

Rafael O. Ruggiero

**Geodésicas em superfícies de \mathbb{R}^3 , uma
introdução**
**III^o Colóquio de Matemática da Região
Sul**

Florianópolis, SC

2014

Rafael O. Ruggiero

Geodésicas em superfícies de \mathbb{R}^3 , uma introdução
III^o Colóquio de Matemática da Região Sul

Minicurso apresentado no III^o
Colóquio de Matemática da Re-
gião Sul, realizado na Universi-
dade Federal de Santa Catarina,
em maio de 2014.

Florianópolis, SC

2014

Resumo

Apresentamos uma introdução à teoria das geodésicas em superfícies do espaço Euclidiano com aplicações a problemas de rigidez geométrica.

Palavras-chaves: Geodésica. Superfície em \mathbb{R}^3 . Superfície de revolução. Curvatura de Gauss. Rigidez geométrica.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Gráfico de $f(x, y) = x^2 - y^2$	20
Figura 2 – Projeção estereográfica	25
Figura 3 – Parabóloide $f(x, y) = x^2 + y^2$ com meridianos e paralelos	27
Figura 4 – Helicóide	89
Figura 5 – Hiperbóloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$	90
Figura 6 – Superfície de revolução completa com curva- tura negativa	97

Sumário

	Introdução	9
1	Superfícies em \mathbb{R}^3	11
1.1	Estrutura diferenciável: parametrizações e plano tangente	11
1.1.1	Funções contínuas e diferenciáveis	14
1.1.2	Planos tangentes, fibrado tangente	16
1.2	Exemplos	19
1.2.1	Gráficos de funções	19
1.2.2	Superfícies de nível	22
1.2.3	A esfera	23
1.2.4	Superfícies de revolução	26
1.3	Campos vetoriais, derivações, produto de Lie	29
2	Superfícies como Estruturas Riemannianas, geodésicas	33
2.1	Espaços métricos, Grécia antiga e geodésicas	33
2.2	Derivada covariante e mecânica Newtoniana	35
3	Geodésicas e simetrias, geodésicas em superfícies de revolução	41
3.1	Derivadas covariantes de paralelos e meridianos em superfícies de revolução	42
3.2	Geodésicas em superfícies de revolução: a equação de Clairaut	45
4	Primeiro resultado de rigidez: geodésicas planas e superfícies de revolução	53

4.1	Geodésicas e interseções da superfície com planos	53
4.2	Gráficos onde toda geodésica é uma curva plana	54
4.3	Prova do Teorema 4.1	57
5	Um pouco de cálculo variacional	59
6	Segunda forma fundamental e curvatura de Gauss	67
6.1	Aplicação normal de Gauss e curvatura das superfícies	67
6.1.1	Geometria das curvas em \mathbb{R}^3	67
6.2	A curvatura de Gauss-Kronecker	71
6.2.1	O Teorema Egregium de Gauss	75
6.2.2	Alguns teoremas importantes de rigidez	76
6.3	Curvaturas principais e pontos umbílicos	78
6.4	Mais sobre geodésicas planas e rigidez	84
6.4.1	Aplicação Exponencial	84
6.4.2	Demonstração do Teorema 6.6	86
6.5	Superfícies regradas	88
6.6	Exercícios complementarios	92
7	Classificação das superfícies de revolução com curvatura constante	93
7.1	equações diferenciais de ordem 2 com coeficientes constantes	94
7.2	Superfícies de revolução com curvatura zero	95
7.3	Superfícies com curvatura negativa constante	96
7.4	Superfícies com curvatura positiva constante: esferas	98

Referências	101
-----------------------	-----

Introdução

A noção de geodésica modela matematicamente a resposta à seguinte pergunta natural: qual é a curva que liga dois pontos em um espaço métrico conexo por arcos cujo comprimento é o menor possível? Essa pergunta já era formulada pelos gregos antigos que deduziram a partir de observações astronômicas que a terra devia ser redonda. No espaço Euclidiano todos aprendemos que o caminho mais curto entre dois pontos é o segmento de reta que os liga. Do ponto de vista da mecânica as retas no espaço Euclidiano parametrizadas com velocidade constante representam as trajetórias do movimento retilíneo uniforme livre de forças. Mas em espaços não Euclidianos achar uma geodésica é uma tarefa em geral muito mais complicada e tratada somente nos cursos superiores de geometria Riemanniana. E ainda podemos nos perguntar se as geodésicas, caso existam em um certo espaço, estão de alguma forma relacionadas com o movimento uniforme. O objetivo da presente monografia é fazer uma introdução à teoria das geodésicas em espaços que se bem não são Euclidianos são bastante familiares a todos nós: as superfícies em \mathbb{R}^3 . Abordaremos os dois pontos de vista mencionados anteriormente, o geométrico e o físico, e mostraremos que de fato existe uma relação entre ambos.

A exposição começa com um breve sumário das definições básicas relativas às superfícies em \mathbb{R}^3 . Segue com uma descrição das principais famílias de superfícies estudadas nos cursos de Cálculo elementar: gráficos e superfícies de revolução, que

serão nossos objetos de trabalho através de toda a monografia. Apresentamos a definição de geodésica tanto ponto de vista do cálculo variacional como do ponto de vista da mecânica clássica, e mostramos a conexão que existe entre ambas as noções. Com a ajuda de ferramentas do cálculo a várias variáveis analisamos as geodésicas em superfícies de revolução e em gráficos.

Como conclusão apresentamos dois resultados que mostram o poder das ferramentas do cálculo elementar no estudo de problemas de rigidez. O primeiro deles consiste em caracterizar as superfícies de revolução como as superfícies que possuem um ponto, o vértice da superfície, tal que toda geodésica que passa por esse ponto é uma curva plana. Sabemos que as geodésicas que passam pelo vértice de uma superfície de revolução são os meridianos, que são curvas planas. O que mostramos na monografia é justamente a recíproca deste fato. O segundo resultado consiste em mostrar que se toda geodésica de uma superfície conexa é uma curva plana então a superfície está contida em uma esfera Euclideana ou em um plano Euclidiano. Em particular, se a superfície for compacta então deve ser uma esfera. Como pré-requisitos para a leitura da monografia bastam um curso de cálculo diferencial em \mathbb{R}^n e algumas noções da teoria básica das equações diferenciais ordinárias. Esperamos aproximar o estudante de graduação em matemática, física ou engenharia do tema das geodésicas, e motivar seu interesse pela geometria e os sistemas mecânicos.

1 Superfícies em \mathbb{R}^3

O objetivo deste capítulo é fazer uma introdução à noção de superfície diferenciável tomando como referência a família das superfícies em \mathbb{R}^3 . Não pretendemos elaborar um texto introdutório de geometria diferencial por não ser realista dentro das limitações de tempo do minicurso. Restringimos nossa exposição ao conjunto mínimo necessário de definições, exemplos e resultados da teoria básica. Como pré-requisitos para o capítulo são suficientes um conhecimento básico de cálculo em várias variáveis reais, onde incluímos em particular o teorema da função inversa e o teorema da função implícita. Ao leitor interessado em aprofundar seu conhecimento sobre os temas do capítulo recomendamos a consulta dos livros : Do Carmo [3], Spivak [4], Hicks [1].

1.1 Estrutura diferenciável: parametrizações e plano tangente

Começamos por estabelecer algumas notações que usaremos durante toda a exposição. Uma função $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida em um aberto U do plano é de classe C^k , $k \geq 1$, se suas derivadas parciais até ordem k existem e são contínuas. Identificamos a classe C^0 com a classe das funções contínuas. De forma análoga definimos uma função de classe C^k $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ se as derivadas parciais das funções coordenadas $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ de f , $f(p) = (f_1(p), f_2(p), \dots, f_n(p))$ são funções de classe C^k . O

produto interno de dois vetores w, n , no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 é

$$\langle w, n \rangle = \langle (w_x, w_e, w_z), (n_x, n_e, n_z) \rangle = w_x n_x + w_e n_e + w_z n_z.$$

O produto vetorial de dois vetores w, n é um vetor definido por

$$\begin{aligned} w \times n &= (w_x, w_e, w_z) \times (n_x, n_e, n_z) \\ &= (w_e n_z - w_z n_e, -(w_x n_z - w_z n_x), w_x n_e - w_e n_x). \end{aligned}$$

Uma **superfície em \mathbb{R}^3 diferenciável** M de classe C^k , $k \geq 0$, é um subconjunto de \mathbb{R}^3 que pode ser parametrizado localmente utilizando duas coordenadas. Mais precisamente, uma superfície em \mathbb{R}^3 admite uma coleção de aplicações Φ_i e uma cobertura por subconjuntos U_i obtidos como interseções de abertos conexos A_i de \mathbb{R}^3 com a superfície M , ou seja $M = \cup_i U_i$, que satisfazem as seguintes propriedades:

1. As aplicações Φ_i são bijeções $\Phi_i : V_i \longrightarrow U_i$, onde V_i é um aberto conexo de \mathbb{R}^2 ,
2. Cada Φ_i é uma função de classe C^k como aplicação de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^3 , de posto máximo. Ou seja, o posto da aplicação diferencial de Φ_i , que é uma matriz 2×2 , é dois em todo ponto, para todo i .

As funções Φ_i são chamadas **parametrizações locais** da superfície, suas inversas $(\Phi_i)^{-1}$ (existem pelo teorema da função implícita) são chamadas **coordenadas** ou **cartas locais** da superfície, e as funções compostas

$$(\Phi_j)^{-1} \circ \Phi_i : V'_i \subset V_i \longrightarrow U_j,$$

que são difeomorfismos de classe C^k como aplicações entre subconjuntos de \mathbb{R}^2 , são chamadas **m**udanças de coordenadas. A coleção $\{(U_i, \Phi_i)\}$ é denominada um **a**tlas diferenciável de classe C^k de M , em clara referência aos mapas e à cartografia.

A definição de superfície implica que existe nela o que se denomina uma **e**strutura de espaço topológico, ou seja, existe uma coleção de subconjuntos \mathfrak{F} que chamamos **a**bertos que satisfaz,

1. A união de qualquer número de elementos de \mathfrak{F} é um elemento de \mathfrak{F} .
2. A interseção de um número finito de elementos de \mathfrak{F} é um elemento de \mathfrak{F} .
3. M e o conjunto vazio são elementos de \mathfrak{F} .

Esta coleção de subconjuntos não é mais do que a formada pelas uniões de qualquer número de interseções finitas de imagens de conjuntos abertos do plano por todas as parametrizações possíveis de M . De fato basta tomar um atlas dado e formar a coleção das uniões e interseções finitas de imagens de abertos do plano pelas parametrizações do atlas (exercício).

A estrutura topológica da superfície é fundamental em cálculo pois permite generalizar de forma natural uma série de ferramentas analíticas de \mathbb{R}^2 de grande importância no estudo da geometria das mesmas. A noção de aberto permite definir funções contínuas e diferenciáveis $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ por exemplo. A partir desta ideia é possível definir funções contínuas e diferenciáveis entre superfícies, e o conceito de campo vetorial no plano estende-se sem maiores problemas às superfícies.

Lema 1.1.1. *(exercício) Seja M uma superfície diferenciável em \mathbb{R}^3 . Então todo aberto de M é a interseção de um aberto do espaço \mathbb{R}^3 com a superfície M .*

Gostaríamos de salientar que a noção de superfície diferenciável em \mathbb{R}^3 generaliza-se a objetos mais abstratos, chamados também superfícies diferenciáveis nos textos de geometria diferencial, mas que não são necessariamente subconjuntos de \mathbb{R}^3 . De fato, a existência de atlas com mudanças de coordenadas diferenciáveis se verifica em muitos objetos que podem ser considerados naturalmente como superfícies, por estar modelados localmente por parametrizações de abertos do plano (como o plano projetivo por exemplo).

Nossa monografia não tratará este tipo de superfícies abstratas.

1.1.1 Funções contínuas e diferenciáveis

Uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua se a preimagem de todo intervalo aberto é um aberto em M , segundo a topologia definida em M pelas parametrizações locais de um atlas dado.

Exercício: Verificar que a definição de continuidade não depende do atlas.

Exercício: Verificar que a definição de continuidade coincide com a definição de continuidade de funções utilizada em cálculo.

Da mesma forma, dizemos que uma função $f : M \rightarrow N$ entre duas superfícies M, N é contínua se a preimagem de um aberto de N é um aberto de M .

Uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável de classe C^k se existe um atlas (U_i, Φ_i) de M tal que as funções $\Psi_j(f(\Phi_i^{-1}))$ são de classe C^k como aplicações entre subconjuntos do plano. De forma análoga, dizemos que uma função $f : M \rightarrow N$ entre duas superfícies M, N , é de classe C^k se dados atlas $\{U_i, \Phi_i\}$ de M , e $\{A_j, \Psi_j\}$ de N , tem-se que as funções $\Psi_j(f(\Phi_i^{-1}))$ são funções de classe C^k entre subconjuntos de \mathbb{R}^2 .

Exercício: Verificar que a noção de diferenciabilidade de funções entre superfícies não depende do atlas.

Estas definições parecem um pouco abstratas, afinal estamos falando sobre objetos que são subconjuntos de \mathbb{R}^3 e é razoável pensar que exista alguma relação entre a diferenciabilidade em superfícies e a diferenciabilidade das funções em \mathbb{R}^3 . As noções de diferenciabilidade expostas estão baseadas em noções análogas relativas às chamadas superfícies abstractas: a existência de atlas com mudanças de coordenadas diferenciáveis seria suficiente para definir um critério de diferenciabilidade de funções. Resulta que no caso das superfícies de \mathbb{R}^3 esta noção "intrínseca" de diferenciabilidade é herdada do espaço ambiente.

Teorema 1.1. (*exercício*) *Seja M uma superfície diferenciável de classe C^k em \mathbb{R}^3 . então, toda função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^r se e somente se para todo ponto $p \in M$ existe um aberto $B(p)$ de \mathbb{R}^3 e uma função $F : B(p) \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r , tal que $F(x) = f(x)$ para todo $x \in M \cap B(p)$.*

Este teorema nos diz em particular que a restrição de funções diferenciáveis do espaço Euclidiano a uma superfície M define funções diferenciáveis na superfície. Assim como no Teorema 1.1.1, a demonstração é uma aplicação do teorema da função implícita.

1.1.2 Planos tangentes, fibrado tangente

A estrutura diferenciável de uma superfície M em \mathbb{R}^3 leva naturalmente à noção de **plano tangente** que definimos a seguir.

Seja $\Phi : V \rightarrow U$ uma parametrização local de uma superfície M de classe C^k , $k \geq 1$. Podemos expressar Φ em coordenadas cartesianas de \mathbb{R}^3 como

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), e(u, v), z(u, v)),$$

onde (u, v) são as coordenadas cartesianas de $V \subset \mathbb{R}^2$. Como o posto da aplicação diferencial $D\Phi$ é 2 em todo ponto, os vetores

$$\partial_u(\Phi(u, v)) = \frac{\partial}{\partial u}\Phi(u, v) = \frac{\partial}{\partial t}\Phi(u + t, v) \big|_{t=0},$$

$$\partial_v(\Phi(u, v)) = \frac{\partial}{\partial v}\Phi(u, v) = \frac{\partial}{\partial t}\Phi(u, v + t) \big|_{t=0},$$

são linearmente independentes em todo ponto $\Phi(u, v)$ de M . Notemos que

$$\partial_u(\Phi(u, v)) = D_{(u,v)}\Phi(1, 0),$$

$$\partial_v(\Phi(u, v)) = D_{(u,v)}\Phi(0, 1).$$

e pela linearidade das derivadas parciais, temos que

$$D_{(u,v)}\Phi(a, b) = a\partial_u(\Phi(u, v)) + b\partial_v(\Phi(u, v)).$$

Portanto, a imagen da aplicação diferencial $D_{(u,v)}\Phi$ é um plano em \mathbb{R}^3 que contém os vetores tangentes $\alpha'(0)$ de todas as curvas diferenciáveis $\alpha(t) \subset M$ tais que $\alpha(0) = p$. Por este motivo, o plano gerado pela imagen de $D_{(u,v)}\Phi$ é chamado **Plano tangente** a M em $p \in M$, e é denotado por T_pM . Os vetores ∂_u, ∂_v são chamados **vetores tangentes da parametrização**.

Exercício: O plano tangente T_pM não depende da parametrização local utilizada em uma vizinhança de p em M .

O conjunto dos planos tangentes

$$TM = \cup_{p \in M} T_pM$$

é chamado **Fibrado tangente** de M .

