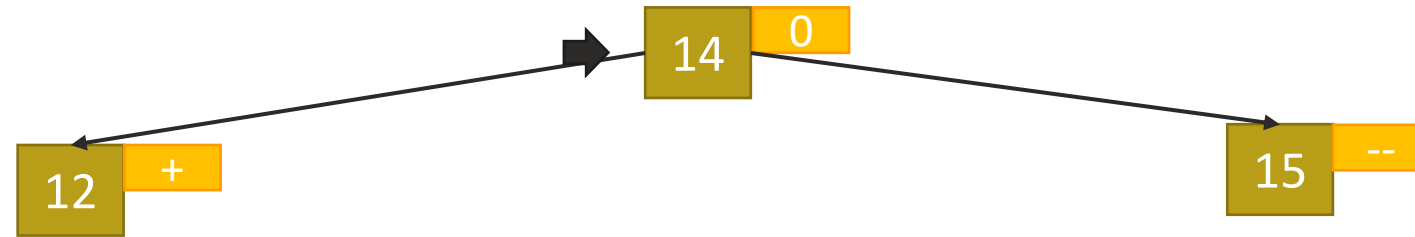
- (--, +)



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Töröljünk ki elemeket

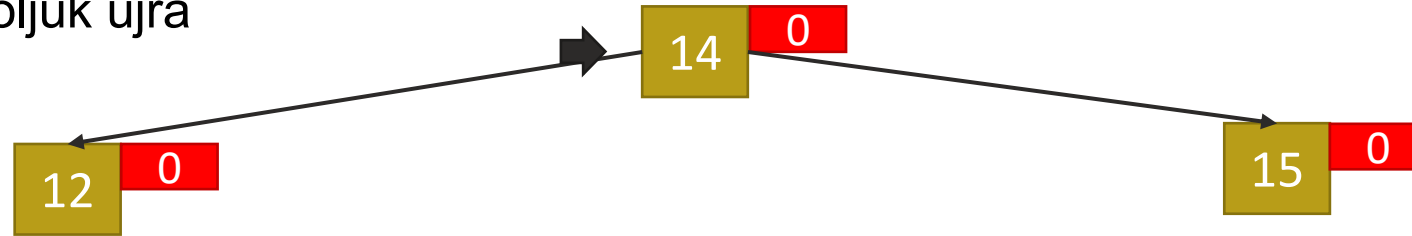
- (--,+)



• AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

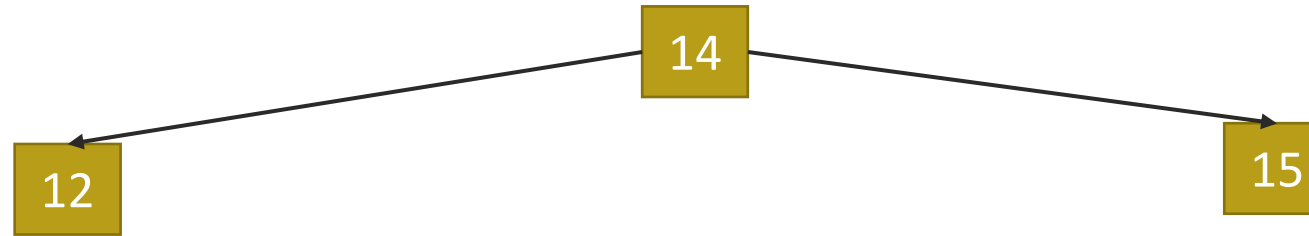
Töröljünk ki elemeket

- Forgatás után számoljuk újra



- AVL fa – Törlés utáni kiegyensúlyozás

Innentől triviális ...



Vegyük észre, hogy itt nem volt elegendő egy (dupla) forgatás.

Itt már előfordult a $(++,0)$ vagy $(--,0)$ eset is.

Piros-fekete fa

Következő téma