

# Kocka, ekvipotenciális felület mérés

Levente VAJNA

(Mérési partner: Válik Levente Ferenc)

(Gyakorlatvezető: Tihanyi Attila Kálmán)

Pázmány Péter Katolikus Egyetem, Információs Technológiai és Bionikai Kar

Magyarország, 1083 Budapest, Práter utca 50/a

vajna.levente@hallgato.ppke.hu

**Kivonat**—Ezen a laboron megismerkedünk az ekvipotenciális felületek fogalmával egy gyakorlati példán keresztül, egy kocka alakban forrasztott ellenállásokból álló áramkörön keresztül. Ki is számítjuk, majd meg is mérjük, és összevetjük a tapasztaltakat.

**Keywords**-ekvipotenciális felület; Kirchhoff törvények; kapcsolás; kocka; ellenállás; Ohm törvény

Mérés ideje: 2023.04.27.

## I. FELADAT: MÉRÉSHEZ KAPCSOLÓDÓ ISMERETEK BEMUTATÁSA

### I-A. Ekvipotenciális felület

Az elektrosztatikus mezőben a két pont között a  $q$  próbatöltésen az elektromos mező által végzett munka: [1]

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \int_A^B q \vec{E} d\vec{r} = q \int_A^B \vec{E} d\vec{r}$$

Definíció szerint a két pont közötti feszültség az egységnyi próbatöltésen a két pont között a mező által végzett munka:

$$U_{AB} = \frac{W_{AB}}{q} = \int_A^B \vec{E} d\vec{r}$$

Az egységnyi töltésre jutó potenciális energiát az elektromos mezőben potenciálnak nevezzük.

$$U = \frac{E_p}{q}$$

Az elektrosztatikus mezőben a feszültség egyben a potenciálkülönbség is.

$$U_{AB} = \frac{W_{AB}}{q} = \int_A^B \vec{E} d\vec{r} = U(A) - U(B)$$

Mindezek ismeretében, ha a vezető vagy az elektromos tér két pontja között a potenciálkülönbség nulla, az a két pont, vagy az a sík vagy tér ugyanazon a potenciálon van, idegen szóval ekvipotenciális felület.

Elektrosztatikus mezőben tehát a megegyező potenciálú pontok egy felületen helyezkednek el, ezeket nevezzük ekvipotenciális felületeknek. Ezek a felületek mindig merőlegesek az elektromos mező erővonalaira. Ha egy töltés ezen a felületen mozdul el, akkor az elektromos tér nem végez rajta munkát. [2] Így ha ezek egy vezetőben állnak elő, és összekötnénk ezeket, nem mozdulnának el a töltések a másik irányba, mivel a tér munkát nem végez rajtuk.



1. ábra. Ellenállások leggyakoribb típusa, amikből a kocka is összeállt

### I-B. Ellenállások

Ohmikus ellenállás, jele:  $R$ , mértékegysége  $\Omega$  [ohm]. Minden fogyasztónak, de még vezetéknek, sőt még az embereknek is van ellenállása, amit legtöbbször meg lehet mérni. Középiskolai ismereteinkből ismerjük Ohm törvényét (**I-C**), mely lehetővé teszi számunkra az ellenállások értékeinek kiszámítását az áramerősség és a feszültség ismeretében.

Az ellenállások igen különbözőek lehetnek megjelenésük szerint. Például az integrált áramkörre illeszthető milliméteres nagyságú ellenállások. Ezeknek értékét leggyakrabban egy három-, vagy négyjegyű szám írja le. Vannak továbbá nagyobb, áramköri ellenállások, jellemzően színes csíkokkal megjelölve, ilyen található az 1. ábrán is, és ezek alapján határozható meg az áramköri ellenállás névleges rezisztenciája. [3] A méréslaboron mért kocka alakú áramkör is ilyen ellenállások összeforrasztásából jött létre.

Ezen kívül akadnak állítható értékű ellenállások, az úgynevezett potméterek (ilyen van például erősítők hang-erőszabályozójában, vagy termosztát tekerő beállítóján is), és egyéb felhasználási területeikben eltérő ellenállástípusok. Az ellenállások gyakran csupán kisméretű kerámia testek.

### I-C. Ohm törvénye

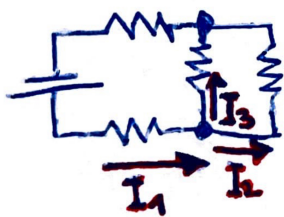
Ohm törvénye alapján az ellenálláson folyó áram egyenesen arányos az ellenálláson eső feszültséggel és fordítva arányos az ellenállás nagyságával. [4] Képlettel ez így néz ki:

$$I_{R_n} = \frac{U_{R_n}}{R_n}$$

A törvényszerűséget Georg Simon Ohm, német fizikus és matematikus ismerte fel először 1826-ban.