A equação do plano tangente T_pM pode-se obter facilmente em termos do produto vetorial $n(\Phi(u, v)) = \partial_u(\Phi(u, v)) \times \partial_v(\Phi(u, v))$. Denotaremos este vetor por **vetor normal associado à parametrização**. Com efeito, recordemos que o produto vetorial $w \times n$ é perpendicular ao plano gerado por w, n , e a equação do plano perpendicular a um vetor $\tau \in \mathbb{R}^3$ que passa por um ponto $p = (x_0, e_0, z_0)$ é

$$\langle \tau, (x - x_0, e - e_0, z - z_0) \rangle = 0.$$

Assim que se as coordenadas em \mathbb{R}^3 de $\Phi(u, v) = p$ são $p = (x_0, e_0, z_0)$, temos

$$T_pM = \{(x, e, z) \text{ t.q. } \langle n(\Phi(u, v)), (x - x_0, e - e_0, z - z_0) \rangle = 0\}.$$

Exercício: Se M é de classe C^k , $k \geq 1$, então os planos tangentes T_pM dependem de p continuamente na topologia

C^{k-1} . Ou seja, se $T_p M$ tem uma equação do tipo

$$a(p)(x - x_0) + b(p)(e - e_0) + c(p)(z - z_0) = 0,$$

onde $p = (x_0, e_0, z_0)$, então as funções $a(p)$, $b(p)$, $c(p)$ são de classe C^{k-1} e sus derivadas parciais até ordem $k - 1$ são funções contínuas de p .

Uma vez definida a noção de plano tangente, obtemos uma maneira "intrínseca" de descrever a aplicação diferencial de uma função diferenciável entre superfícies. Seja $F : M \rightarrow N$ uma função diferenciável entre duas superfícies. Dado um ponto $p \in M$, a diferencial de f em p é uma transformação linear

$$D_p F : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$$

que associa vetores tangentes a M vetores tangentes a N . Podemos "prescindir" das coordenadas cartesianas de \mathbb{R}^3 para escrever a expressão analítica de $D_p F$. Por definição, dado $v \in T_p M$ a derivada $D_p F(v)$ é

$$D_p F(v) = \frac{\partial}{\partial t} F \circ (\gamma_v(t)) \big|_{t=0},$$

onde $\gamma_v(t)$ é uma curva diferenciável em M tal que $\gamma_v(0) = p$, $\gamma'_v(0) = v$. a definição não depende da curva $\gamma(t)$ que passe por p em $t = 0$ sempre que sua derivada neste ponto seja v . Usando coordenadas locais (x, e) em uma vizinhança de p em M , e (s, t) em uma vizinhança de $F(p)$ em N , temos que

$$D_p F(\partial_x) = a_{11} \partial_s + a_{12} \partial_t,$$

$$D_p F(\partial_e) = a_{21} \partial_s + a_{22} \partial_t,$$

e os coeficientes a_{ij} nos permitem obter a matriz de $D_p F$ na base ∂_s, ∂_t , ou seja, usando apenas as coordenadas da parametrização e não as coordenadas do espaço Euclidiano.

Analogamente, podemos calcular a diferencial de uma função escalar $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ em

termos das derivadas direccionais de f com respeito aos vetores tangentes de uma parametrização dada: se $v = a\partial_x + b\partial_e$ então

$$D_p f : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$D_p f(v) = a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial e}.$$

A redução da dimensão de 3 para 2 no estudo das superfícies em \mathbb{R}^3 facilitará substancialmente as demonstrações que apresentaremos no texto.

1.2 Exemplos

1.2.1 Gráficos de funções

Os exemplos mais conhecidos de superfícies nos cursos de cálculo são os gráficos de funções diferenciáveis. Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^k , então o gráfico $\Gamma(f)$ de f cuja definição é

$$\Gamma(f) = \{(x, e, f(x, e)), (x, e) \in U\}$$

é uma superfície de \mathbb{R}^3 de classe C^k . a própria definição de gráfico nos dá uma parametrização bastante natural do mesmo,

$$\Phi(x, e) = (x, e, f(x, e)).$$

Os gráficos tem a particularidade de admitir uma única parametrização que os descreve totalmente como superfície em \mathbb{R}^3 . Em geral, não é possível parametrizar uma superfície com uma única parametrização. Os vetores tangentes da parametrização são

$$\partial_x = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}),$$

$$\partial_e = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial e}).$$

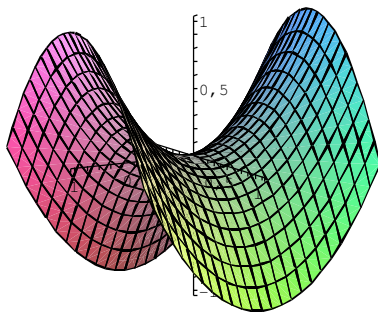


Figura 1 – Gráfico de $f(x, y) = x^2 - y^2$

O vetor normal associado à parametrização é

$$n(\Phi(x, e)) = (-\frac{\partial f}{\partial x}(x, e), -\frac{\partial f}{\partial e}(x, e), 1).$$

A equação do plano tangente ao gráfico em $(x_0, e_0, f(x_0, e_0))$ é

$$z = f(x_0, e_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, e_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial e}(x_0, e_0)(e - e_0).$$

Reconhecemos nesta fórmula a aproximação de Taylor de f de primeira ordem, o que tem um significado bastante geométrico: o plano tangente em um ponto $p = (x_0, e_0, f(x_0, e_0)) \in \Gamma(f)$ é a melhor aproximação do gráfico por um plano que contém o ponto p . Dito plano é o gráfico da função linear $z = L(x, e)$.

O conjunto dos gráficos é importante no estudo local das superfícies devido à seguinte propriedade:

Proposição 1.2.1. *Toda superfície M de classe C^k , $k \geq 1$ em \mathbb{R}^3 é localmente um gráfico. Ou seja, dado um ponto $p \in M$, existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, uma função de classe C^k $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ (que depende de p em geral), tal que a imagem da função $\Phi(x, e, f(x, e))$ é uma vizinhança aberta de M que contém p .*

Exercício: Demonstrar a proposição anterior.

Sugestão: Uma forma geométrica de demonstrar esta afirmação é considerar o plano tangente $T_p M$ como uma aproximação local de M . o vetor normal $n(p)$ é perpendicular a $T_p M$ e portanto, as retas paralelas a $n(p)$ são transversais a M em um aberto adequado de M que contém p , simplesmente pela continuidade dos planos tangentes a M em uma vizinhança de p . E em particular, existe um aberto $V_p \subset M$ que contém p onde para todo $q \in V_p$ tem-se que a interseção com V_p da reta paralela a $n(p)$ que passa por q é exatamente q . Seja $U \subset T_p M$ o conjunto dos pontos de interseção x_q das retas $r_q(t) = q + tn(p)$ com $T_p M$. Para cada $q \in V_p$, o ponto x_q é único. Suponhamos agora que $n(p)$ é o vetor $(0, 0, 1)$. então a função $t : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$t(x) = t(x_q),$$

onde $r_q(t(x_q)) = x_q$, tem como gráfico o conjunto V_p de M . Demonstrar que esta função é diferenciável. Qué acontece se $n(p)$ não é vertical?

1.2.2 Superfícies de nível

Outra categoria importante de exemplos de superfícies em \mathbb{R}^3 provém do conjunto das superfícies de nível de funções $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis. Um conjunto de nível de F está definido por uma equação da forma

$$F(x, e, z) = c,$$

onde c é um valor real constante. Supôr que em $p = (x_0, e_0, z_0)$ alguma derivada parcial de F é não nula, digamos $\frac{\partial F}{\partial z}(p) \neq 0$. O ponto p se conhece na literatura como **ponto regular** de F . Então o teorema da função implícita nos garante que existe uma vizinhança aberta $U \subset \mathbb{R}^2$, que contém (x_0, e_0) , tal que o conjunto de nível $F(x, e, z) = c$ restrito a U tem a forma

$$F(x, e, h(x, e)) = c,$$

onde $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável. Assim, o conjunto de nível em uma vizinhança aberta de p admite uma parametrização $\Phi : U \rightarrow V$ dada por

$$\Phi(x, e) = (x, e, h(x, e)),$$

ou seja, o conjunto de nível em uma vizinhança de p é o gráfico de uma certa função diferenciável h . Os planos tangentes, a normal associada à parametrização, podem ser calculados segundo a formula da subseção anterior. Com efeito, os vetores tangentes

associados à parametrização h podem ser obtidos a partir das derivadas parciais de F usando o teorema da função implícita e a regra da cadeia. Outra forma mais concisa de obter a equação do plano tangente é usando o gradiente de F

$$\nabla_p F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(p), \frac{\partial F}{\partial e}(p), \frac{\partial F}{\partial z}(p) \right),$$

porque sabemos que o gradiente é perpendicular aos vetores tangentes da parametrização (verificar como exercício). Desta forma, a equação do plano tangente em (x_0, e_0, z_0) a $F = c$ é

$$\langle \nabla_{(x_0, e_0, z_0)} F, (x - x_0, e - e_0, z - z_0) \rangle = 0.$$

Neste caso, o campo gradiente pode ser de melhor utilidade que o vetor normal associado à parametrização no que respeita as aplicações, pois a parametrização é dada implicitamente enquanto que a função F é um dado explícito do problema.

1.2.3 A esfera

A esfera de raio 1 centrada na origem, $S_1 = \{x^2 + e^2 + z^2 = 1\}$ é uma superfície de classe C^∞ (inclusive analítica). Pertence à categoria das superfícies de nível regulares (ou seja, onde todo ponto da superfície é regular) da função $F(x, e, z) = x^2 + e^2 + z^2$. A esfera é um exemplo simples de superfície que não pode ser coberta por uma parametrização, precisam-se pelo menos duas parametrizações para este fim. Antes de obter qualquer parametrização para a esfera, observamos que em cada ponto p da mesma, o próprio p considerado como um vetor é perpendicular à esfera. Pelo que o plano tangente em $p(x_0, e_0, z_0)$ a S_1 é

$$\langle p, (x - x_0, e - e_0, z - z_0) \rangle = 0.$$

Não precisamos ter alguma parametrização em mãos para obter a equação do plano tangente em cada ponto. Usaremos esta observação em diversas oportunidades durante a exposição.

Existem várias formas de parametrizar S_1 . uma delas, tal vez a mais óbvia, seja o atlas dado pelos gráficos das funções

$$f_1(x, e) = \begin{pmatrix} x \\ e \\ \sqrt{1 - x^2 - e^2} \end{pmatrix},$$

definida no aberto $U_1 = \{x^2 + e^2 < 1\}$,

$$f_2(e, z) = \begin{pmatrix} e \\ z \\ \sqrt{1 - e^2 - z^2} \end{pmatrix},$$

definida no aberto $U_2 = \{e^2 + z^2 < 1\}$, e

$$f_3(x, z) = \begin{pmatrix} x \\ z \\ \sqrt{1 - x^2 - z^2} \end{pmatrix},$$

definida no aberto $U_3 = \{x^2 + z^2 < 1\}$. São 6 funções, cujos gráficos descrevem hemisférios de S_1 , e sua união cobre a superfície. Parecem muitas estas parametrizações, de fato se pode-se cobrir S_1 com duas parametrizações que provêm da chamada projeção estereográfica. Seja $P_N : \{z = 1\} \rightarrow S_1$ a aplicação definida associando a cada ponto $(x, e, 1)$ do plano $z = 1$ o ponto de interseção entre S_1 e a reta que passa por $(x, e, 1)$ o pólo sul $(0, 0, -1)$. A imagen desta aplicação é S_1 menos o pólo sul S .

Exercício: Encontre a expressão de P_N em coordenadas cartesianas, e demonstre que é uma bijeção diferenciável em S_1 menos o pólo sul.

Definamos de forma análoga a projeção $P_S : \{z = -1\} \rightarrow S_1$, cuja imagen cobre S_1 menos o pólo norte $(0, 0, 1)$. A união

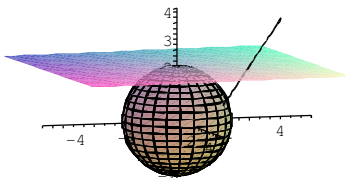


Figura 2 – Projeção estereográfica

das imagens de P_N , P_S sobre S_1 , e ambas satisfazem as condições que caracterizam as parametrizações de classe C^∞ .

Exercício: Calcule as fórmulas das mudanças de coordenadas de S_1 no atlas formado pela união das parametrizações anteriores.

Outra maneira de parametrizar S_1 nos cursos de cálculo é usando coordenadas esféricas ou cilíndricas. Estas não são parametrizações no sentido definido no presente texto, pois tanto as coordenadas esféricas como as cilíndricas em S_1 tem pontos onde não são injetivas, o não são diferenciáveis, ou são diferenciáveis mas não de posto 2 (verificar). Na seguinte subseção comentaremos em detahe a parametrização em coordenadas cilíndricas.

1.2.4 Superfícies de revolução

Uma superfície de revolução é obtida fazendo girar uma curva plana em \mathbb{R}^3 , chamada com frequência curva geratriz, em torno a uma reta contida no mesmo plano da curva. Esta reta é chamada eixo de revolução. Tomemos como exemplo as superfícies de revolução cujo eixo é a reta vertical $r(t) = (0, 0, t)$, ou seja, o eixo z em \mathbb{R}^3 , cujas curvas geratrizes estão no plano $(x, 0, z)$. uma curva como esta tem a forma

$$c(t) = (x(t), 0, z(t)),$$

$t \in I$, e ao girar em torno ao eixo z pelas rotações que fixam este eixo, algébricamente estamos multiplicando a equação da curva $c(t)$ pelas matrizes R_α que fixam o vetor $(0, 0, 1)$ e rotam por ângulo $\alpha \in \mathbb{R}$ os vetores do plano $z = 0$:

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Obtemos uma função $G : I \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ da forma

$$G(t, \alpha) = R_\alpha(c(t)) = (\cos(\alpha)x(t), \sin(\alpha)x(t), z(t)).$$

As coordenadas t, α são denominadas nos textos de cálculo **coordenadas cilíndricas**, mas na verdade não são coordenadas segundo a definição das superfícies. Simplesmente porque em geral a função $G(t, \alpha)$ não é necessariamente uma parametrização, se bem lhe falte pouco para sê-lo. De fato, o domínio $I \times [0, 2\pi)$ não é um aberto do plano, além disso, a função G poderia não ser injetiva. A esfera S_1 , assim como as esferas de

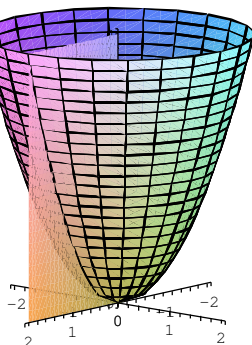


Figura 3 – Parabóloide $f(x, y) = x^2 + y^2$ com meridianos e paralelos

qualquer raio, são superfícies de revolução (exercício: verificar). Para obter verdadeiras parametrizações a partir desta construção, é necessário impôr algumas condições sobre a curva c , por exemplo, que seja simples, que o intervalo I seja aberto, que a curva c não intersecte o eixo de revolução, ou que caso haja a mesma aconteça perpendicularmente. Além disso, é necessário em geral decompôr a função G em duas funções com domínios diferentes: $G_1(t, \alpha) = G(t, \alpha)$ restrita a $(t, \alpha) \in I \times (0, 2\pi)$; e $G_2(t, \alpha) = G(t, \alpha)$ restrita a $I \times (-\pi, \pi)$. as funções G_1 e G_2 são um par de parametrizações que formam um atlas para a superfície.

Os vetores tangentes coordenados são

$$\partial_t = (\cos(\alpha)x'(t), \sin(\alpha)x'(t), z'(t)),$$

$$\partial_\alpha = (-\operatorname{sen}(\alpha)x(t), \cos(\alpha)x(t), 0).$$

Uma das particularidades das superfícies de revolução é que as coordenadas cilíndricas proporcionam um sistema de vetores tangentes perpendiculares em todo ponto. Esta propriedade é bastante conveniente e será usada em diversas oportunidades na exposição. Os vetores normais associados à parametrização anterior são

$$n(G(t, \alpha)) = (-z'(t)x(t)\cos(\alpha), -z'(t)x(t)\operatorname{sen}(\alpha), x'(t)x(t))$$

cujas normas são

$$\|n(G(t, \alpha))\| = |x(t)| \sqrt{(x'(t))^2 + (z'(t))^2}.$$

Os chamados paralelos da superfície de revolução são as curvas da forma

$$G_t : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$G_t(\alpha) = G(t, \alpha),$$

onde t é fixo. São círculos horizontais de raio $\sqrt{(x'(t))^2 + (z'(t))^2}$, sempre tangentes aos vetores ∂_α . Os meridianos da superfície de revolução são as curvas

$$G^\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$G^\alpha(t) = G(t, \alpha),$$

onde α é fixo. São curvas contidas nos planos verticais que contém o eixo z e formam ângulo α com o plano $e = 0$. Em particular, a curva $c(t)$ é um meridiano, os outros meridianos são nada

mais do que as rotações de $c(t)$ por ângulo α . Os meridianos são tangentes aos vetores ∂_α .

