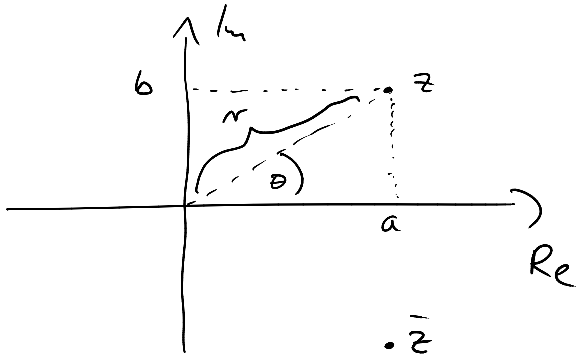
Differenciálegyenletek



$z \in \mathbb{C}$

- algebrai alak: $a+bi$, $a,b \in \mathbb{R}$
- trigonometrikus alak: $r(\cos\theta + i\sin\theta)$
- exponenciális alak: $re^{i\theta}$
- konjugált: $\bar{z} = a - bi$
- $z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2(-1) = a^2+b^2 = r^2$
- Állítás: $p(x)$ valós együtthatós polinom esetén

  $p(z) = 0 \Rightarrow p(\bar{z}) = 0$

- megfigyelés: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

  $e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$

  $\Rightarrow \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$, $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

1., $y''(x) + 12y'(x) + 45y(x) = 0$

karakterisztikus polinom: $\lambda^2 + 12\lambda + 45 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4\cdot 45}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144-180}}{2}$$

$$= \frac{-12 \pm \sqrt{-36}}{2} = -6 \pm 3i$$

lehetséges alapmegoldások: $y_1(x) = e^{(-6+3i)x} = e^{\lambda_1 x}$

$y_2(x) = e^{(-6-3i)x}$

lehetséges teljes megoldás: $y(x) = c_1 e^{(-6+3i)x} + c_2 e^{(-6-3i)x}$

ez matematikailag helyes, de olyan, mintha komplex lenne a megoldás helyette: tudjuk, hogy az alapmegoldások lineáris kombinációja is megoldás

$$e^{(a+bi)x} = e^{ax} e^{bix} = e^{ax}\left(\cos(bx) + i\sin(bx)\right)$$

$$e^{(a-bi)x} = e^{ax}\left(\cos(bx) - i\sin(bx)\right)$$

$$\Rightarrow e^{ax}\cos(bx) = \frac{1}{2}\left(e^{(a+bi)x} + e^{(a-bi)x}\right)$$

$$e^{ax}\sin(bx) = \frac{1}{2i}\left(e^{(a+bi)x} - e^{(a-bi)x}\right)$$

új alapmegoldások: $y_1(x) = e^{ax}\cos(bx)$

$y_2(x) = e^{ax}\sin(bx)$

új teljes megoldás: $y(x) = c_1 e^{ax}\cos(bx) + c_2 e^{ax}\sin(bx)$

ebben a példában $a = -6$, $b = 3$, azaz

$$y(x) = c_1 e^{-6x}\cos(3x) + c_2 e^{-6x}\sin(3x).$$

2., $y''(x) + 6y'(x) + 34\,y(x) = 17x^2 - 62x + 23$

I., homogén megoldás

$$y_h''(x) + 6y_h'(x) + 34\,y_h(x) = 0$$

karakterisztikus polinom: $\lambda^2 + 6\lambda + 34 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot 34}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-136}}{2}$$

$$= \frac{-6 \pm 10i}{2} = -3 \pm 5i$$

Viète-formulák: $0 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1\lambda_2$

komplex konjugált gyökpár esetén

$$\lambda_1 = a+bi, \quad \lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = a-bi$$

$$\lambda_1+\lambda_2 = 2a = -6 \Rightarrow a=-3$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = a^2+b^2 = 34 \Rightarrow b^2=25 \Rightarrow b=5$$

