ADATSZERKEZETEK ÉS ALGORITMUSOK

Hierarchikus adatszerkezetek

Hierarchikus adatszerkezetek

- A hierarchikus adatszerkezet olyan $\langle A, R \rangle$ rendezett pár, amelynél van egy kitüntetett r elem, ez a **gyökérelem**, úgy, hogy:
  1. r nem lehet végpont
     $\forall a \in A$ esetén $\neg R(a, r)$
  2. $\forall a \in \{A \backslash \{r\}\}$ elem egyszer és csak egyszer lehet végpont, azaz $\forall a \in \{A \backslash \{r\}\}$-hez $\exists!\, b \neq a, b \in A$: $R(b, a)$
  3. $\forall a \in \{A \backslash \{r\}\}$ elem r-ből elérhető, azaz
     $$\exists a_1, a_2, \dots, a_n \in A, a_n = a: \\ R(r, a_1), R(a_1, a_2), \dots, R(a_{n-1}, a_n))$$
- A hierarchikus adatszerkezetek bizonyos értelemben a lista általánosításai

Hierarchikus adatszerkezetek

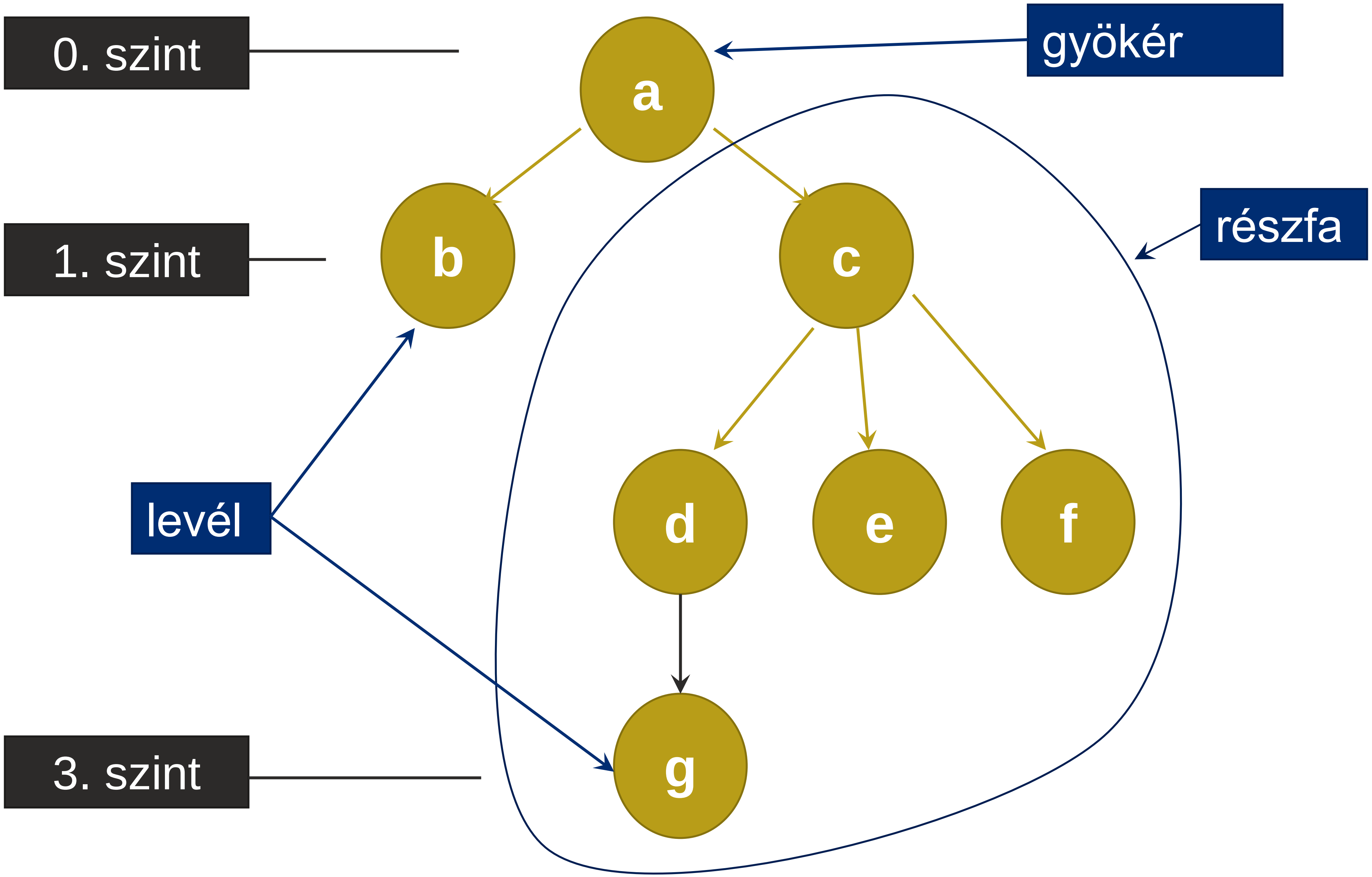
- Egy elemnek akárhány rákövetkezője lehet, de minden elemnek csak egyetlen megelőző eleme van, azaz az adatelemek között egy-sok jellegű kapcsolat áll fenn
- Minden adatelem csak egy helyről érhető el, de egy adott elemből tetszés szerinti számú adatelem látható
  - Például
    - Fa
    - összetett lista
    - B-fa

Fák

- A fa egy hierarchikus adatszerkezet, mely véges számú csomópontból áll, és igazak a következők:
  - Két csomópont között a kapcsolat egyirányú, az egyik a kezdőpont, a másik a végpont
  - Van a fának egy kitüntetett csomópontja, ami nem lehet végpont
    - Ez a fa gyökere
  - Az összes többi csomópont pontosan egyszer végpont

Fák

- A fa rekurzív definíciója:
  - A fa vagy üres, vagy
  - Van egy kitüntetett csomópontja, ez a gyökér.
  - A gyökérhez 0 vagy több diszjunkt fa kapcsolódik
    - Ezek a gyökérhez tartozó részfák
- A fával kapcsolatos algoritmusok gyakran rekurzívak