Exercício: Parametrizar o parabolóide $x^2 + e^2 = z$, e o cone $x^2 + e^2 = z^2$ usando coordenadas cilíndricas.

1.3 Campos vetoriais, derivações, produto de Lie

Um campo vetorial $X : M \rightarrow TM$ é uma função que associa a cada $p \in M$ um vetor $X(p) \in T_pM$. Observemos que esta função define claramente uma função com domínio em M e imagem em \mathbb{R}^3 , pelo que diremos que X é de classe C^k se como função definida em M com imagem em \mathbb{R}^3 é uma função de classe C^k .

Exemplo 1: Os vetores tangentes associados a uma parametrização local de M definem campos vetoriais em uma vizinhança de M .

Exemplo 2: Dada uma função diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, o campo gradiente ∇f é um campo tangente à superfície definido da seguinte forma: dado um vetor $v \in T_pM$, o campo gradiente $\nabla_p f$ calculado no ponto p é dado pela equação

$$D_p f(v) = \langle \nabla_p f, v \rangle,$$

onde $\langle \langle w, \sigma \rangle \rangle$ é o produto interno Euclidiano restrito aos vetores tangentes em T_pM .

Exercício: Verificar que se $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é de classe C^k , então o gradiente em $p \in M$ da restrição de F a uma su-

perfície M é a projeção ortogonal do gradiente de F em \mathbb{R}^3 no plano $T_p M$.

Uma derivação $\delta : C^k(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $C^k(M, \mathbb{R})$ é o conjunto das funções de M em \mathbb{R} de classe C^k , é uma função linear que cumpre a regra de Leibnitz. ou seja, se f, g são duas funções em $C^k(M, \mathbb{R})$, tem-se que

$$\delta(f.g) = \delta(f).g + f.\delta(g).$$

Exemplo 1: As derivadas parciais de funções escalares em M com respeito às coordenadas locais de uma parametrização dada são derivações.

Exemplo 2: Dado um campo vetorial X de classe C^k , $k \geq 1$, a aplicação $\delta_X : C^k(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$(\delta_X(f))(p) = D_p f(X(p))$$

é uma derivação. Esta derivação com frequência é chamada derivada direcional com respeito ao campo X , e aplicada a uma função f é denotada também por $X(f)$.

Exemplo 3: O produto de Lie de dois campos vetoriais X, e diferenciáveis em uma superfície M , está definido por

$$[X, e](f)(p) = X(e(f))(p) - e(X(f))(p).$$

Notemos que $[X, e]$ envolva duas derivadas sucessivas, no entanto afirmamos que é uma derivação (verificar esta afirmação como

exercício). Uma forma de interpretar o significado do produto de Lie de dois campos é a seguinte: se $X = \partial_x$, $e = \partial_e$ são campos tangentes associados a uma parametrização local de M , então $[X, e](f)$ é igual a a diferença entre as derivadas mixtas de f , ou seja zero, para toda f escalar de classe C^2 . É possível demonstrar que o produto de Lie de dois campos localmente definidos é zero em uma vizinhança de M se e somente se eles são campos coordenados de alguma parametrização local de M . Não faremos a demonstração desta afirmação no texto, o leitor interessado pode consultar as referências do capítulo. O produto de Lie é um objeto importante em física- matemática, em particular em geometria diferencial. Terá um papel importante na descrição da geometria local das superfícies, como constataremos nos capítulos a seguir.

2 Superfícies como Estruturas Riemannianas, geodésicas

Este capítulo tem como objetivo fazer uma introdução ao estudo das superfícies em \mathbb{R}^3 como espaços métricos, e ao estudo das geodésicas. Faremos uma breve comparação entre a noção de geodésica no mundo grego e a noção de geodésica surgida do cálculo variacional do século XVIII. Terminaremos o capítulo analisando alguns exemplos de superfícies de revolução e suas geodésicas.

2.1 Espaços métricos, Grécia antiga e geodésicas

Um espaço métrico (X, d) é um conjunto X onde está definida uma distancia $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, caracterizada pelas seguintes propriedades:

1. $d(p, q) \geq 0$ para todo $p, q \in X$, e $d(p, q) = 0$ se e somente se $p = q$.
2. $d(p, q) \leq d(p, x) + d(x, q)$ para todo $p, x, q \in X$ (desigualdade triangular).

Um exemplo bem conhecido de todos é \mathbb{R}^n com a métrica Euclideana $d(p, q) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i - q_i)^2}$, onde $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$. Uma pergunta que surge naturalmente desta observação é se uma superfície em \mathbb{R}^3 admite uma distancia.

A noção de espaço métrico responde em muitos sentidos à formulação rigorosa de vários problemas físicos que aparecem naturalmente ao fazer medições. Desde a Grécia antiga, sabia-se que a terra não era plana. Os gregos, baseados em observações astronômicas, chegaram à conclusão de que a terra era redonda, ou esférica. e se perguntaram então algo bastante simples: qual seria o caminho mais curto entre dois pontos da superfície terrestre? (Podemos imaginar que no mundo antes de Cristo, época em que o deslocamento humano por longas distâncias era árduo e sacrificado, uma pergunta como esta teria grande relevância). Esta questão levou os gregos a descobrir o número π e o **comprimento de um arco** de circunferência de raio $r > 0$. E o que para os gregos era a distância entre dois pontos da superfície terrestre era justamente o comprimento do caminho mais curto entre estes pontos.

Este caminho mais curto entre dois pontos da superfície terrestre era chamado **geodésica** pelos gregos, cuja raiz "geo" significa terra. O conceito é um dos legados mais importantes da geometria grega para a matemática.

A partir da origem das geodésicas poderia-se concluir que a forma talvez mais ingênua de definir uma distância em uma superfície em \mathbb{R}^3 , ou seja, definindo a distância entre dois pontos como a mesma distância entre eles em \mathbb{R}^3 , não é a mais natural nem a mais conveniente. De fato, esta definição não permite encontrar uma curva na superfície ligando os dois pontos cujo comprimento seja exatamente a distância. Porque a distância Euclideana entre dois pontos é o menor comprimento possível das curvas que unem os pontos, e é atingido justamente no segmento de reta que os une. Desta forma, a menos que a superfície

contenha este segmento de reta, não será possível encontrar na superfície uma curva com comprimento mínimo conectando os pontos. A ideia grega sobre as geodésicas foi formalizada nos séculos XVIII e XIX por físicos e matemáticos dando origem a uma teoria que agora se conhece como **cálculo variacional**. Daremos uma ideia desta teoria nas seções seguintes, mas antes descrevemos outro ponto de vista de natureza física que permite uma interpretação e definição diferentes das geodésicas.

2.2 Derivada covariante e mecânica Newtoniana

Uma das características notáveis das geodésicas no espaço Euclidiano, ou seja, as retas, é que são as únicas curvas diferenciáveis que admitem parametrizações regulares com aceleração nula em todo ponto. De acordo à segunda lei de Newton, as trajetórias $c(t)$ de movimentos de corpos com massa constante m produzidos por um campo de forças $F(p)$ obedecem a lei $F(c(t)) = mc''(t)$. Ou seja, a força em $c(t)$ é proporcional ao vetor aceleração $c''(t)$. Aplicando esta lei às retas no plano podemos concluir que as mesmas são trajetórias de movimentos livres de forças, ou movimentos livres simplesmente. Estes movimentos tem velocidade $\|c'(t)\|$ constante, e dado um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ e um vetor $v \in T_p\mathbb{R}^n$, existe uma única trajetória do movimento que passa por p e tem velocidade inicial v . Esta propriedade é típica das soluções de uma equação diferencial de ordem 2, uma relação do tipo

$$c''(t) = G(t, c(t), c'(t)),$$

sendo a lei de Newton um exemplo particular. Temos o seguinte teorema que assumiremos sem demonstração (que será impor-

tante do ponto de vista teórico mas que não será usado nas aplicações).

Teorema 2.1. *Dada uma equação diferencial de ordem n*

$$\frac{\partial^n c}{\partial t^n}(t) = G(t, c(t), c'(t), \dots, \frac{\partial^{n-1} c}{\partial t^{n-1}}(t)),$$

onde G é uma função de classe C^1 em um aberto U de \mathbb{R}^{n+1} , dado um ponto $(t_0, (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})) \in \mathbb{R}^{n+1}$ existe uma única solução $x(t)$ da equação tal que $x(t_0) = v_0$, e $\frac{\partial^n x}{\partial t^i}(t_0) = v_i$ para todo $i = 0, 1, \dots, n-1$.

O teorema anterior é conhecido como o **teorema de existência e unicidade** das equações diferenciais. Usando parametrizações locais, o teorema se estende facilmente às superfícies.

Portanto, a mecânica nos dá outra interpretação das geodésicas no espaço Euclidiano, são as trajetórias que representam os movimentos livres de forças. Poderíamos perguntar-nos se existe algo equivalente nas superfícies de \mathbb{R}^3 .

Esta pergunta nos leva a outra pergunta: o quê é aceleração em uma superfície? Se $c(t)$ é uma curva em uma superfície M , seu vetor tangente $c'(t)$ é também tangente à superfície para todo t , mas seu vetor aceleração $c''(t)$ não é em geral tangente a M . Pensando novamente na segunda lei de Newton, uma força aplicada na superfície M somente produz algum movimento a partir do repouso se tem alguma componente não nula nos planos tangentes à superfície. Com efeito, se aplicamos uma força perpendicular a $T_p M$ no ponto p , este ponto permanecerá imóvel a partir do repouso. Esta observação nos conduz naturalmente a

uma noção de "aceleração tangente" de curvas, que se conhece em geometria como **derivada covariante**.

Definição 1. *Dados um campo vetorial $X : U \subset M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^2 tangente à superfície M , definido em um aberto U em M , e uma curva $c : (a, b) \longrightarrow M$ de classe C^2 , a derivada covariante $\nabla_{c'(t_0)}X$ de X ao longo de $c(t)$ em $c(t_0)$ é a projeção ortogonal do vetor $\frac{\partial}{\partial t}(X \circ c(t))|_{t=t_0}$ em $T_{c(t_0)}M$.*

Resulta um pouco inconveniente que a notação de derivada covariante seja muito parecida com a notação de campo gradiente de uma função escalar. Ambas as notações são bastante usadas na literatura, e procuraremos deixar bem claro quando se trata de uma ou da outra. Podemos verificar sem dificuldade que se X, e são dois campos vetoriais definidos em um aberto $U \subset M$ tais que $X(c(t)) = e(c(t))$ para todo $t \in (a, b)$, então suas derivadas covariantes $\nabla_{c'(t)}X$ e $\nabla_{c'(t)}e$ são iguais em todo t . A definição anterior nos diz que a derivada covariante $\nabla_{c'(t_0)}X$ é a parte tangente à superfície do vetor $\frac{\partial}{\partial t}(X \circ c(t))|_{t=t_0}$, e este conceito nos remete de forma natural a uma noção de aceleração tangente à superfície, a saber, a aceleração tangente de $c(t)$ é a projeção ortogonal de $c''(t)$ em $T_{c(t)}M$. Como a derivada covariante $\nabla_{c'(t)}X$ não depende da extensão do campo $X(t)$ fora da curva $c(t)$, nossa definição de aceleração tangente da curva $c(t)$ corresponde à derivada covariante

$$\nabla_{c'(t)}c'(t),$$

onde $c'(t)$ é na verdade uma extensão do campo de vetores $c'(t)$ a uma vizinhança de $c(t)$ em M . Ao mesmo tempo, esta ideia de aceleração tangente nos leva a uma generalização da ideia de geodésica.

Enunciamos agora algumas propriedades da derivada covariante que nos serão úteis durante a exposição.

Proposição 2.2.1. *Seja M uma superfície de classe C^3 em \mathbb{R}^3 . Sejam $c : I \rightarrow M$ uma curva de classe C^2 , X , e campos vetoriais tangentes a M de classe C^1 definidos em uma vizinhança de c em M . Então*

1. $\nabla_{c'(t)}(X + e) = \nabla_{c'(t)}X + \nabla_{c'(t)}e$,
2. se $f : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função escalar de classe C^1 , tem-se

$$\nabla_{c'(t)}(fX) = \langle D_{c(t)}f, c'(t) \rangle X + f(c(t))\nabla_{c'(t)}X,$$

$$\nabla_{fc'(t)}(X) = f\nabla_{c'(t)}X.$$

3.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle X(c(t)), e(c(t)) \rangle &= \langle \nabla_{c'(t)}X(c(t)), e(c(t)) \rangle \\ &\quad + \langle X(c(t)), \nabla_{c'(t)}e(c(t)) \rangle, \end{aligned}$$

relação que generaliza a regra de Leibnitz da derivação usual.

4. $[X, e] = \nabla_X e - \nabla_e X$.

Deixamos a demonstração da proposição como exercício ao leitor. É consequência direta das definições dadas: observemos que todas as propriedades enunciadas na proposição valem no espaço Euclidiano com o produto interno e a derivada usuais. Como a derivação covariante consiste em tomar a parte tangente à superfície da derivada usual de \mathbb{R}^3 , todas as equações anteriores são obtidas usando as derivadas de \mathbb{R}^3 e projetando ortogonalmente em TM .

Definição 2. Uma geodésica $c : I \longrightarrow M$ em M é uma curva diferenciável tal que

$$\nabla_{c'(t)} c'(t) = 0$$

para todo $t \in I$.

A interpretação física das geodésicas definidas de esta forma é clara, descrevem o movimento livre de forças na superfície M . E permite uma caracterização geométrica das geodésicas bastante simples e interessante: $c(t)$ é geodésica de M se e somente se seu vetor aceleração $c''(t)$ é sempre perpendicular a $T_{c(t)}M$ para todo t . Como no caso do espaço Euclideano, a definição "mecânica" das geodésicas leva a um sistema de equações diferenciais de ordem 2 na superfície, como é fácil constatar. No entanto, uma expressão precisa deste sistema depende das coordenadas de uma parametrização local da superfície e em geral não é muito simples de obter. Nos próximos capítulos tratamos este tema no caso das superfícies com simetrias.

3 Geodésicas e simetrias, geodésicas em superfícies de revolução

Para motivar o tema do Capítulo damos exemplos de como identificar algumas geodésicas através de certas configurações geométricas de interseções de superfícies com planos. As ideias são bastante simples mas não queremos iludir o leitor: elas são úteis em casos muito excepcionais.

Exemplo 1: Na esfera $S^2 + \{x^2 + e^2 + z^2 = r^2\}$, as únicas curvas cuja aceleração é sempre perpendicular a esfera são as circunferências máximas de raio r contidas na esfera, parametrizadas com velocidade constante. Com efeito, observar que as circunferências máximas são as únicas curvas planas contidas na esfera cujos vetores normais (como curvas em \mathbb{R}^3) são perpendiculares à esfera. Isto implica que se $\gamma(t)$ é uma circunferência máxima parametrizada pelo comprimento do arco então a projeção ortogonal do vetor aceleração é nula em $T_{\gamma(t)}S^2$ o que a caracteriza como uma geodésica. E dado um ponto p na esfera, e uma direção $v \in T_pM$, existe uma única circunferência máxima por p tangente a v . Pelo teorema de existência e unicidade, esta circunferência máxima é a única geodésica por p tangente a v .

Exemplo 2: Se um plano Π é de simetria de uma superfície M , então a interseção deste plano e a superfície é uma

geodésica. O plano Π é de simetria de M se ao refletir M em torno a Π sua imagem está contida em M . Deixamos a prova desta afirmação ao leitor, segue da linha de raciocínio aplicada no caso da esfera.

No Capítulo próximo, mostraremos que na verdade qualquer curva em uma superfície que resulte da interseção perpendicular de um plano com a mesma é uma geodésica.

3.1 Derivadas covariantes de paralelos e meridianos em superfícies de revolução

No caso das superfícies de revolução as simetrias da superfície nos permitem identificar famílias importantes de geodésicas.

Os meridianos das superfícies de revolução são sempre geodésicas. Porque os meridianos são obtidos intersectando a superfície de revolução com planos que contém o eixo de revolução. E estes planos são planos de simetria da superfície. Portanto, pelo Exemplo 2 descrito acima estas curvas são geodésicas.

Já com os paralelos de uma superfície de revolução não acontece o mesmo. Pode-se verificar que um paralelo é uma geodésica se e somente se a distância do paralelo ao eixo de revolução é um ponto crítico da distância entre a superfície e o eixo de revolução. Uma forma geométrica de mostrar esta afirmação é consequência do Lema 4.1.1 do Capítulo próximo (bom exercício). Em particular, os paralelos que estão mais próximos ao eixo de revolução são geodésicas, assim como os paralelos mais distantes do eixo de revolução.

