

FRANÇOIS ALBERT ROSIER

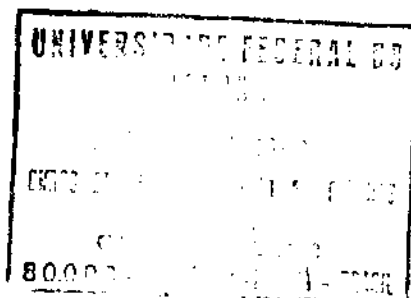
**MEDIDAS DIFERENCIAIS DA GRAVIDADE:  
AJUSTAMENTOS DE UMA SUB-REDE DE ESTAÇÕES  
GRAVIMÉTRICAS E DETERMINAÇÃO DE COEFICIENTES DE  
ESCALA PARA OS GRAVÍMETROS  
LaCoste & Romberg MODELO G N.º 41, 372 e 454**

Dissertação apresentada ao Curso  
de Pós-Graduação em Ciências Geo-  
désicas para obtenção do Grau de  
Mestre em Ciências pela Universi-  
dade Federal do Paraná

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ**

1979

FRANÇOIS ALBERT ROSIER



MEDIDAS DIFERENCIAIS DA GRAVIDADE:

AJUSTAMENTOS DE UMA SUB-REDE DE ESTAÇÕES GRAVIMÉTRICAS  
E DETERMINAÇÃO DE COEFICIENTES DE ESCALA PARA OS GRAVÍMETROS  
LaCoste & Romberg MODELO G Nº 41, 372 e 454

Dissertação apresentada ao  
Curso de Pós-Graduação em Ciên-  
cias Geodésicas para obtenção  
do Grau de Mestre em Ciências  
pela Universidade Federal do  
Paraná.

D 02671  
8819  
EX 1

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

1979

MEDIDAS DIFERENCIAIS DA GRAVIDADE:  
AJUSTAMENTOS DE UMA SUB-REDE DE ESTAÇÕES GRAVIMÉTRICAS  
E DETERMINAÇÃO DE COEFICIENTES DE ESCALA PARA OS GRAVÍMETROS  
LaCoste & Romberg    MODELO G Nº 41, 372 e 454

DISSERTAÇÃO

Apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ciências  
Geodésicas para obtenção do Grau de Mestre em  
Ciências pela Universidade Federal do Paraná

por

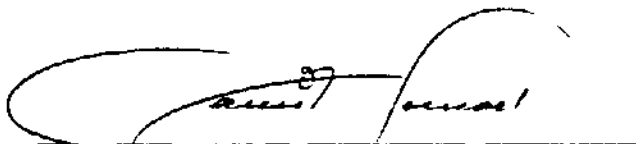
FRANÇOIS ALBERT ROSIER, Eng. Cartógrafo


\*\*\*\*\*

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

1979

BANCA EXAMINADORA:

  
Dr. CAMIL GEMAEL - ORIENTADOR

  
Ph.D. JOSÉ BITTENCOURT DE ANDRADE

  
M.Sc. QUINTINO DALMOLIN    11

## AGRADECIMENTOS

Desejamos externar os nossos profundos agradecimentos aos professores:

Dr. Camil Gemael

Dr. José Bittencourt de Andrade

respectivamente orientador e co-orientador do presente trabalho, bem como às pessoas e instituições abaixo relacionadas, que contribuíram de forma relevante em várias etapas da confecção do mesmo:

Adeildo Antão dos Santos, Eng. Cart.

CNPq

DNER (169 DRF, Florianópolis, SC)

Edicléa Walter, Lic. Letras

Eliane Stroparo, Lic. Filos., Bel. Bibliotecon.

FINEP

IAG/USP

Milton de Azevedo Campos, M.Sc.

Pedro Godói

Pedro Rodaczinski

Romualdo Wandresen, Lic. Mat.

Roseli G. de Alencar Lima, Bel. Bibliotecon.

Tarcísio Ferreira Silva, M.Sc.

## SINOPSE

Uma descrição sumária das principais influências sistemáticas que alteram as medidas diferenciais da gravidade, focalizando especialmente a deriva instrumental e as funções de escala, precede o ajustamento de um conjunto de observações gravimétricas de precisão. São usados os métodos dos correlatos e dos parâmetros; com o auxílio desse último, são determinados coeficientes de escala para os gravímetros La Coste & Romberg (modelo G) nº 41, 372 e 454.

## ABSTRACT

A concise description of the principal systematic errors which exercise influence upon relative gravity measurements, specially emphasizing drift and scale functions, precedes the adjustment of a set of accurate gravity observations. The methods of condition and observation equations are used; with the help of the latter, scale coefficients for La Coste & Romberg (model G) gravity meters n. 41, 372 and 454 are computed.

## SUMÁRIO

	Página
Título . . . . .	ii
Agradecimentos . . . . .	iii
Sinopse . . . . .	iv
Abstract . . . . .	iv
Sumário . . . . .	v
Lista dos principais símbolos . . . . .	xi

### CAPÍTULO PRIMEIRO

#### INTRODUÇÃO

1.1.-	Objetivos da presente dissertação . . . . .	01
1.2.-	Conceitos básicos . . . . .	01
1.2.1.-	Gravimetria . . . . .	01
1.2.2.-	Métodos absolutos e relativos na determinação de $g$ . . . . .	02
1.2.3.-	Classificação simplificada dos gravímetros . .	04
1.2.4.-	Unidades gravimétricas . . . . .	05
1.3.-	Datum gravimétrico . . . . .	05
1.3.1.-	Datum de Viena e datum de Potsdam . . . . .	06
1.4.-	Sistema internacional . . . . .	07
1.4.1.-	Estações Woollard . . . . .	07
1.4.2.-	Desenvolvimentos posteriores . . . . .	07
1.4.3.-	Rede IGSN-71 . . . . .	09
1.4.3.1.-	Estações IGSN-71 no Brasil . . . . .	11

## CAPÍTULO SEGUNDO

### DESCRIÇÃO SUMÁRIA DAS INFLUÊNCIAS SISTEMÁTICAS PRINCIPAIS NAS MEDIDAS COM GRAVÍMETROS ESTÁTICO-MECÂNICOS

2.1.-	Introdução . . . . .	12
2.2.-	Variações aparentes da gravidade . . . . .	16
2.2.1.-	Coefficiente térmico. . . . .	17
2.2.1.1.-	Cuidados na construção dos aparelhos . . . . .	18
2.2.1.2.-	Determinação experimental do coeficiente de tem- peratura . . . . .	19
2.2.2.-	Coefficiente barométrico . . . . .	19
2.2.2.1.-	Cuidados na construção dos aparelhos . . . . .	21
2.2.2.2.-	Determinação experimental do coeficiente baromé- trico . . . . .	21
2.2.3.-	Coefficiente de inclinação do instrumento . . . . .	21
2.2.4.-	A deriva instrumental (drift). . . . .	24
2.2.4.1.-	Correções da deriva. . . . .	24
2.2.4.1.1.-	Deriva estática . . . . .	24
2.2.4.1.2.-	Deriva dinâmica . . . . .	26
2.2.4.1.3.-	Coefficientes de deriva apresentados pelos gravi- metros LaCoste & Romberg G-41, G-372 e G-454. .	29
2.2.5.-	Erros na função de calibração ou de escala . . .	31
2.2.5.1.-	Métodos relativos de calibração . . . . .	33
2.2.5.1.1.-	Exemplo. . . . .	36
2.2.5.2.-	Métodos absolutos de calibração . . . . .	42
2.2.6.-	Influências de campos magnéticos . . . . .	43
2.3.-	Variações reais da gravidade . . . . .	44
2.3.1.-	A atração gravitacional luni-solar . . . . .	44
2.3.2.-	Outras variações da gravidade . . . . .	55

# CAPÍTULO TERCEIRO

## REDES GRAVIMÉTRICAS E CIRCUITOS DE PRIMEIRA ORDEM

3.1.-	Redes gravimétricas . . . . .	57
3.2.-	Circuitos gravimétricos de 1ª ordem . . . . .	61
3.3.-	O gravímetro LaCoste & Romberg modelo G. . . . .	65
3.3.1.-	Princípio de medida . . . . .	66
3.3.2.-	Leituras instrumentais pelo método de nulo. . . . .	68
3.4.-	Operações de campo . . . . .	70
3.5.-	Cálculo de circuitos de 1ª ordem (perfil duplo) . . . . .	73
3.5.1.-	Processo clássico . . . . .	73
3.5.2.-	Processo utilizando o cálculo matricial . . . . .	77

# CAPÍTULO QUARTO

## AJUSTAMENTOS DE UMA SUB-REDE DE ESTAÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM PELOS MÉTODOS DOS CORRELATOS E DOS PARÂMETROS

4.1.-	Introdução. . . . .	88
4.2.-	Circuitos e observações . . . . .	91
4.2.1.-	Circuitos . . . . .	91
4.2.2.-	Observações (leituras). . . . .	92
4.3.-	Ajustamento da sub-rede pelo método dos correla- tos . . . . .	92
4.3.1.-	Formulário. . . . .	92
4.3.2.-	Valores observados ( $L_b$ ) . . . . .	94
4.3.3.-	Equações de condição. . . . .	96
4.3.4.-	Equações de condição transformadas. . . . .	97
4.3.5.-	Matriz B. . . . .	99



	Página
4.3.6.- Vetor W . . . . .	99
4.3.7.- Matriz P. . . . .	100
4.3.8.- Cálculo das correções aos valores observados (V), dos valores observados ajustados ( $L_a$ ) e do fator de variância a posteriori ( $\hat{\sigma}_O^2$ ) . . .	103
4.3.9.- Cálculo da matriz variância-covariância dos valores observados ajustados ( $\Sigma_{L_a}$ ) . . . . .	104
4.3.10.- Valores ajustados da gravidade nas estações na sub-rede . . . . .	106
4.3.11.- Uma estimativa da qualidade das observações não ajustadas . . . . .	107
4.3.12.- Comentários . . . . .	110
4.4.- Ajustamento da sub-rede pelo método dos parâ- metros . . . . .	111
4.4.1.- Formulário. . . . .	111
4.4.2.- O modelo matemático . . . . .	113
4.4.2.1.- Hipóteses para a seleção do modelo. . . . .	113
4.4.2.2.- Equações de observação. . . . .	117
4.4.3.- Vetor $X_O$ (valores aproximados dos parâmetros. . . . .	122
4.4.4.- Vetor L . . . . .	123
4.4.5.- Matriz P . . . . .	124
4.4.6.- Matriz A. . . . .	125
4.4.7.- Cálculo do vetor das correções aos valores aproximados dos parâmetros (X) e do fator de variância a posteriori ( $\hat{\sigma}_O^2$ ) . . . . .	127
4.4.7.1.- Cálculo e inversão da matriz dos coeficientes das equações normais (N). . . . .	127
4.4.7.2.- Cálculo de X e $\hat{\sigma}_O^2$ . . . . .	127

4.4.8.-	Cálculo da matriz variância-covariâncias dos parâmetros ajustados ( $\Sigma X_a$ ) . . . . .	132
4.4.9.-	Valores ajustados da gravidade nas estações da sub-rede e dos coeficientes de escala. . . . .	132
4.4.10.-	Estimativa da qualidade das observações não ajustadas. . . . .	136
4.4.11.-	Verificação da solução (vetor X) . . . . .	137
4.4.12.-	Coeficientes de escala de 1ª ordem para os gravímetros G-41 e G-372 obtidos através dos dados do exemplo 2.2.5.1.1. . . . .	139
4.4.13.-	Comentários gerais . . . . .	140
4.4.14.-	Comentários sobre os coeficientes de escala( $\kappa$ ) . . . . .	141
4.5.-	Segundo ajustamento da sub-rede pelo método dos correlatos . . . . .	142
4.5.1.-	Valores observados ( $L_b$ ) corrigidos da escala . . . . .	142
4.5.2.-	Vetor W. . . . .	144
4.5.3.-	Correção aos valores observados (V), valores observados ajustados ( $L_a$ ) e fator de variância a-posteriori ( $\hat{\sigma}_0^2$ ). . . . .	144
4.5.4.-	Matriz variância-covariância dos valores observados ajustados ( $\Sigma L_a$ ). . . . .	145
4.5.5.-	Valores ajustados da gravidade nas estações da sub-rede . . . . .	145
4.5.6.-	Estimativa da qualidade das observações não ajustadas. . . . .	148
4.5.7.-	Comentários. . . . .	148
4.6.-	Resumo dos resultados. . . . .	149
	CONCLUSÕES . . . . .	151

APÊNDICE A

DERIVAS INSTRUMENTAIS (GRÁFICOS) . . . . .	153
--	-----

APÊNDICE B

EXEMPLO DO CÁLCULO DE UM CIRCUITO

(PORTO ALEGRE-CURITIBANOS) PELO PROCESSO CLÁSSICO	166
---	-----

APÊNDICE C

LISTA DAS LEITURAS EFETUADAS NAS ESTAÇÕES

FUNDAMENTAIS DA SUB-REDE . . . . .	173
------------------------------------	-----

APÊNDICE D

PROGRAMAS (BASIC) UTILIZADOS NOS AJUSTAMENTOS.	176
--	-----

NOTAS DE REFERÊNCIAS . . . . .	182
--------------------------------	-----

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . .	188
----------------------------------	-----

## LISTA DOS PRINCIPAIS SÍMBOLOS

- $\ddot{a}$ : aceleração
- $c$ : coeficiente de deriva dinâmica
- $d$ : diferença entre as leituras gravimétricas (corrigidas dos erros de escala) efetuadas em duas estações consecutivas de um circuito; distância
- $\bar{d}$ : diferença entre as leituras gravimétricas efetuadas em duas estações consecutivas de um circuito
- $e$ : correção de deriva estática
- $f$ : correção de deriva dinâmica
- $\vec{g}$ : aceleração da gravidade
- $g$ : módulo de  $\vec{g}$
- $h$ : altitude
- $k$ : inverso do coeficiente de escala ( $\kappa$ ); constante gravitacional de Newton; constante de u'a mola
- $l$ : leitura gravimétrica em mgal (corrigida da maré, derivas estática e dinâmica e escala); comprimento de u'a mola
- $l'$ : leitura gravimétrica em mgal
- $l''$ : leitura gravimétrica em mgal (corrigida da maré)
- $l'''$ : leitura gravimétrica em mgal (corrigida da maré e da deriva estática)
- $\bar{l}$ : leitura gravimétrica em mgal (corrigida da maré e das derivas estática e dinâmica)
- $m$ : correção de maré; massa de um corpo
- $n$ : número de observações; número de equações de observação
- $p$ : pressão atmosférica; peso de uma observação; paralaxe horizontal de um astro
- $r$ : leitura gravimétrica em unidades instrumentais; número de equações de condição; raio da Terra suposta esférica

- t: instante médio correspondente a uma série de leituras gravimétricas numa estação qualquer de um circuito
- u: número de parâmetros num ajustamento
- A: matriz dada por  $\left. \frac{\partial F}{\partial X_a} \right|_{X_0}$
- B: matriz dada por  $\left. \frac{\partial F}{\partial L_a} \right|_{L_b}$
- D: diferença entre leituras  $l''$  correspondentes a duas estações consecutivas de um circuito
- F: conjunto das equações de observação ou das equações de condição num ajustamento
- H: ângulo horário
- $H_L$ : hora legal
- I: matriz unitária; como índice, designa o percurso de ida de um circuito
- K: vetor de correlatos
- L: vetor dado por  $L_0 - L_b$
- $L_a$ : vetor de valores observados ajustados
- $L_b$ : vetor de valores observados
- $L_0$ : vetor de observações calculadas em função de  $X_0$
- M: matriz dada por  $B P^{-1} B^T$ ; momento; massa de um corpo celeste
- $M_G$ : hora média de Greenwich (T.U.)
- N: matriz dada por  $A^T P A$
- P: matriz de pesos; polinômio de Legendre; probabilidade
- $S_G$ : hora sideral de Greenwich
- T: intervalo de tempo decorrido entre os instantes médios correspondentes à primeira série de leituras do circuito e à série de leituras numa estação qualquer; tensão exercida por u'a mola

- U: matriz dada por  $A^T PL$
- V: vetor de resíduos; como índice, designa o percurso de volta de um circuito
- W: vetor de erros de fechamento
- X: vetor de correções a valores aproximados de parâmetros
- $X_0$ : vetor de valores aproximados de parâmetros
- $X_a$ : vetor de parâmetros ajustados
- Z: distância zenital
- $\alpha$ : ângulo entre haste do "bêndulo" de um gravímetro e plano do horizonte; ascensão reta; nível de significância
- $\beta$ : ângulo entre eixo de rotação do "pêndulo" de um gravímetro e plano do horizonte; ângulo de inclinação do eixo OX de um sistema instrumental XOY (gravímetro) em relação ao horizonte
- $\gamma$ : ponto vernal
- $\delta$ : declinação; diferença entre as leituras gravimétricas (corrigidas dos erros de escala) efetuadas numa estação qualquer do circuito e a primeira estação
- $\epsilon$ : esperança matemática
- $\theta$ : temperatura
- $\lambda$ : longitude; coeficiente térmico efetivo de um sistema elástico
- $\mu$ : valor médio; coeficiente térmico efetivo de um sistema elástico
- $\rho$ : massa específica; coeficiente de correlação
- $\sigma$ : desvio-padrão
- $\sigma_0^2$ : variância da unidade de peso (ou fator de variância) a priori
- $\hat{\sigma}_0^2$ : idem, a posteriori
- $\phi$ : latitude
- $\chi^2$ : qui-quadrado

- $\kappa$ : coeficiente de escala ou de calibração
- $\Sigma_{L_a}$ : matriz variância-covariância de valores observados ajustados
- $\Sigma_{L_b}$ : matriz variância-covariância de valores observados
- $\Sigma_{X_a}$ : matriz variância-covariância de parâmetros ajustados

CAPÍTULO PRIMEIRO



## INTRODUÇÃO

### 1.1.- Objetivos da presente dissertação

Podem ser sintetizados como segue:

- a) descrição dos erros sistemáticos mais importantes afetando as medidas gravimétricas relativas com o uso dos instrumentos estático-mecânicos, com ênfase particular no que diz respeito à deriva instrumental e aos erros na função de escala dos gravímetros.
- b) descrição sumária dos procedimentos de campo e de cálculo adotados pelo autor nos levantamentos gravimétricos de precisão conduzidos pelo Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná.
- c) ajustamento de um certo número de observações segundo dois métodos distintos, um dos quais possibilita a determinação de coeficientes aproximados de escala para três gravímetros LaCoste & Romberg modelo G.

### 1.2.- Conceitos básicos

#### 1.2.1.- Gravimetria

O termo "gravimetria" (lat. "gravis", peso, e gr. "metron",

medida), na sua acepção mais ampla, refere-se à determinação quantitativa de atributos associados a uma certa região do espaço submetida à ação de um campo gravitacional, como o terrestre; podemos citar, entre esses atributos, a intensidade da gravidade num certo ponto da região dada, o gradiente da gravidade, etc.

Uma conceituação mais restrita e conveniente aos tópicos abordados na presente dissertação poderia definir a Gravimetria como sendo o conjunto de técnicas e operações que têm por finalidade a medida da intensidade da aceleração da gravidade, em qualquer local que esteja sob a influência do campo gravitacional terrestre (define-se a gravidade terrestre como sendo a resultante das seguintes forças: atração newtoniana, exercida pela massa da Terra, e força centrífuga, causada pelo movimento de rotação terrestre).

A Geodésia se apóia, em grande parte, nos resultados proporcionados pela Gravimetria: o exemplo mais corrente é o da determinação do geóide, quando se calculam os desníveis geoidais e os desvios da vertical, relacionados à gravidade terrestre por meio das equações de Stokes e de Vening-Meinesz, respectivamente; o posicionamento geodésico inercial, por sua vez, pressupõe o conhecimento da intensidade do campo gravitacional nas regiões levantadas com o auxílio dessa técnica recentemente posta em prática. A Geofísica pura e aplicada (Geodinâmica, sismologia, prospecção mineral, etc.) também utiliza os resultados proporcionados pelos levantamentos gravimétricos.

#### 1.2.2.- Métodos absolutos e relativos na determinação de $g$

A determinação do módulo da aceleração da gravidade se baseia na observação dos efeitos físicos que esta última provoca: tal determinação corresponde, portanto, à medida indireta de uma grandeza, relacionada a outras, as quais são o objeto de mensurações diretas.

Os métodos absolutos, que resultam na obtenção de  $g$  no local onde é instalado o equipamento medidor, apresentam as seguintes características:

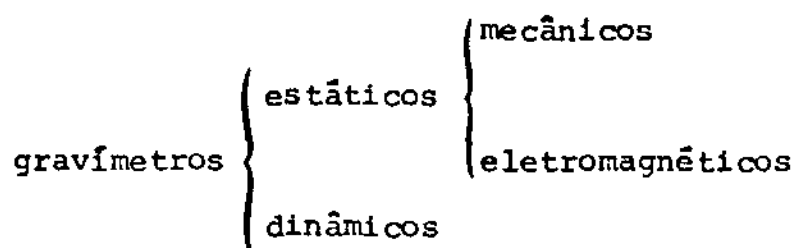
- a) empregam sistemas pendulares ou dispositivos em que a queda livre ou o lançamento de um objeto são observados;
- b) necessitam da medida precisa de duas grandezas, em função das quais  $g$  é calculado: comprimento (dos pêndulos, distância entre níveis da passagem do corpo em queda livre, etc.) e tempo (período dos pêndulos, épocas de passagem do corpo em queda livre pelos níveis onde tal passagem é observada, etc.);
- c) exigem um tempo de observação bastante longo; o manejo e transporte do instrumental são incômodos e, até recentemente, a precisão oferecida era inferior à dos métodos relativos.

Quanto aos métodos relativos ou diferenciais, têm como resultados imediatos as diferenças de  $g$  com relação a locais onde  $g$  teria sido previamente determinado. Suas características são:

- a) usam instrumentos genericamente denominados de gravímetros (podendo, entretanto, empregar pêndulos, caso esse que não examinaremos aqui);
- b) exigem a medida precisa de uma grandeza apenas, que pode ser: comprimento (alongamento de molas), ângulo (deslocamento angular de um pêndulo de torção) ou tempo (período de oscilação de uma lâmina ou corda vibrante);

c) o instrumental é de fácil manejo e transporte, além do tempo de observação ser extremamente curto (2 a 5 minutos); possuem, além disso e via de regra, grande precisão e sensibilidade.

### 1.2.3.- Classificação simplificada dos gravímetros



Nos gravímetros estáticos, observa-se o estado de equilíbrio estático (repouso) de um corpo submetido à ação da gravidade, por um lado, e à ação de uma força de intensidade variável contrapondo-se à gravidade (sistema de compensação); essa última, nos gravímetros mecânicos, é de origem elástica e pode ser fornecida com o auxílio de molas (LaCoste & Romberg, Askania, North American), lâminas circulares ou anelares (Molodenski), fios de torção (Nørgaard), combinações de molas e fios de torção (Worden, GAK-3M), um gás (Haalck), etc. Os instrumentos eletromagnéticos baseiam-se num princípio semelhante (a força de compensação é eletromagnética, nesse caso), cuja aplicação prática foi concebida recentemente (General Dynamics); seu emprego corrente ainda não é difundido.

Faz-se a observação, nos gravímetros dinâmicos, do período de oscilação de uma lâmina (Holweck-Lejay) ou de uma corda vibrante (Shell); o período é relacionado ao valor de  $g$ , no local de medição, através das equações de movimento convenientes a cada sistema particular.

#### 1.2.4.- Unidades gravimétricas

A unidade básica utilizada em Gravimetria, nas medidas da intensidade da gravidade (aceleração:  $LT^{-2}$ ) é denominada de gal (em homenagem a Galileo Galilei) e tem por valor  $1cm.s^{-2}$ . Na prática usual, o seu submúltiplo o miligal ( $1mgal=10^{-3}gal$ ) é mais empregado; a microgravimetria e as observações com pêndulos horizontais e gravímetros estacionários admitem, atualmente, o uso corrente do microgal ( $1\mu gal=10^{-6}gal$ ).

Uma variação de 1mgal no módulo da aceleração da gravidade corresponde, aproximadamente:

- a) a um desnível de  $\sim 3m$  à superfície da Terra;
- b) a um deslocamento, em latitude e com altitude constante, de  $\sim 40''$  (ou cerca de 1230m), em regiões situadas em torno de  $45^\circ$  de latitude.

#### 1.3.- Datum gravimétrico

Designava-se através desse nome uma estação (local fixo) na qual se determinava o valor do módulo da aceleração da gravidade, através de um método absoluto, e que servia de referência a determinações de  $g$  em outros locais por meio de processos relativos.

A fim de que se possa obter uma certa homogeneidade na coleta das informações que irão ter como resultado final a configura-

ção do campo gravitacional terrestre, as medidas relativas da gravidade devem ser referenciadas diretamente ao datum ou indiretamente, mediante estações com as quais ele tenha sido previamente ligado (embora seja verificado, nesse último caso, um decréscimo sensível da precisão das determinações).

### 1.3.1.- Datum de Viena e datum de Potsdam

O primeiro datum gravimétrico adotado em caráter internacional foi o de Viena, em 1900 <sup>[01]</sup>: a determinação do valor de  $g$  (pêndulos) apresentava um erro médio quadrático estimado em  $\pm 10$  mgal.

Em 1909, adotou-se o datum de Potsdam. No Instituto Geodésico dessa cidade, na assim chamada Sala dos Pêndulos, Kühnen e Furtwängler haviam realizado em 1906 a primeira medida da gravidade considerada precisa, empregando quatro pêndulos de período  $1^s$  e um de período  $0,5^s$ . O valor obtido:

$$g = 981274 \text{ mgal}$$

apresentava um erro médio quadrático de 3 mgal e permaneceu, durante algum tempo, o valor de base para todas as medidas relativas executadas no mundo. O valor de  $g$  do datum vienense, referido ao da Sala dos Pêndulos, sofreu uma correção de -16 mgal.