0. szint
1. szint
3. szint
gyökér
részfa
levél
a
b
c
d
e
f
g

Fák

- Az adatszerkezetben
  - A fa csúcsai az adatelemeknek felelnek meg,
  - Az élek az adatelemek egymás utáni sorrendjét határozzák meg – egy csomópontból az azt követőbe húzott vonal egy él
  - A gyökérelem a fa első eleme, amelynek nincs megelőzője
  - Levélelem a fa azon eleme, amelynek nincs rákövetkezője
  - Közbenső elem az összes többi adatelem

Fák

- Az adatszerkezetben
  - Minden közbenső elem egy részfa gyökereként tekinthető, így a fa részfákra bontható:
    - részfa: „t” részfája "a" -nak, ha
      - "a" a gyökere, azaz közvetlen megelőző eleme „t”-nek, vagy
      - „t” részfája "a" valamely részfájának
  - elágazásszám: közvetlen részfák száma
  - a fa szintje a gyökértől való távolságot mutatja.
    - A gyökérelem a 0. szinten van.
    - A gyökérelem rákövetkezői az 1. szinten. stb.
  - a fa szintjeinek száma a fa magassága

Fák

- További definíciók:
  - Csomópont foka: a csomóponthoz kapcsolt részfák száma
  - Fa foka: a fában található legnagyobb fokszám
  - Levél: 0 fokú csomópont
  - Elágazás (közbenső v. átmenő csomópont): > 0 fokú csomópont
  - Szülő (ős): kapcsolat kezdőpontja
    - csak a levelek nem szülők
  - Gyerek (leszármazott): kapcsolat végpontja
    - csak a gyökér nem gyerek
    - ugyanazon csomópont leszármazottai egymásnak testvérei

Fák

- További definíciók
  - Szintszám: gyökértől mért távolság.
    - A gyökér szintszáma 0.
    - Ha egy csomópont szintszáma n, akkor a hozzá kapcsolódó csomópontok szintszáma $n + 1$.
  - Útvonal: az egymást követő élek sorozata
    - Minden levélelem a gyökértől pontosan egy úton érhető el.
  - Ág: az az útvonal, amely levélben végződik
  - Üresfa az a fa, amelyiknek egyetlen eleme sincs. (Ω)
  - Fa magassága: a levelekhez vezető utak közül a leghosszabb
    - Mindig eggyel nagyobb, mint a legnagyobb szintszám

Fák

- További definíciók:
  - Minimális magasságú az a fa, amelynek a magassága az adott elemszám esetén a lehető legkisebb.
    - Valójában ilyenkor minden szintre a maximális elemszámú elemet építjük be.
  - Egy fát kiegyensúlyozottnak nevezünk, ha csomópontjai azonos fokúak, és minden szintjén az egyes részfák magassága nem ingadozik többet egy szintnél.
  - Rendezett fa: ha az egy szülőhöz tartozó részfák sorrendje lényeges, azok rendezettek.

Feladat

- Maximum hány csomópont helyezhető el egy f fokú, m szintet tartalmazó fában?

$$1 + f + f^2 + f^3 + \cdots$$

$$\frac{(f^{m+1} - 1)}{(f - 1)}$$

Fák műveletei

- Lekérdező
  - Üres_e – logikai értéket ad vissza
  - Gyökérelem – visszaadja a gyökér adatelemet
  - Keres(e) – adott e adatelemet keres, egy ilyen elem mutatóját adja vissza

Fák műveletei

- Módosító
  - Üres
    - létrehoz egy üres fát
  - Beszúr(e)
    - adott e adatelemet beszúr
  - MódosítGyökér(e)
    - adott e adatelem lesz a gyökér
  - Töröl(e)
    - törli az e adatelemet
      - egy előfordulást
      - összes előfordulást
  - TörölFa
    - törli az összes elemet