Para ilustrar como calcular a aceleração covariante em uma superfície de revolução deduzimos a fórmula da derivada covariante dos paralelos. Lembremos que a superfície de revolução com eixo vertical

$$G(t, \alpha) = R_\alpha(c(t)) = (\cos(\alpha)x(t), \sin(\alpha)x(t), z(t))$$

está descrita pelas coordenadas t , que parametriza pelo comprimento do arco a curva geratriz $c(t) = (x(t), 0, z(t))$; e o ângulo α . Um paralelo é uma curva $G(t_0, \alpha)$ com $\alpha \in [0, 2\pi]$.

Os vetores tangentes coordenados são

$$\partial_t = (\cos(\alpha)x'(t), \sin(\alpha)x'(t), z'(t)),$$

$$\partial_\alpha = (-\sin(\alpha)x(t), \cos(\alpha)x(t), 0).$$

Os vetores anteriores normalizados são

$$w_t = \partial_t$$

$$w_\alpha = (-\sin(\alpha), \cos(\alpha), 0) = x(t)^{-1}\partial_\alpha.$$

A partir dos vetores coordenados normalizados obtemos o vetor normal unitário associado à parametrização:

$$N(G(t, \alpha)) = (-z'(t)\cos(\alpha), -z'(t)\sin(\alpha), x'(t)).$$

Lema 3.1.1. *A derivada covariante $\nabla_{w_\alpha} w_\alpha$ tem a expressão*

$$\nabla_{w_\alpha} w_\alpha = -\frac{x'}{x}w_t.$$

Demonstração. Sabemos pela definição que a derivada covariante $\nabla_{\delta_\alpha} w_\alpha$ é a projeção ortogonal na superfície da derivada $\frac{\partial}{\partial \alpha} w_\alpha$. Ou seja,

$$\nabla_{\delta_\alpha} w_\alpha = \frac{\partial}{\partial \alpha} w_\alpha - \left\langle \frac{\partial}{\partial \alpha} w_\alpha, N \right\rangle N.$$

Temos que $\frac{\partial}{\partial \alpha} w_\alpha = (-\cos(\alpha), -\sin(\alpha), 0)$ e assim

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \alpha} w_\alpha, N \right\rangle = z'(t).$$

Substituindo na fórmula acima temos

$$\begin{aligned} \nabla_{\delta_\alpha} w_\alpha &= (-\cos(\alpha), -\sin(\alpha), 0) - z'N \\ &= (-\cos(\alpha), -\sin(\alpha), 0) - z'(-z'\cos(\alpha), -z'\sin(\alpha), x') \\ &= (\cos(\alpha)((z')^2 - 1), \sin(\alpha)((z')^2 - 1), -z'x'). \end{aligned}$$

Sabemos que $(x')^2 + (z')^2 = 1$ pois a curva geratriz está parametrizada pelo comprimento do arco. Portanto, $(z')^2 - 1 = -(x')^2$ e substituindo na expressão anterior,

$$\nabla_{\delta_\alpha} w_\alpha = -x'(x'\cos(\alpha), x'\sin(\alpha), z') = -x'w_t.$$

Finalmente, como $\delta_\alpha = xw_\alpha$ concluímos

$$\nabla_{w_\alpha} w_\alpha = \frac{1}{x} \nabla_{\delta_\alpha} w_\alpha = -\frac{x'}{x} w_t$$

como queríamos provar. \square

Salientamos que o Lema 3.1.1 fornece uma demonstração analítica de que paralelos que se encontram nos pontos críticos da distância ao eixo de revolução são geodésicas. Pois se

$x'(t_0) = 0$ o paralelo que contém $(x(t_0), 0, z(t_0))$ satisfaz a equação diferencial das geodésicas. Por outro lado, o valor $x(t_0)$ é ponto crítico da parametrização da curva geratriz se e somente se existe tangência entre a superfície e planos verticais ao longo do paralelo. Como $x(t)$ é a distância ao eixo do paralelo que contém $(x(t), 0, z(t))$ os pontos críticos para $x(t)$ são claramente os pontos críticos da distância entre a superfície e seu eixo.

3.2 Geodésicas em superfícies de revolução: a equação de Clairaut

As simetrias das superfícies de revolução permitem caracterizar as geodésicas como as soluções de uma equação diferencial de *primeira ordem*: a equação de Clairaut.

Teorema 3.1. *Seja M uma superfície de revolução e $\gamma(t)$ uma geodésica. Seja $r(t)$ a distância de $\gamma(t)$ ao eixo de revolução, e $\theta(t)$ o ângulo que forma o vetor velocidade $\gamma'(t)$ com o paralelo que contém $\gamma(t)$. Então a geodésica satisfaz a equação*

$$r(t)\cos(\theta(t)) = c$$

onde c é uma constante que depende apenas da geodésica γ .

A equação de Clairaut, $r(t)\cos(\theta(t)) = c$, tem várias interpretações no contexto dos sistemas conservativos como é o caso dos fluxos geodésicos (que não serão tratados no texto). O leitor familiarizado com a mecânica clássica identifica na equação de Clairaut uma integral primeira do fluxo geodésico, reflexo das simetrias do sistema e da integrabilidade do mesmo. A demonstração da fórmula que aparece nos livros de geometria Riemanniana como o texto de Manfredo Do Carmo [3] envolve o

que se conhece como coeficientes de Cristoffel: são as componentes das derivadas covariantes dos campos coordenados de uma parametrização local da superfície. Não pretendemos desenvolver a teoria dos coeficientes de Cristoffel na monografia, apresentaremos uma demonstração da equação de Clairaut a partir das propriedades já mencionadas das superfícies de revolução. A prova é um pouco técnica mas elementar, será feita em várias etapas.

Começamos pela equação das geodésicas: $\gamma(s)$ parametrizada pelo comprimento do arco satisfaz

$$\nabla_{\gamma'(s)}\gamma'(s) = 0$$

para todo s , ou seja, a projecção ortogonal na superfície da aceleração de γ como curva no espaço é nula. Esta igualdade pode ser escrita em termos dos vetores $\gamma'(s)$, w_t , w_α , e suas derivadas covariantes. Com efeito,

$$\gamma'(s) = \langle \gamma'(s), w_t \rangle w_t + \langle \gamma'(s), w_\alpha \rangle w_\alpha = aw_t + bw_\alpha,$$

onde a, b são funções escalares, porque w_t e w_α são ortonormais. Portanto, a equação diferencial das geodésicas pode ser escrita como

$$\nabla_{\gamma'(s)}\gamma'(s) = \nabla_{aw_t+bw_\alpha}(aw_t + bw_\alpha)$$

e aplicando as propriedades da derivada covariante enunciadas na Proposição 2.2.1 temos

$$\begin{aligned}\nabla_{\gamma'(s)}\gamma'(s) &= a(\nabla_{w_t}aw_t + \nabla_{w_t}bw_\alpha) \\ &\quad + b(\nabla_{w_\alpha}aw_t + \nabla_{w_\alpha}bw_\alpha).\end{aligned}$$

Aplicando novamente as propriedades da derivada covariante obtemos

$$\begin{aligned}\nabla_{\gamma'(s)}\gamma'(s) &= a(a_tw_t + a\nabla_{w_t}w_t + b_tw_\alpha + b\nabla_{w_t}w_\alpha) \\ &\quad + b(a_\alpha w_t + a\nabla_{w_\alpha}w_t + b_\alpha w_t + b\nabla_{w_\alpha}w_\alpha),\end{aligned}$$

onde a_t , a_α são as derivadas da função a com relação a t, α respectivamente, e análogamente b_t, b_α . Este vetor deve ser nulo pela definição de geodésica, e seu valor depende dos vetores

$$\nabla_{w_t}w_t, \nabla_{w_t}w_\alpha, \nabla_{w_\alpha}w_t, \nabla_{w_\alpha}w_\alpha,$$

como tínhamos observado anteriormente. Portanto, suas componentes em w_t e w_α devem ser ambas nulas, e para calculá-las precisamos calcular as componentes das derivadas covariantes acima.

Começamos por observar que

$$\nabla_{w_t}w_t = 0$$

já que w_t é um vetor unitário tangente aos meridianos da superfície, que são geodésicas. Um termo a menos por enquanto. A seguir obtemos fórmulas para as derivadas covariantes mixtas.

Afirmção 1: As derivadas covariantes mixtas tem as seguintes expressões:

$$\nabla_{w_t} w_\alpha = 0,$$

$$\nabla_{w_\alpha} w_t = \frac{x'}{x} w_\alpha.$$

Começamos por calcular $\nabla_{\delta_\alpha} \delta_t = \nabla_{\delta_\alpha} w_t$. Como no lema 3.1.1, precisamos obter a projeção ortogonal de

$$\begin{aligned} \nabla_{\delta_\alpha} \delta_t &= \frac{\partial}{\partial \alpha} (x' \cos(\alpha), x' \sin(\alpha), z') \\ &= (-x' \sin(\alpha), x' \cos(\alpha), 0) \\ &= x' w_\alpha. \end{aligned}$$

Como w_α é tangente à superfície concluímos que

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (x' \cos(\alpha), x' \sin(\alpha), z')$$

coincide com sua projeção ortogonal, e portanto,

$$\nabla_{w_\alpha} w_t = \frac{1}{x} \nabla_{\delta_\alpha} w_t = \frac{x'}{x} w_\alpha$$

como afirma o Lema.

Para obter $\nabla_{w_t} w_\alpha$ observamos que os campos coordenados δ_t e δ_α comutam, e aplicando a Proposição 2.2.1 temos

$$\nabla_{\delta_t} \delta_\alpha = \nabla_{\delta_\alpha} \delta_t = x' w_\alpha.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\nabla_{w_t} w_\alpha &= \nabla_{\delta_t} \frac{1}{x} \delta_\alpha \\
&= -\frac{x'}{x^2} \delta_\alpha + \frac{1}{x} \nabla_{\delta_t} \delta_\alpha \\
&= -\frac{x'}{x^2} \delta_\alpha + \frac{1}{x} \nabla_{\delta_\alpha} \delta_t \\
&= -\frac{x'}{x} w_\alpha + \frac{x'}{x} w_\alpha = 0,
\end{aligned}$$

finalizando assim a demonstração da afirmação.

Afirmação 2: A derivada covariante $\nabla_{\gamma'} \gamma'$ tem a seguinte expressão:

$$\nabla_{\gamma'(s)} \gamma'(s) = a(a_t w_t + b_t w_\alpha) + b(a_\alpha w_t + a(\frac{x'}{x}) w_\alpha + b_\alpha w_\alpha - b(\frac{x'}{x}) w_t).$$

Portanto, a equação das geodésicas é equivalente ao seguinte sistema:

$$aa_t + ba_\alpha - b^2 \frac{x'}{x} = 0$$

$$ab_t + ba \frac{x'}{x} + bb_\alpha = 0.$$

A prova consiste em substituir as fórmulas obtidas no lema 3.1.1 e na Afirmação 1 na expressão de $\nabla_{\gamma'(s)} \gamma'(s)$. Como este vetor é nulo suas componentes na base w_t, w_α do plano tangente à superfície em $\gamma(s)$ devem ser ambas nulas. A componente no vetor w_t é $aa_t + ba_\alpha - b^2 \frac{x'}{x}$, e a componente no vetor w_α é $ab_t + ba \frac{x'}{x} + bb_\alpha$.

Uma observação interessante é que o sistema de equações da Afirmação 2 implica que $a^2 + b^2 = cte$ que é o caso da geodésica γ onde a constante é 1 (verificar).

Prova do Teorema 3.1

Observemos em primeiro lugar que a função $f(s) = r(s)\cos(\theta(s))$ definida no Teorema 3.1 é igual a $f(s) = xb$, onde x, b são as funções definidas anteriormente. Agora vejamos, ao multiplicar a segunda equação do sistema na Afirmação 2 por $\frac{b}{a}$ e fazer a diferença entre a primeira destas equações com a segunda, obtemos

$$aa_t - bb_t - 2b^2 \frac{x'}{x} + ba_\alpha - \frac{b^2}{a} b_\alpha = 0.$$

Notemos agora que $aa_t - bb_t = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}(a^2 - b^2)$ e que

$$\begin{aligned} ba_\alpha - \frac{b^2}{a} b_\alpha &= \frac{b}{a}(aa_\alpha - bb_\alpha) \\ &= \frac{b}{a} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha}(a^2 - b^2). \end{aligned}$$

Substituindo na igualdade anterior obtemos

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t}(a^2 - b^2) + \frac{b}{a} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha}(a^2 - b^2) \right) - 2b^2 \frac{x'}{x} = 0.$$

Como o parâmetro s da geodésica γ é o comprimento do arco, temos que $a^2 + b^2 = 1$ e que $\frac{d}{ds} = a \frac{\partial}{\partial t} + b \frac{\partial}{\partial \alpha}$. Substituindo na equação acima obtem-se

$$\frac{1}{2a} \frac{d}{ds}(a^2 - b^2) = \frac{1}{2a} \frac{d}{ds}(1 - 2b^2) = 2b^2 \frac{x'}{x},$$

o que pode ser escrito como

$$-\frac{1}{b^2} \frac{d}{ds}(b^2) = 2a \frac{x'}{x} = 2a \frac{\partial}{\partial t} \ln(x) = 2 \frac{d}{ds} \ln(x).$$

Fazendo $u = b^2$ temos a seguinte equação diferencial

$$-\frac{d}{ds}(\ln(u)) = \frac{\partial}{\partial s} \ln(x^2)$$

e integrando deduzimos a relação

$$ux^2 = b^2x^2 = K$$

que é justamente a relação de Clairaut.

4 Primeiro resultado de rigidez: geodésicas planas e superfícies de revolução

O objetivo do presente capítulo é explorar as relações que existem entre a existência de geodésicas planas em uma superfície e a existência de simetrias. Nosso resultado principal é o seguinte:

Teorema 4.1. *Seja M uma superfície conexa em \mathbb{R}^3 com a seguinte propriedade: existe um ponto $p \in M$ tal que toda geodésica que passa por p é uma curva plana. Então M está contida em uma superfície de revolução cujo eixo de simetria é a reta perpendicular a M que contém o ponto p .*

Notemos que este resultado é o enunciado recíproco de um fato que já sabemos sobre as superfícies de revolução: toda geodésica que passa pela interseção da superfície com seu eixo de simetria é um meridiano e portanto uma curva plana.

Faremos a demonstração em várias etapas.

4.1 Geodésicas e interseções da superfície com planos

Começamos a demonstração com um enunciado que sintetiza as ideias geométricas aplicadas no capítulo anterior para achar certas geodésicas em superfícies.

Lema 4.1.1. *Um plano P corta a superfície M em uma geodésica γ se e so se P corta perpendicularmente a superfície M ao longo da curva regular γ .*

Demonstração. Suponhamos que $\gamma(t)$ é geodésica e que está na interseção de M com um plano P . O vetor $N_{\gamma(t)}$ normal à curva em \mathbb{R}^3 está contido em P e pela definição de geodésica, $N_{\gamma(t)}$ deve ser perpendicular a $T_{\gamma(t)}M$ para todo t . Portanto, o plano P contém todas as retas normais à superfície passando pelos pontos de $\gamma(t)$, o que implica que P corta M perpendicularmente em $\gamma(t)$.

Suponhamos agora que um plano P corta a superfície M perpendicularmente ao longo de uma curva $\gamma : I \rightarrow M$ diferenciável e regular, parametrizada pelo comprimento do arco. O vetor normal N_γ da curva está contido em P , e é perpendicular a $\gamma'(t)$. Como $\gamma'(t)$ é tangente a $T_{\gamma(t)}M$, temos que $T_{\gamma(t)}M \cap P$ consiste justamente na reta gerada por $\gamma'(t)$ e portanto, o vetor N_γ é também perpendicular a $T_{\gamma(t)}M$. Assim, $N_{\gamma(t)}$ coincide com o vetor normal a M em $\gamma(t)$ (a menos de orientação), $N(\gamma(t))$, o que implica que $\gamma(t)$ é geodésica por definição. \square

4.2 Gráficos onde toda geodésica é uma curva plana

A seguir, consideramos as superfícies que são gráficos parametrizados por $\Phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$, onde f é uma função de classe C^3 .

Lema 4.2.1. *Seja M o gráfico de uma função escalar $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3 , U aberto conexo. Supôr que as geodésicas por $p = \Phi(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in M$ são curvas planas. Então as curvas de nível de f são círculos concêntricos em p .*

Demonstração. Como vimos na seção anterior, o conjunto $T_p M \cap P$ é uma geodésica para todo plano P que contém o vetor normal $N(p)$. Como M é um gráfico, todo vetor $w \in T_p M$ está contido na interseção de algum plano P_w que contém $N(p)$ com $T_p M$. Suponhamos sem perder generalidade que $T_p M$ é horizontal, que $(x_0, y_0) = (0, 0)$, e que $f(x_0, y_0) = 0$. Desta forma, $p = (0, 0, 0)$, as retas $T_p M \cap P_w$ são $r_w(t) = tw$, $t \in \mathbb{R}^2$, e as interseções $M \cap P$ são justamente as imagens por Φ de tais retas, $\gamma_{(p,w)}(t) = (tw_x, tw_y, f(tw))$, onde $w = (w_x, w_y)$ são as coordenadas de w .

