LinAlgDM II. 12-14. gyakorlat: Komplex számok II.

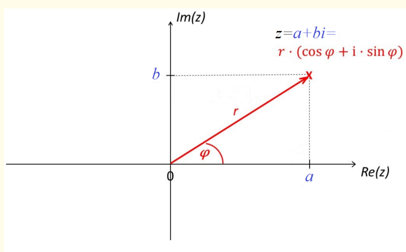
2024. április 11-12.

1 Elméleti összefoglaló

Definition 1. Komplex számok három alakja

A komplex számokat ábrázolhatjuk a síkon. A vízszintes tengely, az ún. *valós tengely* - jelölése: $Re(z)$ - a valós számoknak felel meg, míg a függőleges tengely az ún. *képzetes tengely* - jelölése: $Im(z)$ -, melyen az i képzetes egység is van.

A komplex számoknak három alakját használjuk:

1. **Algebrai alak:**
$$z = \underbrace{a}_{\text{valós rész}} \cdot 1 + \underbrace{b}_{\text{képzetes rész}} \cdot i$$
Ezt értelmezhetjük úgy, hogy az **1** és az $\boldsymbol{i}$ "lineáris kombinációja" maga a komplex szám, így tekinthető kétdimenziós vektornak is, amelynek koordinátái rendre a és b. Persze a komplex számok jóval többet "tudnak", mint a síkbéli vektorok, hiszen ezek is számtestet alkotnak az összeadás és szorzás műveletekkel, csakúgy, mint a valós számok.
A fenti képletben az $a \in \mathbb{R}$ számot a z komplex szám *valós részének*, a $b \in \mathbb{R}$ számot a *z képzetes részének* hívjuk, és a következőképpen jelöljük:
$$Re(z) = a, \quad Im(z) = b$$
2. **Trigonometrikus alak:**
$$z = r \cdot (\cos(\phi) + i \sin(\phi))$$


Ahol r a komplex szám *abszolút értéke* (hossz), ϕ pedig a komplex szám *argumentuma* (valós Re tengely pozitív felével bezárt szög).
3. **Exponenciális alak:**
$$z = r \cdot e^{i \cdot \phi}$$
Ez az alak szintén a fent leírt hosszal és szöggel dolgozik.

Megjegyzés 1. Az utóbbi két alak (a trigonometrikus és az exponenciális) valójában a komplex számsík vektorának *polárkoordinátás* felírása, azaz hossza és szöge van. Mérnöki jelöléssel: $r\angle\phi$

Megjegyzés 2. Az exponenciális alak és a trigonometrikus alak egymásból származtatható az **Euler-formulával**:
$$e^{i \cdot \phi} = \cos(\phi) + i \cdot \sin(\phi).$$

Theorem 2. Komplex számok összege

Összeadni algebrai alakban érdemes, mert itt pontosan úgy számolunk, ahogy a valós számoknál megszoktuk:
$$z_1 = a_1 + b_1 i, \quad z_2 = a_2 + b_2 i$$
$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$$

Theorem 3. Komplex számok szorzata

1. **Algebrai alakban**

$$z_1 = a_1 + b_1 i, \quad z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 \underbrace{i^2}_{-1} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

Mindenkit mindenkivel összeszorzunk.

2. **Trigonometrikus alakban:**

$$z_1 = r_1(\cos(\phi_1) + i \sin(\phi_1)), \quad z_2 = r_2(\cos(\phi_2) + i \sin(\phi_2))$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2))$$

Hosszak szorzódnak, szögek összeadódnak.

3. **Exponenciális alakban:**

$$z_1 = r_1 e^{i\phi_1} \quad z_2 = r_2 e^{i\phi_2}$$

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\phi_1} r_2 e^{i\phi_2} = r_1 r_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$$

Hosszak szorzódnak, szögek összeadódnak.

Theorem 4. Komplex számok hatványa

1. **Trigonometrikus alakban:**

$$z = r(\cos(\phi) + i \sin(\phi))$$

$$z^n = r^n (\cos(n\phi) + i \sin(n\phi))$$

Hossz hatványozódik, szög n-szeres lesz.

2. **Exponenciális alakban:**

$$z = re^{i\phi}$$

$$z^n = r^n e^{in\phi}$$

Hossz hatványozódik, szög n-szeres lesz.

Theorem 5. Komplex számok n. gyöke

Egy komplex számnak pontosan n db n. gyöke van a komplex számok halmazán.

1. **Trigonometrikus alakban:**

$$z = r \cdot (\cos(\phi) + i \sin(\phi))$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\phi + k2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\phi + k2\pi}{n}\right)\right), \quad k = 0, ..., n-1$$

A hosszból n. gyököt vonunk (valós számokon értelmezett gyökvonással!), a szöget n-nel osztjuk és figyelembe vesszük a szögek periódusát, azaz k-szor elforgatjuk.

2. **Exponenciális alakban:**

$$z = r \cdot e^{i\phi}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\phi + k2\pi}{n}}, \quad k = 0, ..., n-1$$

Az n. gyökök hossza az eredeti hossz n. (valós) gyöke lesz, a szög n-nel osztódik és figyelembe vesszük a szögek periódusát, azaz k-szor elforgatjuk.

Definition 6. Egységgyökök

A $z^n - 1 = 0$ egyenlet megoldásait az *n-edik komplex egységgyököknek* nevezzük. Alakjuk a következő:

$$\varepsilon_k = \sqrt[n]{1} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \quad \text{k = 0, 1, ..., n-1}$$

Megjegyzés 3. Láthatjuk, hogy n-edik egységgyökből pontosan n db van.

Definition 7. Primitív egységgyökök

Azon ε_k n-edik komplex egységgyököket, melyek $0, 1., ..., n-1$. hatványai előállítják a többi egységggyököt, *primitív egységgyököknek* hívjuk.