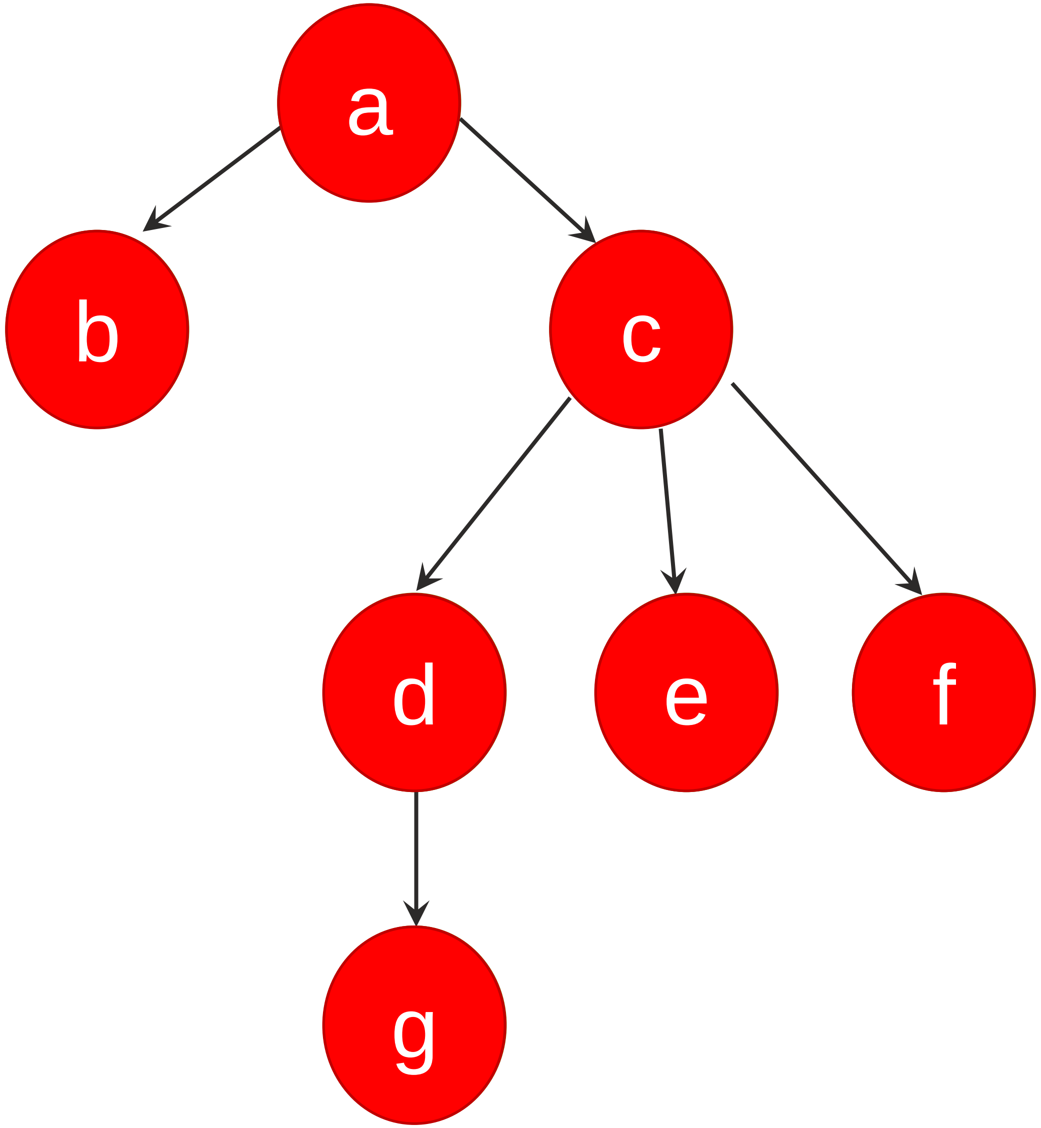
Fák műveletei

- Fák bejárása
  - A fa csomópontjaiban általában adatokat tárolunk. Ezeket valamilyen sorrendben szeretnénk egymás után elérni.
- Általános fa esetén a bejárási stratégiák
  - Gyökérkezdő (preorder)
    - gyökér, majd a részfák bejárása sorban
      - például balról jobbra
  - Gyökérvégző (postorder)
    - részfák bejárása sorban, majd a gyökér

Preorder bejárás

Gyökér, majd a részfák bejárása sorban (balról jobbra)