Tomemos w de norma 1. O vetor tangente unitário de $\gamma_{(p,w)}$ é

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{\gamma'_{(p,w)}(t)}{\|\gamma'_{(p,w)}(t)\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla_{\gamma_{(p,w)}(t)} f(w)\|^2}} (w_x, w_y, \nabla_{\gamma_{(p,w)}(t)} f(w)) \end{aligned}$$

onde $\nabla_q f$ é o gradiente de f no ponto q . O vetor $N(\gamma_{(p,w)}(t))$ tem a expressão

$$N(\gamma_{(p,w)}(t)) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma_{(p,w)}(t)), -\frac{\partial f}{\partial y}(\gamma_{(p,w)}(t)), 1 \right).$$

O vetor $N_{\gamma_{(p,w)}}(t)$ é paralelo a $T'(t)$,

$$\begin{aligned} T'(t) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}} (0, 0, \langle Hess(f)(w), w \rangle) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\langle Hess(f)(w), w \rangle}{(1 + \|\nabla f\|^2)^{-3/2}} (w_x, w_y, \nabla_{\gamma_{(p,w)}(t)} f(w)), \end{aligned}$$

onde $Hess(f)$ é a matriz Hessiana de f , ou a matriz das derivadas segundas. O paralelismo entre $N(\gamma_{(p,w)}(t))$ e $T'(t)$ implica que existe uma função $a_w(t) \neq 0$ para todo t tal que

$T'(t) = a_w(t)N(\gamma_{(p,w)}(t))$ para todo t , o que nos leva a uma relação entre as coordenadas de tais vetores da forma

$$b_w(t)w = a_w(t)\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma_{(p,w)}(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma_{(p,w)}(t))\right).$$

onde

$$b_w(t) = \frac{1}{2} \frac{\langle Hess(f)(w), w \rangle}{(1 + \|\nabla f\|^2)^{-3/2}}.$$

Notemos que se $\langle Hess(f)(w), w \rangle \neq 0$, ou equivalentemente, $\nabla_{r_w(t)}f \neq 0$, então a função $b_w(t)$ não se anula e o gradiente de f em $r_w(t) = tw$ é paralelo a w , é um vetor radial. Isto implica que

Afirmação: Se $r_w(t_0)$ é um ponto regular de f então existe uma vizinhança V de $r_w(t_0)$ onde as curvas de nível de f por cada $(x, y) \in V$ são círculos com centro em $(0, 0)$. Além disso, na curva de nível não existem pontos singulares ou críticos de f .

Com efeito, se $\nabla_{r_w(t_0)}f \neq 0$, então existe uma vizinhança V de $r_w(t_0)$ onde $\nabla_{(x,y)}f \neq 0$ para todo $(x, y) \in V$. Nesta vizinhança o gradiente de f é radial pela observação anterior e portanto, as curvas de nível de f pelos pontos de V são perpendiculares às direções radiais que partem da origem $(0, 0)$. Pelo teorema da função implícita, as curvas de nível de f em V são diferenciáveis e tangentes a um campo vetorial diferenciável, perpendicular a estas direções radiais. Mas este campo é tangente à família de círculos com centro em $(0, 0)$. Pelo teorema de existência e unicidade das equações diferenciais de ordem 1, estes círculos são as únicas curvas com esta propriedade.

Falta verificar que se C é uma curva de nível de f que intersecta V , então V não contém pontos críticos de f . Isto se

deve a que o valor de f na curva é constante e invariante por rotações do plano \mathbb{R}^2 . Pelo que se $(x, y) \in V$ é um ponto regular, a função f será monótona localmente na recta $r_{(x,y)}(t) = t(x, y)$ e este comportamento geométrico é preservado por rotações no plano. Portanto, basta que uma curva de nível C tenha um ponto regular de f para que toda a curva C seja de pontos regulares. Isto prova totalmente a afirmação.

A afirmação demonstra que todos os valores de f são invariantes por rotações do plano. De fato, mostramos isso para valores regulares, que formam um subconjunto aberto do domínio de f . Mas podemos constatar que o mesmo argumento nos garante que os valores críticos de f também são invariantes por rotações (se uma curva de nível contém um ponto crítico, ela não pode conter pontos regulares pois a afirmação implicaria que toda a curva deveria ser regular). Assim, as curvas de nível são círculos com centro em $(0, 0)$, e aplicando uma translação conveniente deduzimos o lema. \square

4.3 Prova do Teorema 4.1

Seja M superfície e $p \in M$ ponto tal que toda geodésica por p é curva plana. Aplicando um movimento rígido ou isometria a M podemos levar p à origem, o plano tangente a M em p ao plano horizontal, e assim levamos M a outra superfície M' congruente com M que é localmente um gráfico. A reta normal a M por p é levada pelo movimento rígido ao eixo vertical, e os planos que passam por p são levados aos planos que passam pela origem. Mais ainda, as geodésicas por p resultam de interseções

perpendiculares entre planos e a superfície M , e esta ortogonalidade é preservada pelo movimento rígido. Portanto, a imagem de uma geodésica de M por p pelo movimento rígido é uma curva plana pela origem obtida como interseção perpendicular de um plano com M' . Pelo Lema 4.1.1 cada uma destas curvas é também uma geodésica de M' . E pelo teorema de existência e unicidade das geodésicas temos que todas as geodésicas de M' que passam pela origem estão contidas em planos. Desta forma, podemos aplicar o Lema 4.2.1 para concluir que M' é uma superfície de revolução com eixo de simetria vertical. Aplicando a M' a inversa do movimento rígido, voltamos a M e deduzimos que a reta normal a M por p é um eixo de simetria de M , o que mostra o Teorema 4.1.

As demonstrações dos resultados deste Capítulo e do anterior mostram o potencial das ferramentas do cálculo diferencial quando aplicadas ao estudo das geodésicas em superfícies e suas relações com a geometria das mesmas. Porém, nos referidos capítulos estamos usando a noção das geodésicas oriunda da mecânica clássica que não é muito intuitiva do ponto de vista geométrico.

Qual é a relação entre estas geodésicas e as geodésicas "gregas"? Ou seja, qual é a relação entre estas geodésicas "mecânicas" e as curvas de comprimento mínimo que ligam dois pontos na superfície?. No próximo capítulo discutiremos o tema.

5 Um pouco de cálculo variacional

Voltamos ao conceito grego de geodésicas em superfícies para analisá-lo de forma mais detalhada. A ideia da existência de curvas com comprimento mínimo realizando "fisicamente" a distância entre dois pontos precisa certamente de uma noção de comprimento na superfície. Temos o comprimento de uma curva diferenciável em \mathbb{R}^3 , se $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ é uma curva diferenciável, então seu comprimento é

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt,$$

onde $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Portanto, é simples definir um comprimento para as curvas em uma superfície. Porém, não é igualmente simples é encontrar as curvas de comprimento mínimo.

É neste ponto que o chamado cálculo variacional mostra sua eficiência. O cálculo variacional em poucas palavras, formula o problema de achar as curvas de comprimento mínimo conectando dois pontos como um problema de otimização: existe uma função, a função comprimento, que devemos minimizar no espaço das curvas que unem dois pontos. Em \mathbb{R}^n , para achar os mínimos de uma função escalar acahamos primeiro seus pontos críticos. Dentro destes pontos encontram-se os mínimos, que podemos selecionar aplicando o critério da derivada segunda. Parece simples, mas o ponto é que o espaço das curvas que unem dois pontos tem dimensão infinita, e como se define derivada de uma função em um espaço de dimensão infinita?

A ideia do cálculo variacional é tentar aproximar de alguma forma o espaço das curvas por espaços de dimensão finita. O conceito chave é o de **variação** por curvas diferenciáveis.

Definição 3. *Dada uma curva $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ diferenciável, uma variação por curvas diferenciável por partes de γ é uma função contínua $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, 1] \rightarrow M$ que cumpre as seguintes propriedades:*

1. *Existe um conjunto de pontos $\{t_1, t_2, \dots, t_m\} \subset [0, a]$ tal que as curvas $f_s(t) = f(s, t)$, são diferenciáveis em $[0, a] - \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$,*
2. $f_0(t) = f(0, t) = \gamma(t) \ \forall t \in [0, a]$.

Se $f(s, 0) = \gamma(0)$, $f(s, a) = \gamma(a) \ \forall s \in (-\epsilon, \epsilon)$, dizemos que a variação f tem **extremos fixos** ou é **própria**. Vamos supor que a curva $\gamma(t)$ está parametrizada pelo comprimento do arco, ou seja, $\|\gamma'(t)\| = 1$. A noção de derivação covariante nos permite derivar a função comprimento restrita a uma variação. Seja $W(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$, o campo tangente à variação f na direção $\frac{\partial}{\partial s}$ restrito à curva $f_0(t) = \gamma(t)$.

Lema 5.0.1. (Fórmula da primeira variação). *Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma curva de classe C^2 parametrizada pelo comprimento do arco, e seja $f(s, t)$ uma variação de γ tal como foi definida anteriormente. Seja $L(s) = l(f_s)$ o comprimento da*

curva f_s . Então

$$\begin{aligned} L'(0) &= \langle W(a), \gamma'(a) \rangle - \langle W(0), \gamma'(0) \rangle \\ &\quad - \sum_{i=1}^m \langle W(t-i), \gamma'(t-i^+) - \gamma'(t_i^-) \rangle \\ &\quad - \int_0^a \langle W(t), \nabla_{\gamma'} \gamma' \rangle dt. \end{aligned}$$

onde

$$\gamma'(t-i^+) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_i \\ t > t-i}} \gamma'(t), \quad \gamma'(t-i^-) = \lim_{\substack{t \rightarrow t-i \\ t < t_i}} \gamma'(t).$$

Em particular, se a variação f é própria, temos,

$$L'(0) = - \sum_{i=1}^m \langle W(t_i), \gamma'(t-i^+) - \gamma'(t-i^-) \rangle - \int_0^a \langle W(t), D_{\gamma'} \gamma' \rangle dt$$

Demonstração. Uma demonstração completa e rigorosa deste lema seria tecnicamente algo complicada. Como nosso texto é introdutório nos damos por satisfeitos com o esboço das ideias principais da prova, uma demonstração completa encontra-se por exemplo em [3], [1]. Para começar, vamos supôr que tanto f como γ são diferenciáveis, ou seja, o conjunto $\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ é vazio. Neste caso, o segundo termo à direita da fórmula desaparece. Temos que

$$\begin{aligned} L'(0) &= \frac{\partial}{\partial s} l(f_s)_{s=0} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\int \sqrt{\left\langle \frac{\partial f_s}{\partial t}, \frac{\partial f_s}{\partial t} \right\rangle} \right)_{s=0} \\ &= \int_0^a \frac{\partial}{\partial s} \sqrt{\left\langle \frac{\partial f_s}{\partial t}, \frac{\partial f_s}{\partial t} \right\rangle} \Big|_{s=0} dt \\ &= \int_0^a \left\langle \frac{\partial f_0}{\partial t}, \frac{\partial f_0}{\partial t} \right\rangle^{-1/2} \langle \nabla_W \frac{\partial f_0}{\partial t}, \frac{\partial f_0}{\partial t} \rangle dt. \end{aligned}$$

Na última equação notemos que foi usada a proposição 2.2.1. sendo que $f_0(t) = \gamma(t)$, podemos escrever a fórmula anterior da maneira seguinte:

$$\begin{aligned} L'(0) &= \int_0^a \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle^{-1/2} \langle \nabla_W \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_0^a \langle \nabla_W \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle dt \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos o fato de que $\| \gamma'(t) \|^2 = g(\gamma'(t), \gamma'(t)) = 1$.

Pela Proposição 2.2.1 temos que

Afirmação:

$$\nabla_W \gamma' = \nabla_{\gamma'} W.$$

Isto é devido a que os campos W e γ' coincidem com os campos $\frac{\partial f}{\partial s}$ e $\frac{\partial f}{\partial t}$ respectivamente, e o produto de Lie destes campos é nulo como foi observado no Capítulo 1 (notemos que s, t são as coordenadas de uma parametrização). Pelas propriedades da derivação covariante enunciadas na Proposição 2.2.1, temos então

$$\nabla_{\frac{\partial f}{\partial s}} \frac{\partial f}{\partial t} - \nabla_{\frac{\partial f}{\partial t}} \frac{\partial f}{\partial s} = \left[\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right] = 0 \Rightarrow \nabla_{\frac{\partial f}{\partial s}} \frac{\partial f}{\partial t} = \nabla_{\frac{\partial f}{\partial t}} \frac{\partial f}{\partial s},$$

em particular ao longo da curva $\gamma(t)$ temos $\frac{\partial f}{\partial s} = W$, $\frac{\partial f}{\partial t} = \gamma'$, e $\nabla_W \gamma' = \nabla_{\gamma'} W$, o que mostra a afirmação.

Voltando a $L'(0)$, podemos reescrever

$$\begin{aligned}
 L'(0) &= \int_0^a \langle \nabla_W \gamma', \gamma' \rangle dt = \int_0^a \langle \nabla_{\gamma'} W, \gamma' \rangle dt \\
 &= \int_0^a \frac{\partial}{\partial t} \langle W, \gamma' \rangle - \langle W, \nabla_{\gamma'} \gamma' \rangle dt \\
 &= \langle W(a), \gamma'(a) \rangle - \langle W(0), \gamma'(0) \rangle - \int_0^a \langle W, \nabla_{\gamma'} \gamma' \rangle dt.
 \end{aligned}$$

□

Corolário 5.0.2. *Se uma curva diferenciável γ é geodésica "grega", então γ tem aceleração nula relativa à superfície M : $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$.*

Demonstração. A demonstração do corolário aplica a fórmula da primeira variação:

$$L'(0) = - \int_0^a \langle W(t), \nabla_{\gamma'} \gamma' \rangle dt = 0,$$

onde $W(t)$ é um campo variacional **cualquer** que provém de uma variação de γ por curvas diferenciáveis. Agora, pode-se demonstrar (mas não o faremos por ser muito técnico, o leitor pode fazê-lo como exercício), que qualquer campo vetorial diferenciável em uma vizinhança de γ pode-se obter como campo variacional de γ . Em particular, o campo $\nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t)$ é o campo variacional de uma variação de γ por curvas diferenciáveis e então

$$L'(0) = - \int_0^a \langle \nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t), \nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t) \rangle dt = 0,$$

o que implica claramente que $\nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t) = 0$ para todo t por ser um campo vetorial com norma nula em todo ponto. □

Na verdade, o método anterior é mais poderoso, permite demonstrar que se γ é uma curva diferenciável por partes, geodésica "grega", então γ é diferenciável e além disso tem aceleração nula relativa à superfície M .

Resumindo as ideias do capítulo: supondo que uma curva diferenciável tem comprimento mínimo no conjunto das curvas que ligam dois pontos dados, obtemos uma condição necessariamente satisfeita por dita curva, sua aceleração covariante é nula. Isto não significa que a condição seja suficiente, se o fosse teríamos uma equivalência entre a noção de geodésica "grega" e a noção que provém da mecânica Newtoniana. O que temos é o seguinte:

Teorema 5.1. *Seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva tal que $\nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0$ para todo $t \in I$. Então existe um intervalo $(a, b) \subset I$ onde o comprimento de $\gamma([a, b])$ é o menor possível no conjunto dos comprimentos das curvas que conectam $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$.*

Ou seja, localmente os dois conceitos de geodésicas expostos no capítulo são equivalentes. Porém, os dois conceitos não são equivalentes de forma global. Por exemplo, na esfera de raio $r > 0$ as circunferências máximas são curvas de aceleração covariante nula. Mas nem todo arco de circunferência máxima é minimizante do comprimento das curvas que ligam seus extremos: se o arco tem comprimento maior que meia circunferência é claro que seu comprimento não minimiza. O conjunto das geodésicas onde o comprimento de todo arco minimiza o comprimento das curvas que conectam os extremos do arco, são chamadas **geodésicas minimizantes**, e em geral são um subconjunto do total das curvas com aceleração covariante nula (em superfícies compactas o conjunto das minimizantes é vazio). Por este motivo, a

partir deste capítulo, adotaremos como definição de geodésicas a definição da mecânica clássica.

Definição 4. *Uma geodésica de uma superfície M de classe C^2 é uma curva diferenciável γ tal que $\nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0$ para todo t .*

Esta é a definição adotada em todos os textos de geometria. Notemos que na definição não estamos supondo que γ tenha velocidade constante. De fato, a norma do vetor $\gamma'(t)$ é constante dado que γ tem aceleração nula (verificar como exercício).

