Hatványsorok

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$$

$(\sum a_n)$

hányados krit.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \gamma$$

konvergencia sugár: $\rho = \frac{1}{\gamma}$ $\nearrow$ $\gamma = 0, \rho = \infty$; $\rightarrow$ $\gamma = \infty, \rho = 0$

$$\Rightarrow \quad (x_0-\rho, x_0+\rho) \subset \underset{\text{konvergenciatartomány}}{\underbrace{K}} \subset [x_0-\rho, x_0+\rho]$$

+ végpontokat meg kell nézni kézzel/fejjel

gyökkrit.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = \gamma \quad \ldots\ldots$$

Ismétlés

hányados krit. miért "gyengített"

$$\underbrace{\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}_{\text{ez nem biztos, hogy létezik :(}} < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ konvergál}$$

Pl.

$a_0 > 0$

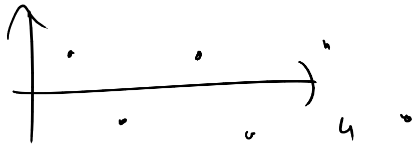
$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} a_{n-1} & n \text{ páros} \\ \frac{1}{3} a_{n-1} & n \text{ páratlan} \end{cases}$$

$\sum a_n$ mit csinál?

erősebb konvergencia <u>kell</u>, hiszen

"két végtelen sor kombinációja"

- (a_n) sorozat torlódási pontja x, ha tetszőleges környezetében végtelen sok a_n van

$a_n = (-1)^n$  $\rightarrow$ torlódási pontok $= \{-1, 1\}$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup\{\text{torlódási pontok}\}$$

$$\liminf a_n = \inf\{\text{torlódási pontok}\}$$

$\limsup (-1)^n = 1$

$\liminf (-1)^n = -1$

<u>Megj.</u>

- lim nem mindig $\exists$:(
- limsup, liminf mindig $\exists$:)

<u>Hányados kritérium (erős)</u>

$$\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ konvergál}$$

<u>Pl.</u>

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} a_{n-1} & n \text{ páros} \\ \frac{1}{3} a_{n-1} & n \text{ páratlan} \end{cases}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \begin{cases} \frac{1}{2} & n \text{ páratlan} \\ \frac{1}{3} & n \text{ páros} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{tényleg konvergál}$$

1.) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \rightarrow$ $x_0 = 0$

$c_n = 1$

hányadoskrit

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{1} \right| = \lim_{n\to\infty} |1| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

$$\Rightarrow \gamma = 1, \quad \rho = \frac{1}{\gamma} = 1 \Rightarrow (-1,1) \subset H \subset [-1,1]$$

$(x_0-\rho, x_0+\rho)$

$\rho = 1, x_0 = 0$

végpontok: $\underline{x = 1}$ $\qquad$ $\underline{x = -1}$

$\sum 1^n = \infty$ $\qquad$ $\sum (-1)^n$ sem konvergál $\Rightarrow H = (-1,1)$

divergencia teszt miatt

gyökkritérium

$$\lim \sqrt[n]{|c_n|} = \lim \sqrt[n]{|1|} = \lim \sqrt[n]{1} = \lim 1 = 1$$

Megj

- $\sqrt[n]{|c_n|} = \gamma \Rightarrow |c_n| \sim \gamma^n$ $\qquad$ mindkét esetben kb. mértani sor
- $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \gamma \Rightarrow |c_{n+1}| = \gamma |c_n| \Rightarrow |c_{n+1}| \sim \gamma^n$

mértani sor

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \boxed{\Leftrightarrow} |q| < 1 \rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{k} q^n = \frac{q^k - 1}{q-1}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{q^k-1}{q-1} \underset{|q|<1}{=}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \Leftrightarrow |x| < 1 \Rightarrow H = (-1,1)$$

2.) $\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^n \rightarrow x_0 = 0$

$c_n = n!$

<u>hányados krit.</u>

$$\lim \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim \frac{(n+1)!}{n!} = \lim (n+1) = \infty = \gamma$$

$\Rightarrow \rho = 0 \Rightarrow \mathcal{H} = \{0\}$

3.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \rightarrow x_0 = 0$

$c_n = \frac{1}{n!}$

<u>hányados kritérium</u>

$\gamma = 0 \Rightarrow \rho = \infty \Rightarrow \mathcal{H} = \infty$

4.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{9^n} \cdot (x-5)^n \rightarrow x_0 = 5$

$c_n = \frac{(-1)^n}{9^n}$

$\boxed{\text{hatványsor } \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-x_0)^n}$

$\rightarrow$ valamilyen sorozat

(pl. Taylor sor: $c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$)