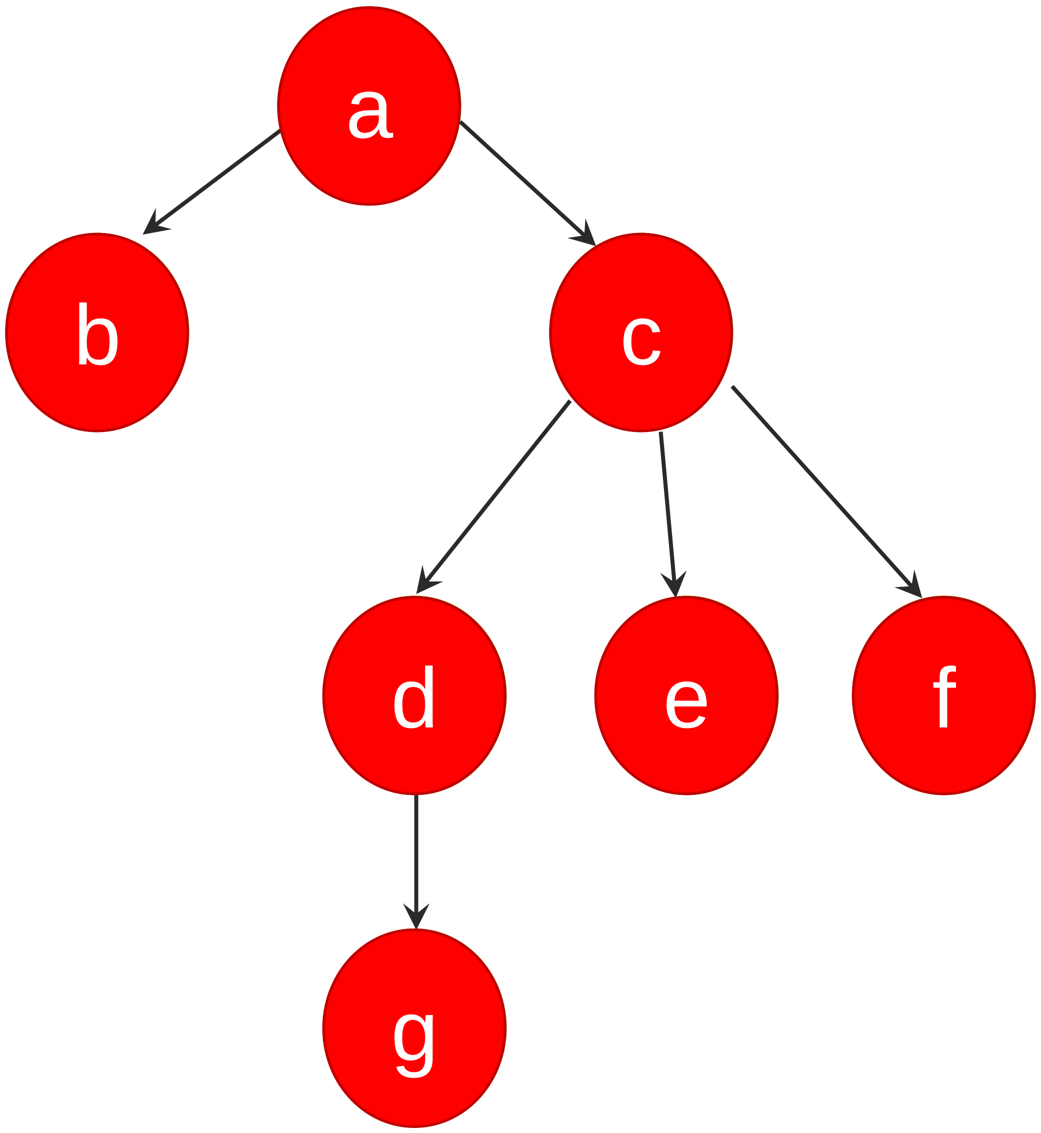
a b c d g e f



Postorder bejárás

Részfák bejárása sorban, majd a gyökér

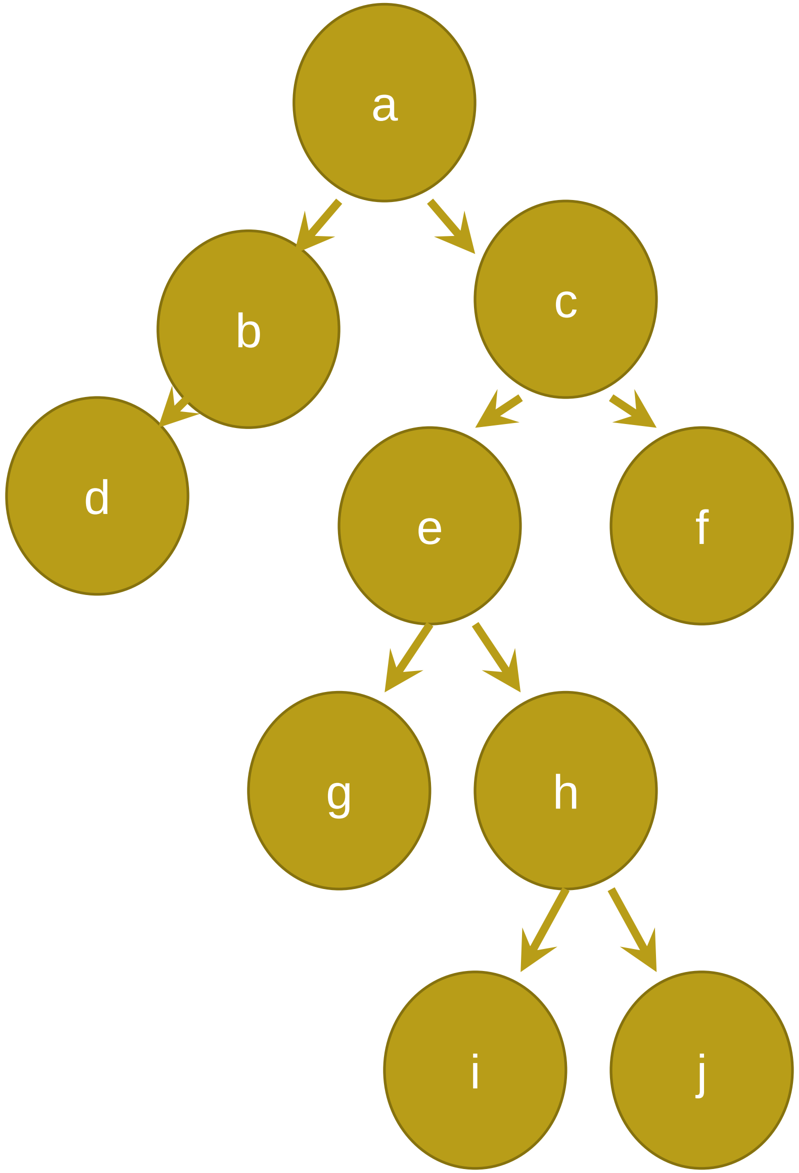
b g d e f c a



Bináris fák

- A bináris fa olyan fa, amelynek csúcspontjaiból ***maximum*** 2 részfa nyílik
  - Azaz fokszáma 2
- A szülő mindig a gyerekek között helyezkedik el
