Halmazalgebra

Ebben a fejezetben összefoglaljuk a halmazokról tanult középiskolai ismeretanyagot, és néhány érdekességgel, módszerrel ki is egészítjük.

A halmaz alapfogalom. Mondhatjuk, hogy tárgyak, fogalmak, matematikai objektumok összessége, de ezzel nem jutunk előbbre, hiszen akkor az összesség szót kellene megmagyarázni.

Ezért csupán azt követeljük meg, hogy **a halmazt az elemei egyértelműen meghatározzák.**

A halmazokat jelölhetjük nagybetűkkel, vagy {} közé írva az elemeit, illetve annak tulajdonságait, ld. következő alfejezet.

Ha egy „a” azonosítójú dolog eleme az A halmaznak, ezt így jelöljük: $a \in A$. Ha valamely „b” azonosítójú dolog nem eleme az A halmaznak, ennek jelölése: $b \notin A$.

Tehát csakis olyan halmazokkal foglalkozunk, amelyeknél az $a \in A$ állítás igazsága egyszersmind $a \notin A$ állítás hamis voltát vonja maga után, illetve az $a \notin A$ állítás igaz voltából az $a \in A$ állítás hamissága következik.

A halmazelmélet fentieken alapuló tárgyalását **naív módszernek, naív halmazelméletnek nevezik.** Az itt ismertetett tárgyalásmód Cantor nevéhez fűződik. Abban az időben még nem tisztult le a matematikai logika elmélete olyan mértékben, ami lehetővé tette volna az alábbi ellentmondások, az ún. **antinomiák** magyarázatát. Az antinomia kiküszöbölése az ún. axiomatikus tárgyalási módszerrel lehetséges, ez azonban meghaladja e jegyzet kereteit. Csupán arra szorítkozunk, hogy az antinomiák bemutatásával megindokoljuk a halmaz alapfogalomként való kezelésének praktikus hasznosságát.

1. Antinomia:
Tekintsük a magyar nyelven legfeljebb 100 karakterrel definiálható egész számok halmazát, jelöljük ezt H-val. Például, a 6 definíciója lehetne a következő: a harmadik páros szám. Mivel ez a definíció kevesebb, mint száz karakterből áll, ezért a 6 eleme a H halmaznak.

Legyen az *n* egész szám definíciója az alábbi:

A legkisebb, magyar nyelven száz írásjellel (a szóközt beleértve) nem definiálható természetes szám.

A definíció pontosan 100 karakter. Vajon $n \in H$ igaz, vagy $n \notin H$? Akár egyik, akár másik feltevést tekintjük igaznak, ellentmondásra jutunk.

Az ilyen halmazokkal tehát nem foglalkozunk.

Feladat:

A falu borbélya mindazokat a férfiakat megborotválja, akik nem maguk borotválkoznak. Tekintsük a borbély által borotvált férfiak B halmazát. Vajon ennek a B halmaznak eleme-e a borbély maga?

1.1 Halmazok megadása, elemei, részhalmazok

A halmazok többféleképpen is megadhatók:

- felsorolással : A:={3, 4}
- valamely jellemző tulajdonság megadásával, melyet halmazjelet használva a következőképpen írhatunk:
  B:={x| x$\in$R, x megoldása az (x-3)(x-4)=0 egyenletnek}

Vannak olyan szubjektív értékelések, amelyek önmagukban is indokolhatják, hogy a halmaz fogalmát elemein keresztül ragadjuk meg. Pl. tekintsük az alábbi „halmazokat" :

F:= {f | f szép magyar festmény}
O:= {o | o okos ITK-s hallgató }

Meg tudjuk-e egyértelműen mondani, hogy egy adott kép, egy adott hallgató beletartozik-e az F illetve az O halmazba? Nyilvánvalóan az így leírt halmazok tartalma személyenként változik, nem jól definiált. Tehát csak olyan tulajdonságokkal írhatunk le egy halmazt, melyek megléte egyértelműen eldönthető, és így egyértelmű az is, hogy egy adott dolog, objektum eleme-e a halmaznak.

Fontos kérdés annak tisztázása, mikor tekintünk két halmazt egyenlőnek?

Definíció: Az A és a B halmazok **egyenlők**, ha ugyanazok az elemeik.

A fenti példákban A=B.

Definíció: **Üres halmaz**nak nevezzük azt a halmazt, amely egy elemet sem tartalmaz. Jele:$\emptyset$.

