

Tételsor

Tantárgy neve: Lineáris algebra és diszkrét matematika II.

Előadó: Lászlóffy András

E-mail: laszloffy.andras@itk.ppke.hu

I. Lineáris algebra

1. **Vektortér, altér, lineáris összefüggőség és függetlenség** (tételek), **generátorrendszer, bázis, dimenzió**, kicserélési tétel.
 2. **Homogén lineáris leképezések, képtér, magtér**, kapcsolatuk az eredeti vektortérrel (biz.), dimenzió tétel (biz.). Példák 2D, 3D vektorokra, polinom-polinom hozzárendelésekre.
 3. **Lineáris transzformáció, sajátérték, sajátvektor**, példák magasabb dimenziós vektorokra, polinom-polinom hozzárendelésekre.
 4. **Leképezés mátrixa, képtér, magtér, sajátérték, sajátvektor kiszámítása a leképezés mátrixával** (biz.).
 5. **Sajátvektorokból álló altér**, különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok közötti összefüggés, **sajátértékek algebrai és geometriai multiplicitása**, közöttük fennálló reláció. Sajátvektorokból álló bázis létezésének feltétele.
 6. **Bázistranszformáció, áttérési mátrix. Leképezés mátrixa bázistranszformáció esetében** (biz.), **Lineáris transzformáció bázistranszformációja** (biz.).
 7. **Diagonalizálható, hasonló mátrixok. Lineáris transzformáció a sajátvektorok bázisában** (biz.). Hasonló mátrixok sajátértékei. Szimmetrikus mátrixok sajátértékeinek és sajátvektorainak tulajdonságai.
 8. **Kvadratikus alakok**, pozitív/negatív/indefinit kvadratikus alakok, **kvadratikus alakhoz tartozó mátrix**, főtengetly transzformáció, kvadratikus alakok diagonalizálása, példa
 9. **Komplex számok definíciója, algebrai alakja, ábrázolása. Komplex számok összege, szorzata**, algebrai struktúrája. **Összeadásra és szorzásra vonatkozó egység és inverzelem** (biz.). Komplex számok hányadosa.
 10. **Komplex szám abszolút értéke, argumentuma, konjugáltja. i hatványai. Trigonometrikus alak, szorzás és osztás trigonometrikus alakban** (biz.), egész kitevőjű hatvány (Moivre-formula, biz.). Komplex számok szorzatának ábrázolása a komplex számsíkon (biz.).
 11. **Komplex szám n . gyökei** (def.), **meghatározásuk trigonometrikus alakban** (biz.), n . egységgyökök struktúrája, primitív egységgyökök definíciója és meghatározása.
 12. **Valós és komplex együtthatós másodfokú egyenletek megoldásai, algebra alaptétele**, komplex konjugált tétel, gyöktényezős alak.
 13. **Komplex számok exponenciális alakja** (biz.), **Euler azonosság. Szorzás, osztás, hatványozás, n . gyökvonás exponenciális alakban**.
- + **Nem kötelező:** Skaláris szorzat általánosítása, Euklideszi terek, példa skaláris szorzatra, norma, metrika, diszkrét metrika, norma és metrika származtatása skaláris szorzatból, szög fogalmának általánosítása.

- + **Nem kötelező:** komplex vektorterek, komplex sajátértékek és sajátvektorok, Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-egyenlőtlenség (biz.).

II. Diszkrét matematika

1. Elsőrendű logika, szintaxis, szemantika kapcsolata a nulladrendű logikával. **Világ leírása elsőrendű logikával. Kvantorok, nyitott és zárt mondatok, zárt mondatok negáltja.** Kvantorok hatásköre.
 2. Elsőrendű logika szintaxisa: **zárójel, ítéletkonstans, műveletek, változószimbólumok, konstansszimbólum, prédikátumszimbólum, függvényszimbólum, kvantorok.** Formulaképzés szabályai. Szemantika: **szintaxis elemeinek jelentése** (függvény, prédikátum, stb.).
 3. **Formalizálás, interpretáció, kiértékelés elsőrendű logikában.** Kielégíthető, **érvényes formula, kontradikció.** Ekvivalens formulák.
 4. **Logikai következmény, konjunktív normálforma, skólem normálforma,** egységesítő helyettesítés, **elsőrendű rezolúció alapgondolata,** lépései, tulajdonságai.
 5. Relációk, **halmazok Descartes-szorzata, reláció definíciója, bináris reláció, ekvivalencia reláció,** partíció, ekvivalencia reláció és partícióra vonatkozó tételek.
 6. Rendezési reláció, **parciális és teljes rendezési reláció, Hasse-diagram, legnagyobb, legkisebb, minimális és maximális elemek,** felső és alsó korlát, korlátos részhalmaz, supremum, infimum.
 7. **Gráf alapfogalmak, irányítatlan, irányított gráfok,** multigráf, pszeudográf, **fokszám, befok, kifok.** Speciális gráfok: k-reguláris gráf, **páros gráf,** Petersen-gráf, **K_5 és $K_{3,3}$ Kuratowski-gráfok,** hiperkocka.
 8. **Gráf fokszámsorozat, teljes gráf** (példák), teljes gráf éleinek száma. **Izomorf gráfok,** kézfogási tétel, tétel egyszerű gráf fokszámainak különbözőségére. **Fokszámok összege és élek számának kapcsolata** (biz.).
 9. Élsorozat, **nyílt és zárt élsorozatok, út, kör, séta. Euler-út, Euler-kör,** tétel Euler-út/kör létezésére. Kör(gráf). Elégséges feltételek kör létezésére (biz.)
 10. **Hamilton út/kör, gráf összefüggőségének elégséges feltétele fokszám alapján** (biz.), Ore tétele, Pósa Lajos tétele. Gráf bejárások: **szélességi, mélységi bejárás/keresés,** bináris fák preorder, inorder és postorder bejárásai. Dijkstra algoritmus.
 11. **Fagráf, fa éleinek száma** (biz.), fa (ekvivalens) tételek. Prüfer-kód előállítás, fa visszaállítása Prüfer-kódból, Prüfer-kód egyértelműségének bizonyítása. **Részgráf, feszítőfa,** Kruskal- és Prim-algoritmusok.
 12. **Síkgráfok** (def.), **Fáry-Wagner-tétel, Euler-féle poliéder tétel** (biz.), Euler poliéder tétel következményei: síkgráf élek számának becslése (biz.), **legkisebb fokszámú csúcs fokszáma** (biz.). Homeomorf gráfok, **Kuratowski-tétel,** Kuratowski-gráfok síkbarajzolhatóak-e (biz.). Poliéder, sztereografikus projekció, szabályos testek.
 13. **Gráfok színezése, kromatikus szám, páros gráfok, kör kromatikus száma** (biz.), síkgráfok kromatikus száma, ötszín-tétel (biz.). Térkép színezése, duális gráf.
- + Algebrai struktúrák, csoport, Ábel csoport, test, vektortér. Nem kötelező: gyűrű, Boole algebra. Möbius-szalag, tórusz, tóruszra rajzolható gráfok.
 - + **Nem kötelező:** Hálózati folyamatok, kapacitás, folyam, javító út, minimális vágás, maximális folyam, minimális vágás és maximális folyam közötti kapcsolat (gyakorlaton szerepelt, csak nem mondtuk ki, a tétel neve: Ford-Fulkerson-tétel).