  - Van értelme a „gyökérközepű” (inorder) bejárásnak

Bináris fa



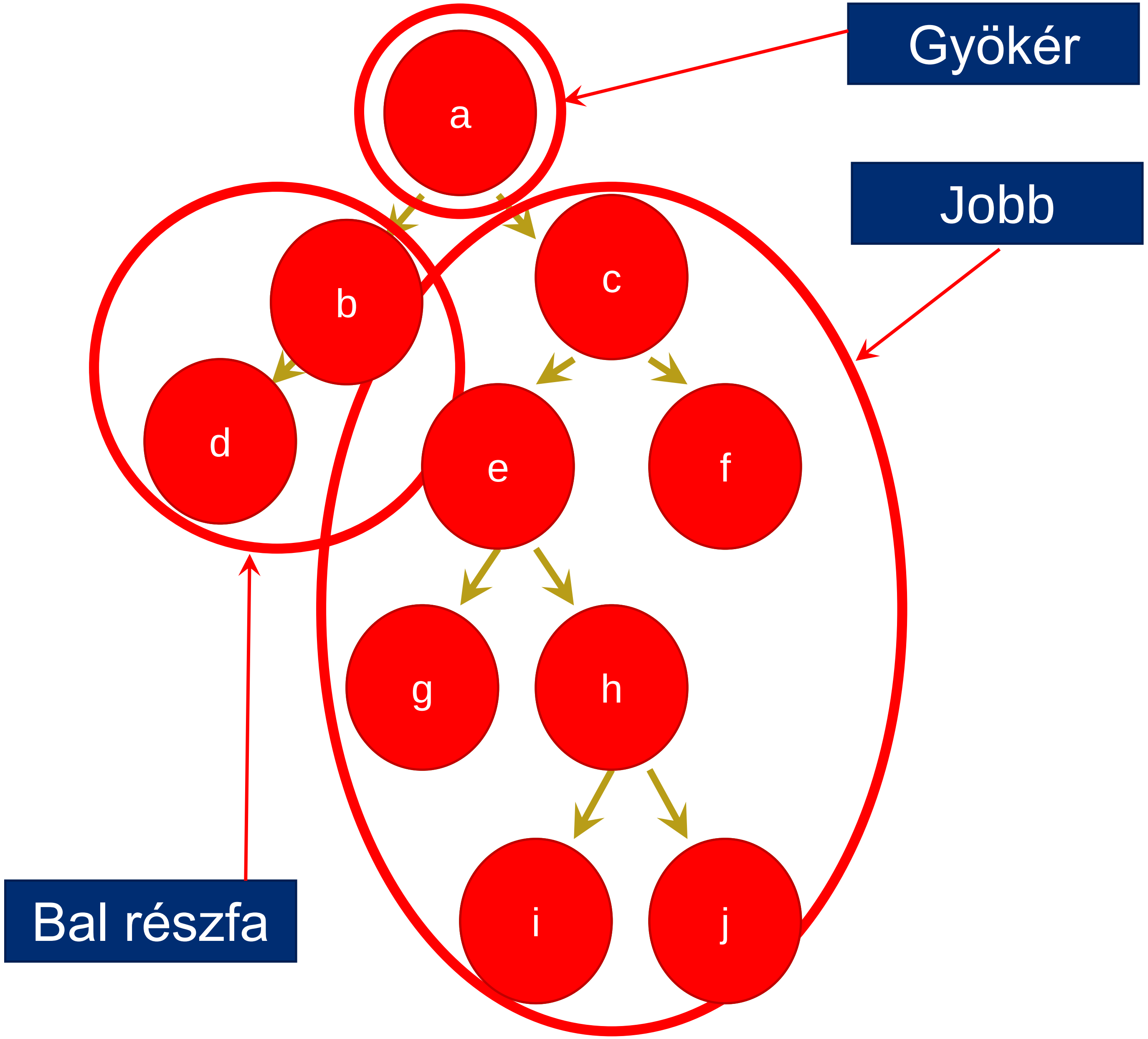
Bináris fák bejárása

- A bejárási stratégiák
  - Gyökérkezdő (preorder)
    - gyökér, bal részfa, jobb részfa
  - Gyökérközepű (inorder)
    - bal részfa, gyökér, jobb részfa
  - Gyökérvégző (postorder)
    - bal részfa, jobb részfa, gyökér