6 Segunda forma fundamental e curvatura de Gauss

O tema do presente capítulo é a geometria local das superfícies em \mathbb{R}^3 . Assim como existem ferramentas para estudar a geometria das curvas em \mathbb{R}^3 , funções como curvatura e torção de curvas espaciais tem aplicações importantes em física e matemática, existe um conceito de curvatura para superfícies. Nosso objetivo é fazer uma introdução ao estudo dos operadores de forma em superfícies: curvatura de Gauss, curvaturas principais, linhas de curvatura. Comentaremos como se relacionam a curvatura de Gauss de uma superfície e a curvatura das curvas no espaço Euclideano. E culminamos o capítulo com algumas aplicações interessantes à teoria da rigidez geométrica, combinando ferramentas de geometria local com a teoria das geodésicas. No capítulo assumimos que toda superfície é de classe C^∞ .

6.1 Aplicação normal de Gauss e curvatura das superfícies

6.1.1 Geometria das curvas em \mathbb{R}^3

Começamos por motivar as construções que apresentaremos no capítulo com um resumo das principais funções geométricas das curvas em \mathbb{R}^3 . Dada uma curva regular (ou seja, $c'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$) de classe C^3 $c : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, o vetor

tangente unitário $T(t)$ se define como

$$T(t) = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|},$$

seu vetor normal $N(t)$ define-se por

$$N_c(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|},$$

e seu vetor binormal $B(t)$ é

$$B(t) = T(t) \times N_c(t),$$

onde $v \times w$ representa o produto vetorial. Estes vetores satisfazem as conhecidas relações

$$T'(t) = \kappa(t)N_c(t),$$

$$N'_c(t) = -\kappa(t)T(t) + \tau(t)B(t),$$

$$B'(t) = -\tau(t)N_c(t),$$

que são chamadas relações de Frenet, e a terna $\{T, N_c, B\}$ é denotada por **triedro de Frenet**. Estas equações descrevem totalmente a geometria de uma curva e caracterizam a menos de movimentos rígidos a curva $c(t)$. A curvatura $\kappa(t)$ de $c(t)$ é a variação do vetor tangente, representa a aceleração, a torção $\tau(t)$ mede de alguma forma o desvio da curva $c(t)$ do plano gerado por $c'(t)$ e $N_c(t)$. Os seguintes resultados de rigidez geométrica fornecem interpretações precisas de κ e τ .

Lema 6.1.1. *Uma curva regular de classe C^2 conexa tem curvatura κ igual a zero em todo ponto se e somente se a curva é um subconjunto de uma reta.*

Lema 6.1.2. *Uma curva regular plana de classe C^2 conexa tem curvatura κ constante em todo ponto se e somente se a curva é um subconjunto de uma circunferência.*

Lema 6.1.3. *Uma curva regular de classe C^3 conexa tem torção τ nula em todo ponto se e somente se a curva está contida em um plano.*

No caso de uma superfície parametrizada $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, uma primeira aproximação ao estudo da geometria local nos leva a considerar todas as curvas na superfície junto com suas funções geométricas. Porém, considerar todas as curvaturas possíveis de curvas na superfície seria informação impossível de quantificar. Pois por cada ponto tem infinitas curvas diferenciáveis e mesmo tendo igual vetor tangente no ponto suas curvaturas podem ser bem diferentes. Isto nos mostra que um conceito de curvatura baseado em apenas vetores tangentes não seria satisfatório. Além disso, por cada ponto da superfície tem um plano de vetores tangentes...

Matemáticos dos séculos XVIII e XIX, entre os quais Gauss tem destaque especial, propuseram uma forma de simplificar o estudo dos quantificadores geométricos de uma superfície focando no comportamento do campo de vetores normais. Em lugar de estudar a variação dos vetores tangentes às curvas na superfície, estudar a variação do campo de vetores **normais unitários** de uma parametrização. O vetor normal unitário associado à parametrização Φ é

$$N(\Phi(x, e)) = n(\Phi(x, e)) / \| n(\Phi(x, e)) \| .$$

Este vetor é único, e se bem no caso das curvas em \mathbb{R}^3 não seja a única direção normal a a curva, no caso de curvas planas sim

o é. Isto é consequência do que chamamos **codimensão** de um objeto: o inteiro que somado à dimensão do objeto nos dá a dimensão do espaço ambiente. E mais, se c é uma curva plana parametrizada pelo comprimento do arco, o módulo da curvatura $\kappa(t)$ de $c(t)$ é exatamente a norma da derivada do vetor normal unitário da curva.

Motivados por este modo diferente de olhar uma superfície em \mathbb{R}^3 , não como um objeto bidimensional no espaço mas como um objeto de codimensão 1, consideramos a partir deste momento a aplicação que associa a cada ponto p da superfície sua normal unitária $N(p)$ com respeito a uma parametrização dada. Esta função é conhecida como aplicação normal de Gauss.

Definição 5. Dada uma parametrização $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de uma superfície M , e sua normal unitária associada N , definimos a **aplicação de Weingarten** como a diferencial de N em cada ponto p ,

$$D_p N : T_p M \longrightarrow \mathbb{R}^3.$$

Lema 6.1.4. A imagem da aplicação de Weingarten é um subespaço de $T_p M$.

Demonstração. Devemos demonstrar que a imagem de todo vetor $v \in T_p M$ por $D_p N$ é um vetor em $T_p M$. Consideremos o produto interno

$$\langle D_p N(v), N(p) \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} N(c(t)) \Big|_{t=0}, N(p) \right\rangle.$$

É suficiente mostrar que o produto anterior é zero para todo $v \in T_p M$. Vejamos: pela regra de Leibnitz do produto interno usual temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle N(c(t)), N(c(t)) \rangle = 2 \left\langle \frac{\partial}{\partial t} N(c(t)), N(c(t)) \right\rangle,$$

pelo que em $t = 0$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle N(c(t)), N(c(t)) \rangle |_{t=0} &= 2 \left\langle \frac{\partial}{\partial t} N(c(t)) |_{t=0}, N(c(0)) \right\rangle \\ &= \langle D_p N(v), N(p) \rangle. \end{aligned}$$

mas a norma de $N(c(t))$ é 1 para todo t o que implica que o lado esquerdo da equação anterior é zero. \square

Lema 6.1.5. *Dado $p \in M$, a função $k_p(v) = \langle D_p N(v), v \rangle$, definida nos vetores tangentes em p de norma 1, é a curvatura da curva (parametrizada pelo comprimento do arco) obtida ao intersectar M com o plano gerado por $N(p)$ e o vetor v .*

Exercício: Demonstrar este lema.

O Lema anterior é bastante eloquente no que respeita a $D_p N$: esta aplicação condensa a informação sobre todas as curvaturas das curvas em M obtidas intersectando a superfície com os planos que contém $N(p)$.

6.2 A curvatura de Gauss-Kronecker

Definição 6. *A curvatura de Gauss-Kronecker $K(p)$ (o simplesmente curvatura de Gauss) da superfície parametrizada $\Phi : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ no ponto p é o determinante da matriz da aplicação de Weingarten em uma base ortonormal de $T_p M$.*

Definição 7. *Seja A_p a matriz da aplicação de Weingarten em uma base ortonormal de vetores coordenados normalizados em $T_p M$. A forma quadrática*

$$II_p(v, w) = \langle A_p(v), w \rangle$$

é conhecida como a **segunda forma fundamental** da superfície em p

É sempre possível escolher parametrizações de uma superfície tais que em um ponto p dado os vetores coordenados são perpendiculares. Pelo que em princípio seria sempre possível obter II_p . Mas na verdade o relevante para fins geométricos é a informação sobre os autovalores da matriz e seu determinante, que não dependem da base escolhida para representar a aplicação de Weingarten.

Exemplos:

1) Um plano no espaço Euclidiano tem curvatura zero como era de esperar-se. A aplicação normal de Gauss é constante e portanto sua derivada é idênticamente nula em todos os pontos.

2) A esfera de raio r $S_r = \{x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ tem curvatura $\frac{1}{r^2}$. pois em cada ponto $p \in S_r$ o vetor normal unitário coincide com $\frac{p}{\|p\|} = \frac{p}{r}$ salvo orientação (multiplicação por 1 ou -1). A aplicação de Weingarten é então

$$D_p N = \frac{1}{r} I$$

onde I é a matriz identidade, e portanto seu determinante é $\frac{1}{r^2}$.

3) Superfícies de revolução da forma

$$G(t, \alpha) = R_\alpha(c(t)) = (\cos(\alpha)x(t), \sin(\alpha)x(t), z(t)),$$

obtidas girando uma curva plana $c(t) = (x(t), 0, z(t))$ em torno ao eixo vertical, tem aplicação normal de Gauss

$$\begin{aligned} N(G(t, \alpha)) &= n(G(t, \alpha)) / \| n(G(t, \alpha)) \| \\ &= \frac{1}{|x(t)| \sqrt{(x'(t))^2 + (z'(t))^2}} (-z'(t)x(t)\cos(\alpha), \\ &\quad -z'(t)x(t)\sin(\alpha), x'(t)x(t)). \end{aligned}$$

Supondo que $x(t) > 0$ para todo t , temos

$$\begin{aligned} N(G(t, \alpha)) &= n(G(t, \alpha)) / \| n(G(t, \alpha)) \| \\ &= \frac{(-z'(t)\cos(\alpha), -z'(t)\sin(\alpha), x'(t))}{\sqrt{(x'(t))^2 + (z'(t))^2}}, \end{aligned}$$

e supondo além disso que a curva geratriz $c(t)$ está parametrizada pelo comprimento do arco,

$$\begin{aligned} N(G(t, \alpha)) &= n(G(t, \alpha)) / \| n(G(t, \alpha)) \| \\ &= (-z'(t)\cos(\alpha), -z'(t)\sin(\alpha), x'(t)). \end{aligned}$$

Os vetores tangentes coordenados são perpendiculares, e normalizados são

$$\partial_t / \| \partial_t \| = (\cos(\alpha)x'(t), \sin(\alpha)x'(t), z'(t)),$$

$$\partial_\alpha / \| \partial_\alpha \| = (-\sin(\alpha), \cos(\alpha), 0).$$

as derivadas de N nas direções coordenadas são

$$D_p N(\partial_t) = \frac{\partial}{\partial t} N(G(t, \alpha)) = (-z''(t)\cos(\alpha), z''(t)\sin(\alpha), x''(t)),$$

$$D_p N(\partial_\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} N(G(t, \alpha)) = (z'(t)\sin(\alpha), -z'(t)\cos(\alpha), 0).$$

Observemos que como $c(t)$ tem velocidade constante 1, $(x'(t))^2 + (z'(t))^2 = 1$, tem-se

$$x'x'' + z'z'' = 0$$

o que implica

$$-z'' = x'x''/z'.$$

Substituindo esta expressão na equação de $D_p N(\partial_t)$ obtemos

$$D_p N(\partial_t) = \frac{x''}{z'} \partial_t,$$

ou seja, o vetor ∂_t tangente aos meridianos é um autovetor da aplicação de Weingarten. O mesmo acontece com os vetores tangentes aos paralelos,

$$D_p N(\partial_\alpha) = -\frac{z'}{\|\partial_\alpha\|} \partial_\alpha = -\frac{z'}{x} \partial_\alpha.$$

Portanto, neste caso é simples a expressão da matriz de $D_p N$ na base ortonormal $\partial_t / \|\partial_t\|, \partial_\alpha / \|\partial_\alpha\|$:

$$II_p = \begin{pmatrix} -\frac{x''}{z'} & 0 \\ 0 & \frac{z'}{x} \end{pmatrix}.$$

Concluimos que a curvatura de Gauss da superfície de revolução está dada pela função

$$K(G(t, \alpha)) = -x''/x.$$

Exercício: Ache a expressão da aplicação de Weingarten e da curvatura de Gauss nos pontos de um gráfico $\Phi(x, e) = (x, e, f(x, e))$, onde f é de classe C^3 . Como é a aplicação de Weingarten nos pontos críticos de f ? Uma forma de calcular a curvatura é aproveitando a forma simplificada que assume a aplicação nos pontos críticos.

6.2.1 O Teorema Egregium de Gauss

Um dos resultados mais importantes da teoria fundamental das superfícies é o chamado Teorema Egregium de Gauss:

Teorema 6.1. *A curvatura de Gauss é invariante por isometrias do espaço Euclidiano. Ou seja, se M é uma superfície em \mathbb{R}^3 , e $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma isometria, então a curvatura de Gauss $K(p)$ de M no ponto p é igual a a curvatura de Gauss $K(T(p))$ de $T(M)$ no ponto $T(p)$.*

Na verdade, este teorema vale no contexto mais geral das imersões isométricas das variedades Riemannianas, mas para nossos fins é suficiente o enunciado para superfícies em \mathbb{R}^3 . Este teorema pode-se demonstrar de diferentes formas. Podemos por exemplo verificar diretamente a partir da definição que os coeficientes da segunda forma fundamental de M em p com respeito a uma parametrização Φ coincidem com os coeficientes da segunda forma fundamental de $T(M)$ em $T(p)$ com respeito à parametrização $T(\Phi)$.

Outra forma menos óbvia porém mais relevante no contexto da geometria Riemanniana, é demonstrar tal como se faz no livro de Hicks [1]:

Teorema 6.2. *Seja M uma superfície em \mathbb{R}^3 , então a curvatura de Gauss em cada ponto $p \in M$ satisfaz a seguinte equação:*

$$K(p) = \langle \nabla_X \nabla_e X - \nabla_e \nabla_X X - \nabla_{[X,e]} X, e \rangle$$

onde X, e é um par de vetores ortonormais em $T_p M$.

Demonstração. A demonstração não é difícil, faremos um esboço e deixamos ao leitor completar os detalhes. Observemos primeiro

que no espaço Euclideano, o campo vetorial que está no primeiro fator do produto interno é um campo vetorial nulo. Isto se deve a que a derivada covariante no espaço é a derivação usual de funções com respeito a campos vetoriais e se nossos campos vetoriais são coordenados em \mathbb{R}^3 então comutam:

$$\partial_X \partial_e(f) - \partial_e \partial_X(f) = [X, e](f) = 0,$$

para toda função escalar C^∞ definida em M . Por outro lado, se X, e são dois vetores tangentes não nulos linearmente independentes em $T_p M$, existe uma parametrização local de M tal que os campos coordenados em p são justamente X, e (demonstrar) e assim

$$\partial_X \partial_e(X) - \partial_e \partial_X X - \partial_{[X, e]} X = 0.$$

Pela definição da derivada covariante de M , $\nabla_X Z = \partial_X Z - \langle \partial_X Z, N(p) \rangle N(p)$, ou seja, $\nabla_X Z$ é a projeção ortogonal de $\partial_X Z$ em $T_p M$ para todo par de campos X, Z tangentes a M em p . Temos então que $\partial_X Z = \nabla_X Z + \langle \partial_X Z, N(p) \rangle N(p)$, e substituindo na identidade anterior separando as componentes tangencial e normal a $T_p M$ obtem-se justamente a expressão para $K(p)$ que vemos no Teorema 6.2. \square

A importância da expressão de $K(p)$ no Teorema anterior é que não depende da normal $N(p)$!! É uma expressão que somente envolve a geometria intrínseca da superfície.

6.2.2 Alguns teoremas importantes de rigidez

Um resultado importante da geometria das superfícies em \mathbb{R}^3 que generaliza o Lema 6.1.2 é

Teorema 6.3. *Toda superfície compacta sem bordo em \mathbb{R}^3 com curvatura Gaussiana constante é uma esfera de raio $r > 0$.*

O teorema anterior é conhecido como o teorema da esfera, sua demonstração foge do escopo do presente texto e não será abordada. O leitor interessado pode ver a prova em [1] por exemplo. Este teorema nos diz que as esferas são as únicas superfícies compactas de curvatura constante, assim como os círculos são as únicas curvas planas compactas de curvatura constante.

Exercício: Se a curva geratriz de uma superfície de revolução é uma reta, demonstrar que a curvatura de Gauss é zero em todo ponto. Portanto, os planos não são as únicas superfícies em \mathbb{R}^3 com curvatura de Gauss zero.

O teorema da esfera nos diz que as únicas superfícies compactas sem bordo com curvatura constante são de curvatura positiva e esferas redondas. Podemos perguntar-nos que acontece com as superfícies de curvatura negativa constante em \mathbb{R}^3 . Sabemos que em \mathbb{R}^3 toda superfície compacta tem pelo menos um ponto de curvatura positiva (exercício). Pelo que não existem superfícies de curvatura não positiva compactas no espaço Euclidiano. Mas Hilbert demonstrou muito mais:

Teorema 6.4. *Não existem superfícies completas em \mathbb{R}^3 com curvatura constante negativa.*

O enunciado original de Hilbert inclui a frase "superfície mergulhada" pois em seu trabalho considerava superfícies "generalizadas" que poderiam ter auto-interseções. Segundo a definição adotada no texto, todas as superfícies em \mathbb{R}^3 são mergulhadas.