Definíció: Az A halmaz **részhalmaza** a B halmaznak, ha A minden eleme B-nek is eleme.
Jelölés: A$\subseteq$B. Ha A$\subseteq$B és A$\neq$B, akkor azt mondjuk, hogy A valódi részhalmaza B-nek.
Jelölés: A $\subset$B.

A definíció szerint minden halmaz részhalmaza önmagának. Ezt a tulajdonságot a reflexív szóval fejezzük ki:
A$\subseteq$A : **reflexív tulajdonság**

A részhalmaz definícióját átfogalmazhatjuk úgy is, hogy A$\subseteq$B, ha A-nak nincsen olyan eleme, amely ne lenne B-nek is eleme. Ennélfogva $\emptyset \subseteq$ A, hiszen nincsen eleme.

Feladatok:
Igaz-e, ha A$\subseteq$B és B$\subseteq$C, akkor A$\subseteq$C ? (Ez az ún. tranzitivitás)
Igaz-e, ha A$\subseteq$B, akkor B$\subseteq$A? (Ez az ún. kommutativitás)

A részhalmaz fogalom felhasználásával már ismertetni tudunk egy másik antinómiát is, amely Russeltől származik.

Elképzelhető, hogy vannak olyan halmazok, amelyek önmagukat tartalmazzák. Ugyanígy, vannak olyan halmazok, amelyek önmagukat nem tartalmazzák.

2. Antinomia (Russel): Legyen a H halmaz azon halmazok halmaza, amelyek önmagukat nem tartalmazzák. Vajon H eleme-e önmagának?

Ha igen-nel válaszolunk az antinómiában feltett kérdésre, akkor H eleme önmagának, de ez a H definíciója miatt lehetetlen. Ha nem-mel válaszolunk, akkor viszont éppen a H definíciója miatt H nem tartalmazhatja önmagát.

Feladat:
Mondjunk példát olyan halmazra, amelyik tartalmazza önmagát!

Állítás: A=B akkor és csak akkor, ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$.

A bizonyítást az Olvasóra bízzuk.

Ez az állítás használható halmazok azonosságának **bizonyítására.** Hamarosan alkalmazni is fogjuk a műveleti tulajdonságok bizonyításánál.

Definíció: Az A halmaz P(A) hatványhalmazán az A részhalmazainak halmazát értjük.

A P(A) jelölés az angol power (hatvány) szóból származik.

Példák:
Az adott halmazhoz írjuk fel a hatványhalmazát!

- A:= {1, 2} **Megoldás:** $P(A)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$
- $\emptyset$ **Megoldás:** $P(\emptyset)=\{\emptyset\}$
- $\{\emptyset\}$ **Megoldás:** $P(\{\emptyset\})=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$

Feladatok:

- Adja meg a B:= $\{\emptyset,\{1\}\}$ halmaz hatványhalmazát!
- Adja meg a C:= {{1}, C} halmaz hatványhalmazát!

1.2 Műveletek halmazok között: metszet, unió, különbség

A művelet fogalmára a további fejezetekben is visszatérünk majd.

Definíció: Az A és B halmazok **uniója (egyesítése, összege)** az az **$A \cup B$**-vel jelölt halmaz, amelynek elemei vagy A-nak, vagy B-nek elemei:

$A \cup B := \{x | x \in A$ **vagy** $x \in B\}$

Feladatok:
Tekintsük a racionális (Q), természetes (N), irracionális (Q*), egész (Z) és valós számok (R) halmazát.
Mi az eredményhalmaza a következő kifejezéseknek:
$N \cup Z$, $Q \cup N$, $Q^* \cup Q$, $R \cup IR$, $R \cup Q$

Definíció: Az A és B halmazok **metszete (közös része, szorzata)** az az **A∩B**-vel jelölt halmaz, amelynek elemei A-nak is és B-nek is elemei.

$A\cap B:=\{x|x\in A$ **és** $x\in B\}$

Feladatok:
Tekintsük a racionális (Q), természetes (N), irracionális (Q*), egész (Z) és valós számok (R) halmazát.
Mi az eredményhalmaza a következő kifejezéseknek:
$N\cap Z$, $Q\cap N$, $Q^*\cap Q$, $R\cap Q^*$, $R\cap Q$

Definíció: Ha az A és B halmazoknak nincsen közös része, vagyis $A\cap B=\emptyset$, akkor azt mondjuk, hogy az A és B halmazok **diszjunkt**ak.