Preorder

Gyökér,
Bal részfa,
Jobb részfa

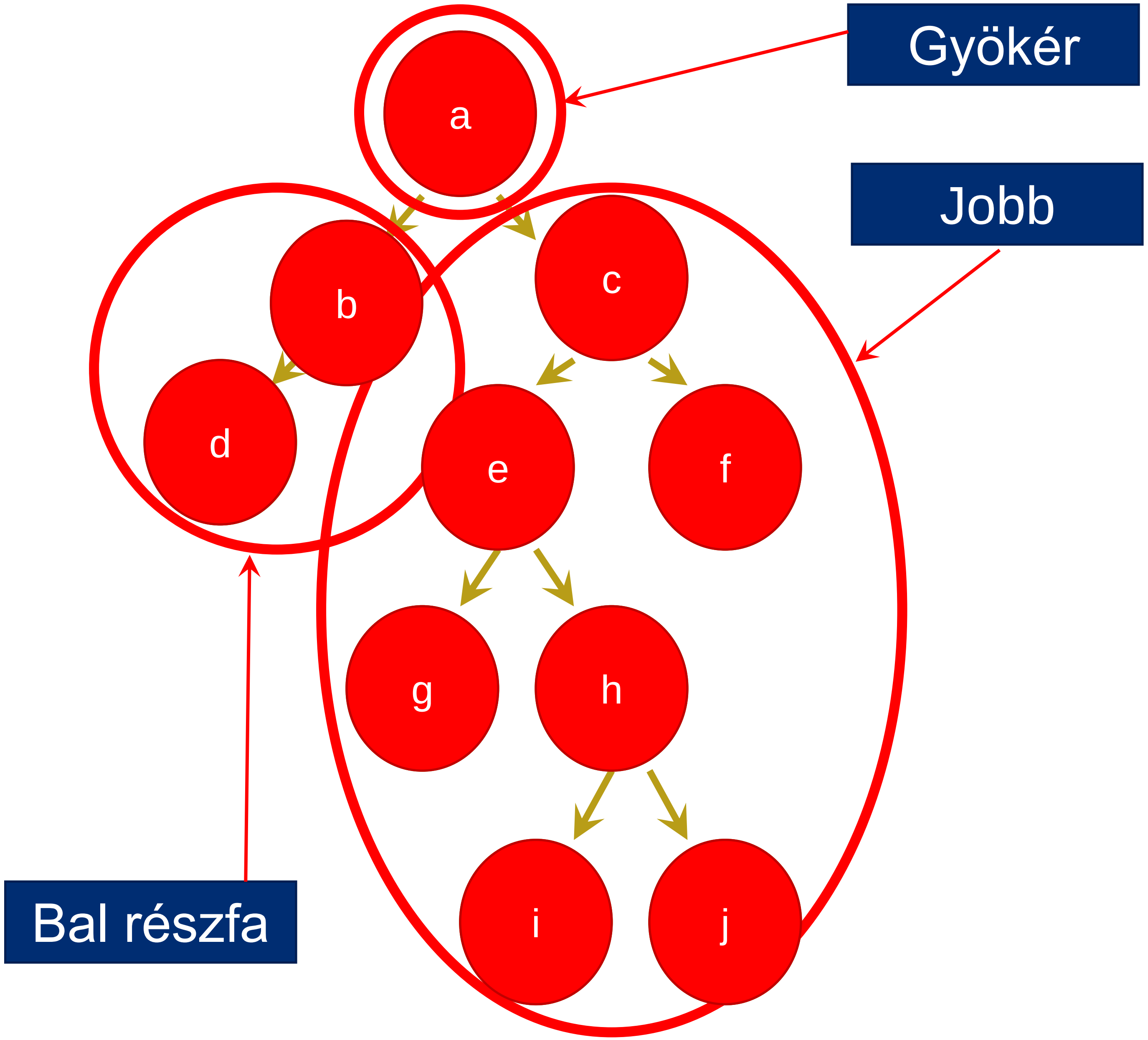
a b d c e g h i j f



Inorder

Bal részfa,
Gyökér,
Jobb részfa

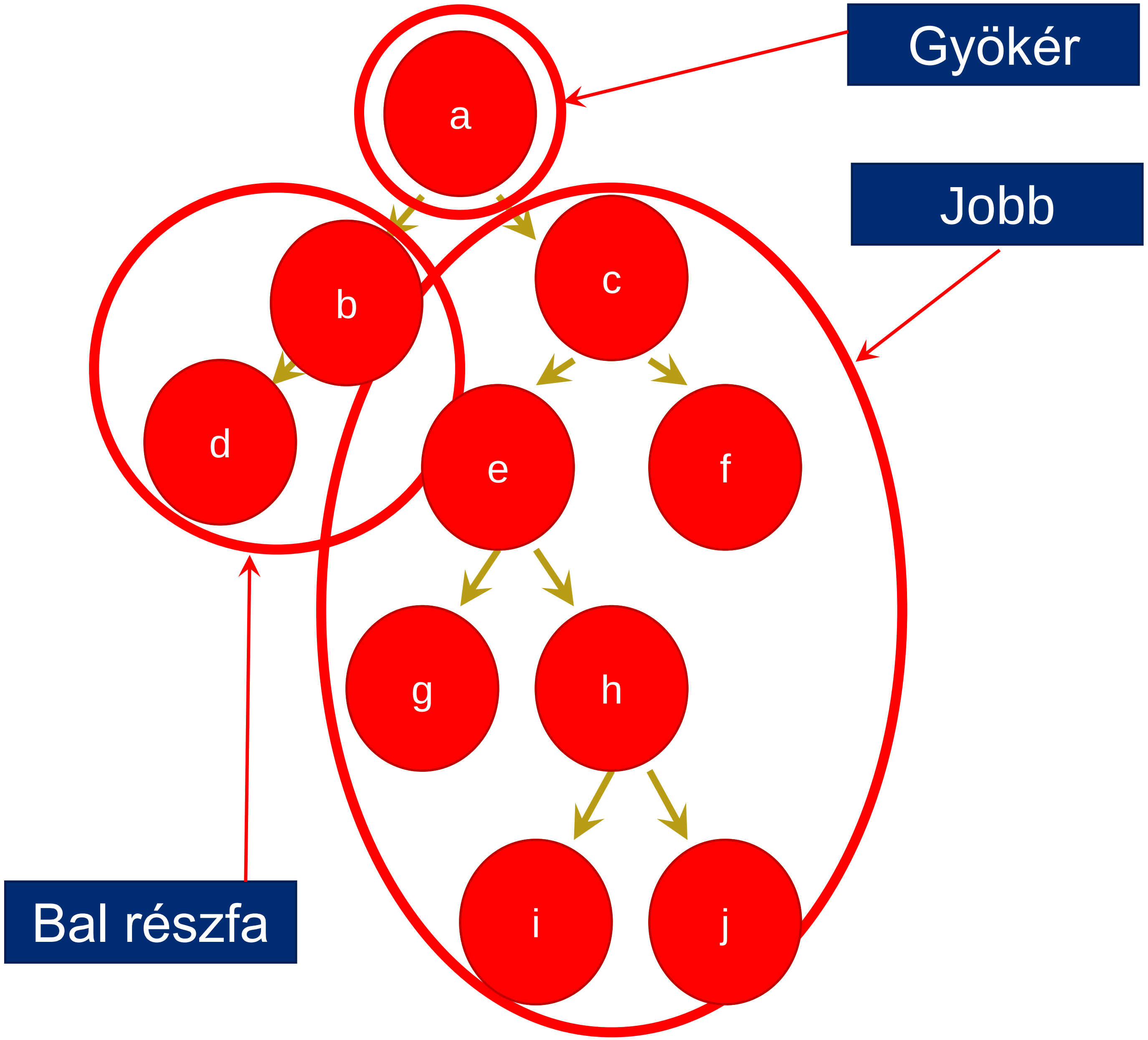
d b a g e i h j c f



Postorder

Bal részfa,
Jobb részfa,
Gyökér

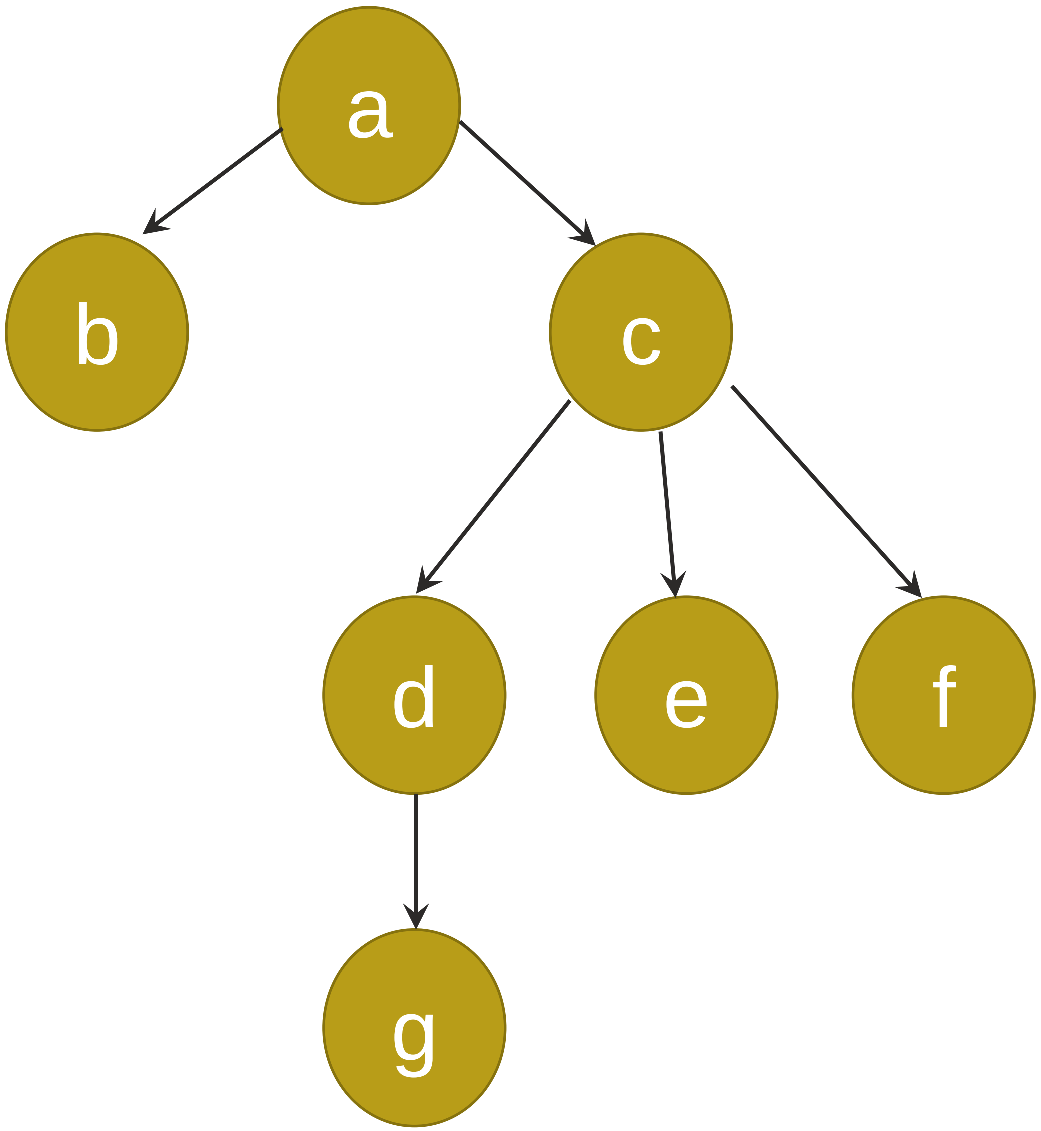
d b g i j h e f c a



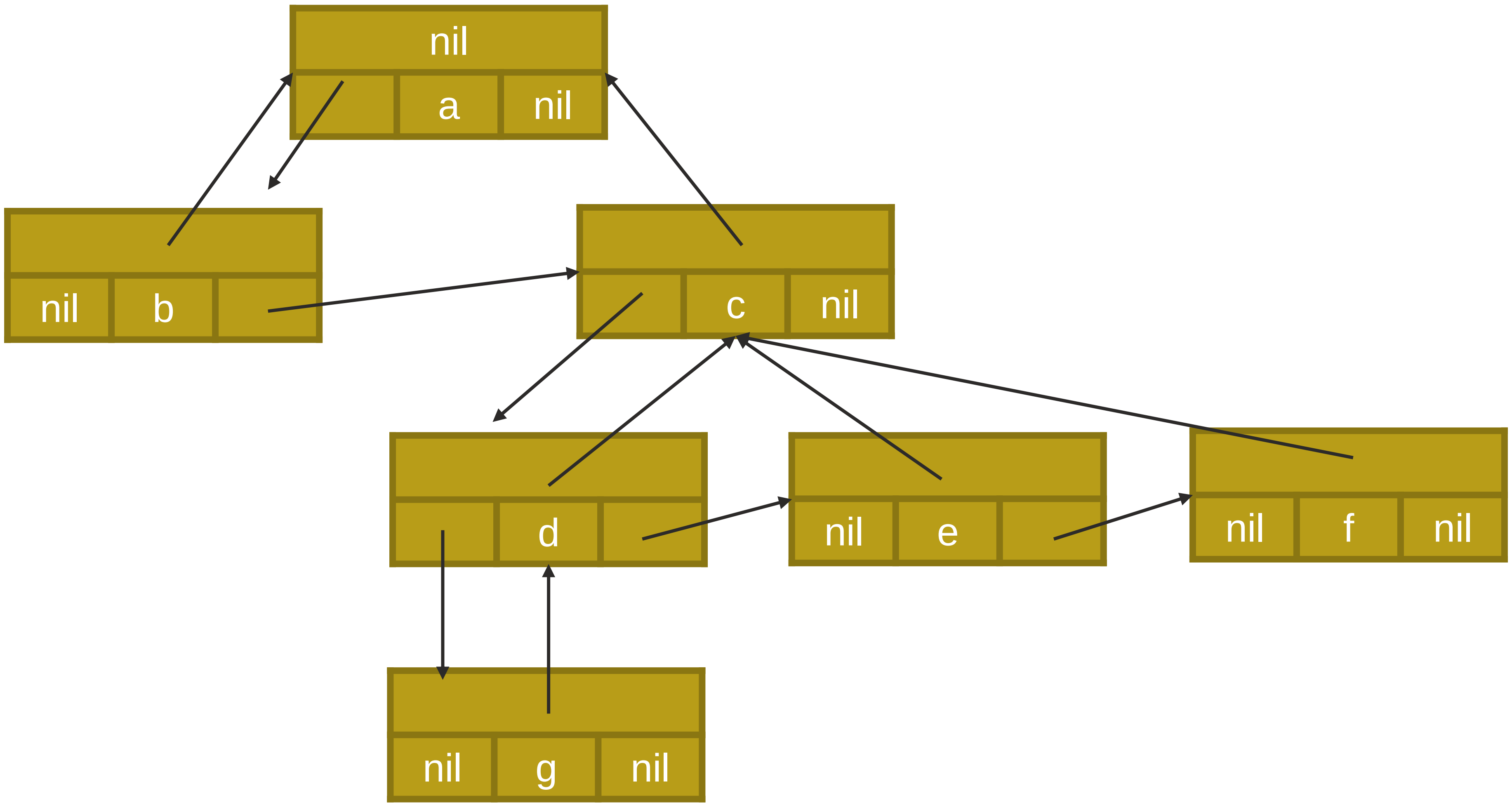
Reprezentáció

- Általános fa esetén
  - „bal-gyermek, jobb-testvér”
  - Minden csomóponthoz tartozik három mutató
    - bal-gyermek – a csúcs gyermekei közül a bal szélsőre mutat
    - jobb-testvér – a csúcsnak arra a testvérére mutat, amelyik közvetlenül jobbra mellette található (azonos szinten ugyanahhoz az őshöz tartozó következő szomszédos elemre)
    - szülő

