Differenciálegyenlet-rendszerek

Ismétlés

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- sajátérték: $\lambda \in \mathbb{C}$ gyöke $\det(\lambda I - A)$ karakterisztikus polinomnak (így mindig +1 a főegyüttható)
- sajátvektorok: $v \neq 0$: $Av = \lambda v$
- sajátaltér: λ sajátértékhez tartozó sajátvektorok által kifeszített tér
- algebrai multiplicitás: hányszoros gyök, $am \geq 1$
- geometriai multiplicitás: $\dim(\text{sajátaltér})$, $1 \leq gm \leq am$
- diagonalizálhatóság: ha A hasonló diagonális mátrixhoz

  tudjuk, hogy $D = S^{-1} A S$ főátlójában sajátértékek vannak, S oszlopai sajátvektorok

  elégséges feltétel: sajátvektorok bázist alkotnak

  $\Updownarrow$

  $\forall \lambda$-ra $am = gm$

  pl. ha $\forall \lambda$ különböző $\Rightarrow am = gm = 1$

- mátrix exponenciális
  - $t \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$: $e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^k}{k!}$ Taylor-sor
  - $t \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $e^{At} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$ így definiálom
  - $e^{A(t+s)} = e^{At} \cdot e^{As}$
  - $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$

  $\Big\}$ ilyen értelemben hasonló e^{at} függvényhez

• baj: A^k nehéz, kivéve ha pl A diagonális

$$\Rightarrow D = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}, \quad D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & & & \\ & d_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n^k \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ mi lenne ha A-t diagonalizálnánk?

$$D = S^{-1} A S \Rightarrow S D S^{-1} = A$$

$$\Rightarrow A^k = S D \underbrace{S^{-1} \cdot S}_{=I} D \underbrace{S^{-1} \cdot}_{=I} \cdots \underbrace{\cdot S}_{=I} D S^{-1} = S D^k S^{-1}$$

$\Rightarrow A^k$ így már könnyű :)

• $$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S D^k S^{-1} t^k}{k!} = S \Bigg(\overbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k t^k}{k!}}^{e^{Dt}} \Bigg) S^{-1}$$

$$= S \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_1^k t^k}{k!} & & & \\ & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_2^k t^k}{k!} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_n^k t^k}{k!} \end{bmatrix} S^{-1}$$

$$= S \begin{bmatrix} e^{d_1 t} & & & \\ & e^{d_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{d_n t} \end{bmatrix} S^{-1} = S e^{Dt} S^{-1}$$

ez csak egy jelölés a $\frac{d}{dt}$-re

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

megoldása $x(t) = e^{At} \cdot x(0)$

1.,

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x(t), \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

I., sajátértékek

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1) - (-3)\cdot(-2)$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 2 - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda-4)(\lambda+1) = 0$$

$$\lambda_1 = 4 \qquad \lambda_2 = -1$$

II., sajátvektorok

$\underline{\lambda = 4}$, $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

$$Av = 4v \Rightarrow \begin{matrix} 2v_1 + 3v_2 = 4v_1 \\ 2v_1 + v_2 = 4v_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} -2v_1 + 3v_2 = 0 \\ 2v_1 - 3v_2 = 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{3}{2} v_2 \Rightarrow \text{sajátaltér} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\underline{\lambda = -1}$, $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

$$Av = -v \Rightarrow \begin{matrix} 2v_1 + 3v_2 = -v_1 \\ 2v_1 + v_2 = -v_2 \end{matrix} \Rightarrow v_1 = -v_2$$

$$\Downarrow$$

$$\text{saját altér} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

III., diagonalizálás

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\underbrace{ad-bc}_{\det}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \right)$$

$$\uparrow \lambda = -1 \quad \uparrow \lambda = 4$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad e^{Dt} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{At} = S e^{Dt} S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^{-t} & -3e^{-t} \\ e^{4t} & e^{4t} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5}$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-t} + 3e^{4t} & -3e^{-t} + 3e^{4t} \\ -2e^{-t} + 2e^{4t} & 3e^{-t} + 2e^{4t} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{At} \underbrace{x(0)}_{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -3e^{-t} + 3e^{4t} \\ 3e^{-t} + 2e^{4t} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5}$$

$$\dot{x}_k(t) = \lambda_k e^{\lambda_k t} \cdot s_k = e^{\lambda_k t} \lambda_k s_k = e^{\lambda_k t} A s_k = A x_k(t)$$

2.1 $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x(t), \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

alapmegoldások: $x_k(t) = e^{\lambda_k t} \cdot s_k$ sajátvektor

$$x_1(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad x_2(t) = e^{4t} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

általános megoldás: $x(t) = C_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{4t} \\ -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{4t} \end{bmatrix}$

kezdeti feltételek: $x(0) = \begin{bmatrix} c_1 + 3c_2 \\ -c_1 + 2c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow c_1 = -3c_2$

$\Rightarrow c_2 = \frac{1}{5}, \; c_1 = \frac{-3}{5}$

$$\Rightarrow x(t) = \begin{bmatrix} -3e^{-t} + 3e^{4t} \\ 3e^{-t} + 2e^{4t} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5}$$

3. $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x(t)$, $x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$

I. sajátértékek

__Állítás:__ háromszög mátrix sajátértékei a főátlóban vannak

__Érv:__ $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+3 \end{vmatrix} = (\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 \\ 0 & \lambda+3 \end{vmatrix}$

$$= (\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda+3) = 0$$

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = -3$$

II. sajátvektorok

__$\lambda = -1$__, $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$

$Av = -v \Rightarrow \begin{bmatrix} -v_1 \\ -v_2 - v_3 \\ -3v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} v_3 = 0 \\ v_2 = v_2 \\ v_1 = v_1 \end{matrix} \Rightarrow$ sajátaltér $= \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

__$\lambda = -3$__, $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$

$Av = -3v \Rightarrow \begin{bmatrix} -v_1 \\ -v_2 - v_3 \\ -3v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3v_1 \\ -3v_2 \\ -3v_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} v_1 = 0 \\ v_3 = v_3 \\ v_2 = \frac{1}{2} v_3 \end{matrix} \Rightarrow$ sajátaltér $= \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$

III. alapmegoldások

$x_1(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_2(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_3(t) = e^{-3t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

általános megoldás

$$x(t) = c_1 e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{-3t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 e^{-t} + c_3 e^{-3t} \\ 2c_3 e^{-3t} \end{bmatrix}$$

kezdeti feltételből $c_1 = 2$, $c_2 = c_3 = -2$.

Megjegyzés: rezonancia ha am $\neq$ gm, akkor pl.

$$x_1(t) = e^{-t} s_1, \quad x_2(t) = t e^{-t} s_1$$

sajátvektor