Feladat:

Tekintsük a racionális (Q), természetes (N), irracionális (Q*), egész (Z) és valós számok (R) halmazát. Ezek közül melyik kettő diszjunkt? (több pár is lehet)

Definíció: Az A és a B halmazok **A\B**-vel jelölt **különbsége** az A halmaz azon elemeinek halmaza, amelyek nincsenek B-ben. Ezt másképpen a B halmaz A halmazra vonatkozó **komplementerének** nevezzük, jelölése: $\overline{B}_A$.

$$A\setminus B = \overline{B}_A :=: \{x \mid x\in A \wedge x\notin B\}$$

Feladatok:

Tekintsük a racionális (Q), természetes (N), irracionális (Q*), egész (Z) és valós számok (R) halmazát.
Mit jelent Q\Q*, Q*\Q, R\N, R\Q, Q\R, Z\N, N\Z, Q\Z, Z\Q, $A\setminus\emptyset$, $\emptyset\setminus A$?

Szokás az ún. **univerzális halmaz,** vagy **univerzum** bevezetése.

Definíció: Az univerzum, vagy univerzális halmaz a feladattal kapcsolatos **összes lehetséges objektumok összessége,** jelölés: U.

Jelölés: A B halmaz adott U **univerzumra vonatkozó komplementerének jele:** $\overline{B}$**.**

Vagyis ha egy adott U univerzumra vonatkozóan beszélünk komplementer halmazról, akkor a $\overline{B}_U$ jelölés helyett csak $\overline{B}$-t írunk, és szavakban sem mondjuk ki, hogy a komplementer képzése mely halmazra vonatkozik.

Szokásos univerzumok:

- valós számok, R
- pozitív valós számok, R^+
- nem negatív egészek, N
- egészek, Z
- racionális számok, Q

Feladatok:

- Mi a pozitív egész számok halmazára vonatkozó komplementere a páros pozitív egészek halmazának? Hogyan jelölhetjük?
- Mi a valós számok halmazára vonatkozó komplementere a racionális számok halmazának? Hogyan jelölhetjük?
- Tekintsük a valós számok halmazát univerzumnak. Adjuk meg a racionális (Q), természetes (N), irracionális (Q*), egész (Z) és valós számok (R) halmazának komplementereit (jelöléssel együtt) erre az univerzumra!

Definíció: Az A és B halmaz **szimmetrikus differenciája** azon elemek halmaza, amelyek A és B halmaz közül pontosan az egyiknek elemei.

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

A műveleti definíciók egyszerű következményei:

$A\cup U=U$	$A\cap U=A$
$A\cup A=A$	$A\cap A=A$
$A\cup\emptyset=A$	$A\cap\emptyset=\emptyset$
$A\setminus\emptyset=A$	$\emptyset\setminus A=\emptyset$

Műveleti azonosságok:

1. $A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$	**kommutatív**
2. $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$	**asszociatív**

3. a.) $A\cap(B\cup C)= (A\cap B) \cup(A\cap C)$ **disztributív**
   b.) $A\cup(B\cap C)= (A\cup B) \cap (A\cup C)$ **disztributív**

4. $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

A műveleti azonosságok a kétoldali tartalmazás módszerével bizonyíthatók (ld. 1.1 fejezet)

Példaként bemutatjuk a 3. a.) bizonyítását: $A\cap(B\cup C)= (A\cap B) \cup(A\cap C)$

Jelölések: $X:= A\cap(B\cup C)$ - bal oldal, $Y:= (A\cap B) \cup(A\cap C)$ - jobb oldal

Azt kell bizonyítani, hogy $X\subseteq Y$, és $Y\subseteq X$.

a.) $X\subseteq Y$
Legyen x tetszőleges eleme X-nek. Tetszőleges azt jelenti, hogy bármely (más) X-beli elemre az alábbiak elmondhatók, igy tehát valójában X **minden** elemére bizonyítunk.
Ekkor $x\in A$ **és** $x\in B\cup C$. Az utóbbi miatt $x\in B$, **vagy** $x\in C$. Így vagy $x\in A$, **és** $x\in B$, ami azt jelenti, hogy $x\in A \cap B$, **vagy**, hasonlóképpen: $x\in A\cap C$ ami éppen azt jelenti, hogy $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$. Tehát minden X-beli elem Y-beli is, tehát $X\subseteq Y$.

b.) $Y\subseteq X$. Legyen y tetszőleges eleme Y-nak. Ekkor **vagy** $y\in A\cap B$, **vagy** $y\in A\cap C$. Az első esetben $y\in A$ és $y\in B$. Utóbbi miatt $y\in B\cup C$, tehát $y\in A\cap(B\cup C)$. Ehhez hasonlóan második esetben $y\in A$ és $y\in C$, így $y\in B\cup C$, amiből következik, hogy $y\in A\cap(B\cup C)$. Ezzel beláttuk, hogy minden Y-beli elem X-beli is, $Y\subseteq X$.