### I-D. Kirchhoff I. törvénye

Más néven a csomóponti törvény. Kirchhoff csomóponti törvénye szerint a csomópontba befolyó áramok összege megegyezik a csomópontból kifolyó áramok összegével, azaz a csomópont áramainak előjelhelyes összege zérus. ("Ami befolyik az rögtön kifolyik...", Beatrice)



2. ábra. Kirchoff I. törvényéhez szemléltető ábra

A 2. ábrán láthatóak alapján a törvény azt mondja ki, hogy:

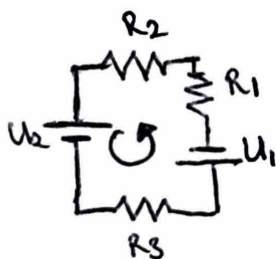
$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Vagyis általánosan:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0$$

I-E. Kirchoff II. törvénye

Más néven a huroktörvény. Kirchoff huroktörvénye szerint a hurokban szereplő feszültségek előjelhelyes összege nulla. [5]



3. ábra. Kirchoff II. törvényéhez szemléltető ábra

A 3. ábrán láthatóak alapján a törvény azt mondja ki, hogy:

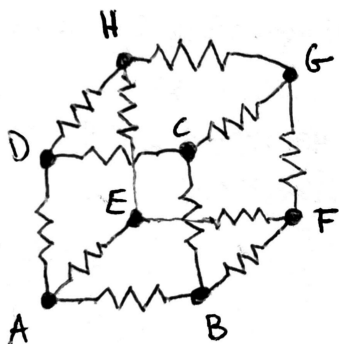
$$U_1 + U_{R1} + U_{R2} + U_2 + U_{R3} = 0$$

Vagyis általánosan:

$$\sum_{k=1}^n U_k = 0$$

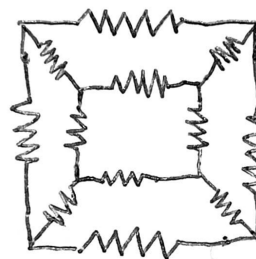
## II. FELADAT: ELŐZETES SZÁMÍTÁSOK

Első lépésként ki kell számítani a 4. ábrán látható ellenálláskocka különböző pontjait 5V-ra és földhöz kapcsolni, és azok eredő ellenállását kiszámítani.



4. ábra. Az ellenállásból megépített kocka rajza

A számításokat az 5. ábrán található kapcsolási rajz segítette.



5. ábra. A kocka ellenállások síkba kiterített vázlatos rajza

Mivel minden ellenállás névleges értéke megegyezik, és ismert, valamint ki is számítottuk a színes gyűrűkből a következőképpen: barna, fekete, fekete, barna, barna =  $100 \cdot 10^1 \Omega \pm 1\%$ , ezért ezzel tudunk számolni.

II-A. A és B ponthoz helyezve a bemeneti feszültséget, és a földet

$$R_e = \frac{1}{\frac{1}{1000} + \frac{1}{\frac{2}{1000} + \frac{1}{\frac{2}{1000} + \frac{1}{\frac{2}{1000} + 1000}}}} = 583.333\Omega$$

Ehhez képest amit mértünk az ELVIS III multiméterrel, az 580.4Ω ami még bőven benne van a  $\pm 1\%$  tartományban.

II-B. A és C ponthoz helyezve a bemeneti feszültséget, és a földet

$$R_e = \frac{2}{\frac{1}{1000 + \frac{1}{1000}} + \frac{1}{\frac{1}{1000}}} = 750\Omega$$

A mérési eredményünk a műszerrel 747Ω volt, ami a szintén benne van a feltüntetett  $\pm 1\%$ -ban.

II-C. A és G ponthoz helyezve a bemeneti feszültséget, illetve a földet

$$R_e = \frac{2}{\frac{3}{1000}} + \frac{1}{\frac{6}{1000}} = 833.33\Omega$$

A kapott mérési eredmény továbbra is beleesik a tartományba, hiszen az eredményünk 829.7Ω volt.