Um certo número de medidas absolutas anteriores (Lorenzoni, Königsberg, 1828; Pizzetti e Pucci, Roma, 1894; etc.) e posteriores (Heyl e Cook, Washington, 1936; Clark, Teddington, 1938; Agaletsky e Egorov, Leningrado, 1956, etc.) à de Potsdam e reduzidos à Sala dos Pêndulos mostrou que o valor obtido por Kühnen e Furtwängler era excessivo, de uma quantidade variando entre 9 e 17 mgal <sup>[02]</sup>.

#### 1.4.- Sistema internacional

O desenvolvimento dos gravímetros portáteis levou naturalmente a importantes modificações ao conceito de datum gravimétrico. Esses aparelhos fornecem medidas de diferenças da gravidade que apresentam elevada consistência interna (embora sujeitas a fenômenos como a deriva instrumental), de modo simples, cômodo e extremamente rápido. O datum único poderia ser vantajosamente substituído por um conjunto de estações disseminadas pelo globo terrestre (sistema internacional), com valores da gravidade determinados através de medidas absolutas e diferenciais e submetidos a um ajustamento geral pelo método dos mínimos quadrados: isso permitiria a criação imediata de redes nacionais. Além disso, cada país, com a condição de possuir pelo menos duas dessas estações, poderia realizar calibrações instrumentais sempre que necessário, em seu próprio território.

##### 1.4.1.- Estações Woollard

Convém citar aqui a iniciativa pioneira do geólogo e geofísico americano G.P. Woollard, que, tendo constatado, através da publicação de dois ajustamentos independentes (Morelli, 1946 e Hirvonen, 1948), a deficiência em distribuição e precisão das observações da gravidade então existentes, desenvolveu uma rede internacional com o auxílio de instrumentos recentemente aperfeiçoados (gravímetros Worden e LaCoste & Romberg, pêndulos Gulf).

##### 1.4.2.- Desenvolvimentos posteriores

No início da década de 1950, inúmeras medidas da grava-

de foram efetuadas por diversas instituições. No entanto, a unificação de critérios concernentes à distribuição das estações, bem como às técnicas de observação e de correções das medidas, só se tornou possível quando a IGC (International Gravity Commission), órgão da IAG (International Association of Geodesy), assumiu a coordenação dessas atividades, em 1954.

Em 1956, foi instituído o FOWGN (First Order World Gravity Net), um conjunto de 34 estações selecionadas, uma das quais se encontra no Observatório Nacional do Rio de Janeiro. No entanto, certas dificuldades de ordem técnica e logística, surgidas por ocasião das interconexões entre as estações FOWGN, tiveram como resultado o aparecimento de numerosas sub-redes não homogêneas (com escalas não compatíveis entre si); por outro lado, os inconvenientes que, na época, ainda afetavam sensivelmente as medidas relativas de  $g$  (derivadas instrumentais irregulares, taras, erros de escala), bem como as absolutas (baixa precisão), também contribuíram ao considerável atraso verificado na criação de uma rede (ou sistema) internacional apresentando consistências interna e externa satisfatórias. Faziam-se necessárias melhorias substanciais na construção dos equipamentos: isto ocorreu na década de 1960.

A construção de gravímetros que, além de oferecerem taxas de deriva pequenas e aproximadamente lineares, permitiram a obtenção de medidas relativas com precisão superior a  $0,05\text{mgal}$ , contribuiu em grande parte à resolução do problema da consistência interna (ou relativa) de tal rede. O mesmo ocorreu quanto à consistência externa (ou absoluto), pois, na mesma época, as medidas absolutas atingiram erros médios quadráticos tais como  $0,1\text{mgal}$  (Cook),  $0,05\text{mgal}$  (sistema portátil de Faller) e  $0,03\text{mgal}$  (Sakuma), comparáveis àqueles alcançados pelas medidas relativas.



#### 1.4.3.- Rede IGSN-71

Os novos equipamentos suscitarão a disseminação rápida e não-controlada de observações de valores de  $g$ , o que provocou uma situação semelhante à que se verificara no início da década de 1950; a IGC, em 1970, sugeriu a execução de um único ajustamento final e a sua adoção em caráter internacional, com o nome de IGSN-71 (International Gravity Standardization Net, ou Rede Internacional de Padronização da Gravidade).

Nesse ajustamento, foram utilizadas:

- a) 10 medidas baseadas na queda livre de corpos no vácuo (sistemas de Cook, Hammond, Faller, Tate e Sakuma, 1967/71), acrescidas de cerca de 1200 medidas pendulares (pêndulos Gulf, Cambridge, IGC, US Coast and Geodetic Survey, Earth Physics Branch, Geographical Survey Institute, 1952/67), fornecendo a escala da rede;
- b) aproximadamente 12000 observações conduzidas com gravímetros La Coste & Romberg, sendo também incluídas medidas executadas com instrumentos Worden, Askania, North American e Western (1949/1969), assegurando a rigidez relativa da rede.

Foi obtida uma solução para os valores da gravidade em 1854 estações, sendo os erros médios quadráticos desses valores, na sua quase totalidade, inferiores a 0,10mgal. O valor originariamente determinado em Potsdam recebeu uma correção de -14,0mgal.

#### 1.4.3.1.- Estações IGSN-71 no Brasil

As estações IGSN-71 em território brasileiro foram, em grande parte, estabelecidas em aeroportos internacionais. Algumas já foram desativadas (reformas dos prédios, construção de novos terminais aéreos, etc.): das 46 implantadas originalmente restam (em 1979) menos de 38. Sua distribuição no território (fig. 1.4.3.1.-1, na qual, entre parênteses, são indicados os números de estações em cada cidade), deixando as regiões Centro-Oeste e Norte bastante desfavorecidas, dificulta um pouco a criação de uma rede gravimétrica Nacional (as estações de Brasília, Goiânia e Porto Nacional não existem mais).

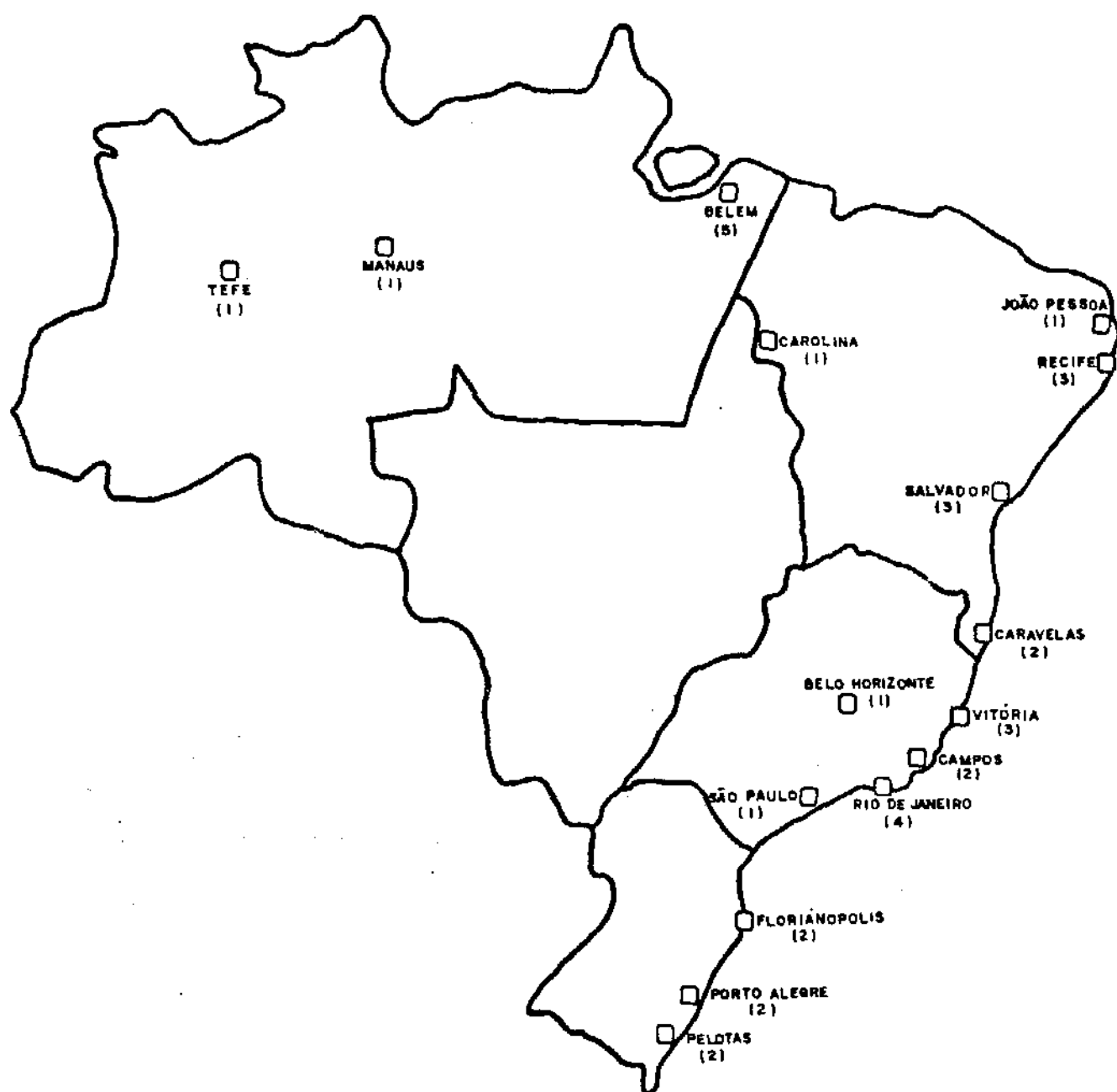


FIG. 1.4.3.1.-1

## CAPÍTULO SEGUNDO

## DESCRIÇÃO SUMÁRIA DAS INFLUÊNCIAS SISTEMÁTICAS

### PRINCIPAIS NAS MEDIDAS COM GRAVÍMETROS ESTÁTICO-MECÂNICOS

#### 2.1.- Introdução

No presente trabalho, ocupar-nos-emos somente dos instrumentos ditos estático-mecânicos pendulares com sistema de compensação elástico. A essa classe de gravímetros, os mais difundidos atualmente em operações de campo, pertencem por exemplo o Worden e o LaCoste & Romberg (por meio do qual foram executadas as medidas que serão objeto dos ajustamentos no capítulo quarto).

Uma leitura, nesses aparelhos, consiste (de modo geral) na observação do estado de equilíbrio de um determinado corpo (massa solidária a uma haste numa posição próxima da horizontal, ou "pêndulo" horizontal) submetido, por um lado, à ação de seu próprio peso e, por outro lado, à ação de uma força de origem elástica (mola, fio de torção) denominada força de compensação.

Por exemplo, a configuração seguinte (fig. 2.1.-1) corresponde, esquematicamente, à estrutura dos gravímetros LaCoste & Romberg originais <sup>[1]</sup>.

O pêndulo possui movimento de rotação (um grau de liberdade), num plano vertical, em torno do eixo horizontal O, supondo-se o seu centro de massa localizado em M; o comprimento do "pêndulo" é então dado por  $\overline{OM}$ . O eixo OY encontra-se orientado segundo a vertical local.



do corpo de massa  $m$  em relação ao eixo de rotação do "pêndulo") e  $M'$  (momento das forças elásticas presentes no sistema e que atuam sobre o "pêndulo", que designaremos de momento de compensação ou antagônico) se escrevem (tendo-se em vista a 2.1.-3):

$$M = m g c \cos \alpha \quad (2.1.-4)$$

$$M' = - k l h \quad (2.1.-5)$$

Expressemos  $l$  e  $h$  em função do ângulo  $\alpha$  e do comprimento  $\overline{OB} = \overline{OA} = a$ .

Do triângulo retângulo OBC, temos:

$$l = 2 a \sin \left( \frac{90^\circ - \alpha}{2} \right) \quad (2.1.-6)$$

$$h = a \cos \left( \frac{90^\circ - \alpha}{2} \right) \quad (2.1.-7)$$

Substituindo as 2.1.-6 e 2.1.-7 na equação 2.1.-5, obtemos:

$$M' = -k a^2 2 \sin \left( \frac{90^\circ - \alpha}{2} \right) \cos \left( \frac{90^\circ - \alpha}{2} \right)$$

$$M' = -k a^2 \sin (90^\circ - \alpha)$$

$$M' = -k a^2 \cos \alpha \quad (2.1.-8)$$

A equação descritiva do gravímetro se obtém através da condição de equilíbrio dada pelas leis fundamentais da estática:

$$M + M' = 0 \quad (2.1.-9)$$

que, mediante as 2.1.-4 e 2.1.-8, se escreve:

$$mgc \cos \alpha - ka^2 \cos \alpha = 0$$

$$(mgc - ka^2) \cos \alpha = 0 \quad (2.1.-10)$$

Observe-se que, para essa disposição particular dos componentes do sistema móvel, o equilíbrio independe teoricamente do ângulo  $\alpha$  [°].

Uma variação na intensidade de  $\vec{g}$  resultará num deslocamento do "pêndulo". As leituras (pelo método de nulo) são feitas com o auxílio de um índice, solidário ao "pêndulo", cuja sombra, graças a uma fonte luminosa, é projetada sobre um anteparo possuindo um índice fixo (retículo, traço específico de uma escala graduada, etc.) que materializa a posição de observação. Um dispositivo auxiliar (como, por exemplo, uma segunda mola\* possuindo  $k' \ll k$ , atuando sobre a haste do "pêndulo" e vinculada a um parafuso micrométrico) permite levar o "pêndulo" à posição de observação; a diferença de gravidade relaciona-se com a diferença das leituras efetuadas no micrômetro através de uma função dita "de calibração", estabelecida para cada instrumento pelo fabricante. As quantidades observadas diretamente são, portanto, as leituras micrométricas, cuja diferença traduz o deslocamento angular do pêndulo causado pela variação de  $g$  que se pretende determinar.

A sensibilidade de um instrumento desse tipo se define através da quantidade  $da/dg$ , que exprime a taxa de variação da deformação do sistema (deslocamento do "pêndulo") em relação à variação correspondente do módulo da aceleração da gravidade. Diferenciando a 2.1.-10 em relação a  $\alpha$  e  $g$ , obtemos,

$$mc(-g \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha + \cos \alpha \, dg) + ka^2 \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha = 0$$

$$(ka^2 - mcg) \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha = -mc \cos \alpha \, dg$$

\* mola "de medida"



$$\frac{d\alpha}{dg} = \frac{-mc \cos\alpha}{(ka^2 - mgc) \sin\alpha}$$

$$\frac{d\alpha}{dg} = \frac{-mc}{ka^2 - mgc} \cot\alpha \quad (2.1.-11)$$

A sensibilidade seria, portanto, infinita para  $\alpha=0$  ("pêndulo" em posição horizontal), o que tornaria impossíveis as observações. Na prática, o ângulo  $\alpha$  é pequeno ( $1^\circ$  a  $4^\circ$ ), assegurando uma grande sensibilidade instrumental (detecção de pequenas variações de  $g$ ).

Os sistemas astáticos contribuem à obtenção de elevadas sensibilidades  $|^{07}|$ ,  $|^{08}|$ ,  $|^{09}|$ ,  $|^{10}|$ ,  $|^{11}|$ : nesses, a posição de observação é próxima de uma situação de equilíbrio instável.

A fim de analisarmos as influências sistemáticas que afetam as observações conduzidas com os gravímetros em apreço (estático-mecânicos), dividi-las-emos em duas espécies, a saber:

- a) aquelas que se manifestam através do registro de variações anarentes da gravidade, provocadas não só pela interação entre fatores ambientais e a estrutura interna dos instrumentos, como também pela estrutura física das molas ou fios de torção que geram o momento de compensação;
- b) aquelas que correspondem a variações reais, temporárias ou definitivas, no valor absoluto da gravidade e cuja eliminação é conveniente, ao estabelecermos o valor de  $g$  em determinados locais fixos (estações).

## 2.2.- Variações anarentes da gravidade

Os principais fatores que provocam tais variações são:

a temperatura ( $\theta$ ), a pressão atmosférica ( $p$ ), a inclinação do eixo instrumental OY em relação à vertical local ( $\beta$ ), o tempo ( $t$ ) e os erros na função de calibração ( $\kappa$ ). Os correspondentes coeficientes térmico, barométrico e de inclinação (teóricos), que veremos a seguir, provêm da equação de equilíbrio ou equação fundamental do sistema elástico de um gravímetro estático-mecânico, na sua forma geral  $[^{12}]$ ,  $[^{13}]$ ,  $[^{14}]$ ,  $[^{15}]$ ; quanto aos coeficientes de tempo (deriva) e de calibração (escala), discutiremos a sua determinação empírica (a partir das observações efetuadas com um ou mais gravímetros particulares).

### 2.2.1.- Coeficiente térmico

As variações de temperatura exercem uma grande influência sobre as leituras instrumentais: as propriedades elásticas do sistema de compensação são, em parte, funções da temperatura (coeficientes termoelásticos dos materiais que compõem as molas ou fios de torção), além das variações do comprimento da haste do "pêndulo", causadas pela dilatação térmica, produzirem variações no momento do peso do corpo de massa  $m$ .

Segundo  $[^{16}]$ ,  $[^{17}]$ , o coeficiente térmico de um gravímetro, ou seja, a taxa de variação das leituras em relação à temperatura (variação aparente de  $g$ ), pode, de um modo geral, ser dada por:

$$\frac{dg}{d\theta} = -g(\lambda - \mu) \text{ mgal/}^{\circ}\text{C} \quad (2.2.1.-1)$$

sendo  $\lambda$  e  $\mu$  os coeficientes térmicos efetivos do sistema elástico em sua totalidade, dependendo esses dos coeficientes de dilatação térmica e termoelásticos dos materiais que compõem a mola (ou fio

de torção), a haste do pêndulo, etc. Em  $|^{18}|$ , por exemplo, estima-se como favorável o valor  $dg/d\theta < 10 \text{ mgal}/^{\circ}\text{C}$  para o gravímetro soviético GKM (gravímetro anelar de Molodenski), de mola de elinvar e alavanca de quartzo, cujo termostato deveria portanto manter a temperatura interna constante nos limites de  $\pm 0,01^{\circ}\text{C}$ , a fim de assegurar uma precisão de leitura da ordem de  $0,1 \text{ mgal}$ , sem levar em conta as demais influências.

#### 2.2.1.1.- Cuidados na construção dos aparelhos

Para que o coeficiente térmico seja minimizado, as seguintes precauções são tomadas nos projetos de fabricação de gravímetros:

- a) seleção criteriosa e controle pormenorizado dos materiais que irão compor os vários elementos do sistema elástico, de maneira a tornar a quantidade  $(\lambda - \mu)$  menor possível. São usados o quartzo fundido e várias ligas especiais de aço, tais como o elinvar, o nevarox, o isoelastic, etc.  $|^{19}|$ ;
- b) adoção de sistemas de compensação térmica  $|^{20}|$ ,  $|^{21}|$ ;
- c) isolamento térmico do sistema elástico por meio de vasos Dewar, como nos gravímetros Worden;
- d) uso de termostatos elétricos, que mantêm a temperatura constante no interior dos gravímetros, porém dentro de certos limites, expressos através do coeficiente termostático  $|^{22}|$ ,  $|^{23}|$ ,  $|^{24}|$ . A maioria dos gravímetros de precisão empregados atualmente possui termostatos.

### 2.2.1.2- Determinação experimental do coeficiente de temperatura

Essencial para os gravímetros não termostatizados, essa determinação é também conveniente para os demais, mesmo que seu coeficiente termostático seja conhecido, e pode ser feita de duas maneiras principais:

- a) em laboratório. O instrumento é colocado numa câmara térmica, na qual a pressão é mantida constante. São feitas leituras em vários níveis térmicos e dentro de um intervalo abrangendo as condições extremas que se pode esperar no campo. As leituras são corrigidas da atração gravitacional luni-solar e da deriva estática; um ajustamento pelo método dos mínimos quadrados fornece uma curva que servirá para corrigir as leituras conduzidas no campo, devidamente acompanhadas das medidas das temperaturas ambientais  $|^{25}|$ ,  $|^{26}|$ ;
- b) através das próprias medidas efetuadas no campo. O método acima apresenta o inconveniente da curva de temperatura ser estabelecida em condições ideais. As observações de campo, feitas de acordo com o tipo de circuito descrito no capítulo terceiro (item 3.2), fornecendo observações repetidas em cada estação e em instantes diferentes, podem ser objeto de ajustamentos, por exemplo pelo método das equações de observação, sendo o coeficiente térmico do instrumento um dos parâmetros do modelo matemático.

### 2.2.2.- Coeficiente barométrico

As variações na pressão atmosférica têm como resultado

alterações na massa específica do ar. Então, de acordo com a lei de Arquimedes, modifica-se o peso do "pêndulo" e, conseqüentemente, o momento M, registrando-se variações nas leituras instrumentais.

Segundo  $|^{27}|$ ,  $|^{28}|$ ,  $|^{29}|$ , temos a seguinte expressão para o coeficiente barométrico:

$$\frac{dg}{dp} = -g \frac{\rho_0}{760 \bar{\rho} (1 + \frac{\theta}{273})} \text{ mgal/Torr} \quad (2.2.2.-1)$$

sendo:

$g$  - valor do módulo da aceleração da gravidade.

$\rho_0$  - massa específica do ar às condições normais de temperatura e pressão ( $0^\circ\text{C}$ , 760 Torr), sendo  
 $\rho_0 = 0,001\,293 \text{ g/cm}^3$ .

$\bar{\rho}$  - massa específica média do sistema móvel em  $\text{g/cm}^3$ .

$\theta$  - temperatura do ar ambiente (onde o sistema elástico se encontra), em  $^\circ\text{C}$ .

Assim, para um sistema móvel composto de quartzo fundido ( $\bar{\rho}=2,2\text{g/cm}^3$ ), à temperatura de  $20^\circ\text{C}$  e sendo  $g = 10^6 \text{ mgal}$ , teríamos:

$$\frac{dg}{dp} = -0,72 \text{ mgal/Torr}$$

Um sistema feito de elinvar (tomando-se  $\bar{\rho} = 8 \text{ g/cm}^3$ , que é a massa específica aproximada do aço), nas mesmas condições, apresentaria:

$$\frac{dg}{dp} = -0,20 \text{ mgal/Torr}$$

### 2.2.2.1.- Cuidados na construção dos aparelhos

- a) uso de materiais de massa específica elevada na fabricação dos "pêndulos";
- b) isolamento barométrico, ou seja, inserção do sistema elástico num recipiente hermeticamente fechado; porém, nos instrumentos que possuem sistema de leituras ótico-mecânico, mais usuais, em que o parafuso micrométrico se encontra em contato com elementos internos do aparelho, tal isolamento é imperfeito;
- c) compensadores barométricos  $|^{30}|$ ,  $|^{31}|$ ;
- d) imersão do sistema elástico num líquido que, graças à sua incompressibilidade prática, isola-o das variações da pressão atmosférica.

### 2.2.2.2.- Determinação experimental do coeficiente barométrico

Os métodos mencionados em 2.2.1.2, itens a) (usando-se uma câmara barométrica) e b) (introduzindo o coeficiente barométrico como parâmetro a ser determinado, no ajustamento de observações de campo) podem também aqui ser aplicados.

### 2.2.3.- Coefficiente de inclinação do instrumento

Seja  $\theta$  o ângulo entre o eixo de rotação do "pêndulo" e o horizonte; nesse caso o movimento não se processa mais num plano vertical (fig. 2.2.3.-1).

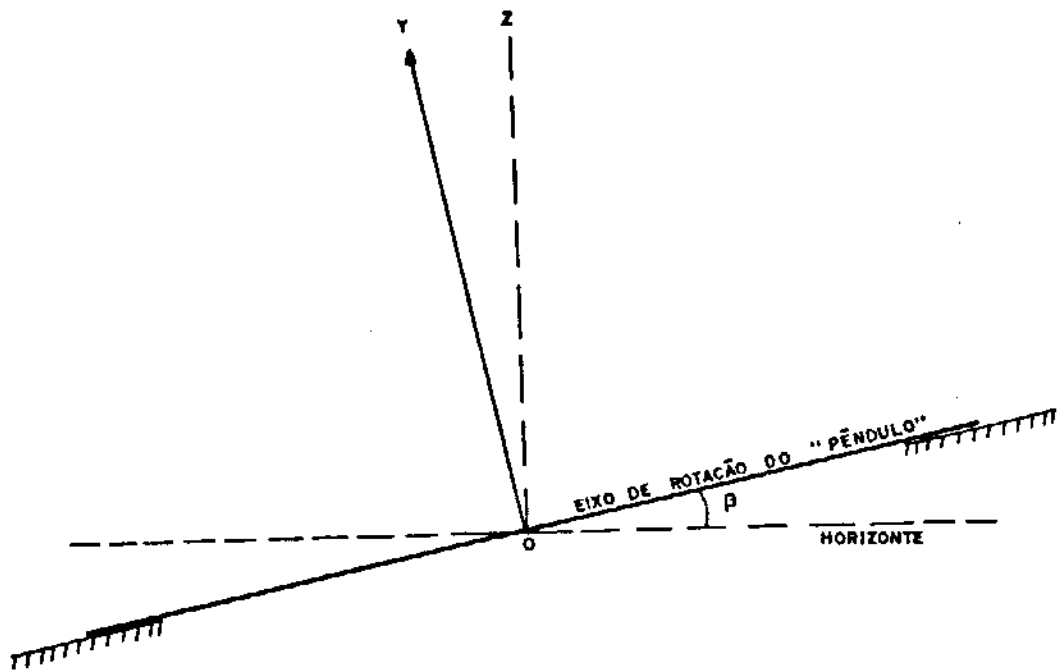


FIG. 2.2.3.-1

Designemos também por  $\beta$  o ângulo de inclinação entre o eixo  $OX$  (do sistema instrumental  $XOY$ ) e o horizonte (fig. 2.2.3.-2).

