

LinAlgDM II. 25-27. gyakorlat: Gráfok II: Dijkstra, Prüfer

2023. május 11-12.

1 Elméleti összefoglaló

Prüfer kód A fák tárolására használjuk. (Prüfer kód és a fák közötti bijekció) A Prüfer kód előállítás:

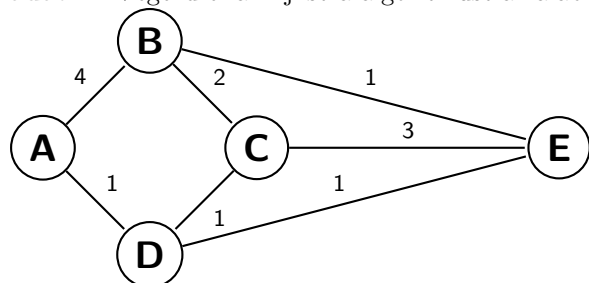
1. a fa csúcsait sorszámozzuk meg 1-től n -ig
2. keressük meg a legkisebb sorszámú levelet
3. ezt a levelet hagyjuk el a hozzá illeszkedő éllel együtt, az él másik csúcsát pedig a Prüfer kód végére írjuk
4. az előző két lépést addig ismételjük, amíg csak 2 csúcsunk marad

Prüfer kód visszafejtés lépésről lépésre:

1. Megnézzük hány számjegy van a kódban, kettővel több csúcsunk lesz (n csúcs).
2. Megnézzük, hogy a kód még nem visszafejtett része szerint melyik a legkisebb kódban nem szereplő (és még nem felrajzolt) szám. (sz n)
3. felírjuk ezt az sz számot mint csúcsot, és összekötjük a kód aktuális számával.
4. továbblépünk a kódban.

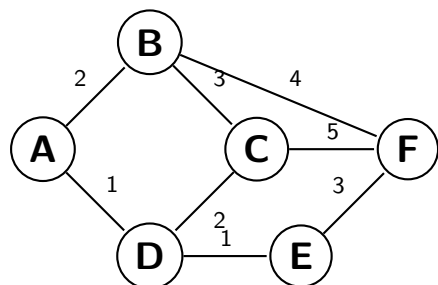
2 Feladatok

Feladat 1. Végezd el a Dijkstra algoritmust az alábbi gráfokon.



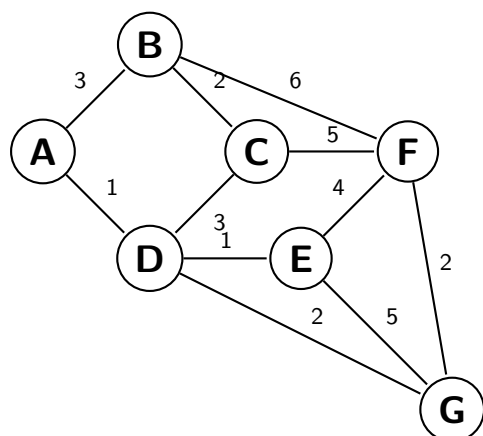
Megoldás.

	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
<i>A</i>	4_A	∞	1_A	∞
<i>D</i>	4_A	2_D		2_D
<i>C</i>	4_A			2_D
<i>E</i>	3_E			



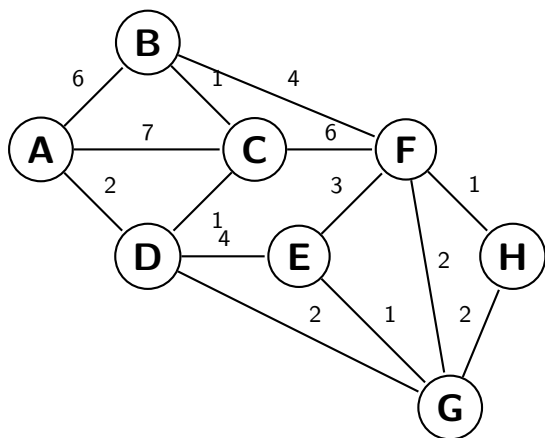
Megoldás.