$\rightarrow c_n = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^n}{9^n} \right|} = \lim \sqrt[\cancel{n}]{\frac{1}{9^{\cancel{n}}}} = \frac{1}{9} = \gamma \Rightarrow \rho = 9$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ x_0}}{(5}-\underset{\substack{\uparrow \\ \rho}}{9}, 5+9) \subset \mathcal{H} \subset [5-9, 5+9]$$

$$[-4, 14]$$

$$\mathcal{H} = [(-4, 14)]$$

végpontok

$x = -4$

$$(-1)^n \cdot (-1)^n = (-1)^{2n}$$

$$\sum \frac{(-1)^n}{9^n} \cdot (-4-5)^n = \sum \frac{(-1)^n}{9^n} \cdot (-9)^n = \sum \frac{(-1)^{2n}}{\cancel{9^n}} \cdot \cancel{9^n}$$

$$= \sum 1 = \infty = \infty$$

$x = 14$

$$\sum \frac{(-1)^n}{9^n} \cdot (14-5)^n = \sum \frac{(-1)^n}{\cancel{9^n}} \cdot \cancel{9^n} = \sum (-1)^n$$

nem konvergál

$$\Rightarrow \quad \mathcal{H} = (-4, 14)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{9^n} \cdot (x-5)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5-x}{9} \right)^n$$

mértani sor: konvergál, ha

$$\left| \frac{5-x}{9} \right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{szigorú}}}{<} 1 \Rightarrow x \in (-4, 14)$$

Taylor sor

$f(x)$ szép/sima függvény (végtelenszer deriválható)

Taylor sor x_0 körül $\quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \quad$ (ez csak egy mértani sor)

- e^x Taylor sora $x_0=0$ körül

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ → láttuk, hogy $\delta=\infty$, így $H=\mathbb{R}$, azaz $\forall x\in\mathbb{R}$-re a Taylor sor előállítja a függvényt

- $\ln(1+x)$, $x_0=0$

$$f'(x_0)=\frac{1}{1+x_0}=(1+x_0)^{-1}$$

$$f''(x_0)=-\frac{1}{(1+x_0)^2}=-(1+x_0)^{-2}$$

$$f'''(x_0)=2!\,(1+x_0)^{-3}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x_0)=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\cdot(1+x_0)^{-n}$$

Taylor sor

$$\ln(1+x_0)+\sum_{k=1}^{\infty}\boxed{\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\cdot(k-1)!\cdot(1+x_0)^{-k}}\cdot(x-x_0)^k$$

$$\left(f(x_0)+\sum_{k=1}^{\infty}\boxed{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}}\cdot(x-x_0)^k\right)$$

$$c_k=\frac{(-1)^{k-1}\cdot\cancel{(k-1)!}}{k!}\cdot(1+x_0)^{-k}=\frac{(-1)^{k-1}}{k}\cdot(1+x_0)^{-k}$$

$$\lim\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right|=\lim\frac{(1+x_0)^{-(k+1)}}{k+1}\cdot\frac{k}{(1+x_0)^{-k}}$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{1+x_0} = \frac{1}{1+x_0} = \gamma$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{1}{\gamma} = 1 + x_0 \Rightarrow x_0 - (1+x_0) = -1$$

$$x_0 + (1+x_0) = 2x_0 + 1$$

$$\Rightarrow (-1, 2x_0+1) \subset \mathcal{H} \subset [-1, 2x_0+1]$$

$x = -1$

f nincs értelmezve

$x = 2x_0 + 1$

$$\left(\ln(1+x_0) + \right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot \cancel{(1+x_0)^{-n}} \cdot \Big(\underbrace{(2x_0+1) - x_0}_{\cancel{(1+x_0)}}\Big)^n$$

!

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \longrightarrow$$ ez Leibniz, így konvergál

$$\mathcal{H} = (-1, 2x_0+1]$$

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ eddig is tudtuk, hogy konvergál, DE már az értékét is tudjuk

$x_0 = 0$ körüli Taylor sor

$$\underbrace{\ln 1}_{0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot x^k = \ln(1+x) \qquad x \in (-1, 1]$$

és legyen $x = 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(1+1) = \ln 2$$

még nevezetes sorok

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} \qquad \sin' x = \cos x$$

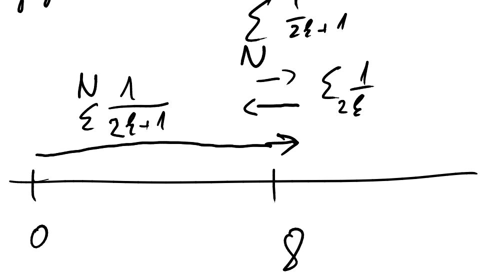
$$\left(\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)' = \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ átrendezése

legyen az összeg 8

megj. tudom, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.



hányados kritérium $\sin x$ Taylor sorára, $x_0 = 0$

$\frac{c_{n+1}}{c_n} \to$ valamelyik 0 :(

(az ha a baj, ha a nevező 0)

- Lagrange-féle maradéktag

T_n n. fokú Taylor pol. x_0 körül

$$T_n(x) - f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

ahol ξ egy megfelelő szám x és x_0 között

$$\Rightarrow \left| T_n(x) - f(x) \right| \le \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \max_{\substack{\xi:\, x \text{ és} \\ x_0 \text{ között}}} \left| f^{(n+1)}(\xi) \right|$$

pl $\quad f(x) = \sin x$

$$\left| f^{(n+1)}(\xi) \right| \le 1$$

$$\Rightarrow \left| T_n(x) - \sin x \right| \le \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges, ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \left| T_n(x) - \sin x \right| \le \lim_{n\to\infty} \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$