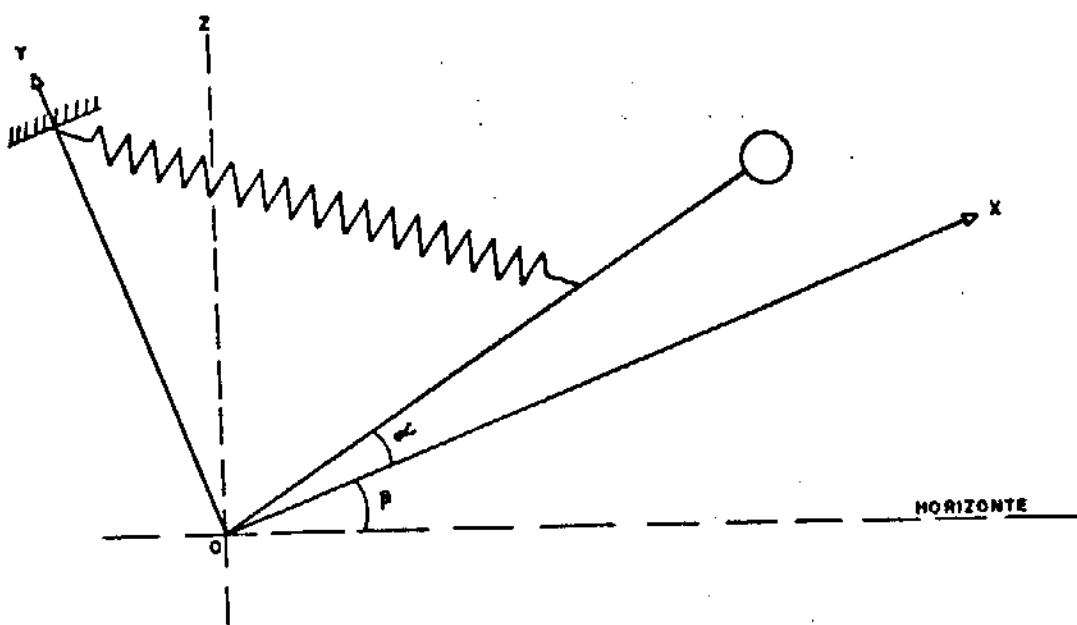


FIG. 2.2.3.-2

Em ambos os casos  $|\beta^2|$ ,  $|\beta^3|$ , sendo  $\beta < 1^\circ$  na prática (instrumento desnivelado), temos:

$$\delta g = g\beta\delta\beta \quad (2.2.3.-1)$$

Essa equação, integrada, fornece a variação aparente da gravidade em função do ângulo de inclinação  $\beta$ :

$$\delta g = \frac{1}{2} g\beta^2 \quad (2.2.3.-2)$$

sendo  $\beta$  expresso em radianos. A propósito, essa última equação ser ve de base à calibração de gravímetros pelo método dito de inclinação (ver item 2.2.5.2.,b).

Para  $g = 10^6$  mgal e  $\delta g < 0,01$  mgal, por exemplo, teríamos, sendo:

$$\beta^2 = 2 \frac{\delta g}{g}$$

o seguinte valor:

$$\beta < 0,000\ 141\ 4\ \text{rad}$$

ou:

$$\beta < 29''$$

Os gravímetros, a fim de que seja eliminado o erro sistemático  $\delta g$ , são providos de dois níveis de bolha, um deles (nível longitudinal) paralelo ao eixo instrumental OX e o outro (nível transversal) paralelo ao eixo de rotação do "pêndulo". É, portanto, indispensável o nivelamento cuidadoso do gravímetro antes do início do conjunto de leitura na estação (série) e a verificação dos níveis



entre uma e outra leitura, sendo o instrumento devidamente protegido contra a incidência direta dos raios solares.

Recomenda-se também o ajuste periódico e o controle da fixação dos níveis  $|^{34}|$ ,  $|^{35}|$ , de preferência antes da realização de cada campanha.

#### 2.2.4.- A deriva instrumental (drift)

A deriva é uma variação das indicações instrumentais (não causada diretamente por variações gravitacionais, térmicas, barométricas, etc.), que pode ser expressa como uma função do tempo e tem sua origem em deformações plásticas do sistema elástico dos gravímetros, sendo, portanto, irreversível. É um dos principais inconvenientes que afetam as medidas fornecidas pelos instrumentos utilizando molas ou fios de torção para gerar o momento antagônico, impedindo, a propósito, que tais aparelhos possam realizar medidas absolutas da gravidade.

Os principais fenômenos responsáveis pela imperfeita elasticidade dos materiais de que são fabricados os fios de torção e as molas são o pós-efeito elástico, o "creep" e a histerese elástica  $|^{36}|$ ,  $|^{37}|$ . A deriva, além disso, é influenciada até certo ponto por fatores externos, tais como a temperatura e as oscilações e trepidações que ocorrem por ocasião do transporte dos aparelhos  $|^{38}|$ .

O controle e correção da deriva são feitos através da ocupação repetida de estações num circuito. Distinguem-se, na correção das observações de um circuito, duas espécies de deriva  $|^{39}|$ :

- a) a deriva estática, ocorrendo quando o instrumento se encontra em repouso;

b) a deriva dinâmica, que se processa enquanto o aparelho é transportado e se encontra portanto submetido a diversas acelerações mais ou menos bruscas (ver, a esse respeito, [40]).

#### 2.2.4.1.- Correções de deriva

##### 2.2.4.1.1.- Deriva estática

Uma série de leituras é feita no início do período de imobilidade do instrumento, e outra no final desse período, quando for o caso (pernoite ou interrupções longas durante a realização de um circuito). A diferença entre as leituras (médias) dessas duas séries, corrigidas da atração gravitacional luni-solar e transformadas em unidades gravimétricas (mgal) mediante a função de escala do instrumento, é somada algebricamente (pode ser positiva ou negativa) a todas as leituras efetuadas posteriormente no circuito.

Assim temos:

$$e = l_A'' - l_B'' \quad (2.2.4.1.1.-1)$$

$$l_i^{'''} = l_i'' + e \quad (2.2.4.1.1.-2)$$

sendo  $l_A''$ ,  $l_B''$  : leituras médias do início e fim do período de repouso, respectivamente, dadas em mgal e corrigidas da atração gravitacional luni-solar;

$l_i^{'''}$  : leitura média numa i-ésima estação, posterior às leituras do repouso, corrigida da deriva estática.

Apresentamos [APÊNDICE A] curvas das derivas estáticas dos gravímetros La Coste & Romberg G-41 e G-172, no período de 03/8/76 a 20/8/76, durante o qual os instrumentos permaneceram imóveis.\* Observar a mudança brusca da taxa de variação das leituras do G-41, no dia 18/8/76, após o qual a deriva retomou seu aspecto habitual.

#### 2.2.4.1.2.- Deriva dinâmica

A correção calculada abaixo supõe a execução de circuitos de acordo com o modelo que veremos no item 3.2.: as estações são ocupadas nos percursos de ida e volta.

Seja

$$\Delta t_i'' = t_{iV}'' - t_{iI}'' \quad (2.2.4.1.2.-1)$$

a diferença verificada entre as leituras de volta (V) e ida (I), dadas em mgal e corrigidas do efeito de maré e deriva estática, na i-ésima estação do circuito; e seja

$$\Delta t_i = t_i^V - t_i^I \quad (2.2.4.1.2.-2)$$

o intervalo de tempo decorrido entre aquelas duas leituras, em horas; designemos por  $\underline{g}$  o coeficiente (ou fator, taxa, etc.) de deriva dinâmica médio do circuito, cujo valor pretendemos determinar.

Representemos a diferença das leituras, corrigidas da deriva dinâmica, por:

\* na sede do Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas

$$\Delta l_1'' - c \Delta t_1 = v_1 \quad (2.2.4.1.2.-3)$$

onde o resíduo  $v_1$  provém  $|^{1}|$ :

- a) dos erros de leituras na i-ésima estação;
- b) do erro na determinação do instante da observação;
- c) da não-linearidade da deriva.

Como, em geral, ainda segundo  $|^{2}|$ , os erros dos itens a) e b) são muito menores que o do item c), admitiremos que  $v_1$  é função apenas desse último. Elevando ao quadrado ambos os membros da 2.2.4.1.2.-3, temos:

$$(\Delta l_1'')^2 + c^2 (\Delta t_1)^2 - 2c \Delta l_1'' \Delta t_1 = v_1^2 \quad (2.2.4.1.2.-4)$$

Sendo  $n$  o número de estações que fazem parte de um determinado circuito, para o qual iremos determinar  $c$ , somamos as  $n$  equações 2.2.4.1.2.-4 obtidas:

$$\sum_{i=1}^n (\Delta l_i'')^2 + c^2 \sum_{i=1}^n (\Delta t_i)^2 - 2c \sum_{i=1}^n \Delta l_i'' \Delta t_i = \sum_{i=1}^n v_i^2 \quad (2.2.4.1.2.-5)$$

A fim de minimizarmos a soma dos quadrados dos resíduos  $v_1$ , que designaremos por  $\Phi$ , diferenciaremos a (2.2.4.1.2.-5) em relação a  $\Phi$  e a  $c$ :

$$d\Phi = 2cd\sum_{i=1}^n (\Delta t_i)^2 - 2d\sum_{i=1}^n \Delta l_i'' \Delta t_i$$

Igualaremos, em seguida, a derivada  $d\Phi/dc$  a zero:

$$2c \sum_{i=1}^n (\Delta t_i)^2 - 2 \sum_{i=1}^n \Delta \ell_i''' \cdot \Delta t_i = 0$$

e, finalmente

$$c = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta \ell_i''' \cdot \Delta t_i}{\sum_{i=1}^n (\Delta t_i)^2} \quad (2.2.4.1.2.-6)$$

Essa última equação fornece uma estimativa do valor do coeficiente de deriva, cuja unidade é o mgal/hora, e que representa simplesmente o coeficiente angular de uma reta ajustada aos pontos  $(\Delta t_i, \Delta \ell_i''')$ , supondo-se existir uma dependência linear entre  $\Delta t$  e  $\Delta \ell'''$ . Tal procedimento, evidentemente arbitrário, é considerado adequado para a correção de observações conduzidas com gravímetros apresentando derivas aproximadamente lineares, como é o caso para os instrumentos atualmente empregados. A respeito da estimativa de coeficientes de polinômios de deriva, em gravimetria de alta precisão, consultar [43].

A correção aplicada à i-ésima leitura será então dada por:

$$f_i = -c \cdot T_i \quad (2.2.4.1.2.-7)$$

onde

$$T_i = t_i - t_1 \quad (2.2.4.1.2.-8)$$

sendo  $t_i$  e  $t_1$ , respectivamente, os instantes da i-ésima e primeira leituras do circuito. Todas as observações do circuito são, assim, reduzidas à época da observação inicial. Note-se que, havendo uma interrupção que justifique o cálculo da deriva estática, o período de renouso é considerado inexistente quando se calcula  $T_i$ , sendo

subtraído de todos os  $t_1$  posteriores à pausa.

A leitura  $i$ -ésima, corrigida da maré e derivas estática e dinâmica, se escreve portanto:

$$\bar{l}_i = l_i'' + f_i \quad (2.2.4.1.2.-9)$$

Podemos traçar gráficos expressando  $\Delta l'' = f(\Delta t)$ ; resulta daí uma representação visual cômoda do comportamento dos instrumentos num dado circuito. Alguns exemplos são mostrados no Apêndice A. O coeficiente de deriva pode ser também obtido como parâmetro no cálculo matricial de circuitos (3.5.2.).

#### 2.2.4.1.3.- Coeficientes de deriva apresentados pelos gravímetros La Coste & Forberg G-41, G-372 e G-454.

A tabela 2.2.4.1.3.-1 mostra as derivas estática e dinâmica dos gravímetros acima citados, na execução dos circuitos que compõem a sub-rede analisada no Capítulo Quarto do presente trabalho. Os coeficientes de deriva dinâmica foram obtidos através da equação 2.2.4.1.2.-6; os de deriva estática provêm do termo  $-e$  (eq. 2.2.4.1.1.-1), dividido pelo intervalo de repouso. Observe-se que houve duas interrupções no circuito Florianópolis-São Miguel d'Oeste, resultando em dois valores para  $e$ ; nos circuitos Porto Alegre-Santa Maria (I e II), os gravímetros não foram imobilizados; quanto ao circuito Florianópolis-Porto Alegre, que representa um caso particular, não ocorreu, a rigor, deriva estática (ver Capítulo Quarto, item 4.1).

CIRCUITO	C O E F I C I E N T E S   D E   D E P I V A   (mgal/h)							
	ESTÁTICA				DINÂMICA			
	G-41	G-372	G-454	tempo re pouso (h)	G-41	G-372	G-454	tempo transp.(h)
CURITIBA RIO DO SUL	-0,0028	0,0052	—	15,5	-0,0053	0,0009	—	19,8
FLOPIANÓPOLIS TOPPES	-0,0015	0,0029	0,0074	6,5	0,0005	0,0034	0,0075	20,2
FLOPIANÓPOLIS S.MIGUEL D'OESTE	0,0007 -0,0047	0,0043 -0,0017	0,0098 0,0069	9,4 7,2	0,0030	0,0044	0,0061	39,5
FLORIANÓPOLIS PORTO ALEGRE	—	—	—	—	0,00004	0,0012	0,0083	21,3
POPTO ALEGRE STA. MARIA (I)	—	—	—	—	0,0002	0,0027	0,0069	20,0
PORTO ALEGRE STA. MARIA (II)	—	—	—	—	0,0005	0,0031	0,0046	17,8
CURITIBA FLOPIANÓPOLIS	-0,0044	-0,0034	0,0062	5,9	0,0021	0,0019	0,0046	24,3
STA. MAPIA S.MIGUEL D'OESTE	—	0,0052	0,0062	11,5	—	0,0022	0,0016	24,2
POPTO ALEGRE CURITIBANOS	—	0,0006	0,0066	10,9	—	0,0044	-0,0065	21,3

TABELA 2.2.4.1.3.-1

### 2.2.5.- Erros na função de calibração ou de escala

A ocupação sucessiva de duas estações (i-1,1) por um gravímetro tem como resultado imediato as leituras instrumentais brutas ( $r_{i-1}, r_i$ ), expressas no sistema de unidades próprio do instrumento (divisões de um botão micrométrico, por exemplo).

A conversão dessas unidades ao sistema de unidades empregado usualmente em Gravimetria, ou seja, a obtenção das leituras em mgal, é feita através de uma função que pode ser chamada "de escala" ou "de calibração"; se designarmos por  $l'_{i-1}$  e  $l'_i$  as leituras instrumentais brutas expressas em mgal, teremos:

$$l'_{i-1} = f(r_{i-1}) \quad (2.2.5.-1)$$

$$l'_i = f(r_i) \quad (2.2.5.-2)$$

A função  $f$  é determinada empiricamente pelo fabricante do gravímetro e pode ser representada simplesmente por uma constante (função linear), como é o caso para os gravímetros Worden. Por exemplo, a constante do Worden empregado pelo CPGCG/UEPr tem o valor 0,0947 mgal/divisão do micrômetro e, nesse caso, temos:

$$l'_{i-1} = 0,0947 r_{i-1}$$

$$l'_i = 0,0947 r_i$$

A função de escala dos gravímetros La Coste & Romberg modelo G, por sua vez, não é linear [14] e é tabelada nos manuais de operação dos instrumentos (ver 3.3.2).



Sejam  $\bar{\ell}_{i-1}, \bar{\ell}_i$  as leituras instrumentais em mgal e corrigidas das influências sistemáticas (derivas, atração luni-solar) usualmente levadas em consideração, dadas, através das equações 2.2.4.1.2.-9 e 2.2.4.1.2.-2, por

$$\bar{\ell}_{i-1} = \ell_{i-1}'' + e + f_{i-1} \quad (2.2.5.-3)$$

$$\bar{\ell}_i = \ell_i'' + e + f_i \quad (2.2.5.-4)$$

Se for admitida a ausência de outros erros sistemáticos, podemos escrever, para a diferença entre os valores de  $g$  nas estações  $i-1, i$ :

$$g_i - g_{i-1} = \bar{\ell}_i - \bar{\ell}_{i-1} \quad (2.2.5.-5)$$

No caso de  $g_{i-1}$  e  $g_i$  serem previamente conhecidos (determinações absolutas da gravidade, estações do datum gravimétrico) e constatar-se que, de modo significativo:

$$g_i - g_{i-1} \neq \bar{\ell}_i - \bar{\ell}_{i-1} \quad (2.2.5.-6)$$

podemos considerar a eventualidade de existirem erros na função de calibração do instrumento e a necessidade de aplicarmos correções às leituras  $\ell$ , desde que a desigualdade acima seja confirmada, sendo mantida aproximadamente constante, por um certo número de observações, e que as determinações que deram origem aos valores de  $g_{i-1}, g_i$  possuam suficiente precisão.

Os principais fatores que provocam alterações às funções de calibração são [45]:

a) imperfeições no micrômetro do gravímetro. Podem ser aí distingui

dos: erros periódicos devidos à excentricidade dos eixos das engrenagens, detetáveis empiricamente [16], e erros provenientes do fato do parafuso do micrômetro não apresentar passo rigorosamente constante; a determinação desses últimos, isoladamente, é difícil pois as medidas repetidas envolvem a mesma região do parafuso;

- b) alterações das propriedades físicas dos componentes do sistema que transmite o movimento do botão micrométrico à haste do "pêndulo" (sistema de medida). Existem aí duas fontes principais de erros: variações da constante da mola de medida (quando a transmissão do movimento é feita através de uma segunda mola), causadas pelas tensões às quais ela é submetida, seu envelhecimento, variações de temperatura, etc. (fatores semelhantes àqueles que resultam na deriva instrumental); além disso, ocorrem modificações das posições relativas dos acessórios do sistema de medida (acomodações, desgaste, dilatações diferenciais).

Consideraremos essas várias fontes de erros em conjunto, tratando o erro sistemático resultante (erro na função de calibração) como sendo diretamente associado às leituras  $L$  obtidas através de um dado instrumento; indicaremos os principais métodos (ditos de calibração) que permitem corrigi-lo, dividindo-os em dois grupos: relativos e absolutos.

#### 2.2.5.1. - Métodos relativos de calibração

Esses métodos se baseiam na ocupação de pontos de gravidade conhecida, sendo o número de tais pontos  $\geq 2$ . A calibração de

um dado instrumento pode ser feita através do cálculo dos coeficientes de polinômios de ordem  $n$ , tais que transformem a 2.2.5.-6 numa igualdade:

$$g_i - g_{i-1} = \kappa_1 \bar{l}_i + \kappa_2 \bar{l}_i^2 + \dots + \kappa_n \bar{l}_i^n - (\kappa_1 \bar{l}_{i-1} + \kappa_2 \bar{l}_{i-1}^2 + \dots + \kappa_n \bar{l}_{i-1}^n)$$

$$g_i - g_{i-1} = \kappa_1 (\bar{l}_i - \bar{l}_{i-1}) + \kappa_2 (\bar{l}_i^2 - \bar{l}_{i-1}^2) + \dots + \kappa_n (\bar{l}_i^n - \bar{l}_{i-1}^n)$$

(2.2.5.1.-1)

Os coeficientes  $\kappa$  são ditos de calibração ou de escala. Segundo [47],  $n$  pode ser restrito a 1 (coeficiente linear) ou 2 (coeficiente quadrático ou de 2ª ordem), de acordo com o comportamento do aparelho em questão, sendo conveniente a investigação para cada gravímetro, o que pode ser feito como segue.

Sejam três pontos de gravidade conhecida, correspondendo-lhes os índices 1, 2 e 3, e suponhamos que sejam medidas, com um certo gravímetro, as diferenças de gravidade  $g_2 - g_1$  e  $g_3 - g_1$  (esquemáticamente, 1+2 e 1+3). A equação 2.2.5.1.-1, considerando-se apenas os termos de 1ª e 2ª ordem, fornece:

$$g_2 - g_1 = \kappa_1 (\bar{l}_2 - \bar{l}_1) + \kappa_2 (\bar{l}_2^2 - \bar{l}_1^2)$$

(2.2.5.1.-2)

$$g_3 - g_1 = \kappa_1 (\bar{l}_3 - \bar{l}_1) + \kappa_2 (\bar{l}_3^2 - \bar{l}_1^2)$$

O sistema acima, resolvido, determina os valores de  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$ , representando, porém, a condição mínima para essa determinação. Pode-se aí aplicar o método dos mínimos quadrados, através da ocupação de um certo número de estações de gravidade previamente determinadas, resolvendo-se o sistema de equações superabundantes daí resultante.

Um valor de  $\kappa$ , muito pequeno, tal que não influencie a quantidade  $g_{i+1} - g_i$ , pelo menos significativamente, indicaria que as variações de escala do gravímetro analisado se processam linearmente, e nesse caso temos:

$$g_i - g_{i-1} = \kappa(\bar{l}_i - \bar{l}_{i-1}) \quad (2.2.5.1.-3)$$

Pode-se então corrigir as leituras conduzidas pelo instrumento em questão:

$$l_i = \kappa \bar{l}_i \quad (2.2.5.1.-4)$$

ou, sendo significativo o valor do coeficiente de 2ª ordem:

$$l_i = \kappa_1 \bar{l}_i + \kappa_2 \bar{l}_i^2 \quad (2.2.5.1.-5)$$

O coeficiente de escala pode variar com o tempo (2.2.5., item b): é conveniente que a sua determinação seja feita periodicamente, ou que o instrumento seja enviado ao fabricante, com uma certa frequência, a fim de que o mesmo determine uma nova função de calibração.

Observe-se que os fatores  $\kappa$  podem ser considerados válidos apenas para corrigir observações conduzidas na faixa de operação (região do parafuso micrométrico) na qual a sua determinação foi realizada. Existem conjuntos de estações de gravidade conhecida, chamadas "linhas de calibração" (ou bases de calibração), cobrindo extensas faixas de valores de  $g$ , para a determinação de  $\kappa$ , que podem ser de dois tipos:

a) bases latitudinais [ $^{\circ}$ ], estabelecidas aproximadamente ao longo

de meridianos, em que a variação de  $g$  se deve à variação de latitude.

- b) bases verticais, nas quais os desníveis entre as estações asseguram as variações de  $g$  necessárias.

Um conjunto de estações pertencentes ao datum gravimétrico internacional (IGSN-71), estabelecidas num determinado país, pode ser utilizado como base de calibração nacional, desde que sua distribuição no território desse país seja favorável à obtenção de  $K$ .

O fator ou coeficiente de calibração pode ser também determinado através do ajustamento, pelo método dos mínimos quadrados, dos valores de  $g$  numa rede de estações (das quais duas, no mínimo, devem possuir  $g$  conhecido), sendo o seu valor um dos parâmetros do modelo matemático selecionado: é o que será feito no Capítulo Quarto do presente trabalho.

#### 2.2.5.1.1.- Exemplo

A título de exemplo, iremos aqui estimar os coeficientes de escala  $K_1$  e  $K_2$  para os gravímetros LaCoste & Romberg modelo G, de números 41 e 372, baseando-nos em algumas ligações gravimétricas aéreas, envolvendo estações IGSN-71, realizadas pelo CPCCG/UFP com a finalidade de determinar em Curitiba valores de  $g$  associados ao novo datum internacional. Dois circuitos terrestres, utilizados nos ajustamentos do Capítulo Quarto, são incluídos a fim de que seja aumentado o número de equações do sistema 2.2.5.1.-2.

O esquema abaixo (fig. 2.2.5.1.1.-1) simboliza as ligações:

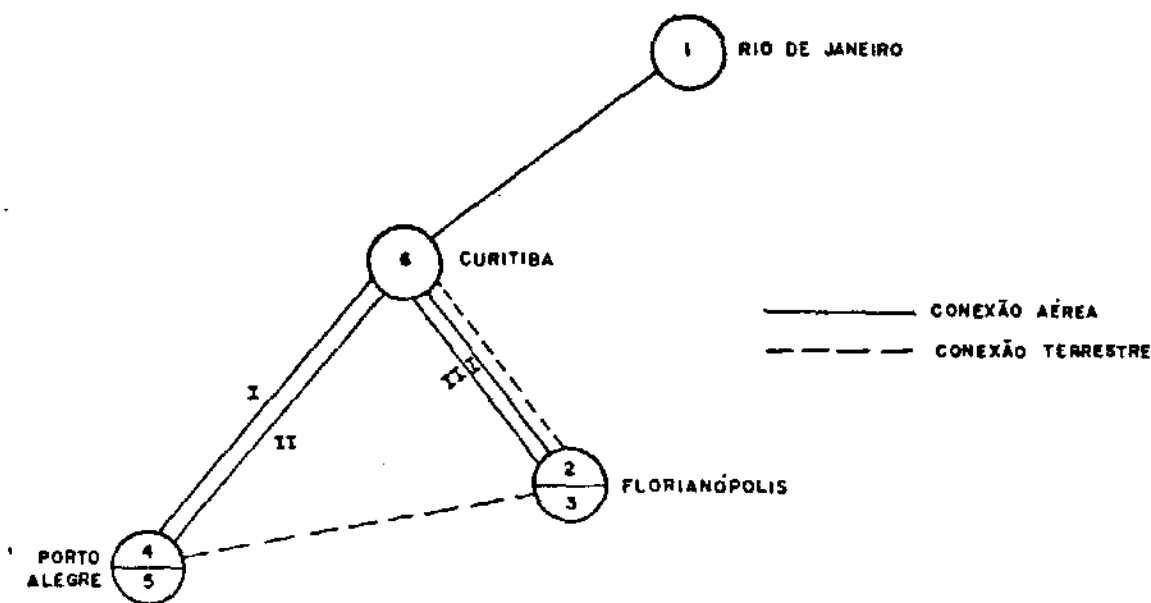


FIG. 2.2.5.1.1.-1

A tabela 2.2.5.1.1.-1 apresenta as estações envolvidas:

Nº	CIDADE	ESTAÇÃO	g (mgal)
1	RIO DE JANEIRO	IGSN - 40 123/L	978 793,55
2	FLOPIANÓPOLIS	IGSN - 40 178/A	979 112,39
3	FLORIANÓPOLIS	IGSN - 40 178/J	979 118,93
4	PORTO ALEGRE	IGSN - 43 801/B	979 305,00
5	PORTO ALEGRE	IGSN - 43 801/J	979 300,78
6	CURITIBA	A.I (AEPOPORTO)	—

TABELA 2.2.5.1.1.-1

a) gravímetro LCR-G/41

As conexões foram executadas em épocas diversas, entre 1976 e 1979. A tabela 2.2.5.1.1.-1 tem por finalidade a redução das leituras  $\bar{l}$  às épocas das observações nas estações 1, 2 e 3 (coluna esquerda do campo " $\bar{l}$ "), com o auxílio das leituras na estação 6, cujas diferenças, causadas pelas derivas instrumentais,

ão subtraídas das leituras que figuram na coluna direita do campo "I". O campo DIF. g simboliza as diferenças de leituras necessárias à determinação de  $\kappa$ ; as leituras nos pontos 1, 2 e 3 vêm repetidas no campo "leituras reduzidas", a fim de tornar mais cômodo os cálculos que resultam na obtenção da tabela 2.2.5.1.1.-2.