	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>
<i>A</i>	2_A	∞	1_A	∞	∞
<i>D</i>	2_A	3_D		2_D	∞
<i>B</i>		3_D		2_D	6_B
<i>E</i>		3_D			5_E
<i>D</i>					5_E



Megoldás.

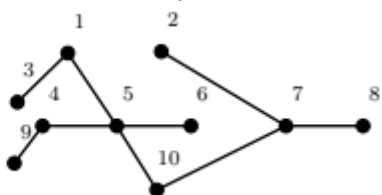
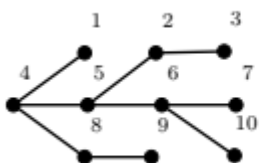
	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>
<i>A</i>	3_A	∞	1_A	∞	∞	∞
<i>D</i>	3_A	4_D		2_D	∞	3_D
<i>E</i>	3_A	4_D			6_E	3_D
<i>B</i>		4_D			6_E	3_D
<i>G</i>		4_D			5_G	
<i>C</i>					5_G	



Megoldás.

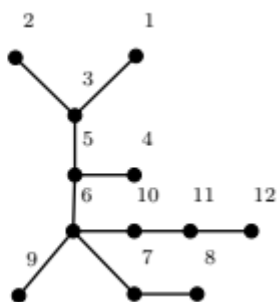
	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>
<i>A</i>	6_A	7_A	2_A	∞	∞	∞	∞
<i>D</i>	6_A	3_D		6_D	∞	4_D	∞
<i>C</i>	4_C			6_D	9_C	4_D	∞
<i>B</i>				6_D	8_B	4_D	∞
<i>G</i>				5_G	6_G		6_G
<i>E</i>					6_G		6_G
<i>F</i>							6_G

Feladat 2. Határozd meg a következő gráfok Prüfer kódját!

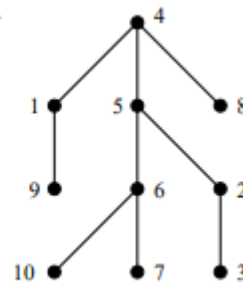
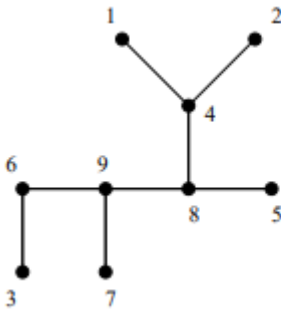


Figyelj oda: minden egyes levéltörlés után frissítsd a levelek sorát.

Megoldás. Bal: 4,2,5,6,8,4,5,6 Jobb: 7,1,5,5,7,10,4,5



Megoldás. Bal: 1,1,1,1,6,5 Jobb: 3,3,5,5,6,7,6,6,10,11



Megoldás. Bal: 4, 4, 6, 8, 8, 9, 9 Jobb: 2, 5, 6, 4, 1, 4, 5, 6

Feladat 3. Rajzoljuk fel a Prüfer kódok alapján az eredeti gráfokat!

1. 3, 3, 3, 6

Megoldás. $n = 4 + 2 = 6$

Azaz 1, 2, 3, 4, 5, 6

Levelek: 1, 2, 4, 5

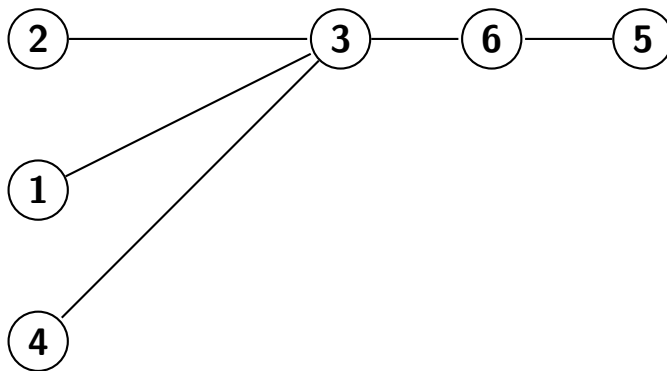
Tehát az első törölt levél az 1-es volt, a szomszédja a 3-as.

