Fourier transformáció

$$\mathcal{F}(f(ax), s) = \frac{1}{|a|}\,\mathcal{F}\left(f(x), \frac{s}{a}\right)$$

$$\mathcal{F}(f(x-x_0), s) = e^{-isx_0}\,\mathcal{F}(f(x), s)$$

$$\mathcal{F}\left(e^{-\varepsilon|x|}, s\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+s^2}$$

$$\mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}, s\right) = e^{-\frac{s^2}{2}}$$ (Fourier transformáció fixpontja)

1.,
$$\mathcal{F}\left(e^{-\frac{(2x+1)^2}{2}}, s\right) = \frac{1}{2}\,\mathcal{F}\left(e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}, \frac{s}{2}\right) = \frac{e^{-i\frac{s}{2}}}{2}\,\mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}, \frac{s}{2}\right)$$

$ax+b \Rightarrow$ először skálázunk

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}is}}{2}\cdot e^{-\frac{(s/2)^2}{2}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}is}}{2}\cdot e^{-\frac{s^2}{8}}$$

$a(x+b) \Rightarrow$ először eltolunk

$$\mathcal{F}\left(e^{-\frac{(2(x+\frac{1}{2}))^2}{2}}, s\right) = e^{-\frac{1}{2}is}\,\mathcal{F}\left(e^{-\frac{(2x)^2}{2}}, s\right)$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}is}}{2}\,\mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}, \frac{s}{2}\right) = \frac{e^{-\frac{1}{2}is}}{2}\,e^{-\frac{s^2}{8}}$$

$$\mathcal{F}(x f(x), s) = i\,\frac{d}{ds}\,\mathcal{F}(f(x), s)$$

$$\mathcal{F}(f'(x), s) = is\,\mathcal{F}(f(x), s)$$

2.,
$$f(x) = x\,e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$-(-x)\,e^{-\frac{x^2}{2}} = -\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)'$$

$$\mathcal{F}\left(x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, s\right) = i\,\frac{d}{ds}\,\mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}, s\right) = i\,\frac{d}{ds}\,e^{-\frac{s^2}{2}}$$

$$= i\;e^{-\frac{s^2}{2}}\cdot\left(-\frac{2s}{2}\right) = -is\,e^{-\frac{s^2}{2}}$$

$$\mathcal{F}\left(-\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)', s\right) = -is\,\mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}, s\right) = -is\,e^{-\frac{s^2}{2}}$$

Differenciálegyenletek

3., $y'(x) = 2y(x)$ triviális megoldás: $y(x) \equiv 0$

- szeparábilis egyenlet

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = 2 \xrightarrow[x \text{ szerint}]{\text{integrálás}} \underbrace{\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx}_{\ln|y(x)|} = \int 2\,dx = 2x + c$$

$$\ln|y(x)| = 2x + c \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$|y(x)| = e^{2x+c} = e^{c}\cdot e^{2x} = Ce^{2x} \quad C > 0$$

$|.|$ elhagyása után

$$y(x) = Ce^{2x} \quad (C=0 \text{ esetén triv. megoldás})$$

$C \in \mathbb{R}$

- lineáris, állandó együtthatós egyenlet

úgy tűnik, hogy a megoldás mindig "e-ados"

4., $y'(x) = 5y(x)$

tudjuk, hogy $y(x) = e^{\lambda x}$ (esetleg $\cdot c$)

↳ $y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$

$$\lambda e^{\lambda x} = 5 e^{\lambda x} \Rightarrow (\lambda - 5) e^{\lambda x} = 0$$

$e^{\lambda x} > 0$

$$\lambda = 5$$

$$y(x) = c e^{\lambda x}$$

5., $y''(x) + 2y'(x) - 15y(x) = 0$

tipp: mi van, ha itt is $y(x) \sim e^{\lambda x}$?

ha $y(x) = e^{\lambda x}$, akkor $y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$, $y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$ ...

az eredeti egyenletből

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + 2\lambda e^{\lambda x} - 15 e^{\lambda x} = \overbrace{(\lambda^2 + 2\lambda - 15)}^{\text{karakterisztikus polinom}} e^{\lambda x} = 0$$

$e^{\lambda x} > 0$

$$\lambda^2 + 2\lambda - 15 = 0$$

↳ $\lambda_1 = -5$

$\lambda_2 = 3$

tehát $y_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{-5x}$ és $y_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{3x}$

is megoldás, így az általános megoldás lineáris kombinációkból áll elő

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{3x}$$

↳ alapmegoldások

Differencia egyenletek

6., $a_0 = 1$, $a_n = 3a_{n-1}$

nyilván $a_n = 3^n \Rightarrow a_n \sim \lambda^n$

$\downarrow$ visszahelyettesítve

$$\lambda^n = 3 \cdot \lambda^{n-1} \Rightarrow \lambda^{n-1}(\lambda - 3) = 0$$

$\lambda = 0$ ez most nem jó

$\lambda = 3$

7., Fibonacci-sorozat

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \Rightarrow f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = 0$$

sejtjük, hogy $f_n \sim \lambda^n$. behelyettesítve

$$\lambda^n - \lambda^{n-1} - \lambda^{n-2} = \lambda^{n-2}\underbrace{\left(\lambda^2 - \lambda - 1\right)}_{\text{karakterisztikus polinom}} = 0$$

$\lambda \neq 0$

$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

$\hookrightarrow \lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

tehát

$$f_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

a kezdeti feltételekből

$$f_0 = c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2$$

$$f_1 = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - c_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = c_1\sqrt{5} = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}},\ c_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$