CONEXÃO	$\bar{l}$	DIF. g	$\bar{l}$ REDUZIDAS
1-6	2436,631-2417,698		
6-2	2421,847-2759,571	1-2	2436,631-2755,422
6-3(I)	2420,145-2764,390	1-3(I)	2761,943
6-3(II)	2420,121-2764,353	1-3(II)	2761,930
6-5(I)	2419,739-2945,880	1-5(I)	2943,839
6-5(II)	2428,526-2954,628	1-5(II)	2943,800
2-4	2759,200-2951,815	2-4	2759,200-2951,815
2-6	2759,571-2421,847		
6-5(I)	2419,739-2945,880	2-5(I)	2759,571-2947,988
6-5(II)	2428,526-2954,628	2-5(II)	2947,949
3-6(I)	2764,390-2420,145		
6-5(I)	2419,739-2945,880	3-5(I,I)	2764,390-2946,286
6-5(II)	2428,526-2954,628	3-5(I,II)	2946,247
3-6(II)	2764,353-2429,121		
6-5(I)	2419,739-2945,880	3-5(II,I)	2764,353-2946,262
6-5(II)	2428,526-2954,628	3-5(II,II)	2946,223

TABELA 2.2.5.1.1.-2

Na tabela 2.2.5.1.1.-3 são obtidos os coeficientes do sistema 2.2.5.1.-2; as diferenças de gravidade provêm da tabela 2.2.5.1.1.-2.

DIF. DE $g$ ( $i+j$ )	$(\bar{\ell}_j - \bar{\ell}_i)$ (mgal)	$(\bar{\ell}_j^2 - \bar{\ell}_i^2)$ (mgal <sup>2</sup> )	$(g_j - g_i)$ (mgal)
1-2	318,791	1 655 179,768	318,84
1-3(I)	325,312	1 691 158,505	325,38
1-3(II)	325,299	1 691 086,695	
1-5(I)	507,208	2 729 017,428	507,23
1-5(II)	507,169	2 728 787,810	
2-4	192,615	1 100 027,154	192,61
2-5(I)	188,417	1 075 401,144	188,39
2-5(II)	188,378	1 075 171,203	
3-5(I,I)	181,896	1 038 749,122	181,85
3-5(I,II)	181,857	1 038 519,313	
3-5(II,I)	181,909	1 038 812,264	
3-5(II,II)	181,870	1 038 582,457	

TABELA 2.2.5.1.1.-3

Temos assim um sistema ( $AX=L$ ) de 12 equações e 2 incógnitas; dividindo tais equações por  $10^3$  para evitar a presença de termos demasiadamente grandes na resolução do sistema, resulta:

$$\begin{aligned}
 0,318\ 791\ \kappa_1 + 1655,179\ 768\ \kappa_2 &= 0,318\ 840 \\
 0,325\ 312\ \kappa_1 + 1691,158\ 505\ \kappa_2 &= 0,325\ 380 \\
 0,325\ 299\ \kappa_1 + 1691,086\ 695\ \kappa_2 &= 0,325\ 380 \\
 0,507\ 208\ \kappa_1 + 2729,017\ 428\ \kappa_2 &= 0,507\ 230 \\
 0,507\ 169\ \kappa_1 + 2728,787\ 810\ \kappa_2 &= 0,507\ 230 \\
 0,192\ 615\ \kappa_1 + 1100,027\ 154\ \kappa_2 &= 0,192\ 610 \\
 0,188\ 417\ \kappa_1 + 1075,401\ 144\ \kappa_2 &= 0,188\ 390 \\
 0,188\ 378\ \kappa_1 + 1075,171\ 203\ \kappa_2 &= 0,188\ 390 \\
 0,181\ 896\ \kappa_1 + 1038,749\ 122\ \kappa_2 &= 0,181\ 850 \\
 0,181\ 857\ \kappa_1 + 1038,519\ 313\ \kappa_2 &= 0,181\ 850 \\
 0,181\ 909\ \kappa_1 + 1038,812\ 264\ \kappa_2 &= 0,181\ 850 \\
 0,181\ 870\ \kappa_1 + 1038,582\ 457\ \kappa_2 &= 0,181\ 850
 \end{aligned}
 \quad (2.2.5.1.1.-1)$$



A resolução do sistema, direta ( $\kappa = (A^T A)^{-1} A^T L$ ), fornece os coeficientes de escala linear ( $\kappa_1$ ) e quadrático ( $\kappa_2$ ) do gravímetro LCP-G/41:

$$\kappa_1 = 1,003\,427\,095$$

(2.2.5.1.1.-2)

$$\kappa_2 = -6,209\,87 \cdot 10^{-7} \text{ mgal}^{-1}$$

b) gravímetro LCP-G/372

Repetindo o procedimento acima para o outro gravímetro, que participou das mesmas conexões, obtemos a seguinte série de tabelas:

CONEXÃO	$\bar{L}$	DIF. DE g	$\bar{L}$ REDUZIDAS
1-6	2562,483-2543,975		
6-2	2554,518-2891,906	1-2	2562,483-2881,363
6-3(I)	2547,391-2891,369	1-3(I)	2887,953
6-3(II)	2547,425-2891,356	1-3(II)	2887,906
6-5(I)	2546,700-3072,366	1-5(I)	3069,641
6-5(II)	2647,402-3173,052	1-5(II)	3069,625
2-4	2891,379-3083,823	2-4	2891,379-3083,823
2-6	2891,906-2554,518		
6-5(I)	2546,700-3072,366	2-5(I)	2891,906-3080,184
6-5(II)	2647,402-3173,052	2-5(II)	3080,168
3-6 (I)	2891,369-2547,391		
6-5(I)	2546,700-3072,366	3-5(I,I)	2891,369-3073,057
6-5(II)	2647,402-3173,052	3-5(I,II)	3073,041
3-6 (II)	2891,356-2547,425		
6-5(I)	2546,700-3072,366	3-5(II,I)	2891,356-3073,091
6-5(II)	2647,402-3173,052	3-5(II,II)	3073,075

TABELA 2.2.5.1.1.-4

DIF. DE $\eta$ (i-j)	$(\bar{\ell}_j - \bar{\ell}_i)$ (mgal)	$(\bar{\ell}_j^2 - \bar{\ell}_i^2)$ (mgal <sup>2</sup> )	$(g_j - g_i)$ (mgal)
1-2	318,880	1 735 933,613	318,84
1-3(I)	325,470	1 773 953,405	325,38
1-3(II)	325,423	1 773 681,940	
1-5(I)	507,158	2 856 376,744	507,23
1-5(II)	507,142	2 856 278,516	
2-4	192,444	1 149 891,773	192,61
2-5(I)	188,278	1 124 413,161	188,39
2-5(II)	188,262	1 124 314,595	
3-5(I,I)	181,688	1 083 664,631	181,85
3-5(I,II)	181,672	1 083 566,294	
3-5(II,I)	181,735	1 083 948,775	
3-5(II,II)	181,719	1 083 850,437	

TABELA 2.2.5.1.1.-5

Obtém-se daí o sistema:

$$\begin{aligned}
 0,318\ 880\ \kappa_1 + 1735,933\ 613\ \kappa_2 &= 0,318\ 84 \\
 0,325\ 470\ \kappa_1 + 1773,953\ 405\ \kappa_2 &= 0,325\ 38 \\
 0,325\ 423\ \kappa_1 + 1773,681\ 940\ \kappa_2 &= 0,325\ 38 \\
 0,507\ 158\ \kappa_1 + 2856,376\ 744\ \kappa_2 &= 0,507\ 23 \\
 0,507\ 142\ \kappa_1 + 2856,278\ 516\ \kappa_2 &= 0,507\ 23 \\
 0,192\ 444\ \kappa_1 + 1149,891\ 773\ \kappa_2 &= 0,192\ 61 \quad (2.2.5.1.1.-3) \\
 0,188\ 278\ \kappa_1 + 1124,413\ 161\ \kappa_2 &= 0,188\ 39 \\
 0,188\ 262\ \kappa_1 + 1124,314\ 595\ \kappa_2 &= 0,188\ 39 \\
 0,181\ 688\ \kappa_1 + 1083,664\ 631\ \kappa_2 &= 0,181\ 85 \\
 0,181\ 672\ \kappa_1 + 1083,566\ 294\ \kappa_2 &= 0,181\ 85 \\
 0,181\ 735\ \kappa_1 + 1083,948\ 775\ \kappa_2 &= 0,181\ 85 \\
 0,181\ 719\ \kappa_1 + 1083,850\ 437\ \kappa_2 &= 0,181\ 85
 \end{aligned}$$

e sua resolução fornece:

$$\kappa_1 = 0,989\ 952\ 363$$

(2.2.5.1.1.-4)

$$\kappa_2 = 18,1174 \cdot 10^{-7} \text{ mgal}^{-1}$$

### c) Observações

- 1<sup>a</sup>) Será necessário envolver um número muito maior, não só de observações, como também de pontos IGSN-71, a fim de que possamos empregar os coeficientes determinados acima na correção das leituras dos gravímetros G-41 e G-372, com alguma segurança;
- 2<sup>a</sup>) a determinação acima tem o inconveniente dos desníveis gravimétricos entre as estações IGSN-71 não terem sido observados diretamente (com exceção do circuito 2-4);
- 3<sup>a</sup>) a exatidão dos valores dos coeficientes de escala é condicionada, evidentemente, aos valores de  $g$  nas estações IGSN-71, os quais provêm de um ajustamento global: o emprego dos coeficientes somente garantiria a coerência das novas observações com a rede IGSN-71. Note-se que esses valores de  $g$  são sujeitos a variações, devidas por exemplo aos movimentos verticais da crosta terrestre, irreversíveis (assentamentos) ou não.

#### 2.2.5.2.- Métodos absolutos de calibração

- a) Suspensão de cargas à haste do "pêndulo" (normalmente usado pelos fabricantes dos gravímetros LaCoste & Romberg, por exemplo, por ocasião da montagem dos instrumentos). A massa de tais cargas deve ser conhecida com desvio-padrão de  $0,1\text{mg}$  [49] e a posição dos pontos de suspensão em relação ao eixo de rotação do pêndulo deve ser determinada com rigor; basta que o valor de  $g$  no local de calibração seja conhecido com  $\sigma = 100\text{mgal}$ . A variação aparente da gravidade, causada pela adição das cargas, pode

ser calculada e é associada à variação observada das leituras instrumentais, permitindo determinar a função de calibração.

- b) Método de inclinação, que se baseia na equação 2.2.3.-2 (variação aparente da gravidade em função de um certo ângulo de inclinação do instrumento). Inclina-se o gravímetro no plano do sistema instrumental XOY (fig. 2.2.3.-2) e fazem-se leituras correspondentes às diversas posições do aparelho; as variações de leituras são associadas às variações aparentes da gravidade, e uma função de escala é assim obtida. O valor de  $g$  no local deve ser conhecido com desvio-padrão entre 10mgal e 50mgal <sup>[50]</sup>. São usadas plataformas de calibração reclináveis; a obtenção dos ângulos  $\beta$  pode ser feita de duas maneiras; ou através de um micrômetro solidário à plataforma, ou através do chamado método geométrico, proposto por Molodenski, em que os ângulos  $\beta$  provêm de leituras no círculo vertical de um teodolito provido de um dispositivo autocolimador, sendo fixado um espelho ao corpo do gravímetro <sup>[51]</sup>, <sup>[52]</sup>.

#### 2.2.6.- Influências de campos magnéticos

Devem ser consideradas no caso dos gravímetros cujos sistemas elásticos são fabricados com ligas ferromagnéticas, tais como o elinvar; seu efeito sobre o sistema móvel resulta numa variação do momento  $M$  e, portanto, numa variação aparente da gravidade. As fontes dessas influências podem ser de dois tipos:

- a) externas (o campo magnético terrestre e campos originados em fontes locais, como linhas de alta tensão, motores elétricos, geradores, jazidas naturais de magnetita, etc.). Sua elimina-

ção é feita através da desmagnetização prévia dos componentes do sistema elástico e da introdução de blindagens magnéticas (ligas de ferro-níquel, etc.), não sendo, porém, total <sup>[53]</sup>, podendo-se tomar os seguintes cuidados nas operações de campo: evitar observações nas proximidades de campos magnéticos locais e, por outro lado, orientar o gravímetro com uma bússola (colocando o plano instrumental XOY no plano do meridiano magnético local), em cada estação, minimizando assim o efeito da componente horizontal do campo magnético terrestre no local de observação.

- b) internas. Nos instrumentos controlados termostaticamente, um campo magnético é gerado nos condutores; porém, este é facilmente neutralizado com o emprego de condutores bifilares nos circuitos dos termostatos <sup>[54]</sup> <sup>[55]</sup>.

### 2.3.- Variações reais da gravidade

A principal dessas variações é aquela provocada pela atração newtoniana exercida pelo sol e pela lua sobre o local de observação (efeito de maré); estudá-la-emos com algum cuidado.

#### 2.3.1.- A atração gravitacional luni-solar

Nas determinações precisas do módulo de  $\vec{g}$ , a atração gravitacional luni-solar deve ser levada em consideração: com efeito, a perturbação resultante no campo gravitacional tem magnitude tal que afeta as medidas gravimétricas executadas com os instrumentos atualmente empregados, devendo as observações, por con-

seguinte, ser depuradas mediante uma correção que denominaremos simplesmente de correção de maré. É uma função periódica do tempo, pois depende da posição da Lua e do Sol relativamente ao local de observação (os efeitos causados pelos demais corpos celestes, negligenciáveis para as nossas finalidades, serão aqui ignorados).

Se considerarmos a Terra como sendo um corpo rígido, podemos afirmar que as forças de origem gravitacional, exercidas sobre a mesma por um corpo celeste qualquer, afetam um ponto de sua superfície de duas maneiras distintas:

- a) por um lado, uma certa aceleração é imprimida ao centro de massa da Terra, provocando uma variação no seu movimento (efeito terrestre geral);
- b) além disso, o corpo celeste em questão age diretamente sobre o local de observação, modificando aí o campo da gravidade (efeito terrestre local).

Podemos separar o vetor resultante da subtração dessas duas acelerações, no local onde se pretende determinar  $g$ , em duas componentes, uma horizontal e a outra vertical, sendo essa última a que nos interessa aqui: determinaremos o seu valor, que será a correção em vista. A dedução geométrica (a dedução física pode ser consultada em [56], [57]) e se aplica, indiferentemente, ao Sol e à Lua.

Representemos (fig. 2.3.1.-1) a Terra, considerada esférica, e a esfera celeste, analisando a perturbação exercida pelo astro A sobre um ponto P ( $\phi, \lambda$ ) da superfície terrestre. O eixo OV, que contém a vertical de P, é orientado positivamente segundo o zênite de P;  $P_N Q' P_S$  é o semi-meridiano superior (celeste) de Greenwich;  $\gamma$  simboliza a posição do ponto vernal.



Sejam:

- M - massa do corpo celeste A, considerado como sendo pontual;
- r - raio da terra, suposta esférica e homogênea;
- d - distância de A ao centro de massa da terra (O);
- d' - distância de A ao local de observação (P);
- Z - distância zenital geocêntrica de A, igual ao arco de circunferência máxima AT;
- Z' - distância zenital topocêntrica de A;
- k - constante gravitacional de Newton;
- $\vec{a}_O$  - aceleração produzida por A sobre u'a massa pontual unitária situada em O;
- $\vec{a}_P$  - aceleração produzida por A sobre u'a massa pontual unitária situada em P;
- H - ângulo horário de A no instante da observação;
- $\alpha, \delta$  - coordenadas uranográficas de A;
- $\phi, \lambda$  - coordenadas geográficas de P;
- $m_A$  - correção de maré.

A correção de maré será igual à diferença entre os módulos das projeções de  $\vec{a}_P$  e  $\vec{a}_O$  sobre o eixo OV (componente vertical da aceleração resultante em P). Temos, pela lei de Newton da gravitação universal:

$$a_P = k \frac{M}{d'^2} \quad \text{e} \quad a_O = k \frac{M}{d^2}$$

tendo os módulos das projeções sobre OV os seguintes valores:

$$a_{PV} = k \frac{M}{d'^2} \cos Z' \quad \text{e} \quad a_{OV} = k \frac{M}{d^2} \cos Z$$



A correção de maré será então dada por:

$$m_A = a_{PV} - a_{OV}$$

$$m_A = kM \left( \frac{\cos Z'}{d'^2} - \frac{\cos Z}{d^2} \right) \quad (2.3.1.-1)$$

Eliminemos da equação 2.3.1.-1 a distância zenital topocêntrica.

Baixando de A uma perpendicular ao eixo OV (fig. 2.3.1.-1), temos formado o triângulo AOB, retângulo em B, e podemos escrever:

$$\overline{OF} = \overline{OP} + \overline{PB}$$

$$d \cos Z = r + d' \cos Z'$$

$$\cos Z' = \left( \frac{d \cos Z - r}{d'} \right) \quad (2.3.1.-2)$$

Substituindo a equação 2.3.1.-2 na 2.3.1.-1, obtemos:

$$m_A = kM \frac{d \cos Z - r}{d'^3} - \frac{\cos Z}{d^2} \quad (2.3.1.-3)$$

Agora, procederemos à eliminação de  $d'$  da equação 2.3.1.-3. Do triângulo APO, temos, pela lei dos co-senos da trigonometria plana:

$$d'^2 = d^2 + r^2 - 2dr \cos Z$$

$$d' = d \left[ 1 + \left( \frac{r}{d} \right)^2 - 2 \left( \frac{r}{d} \right) \cos Z \right]^{1/2}$$

$$\frac{1}{d'^3} = \frac{1}{d^3} \left[ 1 + \left( \frac{r}{d} \right)^2 - 2 \left( \frac{r}{d} \right) \cos Z \right]^{-3/2} \quad (2.3.1.-4)$$

Com a 2.3.1.-4 na 2.3.1.-3, escrevemos:

$$m_A = kM \left\{ \frac{d \cos Z - r}{d^3} \left[ 1 + \left( \frac{r}{d} \right)^2 - 2 \left( \frac{r}{d} \right) \cos Z \right]^{-3/2} - \frac{\cos Z}{d^2} \right\}$$

e, colocando em evidência o termo  $1/d^2$ :

$$m_A = \frac{kM}{d^2} \left\{ \left( \cos Z - \frac{r}{d} \right) \left[ 1 + \left( \frac{r}{d} \right)^2 - 2 \left( \frac{r}{d} \right) \cos Z \right]^{-3/2} - \cos Z \right\} \quad (2.3.1.-5)$$

Desenvolveremos, a seguir, o termo entre colchetes (elevado a  $-3/2$ ), designando-o por h, pelo binômio de Newton:

$$(a + b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3} b^3 + \dots$$

sendo:

$$a = 1$$

$$b = \left( \frac{r}{d} \right)^2 - 2 \left( \frac{r}{d} \right) \cos Z$$

$$n = -\frac{3}{2}$$

Restringindo o desenvolvimento ao quarto termo e abandonando, por conseguinte, os termos que contêm  $r/d$  elevado a potências superiores a  $3^a$  (sendo  $r \ll d$ ), obtemos:

$$\begin{aligned} h = 1 - \frac{3}{2} \left[ \left( \frac{r}{d} \right)^2 - 2 \left( \frac{r}{d} \right) \cos Z \right] + \frac{15}{8} \left[ \left( \frac{r}{d} \right)^4 + 4 \left( \frac{r}{d} \right)^2 \cos^2 Z + \right. \\ \left. - 4 \left( \frac{r}{d} \right)^3 \cos Z \right] - \frac{105}{48} \left[ \left( \frac{r}{d} \right)^6 - 6 \left( \frac{r}{d} \right)^5 \cos Z + \right. \\ \left. + 12 \left( \frac{r}{d} \right)^4 \cos^2 Z - 8 \left( \frac{r}{d} \right)^3 \cos^3 Z \right] + \dots \end{aligned}$$

ou:

$$h = 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{r}{d}\right)^2 + 3 \left(\frac{r}{d}\right) \cos Z + \frac{15}{2} \left(\frac{r}{d}\right)^2 \cos^2 Z - \frac{15}{2} \left(\frac{r}{d}\right)^3 \cos Z + \\ + \frac{105}{6} \left(\frac{r}{d}\right)^3 \cos^3 Z + \dots$$

Em seguida, efetuamos o produto  $(\cos Z - \frac{r}{d}) \cdot h$ , que consta da 2.3.1.-5:

$$(\cos Z - \frac{r}{d}) h = \cos Z - \frac{3}{2} \left(\frac{r}{d}\right)^2 \cos Z + 3 \left(\frac{r}{d}\right) \cos^2 Z + \\ + \frac{15}{2} \left(\frac{r}{d}\right)^2 \cos^3 Z - \frac{15}{2} \left(\frac{r}{d}\right)^3 \cos^2 Z + \frac{105}{6} \left(\frac{r}{d}\right)^3 \cos^4 Z + \\ - \frac{r}{d} + \frac{3}{2} \left(\frac{r}{d}\right)^3 - 3 \left(\frac{r}{d}\right)^2 \cos Z - \frac{15}{2} \left(\frac{r}{d}\right)^3 \cos^2 Z + \\ + \frac{15}{2} \left(\frac{r}{d}\right)^4 \cos Z - \frac{105}{6} \left(\frac{r}{d}\right)^4 \cos^3 Z + \dots \quad (2.3.1.-6)$$

Ordenando o 2º membro da equação 2.3.1.-6 segundo as potências crescentes de  $r/d$  (abandonando os termos que contêm essa razão elevada à 4ª potência), efetuando as somas e substituindo a expressão resultante na 2.3.1.-5, temos:

$$m_A = \frac{kM}{d^2} \left[ \cos Z + 3 \left(\frac{r}{d}\right) \cos^2 Z - \left(\frac{r}{d}\right) + \frac{15}{2} \left(\frac{r}{d}\right)^2 \cos^3 Z + \right. \\ \left. - \frac{9}{2} \left(\frac{r}{d}\right)^2 \cos Z + \frac{105}{6} \left(\frac{r}{d}\right)^3 \cos^4 Z - 15 \left(\frac{r}{d}\right)^3 \cos^2 Z + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \left(\frac{r}{d}\right)^3 + \dots - \cos Z \right]$$

ou:

$$m_A = \frac{kM}{d^2} \left[ \left(\frac{r}{d}\right) (3 \cos^2 Z - 1) + \frac{3}{2} \left(\frac{r}{d}\right)^2 (5 \cos^3 Z - 3 \cos Z) + \right. \\ \left. + \frac{35}{2} \left(\frac{r}{d}\right)^3 (\cos^4 Z - \frac{6}{7} \cos^2 Z + \frac{3}{35}) + \dots \right] \quad (2.3.1.-7)$$

Pode-se escrever, simplesmente:

$$m_A = \frac{2kMr}{d^3} P_2(\cos Z) + \frac{3kMr^2}{d^4} P_3(\cos Z) + \frac{4kMr^3}{d^5} P_4(\cos Z) + \dots \quad (2.3.1.-8)$$

onde  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$  são os polinômios de Legendre de 2ª, 3ª e 4ª ordem e de argumento  $\cos Z$ :

$$P_2(\cos Z) = \frac{1}{2} (3 \cos^2 Z - 1)$$

$$P_3(\cos Z) = \frac{1}{2} (5 \cos^3 Z - 3 \cos Z)$$

$$P_4(\cos Z) = \frac{35}{8} (\cos^4 Z - \frac{6}{7} \cos^2 Z + \frac{3}{35})$$

Poder-se-ia mostrar, a propósito, que a expressão da correção de maré tem por forma compacta:

$$m_A = kM \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot \frac{r^{n-1}}{d^{n+1}} \cdot P_n(\cos Z) \quad (2.3.1.-9)$$

A 2.3.1.-9 pode ser obtida diretamente a partir da equação do potencial de maré exercido por um corpo celeste sobre um ponto da superfície terrestre  $|^{50}|$ ,  $|^{59}|$ .

