ADATSZERKEZETEK ÉS ALGORITMUSOK

Összehasonlításos rendezők korlátja

Rendezések

- A rendezési probléma:
  - Bemenet:
    - n számot tartalmazó $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ sorozat
  - Kimenet:
    - a bemenő sorozat olyan $(a'_1, a'_2, \ldots\ , a'_n)$ permutációja, hogy $a'_1 \leq a'_2 \leq \ldots \leq a'_n$

Rendezések

- Összehasonlításos rendezőknél mit tudunk mondani a rendezés időigényére? Tudunk-e alsó becslést adni?
  - Ugyanaz, mintha barkóbázva kellene kitalálni, hogy az elemek melyik sorrendje (permutációja) az igazi sorrend
  - Kezdetben $n!$ lehetséges sorrend jön szóba.
  - Két elemet összehasonlítva, a válasz két részre osztja a sorrendeket
    - Ha például azt kapjuk, hogy $x < y$, akkor az olyan sorrendek, amikben x hátrébb van y-nál, már nem jönnek szóba
    - Ha a válasz mindig olyan, hogy minél több sorrend maradjon meg, akkor k kérdés után még szóba jövő sorrendek száma

$$\frac{n!}{2^k}$$

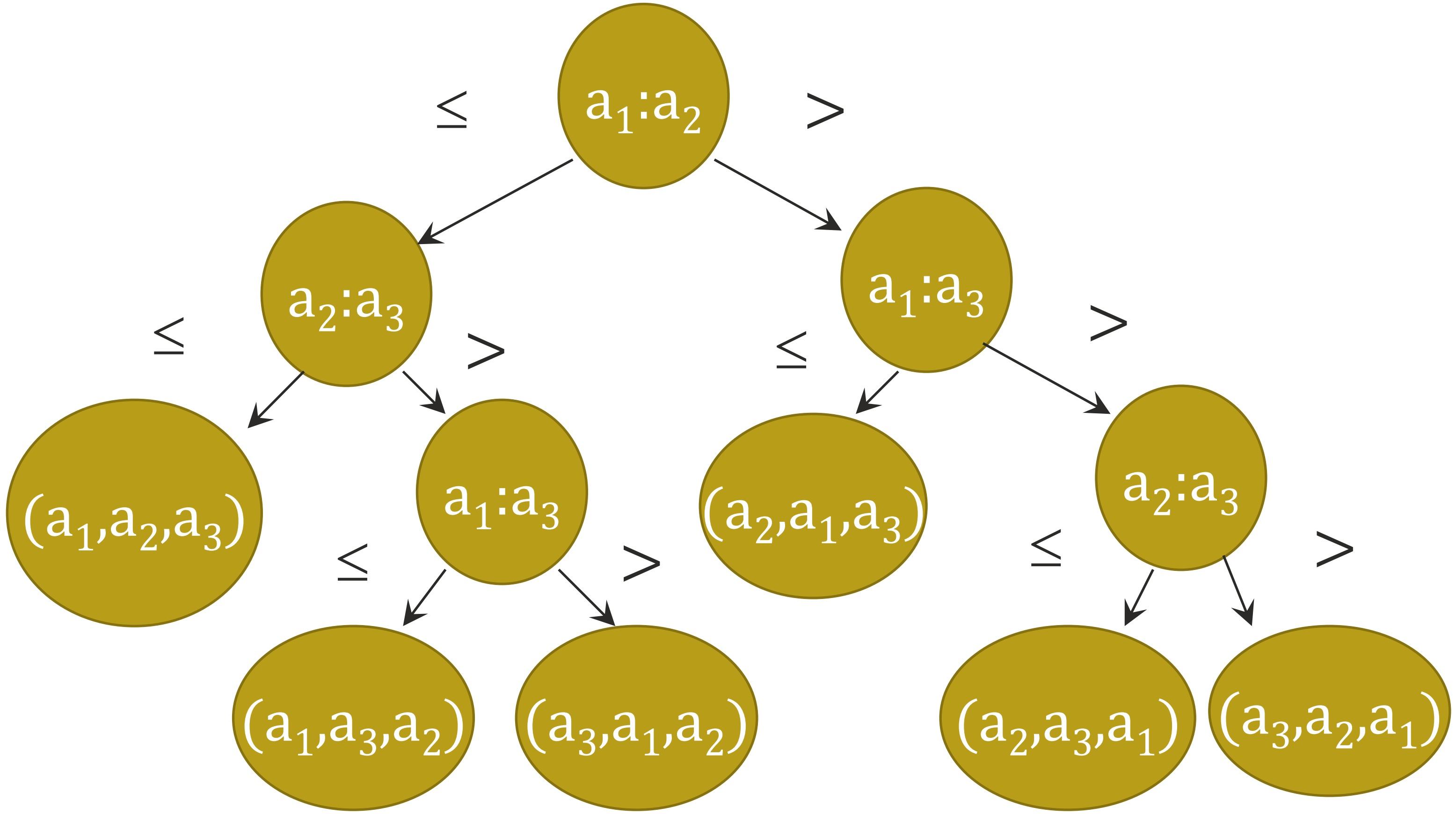
Rendezések

- Döntési fa modell
  - Az összehasonlítások tekinthetők döntési fáknak, amik a rendezés során történt összehasonlításokat ábrázolják
  - Tegyük fel, hogy minden elem különböző
  - Egy belső csúcsot egy $a_i : a_j$ párral jelölhetünk, ahol
$$1 \leq i, j \leq n$$
  - A levelek egy-egy permutációnak feleltethetők meg

Rendezések

- Baloldali részfa: az $a_i \leq a_j$ után szükséges összehasonlítások
- Jobboldali részfa: az $a_i > a_j$ után szükséges összehasonlítások
- Levél: a rendezett sorrend

Rendezések



a1:a2
≤
>
a2:a3
a1:a3
(a1,a2,a3)
a1:a3
(a2,a1,a3)
a2:a3
(a1,a3,a2)
(a3,a1,a2)
(a2,a3,a1)
(a3,a2,a1)

Alsó korlát a legrosszabb esetben

- Tétel: Bármely n elemet rendező döntési fa magassága
$$\Omega(n * \log_2 n)$$
  - Bizonyítás: Vegyük az n elemet rendező döntési fát, jelöljük ennek magasságát h-val.
  - A fának $n!$ levele van – ezek a permutációk.
  - A h mélységű bináris fa leveleinek száma $\leq 2^h$, ezért
$$n! \leq 2^h$$
  - $h \geq \log_2(n!)$
    - felhasználva, hogy a $\log$ függvény monoton növő

Alsó korlát a legrosszabb esetben

- Ismert a Stirling formula (~1730!):

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

  - ahol e a természetes logaritmus alapja
- Ennek alapján

$$n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

- Behelyettesítve:
- $h \geq \log_2\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\right) = n * \log_2 n - n * \log_2 e = \Omega(n * \log_2 n)$

Alsó korlát a legrosszabb esetben

- Következmény 1.
  - A kupacrendezés és az összefésüléses rendezés aszimptotikusan optimális összehasonlító rendezések.
- Bizonyítás
  - A kupacrendezés és az összefésüléses rendezés futási idejének felső korlátja $\Theta(n * \log_2 n)$ a legrosszabb esetre megadott $\Omega(n * \log_2 n)$ felső korláttal.
- Következmény 2.
  - Nincs lineáris idejű összehasonlításos rendezés
  - ☹

Leszámláló rendező

Következő téma