Na próxima seção serão obtidos outros teoremas de rigidez que generalizam resultados conhecidos sobre curvas planas.

6.3 Curvaturas principais e pontos umbílicos

O propósito da seção é fazer uma análise mais detalhada da aplicação de Weingarten. O primeiro resultado que consideramos, fundamental para os objetivos da seção, é o seguinte:

Lema 6.3.1. *A aplicação de Weingarten é uma transformação linear simétrica.*

Demonstração. Uma transformação linear simétrica $A : T_p M \rightarrow T_p M$ está caracterizada pela seguinte propriedade:

$$\langle A(v), w \rangle = \langle v, A(w) \rangle$$

para todo par de vetores v, w em $T_p M$. Seja $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ uma parametrização de um aberto de p , sejam ∂_u, ∂_s os vetores coordenados de $\Phi(u, s)$. Suponhamos também que $\Phi(0, 0) = p$. Temos então

$$\langle D_p N(\partial_u), \partial_s \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial u} N(\Phi(u, 0)) \Big|_{u=0}, \partial_s(\Phi(0, 0)) \right\rangle.$$

pela regra de Leibnitz do produto interno,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial u} N(\Phi(u, 0)) \Big|_{u=0}, \partial_s(\Phi(0, 0)) \right\rangle &= \frac{\partial}{\partial u} \langle N(\Phi(u, 0)), \partial_s(\Phi(u, 0)) \Big|_{u=0} \\ &\quad - \langle N(\Phi(u, 0)) \Big|_{u=0}, \partial_u(\partial_s(\Phi(u, 0)) \Big|_{u=0} \rangle. \end{aligned}$$

Notemos que $\frac{\partial}{\partial u} \langle N(\Phi(u, 0)), \partial_s(\Phi(u, 0)) \rangle = 0$ porque N é sempre perpendicular à superfície. E além disso, a composição dos operadores de derivação parcial com relação às coordenadas satisfaz

$$\partial_u \circ \partial_s = \partial_s \circ \partial_u,$$

dado que o produto de Lie $[\partial_u, \partial_s]$ se anula. Assim temos que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial u} N(\Phi(u, 0))_{u=0}, \partial_s(\Phi(0, 0)) \right\rangle &= -\langle N(\Phi(u, 0)), \partial_s(\partial_u(\Phi(u, 0)))_{u=0} \\ &= -\frac{\partial}{\partial s} \langle N(\Phi(u, 0)), \partial_u(\Phi(u, 0)) \rangle_{u=0} \\ &\quad + \langle \partial_s N(\Phi(u, 0))_{u=0}, \partial_u(\Phi(0, 0)) \rangle. \end{aligned}$$

Repetindo o argumento anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \langle D_p N(\partial_u), \partial_s \rangle &= \langle \partial_s N(\Phi(u, 0)) |_{u=0}, \partial_u(\Phi(0, 0)) \rangle \\ &= \langle D_p N(\partial_s), \partial_u \rangle \end{aligned}$$

mostrando a simetria da aplicação de Weingarten no par de vetores coordenados.

Finalmente, a álgebra linear de transformações lineares nos diz que se a matriz de uma transformação A linear em uma base de vetores é simétrica, então A é simétrica. \square

O resultado anterior implica que a segunda forma fundamental é sempre diagonalizável.

Definição 8. *Dado $p \in M$, um valor principal de curvatura é um autovalor de a aplicação de Weingarten, e uma direção principal de curvatura é um autovetor da aplicação de Weingarten.*

Na seção anterior calculamos os autovalores e autovetores de certas aplicações de Weingarten, em todos esses casos a matriz da mesma era diagonal. No caso da esfera todos os autovalores são iguais e todo vetor é autovetor. Em geral, os valores principais de curvatura $\lambda_1(p) \leq \lambda_2(p)$ são a menor e a maior curvatura possíveis no conjunto das curvas por p com velocidade unitária obtidas intersectando M com planos que contém $N(p)$.

Definição 9. Um ponto $p \in M$ é chamado *umbílico* se a aplicação de Weingarten é um múltiplo da identidade.

Proposição 6.3.2. Se $p \in M$ não é umbílico, existe uma vizinhança aberta $U \subset M$ de p onde existem um par de campos vetoriais diferenciáveis X, e perpendiculares entre si e tangentes à superfície M , tais que $X(q), e(q)$ são direções principais de curvatura.

Demonstração. Daremos apenas uma ideia da demonstração, que é bastante geométrica. Se p não é umbílico, os autovetores da segunda forma fundamental II_p determinam duas únicas direções tangentes em $T_p M$. Por continuidade de II_p , existe uma vizinhança aberta U de p onde o mesmo acontece em todo $q \in U$. Portanto, as direções principais de curvatura de II_q formam um par de campos de retas em U , que são perpendiculares em cada ponto (pois a matriz II_p é simétrica). Podemos escolher campos unitários X, e tangentes a cada um dos campos de retas, de forma que sejam contínuos (diferenciáveis na realidade). \square

Os campos X, e são chamados campos de linhas de curvatura e as curvas tangentes a cada um deles (existem em todo ponto de U pela teoria das equações diferenciais) são chamadas **linhas de curvatura**.

A seguir, mostramos algumas aplicações dos conceitos da seção a problemas de classificação e rigidez de superfícies. O próximo resultado é uma caracterização da esfera e o plano em termos de pontos umbílicos.

Teorema 6.5. Uma superfície M conexa onde todos os pontos são umbílicos é parte de um plano ou de uma esfera.

Demonstração. Se todos os pontos de M são umbílicos, $D_p N(v) = \lambda(p)v$ para todo $v \in T_p M$, onde $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 . Se tomamos uma parametrização $\Phi(x, e)$ de um aberto U contendo $p \in M$, temos

$$D_q N(\partial_x) = \frac{\partial}{\partial x} N(q) = \lambda(q) \partial_x,$$

$$D_q N(\partial_e) = \frac{\partial}{\partial e} N(q) = \lambda(q) \partial_e,$$

para todo $q \in U$. Como as derivadas mixtas de N conmutam, tem-se que $\frac{\partial^2}{\partial x \partial e} N = \frac{\partial^2}{\partial e \partial x} N$. Além disso, lembremos que o produto de Lie dos campos coordenados é zero. Aplicando estas observações às equações anteriores concluímos que

$$\frac{\partial}{\partial e} \lambda \partial_x = \frac{\partial}{\partial x} \lambda \partial_e,$$

em todo ponto de U . Como os vetores coordenados são linearmente independentes, as funções $\frac{\partial}{\partial e} \lambda$ e $\frac{\partial}{\partial x} \lambda$ devem anular-se em U . E sendo λ uma função de classe C^1 deduzimos que λ deve ser constante em U . Pela conexidade de M , λ deve ser constante em M e portanto, ou é zero sempre e a aplicação normal de Gauss é constante, ou é sempre não nula. No primeiro caso a superfície é subconjunto de um plano, no segundo podemos supôr que é sempre positiva (trocando a orientação da normal se fôr necessário). Pelo Lema 6.1.5, toda curva em M obtida intersectando um plano que contém $N(p)$ com M tem curvatura constante λ . Pela teoria das curvas planas, as curvas anteriores estão contidas em círculos de raio $\frac{1}{\lambda}$ que passam por p e são todos tangentes a $T_p M$. A união destes círculos é uma esfera. \square

As linhas de curvatura, assim como as geodésicas, fazem parte de uma família de curvas nas superfícies que são de-

nominadas linhas especiais (existem outros tipos como as linhas assintóticas). O nome "especial" reflete a especificidade da propriedade geométrica que as caracteriza. Os seguintes resultados nos ajudam a entender melhor a geometria subjacente aos conceitos anteriores.

Lema 6.3.3. *Seja M uma superfície de classe C^3 . Então toda geodésica plana em M com curvatura diferente de zero é uma linha de curvatura.*

Demonstração. Na demonstração usaremos o triedro de Frenet. Se $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica plana parametrizada pelo comprimento do arco com curvatura diferente de zero, seu vetor normal N_γ está bem definido e contido no plano Π que contém a curva, e ao mesmo tempo coincide com o vetor $N(\gamma)$ normal unitário de uma parametrização conveniente da superfície. Pelas fórmulas de Frenet,

$$N'_\gamma(t) = -\kappa(t)T(t)$$

o que implica que

$$N'_\gamma(t) = D_{\gamma(t)}N(\gamma'(t)) = D_{\gamma(t)}N(T(t)) = -\kappa(t)T(t),$$

caracterizando $T(t)$ como autovetor da aplicação de Weingarten.

□

Observemos que a afirmação recíproca do lema anterior é falsa, porque já vimos que os paralelos de uma superfície de revolução são linhas de curvatura. Como em geral não são geodésicas, e sempre são curvas planas, mostram que nem toda linha de curvatura plana é geodésica. Outra observação importante é o papel da hipótese da curvatura não nula da curva. Com efeito,

se a curva fosse uma reta, sua curvatura é zero e seu vetor normal não estaria bem definido, uma reta tem um plano inteiro de direções normais.

O próximo resultado mostra que a combinação de duas propriedades especiais em uma curva da superfície é algo realmente excepcional.

Proposição 6.3.4. *Seja M uma superfície conexa em \mathbb{R}^3 . Toda curva de classe C^3 $\gamma : I \rightarrow M$ que seja uma geodésica cujos vetores tangentes são direções principais de curvatura, é uma curva plana.*

Demonstração. Começamos por escrever a equação da torção τ de uma curva $\gamma(t)$, $t \in I$, de classe C^3 :

$$B(t) = T(t) \times N_\gamma(t)$$

$$B'(t) = -\tau(t)N_\gamma(t).$$

Calculando $B'(t)$, aplicando a regra de Leibnitz da derivação do produto vetorial de funções vetoriais, temos

$$B'(t) = T'(t) \times N_\gamma(t) + T(t) \times N'_\gamma(t) = T(t) \times N'_\gamma(t),$$

onde o primeiro sumando é zero dado que $T'(t) = \kappa(t)N_\gamma(t)$. Agora, suponhamos que $\gamma(t)$ é geodésica parametrizada pelo comprimento do arco. Então o vetor $N_\gamma(t)$ é perpendicular à superfície e portanto, $N_\gamma(t)$ é a aplicação normal de Gauss restrita a $\gamma(t)$. Portanto, como no lema anterior, tem-se que $N'_\gamma(t) = D_{\gamma(t)}N(\gamma'(t))$, e se supomos além disso que $\gamma'(t)$ é autovetor da aplicação de Weingarten, obtemos que $N'_\gamma(t) = \lambda(t)\gamma'(t) = \lambda(t)T(t)$. Substituindo esta equação na expressão de $B'(t)$ concluímos que $B'(t) = 0$ para todo $t \in I$, o que implica que $\tau(t) = 0$ para todo $t \in I$ e portanto a curva γ é uma curva plana. \square

6.4 Mais sobre geodésicas planas e rigidez

No Capítulo 3 mostramos que se todas as geodésicas por um ponto dado da superfície são planas então há simetria rotacional da mesma com relação à reta normal que passa pelo ponto. O próximo resultado descreve o que acontece quando **toda** geodésica é curva plana.

Teorema 6.6. *Seja M uma superfície conexa de \mathbb{R}^3 tal que toda geodésica é uma curva plana. Então M é subconjunto de uma esfera de curvatura constante positiva ou de um plano.*

Precisaremos de alguns conceitos preliminares importantes da teoria básica das geodésicas.

6.4.1 Aplicação Exponencial

Definição 10. *A aplicação exponencial $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ está definida por*

$$\exp_p(v) = \gamma_{(x,v)}(1)$$

onde $\gamma_{(x,v)}(t)$ é a geodésica com condições iniciais $\gamma_{(x,v)}(0) = x$, $\gamma'_{(x,v)}(0) = v$.

A aplicação exponencial nos dá uma forma concisa de representar as geodésicas, devido ao seguinte resultado.

Lema 6.4.1. *Dado $p \in M$, $v \in T_p M$, $\exp_p(tv) = \gamma_{(p,v)}(t)$ para todo t no domínio de definição de $\gamma_{(p,v)}(t)$. Em particular, se M é completa, a afirmação anterior vale para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Pela definição, $\exp_p(tv) = \gamma_{(p,tv)}(1)$, e observemos que a geodésica $\beta(s) = \gamma_{(p,tv)}(s)$ é uma reparametrização de

$\gamma_{(p,v)}(t)$ com velocidade constante $\| \dot{\gamma} \| = \| v \|$. Ou seja,

$$\beta(s) = \gamma_{(p,v)}(ts)$$

pois $\gamma_{(p,v)}(ts)$ é uma geodésica com as mesmas condições iniciais que $\beta(s)$. Portanto,

$$\exp_p(tv) = \gamma_{(x,tv)}(1) = \beta(1) = \gamma_{(p,v)}(t)$$

provando assim a afirmação. \square

Uma das propriedades mais importantes da aplicação exponencial é o fato de ser localmente injetiva.

Lema 6.4.2. *A derivada da aplicação exponencial $D_{(p,0)}\exp_p : T_{(p,0)}(T_pM) \rightarrow T_pM$ é a identidade. Em particular, existe uma vizinhança aberta de $(p,0) \in T_pM$ restrita à qual a exponencial é um difeomorfismo.*

Demonstração. Calculemos a derivada da exponencial: seja $\bar{w} \in T_{(p,0)}T_pM$, ou seja, \bar{w} é um vetor tangente a uma curva $\alpha(t)$ em T_pM que passa por $(p,0)$ em $t=0$. Como T_pM é um plano, os vetores tangentes a $(p,0)$ se identificam com os vetores tangentes a retas pela origem $(p,0)$ de T_pM . Como a diferencial calculada em \bar{w} não depende da curva tangente a \bar{w} em $(p,0)$, podemos tomar $\alpha(t) = (p,0) + (p,tw)$, de forma tal que $\bar{w} = (p,w)$ onde $w \in T_pM$. Desta forma,

$$\begin{aligned} D_{(p,0)}\exp_p(\bar{w}) &= \frac{d}{dt}\exp_p(\alpha(t))_{t=0} = \frac{d}{dt}(\exp_p(tw))_{t=0} \\ &= (p,w) = \bar{w} \end{aligned}$$

o que mostra que a derivada da exponencial é a identidade em $(p,0)$. O teorema da função inversa nos garante que a exponencial

é um difeomorfismo local restrita a um certo aberto de $(p, 0) \in T_p M$. \square

6.4.2 Demonstração do Teorema 6.6

Para a demonstração do Teorema precisamos da seguinte observação.

Lema 6.4.3. *Dado $k \in \mathbb{R}$, o conjunto dos pontos de M com curvatura constante igual a k é um conjunto fechado (na topologia relativa).*

Isto é uma consequência imediata da continuidade da curvatura Gaussiana. O que não é tão óbvio é o seguinte:

Proposição 6.4.4. *Nas condições do Teorema 6.6, dado $p \in M$ existem um $k \in \mathbb{R}$ e uma vizinhança aberta de p em M onde a curvatura Gaussiana é igual a k .*

Demonstração. Com efeito, suponhamos primeiro que existe $p \in M$ tal que alguma geodésica $\gamma_{(p,v)}(t)$ tenha curvatura diferente de zero em \mathbb{R}^3 para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Devido ao Lema 6.4.2, a continuidade das geodésicas com respeito a suas condições iniciais e a continuidade da curvatura, existem $\delta > 0$ e uma vizinhança aberta $U(p, v) \subset T_p M$ tal que a curvatura em \mathbb{R}^3 de toda geodésica $\exp_p(tw)$, com $(p, w) \in U(p, v)$, $t \in (-\delta, \delta)$, é diferente de zero. Agora, para cada ponto das geodésicas $\exp_p(t\sigma)$, $(x, \sigma) \in U(p, v)$, $t \in (-\delta, \delta)$, temos o mesmo resultado. Ou seja, existe $\delta' > 0$ tal que para todo $(x, \sigma) \in U(p, v)$, existe vizinhança aberta $U(x, \sigma) \subset T_x M$ de forma tal que a curvatura da geodésica $\exp_x(t\eta)$ é diferente de zero para todo $(x, \eta) \in U(x, \sigma)$ e $t \in (-\delta', \delta')$.