Ao valor acima é associado o fator 1,2  $|^{60}|$ ,  $|^{61}|$ , introduzido levando-se em consideração o fato da Terra ser um corpo não-rígido. Assim, temos finalmente:

$$m_A = 1,2kM \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot \frac{r^{n-1}}{d^{n+1}} P_n(\cos Z) \quad (2.3.1.-10)$$

Calculando-se as correções de maré para a Lua ( $m_L$  em função de  $M_L$ , massa da Lua e  $d_L$ , distância Terra-Lua) e para o sol ( $m_S$

usando-se  $M_S$ , massa do Sol e  $d_S$ , distância Terra-Sol) e somando-as, resulta a correção total de maré ou da atração gravitacional luni-solar:

$$m = m_L + m_S \quad (2.3.1.-11)$$

E, então, pode-se escrever, para uma leitura (média da série) expressa em mgal e corrigida do efeito de maré:

$$l_i^n = l_i^r + m_i \quad (2.3.1.-12)$$

sendo  $m_i$  a correção de maré no instante das leituras na  $i$ -ésima estação.

Examinemos, a seguir, as influências dos termos em  $P_2$ ,  $P_3$  e  $P_4$  sobre os valores de  $m_L$  e  $m_S$ . Demonstra-se facilmente, derivando  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$ , ...,  $P_n$  em relação a  $Z$ , que eles têm valores máximos para  $Z=0$ , sendo que, nesse caso, temos:

$$P_2 = P_3 = P_4 = \dots = P_n = 1^*$$

Adotando-se um valor aproximado para o raio equatorial da Terra:

$$r = 6,378.10^8 \text{ cm}$$

e sendo:

$$k = 6,670.10^{-8} \text{ cm}^3/\text{gs}^3$$

podemos construir a seguinte tabela (equação 2.3.1.-10), usando as distâncias mínimas Terra-Lua e Terra-Sol, calculando assim os valores máximos dos termos de  $m$ , sendo  $Z=0$ :

\* o mesmo ocorre, sendo  $Z=180^\circ$ , com os polinômios de ordem par.

	LUA	SOL
MASSA	$7,351.10^{25} \text{ g}$	$1,990.10^{33} \text{ g}$
d MÍNIMA	$3,570.10^{10} \text{ cm}$	$1,470.10^{13} \text{ cm}$
TERMO EM $P_2$	$0,164 \text{ mgal}$	$0,064 \text{ mgal}$
TERMO EM $P_3$	$0,004 \text{ mgal}$	$4,1.10^{-6} \text{ mgal}$
TERMO EM $P_4$	$105,3.10^{-6} \text{ mgal}$	$240,8.10^{-12} \text{ mgal}$

TABELA 2.3.1.-1

O termo em  $P_4$  pode ser abandonado no caso da Lua, assim como os termos em  $P_3$  e  $P_4$  para o Sol, por não influenciarem sensivelmente as medidas gravimétricas feitas na atualidade. Pode-se ver que o valor máximo de  $m$ , estando hipoteticamente a Lua e o Sol no zênite do local de observação, a Lua no perigeu e a Terra no perélio, não ultrapassa  $0,232 \text{ mgal}$ . Adotam-se então:

$$m_L = 1,2kM_L \left[ \frac{2r}{d_L^3} P_2(\cos Z) + \frac{3r^2}{d_L^4} P_3(\cos Z) \right] \quad (2.3.1.-12)$$

$$m_S = 2,4kM_S \frac{r}{d_S^3} P_2(\cos Z) \quad (2.3.1.-13)$$

O cálculo da distância zenital topocêntrica ( $Z$ ) da Lua e do Sol pode ser feita de duas maneiras:

a) aplicando-se a fórmula dos 4 elementos da trigonometria esférica ao triângulo de posição  $P_N AZ$  (Fig.2.3.1.-1):

$$\cos Z = \sen \delta \sen \phi + \cos \delta \cos \phi \cos H$$

$$H = S_G - \alpha - \lambda$$

A ascensão reta e a declinação do Sol ou Lua podem ser retiradas das efemérides usuais e interpoladas para o instante da observação; a relação

$$M_G = H_L + F$$

sendo  $H_L$  a hora legal da observação e  $F$  o fuso horário local considerado, nos fornece a hora média de Greewich (T.U.), que será facilmente convertida em  $S_G$  (hora sideral de Greenwich)

- b) através dos parâmetros orbitais da Lua e da Terra, bem como das coordenadas eclípticas da Lua e do Sol, devidamente atualizadas, conforme <sup>62</sup>.

Quanto à distância  $d$  (entre o centro de massa da Terra e o centro da Lua ou do Sol), também pode ser obtida de duas maneiras:

- a) considerando-se o fator  $r/d$  como sendo igual ao seno da paralaxe horizontal do astro em questão, sendo então:

$$d = \frac{r}{\text{sen } p}$$

As paralaxes do Sol e da Lua vêm consignadas nas efemérides;

- b) através das fórmulas apresentadas em <sup>63</sup>, em que as distâncias  $d_L$  e  $d_S$  são calculadas em função de parâmetros orbitais da Terra e Lua. Além disso, <sup>64</sup> calcula  $r$  adotando um modelo elipsoidal para a terra, levando em conta a altitude da estação.

Existem tabelas (por exemplo, <sup>65</sup>) e gráficos <sup>66</sup>, publicados anualmente e que fornecem os valores da correção de maré. As observações gravimétricas de 1ª ordem efetuadas pelo CPCGG têm sido corrigidas da atração gravitacional luni-solar através de um

programa adotando o formulário de [67] para o cálculo de  $Z$  e  $d$ , preparado pelo professor Moacir José Quintino em linguagem BASIC e usado num computador de mesa Hewlett Packard mod. 9830. Os parâmetros de entrada desse programa são:

- coordenadas geográficas da estação gravimétrica;
- hora (T.U.), ano, mês e dia da observação;
- altitude da estação.

### 2.3.2.- Outras variações da gravidade

Vários processos geológicos, geofísicos e geoquímicos, modificando a distribuição de massas no interior do globo, alteram localmente o campo gravitacional terrestre. Tais processos, normalmente bastante lentos, exceto quando são envolvidas atividades sísmicas ou vulcânicas, podem se manifestar basicamente de duas maneiras:

- a) modificação das altitudes. Esse fenômeno foi constatado em alguns locais onde, existindo uma rede de nivelamento geométrico, as medidas altimétricas foram refeitas, acusando uma taxa de variação nas altitudes de vários centímetros por ano. Se levarmos em conta que um aumento de 1m na altitude de um ponto, por exemplo, resulta num decréscimo de 0,3mgal na aceleração da gravidade, em média, podemos constatar que esse efeito, em casos extremos, se torna sensível;
- b) variação na densidade das massas internas. Segundo [68], a variação de apenas  $0,001\text{g/cm}^3$  na massa específica de uma camada de 100km de espessura resultaria numa variação de 4mgal no valor de  $g$  na superfície.

Essas variações na intensidade da gravidade, quando



lentas, são difíceis de serem observadas através de medidas puramente gravimétricas. Muitas vezes, as diferenças entre os valores de  $g$  num mesmo ponto, determinados em épocas diversas, são simplesmente resultado da inexatidão das medidas primitivas: o desenvolvimento do instrumental gravimétrico e a conseqüente melhoria da precisão dos levantamentos são demasiadamente recentes para que se possa dispor, atualmente, de dados seguros acerca desses fenômenos. Um auxílio importante na sua detecção seria o emprego de gravímetros estacionários, com registro automático e permanente das observações, em locais onde se supõe ocorrerem movimentos tectônicos verticais acentuados.

A diminuição secular da velocidade de rotação da Terra é também responsável por uma certa variação da componente centrífuga da gravidade.

Por outro lado, a construção ou demolição de prédios, monumentos, etc., nas vizinhanças imediatas de uma estação gravimétrica, correspondendo a uma alteração na distribuição das massas externas locais, também pode resultar numa sensível variação de  $g$ . Nesse último caso, porém, a ordem de grandeza de tal variação pode ser facilmente estimada (cálculo da componente vertical da atração exercida por uma estrutura sobre um ponto de massa unitária situado na estação gravimétrica).

## REDES GRAVIMÉTRICAS E CIRCUITOS DE PRIMEIRA ORDEM

3.1.- Redes gravimétricas

Os levantamentos gravimétricos têm por objetivo o estabelecimento de conjuntos de estações ou redes, cuja densidade e precisão na determinação de  $g$  variam de acordo com os objetivos propostos. De um modo geral, podemos classificar as redes em duas espécies:

a) redes básicas, fundamentais, nacionais ou de 1ª ordem. São apoiadas diretamente a estações pertencentes ao datum internacional, ou seja, seus valores de  $g$  são determinados a partir do datum. Servem de arcabouço a levantamentos posteriores e configuram, em grandes linhas, o campo gravitacional de um país ou região. Possuem as seguintes características:

- fraca densidade de estações;
- grande precisão na determinação de  $g$ ;
- escala compatível com aquela fornecida pelo datum.

Os valores de  $g$  nas estações de uma rede básica devem apresentar, após o seu ajustamento, desvios-padrão não superiores a 0,050mgal, em relação aos valores nos pontos do datum, tomados como fixos (exatos), de acordo com os critérios apresentados em [6]. Para tanto, empregam-se gravímetros que permitam a leitura direta de 0,01mgal (como o LaCoste & Romberg), usando-se no mínimo dois instrumentos para cada determinação.

Os meios de transporte podem ser automóveis (somente em

CAPÍTULO TERCEIRO

estradas asfaltadas, a fim de evitar que o equipamento seja submetido a vibrações excessivas), aeronaves de propulsão a jato, etc.

As estações das redes básicas são geralmente fundadas em localidades de certa importância, previamente selecionadas em função de suas vias de acesso e posição geográfica relativa. Os locais onde são feitas as medidas, em cada cidade, são escolhidos de acordo com certos critérios rigorosos [70], tais como a permanência (templos religiosos, edifícios públicos, monumentos), acessibilidade e estabilidade (evitando-se a proximidade de ruas com tráfego pesado); como precaução adicional, um conjunto de no mínimo duas estações é estabelecido em cada localidade, sendo uma delas denominada fundamental (situada na estrutura arquitetônica mais relevante) e a outra excêntrica, embora a determinação de  $g$  obedeça em ambas aos mesmos critérios.

Quanto à posição geográfica dessas estações, coordenadas aproximadas retiradas de cartas topográficas são amplamente suficientes (cálculo da correção de maré). Para a altitude, basta até mesmo uma indicação barométrica: a função das estações básicas é apresentar locais com módulo da aceleração da gravidade conhecido, tais que possam ser utilizados em qualquer época;

- b) redes de densificação, regionais ou de 2ª ordem. São geralmente estabelecidas a partir das estações da rede fundamental e servem a finalidades específicas (determinação das anomalias da gravidade); representam um levantamento pormenorizado do campo gravitacional numa dada região, tendo como características principais:
- grande densidade de estações;
  - precisão na determinação de  $g$  que seja suficiente aos objetivos em vista (geodésicos, geofísicos ou geológicos);

- escala fornecida pelo datum, através das estações básicas;
- caracterização geográfica rigorosa das estações.

Cumprir notar que os levantamentos com finalidades geodésicas abrangem sempre a maior área possível (determinação do geóide), ao passo que os geólogos e geofísicos têm normalmente interesses locais, ou seja, circunscritos a áreas reduzidas (prospecção mineral, etc).

Os desvios-padrão associados à determinação de  $g$  em estações regionais devem ser  $|\sigma|$  inferiores ou iguais a  $0,30\text{mgal}$  (em relação aos valores nas estações de 1ª ordem, considerados fixos), admitindo-se a execução de ajustamentos para redes de densificação. Em todo caso, os gravímetros empregados devem possuir uma precisão de leitura nominal da ordem de  $0,1\text{mgal}$  (exemplo: WORDEN), bastando o uso de um único instrumento para cada determinação. Se o meio de transporte for o automóvel, estradas não-asfaltadas podem ser percorridas.

A localização de estações em referências de nível (RM), ou pelo menos em locais cuja altitude seja determinada com algum rigor (nivelamentos geométricos ou trigonométricos) constitui um fator preponderante no planejamento de redes de 2ª ordem, juntamente com a densidade (relação estações/área), que deve ser maior em regiões acidentadas. Cumprir salientar aqui que, sendo o valor do gradiente médio aproximado da gravidade igual a  $-0,31\text{mgal/metro}$ , a altitude de uma estação onde se pretende determinar as anomalias da gravidade deve ser conhecida com aproximação de cerca de 1 metro, para que haja compatibilidade com o critério exposto no início do parágrafo anterior (desvio-padrão de  $0,3\text{mgal}$  na determinação de  $g$ ).

A durabilidade dessas estações não constitui um fator essencial na sua implantação: na ausência de RN disponíveis, elas são geralmente estabelecidas em feições reconhecíveis em cartas topográficas (bifurcações de vias terrestres, casas, ângulos formados por cercas, escolas, etc.). A sua posição geográfica deve ser correta ao 0,1 minuto de arco  $|''^2|$ .

Uma visualização gráfica dos dois tipos de redes num determinado país ou região (R) pode ser feita como segue (fig.3.1.-1); os segmentos de retas representam esquematicamente os trajetos físicos percorridos com os gravímetros (circuitos), sendo que as setas indicam os pontos inicial e final de cada circuito. Observe-se que, nesse exemplo, os circuitos de 1ª ordem formam um sistema de malhas fechadas (polígonos) que permitiriam o ajustamento das diferenças de g medidas pelo método dos correlatos ou das equações de condição.

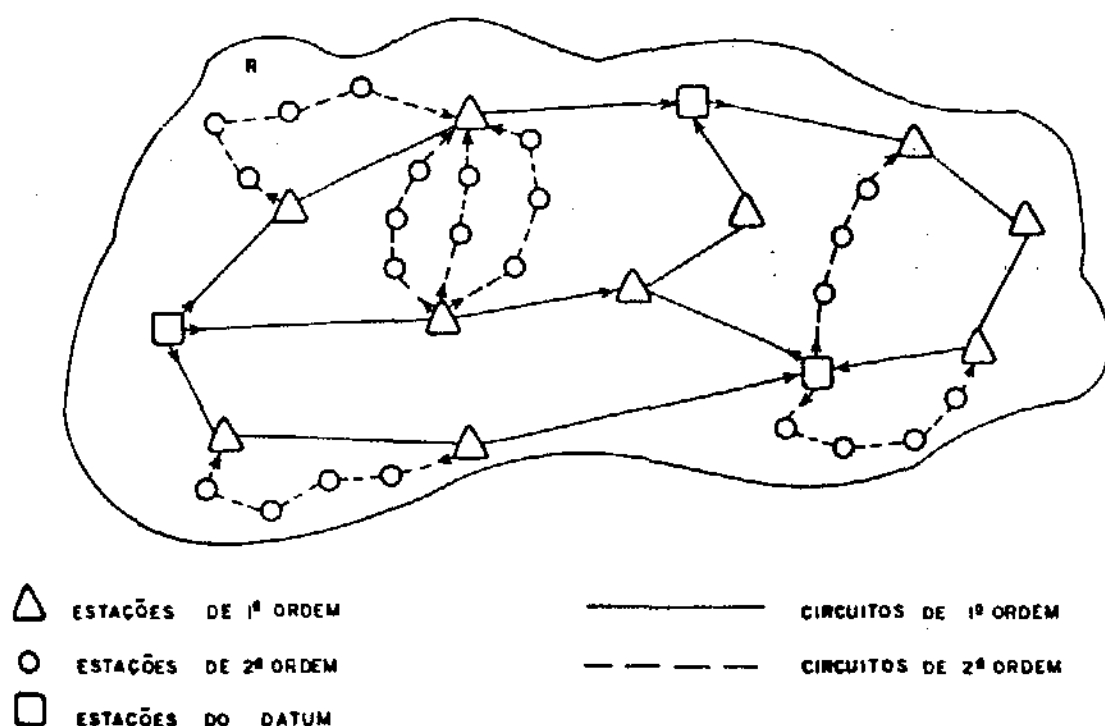


FIG. 3.1.-1

A execução de um circuito consiste na ocupação (que compreende as observações instrumentais e a documentação) sucessiva de um certo número de locais onde se pretende determinar o valor do módulo da aceleração da gravidade (estações gravimétricas): esse número é limitado principalmente pelo tempo (deriva instrumental). <sup>[73]</sup> fixa como limite o intervalo de 72 horas (em movimento) para executar-se um circuito gravimétrico de 1ª ordem; após esse limite, a deriva dinâmica tornar-se-ia excessivamente não-linear, resultando numa inexatidão cada vez maior na estimativa de sua correção, conforme visto no item 2.2.4.1.2.

Existe um grande número de esquemas possíveis para circuitos gravimétricos (consultar, a esse respeito, <sup>[74]</sup> e <sup>[75]</sup>): a seleção é feita de acordo com os meios de transporte disponíveis, a rede de comunicações terrestres, a precisão e comportamento do instrumental empregado. Os gravímetros de construção recente, graças às melhorias introduzidas (derivas praticamente lineares, maior precisão nas leituras), permitem a realização de esquemas extremamente simples: ocupar-nos-emos somente desses, na sua aplicação ao implante de estações gravimétricas de 1ª ordem.

Os circuitos chamados de "perfil duplo", às vezes designados por 1-2-3-...-n-...-3-2-1, sendo n o número de estações do circuito, têm o seu início e término na mesma estação; representam um trajeto de ida-e-volta, e as estações 2, 3, etc. são ocupadas em ambos os percursos, o que permite o cálculo do coeficiente de deriva dinâmica de acordo com a equação 2.2.4.1.2.-6. Tais circuitos convêm ao estabelecimento de pontos ao longo de rodovias asfaltadas e têm sido empregados nos levantamentos gravimétricos de 1ª ordem

executados pelo CPGCG/UFP.

Seja um conjunto de estações com  $g$  a determinar (1,2,3,...,8). Admitamos que a estação 1 pertença ao datum: seu valor de  $g$  será transportado às demais (a propósito, notar a semelhança entre as operações gravimétricas e as de nivelamento). Admitiremos, também, que um circuito de perfil duplo compreendendo as 8 estações possa ser executado num intervalo de tempo (em movimento) não excedendo 72 horas. Os segmentos de retas  $\overline{12}$ ,  $\overline{23}$ , etc. (figura 3.2.-1) representam os trajetos percorridos com o instrumental, o símbolo  $d$  designando a diferença de  $g$  entre uma estação e a seguinte ( $d_1 = g_2 - g_1$ ,  $d_2 = g_3 - g_2$ , etc.); a linha poligonal formada esquematiza o circuito.

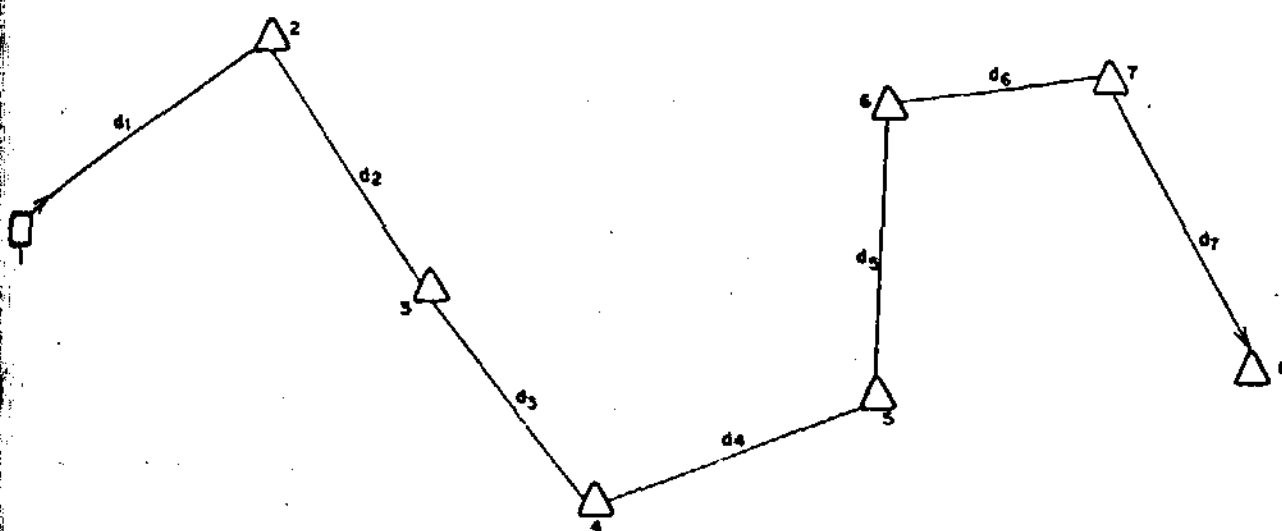


FIG. 3.2.-1

As informações caracterizando a  $i$ -ésima estação serão as seguintes:

a) principais, para cada instrumento.

	IDA	VOLTA
-leituras instrumentais (médias das séries)	$r_1^I$	$r_1^V$



-épocas das observações

$t_1^I$        $t_1^V$

b) adicionais

IDA      VOLTA

-temperatura do ar ambiente

$\theta_1^I$        $\theta_1^V$

-pressão atmosférica

$p_1^I$        $p_1^V$

-data (dia, mês, ano)

-documentação da estação (descrição, fotografias)

-nome e número de ordem (i) da estação no circuito

-coordenadas geográficas aproximadas da estação ( $\phi, \lambda$ )

-altitude aproximada da estação (h)

Os dados numéricos servirão ao cálculo do circuito (caso os coeficientes térmicos e barométricos dos gravímetros não sejam previamente conhecidos,  $\theta$  e  $p$  poderão ser utilizados na sua determinação, como indicado em 2.2.1.2, item b, e 2.2.2.2); os demais contribuirão ao estabelecimento de um arquivo de dados gravimétricos. Com o cálculo preliminar do circuito, o valor de  $g$  da estação 1 é transportado às outras.

Numa etapa seguinte, a estação 8, por exemplo, poderá servir de ponto de partida a um novo circuito\*. Certos autores [76] estimam conveniente que esse circuito posterior, no caso, parta da estação 7 e reocupe a 8 antes do prosseguimento.

O planejamento dos circuitos terrestres para implantação de estações de 1ª ordem é feito de acordo com as possibilidades

\* desde que o seu valor de  $g$  seja confirmado mediante uma ou mais repetições do circuito 1-8.

oferecidas pela rede rodoviária existente. Admite-se que a distância média entre duas localidades escolhidas para abrigarem estações fundamentais deva ser da ordem de 100km, ao longo de um circuito, o que forneceria, no caso de uma distribuição superficial homogênea, uma densidade de cerca de 1 conjunto de estações (fundamental e excêntrica) por quadrícula de  $1^\circ \times 1^\circ$ . Os circuitos aéreos são usados com três finalidades principais: instalação de pontos em regiões de acesso difícil, conexões a estações do datum afastadas e ligações entre estações já existentes, com o intuito de se aumentar a rigidez da rede (a necessidade desse tipo de ligações pode se tornar aparente em estudos de otimização de redes gravimétricas).

O conjunto de circuitos formará uma rede, que poderá constituir-se num certo número de malhas fechadas (figura 3.2.-2), o que diminui o volume de cálculos necessários ao ajustamento, com o uso do método dos correlatos; no entanto, dificuldades de ordem logística ou outras podem resultar numa rede mista (fig. 3.2.-3), incluindo malhas fechadas e circuitos abertos, implicando na adoção, para o ajustamento, do método paramétrico ou combinado, que envolvem um número de operações muito maior.

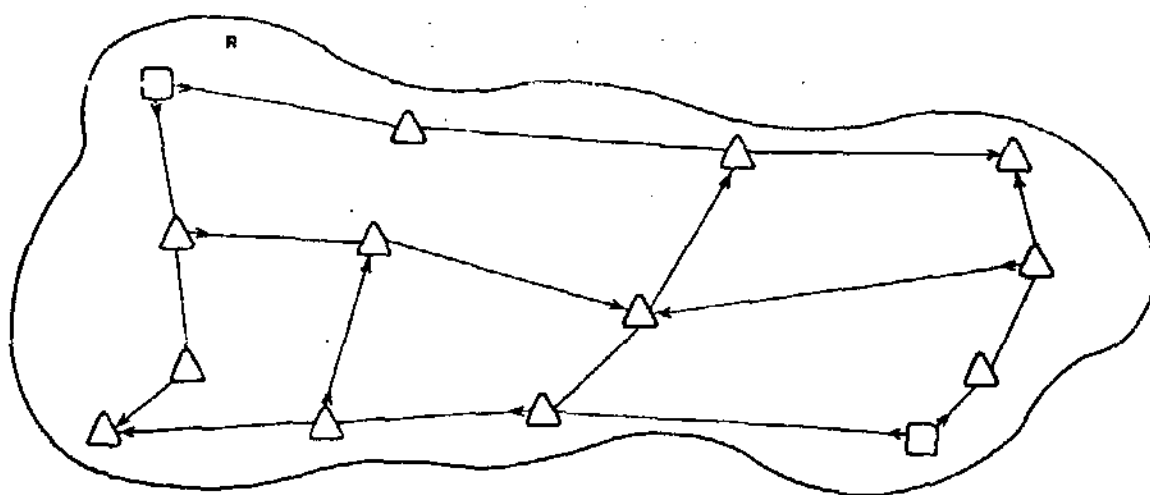


FIG. 3.2.-2

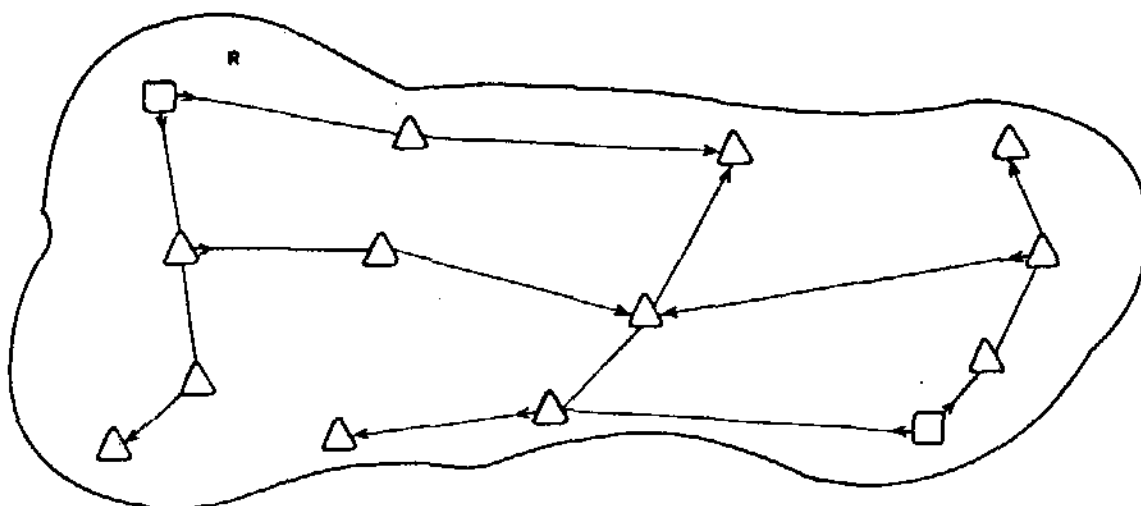


FIG. 3.2-3

Forneceremos, a seguir, algumas indicações acerca dos gravímetros LaCoste & Romberg modelo G, que têm sido usados pelo CPGCG/UFP nos seus levantamentos de 1<sup>a</sup> ordem.