Megjegyzés 4. Egy ε_k egységgyök akkor és csak akkor primitív egységgyök, ha k és n relatív prímek, vagyis $(k, n) = 1$.

Megjegyzés 5. Az előző megjegyzésben szereplő feltétel, vagyis, hogy k és n relatív prímek azt is jelenti, hogy $\varepsilon_k^n = 1$ ahol n a legkisebb pozitív hatvány, amire ez igaz lesz!

Theorem 8. Algebra alaptétele

Minden n-edfokú polinomnak n db gyöke van a komplex számok halmazán. (Ez már tartalmazza a valós gyököket is: ezek azok a komplex gyökök, melyek képzetes része 0.)

Proposition 9. Valós együtthatós egyenletek gyökei

Adott egy $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ polinom, mely valós együtthatós, azaz $\forall k : a_k \in \mathbb{R}$. Ekkor a $p(x)$ gyökei vagy valósak, vagy ha nem valósak, akkor a komplex konjugáltjuk is gyöke a polinomnak.

Megjegyzés 6. Egy $n = 2m+1$-edfokú ($m \in \mathbb{N}$) valós együtthatós polinomnak legalább egy valós gyöke mindenféleképpen kell legyen!

Megjegyzés 7. Egy másodfokú valós együtthatós polinom gyökeire igazak a következők:

$$D = b^2 - 4ac > 0 \to x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$
$$D = b^2 - 4ac = 0 \to x_1 = x_2 \text{ és } x_1 \in \mathbb{R}$$
$$D = b^2 - 4ac < 0 \to x_1, x_2 \in \mathbb{C} \text{ és } \bar{x}_1 = x_2.$$

2 Feladatok

Feladat 1. Adott $z_1 = 2\big(\cos(120°) + i \cdot \sin(120°)\big)$ és $z_2 = 2\big(\cos(330°) + i \cdot \sin(330°)\big)$. Adjuk meg az alábbi műveletek eredményét trigonometrikus és algebrai alakban is!

a) $z_1 \cdot z_2$

b) $\dfrac{z_1}{z_2}$

c) z_1^5

Feladat 2. Adjuk meg az alábbi, exponenciális alakban megadott komplex számok trigonometrikus és algebrai alakjait: $e^{i\frac{\pi}{2}}$, $e^{i\frac{\pi}{4}}$, $e^{i\frac{\pi}{6}}$, $e^{i\frac{\pi}{3}}$!

Feladat 3. Végezzük el az alábbi műveleteket exponenciális alakban, ha $z_1 = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$ és $z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}}$! Adjuk meg az eredményeket trigonometrikus és algebrai alakban is!

a) $z_1 \cdot z_2$

b) $\dfrac{z_2}{z_1}$

Feladat 4. Írjuk fel a $z = 2i - 2$ komplex szám exponenciális és trigonometrikus alakját!

Feladat 5. Adjuk meg a $z = 2.5 \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}}$ szám trigonometrikus és algebrai alakját!

Feladat 6. Adjuk meg a $z = 2 + 2i$ komplex szám 3. gyökeit trigonometrikus alakban!

Feladat 7. Adjuk meg a $z = -1$ komplex szám ötödik gyökeit!

Feladat 8. Adjuk meg a $z = 8i$ komplex szám exponenciális alakját és vonjunk 3. gyököt ebben az alakban! Ábrázoljuk a megoldásokat!

Feladat 9. Vonjunk negyedik gyököt a $z = i - 1$ komplex számból exponenciális alakban! Ábrázoljuk a megoldásokat!

Feladat 10. Adjuk meg a 12. egységgyököket és primitív 12. egységgyököket exponenciális alakban!

Feladat 11. Adjuk meg a primitív 9. egységgyökök exponenciális alakját!

Feladat 12. Vázoljuk fel az $f(t) = e^{1+i2\pi t}$, $t \in [0, \infty)$ görbét a komplex síkon!

Feladat 13. Számoljuk ki az alábbi komplex kifejezés értékét:

$$\frac{(\sqrt{3}+i)^4 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) e^{i150°} - 4(e^{i\pi})^6 + i^9}{2 + 5i}$$

Feladat 14. Oldjuk meg az alábbi másodfokú egyenleteket és ellenőrizzük a megoldásunkat helyettesítéssel!

a) $z^2 + 4z + 3 = 0$

b) $z^2 + 4z + 4 = 0$

c) $z^2 + 4z + 5 = 0$

d) $z^2 + (-3 - i)z + 2 + 2i = 0$

Feladat 15. Írjuk fel azt a harmadfokú, valós együtthatós polinomot, melynek két gyöke -4 és $2 + 3i$!

Feladat 16. Adott a $p(x) = x^7 + 4x^3 + 5x + 10$ polinom.

a) Hány gyöke van a $p(x)$ polinomnak a komplex számok halmazán, ha a többszörös gyököket többszörösen számoljuk?

b) Legalább hány valós gyöke van a fenti $p(x)$ polinomnak, ha a többszörös gyököket többszörösen számoljuk?

c) Pontosan hány valós gyöke van a fenti $p(x)$ polinomnak, ha a többszörös gyököket többszörösen számoljuk?

Feladat 17. Hány valós gyöke van a $p(x) = (2x - 1)(x^2 - 2)(5x^2 + 1)$ polinomnak? Keressük meg az összes gyököt!

Feladat 18. Írjuk fel azt a legalacsonyabb fokú, valós együtthatós polinomot, amelynek gyökei $x_1 = 5$ és $x_2 = -2 + 2i$!

Feladat 19. Hány nem valós gyöke van a $p(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^3$ polinomnak?