Considerar o conjunto

$$W = \cup_{(x,\sigma) \in U(p,v)} \{exp_x(t\eta), (x, \eta) \in U(x, \sigma), t \in (-\delta', \delta')\}$$

Este conjunto é uma união de abertos em M pelo Lema 6.4.2, portanto um aberto, e cada geodésica $exp_x(t\eta)$ com $(x, \eta) \in U(x, \sigma)$ é uma curva plana com curvatura diferente de zero em \mathbb{R}^3 . Pelo Lema 6.3.3, toda geodésica $exp_x(t\eta)$ é linha de curvatura e portanto, todo vetor $(x, \eta) \in U(x, \sigma)$ é um autovetor da aplicação de Weingarten. Mas note-se que $U(x, \sigma)$ é um aberto em $T_x M$ que contém (x, σ) , e então a aplicação de Weingarten em x teria um subconjunto aberto de autovetores no plano $T_x M$ para todo $x \in W$. Como os autovetores associados a um autovalor são subespaços, e a aplicação de Weingarten é simétrica, os autoespaços da mesma em $T_x M$ o são dois retas linearmente independentes, o são todo $T_x M$. Portanto, vale a segunda possibilidade e neste caso a aplicação de Weingarten deve ser um múltiplo da identidade. Isso quer dizer que todo ponto em W é umbílico, e o Teorema 6.5 nos diz que W deve ser subconjunto de uma esfera de curvatura constante. Assim, demonstramos o enunciado supondo que por $p \in M$ passa alguma geodésica com curvatura não nula como curva de \mathbb{R}^3 .

Se agora supomos que toda geodésica que passa por p tem curvatura zero em \mathbb{R}^3 então toda geodésica por p é localmente uma reta e obviamente a superfície M contém um subconjunto de um plano. Este subconjunto será um aberto da superfície onde a curvatura será constante igual a 0, provando assim o enunciado. \square

Com estes dois resultados podemos demonstrar o Teorema 6.6. Com efeito, para todo ponto $p \in M$ existe um aberto

$V(p)$ e um k_p que em princípio depende de p tal que a curvatura Gaussiana em todo ponto de $V(p)$ é igual a k_p . Seja $M(k_p)$ o conjunto de M onde a curvatura é igual a k_p . É um conjunto fechado e aberto, e sendo M conexa temos que existe um $k \in \mathbb{R}$ tal que a curvatura Gaussiana em todo M é igual a k .

6.5 Superfícies regradas

Uma superfície em \mathbb{R}^3 é chamada regrada se dado um ponto $p \in S$ existe uma reta L_p que passa por p e que está contida em S . Como exemplos temos os planos e os cilindros em \mathbb{R}^3 , mas existem outros exemplos menos óbvios como a helicóide e o hiperbolóide de uma folha.

Toda superfície regrada admite uma parametrização da forma

$$r(u, v) = \gamma(u) + v\beta(u)$$

onde $(u, v) \in U$, U aberto de \mathbb{R}^2 . A curva $\gamma(u)$ é chamada curva diretriz, observar que corresponde a $r(u, 0)$. A seguir descrevemos com mais detalhe a helicóide e o hiperbóide.

Helicóide

Para definir a helicóide começamos com a hélice $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, $t \in \mathbb{R}$, e consideramos o conjunto das semiretas paralelas ao plano $z = 0$ que começam em um ponto do eixo vertical e que passam por algum ponto da hélice. É simples verificar que este conjunto pode-se parametrizar da seguinte forma:

$$r(t, v) = (0, 0, t) + v(\cos(t), \sin(t), 0)$$

onde $t \geq 0$, $v > 0$.

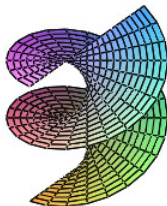


Figura 4 – Helicóide

Hiperbolóide:

A equação euclideana do hiperbolóide é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

com $a, b, c > 0$. Esta superfície admite a parametrização

$$r(u, v) = (a \cosh(v) \cosh(u), b \cosh(v) \sinh(u), c \sinh(v))$$

onde $\cosh(v)$, $\sinh(v)$ são as funções coseno e seno hiperbólico respectivamente. Ao procurar parametrizações do tipo $r(u, v) = \gamma(u) + v(\gamma'(u) - (0, 0, c))$ onde $\gamma(u) = (a \cosh(u), b \sinh(u), 0)$ encontramos que

$$r_1(u, v) = (a(\cosh(u) - v \sinh(u)), b(\sinh(u) + v \cosh(u)), vc)$$

é uma parametrização regradada. Curioso observar que se tomarmos $\gamma_2(u) = \gamma(-u)$ obtemos outra parametrização regradada da superfície.

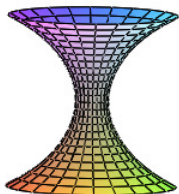


Figura 5 – Hiperbóloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

Com a ajuda dos resultados já vistos no capítulo podemos demonstrar várias propriedades interessantes das superfícies regradas. Por exemplo:

1. Cada reta contida em uma superfície de revolução S é uma geodésica da superfície por ser uma geodésica do espaço Euclidiano. Com efeito, se dentro da superfície houvesse uma curva mais curta com extremos em dois pontos de uma reta $L_p \subset S$ em particular haveria uma curva no espaço mais curta que um segmento de reta ligando seus extremos !!! A definição de geodésicas como soluções de uma equação diferencial também se verifica facilmente, pois a aceleração covariante é uma projeção da aceleração da curva no espaço, a qual por ser uma reta resulta ser nula.
2. Pelo Lemma 6.1.5 tem-se que toda reta L_p da superfície regrada S tem curvatura zero na superfície. Portanto, a segunda forma fundamental em p tem pelo menos uma direção na qual se anula. As direções de $T_p S$ onde a segunda forma fundamental se anula são chamadas **direções as-**

sintóticas. Isto nos leva ao seguinte enunciado:

Lema 6.5.1. *Toda superfície regrada S tem curvatura de Gauss menor o igual a zero.*

Demonstração. Seja $p \in S$, II_p a segunda forma fundamental de S em $T_p S$. Como é uma forma quadrática no plano com uma direção na qual se anula, temos duas possibilidades: ou a forma é degenerada, ou seja, a matriz A_p associada à forma quadrática tem núcleo, ouã é não degenerada. Em coordenadas $v = (x, e)$ com respeito a uma base de autovetores ortonormais de A_p a segunda forma fundamental escreve-se como,

$$II_p(v, v) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 e^2$$

onde λ_i são os autovalores de A_p . Assim vemos que no primeiro caso um dos autovalores deve ser zero, o determinante da matriz A_p é zero também e portanto a curvatura de Gauss em p será zero. No segundo caso a matriz A_p é inversível e os autovalores de A_p são não nulos com sinais opostos já que existem vetores não nulos nos quais a segunda forma vale zero. Isto implica que o determinante de A_p é negativo, concluindo a demonstração. \square

Como exercício o leitor pode verificar que a curvatura da helicóide é zero, enquanto que a curvatura do hiperbolóide é negativa. De fato isto poderia verificar-se parametrizando o hiperbolóide como uma superfície de revolução e usando as fórmulas da curvatura de Gauss para ditas superfícies que serão estudadas no próximo capítulo. O lema anterior é um bom exemplo de como podemos aplicar resultados conceituais para deduzir enunciados quantitativos geométricos, sem efetuar praticamente nenhuma conta. Daremos muitos mas exemplos deste tipo no

texto, a importância de saber usar ferramentas teóricas para simplificar cálculos é inegável.

6.6 Exercícios complementarios

Finalizamos o Capítulo recomendando alguns exercícios sobre a curvatura de Gauss. O terceiro deles é particularmente relevante na teoria das superfícies.

Exercício: Calcular os valores principais e as direções principais de curvatura do gráfico de $f(x, e) = x^2 - e^2$ no ponto $(0, 0, 0)$. Calcular a curvatura de Gauss em todo ponto e constatar que é negativa.

Exercício: Sejam $f(x, e)$, $g(x, e)$ dois funções escalares de classe C^3 tais que $f(0, 0) = g(0, 0)$, seus gráficos são horizontais em $(0, 0, 0)$, e satisfazem

$$f(x, e) \leq g(x, e)$$

para todo (x, e) em uma vizinhança aberta de $(0, 0)$. Demonstrar que

$$K_f(0, 0) \geq K_g(0, 0)$$

onde K_f , K_g são as curvaturas Gaussianas dos gráficos de f e g respectivamente.

Exercício: Demonstre usando o exercício anterior que toda superfície compacta M em \mathbb{R}^3 tem um ponto de curvatura positiva.

(Sug.: Existe uma esfera centrada na origem tangente a M no ponto de M de maior norma).

7 Classificação das superfícies de revolução com curvatura constante

O objetivo do capítulo é descrever analiticamente todas as superfícies de revolução que tem curvatura de Gauss constante.

Boa parte do trabalho está feito, de fato, no capítulo anterior demostramos que a curvatura de Gauss de uma superfície de revolução definida em coordenadas cilíndricas por

$$\Phi(t, \alpha) = (x(t)\cos(\alpha), x(t)\sin(\alpha), z(t)),$$

gerada pela rotação de uma curva regular $c(t) = (x(t), 0, z(t))$ de classe C^3 em torno ao eixo vertical é

$$K(\Phi(t, \alpha)) = -\frac{x''(t)}{x(t)},$$

sempre que a curva c esteja parametrizada pelo comprimento do arco, ou seja, $\sqrt{(x'(t))^2 + (z'(t))^2} = 1$.

Isso nos diz que se a curvatura é constante a coordenada $x(t)$ da curva geratriz satisfaz

$$x''(t) + Kx(t) = 0$$

onde K é uma constante. Esta equação diferencial é bastante conhecida em física, é a equação do oscilador harmónico simples sem atrito nem forças externas. Em geometria esta equação é parte

de uma família de equações chamadas **equações de Jacobi**, cujas soluções passamos a descrever.

7.1 equações diferenciais de ordem 2 com coeficientes constantes

A equação de Jacobi $x''(t) + Kx(t) = 0$ é uma equação diferencial de ordem 2 com coeficientes constantes. Resolver a equação diferencial consiste em encontrar todas as funções $x(t)$ que satisfazem a equação. Portanto, enunciaremos antes que nada algumas propriedades básicas do conjunto das soluções de equações de ordem 2 com coeficientes constantes.

Lema 7.1.1. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *Uma solução $x(t)$ da equação de Jacobi está determinada (única) pelos valores $x(t_0)$, $x'(t_0)$ para um t_0 qualquer onde $x(t)$ esteja definida.*
2. *O conjunto das soluções de uma equação de Jacobi é um espaço vetorial de dimensão dois de funções diferenciáveis.*
3. *Considerar o polinômio $p(z) = z^2 + K$. As raízes de $p(z)$, $\sqrt{-K}$, $-\sqrt{-K}$ determinam uma base do espaço das soluções: as funções*

$$x_+(t) = e^{\sqrt{-K}t}$$

$$x_-(t) = e^{-\sqrt{-K}t}$$

são uma base do espaço das soluções.

4. *Se $K > 0$ uma base do espaço das soluções com valores reais é*

$$x_1(t) = \frac{1}{2}(e^{\sqrt{-K}t} + e^{-\sqrt{-K}t}) = \cos(\sqrt{K}t)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2i}(e^{\sqrt{-K}t} - e^{-\sqrt{-K}t}) = \operatorname{sen}(\sqrt{K}t).$$

Deixamos a demonstração do lema ao leitor, quem provavelmente já estudou estas equações nos cursos de física elemental ou cálculo. Chamamos a atenção apenas sobre a demonstração do primeiro item, que precisa do teorema de existência e unicidade das equações diferenciais ordinárias, já enunciado anteriormente.

7.2 Superfícies de revolução com curvatura zero

As superfícies com curvatura zero são descritas pela equação $x''(t) = 0$, o que implica que $x(t) = at + b$ com a, b constantes reais. A equação da curva $c(t)$ é

$$c(t) = (at + b, 0, z(t)).$$

Para obter a expressão de $z(t)$ aplicamos a relação

$$z'(t) = \sqrt{1 - (x'(t))^2} = \sqrt{1 - a^2},$$

que é constante. pelo que a expressão de $c(t)$ é

$$c(t) = (at + b, 0, At + B),$$

onde $A = \sqrt{1 - a^2}$ e B é uma constante real. A superfície de revolução satisfaz a equação cartesiana

$$(z - B)^2 = \frac{A^2}{a^2}(x - b)^2$$

que é a equação de um cone com eixo vertical de simetria. Notemos que se $a^2 = 1$ a superfície é um plano horizontal.

7.3 Superfícies com curvatura negativa constante

Para $K < 0$, uma base para o espaço das soluções da equação de Jacobi é

$$x_+(t) = e^{\sqrt{-K}t}$$

$$x_-(t) = e^{-\sqrt{-K}t},$$

pelo que a solução geral da equação é

$$x(t) = Ae^{\sqrt{-K}t} + Be^{-\sqrt{-K}t},$$

e da relação $(z'(t))^2(t) = 1 - (x'(t))^2$ deduzimos

$$z'(t) = \sqrt{1 - (Ae^{\sqrt{-K}t} + Be^{-\sqrt{-K}t})^2}.$$

Para obter a expressão de $z(t)$ seria necessário integrar a função anterior, não parece fácil. Não entanto, podemos fazer algumas observações baseadas na expressão anterior.

1. Nem toda solução da equação de Jacobi corresponde a uma superfície de revolução diferenciável com curvatura negativa. Com efeito, se a superfície de revolução gerada por c contém algum ponto do eixo vertical $(0, 0, z)$ então não pode ser diferenciável neste ponto. O motivo é simples: como estamos rotando a curva em torno ao eixo vertical, para que a superfície seja diferenciável em um ponto do eixo o plano tangente à superfície neste ponto deve ser horizontal. Isso implica que a derivada da curva $c(t)$ neste ponto deve ser horizontal da forma $c'(t_0) = (b, 0, 0)$. Como a curvatura da superfície é constante não nula, a curvatura da curva $\kappa(t)$ no ponto não será zero. Mas ao rotar

uma curva com estas propriedades em torno ao eixo vertical sempre obtemos uma superfície com curvatura *positiva* em uma vizinhança do ponto no eixo vertical.

2. As soluções $x(t)$ onde $A > 0$, $B > 0$ definem superfícies de revolução diferenciáveis com curvatura constante negativa. Observemos que estas superfícies nunca intersectam o eixo de rotação. As curvas geratrizes são curvas convexas planas em \mathbb{R}^3 .

Uma descrição mais detalhada destas superfícies pode ser encontrada em [3].

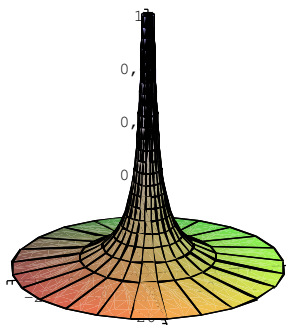


Figura 6 – Superfície de revolução completa com curvatura negativa

7.4 Superfícies com curvatura positiva constante: esferas

Consideremos agora o caso de curvatura constante positiva. As soluções da equação de Jacobi são geradas por

$$x_1(t) = \cos(\sqrt{K}t)$$

$$x_2(t) = \sin(\sqrt{K}t),$$

e a solução geral pode ser escrita na forma

$$x(t) = A\cos(\sqrt{K}t + B)$$

com A, B constantes. Como a função $\frac{x''(t)}{x(t)}$ coincide com a curvatura da curva $c(t)$, então a curva $c(t)$ (que é uma curva plana) deve ser um arco de círculo de raio $\frac{1}{\sqrt{K}}$. Este resultado conhecido no plano pode ser verificado diretamente usando as equações anteriores. Com efeito, suponhamos que a curva $c(t)$ tem um ponto $c(t_0)$ que está no eixo vertical, ou seja $c(t_0) = (0, 0, z(t_0))$. Suponhamos também que $B = 0$, o caso geral se reduz sem dificuldade a este caso. Temos então que $x(t_0) = 0 = A\cos(\sqrt{K}t_0)$, o que implica que

$$t_0 = \frac{(2k+1)\pi}{2\sqrt{K}},$$

onde k é um inteiro. Como observamos anteriormente, $c'(t_0)$ deve ser um vetor horizontal e portanto

$$0 = (z'(t_0))^2 = 1 - (x'(t_0))^2 = 1 - A^2K\sin^2(\sqrt{K}t_0).$$

Consideremos $k = 0$, o resto dos casos é similar. Temos

$$\sin(\sqrt{K}t_0) = 1 = \frac{1}{A\sqrt{K}}$$

e portanto,

$$A = \frac{1}{\sqrt{K}}.$$

a equação de $x(t)$ é então

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{K}} \cos(\sqrt{K}t)$$

e a equação de $z(t)$ é

$$z(t) = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}t),$$

o qual caracteriza um círculo de raio $\frac{1}{\sqrt{K}}$.

Referências

- [1] Hicks, N.: Notas sobre geometría diferencial. Editorial HispanoEuropea, Barcelona, España. ISBN: 0-442-034059. Título original: Notes on differential geometry. Van Nostrand Reinhold Company, LTD, Londres.
- [2] Coddington, E., Levinson, N. : Theory of ordinary differential equations. Tata McGraw-Hill Publishing CO. LTD. New Delhi.
- [3] Do Carmo, M. : Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice Hall. ISBN 0132125895.
- [4] Spivak, M.: A comprehensible introduction to differential geometry. Publish or perish. ISBN 091409873X.