## III. FELADAT: A KOCKA EGYES PONTJAIN VALÓ FESZÜLTSÉG GND (A) PONTHOZ KÉPEST

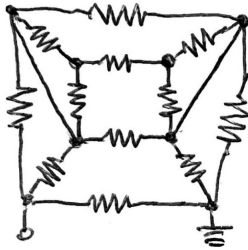
III-A. 5V feszültséget B pontra kapcsolva

A feladat a következő, az elcímben feltüntetett módon mérjem meg a földponthoz (A) viszonyított feszültségértékeket, mérjek eredő ellenállást, és vessek össze az ekvipotenciális felületek összekötése után kapott mérési eredménnyel. Az eredeti pontokbeli feszültségértékek a következők:

| Pontok     | AB | AC    | AD   | AE   | AF    | AG    | AH    |
|------------|----|-------|------|------|-------|-------|-------|
| Feszültség | 5V | 3.25V | 1.8V | 1.8V | 3.25V | 2.89V | 2.16V |

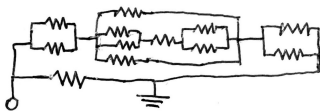
Ki is emeltem az azonos értékeket, azaz ezek ekvipotenciális felületek, tehát ezeket összekötve az  $R_e$  értéke nem fog változni elméletben.

Vettünk ezek után a dobozból néhány csipeszes kábelt, és összeköttöttük az ekvipotenciális felületeket, ahogy a 6. ábra is szemlélteti.



6. ábra. A és B pontokhoz kötve a földet és az 5V-ot, ekvipotenciális felületeket összekötve

Megmértük így is az eredő ellenállást, és csodával határos módon az eredmények változatlanok maradtak. A vicc kedvéért kipróbáltam, hogy nem azonos potenciálon levő pontokat is összeköttem, de ott az eredmény változott, úgyhogy azt anticipáltam, hogy nem hazudott az ELVIS III, tényleg ekvipotenciális felületekre bukkantam.



7. ábra. A a GND és B az 5V, köztük levő eredő ellenállás egyszerűsítve

A 7. ábra azt szemlélteti, hogy a fenti 6. ábrán látott áramkör erre ábrázolható, azaz izomorf a két áramkör. Ebből már meghatározható, hogy az eredő ellenállás tényleg  $583.333\Omega$ .

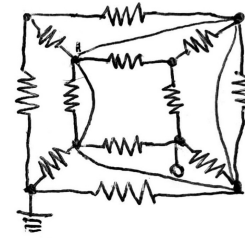
### III-B. 5V feszültséget C pontra kapcsolva

A feladat, hogy a kockának A pontját a GND-re, C pontját az 5V bemeneti feszültségre kapcsolva keressem meg a földponthoz viszonyított azonos potenciálon lévő pontokat. Ezen eredményeket rögzítem az alábbi táblázatban. Ezt követően kell majd az eredő ellenállását így megmérnem, és összehasonlítani a mérési eredménnyel, amit az ekvipotenciális felületek összekötése után kapok.

| Pontok     | AB    | AC | AD    | AE    | AF    | AG    | AH    |
|------------|-------|----|-------|-------|-------|-------|-------|
| Feszültség | 2.53V | 5V | 2.53V | 1.68V | 2.53V | 3.37V | 2.53V |

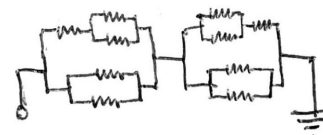
Az azonos feszültségértékeket ki is emeltem, és egy színnel jelenítettem meg. Mivel ezek azonos potenciálon vannak, ezért szintén összeköthetők, vagyis az eredő ellenállásnak változatlanok kellene lenni. A mérés során meg is mértem ezen pontokat összekötve, mindegyiket egy-egy csipeszes dróttal összekötöttem, és bármennyit is választottam ezen B, D, F és H pontok közül ki összekötésre, az eredmény ugyan csak nem változott. Mint látható, négy különböző pont is ekvipotenciális, így ezzel jelentősen megkönnyítve a számolásokat.

A 8. ábrán látott, már összekötött áramkör segít a számolásokban. Először is némi átalakítással megkapható egy leegyszerűsített áramkör, amiből jól láthatóak, és könnyedén kiszámíthatóak az ellenállásértékek. Nem könnyű kibogozni,



8. ábra. A és C pontokhoz kötve a földet és az 5V-ot, ekvipotenciális felületeket összekötve

hogy melyik áramköri gráf izomorf ezzel, a három kapcsolás közül talán ez a legküzdelmesebb, de egészen szépen kijön, és abból már néhány reciprokka könnyedén kiszámolható a teljes eredő ellenállás. Az átalakított rajzot a 9. ábra szemlélteti.



9. ábra. A a GND és C az 5V, köztük levő eredő ellenállás egyszerűsítve

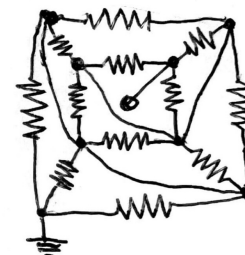
Ez az átalakított áramkör található meg a 9. ábrán, amelyből már a párhuzamos kapcsolás esetén használt képlettel igen könnyen megmondható, hogy az eredő ellenállás tényleg  $750\Omega$ .