### 3.3.- O gravímetro LaCoste & Romberg modelo G

Os instrumentos LaCoste & Romberg modelo G, graças às pequenas variações que suas funções de escala sofrem com o decorrer do tempo, são extensamente empregados na implantação de pontos gravimétricos, quando a precisão da determinação de  $g$  é considerada um fator essencial (estações fundamentais). Apresentam derivas instrumentais reduzidas e bastante regulares, além de seu manejo ser extremamente simples. Seu sistema elástico, astatizado, é encerrado numa câmara vedada, na qual a temperatura é mantida constante através da ação de um termostato. Examinemos, sucintamente,

o seu funcionamento e operação.

### 3.3.1.- Princípio de medida

O esquema simplificado da figura 3.3.1.-1 mostra os elementos principais do gravímetro. A mola principal (1), de "comprimento nulo", é solidária ao "pêndulo" ou alavanca (2), ligada diretamente à estrutura do gravímetro mediante a mola (3), dita de absorção de choques, que funciona também como articulação: forma um pivô flutuante que elimina os atritos e possibilita à alavanca efetuar um movimento de rotação segundo um plano vertical (plano da figura), com um grau de liberdade. Ambas as molas são metálicas (ligas especiais de aço).

Um fio de leitura ou fiel, cuja imagem é projetada por uma fonte luminosa sobre um anteparo translúcido provido de uma escala graduada (4), encontra-se fixo à alavanca, permitindo assim observar a posição dessa última através de um microscópio que magnifica a imagem da escala.

O ponto (5) representa o centro de massa do "pêndulo". As variações no módulo da aceleração da gravidade provocam deslocamentos da alavanca (2), cuja posição pode ser controlada através da ação manual do botão micrométrico (6), ligado ao parafuso de medida (7). O movimento desse último se transmite à alavanca com o auxílio do sistema de barras de conexão (8), e a um contador digital, situado no painel do instrumento (9).

O sistema possui um dispositivo de compensação barométrica interna; as molas são desmagnetizadas e a câmara que contém o sistema elástico é provida de uma blindagem magnética [77].

O fabricante executa a calibração do instrumento em toda

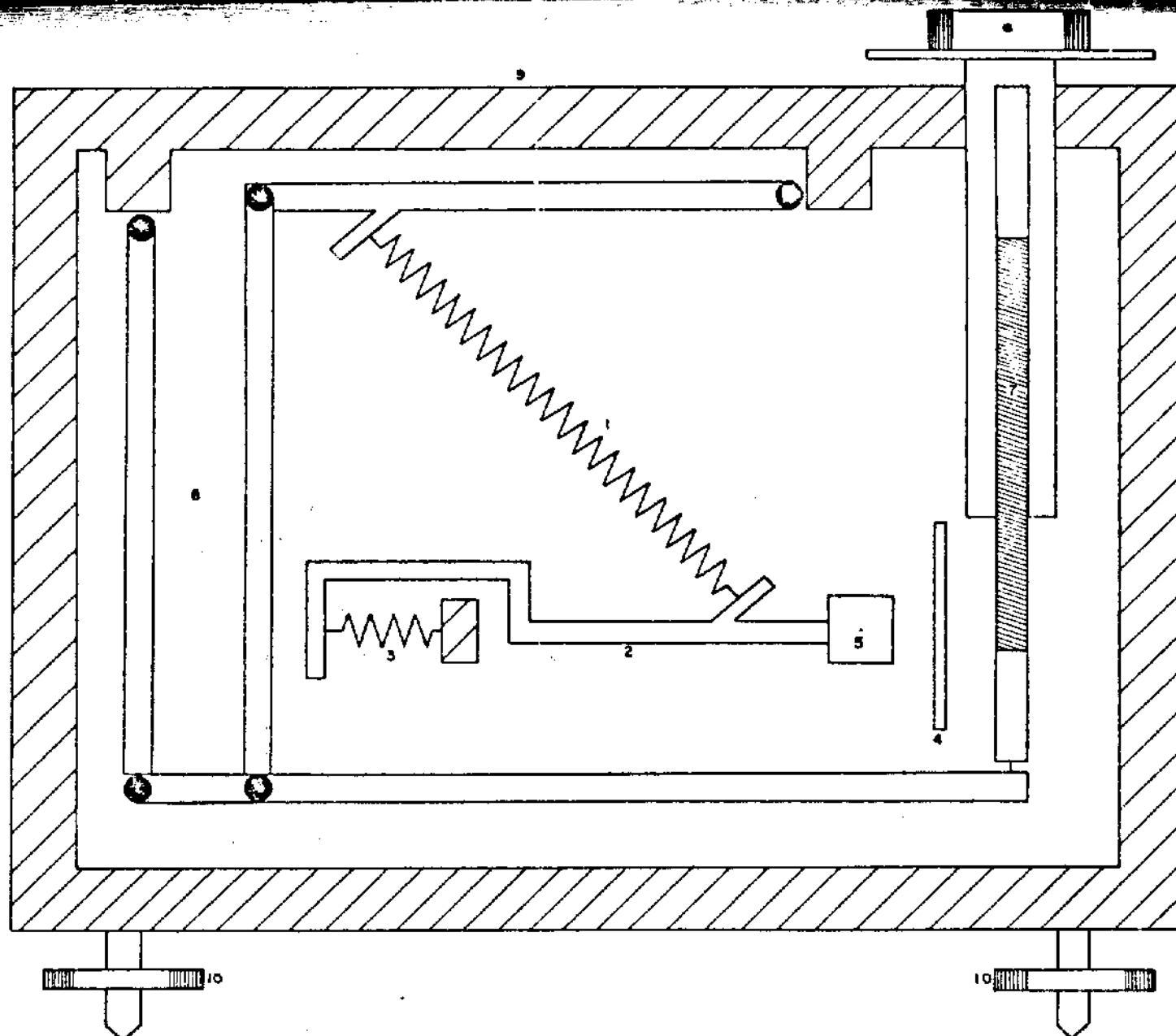


FIG. 3.3.1.-1

a extensão do parafuso de medida, segundo o método indicado em 2.2.5.2, item a. A regularidade da função de calibração depende somente da qualidade do parafuso e das molas (1) e (3), pois o sistema não comporta rolas auxiliares de leitura (que sempre comprometem a exatidão das observações). Essa função é tabelada nos manuais dos gravímetros. Os instrumentos desse tipo podem ser usados numa faixa operacional que cobre aproximadamente 7,5gal, sem necessidade de reajustes ("reset").

Baterias recarregáveis asseguram o fornecimento da energia elétrica necessária ao funcionamento do termostato e à iluminação da escala graduada (4). Os parafusos calantes (10), em número de 3 e em conjunto com dois níveis de bolha situados no painel do gravímetro, permitem efetuar o nivelamento do mesmo (ver 2.2.3).

### 3.3.2.- Leituras instrumentais pelo método de nulo ("Nullmethod", |<sup>78</sup>|)

O gravímetro é previamente nivelado no local de observação, que deve ser uma superfície horizontal e estável. Verifica-se se a indicação do termômetro do painel do instrumento, que fornece a temperatura interna do mesmo, corresponde à temperatura de operação do instrumento, dada no manual. Destrava-se o sistema elástico (preso durante o transporte do equipamento) e coloca-se, agindo sobre o botão micrométrico, o fiel na posição da escala graduada chamada de linha de leitura. Tal posição é pré-definida e controlada periodicamente, pois pode variar com o tempo, devido à acomodação dos diversos componentes do sistema, choques, etc. Por exemplo, se ja 2,4 unidades da escala a linha de leitura para um determinado gravímetro; o fiel é deslocado de tal maneira que seu lado esquerdo tangencie a graduação 2,4. A figura 3.3.2.-1 mostra o que pode

ser observado no campo da ocular do microscópio, estando o fiel na posição de leitura.

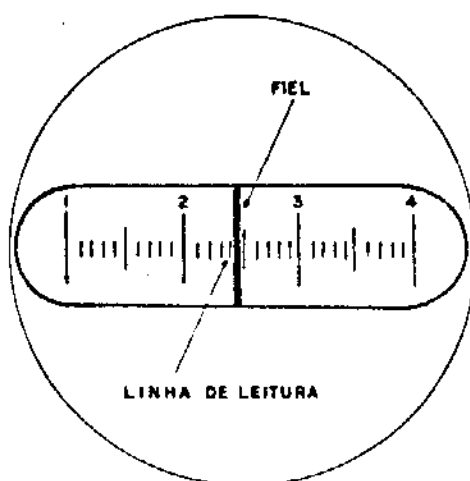


FIG. 3.3.2.-1

A leitura é feita através do visor do contador digital, cujos 4 primeiros dígitos expressam as unidades instrumentais (o 5º representa os décimos de unidade e vem repetido no botão micrométrico), e do botão, no qual os dígitos fornecem os décimos e as graduações menores, os centésimos das unidades instrumentais. A marca de referência, fixa ao painel, indica a leitura do botão micrométrico, podendo-se ainda estimar os milésimos de unidade. Como exemplo, veja-se a fig. 3.3.2.-2.

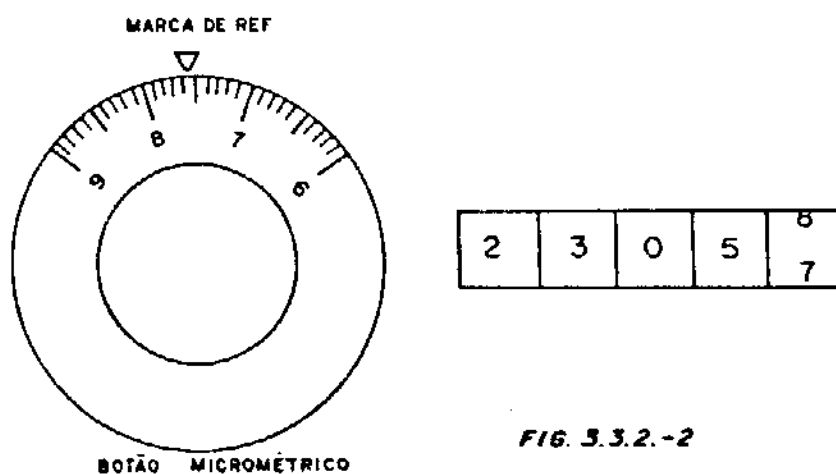


FIG. 3.3.2.-2

Nesse caso, a leitura é:

$$r = 2305,755 \text{ unidades instrumentais}$$

A unidade instrumental equivale, aproximadamente, a 1 mgal. Apresentamos, a seguir, a conversão dessa leitura em mgal. A tabela 3.3.2.-1 mostra um extrato da função de calibração do gravímetro G-372 |<sup>79</sup>|:

LEITURA INSTRUMENTAL	VALOR EM mgal	FATOR DE INTERPOLAÇÃO
2100	2243,35	1,067 80
2200	2350,13	1,067 82
2300	2456,91	1,067 85
2400	2563,70	1,067 88
2500	2670,49	1,067 91

TABELA 3.3.2.-1

A interpolação para a leitura  $r$  fornece a leitura instrumental bruta expressa em mgal:

$$z' = 2463,055 \text{ mgal}$$

#### 3.4.- Operações de campo

A sequência abaixo descreve, de modo geral, os procedimentos adotados pelo CPGCG/UFPA por ocasião dos levantamentos empregando gravímetros LaCoste & Romberg:

- a) nas localidades previamente selecionadas, escolhem-se os locais onde serão instalados os pontos fundamental e excêntrico,



conforme os critérios usuais, evitando-se lugares excessivamente movimentados, difíceis de serem localizados ou de reconhecimento confuso em ocupações futuras;

- b) é feito um esboço de situação, em planta baixa, indicando precisamente o local onde são efetuadas as leituras. Pode-se aí incluir: a orientação (bússola), algumas medidas a trena, nome das vias de acesso, etc;
- c) em cada gravímetro, faz-se um conjunto de quatro leituras (série), de modo que o intervalo de tempo entre a primeira e a última seja inferior a 2 minutos (devido à variação da atração luni-solar que, nesse intervalo, não ultrapassa 1 a 2  $\mu$ gal). Entre a 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> leituras, registra-se a hora da observação com um relógio previamente ajustado de acordo com a hora legal. Como regra usual <sup>[80]</sup>, rejeita-se e refaz-se a série quando a diferença entre a maior e menor leituras for superior a 0,015 unidades instrumentais. Anota-se a temperatura ambiente, bem como a pressão atmosférica: essas últimas observações irão servir à determinação dos coeficientes térmico e barométrico para cada gravímetro, com o ajustamento de um grande número de leituras e o emprego, para tanto, de um modelo matemático adequado;
- d) fotografa-se um dos gravímetros instalado no ponto: de uma distância curta (2 a 3m), indicando o local exato das leituras, e com afastamento maior (de acordo com as dimensões da estrutura que abriga a estação), para que se possa situar o ponto no prédio ou monumento escolhido, cujo reconhecimento é assim facilitado em ocupações futuras. Essas fotografias, além do esboço (item b) e de outras informações (descrição pormenorizada da estação, nome da estação inicial do circuito correspondente, coordenadas

geográficas, nome do operador, etc.), irão constituir a folha de identificação do ponto;

- e) se o circuito compreender um ou mais pernoites, ou mesmo interrupções que ultrapassem 1 hora, os gravímetros são instalados num piso estável qualquer e são feitas leituras, no início e término do período de repouso, e sem que os gravímetros sejam deslocados: obtém-se dessa forma as leituras  $t_A''$ ,  $t_B''$  usadas no cálculo da deriva estática (2.2.4.1.1). O local (ou locais) de parada deve ser tal que permita a sua localização aproximada no mapa (coordenadas geográficas para o cálculo da correção de maré);
- f) o tempo de utilização das baterias, sem recarga, é variável (com temperaturas ambientes baixas, o consumo devido ao termostato, mais freqüentemente solicitado, é maior). Julgamos conveniente interrupções no circuito após cada jornada de, no máximo, 15 a 18 horas; a recarga das baterias pode, assim, ser feita durante o pernoite;
- g) caso ocorra a descarga imprevista e completa de uma bateria, procede-se como segue, a fim de evitar a inutilização das leituras do gravímetro correspondente no circuito: após a recarga e recuperação da temperatura operacional, retorna-se ao local onde havia sido feita a última observação e faz-se nova série de leituras. A diferença entre as leituras médias anterior e posterior, nesse mesmo local, poderá ser tratada no cálculo do circuito como se fosse "deriva estática", sendo somada algebricamente às próximas leituras;
- h) recomenda-se ligar os termostatos dos instrumentos no mínimo 48 horas antes do início de um circuito; verificou-se que essa

precaução melhorou sensivelmente os resultados dos levantamentos. O exame dos gráficos de deriva estática (ver Apêndice A) mostra, com efeito, que a curva é bastante irregular no período que sucede imediatamente à obtenção da temperatura operacional dos gravímetros (início da curva), tornando-se aproximadamente linear somente após um ou dois dias de funcionamento contínuo (estabilização térmica do sistema elástico);

- 1) pode ocorrer que, por ocasião das observações num ponto do circuito, os gravímetros apresentem uma instabilidade que torne impossíveis as leituras (oscilação contínua do fiel, significando que o equilíbrio estático do sistema não pode ser obtido): a causa pode ser um micro-sismo. Nesse caso, permanece-se no local até a cessação completa do fenômeno.

### 3.5.- Cálculo de circuitos de 1ª ordem (perfil duplo)

#### 3.5.1.- Processo clássico

O cálculo de um circuito consiste basicamente na aplicação das correções usuais (Capítulo Segundo) e na obtenção de valores preliminares para  $g$  nas estações que compõem o mesmo, podendo ser ilustrado por meio do esquema da figura 3.5.1.-1. O índice  $i$  se refere ao número de ordem das estações no circuito.

As etapas da seqüência abaixo resumem o cálculo:

- a) transformação das unidades instrumentais das leituras em unidades gravimétricas (mgal), através da função de calibração de cada gravímetro, tabelada nos respectivos manuais:

$$r_i \rightarrow l'_i$$

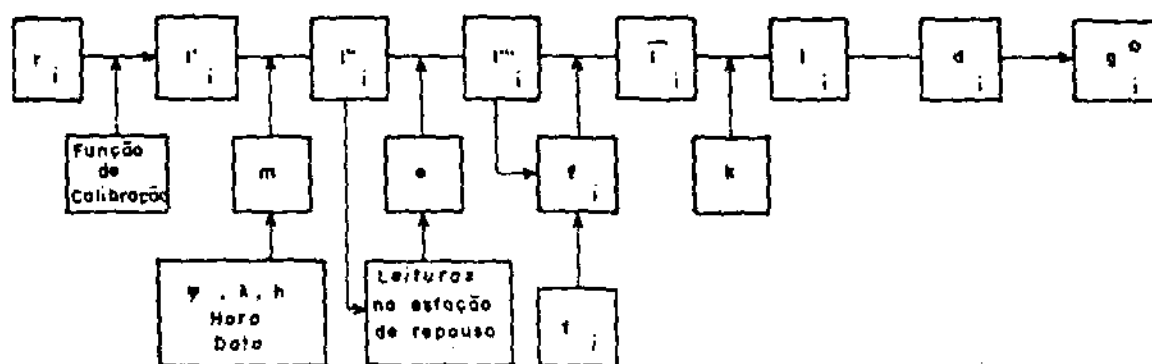


Fig. 3.5.1.-1

- b) cálculo das correções de maré ( $m_i$ ), deriva estática ( $e$ ) e deriva dinâmica ( $f_i$ ), obtendo-se então, para a  $i$ -ésima estação e para cada instrumento:

$$\bar{l}_1^I = (l_1' + m_i + e + f_i)^I \quad (3.5.1.-1)$$

$$\bar{l}_1^V = (l_1' + m_i + e + f_i)^V \quad (3.5.1.-2)$$

Os índices superiores I e V se referem aos termos obtidos nos percursos de ida e volta no circuito, respectivamente. Admite-se  $|^{s1}|$  que a diferença entre  $\bar{l}_1^I$  e  $\bar{l}_1^V$  não deva exceder 0,050 mgal, em módulo;

- c) cálculo das leituras médias (ida e volta), para cada estação e instrumento:

$$\bar{l}_1 = \frac{\bar{l}_1^I + \bar{l}_1^V}{2} \quad (3.5.1.-3)$$

- 13
- d) se dispusermos de coeficientes de escala para os gravímetros usados no circuito, calculá-los, de acordo com equação 2.2.5.1.-4 (considerando apenas o fator de 1ª ordem):

$$l_i = \kappa \bar{l}_i$$

$\kappa$  corresponde, na realidade, a uma correção à função de escala dada; por esse motivo, sua aplicação às leituras  $l'$  (ao invés das  $\bar{l}$ ) seria mais correta do ponto de vista conceitual. Porém como difere muito pouco da unidade (ver Capítulo Quarto, 4.4.9.) ele pode ser utilizado na presente etapa sem influir sensivelmente nos resultados;

- e) cálculo das diferenças de gravidade registradas pelos instrumentos (representados abaixo pelos índices p, q, ... z), o que pode ser feito entre cada estação e a estação seguinte:

$$d_{i-1}^p = (l_i - l_{i-1})^p$$

$$d_{i-1}^q = (l_i - l_{i-1})^q$$

⋮

$$d_{i-1}^z = (l_i - l_{i-1})^z$$

(3.5.1.-4)

para  $i=2, 3, \dots, n$ , sendo  $n$  o número de estações do circuito. Pode-se também considerar as diferenças de  $g$  entre cada ponto e a estação inicial:

$$\delta_{i-1}^p = (l_i - l_1)^p$$

$$\delta_{i-1}^g = (l_i - l_1)^g$$

$$\vdots$$

$$\delta_{i-1}^z = (l_i - l_1)^z \quad (3.5.1.-5)$$

f) cálculo das diferenças médias de  $g$ , sendo  $u$  o número de gravímetros:

$$d_{i-1} = \frac{d_{i-1}^p + d_{i-1}^g + \dots + d_{i-1}^z}{u} \quad (3.5.1.-6)$$

ou

$$\delta_{i-1} = \frac{\delta_{i-1}^p + \delta_{i-1}^g + \dots + \delta_{i-1}^z}{u} \quad (3.5.1.-7)$$

g) cálculo dos valores preliminares de  $g$  nas estações (a serem empregados em ajustamentos paramétricos ou combinados de uma rede que as contenha), sendo conhecido o valor na primeira:

$$g_2^o = g_1 + d_1$$

$$g_3^o = g_2^o + d_2$$

$$\vdots$$

$$g_n^o = g_{n-1}^o + d_{n-1} \quad (3.5.1.-8)$$

ou

$$g_2^o = g_1 + \delta_1$$

$$g_3^o = g_1 + \delta_2$$

$$\vdots$$

$$g_n^o = g_1 + \delta_{n-1} \quad (3.5.1.-9)$$

Evidentemente, se a estação de  $g$  conhecida não for a primeira, basta transformar os conjuntos de equações acima, de maneira adequada.

Os valores de  $g$  assim obtidos podem ser utilizados, a título de valores aproximados, no ajustamento das redes gravimétricas pelo método paramétrico (ver Capítulo Quarto). Apresentamos (Apendice B) um exemplo: o circuito Porto-Alegre-Curitibanos, no qual foram usados dois gravímetros, compreendendo nove estações ( $n=9$ ) e um local para obtenção da deriva estática (Curitibanos), onde a equipe pernitoitou e as baterias foram recarregadas. A 1ª estação pertence ao datum (IGSN/71-43801/B, na antiga agência de Correios e Telégrafos de Porto Alegre, à Praça XV de Novembro). Notar que a primeira folha do conjunto se destina exclusivamente ao cálculo da correção de maré. Os fatores de escala, supostos desconhecidos, foram considerados iguais à unidade ( $l_1 = \bar{l}_1$ ).

### 3.5.2.- Processo utilizando o cálculo matricial

Mostremos aqui o cálculo do circuito Porto Alegre-Curitibanos, citado acima, usando notações matriciais, de acordo com uma sugestão do Prof. Uhro A. Uotila. É uma aplicação do método paramétrico do ajustamento de observações: o coeficiente de deriva dinâmica é um dos parâmetros, e os demais são os valores preliminares de  $g$  nas estações ( $g^0$ ).

Partimos, nesse caso, das leituras que designamos por  $l^I$  (transformadas em mgal e corrigidas não só da maré e da deriva estática, mas também da escala, se for o caso). Introduziremos aqui as seguintes notações:

$$D_{1-1}^I = (l_1^{III} - l_{1-1}^{III})^I \quad (3.5.2.-1)$$

$$D_{1-1}^V = (l_1^{n1} - l_{1-1}^{n1})^V \quad (3.5.2.-2)$$

trataremos tais diferenças de leituras  $D$  como sendo as observações, embora sejam na realidade funções das mesmas (leituras instrumentais). Temos assim, para cada diferença de  $g$  e para cada gravímetro, um par de observações (uma no percurso de ida e outra no de volta).

O esquema da figura 3.5.2.-1 ilustra o cálculo, que pode ser estendido a qualquer número de instrumentos envolvidos no circuito. Para simplificação, ajustaremos aqui somente as observações do gravímetro G-372.

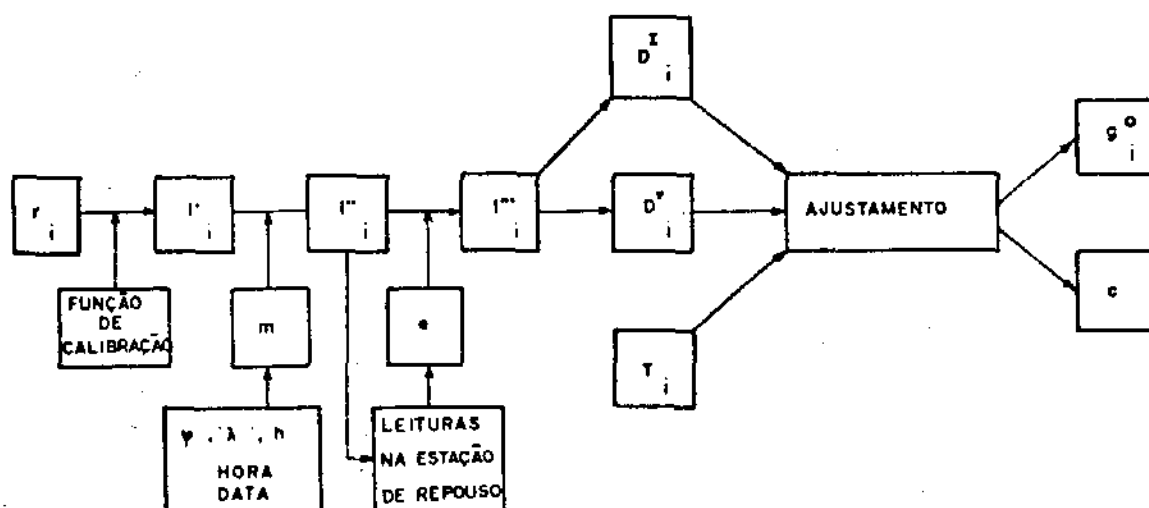


FIG. 3.5.2.-1

Admitamos que o fator de escala do instrumento G-372 seja igual a 1, como fizemos em 3.5.1. Na hipótese de possuímos um



valor bem determinado para  $\kappa$ , aplicá-lo-íamos, por exemplo, às leituras  $\ell_i''$ , antes de sua entrada no ajustamento, cujas etapas vêm registradas abaixo. As fórmulas utilizadas provêm de [82] e só iremos descrevê-las mais pormenorizadamente no Capítulo Quarto.

