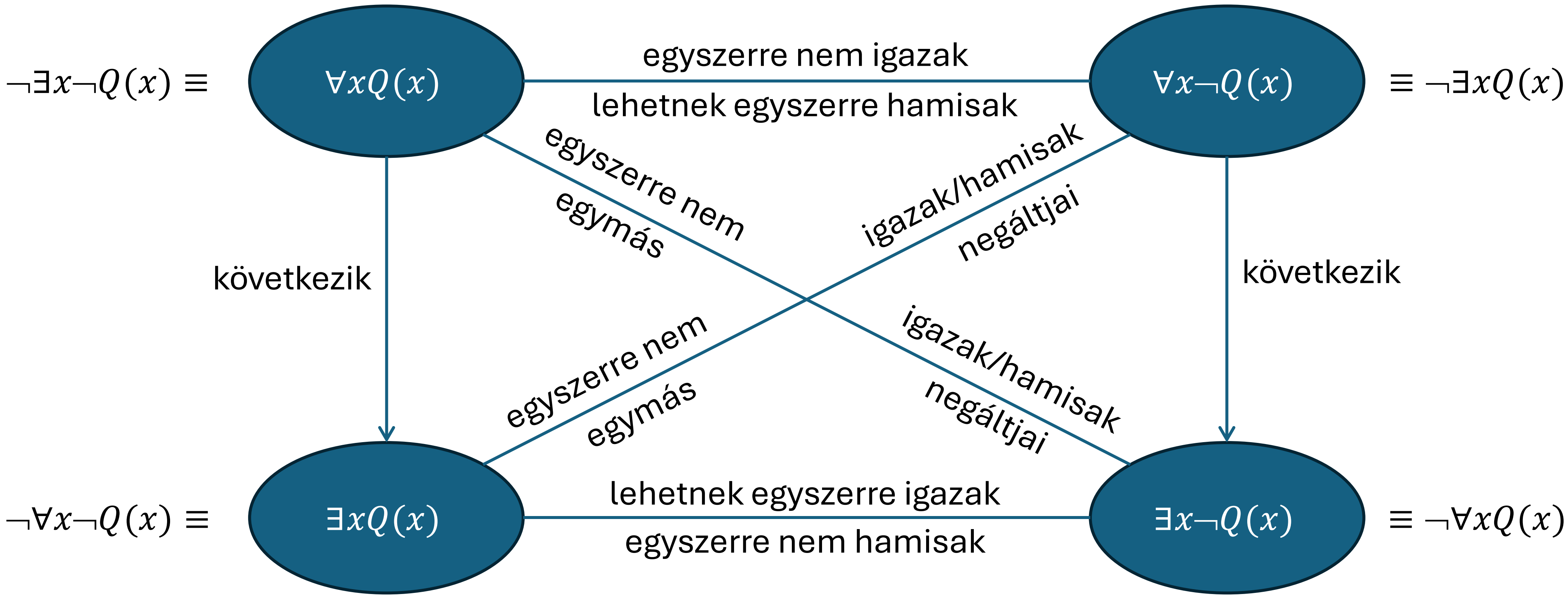
LA-DM II előadás

2024.04.03.

Lászlóffy András

Igazságértékek



Formalizáció példa

$P(x)$: x fénylik

$Q(x)$: x aranyból van

- Móricka: Nézd! Találtam egy érmét, nagyon szépen fénylik. Biztos aranyból van.

$$P(a) \to Q(a)$$

- Pistike: Nem minden arany, ami fénylik.

$$\neg \forall x (P(x) \to Q(x))$$

- M: Azt mondod, hogy nem arany ez az érme?

$$\neg P(a)$$

- P: Nem, csak hogy van olyan érme, ami fénylik, de nem aranyból van.

$$\exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$$

$$\equiv$$

Ekvivalens formulák – nulladrend

Def: Minden interpretációban megegyezik az igazságértékük

0.) $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ ($\leftrightarrow$ kiküszöbölése)

1. $A \rightarrow B = \neg A \vee B$ ($\rightarrow$ kiküszöbölése)

2. $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$ ($\neg$ hatáskörének redukálása)

3. $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$ ($\neg$ hatáskörének redukálása)

4. $\neg\neg A = A$ ($\neg$ hatáskörének redukálása)

5. $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (klózok konjunkciójának létrehozása)

Ekvivalens formulák – nulladrend

$A \vee F = A$

$A \wedge T = A$

$A \vee T = T$

$A \wedge F = F$

$A \vee \neg A = T$

$A \wedge \neg A = F$

$\neg(\neg A) = A$ kettős tagadás

$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$ deMorgan

$A \wedge (A \vee B) = A$

$A \vee (A \wedge B) = A$ abszorpció, elnyelés

$A \wedge A = A$

$A \vee A = A$idempotencia

$\Longrightarrow$

$A(x) \vee F = A(x)$

$A(x, f(x), a) \wedge T = A(x, f(x), a)$

stb.