Feladatok:
- Igazolja a többi felsorolt azonosságot!
- Igaz-e, hogy a szimmetrikus differencia kommutatív?
- Igaz-e, hogy a szimmetrikus differencia asszociatív?

További azonosságok (De Morgan):

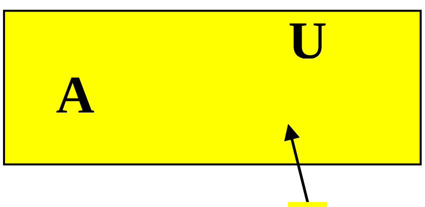
4\. a.) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
   b.) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Bizonyítás: 4. a.) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
Legyen $H_1 = \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} = H_2$.
Bármely $x \in H_1 \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A$ és $x \notin B \Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B} = H_2$, $H_1 \subseteq H_2$
Bármely $x \in H_2 \Rightarrow x \in \overline{A}$ és $x \in \overline{B} \Rightarrow x \notin A$ és $x \notin B \Rightarrow x \notin A \cup B$, tehát $x \in \overline{A \cup B} = H_1 \subseteq H_2$

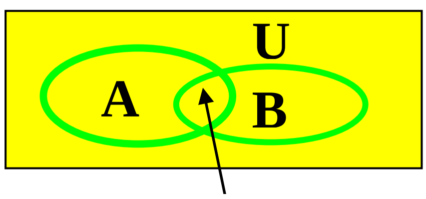
Feladat: Igazolja a 4.b.) De Morgan azonosságot is!

A halmazok közti kapcsolatok illusztrálására régóta használatosak az úgynevezett Venn-digrammok. A síkon egy-egy zárt görbe (kör, ellipszis, négyzet, téglalap, de bármilyen más is jó) belseje felel meg egy-egy halmaznak. A zárt görbén kívül eső rész pedig annak a zárt görbe által képviselt halmaz komplementerét jelenti. Háromnál több halmaz esetében a körök használata nem biztos, hogy eredményes lenne, ezért szükséges, hogy általánosabb alakú zárt görbéket is megengedjünk.

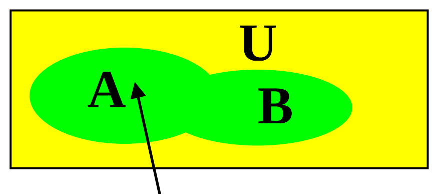
<u>Venn-diagrammok:</u>



$\overline{A}$



$A \cap B$



$A \cup B$

Feladat:

Illusztrálja a műveleti azonosságokat és a De Morgan azonosságokat Venn-diagramm segítségével!

1.3 Descartes-szorzat és relációk

Definíció:
Legyenek D_1, D_2, …D_n adott halmazok. E halmazok

Descartes (direkt) szorzata: $D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n := \{(d_1, d_2, \ldots d_n) \mid d_k \in D_k \ 1 \le k \le n \}$

A direkt szorzat tehát olyan rendezett érték n-eseket tartalmaz, amelynek k. eleme a k. halmazból való.

Példa direkt szorzatra:

1. $A=\{1,2\}$ és $B=\{7,8,9\}$ akkor $A\times B=\{(1,7),(1,8),(1,9),(2,7),(2,8),(2,9)\}$

2. **Adatok**:= Nevek x Városok x Utcanevek x Házszámok=
{(Nagy Janka, Budapest, Fő u., 1),… (Nagy Janka, Budapest, Fő u., 16),
(Nagy Janka, Budapest, Fő u., 17),….. (Nagy Janka, Budapest, Kossuth L. u., 1), ….
(Nagy János, Budapest, Fő u. 1.), ….}

Alkalmazás: adatbáziskezelés: relációs algebra

3. $R \times R=\{(x,y) \mid x\in R$ és $y\in R\}$, Descartes koordináta-rendszer

Definíció:

Relációnak nevezzük a $D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$ direkt szorzat bármely részhalmazát:

$r \subseteq D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$

A relációkkal és tulajdonságaikkal egy külön fejezetben foglalkozunk majd.