- a) modelo empregado. O modelo matemático é  $L_a = F(X_a)$ , ou seja, expressando os valores observados ajustados (diferenças de leituras) em função dos parâmetros ajustados no circuito (valores  $g^0$ , coeficiente de deriva dinâmica). A relação seguinte, entre leituras corrigidas e ajustadas, e valores de  $g^0$ , subsiste:

$$\ell_i - \ell_{i-1} = g_i^0 - g_{i-1}^0 \quad (3.5.2.-3)$$

Da equação 2.2.4.1.2.-9 e sendo  $\kappa=1$  (ou  $\bar{\ell}=1$ ), como foi dito, resulta:

$$(\ell_i'' + f_i) - (\ell_{i-1}'' + f_{i-1}) = g_i^0 - g_{i-1}^0 \quad (3.5.2.-4)$$

Substituindo na 3.5.2.-4 o valor de  $f$  dado pela 2.2.4.1.2.-7, vem:

$$(\ell_i'' - cT_i) - (\ell_{i-1}'' - cT_{i-1}) = g_i^0 - g_{i-1}^0 \quad (3.5.2.-5)$$

Isolando as leituras no primeiro membro da 3.5.2.-5, fica:

$$\ell_i'' - \ell_{i-1}'' = cT_i - cT_{i-1} + g_i^0 - g_{i-1}^0 \quad (3.5.2.-6)$$

Finalmente, levando-se em conta as equações 3.5.2.-1/2, obtemos:

$$D_{i-1} = c(T_i - T_{i-1}) + (g_i^0 - g_{i-1}^0) \quad (3.5.2.-7)$$

que é a equação correspondente a uma diferença de  $g$  qualquer, entre duas estações consecutivas do circuito. Os valores de  $T$  são dados pela equação 2.2.4.1.2.-8. Formamos assim o sistema abaixo:

$$D_1^I = c(T_2 - T_1)^I + (g_2^O - g_1^O)$$

$$D_1^V = c(T_2 - T_1)^V + (g_2^O - g_1^O)$$

$$D_2^I = c(T_3 - T_2)^I + (g_3^O - g_2^O)$$

$$D_2^V = c(T_3 - T_2)^V + (g_3^O - g_2^O)$$

$$D_3^I = c(T_4 - T_3)^I + (g_4^O - g_3^O)$$

$$D_3^V = c(T_4 - T_3)^V + (g_4^O - g_3^O)$$

$$D_4^I = c(T_5 - T_4)^I + (g_5^O - g_4^O)$$

$$D_4^V = c(T_5 - T_4)^V + (g_5^O - g_4^O)$$

$$D_5^I = c(T_6 - T_5)^I + (g_6^O - g_5^O)$$

$$D_5^V = c(T_6 - T_5)^V + (g_6^O - g_5^O)$$

$$D_6^I = c(T_7 - T_6)^I + (g_7^O - g_6^O)$$

$$D_6^V = c(T_7 - T_6)^V + (g_7^O - g_6^O)$$

$$D_7^I = c(T_8 - T_7)^I + (g_8^O - g_7^O)$$

$$D_7^V = c(T_8 - T_7)^V + (g_8^O - g_7^O)$$

$$D_8^I = c(T_9 - T_8)^I + (g_9^O - g_8^O)$$

$$D_8^V = c(T_9 - T_8)^V + (g_9^O - g_8^O)$$

(3.5.2.-8)

Temos portanto um sistema de dezesseis equações ( $r=2n-2$ ) e nove parâmetros ( $u=n$ ): valores de  $g$  em oito estações ( $g^0$ ) e um coeficiente de deriva dinâmica ( $c$ ). O valor de  $g_1$  é considerado fixo (datum), não figurando portanto como parâmetro;

- b) matriz dos pesos. Admitiremos que todas as leituras possuem a mesma precisão\*, tornando assim unitária a matriz dos pesos ( $P=I$ );
- c) cálculo do vetor  $L_b$  (valores observados não ajustados  $D$ ). A página 170 (exemplo do circuito Porto Alegre-Curitiba) contém as leituras  $l''$ , permitindo-nos escrever:

$${}_{16}L_b = \begin{bmatrix} D_1^I \\ D_1^V \\ D_2^I \\ D_2^V \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ D_8^I \\ D_8^V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -261,319 \\ -261,343 \\ 1,449 \\ 1,411 \\ -94,855 \\ -94,822 \\ 0,167 \\ 0,129 \\ -63,422 \\ -63,438 \\ 0,482 \\ 0,513 \\ -74,121 \\ -74,140 \\ 5,856 \\ 5,836 \end{bmatrix} \quad (3.5.2.-9).$$

- d) cálculo do vetor  $X_0$  (valores aproximados dos parâmetros). Adotamos o valor zero para o coeficiente de deriva ( $c_0=0$ ); quanto

\* e que sejam nulas as suas covariâncias.

aos valores de  $g$ , podemos obtê-los da seguinte maneira:

$$\bar{g}_i^0 = \bar{g}_{i-1}^0 + \frac{D_{i-1}^I + D_{i-1}^V}{2} \quad (3.5.2.-10)$$

A primeira estação tem o seguinte valor (item 4.3.3.):

$$g_1 = 979\,305,00 \text{ mgal}$$

Obtemos então:

$$\begin{matrix} X_0 \\ 9 \quad 1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} \bar{g}_2^0 \\ \bar{g}_3^0 \\ \bar{g}_4^0 \\ \bar{g}_5^0 \\ \bar{g}_6^0 \\ \bar{g}_7^0 \\ \bar{g}_8^0 \\ \bar{g}_9^0 \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 979\,043,669 \\ 979\,045,099 \\ 978\,950,261 \\ 978\,950,409 \\ 978\,886,979 \\ 978\,887,476 \\ 978\,813,346 \\ 978\,819,192 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.5.2.-11)$$

- e) cálculo do vetor  $L_0 = F(X_0)$ , ou seja, das funções dos parâmetros aproximados. O sistema 3.5.2.-8, substituindo-se-lhe os valores de  $X_0$  no segundo membro, nos fornece então:

$$\begin{array}{c}
 {}^{16}L_0 \\
 16 \ 1
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 D_{10}^I \\
 D_{10}^V \\
 D_{20}^I \\
 D_{20}^V \\
 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \\
 D_{80}^I \\
 D_{80}^V
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 -261,331 \\
 -261,331 \\
 1,430 \\
 1,430 \\
 -94,838 \\
 -94,838 \\
 0,148 \\
 0,148 \\
 -63,430 \\
 -63,430 \\
 0,497 \\
 0,497 \\
 -74,130 \\
 -74,130 \\
 5,846 \\
 5,846
 \end{array}
 \quad (3.5.2.-12)$$

f) cálculo do vetor  $L = L_0 - L_b$ :

$${}^{16}L_1 = \begin{array}{c}
 -0,012 \\
 0,012 \\
 -0,019 \\
 0,019 \\
 0,017 \\
 -0,016 \\
 -0,019 \\
 0,019 \\
 -0,008 \\
 0,008 \\
 0,015 \\
 -0,016 \\
 -0,009 \\
 0,010 \\
 -0,010 \\
 0,010
 \end{array}
 \quad (3.5.2.-13)$$



$\Sigma_{x_a} =$ 

0,000222	0,000222	0,000222	0,000222	0,000222	0,000222	0,000223	0,000223	-0,0000005
0,000222	0,000444	0,000445	0,000445	0,000446	0,000446	0,000447	0,000447	-0,0000026
0,000222	0,000445	0,000667	0,000668	0,000669	0,000670	0,000670	0,000670	-0,0000037
0,000222	0,000445	0,000668	0,000890	0,000892	0,000893	0,000894	0,000894	-0,0000053
0,000222	0,000446	0,000669	0,000892	0,001117	0,001119	0,001121	0,001121	-0,0000094
0,000222	0,000446	0,000670	0,000893	0,001119	0,001344	0,001346	0,001346	-0,0000119
0,000223	0,000447	0,000670	0,000894	0,001121	0,001346	0,001570	0,001571	-0,0000141
0,000223	0,000447	0,000670	0,000894	0,001121	0,001346	0,001571	0,001794	-0,0000147
-0,0000005	-0,0000026	-0,0000037	-0,0000053	-0,0000094	-0,0000119	-0,0000141	-0,0000147	0,0000123

Observemos que as correções aos valores aproximados de  $g$  não excedem 3  $\mu\text{gal}$ ; isto se deve provavelmente ao fato da deriva dinâmica, nesse circuito, ser bastante regular (ver gráfico correspondente no Apêndice A). Quanto à matriz variância-covariância, pode não ser muito significativa do ponto de vista estatístico, pois o número de observações é pequeno (duas para cada diferença de  $g$ );

- 1) cálculo dos parâmetros ajustados ( $X_a = X_0 + X$ ), que fornece os valores preliminares de  $g$  nas estações 2, 3, ..., 9 e o coeficiente de deriva dinâmica  $c$ . No quadro 3.5.2.-1, confrontamos tais valores com aqueles provenientes do método clássico, somente para o gravímetro G-372 (empregando as leituras  $\bar{g}$ , página 171, exemplo do Apêndice B). Os desvios-padrão são retirados da diagonal principal da matriz  $\Sigma_{X_a}$ .

ESTAÇÃO		$g^0$ (mgal)		DESVIOS-PADRÃO (MATRICIAL)
NOME	Nº	CLÁSSICO	MATRICIAL	
CAXIAS DO SUL (F)	2	979043,669	979043,669	0,015
CAXIAS DO SUL (E)	3	979045,098	979045,099	0,021
VACARIA (F)	4	978950,260	978950,260	0,026
VACARIA (E)	5	978950,407	978950,408	0,030
LAGES (F)	6	978886,976	978886,977	0,033
LAGES (E)	7	978887,472	978887,474	0,037
CURITIBANOS (E)	8	978813,340	978813,343	0,040
CURITIBANOS (F)	9	978819,187	978819,189	0,042
COEFICIENTE DE DERIVA DINÂMICA $c$ (mgal/h)		0,00441	0,00208	0,00351

QUADRO 3.5.2.-1



Podemos aqui fazer algumas observações:

- a) no método paramétrico, as leituras corrigidas & não são calculadas, o que poderia ser feito se aqui empregássemos o método combinado, sendo as observações as próprias leituras, e não as suas diferenças;
- b) o cálculo da matriz variância-covariância dos valores observados  $D$  ajustados ( $\Sigma_{L_a}$ ), omitido no presente caso, poderia ter como resultado importante u'a maneira de se estimar pesos para as diferenças de  $g$  no ajustamento de uma rede que as envolva;
- c) os desvios-padrão, como era previsível, aumentam à medida que os pontos se afastam do inicial. Poder-se-ia, examinando um grande número de circuitos calculados da maneira vista acima, estabelecer um critério para o número máximo de estações ocupadas num mesmo circuito, a fim de que as variâncias não ultrapassem uma faixa pré-determinada;
- d) os valores de  $c$ , calculados pelos dois processos, são bastante diferentes, o que não influi sensivelmente nos resultados, pelo menos no presente caso;
- e) conforme veremos no Capítulo Quarto, o coeficiente de escala  $\kappa$  do gravímetro G-372 não é unitário, o que já foi sugerido no Capítulo Segundo, item 2.2.5.1.1.-b, e o que altera apreciavelmente os valores de  $g$  constantes do quadro 3.5.2.-1.

CAPÍTULO QUARTO

AJUSTAMENTOS DE UMA SUB-REDE DE ESTAÇÕES  
DE PRIMEIRA ORDEM PELOS MÉTODOS DOS  
CORRELATOS E DOS PARÂMETROS

4.1.- Introdução

Iremos aqui realizar o ajustamento, pelo método dos mínimos quadrados, de uma sub-rede de estações implantadas pelo CPGCC/UFP na Região Sul do Brasil. Poderemos constatar a eficiência do método paramétrico que, apesar de envolver um número considerável de operações (inversão de grandes matrizes), permite a abordagem de uma questão delicada: a dos erros na função de calibração dos gravímetros empregados na sub-rede (ver 2.2.5). O ajustamento do mesmo conjunto de estações pelo método dos correlatos, que será feito com e sem as correções de escala, permitirá uma avaliação dos erros cometidos, quando não são considerados os fatores de calibração, na obtenção dos produtos finais (valores de  $g$  nas estações envolvidas).

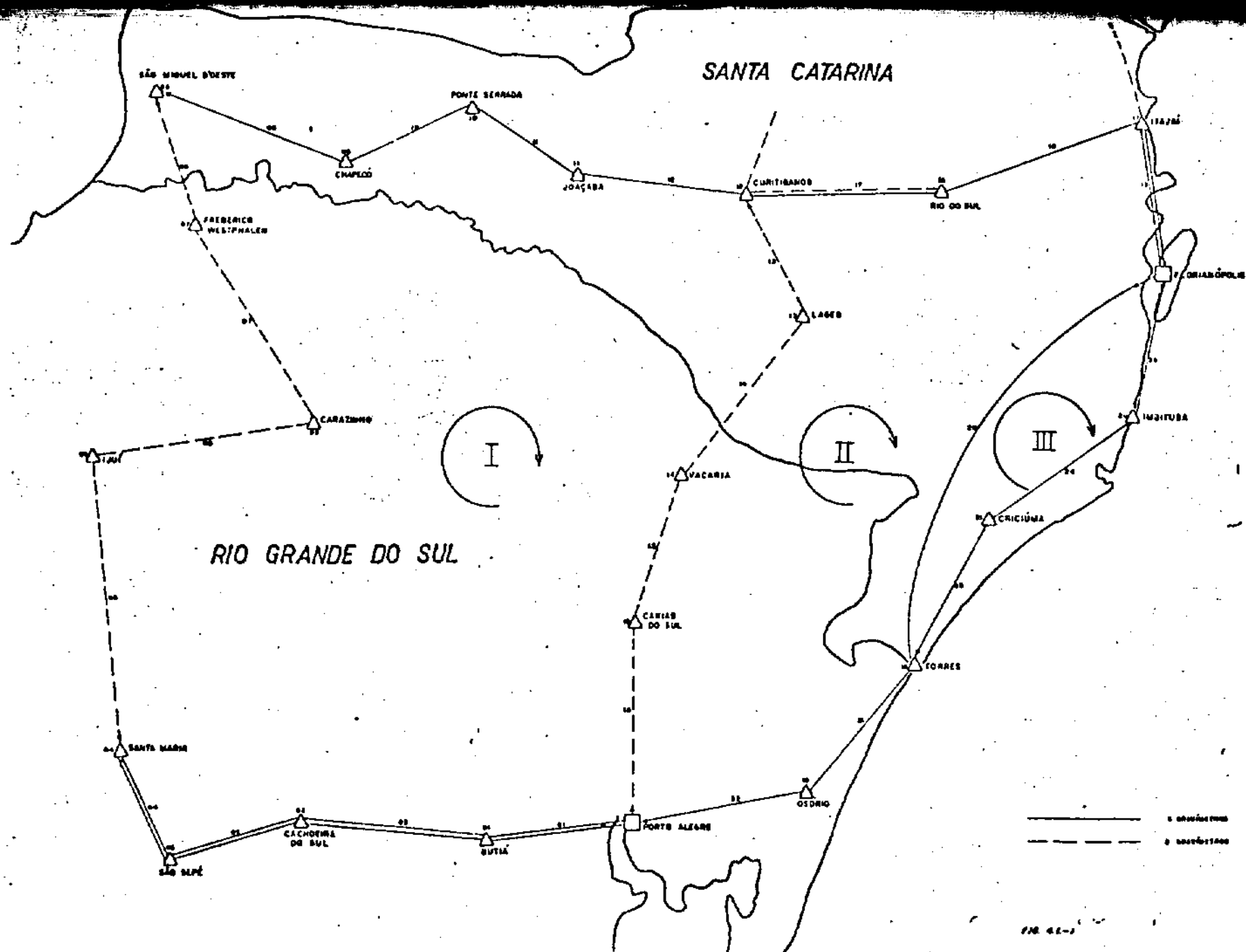
Podemos esquematizar as etapas que iremos seguir:

- a) ajustamento da sub-rede pelo método dos correlatos, assumindo que os fatores de escala de todos os gravímetros sejam unitários;
- b) ajustamento dos valores de  $g$  nas estações do mesmo grupo pelo método paramétrico, com a adoção de um modelo matemático simplificado incluindo os fatores de escala;
- c) reajustamento da sub-rede pelo método dos correlatos, corrigindo-se previamente as observações com os fatores de calibração determinados no item anterior.

Quanto ao material disponível, utilizaremos observações e fetuadas em 23 estações, assentadas mediante um certo número de circuitos realizados nos Estados de Santa Catarina e Rio Grande do Sul nos anos de 1976, 1977 e 1978. Os instrumentos empregados foram os gravímetros LaCoste & Romberg de números G-41, G-372 e G-454. Das estações ocupadas, duas fazem parte do sistema IGSN-71: a 40 178/A (Agência dos Correios, Praça XV de Novembro, Florianópolis) e a 43 801/B (antiga Agência dos Correios, Porto Alegre), possibilitando a avaliação de fatores de escala para os gravímetros. Os valores de  $g$  nesses pontos serão considerados como isentos de erros (fixos), embora apresentem  $|s^2|$  desvios-padrão de, respectivamente, 0,030 mgal e 0,029 mgal.

Os circuitos, com exceção de FLORIANÓPOLIS-PORTO ALEGRE, foram todos executados de acordo com os critérios usuais na implantação de estações gravimétricas de 1ª ordem (ver 3.2 e 3.4); foram selecionados de modo a formarem um conjunto de três malhas fechadas (fig. 4.1.-1). Incluiremos nos ajustamentos somente as estações fundamentais (F): como a ocupação das estações F e E em cada cidade é feita num pequeno intervalo de tempo, e sendo pequena a diferença de  $g$  entre ambas, o valor da aceleração da gravidade nas estações excêntricas pode ser simplesmente calculado através dos valores ajustados nas estações F correspondentes, somados algebricamente às diferenças de leituras corrigidas ( $l$ ) entre cada par de estações F e E.

Observemos que o circuito FLORIANÓPOLIS-PORTO ALEGRE foi executado como segue: as leituras instrumentais foram feitas no percurso Florianópolis-Porto Alegre (ida) e o trajeto inverso teve lugar somente após a execução de dois circuitos PORTO ALEGRE-SANTA MARIA; a diferença entre a última leitura na ida e a primeira na volta (na estação IGSN-71 nº 43 801/B) foi somada algebricamente às



leitura do percurso Porto Alegre-Florianópolis (volta), aplicando-se portanto uma correção semelhante à da deriva estática (ver item 2.2.4.1.1). A propósito, as diferenças de  $g$  registradas pelos três gravímetros entre as duas estações extremas do circuito (ambas do sistema IGSN-71) foram (empregando-se as leituras  $\bar{g}$ ):

G-41	192,615mgal
G-372	192,444mgal
G-454	192,425mgal

Ora, a diferença entre os valores ajustados nessas duas estações é igual a 192,61mgal; isso nos leva a supor que a função de escala do G-41 possa ser aproximadamente correta. Os outros dois instrumentos acusaram valores sensivelmente inferiores. Essa diferença de comportamento entre os gravímetros se mantém, de maneira aproximadamente linear, em quase todas as observações conduzidas na sub-rede objeto de nossa análise (ver 4.4).

#### 4.2.- Circuitos e observações

##### 4.2.1.- Circuitos

FLORIANÓPOLIS-TORRES	maio 1977	gravímetros	G-41, 372, 454
FLORIANÓPOLIS-S.MIGUEL D'OESTE	maio 1977	"	G-41, 372, 454
FLORIANÓPOLIS-PORTO ALEGRE	jul. 1977	"	G-41, 372, 454
PORTO ALEGRE-STA. MARIA (I)	jul. 1977	"	G-41, 372, 454
PORTO ALEGRE-STA. MARIA (II)	jul. 1977	"	G-41, 372, 454
STA. MARIA-S.MIGUEL D'OESTE	fev. 1978	"	G-372, 454
PORTO ALEGRE-CURITIBANOS	fev. 1978	"	G-372, 454

Utilizaremos ainda observações adicionais, feitas nos trechos Rio do Sul-Curitibanos e Itajaí-Florianópolis, e que fazem parte dos seguintes circuitos:

CURITIBA-RIO DO SUL	jul. 1976	gravímetros G-41,372
CURITIBA-FLORIANÓPOLIS	ago. 1977	" G-41,372,454

#### 4.2.2.- Observações (leituras)

As listas de observações  $l$  (leituras expressas em mgal, corrigidas da atração gravitacional luni-solar e das derivas instrumentais estática e dinâmica conforme o procedimento clássico, visto em 3.5.1), adotando-se  $\kappa=1$  para os três gravímetros, encontram-se no Apêndice C.

A numeração das estações fundamentais em cada cidade (fig. 4.1.-1) segue a formação das equações de condição no método dos correlatos, a partir da estação IGSN-71 nº 43 801/B (Porto Alegre).

#### 4.3.- Ajustamento da sub-rede pelo método dos correlatos

##### 4.3.1.- Formulário

As fórmulas abaixo, em notação matricial, provêm de  $|\delta^u|$ :

$$\text{MODELO MATEMÁTICO:} \quad F(L_a) = 0 \quad (4.3.1.-1)$$

(EQUAÇÕES DE CONDIÇÃO)

$L_a$ : valores observados ajustados

MODELO LINEARIZADO:  $BV + W = 0$  (4.3.1.-2)

(EQUAÇÕES DE CONDIÇÃO TRANSFORMADAS)

$$r_n^B = \frac{\partial F}{\partial L_a} \Big|_{L_b} \quad (4.3.1.-3)$$

$v_1^n$ : vetor das correções aos valores observados (resíduos)

$r_1^W = F(L_b)$ : erros de fechamento

$r$ : número de equações de condição

$n$ : número de observações

MATRIZ DOS PESOS:  $n^P_n = \sigma_o^2 \sum_{L_b}^{-1}$  (4.3.1.-4)

$\sigma_o^2$ : variância da unidade de peso

$\sum_{L_b}$ : matriz variância-covariância dos valores observados

EQUAÇÕES NORMAIS:  $MK + W = 0$  ou  $K = -M^{-1}W$  (4.3.1.-5)

$r_1^K$ : vetor dos correlatos

$$r_r^M = B P^{-1} B^T \quad (4.3.1.-6)$$

CORREÇÕES AOS VALORES

OBSERVADOS:

$$v_1^n = P^{-1} B^T K \quad (4.3.1.-7)$$

VALORES OBSERVADOS

AJUSTADOS:

$$L_{a1} = L_b + v \quad (4.3.1.-8)$$



VARIÂNCIA DA UNIDADE  
DE PESO A POSTERIORI\* :

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{-K^T W}{r} \quad (4.3.1.-9)$$

MATRIZ VARIÂNCIA-  
COVARIÂNCIA DOS  
VALORES AJUSTADOS:

$$\sum_{n \ a \ n} L_a = \hat{\sigma}_0^2 P^{-1} (I - B^T M^{-1} B P^{-1}) \quad (4.3.1.-10)$$

$n I_n$ : matriz identidade

#### 4.3.2.- Valores observados ( $L_b$ )

Usaremos, a título de valores observados, as diferenças de gravidade entre uma estação e a estação seguinte, dadas pelas diferenças de leituras corrigidas entre essas estações, como foi visto em 3.5.1, item e, equação 3.5.1.-4:

$$d = l_{\text{POSTERIOR}} - l_{\text{ANTERIOR}}$$

calculando-se a média aritmética dos valores registrados pelos gravímetros (equação 3.5.1.-6); tal média será representada pelo símbolo  $d_b$  (diferença observada de  $g$ ). A numeração das estações e das diferenças de  $g$  segue arbitrariamente o sentido horário nas malhas I, II e III da sub-rede, conforme indicado pelos arcos de circunferência orientados (fig. 4.1.-1).

O quadro 4.3.2.-1 apresenta uma lista dos valores de  $d$  e de  $d_b$ , obtidos através das listas de leituras  $l$  que constam do Apêndice C. As colunas encimadas com os algarismos 1 e 2 contêm os valores de  $d$  obtidos na 1ª e 2ª ocupação, quando houve repetição de circuitos ou, simplesmente, de trechos de circuitos.