A 3-as még szerepel a kódban, tehát nem válhatott levéllé.

Következő törölt levél a 2-es, szomszédja szintén a 3-as.

A 3-as még mindig szerepel a kódban, nem válhatott levéllé, kövi levél: 4-es szomszédja a 3-as.

Eltűnt a 3-as -*é* levéllé változott. Ő a legkisebb levél is egyben, szomszédja a 6. Egy levél maradt, azt a hatoshoz kell kötni.



2. 5, 1, 6, 6

Megoldás. $n = 4 + 2 = 6$

Azaz 1, 2, 3, 4, 5, 6

Levelek: 2, 3, 4 (aki nincs benne a prüfer kódban.)

Tehát az első törölt levél az 2-es volt, a szomszédja az 1-es.

A 5 többet NEM szerepel a kódban, tehát levéllé változott.

Következő törölt levél a 3-as, szomszédja az 1-es.

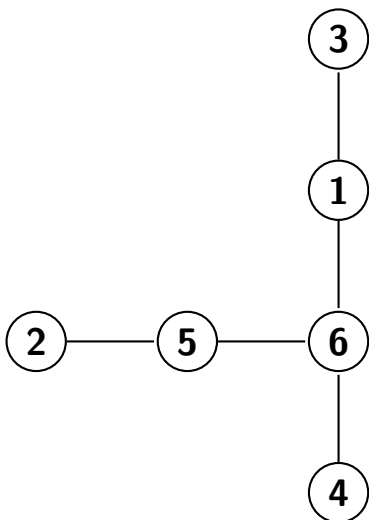
Az 1 többet NEM szerepel a kódban, tehát levéllé változott.

Kövi levél: 1-es szomszédja a 6-os.

A 6-os még szerepel a kódban, tehát nem válhatott levéllé.

Kövi levél: 4-es szomszédja a 6-os.

Egy levél maradt, azt a hatoshoz kell kötni.



3. 6,7,7,2,7,2,1

Megoldás. $n=7+2=6$

Azaz a csúcsok 1,2,3,4,5,6,7,8,9

Levelek: 3,4,5,8,9 (aki nincs benne a prüfer kódban.)

Tehát az első törölt levél (a legkisebb) a 3-as volt, a szomszédja a 6-os.

A 6 többet NEM szerepel a kódban, tehát levéllé változott.

Következő törölt levél a 4-es, szomszédja a 7-es.

A 7-es még szerepel a kódban, tehát nem válhatott levéllé.

Kövi levél: 5-ös szomszédja a 7-es.

A 7-es még szerepel a kódban, tehát nem válhatott levéllé.

Kövi levél: 6-os szomszédja a 2-es.

A 2-es még szerepel a kódban, tehát nem válhatott levéllé.

Kövi levél: 8-as szomszédja a 7-es.

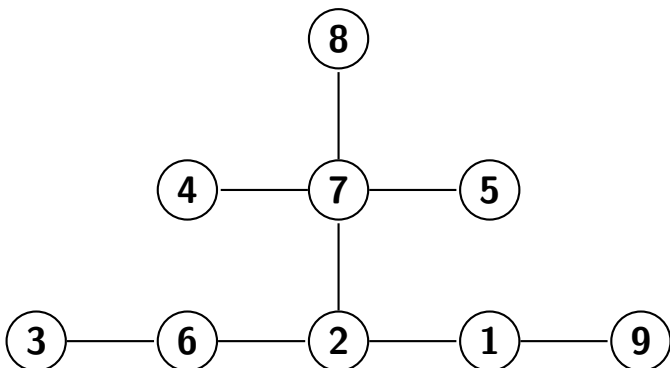
A 6 többet NEM szerepel a kódban, tehát levéllé változott.