(vagy $b=-5$)

alapmegoldások: $y_1(x) = e^{-3x}\cos(5x)$

$$y_2(x) = e^{-3x}\sin(5x)$$

homogén megoldás: $y_h(X) = c_1 e^{-3x}\cos(5x) + c_2 e^{-3x}\sin(5x)$

II, partikuláris megoldás

keressük $y_p(x)$-t amire

$$y_p''(x) + 6y_p'(x) + 34\, y_p(x) = 17x^2 - 62x + 23$$

gyanú: legyen $y_p(x)$ polinom, másadásul másodfokú

$$y_p(x) = Ax^2+Bx+C$$

$$y_p'(x) = 2Ax+B$$

$$y_p''(x) = 2A$$

$$y_p''(x)+6y_p'(x)+34\,y_p(x) = 2A + 6(2Ax+B) + 34(Ax^2+Bx+C)$$

$$= 34Ax^2 + (12A+34B)x + (2A+6B+34C)$$

$$= 17x^2 - 62x + 23$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} 34A &= 17 \\ 12A+34B &= -62 \\ 2A+6B+34C &= 23 \end{aligned} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 34 & 0 & 0 \\ 12 & 34 & 0 \\ 2 & 6 & 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ -62 \\ 23 \end{bmatrix}$$

$A = \frac{1}{2}$

$12A+34B = -62 \Rightarrow B=-2$

$2A+6B+34C = 23 \Rightarrow C=1$

azaz

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

III., teljes megoldás

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{-3x}\cos(5x) + c_2 e^{-3x}\sin(5x)$$
$$+\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

3.,

$$y''(x) + y(x) = \sin(2x)$$

I., homogén megoldás

$$y_h''(x) + y_h(x) = 0$$

$a \pm bi$

$a = 0$

$b = 1$

karakterisztikus polinom: $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i = \underbrace{0 \pm i}$

alapmegoldások: $y_1(x) = e^{0\cdot x}\cdot\cos(1x) = \cos x$

$y_2(x) = \sin x.$

homogén megoldás: $y_h(x) = c_1\cos x + c_2\sin x$

II., partikuláris megoldás

keressük $y_p(x)$-t amire

$$y_p''(x) + y_p(x) = \sin(2x)$$

$y_p(x) = A\sin(2x)$, $y_p'(x) = 2A\cos(2x)$, $y_p''(x) = -4A\sin(2x)$

azaz

$$y_p''(x) + y_p(x) = -4A\sin(2x) + A\sin(2x) = -3A\sin(2x) = \sin(2x)$$

$\Rightarrow A = -\frac{1}{3}$, így

$$y_p(x) = -\frac{1}{3}\sin(2x)$$

III., teljes megoldás

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1\cos x + c_2\sin x - \frac{1}{3}\sin(2x).$$

4., $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 2\cos(3x)$

I., homogén megoldás

$$y_h''(x) - 2y_h'(x) - 3y_h(x) = 0$$

karakterisztikus polinom: $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda-3)(\lambda+1) = 0$

$\lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = -1$

alapmegoldások: $y_1(x) = e^{3x}, \quad y_2(x) = e^{-x}$

homogén megoldás: $y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$

II., partikuláris megoldás

keressük $y_p(x)$-t amire

$$y_p''(x) - 2y_p'(x) - 3y_p(x) = 2\cos(3x).$$

$$y_p(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x)$$

$$y_p'(x) = -3A\sin(3x) + 3B\cos(3x)$$

$$y_p''(x) = -9A\cos(3x) - 9B\sin(3x)$$

ekkor

$$y_p''(x) - 2y_p'(x) - 3y_p(x) = -9A\cos(3x) - 9B\sin(3x)$$
$$-2(-3A\sin(3x) + 3B\cos(3x))$$
$$-3(A\cos(3x) + B\sin(3x))$$
$$= 2\cos(3x)$$

$$-9A - 6B - 3A = -12A - 6B = 2 \Rightarrow -30B = 2$$

$$6A - 12B = 0 \Rightarrow A = +2B \qquad B = -\frac{1}{15}, \quad A = -\frac{2}{15}$$

azaz $\quad y_p(x) = -\frac{2}{15}\cos(3x) - \frac{1}{15}\sin(3x)$

III., teljes megoldás

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} - \frac{2}{15}\cos(3x) - \frac{1}{15}\sin(3x)$$