Példa relációra:
{ (Nagy Janka, Budapest, Kossuth L. u., 1), (Nagy János, Budapest, Fő u., 1)} $\subseteq$ **Adatok**

Definíció:

Bináris reláció, ha n=2: $r \subseteq D_1 \times D_2$

Bináris relációk néhány jellemzője:

Reflexív: $(a, a) \in r$
Kommutatív: ha $(a, b) \in r$, akkor $(b, a) \in r$
Anti-kommutatív (nem kommutatív): ha $(a, b) \in r$, akkor $(b, a) \notin r$
Tranzitív: ha $(a, b) \in r$, és $(b, c) \in r$, akkor $(a, c) \in r$

Feladatok:

Döntsük el az alábbi relációkról, hogy a fenti jellemzők közül melyekkel rendelkeznek?
1. $x, y\in \mathbf{N}$, $(x,y) \in r$, ha x osztója y-nak.
2. $x, y\in \mathbf{R}$, $(x,y) \in r$, ha x kisebb (kisebb vagy egyenlő) mint y.
3. $x, y\in \mathbf{R}$, $(x,y) \in r$, ha $x = y$.

1.4 Számosság, logikai szita

Definíció: Halmaz számosságán a halmaz elemeinek számát értjük. Jelölés: $|A|$. Ha ez véges szám, akkor azt mondjuk, hogy az A halmaz véges, ellenkező esetben az A halmaz végtelen.

$|\{3, 4\}|=2$

Feladatok: (Logikai szita)

$|A\cup B| = ?$

Megoldás: $|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$

$|A\cup B\cup C| = ?$

Megoldás:
$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$

Tétel: szita-formula:

Ha $A_1, \ldots, A_n$ véges elemszámú halmazok, akkor

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i,j\,:\,1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{i,j,k\,:\,1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n| .$$

Feladat:

$|A\cup B\cup C\cup D| = ?$

Példa:
Az első évfolyam egyik 34 fős csoportja kis zárthelyit írt lineáris algebrából. A dolgozatban 3 feladatot kellett megoldani. Az első feladatot 23-an, a másodikat 17-en, a harmadikat 18-an oldották meg hibátlanul.
Az első és másodikat 10-en, a másodikat és harmadikat 7-en, az elsőt és a harmadikat 18-an oldották meg hibátlanul. Mindhárom feladatot 7-en oldották meg. Hányan nem oldottak meg egy darab feladatot sem?

Megoldás: Az alaphalmazból azokra a diákokra vagyunk kíváncsiak, akik egyik feladatot sem oldották meg (vagyis, az 1,2,3-as feladatot megoldók halmazának uniójának komplementerére) x=34-(23+17+18-[10+7+18]+7)=4

1.5 A természetes számok halmaza, teljes indukció

Fent említettük, hogy a halmazelmélet bizonyos szempontból precízebb tárgyalása axiomatikus úton lehetséges, azonban ezzel bonyolultsága miatt e jegyzetben nem foglalkozunk. De a természetes számok megadása e módszerrel is viszonylag egyszerű, ezért ezt mutatjuk be ízelítőül.

E példa azonban nemcsak az axiomatikus megadás miatt fontos, hanem azért is, mert az egyik fontos matematikai bizonyítási módszer, a teljes indukció alapja.

Mint az ismeretes, az 1 számból az 1 ismételt hozzáadásával keletkező számokat nevezzük természetes számoknak. Az alábbi axiómák ezt írják le. Minden olyan halmaz, amire az alábbi tulajdonságok igazak, természetes számok halmazának nevezhető.

Peano axiómák:

1. Az 1 természetes szám.
2. Minden természetes számnak van rákövetkezője.
3. Nincsen olyan természetes szám, aminek az 1 rákövetkezője lenne.
4. Csak egyenlő természetes számoknak vannak egyenlő rákövetkezőik.
5. Ha a természetes számok valamely A részhalmazára igaz az, hogy az 1 természetes számot tartalmazza, továbbá, ha az n természetes szám eleme, akkor ennek rákövetkezője is eleme, akkor A azonos a természetes számok halmazával.

Az 5. axióma nem független a többitől, az első 4 és a halmazelmélet segítségével.

