Példa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

Gondolatkísérlet

hányados kritérium

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \begin{cases} <1, & \sum a_n \text{ absz. konv} \Rightarrow \text{Elan] konv.} \\ >1, & \sum a_n \text{ divergens} \\ =1, & ? \end{cases}$$

ebben a feladatban

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{(-1)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1$$

$$\Downarrow$$

???

Leibniz típusú sorok

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
(i) alternáló előjel, $a_n a_{n+1} < 0$
(ii) $|a_n|$ mon. csökken
(iii) $a_n \to 0$
$\Rightarrow$ konvergens a sor

Megj:

Leibniz $\Rightarrow$ konvergens (Leibniz típus milyen feltétele a konvergencia)

$\neg$ Leibniz $\Rightarrow$ semmi

tagadás: $\neg$ konvergens $\Rightarrow$ $\neg$ Leibniz

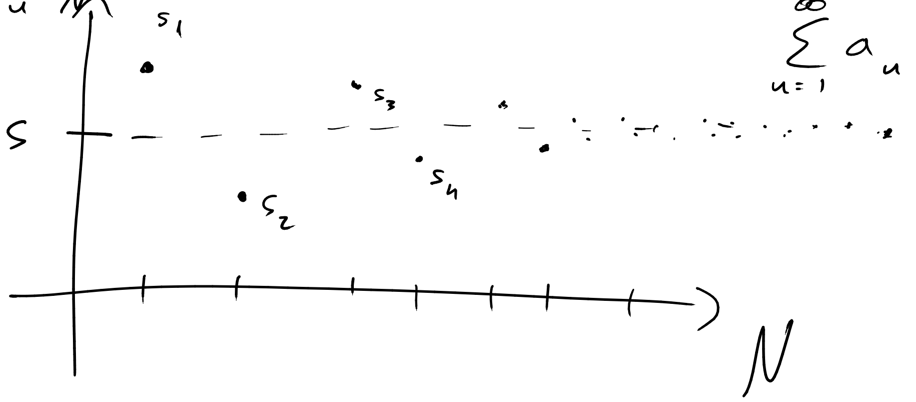
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad \left(a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$$

(i) előjelet vált? igen
(ii) $|a_n| = \frac{1}{\sqrt{n}}$, ez mon. csökken
(iii) $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \to 0$
$\Rightarrow$ Leibniz $\Downarrow$ konvergens

Megj: $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$, $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ feltételesen konv.

$\sum_{n=1}^{N} a_n = s_N$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n =: s$



2. példa

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2n+3}{3n+2}$$

(i) előjelet vált? igen

(ii) mon. csökken 1.1-ben

$$|a_{n+1}| < |a_n|$$

$$\frac{2n+5}{3n+5} < \frac{2n+3}{3n+2}$$

$$\cancel{6n^2} + \cancel{19n} + 10 < \cancel{6n^2} + \cancel{19n} + 15$$

$10 < 15 \Rightarrow$ igen

(iii) $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{3n+2} = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \frac{2}{3} = \nexists$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2}{3}$$

$a_n \not\to 0 \Rightarrow \neg$ Leibniz, DE ettől még lehet konvergens

divergencia teszt: $a_n \not\to 0 \Rightarrow \sum a_n$ $\neg$ konvergens

$\Rightarrow \sum (-1)^n \frac{2n+3}{3n+2}$ nem Leibniz és nem is konv.

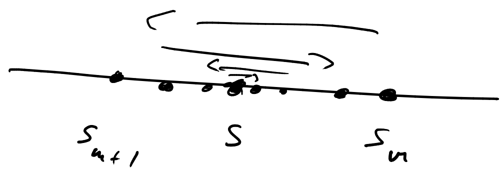
2, Mekkora m esetén lesz

nem ∞, hanem m ← $\sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^n}{n+2}$ részletösszeg hibája

kisebb, mint 10^{-2}?

$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$, $\quad s_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^n}{n+2}$

$|s - s_m| < |a_{m+1}|$



$|s - s_m| < 10^{-2}$

↓

ez teljesül,

ha $|a_{m+1}| \leq 10^{-2}$

$$\underbrace{|s - s_m|}_{\text{ismeretlen}} < \underbrace{|a_{m+1}|}_{\text{ismert}} \leq \underbrace{10^{-2}}_{\frac{1}{100}}$$

$m+3 \geq 100$

$$|a_{m+1}| = \frac{1}{\underbrace{(m+1)+2}_{m+3}} \leq 10^{-2} \Rightarrow m \geq 97$$

másik példa: $\frac{1}{n \cdot 5^n} \leq 10^{-2}$

Taylor polinom

f szép függvény

↳ elég sokszor deriválható

adott x_0 körül felírt n. fokú Taylor polinom

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}}_{\text{számok}} \cdot \underbrace{(x-x_0)^k}_{\text{polinomok}}$$

Tulajdonság

$$f^{(k)}(x_0) = T_n^{(k)}(x_0)$$

$$k = 0, 1, \ldots, n$$

Lagrange-féle maradéktag: $|f(x) - T_n(x)| \leq \max\limits_{\xi:\ x \text{ és } x_0 \text{ között}} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \right|$

(megj: Taylor sor $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$)

3.) $f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$

a) $T_3(x)$

$f^{(0)}(x) = \ln(1+x)$, $f^{(0)}(x_0) = \ln 1 = 0$

$f^{(1)}(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$, $f^{(1)}(x_0) = \frac{1}{1+0} = 1$

$f^{(2)}(x) = -1 \cdot (1+x)^{-2} = \frac{-1}{(1+x)^2}$, $f^{(2)}(x_0) = -1$

$f^{(3)}(x) = (-1) \cdot (-2) \cdot (1+x)^{-3}$, $f^{(3)}(x_0) = 2$

$\vdots$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\cdot(1+x)^{-n}, \quad f^{(n)}(x_0) = (-1)^{n-1}\cdot(n-1)!$$

$$T_3(x) = 0 + \frac{1}{1!}\cdot(x-x_0)^1 - \frac{1}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \frac{2}{3!}\cdot(x-x_0)^3$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

sor: $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{n!}\cdot x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{(-1)^{n-1}}{n}}\cdot x^n$$

b, $$|f(x) - T_3(x)| \le \max_{\xi}\left|\frac{(-1)^3\cdot 3!}{4!}\cdot(1+\xi)^{-4}\cdot x^4\right|$$

$$= \max_{\xi}\frac{1}{4}\left|\frac{x^4}{(1+\xi)^4}\right|$$

c, $$\ln(1.1) = f(0.1) \approx T_3(0.1) = 0.1 - \frac{(0.1)^2}{2} + \frac{(0.1)^3}{3}$$

$$= 0.1 - 0.005 + 0.000\dot{3}$$

$$\left.\begin{aligned} &= 0.09533\dot{3} \\ \ln(1.1) &= 0.\underline{0953}102 \end{aligned}\right\}\text{hiba}$$

$$|f(1.1) - T_3(1.1)| \le \max_{\substack{\xi\in[0,\,0.1]\\([x_0,\,x])}}\frac{1}{4}\cdot\frac{(0.1)^4}{(1+\xi)^4} \underset{\xi=0}{=} \frac{(0.1)^4}{4}$$

$$= 0.000025$$