Kövi levél: 7-es szomszédja a 2-es.

A 2 többet NEM szerepel a kódban, tehát levéllé változott.

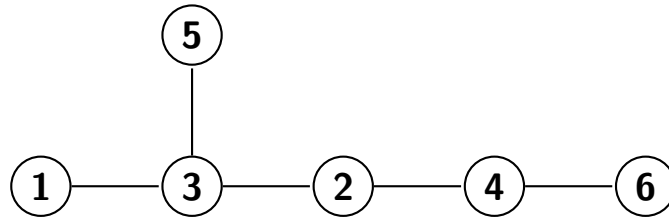
Kövi levél: 2-es szomszédja az 1-es.

Egy levél maradt, azt az egyeshez kell kötni (utsó levelet utsó kódjeggyel).



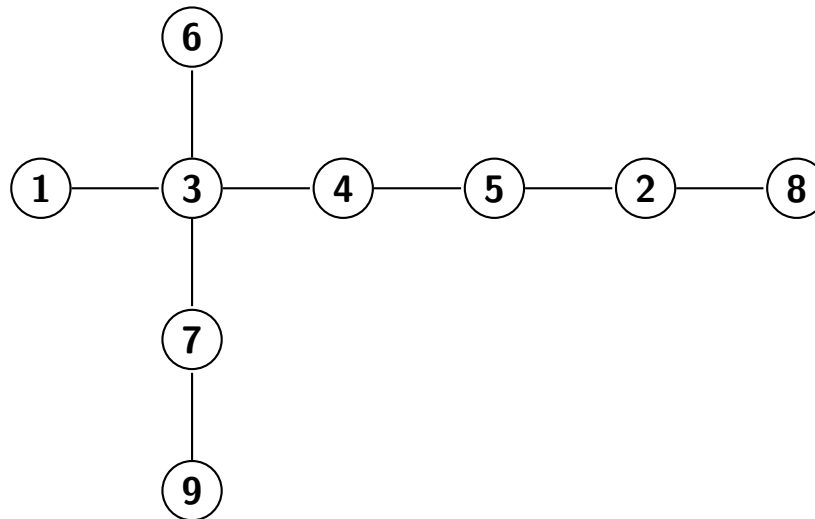
4. 3,3,2,4

Megoldás.



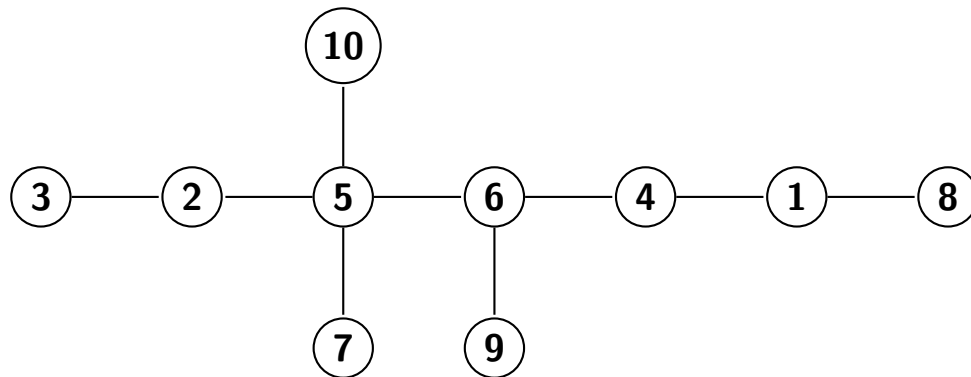
5. 3, 3, 2, 5, 4, 3, 7

Megoldás.



6. 2, 5, 5, 1, 4, 6, 6, 5

Megoldás.



Feladat 4. Hány különböző n db címzett csúcsú fa létezik?

Megoldás. Tekintsük a problémát prüfer kódban. $n-2$ db számom van, mindegyikhez n féle számból választhatok. Ismétléses variáció: n^{n-2} .