### III-C. 5V feszültséget G pontra kapcsolva

Végül a feladat a többihez hasonlóan most az, hogy C helyett a G pontra kössöm a bemeneti feszültséget, és így keressem meg az azonos potenciálon lévő pontokat, a sarkokat egyesével megmérve. Ezt követően pedig vizsgáljam meg a kocka ezen két pont közti eredő ellenállást, majd úgy is nézzem meg, hogy ha az ekvipotenciális felületeket összekötöm csipeszes kábellel. A feszültségértékeket most is egy táblázatban rögzítettem:

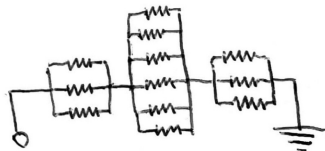
| Pontok     | AB    | AC    | AD    | AE    | AF    | AG | AH    |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|----|-------|
| Feszültség | 2.02V | 3.03V | 2.02V | 2.02V | 3.03V | 5V | 3.03V |

Itt is kiemeltem a jobb láthatóság érdekében az azonos potenciálon lévő pontokat. Ezek az összekötések találhatóak meg a 10. ábrán, vagyis a B, D, E pontok, és a C, F, H pontok összeköthetők, hogy könnyebben számolhassunk velük. Jelen táblázatból kiolvasható, hogy kétszer három pont van ekvipotenciálisan.



10. ábra. A és G pontokhoz kötve a földet és az 5V-ot, ekvipotenciális felületeket összekötve

És habár ez így még mindig kaotikusnak látszik, ha a vonalakkal összekötött pontokat egy pontnak vesszük, már mindjárt szebb lehet, és úgy fog kinézni, mint egy jól megszokott párhuzamos kapcsolás. Nem a leghétköznapiabb, de már igazán számolható. Leegyszerűsített változata ennek az áramkörnek pedig a következőképp néz ki.



11. ábra. A a GND és G az 5V, köztük levő eredő ellenállás egyszerűsítve

Elvégezvén az átalakítást, megkaptam, hogy az áramkör úgy néz ki, mint a 11. ábrán feltüntetett áramkör. A párhuzamos kapcsolásokhoz használt képletet,  $\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$  felhasználva egy gyors számolással megkapható, hogy tényleg 833.333Ω volt a névleges eredő ellenállása az áramkörnek.

#### LEZÁRÁS

A mérések után világosan látszik, hogy mik is azok az ekvipotenciális felületek, hogyan számolhatunk velük egy bonyolultabb áramkörben. Tényleg megfigyelhettük, hogy olyanmódra változatlanok maradnak az eredő ellenállás értékek, hogy akár össze is köthetjük őket, mivel itt ilyenkor a tér illetve a vezeték és a töltések nem végeznek munkát.

Összességében élvezetes volt a méréslabor, hiszen kézzelfoghatóan tapasztaltuk mindazt, ami előadáson elhangzott, illetve középiskolában tanultunk.

#### HIVATKOZÁSOK

- [1] D. K. Endre, „Elektrosztatika,” 12 2019. [Online]. Available: [https://www.uni-miskolc.hu/~www\\_fiz/KovacsE/EAelektrosztat.pdf](https://www.uni-miskolc.hu/~www_fiz/KovacsE/EAelektrosztat.pdf)
- [2] S. László, „Ekvipotenciális vonalak,” 02 2012. [Online]. Available: <https://tetudod.bjg.hu/phocadownloadpap/fizika/emeltsint/Ekvipotencilis%20vonalak.pdf>
- [3] Calculator.net, „Resistor calculator,” 2023. [Online]. Available: <https://www.calculator.net/resistor-calculator.html>
- [4] D. G. J. D. F. Zoltán, „Elektrotechnikai alapkapsolások,” 2019. [Online]. Available: [http://eta.bibl.u-szeged.hu/2162/7/EFOP343\\_16\\_2016\\_00014\\_API\\_Fabulya\\_Zoltn\\_Gyeviki\\_Jnos\\_Elektrotechnikai\\_alapkapsolsok\\_2019\\_06\\_29.pdf](http://eta.bibl.u-szeged.hu/2162/7/EFOP343_16_2016_00014_API_Fabulya_Zoltn_Gyeviki_Jnos_Elektrotechnikai_alapkapsolsok_2019_06_29.pdf)
- [5] L. Ingrid, „Elektrotechnika példatár,” 08 2013. [Online]. Available: <http://siva.bgk.uni-obuda.hu/~langer/Elektrotechnika/Elektropltr.pdf>