Ekvivalens formulák – elsőrend

$Qx\, A(x) \vee B = Qx\, (A(x) \vee B)$ Q: $\forall$ vagy $\exists$

$Qx\, A(x) \wedge B = Qx\, (A(x) \wedge B)$

$\neg(\forall x\, A(x)) = \exists x\, \neg A(x)$ (De Morgan)

$\neg(\exists x\, A(x)) = \forall x\, \neg A(x)$ (De Morgan)

$\forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x) = \forall x\, (A(x) \wedge B(x))$

$\exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x) = \exists x\, (A(x) \vee B(x))$

Ún. standardizálás: átnevezés – cél: kiemelni a kvantort:

15. $Qx\, A(x) \vee Qx\, B(x) = Qx\, A(x) \vee Qy B(y) = Qx\, Qy\, (A(x) \vee B(y))$
    $Qx\, A(x) \wedge Qx\, B(x) = Qx\, Qy\, (A(x) \wedge B(y))$

$\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \neq \forall x\, (A(x) \vee B(x))$!!

$\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) = \forall x\, A(x) \vee \forall y\, B(y) = \forall x\, \forall y\, (A(x) \vee B(y))$

$\exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x) \neq \exists x\, (A(x) \wedge B(x))$!!

$\exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x) = \exists x\, A(x) \wedge \exists y\, B(y) = \exists x\, \exists y\, (A(x) \wedge B(y))$

TÉTELBIZONYÍTÁS REZOLÚCIÓVAL

α logikai következménye a β

$\alpha \models \beta$

2022. 02. 27.

$\alpha \rightarrow \beta$

TAUTOLÓGIA

$\alpha \wedge \neg \beta$

KONTRADIKCIÓ

REZOLÚCIÓ:
SNF
KLÓZHALMAZ
UNIFIKÁCIÓ
REZOLVÁLÁS
NIL

A rezolúció:
- **helyes:** rezolvensek valóban következmények
- **teljes:** ha a formula kontradikció, akkor levezethető az □.

Rezolúcióhoz szükséges helyes következtetések,
HA MINDEN INDIVIDUUM VÁLTOZÓ (x,y,z) UNIVERZÁLISAN KVANTÁLT

a, b konstansok

$$\frac{\neg\neg P(x)}{P(x)}$$ —— Ezt értjük ☺

$$\frac{P(x) \vee Q(x) \;,\; \neg P(a)}{Q(a)}$$ —— Ha x-et helyettesítjük a-val, rezolválhatunk – általánosabban ld. később

$$\frac{P(x) \vee Q(y) \;,\; \neg Q(x) \vee R(z)}{??\; P(x) \vee R(x) \;??}$$ —— Itt y,z-t helyettesítethetjük x-szel, kapjuk:

$$\frac{P(x) \vee Q(x) \;,\; \neg Q(x) \vee R(x)}{P(x) \vee R(x)}$$

$$\frac{P(x) \vee Q(a) \;,\; \neg Q(b) \vee R(x)}{????????}$$

DE: ha a≠b, akkor NEM tudunk rezolválni!! KÉSŐBB: EGYSÉGESÍTŐ HELYETTESÍTÉS

TÉTELBIZONYÍTÁS ELSŐRENDŰ REZOLÚCIÓVAL

A_1: Van olyan páciens, aki minden doktorban megbízik.

A_2: A kuruzslókban egyetlen páciens sem bízik meg.

A_3: Egyetlen doktor sem kuruzsló.

F_1: $\exists x\ \forall y\ \{P(x) \wedge [D(y) \rightarrow M(x,y)]\} \Rightarrow P(a)$

F_2: $\forall x\ \{P(x) \rightarrow \forall y\ [K(y) \rightarrow \neg M(x, y)]\} = \forall x\ \forall y(\neg P(x) \vee \neg K(y) \vee \neg M(x, y))$

F_3: $\forall x\ [D(x) \rightarrow \neg K(x)]$

F_3 negáltja: $\neg\forall x\ [D(x) \rightarrow \neg K(x)] = \exists x\ \neg[\ D(x) \rightarrow \neg K(x)] =$
$\exists x\ \neg[\neg\ D(x) \vee \neg K(x)] = \exists x\ (\ D(x) \wedge K(x)]) \Rightarrow\ K_4: D(b) \wedge K(b)$

KLÓZ FORMA:

K_1: $P(a)$

K_2: $\neg D(y) \vee M(a, y)$

K_3: $\neg P(x) \vee \neg K(y) \vee \neg M(x, y)$

K_4: $\mathbf{D(\mathit{b})}$

K_5: $\mathbf{K(\mathit{b})}$

TÉTELBIZONYÍTÁS ELSŐRENDŰ REZOLÚCUIÓVAL