Általános fa



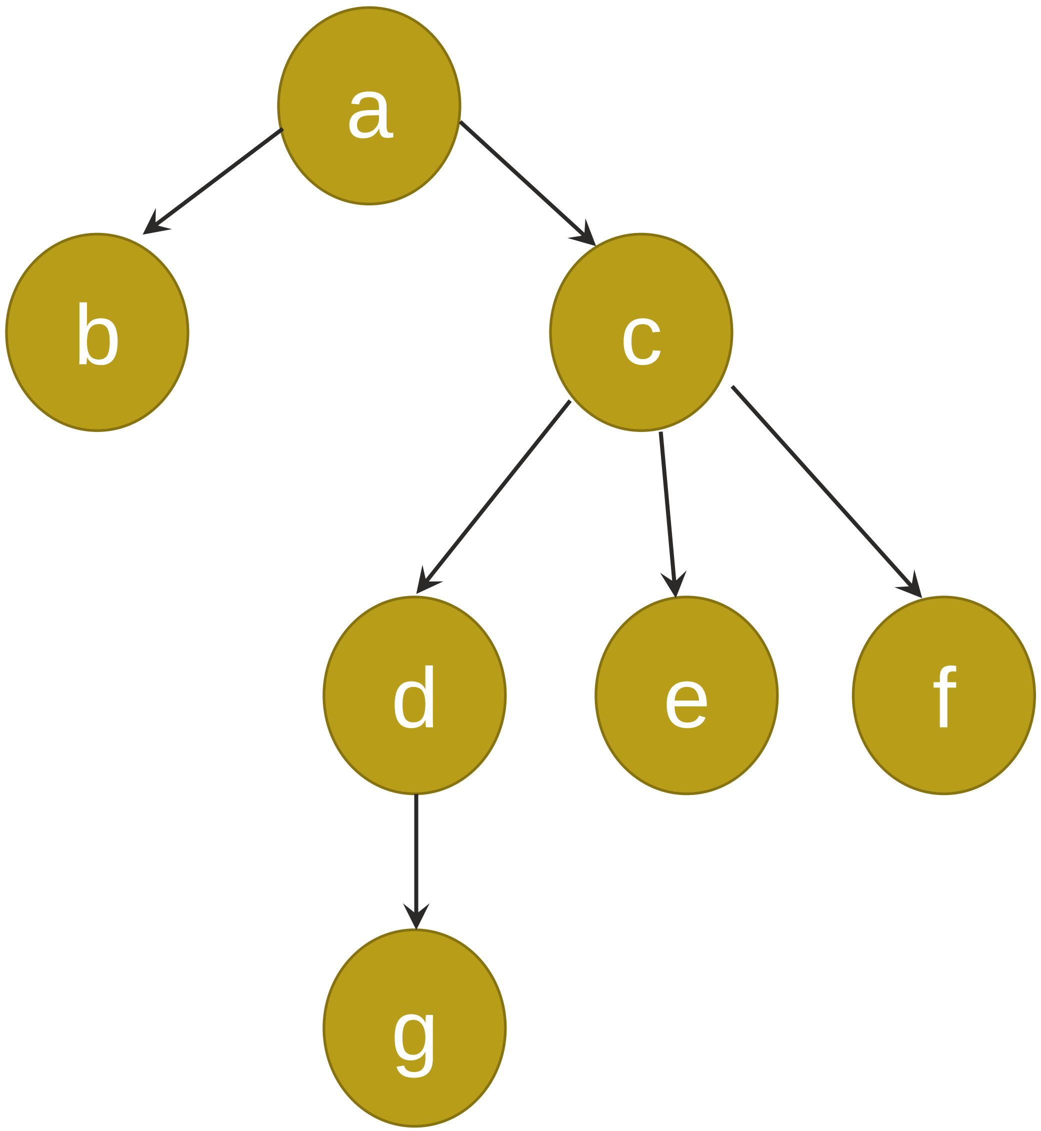
Bal-gyermek, jobb-testvér



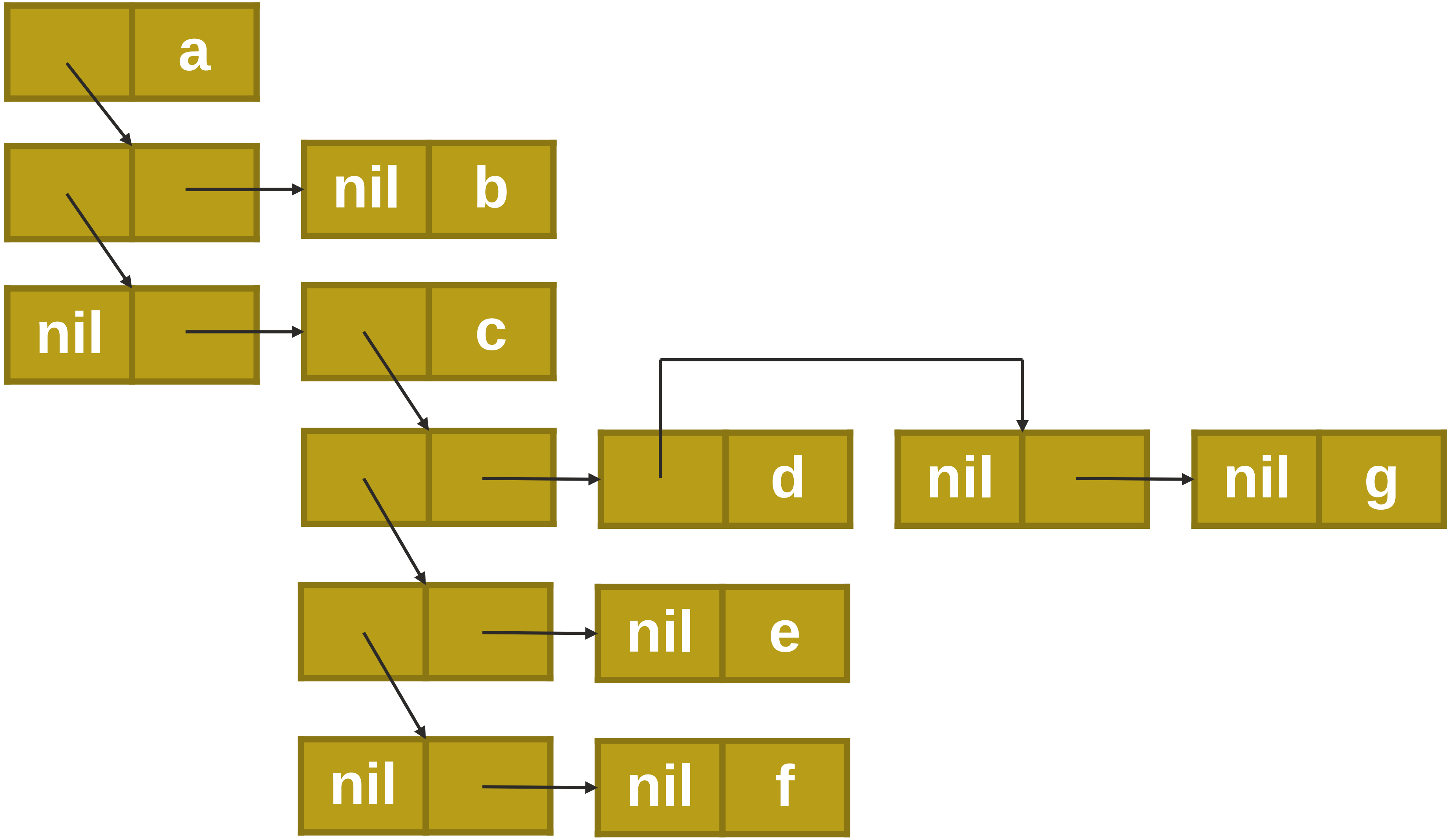
Reprezentáció

- Általános fa esetén például multilista:
  - Minden csomóponthoz tartozik egy lineáris lista, amelynek első eleme az adat, a többi a kapcsolatok listája
  - Annyi kapcsolati elem, ahány fokú a csomópont.
  - A kapcsolatok újabb csomópontokra, illetve lineáris listákra mutatnak.

Általános fa



Multilista



Reprezentáció

- Korlátos általános fa esetén további lehetőség
  - Aritmetikai ábrázolás
  - Láncolt, ahol minden csomópontnak van pontosan k db mutatója a maximum k gyerekre

Bináris fa

Következő téma