Az 5. axióma az alapja az ún. **teljes indukciós bizonyításnak**. Ha azt akarjuk bizonyítani, hogy egy állítás teljesül az összes természetes számra, akkor először bizonyítani kell, hogy az első természetes számra, az 1-re igaz az állítás. Második lépésként megfogalmazzuk általánosan a tételt, harmadik lépésként pedig azt kell bizonyítani, hogy a tulajdonság **öröklődése** fennáll, vagyis, ha a tulajdonság teljesül az *n* természetes számra, akkor teljesül a rákövetkezőjére is.

Példák teljes indukcióra:

1. példa:
Határozzuk meg az első n páratlan szám összegét!

Először ki kell találni, mi lehet ez az összeg, ezért elvégezzük a páratlan számok összeadását addig, amíg sejthetővé válik az összeg képlete:

Első szám „összege:”	$1=1$
Első **két** páratlan szám összege:	$1+3=4=\mathbf{2}^2$
Első **három** páratlan szám összege:	$1+3+5=9=\mathbf{3}^2$
Első **négy** páratlan szám összege:	$1+3+5+7=16=\mathbf{4}^2$

Az tehát a sejtés, hogy az első k db páratlan szám összege a k négyzetével egyenlő:

$1+3+\ldots+(2k-1)=k^2$

Bizonyítás teljes indukcióval:

1.Megvizsgáljuk, k=1-re igaz-e: 1=1 tehát igaz.

2.Tegyük fel hogy $k=n$-ra igaz: $1+3+\ldots(2n-1)=n^2$

3.Bizonyítjuk, hogyha $k=n$-re igaz, akkor ebből **bizonyítható** $k= n+1$-re is. **Bizonyítandó:**

$\mathbf{1+3+ \dots +(2k-1)}+(2k+1) = (k+1)^2$

Tujuk, hogy

$1+3+\dots+(2k-1) = k^2$, ezért az **első k tag** helyettesíthető $\mathbf{k^2}$-tel:

$\mathbf{k^2}+(2k+1)=k^2+2k+1= (k+1)^2 \Rightarrow$ az állítás igaz.

2. Példa:

Bizonyítsuk be, hogy az n elemű halmaz hatványhalmazának számossága: $|P(A)|=2^n$, ha $|A|=n$

Bizonyítás (teljes indukcióval):

1. n=1-re igaz, mert egyelemű halmaz részhalmazai az üreshalmaz és és az egyetlen elemet tartalmazó halmaz, vagyis száma 2.
2. Feltételezzük ezért, hogy $P(A)= 2^n$ ha $|A|=n$

3. Azt akarjuk bizonyítani, hogyha $|A|=n$ $|P(A)| = 2^n$ AKKOR $|T|=n+1$ $|P(T)|=2^{n+1}$.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $T=A\cup\{a\}$.(„a” az az elem, ami az „n” elemű halmazban nem volt benne.)

$a\in T=A\cup\{a\}$ és $T\setminus\{a\}=S=A$

$|P(S)| = 2^n$ az indukciós feltétel miatt.

$P(S):=\{\emptyset, S_1, S_2, \dots , S_k\}$ (összesen 2^n darab)

$P(T):=\{ \{a\},\{S_1\cup\{a\}\},\{S_2\cup\{a\}\}, \dots , \{S_k\cup\{a\}\}\}\cup P(S)$

Könnyen látható, hogy egyértelmű megfeleltetés van T-nek a-t tartalmazó és a-t nem tartalmazó részhalmazai között (a megfeleló sorszámúakat rendelhetjük egymáshoz), ezértezek egyenlő elemszámúak:

$|P(T)| = 2^n +2^n =2\cdot 2^n =2^{n+1}$

Feladatok:

Bizonyítsa teljes indukcióval az alábbi összefüggéseket:

1. $n<2^n$

2. Bernoulli egyenlőtlenség

1.6 Természetes számok megadása számossággal

A természetes számok halmaza felépíthető csak halmazelméleti fogalmakkal**. Ekkor a halmaz számossága azonosítható a természetes számmal.**

$0:=\emptyset$	$\lvert 0\rvert=0$
$1:=\{0\}=\{\emptyset\}$	$\lvert 1\rvert=1$
$2:=\{0, 1\}=\{\emptyset, \{\emptyset\}\}=1\cup\{1\}$	$\lvert 2\rvert=2$
$3:= \{0, 1, 2\}= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}=2\cup\{2\}$	$\lvert 3\rvert=3$
.	
.	
$n:=\{0, 1, 2, 3, \dots n\}=..= n \cup\{n\}$	$\lvert n\rvert=n$

Fontossága miatt a számosságokkal külön fejezetben is foglalkozunk.