\* ou fator de variância

Nº	d (mgal)						MÉDIAS
	G-41		G-372		G-454		d <sub>b</sub> (mgal)
	1	2	1	2	1	2	
01	-7,163	-7,149	-7,143	-7,139	-7,135	-7,143	-7,145
02	7,600	7,585	7,609	7,569	7,575	7,568	7,584
03	-2,005	-1,990	-2,032	-2,013	-2,028	-2,004	-2,012
04	-65,204	-65,214	-65,142	-65,128	-65,146	-65,123	-65,159
05			-129,985		-129,891		-129,938
06			-66,694		-66,744		-66,719
07			-82,299		-82,283		-82,291
08			-94,465		-94,493		-94,479
09	41,406		41,434		41,401		41,414
10	-74,642		-74,585		-74,542		-74,590
11	90,662		90,577		90,528		90,589
12	-103,072		-102,966		-102,946		-102,994
13			67,789		67,798		67,794
14			63,284		63,303		63,293
15			93,409		93,377		93,393
16			261,332		261,309		261,320
17	162,722	162,729	162,542	162,557		162,572	162,624
18	68,228		68,188		68,140		68,185
19	62,607	62,612	62,573	62,598	62,580	62,558	62,588
20	107,516		107,423		107,398		107,446
21	55,647		55,628		55,631		55,635
22	29,452		29,394		29,397		29,414
23	51,416		51,338		51,366		51,373
24	-17,937		-17,910		-17,889		-17,912
25	74,018		73,949		73,941		73,969

4.3.3.- Equações de condição

Sendo, no nosso caso:

$n = 25$  observações

$u = 21$  valores de  $g$  a determinar

temos um número de equações de condição dado por:

$$r = n - u$$

$$r = 4$$

Os símbolos  $d_a$  representando os valores observados (diferenças de  $g$ ) ajustados, as equações de condição serão, em forma compacta:

$$\sum_{i=1}^{16} d_{a_i} = 0 \quad (4.3.3.-1)$$

$$-\sum_{i=13}^{16} d_{a_i} + \sum_{j=17}^{22} d_{a_j} = 0 \quad (4.3.3.-2)$$

$$-d_{a_{20}} + \sum_{i=23}^{25} d_{a_i} = 0 \quad (4.3.3.-3)$$

$$-\sum_{i=13}^{16} d_{a_i} + \sum_{j=17}^{19} d_{a_j} - (g_F - g_p) = 0 \quad (4.3.3.-4)$$

As três primeiras expressam a anulação da soma das diferenças de  $g$  nas malhas I, II, III; a 4ª vincula a sub-rede às estações IGSN-71 incluídas no ajustamento, sendo  $|^{\#5}|$ :

PORTO ALEGRE - IGSN-71 nº 43801/B:  $g_p = 979\,305,00\text{mgal}$   
 FLORIANÓPOLIS - IGSN-71 nº 40178/A:  $g_F = 979\,112,39\text{mgal}$

Essa última equação foi selecionada, arbitrariamente, correspondendo ao percurso Porto Alegre-Caxias do Sul-Vacaria-Lages-Curitibana-Rio do Sul-Itajaí-Florianópolis.

#### 4.3.4.- Equações de condição transformadas

Sendo:

$d_b$ : valor (diferença de gravidade) observado

$v$ : correção ao valor observado

a expressão do p-ésimo valor observado ajustado será:

$$\bar{d}_{a_p} = d_{b_p} + v_p$$

e podemos, a partir das equações 4.3.3.-1,2,3 e 4, escrever o sistema das equações de condição transformadas:

$$\sum_{i=1}^{16} (d_{b_i} + v_i) = 0 \quad (4.3.4.-1)$$

$$- \sum_{i=13}^{16} (d_{b_i} + v_i) + \sum_{j=17}^{22} (d_{b_j} + v_j) = 0 \quad (4.3.4.-2)$$

$$- (d_{b_{20}} + v_{20}) + \sum_{i=23}^{25} (d_{b_i} + v_i) = 0 \quad (4.3.4.-3)$$

$$- \sum_{i=13}^{16} (d_{b_i} + v_i) + \sum_{j=17}^{19} (d_{b_j} + v_j) - (g_F - g_p) = 0 \quad (4.3.4.-4)$$

ou, separando os somatórios em cada uma das equações acima:

$$\sum_{i=1}^{16} d_{b_i} + \sum_{i=1}^{16} v_i = 0 \quad (4.3.4.-5)$$

$$-\sum_{i=13}^{16} d_{b_i} - \sum_{i=13}^{16} v_i + \sum_{j=17}^{22} d_{b_j} + \sum_{j=17}^{22} v_j = 0 \quad (4.3.4.-6)$$

$$-d_{b_{20}} - v_{20} + \sum_{i=23}^{25} d_{b_i} + \sum_{i=23}^{25} v_i = 0 \quad (4.3.4.-7)$$

$$-\sum_{i=13}^{16} d_{b_i} - \sum_{i=13}^{16} v_i + \sum_{j=17}^{19} d_{b_j} + \sum_{j=17}^{19} v_j - (g_F - g_p) = 0 \quad (4.3.4.-8)$$

Os erros de fechamento correspondentes a cada equação transformada são dados pelas expressões abaixo (componentes do vetor W):

$$w_1 = \sum_{i=1}^{16} d_{b_i} \quad (4.3.4.-9)$$

$$w_2 = - \sum_{i=13}^{16} d_{b_i} + \sum_{j=17}^{22} d_{b_j} \quad (4.3.4.-10)$$

$$w_3 = -d_{b_{20}} + \sum_{i=23}^{25} d_{b_i} \quad (4.3.4.-11)$$

$$w_4 = - \sum_{i=13}^{16} d_{b_i} + \sum_{j=17}^{19} d_{b_j} - (g_F - g_p) \quad (4.3.4.-12)$$

e, substituindo seus valores nas equações 4.3.4.-5,6,7 e 8, temos, finalmente, o conjunto das equações de condição transformadas (note-se que o modelo é linear) sob o aspecto  $BV + W = 0$ :



$$4W_1 = \begin{vmatrix} 0,060 \\ 0,092 \\ -0,016 \\ 0,207 \end{vmatrix} \text{ mgal} \quad (4.3.6.-1)$$

#### 4.3.7.- Matriz P

O número das observações que resultam no cálculo dos valores médios de diferenças da gravidade  $d_b$  (quadro 4.3.2.-1) é pequeno: varia entre 4 e 12 (pois os valores de  $d$ , apresentados no quadro 4.3.2.-1, representam as médias entre os valores nos percursos de ida e de volta para cada trecho da sub-rede); uma estimativa da variância da média  $d_b$ , em tais circunstâncias, pode não ser estatisticamente aceitável, tendo-se em vista a formação da matriz dos pesos. Como resultado disso, não dispomos de u'a matriz variância-covariância dos valores observados  $d_b$ .

A matriz P, então, será obtida do seguinte modo:

- a)  $|^{gg}|$  admite que se possa tomar como peso, para uma dada diferença de  $g$ , o número de vezes que essa diferença foi medida: esse é o critério que adotaremos aqui. Em outras palavras, o peso de uma observação  $d_b$  será igual ao número de medidas que conduziu à estimativa dessa observação. Exemplo: uma diferença de  $g$ , observada em dois circuitos ida-e-volta e com três gravímetros, terá peso igual a  $2 \times 2 \times 3 = 12$  (quantidade adimensional). Os pesos das nossas observações vêm consignados no quadro 4.3.7.-1:

$d_b$	$p$	$d_b$	$p$	$d_b$	$p$	$d_b$	$p$	$d_b$	$p$
01	12	06	4	11	6	16	4	21	6
02	12	07	4	12	6	17	10	22	6
03	12	08	4	13	4	18	6	23	6
04	12	09	6	14	4	19	12	24	6
05	4	10	6	15	4	20	6	25	6

QUADRO 4.3.7.-1

- b) as covariâncias serão consideradas nulas, ou seja, admitiremos que as observações sejam independentes entre si. A matriz dos pesos será, assim, diagonal, simplificando a execução dos cálculos. Observe-se, entretanto, duas diferenças consecutivas da gravidade,  $d_i$  e  $d_{i+1}$ , num circuito qualquer (fig. 4.3.7.-1), cujos valores são obtidos da seguinte forma:

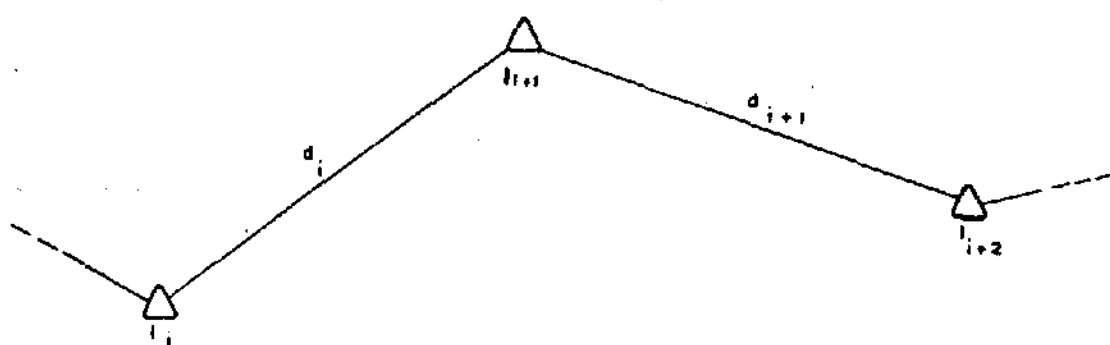


FIG. 4.3.7.-1

$$d_i = l_{i+1} - l_i$$

$$d_{i+1} = l_{i+2} - l_{i+1}$$

A leitura  $l_{i+1}$  participa do cálculo de  $d_i$  e  $d_{i+1}$ : essas duas







### 4.3.9.- Cálculo da matriz variância-covariância dos valores observados ajustados $\sum_{L_a}$

O cálculo foi executado com dois programas (Apêndice D): o primeiro (programa 2) efetua os produtos matriciais  $X = B^T M^{-1}$  e  $Y = B P^{-1}$  (dados de entrada: matrizes  $B$ ,  $M^{-1}$  e  $P^{-1}$ ), e o segundo (programa 3) calcula  $\sum_{L_a} = \hat{\sigma}_0^2 P^{-1}(I - XY)$ , tendo como dados de entrada  $\hat{\sigma}_0^2$  e as matrizes  $X$ ,  $Y$ .

Apresentamos, no quadro 4.3.9.-1\*, os seguintes elementos:

- variâncias dos valores observados ajustados, na diagonal principal
- covariância dos valores observados ajustados, acima da diagonal principal
- coeficientes de correlação entre os valores observados ajustados, abaixo da diagonal principal, dados por

$$\rho_{d_i d_j} = \frac{\sigma_{d_i d_j}}{\sigma_{d_i} \sigma_{d_j}}, \quad 1, j = 1, 2, 3, \dots, 25$$

A partir das variâncias (Tabela 4.3.9.-1), calculamos os desvios-padrão correspondentes a cada um dos valores observados ajustados ( $d_a$ ):

Nº	$\sigma$ (mgal)	Nº	$\sigma$ (mgal)	Nº	$\sigma$ (mgal)	Nº	$\sigma$ (mgal)	Nº	$\sigma$ (mgal)
01	0,041	06	0,068	11	0,057	16	0,065	21	0,047
02	0,041	07	0,068	12	0,057	17	0,043	22	0,047
03	0,041	08	0,068	13	0,065	18	0,054	23	0,050
04	0,041	09	0,057	14	0,065	19	0,040	24	0,050
05	0,068	10	0,057	15	0,065	20	0,043	25	0,050

TABELA 4.3.9.-1



ESTAÇÃO			g <sub>a</sub> (mgal)	ESTAÇÃO			g <sub>a</sub> (mgal)
Nº	NOME			Nº	NOME		
01	BUTIÃ	F	979297,847	12	CURITIBANOS	F	978819,070
02	CACHOEIRA DO SUL	F	305,423	13	LAGES	F	886,896
03	SÃO SEPE	F	303,403	14	VACARIA	F	950,221
04	SANTA MARIA	F	238,236	15	CAXIAS DO SUL	F	979043,646
05	IJUÍ	F	108,275	16	RIO DO SUL	F	978981,674
06	CARAZINHO	F	041,532	17	ITAJAÍ	F	979049,822
07	FR. WESTPHALEN	F	978959,217	18	TORRES	F	219,865
08	S.MIGUEL D'OESTE	F	864,714	19	OSÓRIO	F	275,543
09	CHAPECÓ	F	906,112	20	IMBITUBA	F	163,778
10	PONTE SERRADA	F	831,506	21	CRICIÚMA	F	145,881
11	JOAÇABA	F	922,079				

QUADRO 4.3.9.-2

4.3.10.- Valores ajustados da gravidade nas estações na sub-rede

Os valores do quadro 4.3.9.-2 foram obtidos a partir do valor de  $g$  na estação IGSN-71 nº 43 801/B (ver 4.3.3), conforme o esquema:

$$g_1^a = g_p + d_{a_1}$$

$$g_2^a = g_1^a + d_{a_2}$$

$$\vdots$$

$$g_{21}^a = g_{20}^a + d_{a_{24}}$$

e segundo a numeração e orientação da figura 4.1.-1.

#### 4.3.11.- Uma estimativa da qualidade das observações não ajustadas

No presente ajustamento, não houve estimativa a-priori do fator de variância (ou variância da unidade de peso). No entanto, podemos estabelecer um intervalo de confiança para o mesmo. A expressão  $|^{\sigma^2}|$ :

$$P \left| \frac{r \cdot \hat{\sigma}_o^2}{2} \leq \sigma_o^2 \leq \frac{r \cdot \hat{\sigma}_o^2}{2} \right| = 0,950 \quad (4.3.11.-1)$$

nos fornece o intervalo de 95% de confiança para o fator de variância, sendo:

$P$ : probabilidade de que o intervalo aleatório contenha o parâmetro  $\sigma_o^2$

$r$ : número de graus de liberdade do sistema

$\alpha$ : nível de significância ( $\alpha = 1-P = 0,050$ )

o nosso caso:

$$r = 4 \text{ (número de equações de condição)}$$

$$\alpha = 0,050$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = 0,020\,791\,232 \text{mgal}^2$$

Uma tabela da distribuição qui-quadrado  $|\chi^2|$  nos fornece (4 graus de liberdade):

$$\chi_{4,0.025}^2 = 11,14$$

$$\chi_{4,0.975}^2 = 0,48$$

e, denotando por  $L_1$  e  $L_2$  os limites inferior e superior do intervalo dado na 4.3.11.-1, temos:

$$L_1 = \frac{r \cdot \hat{\sigma}_0^2}{\chi_{4,0.025}^2} \therefore L_1 = 0,007\,465 \text{mgal}^2$$

$$L_2 = \frac{r \cdot \hat{\sigma}_0^2}{\chi_{4,0.975}^2} \therefore L_2 = 0,173\,260 \text{mgal}^2$$

Reescrevemos, então, a equação 4.3.11.-1 com os valores acima:

$$P \left| 0,007\,465 \text{mgal}^2 \leq \sigma_0^2 \leq 0,173\,258 \text{mgal}^2 \right| = 0,950$$

Com os limites desse intervalo, podemos estabelecer intervalos prováveis para as variâncias das observações não-ajustadas ( $d_b$ ). Sendo o peso de uma  $i$ -ésima observação dada por  $|\chi^2|^*$ :

\* desde que as covariâncias sejam nulas.

$$p_i = \frac{\sigma_o^2}{\sigma_{b_i}^2} \quad (4.3.11.-2)$$

onde  $\sigma_{b_i}^2$  é a variância da observação, e como os pesos, no nosso caso, foram arbitrariamente considerados iguais ao número de vezes que cada diferença de  $g$  foi medida, os limites dos intervalos para  $\sigma_{b_i}^2$  serão estimados simplesmente através de:

$$\sigma_{b_i}^2 = \frac{\sigma_o^2}{p_i} \quad (4.3.11.-3)$$

O número de observações para uma diferença de  $g$  varia entre 4 e 12 (Quadro 4.3.2.-1), o que nos fornece, substituindo  $\sigma_o^2$  na equação 4.3.11.-3 pelos valores  $L_1$  e  $L_2$ :

$$a) \text{ para } p_i = 4: \quad 0,001\,866\text{mgal}^2 \leq \sigma_{b_i}^2 \leq 0,043\,315\text{mgal}^2$$

$$\text{ou:} \quad 0,043\text{mgal} \leq \sigma_{b_i} \leq 0,208\text{mgal}$$

$$b) \text{ para } p_i = 12: \quad 0,000\,622\text{mgal}^2 \leq \sigma_{b_i}^2 \leq 0,014\,348\text{mgal}^2$$

$$\text{ou:} \quad 0,025\text{mgal} \leq \sigma_{b_i} \leq 0,120\text{mgal}$$

Notemos que, para uma observação efetuada duas vezes ( $p_i=2$ ), teríamos:

$$0,003\,732\text{mgal}^2 \leq \sigma_{b_i}^2 \leq 0,086\,629\text{mgal}^2$$

$$0,061\text{mgal} \leq \sigma_{b_i} \leq 0,294\text{mgal}$$



### 3.12.- Comentários

- a) O exame dos resíduos ou correções aos valores observados (vetor  $V$ , 4.3.8.-1) mostra que todos eles têm a ordem de grandeza da precisão nominal das leituras instrumentais diretas (ou seja, 0,01mgal): os maiores se referem a  $d_{21}$  e  $d_{22}$  e valem ambos 0,043mgal;
- b) a matriz variância-covariância das observações ajustadas acusa desvios-padrão certamente excessivos (ver Tabela 4.3.9.-1), de modo especial para  $d_5, d_6, d_7, d_8$  (0,068mgal),  $d_{13}, d_{14}, d_{15}, d_{16}$  ( $\pm 0,065$ mgal),  $d_9, d_{10}, d_{11}, d_{12}$  (0,057mgal);
- c) o quadro 4.3.9.-1 revela a presença de correlações bastante fortes, mormente:  $d_{21}$  com  $d_{22}$  ( $\rho = 0,57$ ),  $d_{20}$  com  $d_{21}$  e  $d_{22}$  ( $\rho = 0,46$ ),  $d_{23}$  com  $d_{24}$  e  $d_{25}$  ( $\rho = 0,38$ ),  $d_{20}$  com  $d_{23}, d_{24}$  e  $d_{25}$  ( $\rho = -0,29$ ),  $d_{13}$  com  $d_{14}, d_{15}$  e  $d_{16}$  ( $\rho = 0,24$ ),  $d_{14}$  com  $d_{15}$  e  $d_{16}$  ( $\rho = 0,24$ ) e  $d_{15}$  com  $d_{16}$  ( $\rho = 0,24$ );
- d) finalmente, podemos admitir, com base nos resultados do item 4.3.11, que o desvio-padrão da observação efetuada por qualquer um dos gravímetros LaCoste & Romberg usados na sub-rede, e conduzida duas vezes, tenha um valor compreendido entre 0,061 mgal e 0,294mgal. Tal valor é surpreendentemente grande, de vez que os gravímetros permitem a leitura direta de 0,01mgal; além disso, as séries (conjuntos de quatro leituras) conduzidas com qualquer um dos instrumentos apresentam médias com desvios-padrão sempre inferiores a 0,005mgal.

Pode-se inferir, então (itens b e d acima), a presença no nosso ajustamento dos seguintes fatores responsáveis pela qualidade sofrível do mesmo:

- a) erros sistemáticos, tais como os da função de escala dos gravímetros, das deficiências nas correções da deriva dinâmica e da maré, daqueles provenientes de desajustes acidentais dos níveis dos gravímetros durante a execução dos circuitos, de influências térmicas e barométricas ambientais significativas, de leituras incorretas, etc. (ver Capítulo Segundo);
- b) inadequação estatística do modelo matemático, causada pela aproximação que nos levou a considerar nulas as covariâncias das diferenças de gravidade observadas ( $d_p$ ), por ocasião da formação da matriz dos pesos ( $P$ ), ou então pelo próprio critério adotado na atribuição de pesos às observações.

Não hesitamos em atribuir aos erros das funções de escala dos instrumentos a causa majoritária dos resultados insatisfatórios do ajustamento (ver 4.4.2); com efeito, considerou-se  $\kappa=1$  para os três instrumentos, e o exemplo fornecido no item 2.2.5.1.1. já havia sugerido uma certa incompatibilidade das medidas executadas com os gravímetros G-41 e G-372 em relação à escala fornecida pelas estações IGSN-71 ocupadas \*. O ajustamento do item 4.4. será feito parcialmente com base nessa hipótese.

#### 4.4.- Ajustamento da sub-rede pelo método dos parâmetros

##### 4.4.1.- Formulário [90]

MODELO MATEMÁTICO:

$$L_a = F(X_a) \quad (4.4.1.-1)$$

(EQUAÇÕES DE OBSERVAÇÃO)

$L_a$ : valores observados ajustados

$X_a$ : parâmetros ajustados

MODELO LINEARIZADO

$$AX + L = V \quad (4.4.1.-2)$$

\* pelo CPGCG

$$n^A_u = \frac{\partial F}{\partial X_a} \bigg|_{X_0} \quad (4.4.1.-3)$$

$$u^X_1 = X_a - X_0 \quad (4.4.1.-4)$$

$$n^L_1 = L_0 - L_b \quad (4.4.1.-5)$$

$$n^{L_0}_1 = F(X_0) \quad (4.4.1.-6)$$

$X_0$ : valores aproximados dos parâmetros

$X$ : correções aos parâmetros, a determinar no ajustamento

$L_b$ : valores observados

$L_0$ : valores observados, calculados em função dos valores aproximados dos parâmetros

$V$ : resíduos

$n$ : número de observações

$u$ : número de parâmetros do modelo

MATRIZ DOS PESOS:

$$n^P_n = \sigma_0^2 \sum_{L_b}^{-1} \quad (4.4.1.-7)$$

$\sigma_0^2$ : variância da unidade de peso

$\sum_{L_b}$ : matriz variância-covariância dos valores observados

EQUAÇÕES NORMAIS:

$$NX + U = 0 \quad \text{ou} \quad X = -N^{-1}U \quad (4.4.1.-8)$$

$$u^N_u = A^T P A \quad (4.4.1.-9)$$

$$u^U_1 = A^T P L \quad (4.4.1.-10)$$

$$\text{VARIÂNCIA DA UNIDADE DE PESO A POSTERIORI:} \quad \hat{\sigma}_o^2 = \frac{X^T U + L^T P L}{n - u} \quad (4.4.1.-11)$$

$$\text{MATRIZ VARIÂNCIA-COVARIÂNCIA DOS PARÂMETROS AJUSTADOS:} \quad \sum_u X_u^a = \hat{\sigma}_o^2 N^{-1} \quad (4.4.1.-12)$$

#### 4.4.2.- O modelo matemático

##### 4.4.2.1.- Hipóteses para a seleção do modelo

Do quadro 4.3.2.-1, retiramos as diferenças de  $g$  medidas na sub-rede e estabelecemos uma lista das medidas proporcionadas individualmente pelos gravímetros G-41, G-372 e G-454, calculando as médias quando houver observações repetidas (colunas 1,2). Associamos aos gravímetros os algarismos I, II e III, respectivamente, e calculamos as diferenças entre as observações correspondentes a cada trecho da sub-rede ( $d_i$ ,  $i=1, \dots, 25$ ), ou seja,  $d_i^I - d_i^{II}$ ,  $d_i^I - d_i^{III}$  e  $d_i^{II} - d_i^{III}$  (quadro 4.4.2.1.-1).

Nº (1)	DIFERENÇAS DE g MEDIDAS $d_b$ (mgal)			DIFERENÇAS ENTRE AS OBSERVAÇÕES (μgal)		
	G-41	G-372	G-454	$d_i^I - d_i^{II}$	$d_i^I - d_i^{III}$	$d_i^{II} - d_i^{III}$
	$d_i^I$	$d_i^{II}$	$d_i^{III}$			
01	-7,156	-7,141	-7,139	-15	-17	-2
02	7,592	7,589	7,572	3	20	17
03	-1,998	-2,022	-2,016	24	18	-6
04	-65,209	-65,134	-65,134	-75	-75	0
05		-129,985	-129,890			-95
06		-66,694	-66,744			50
07		-82,298	-82,283			-15
08		-94,465	-94,493			28
09	41,406	41,434	41,401	-28	5	33
10	-74,642	-74,585	-74,542	-57	-100	-43
11	90,662	90,576	90,523	86	134	48
12	-103,072	-102,966	-102,946	-106	-126	-20
13		67,789	67,798			-9
14		63,284	63,302			-18
15		93,409	93,377			32
16		261,332	261,308			24
17	162,725	162,549	162,572	176	153	-23
18	68,228	68,188	68,140	40	88	48
19	62,609	62,585	62,569	24	40	16
20	107,516	107,423	107,398	93	118	25
21	55,647	55,628	55,631	19	16	-3
22	29,452	29,394	29,396	58	56	-2
23	51,416	51,338	51,366	78	50	-28
24	-17,936	-17,910	-17,889	-26	-47	-21
25	74,018	73,948	73,941	70	77	7

QUADRO 4.4.2.1.-1

Em seguida, assinalamos as diferenças entre as medidas no gráfico 4.4.2.1.-1, adotando a seguinte convenção:

$$x: d_1^I - d_1^{II}$$

$$O: d_1^I - d_1^{III}$$

$$\blacksquare: d_1^{II} - d_1^{III}$$

O eixo das abscissas corresponde às diferenças de gravidade médias  $d_b$  (quadro 4.3.2.-1), o eixo das ordenadas referindo-se às diferenças entre as medidas registradas pelos gravímetros. A cada símbolo, no gráfico, vem associado o número do trecho correspondente da sub-rede (i).

Um exame superficial da disposição dos símbolos no gráfico 4.4.2.1.-1 nos conduz às seguintes observações:

- a) as cruces (x) parecem indicar uma tendência aproximadamente linear e ascendente, o que nos faz supor que os coeficientes de escala  $\kappa_I$  (G-41) e  $\kappa_{II}$  (G-372) sejam diferentes entre si ( $\kappa_I \neq \kappa_{II}$ ), de maneira sistemática;
- b) a mesma tendência pode ser notada na disposição dos círculos (O), acompanhando de perto as cruces, sugerindo, além de  $\kappa_I \neq \kappa_{III}$ , a possibilidade de  $\kappa_{II} = \kappa_{III}$ , sendo  $\kappa_{III}$  o coeficiente de escala do G-454;
- c) a distribuição dos quadrados (■), que não parece seguir, à simples vista, tendência ascendente ou descendente, confirma a eventualidade de  $\kappa_{II} = \kappa_{III}$ .

No item 4.3.12, já havíamos formulado a hipótese das funções de escala dos três gravímetros não serem compatíveis com a

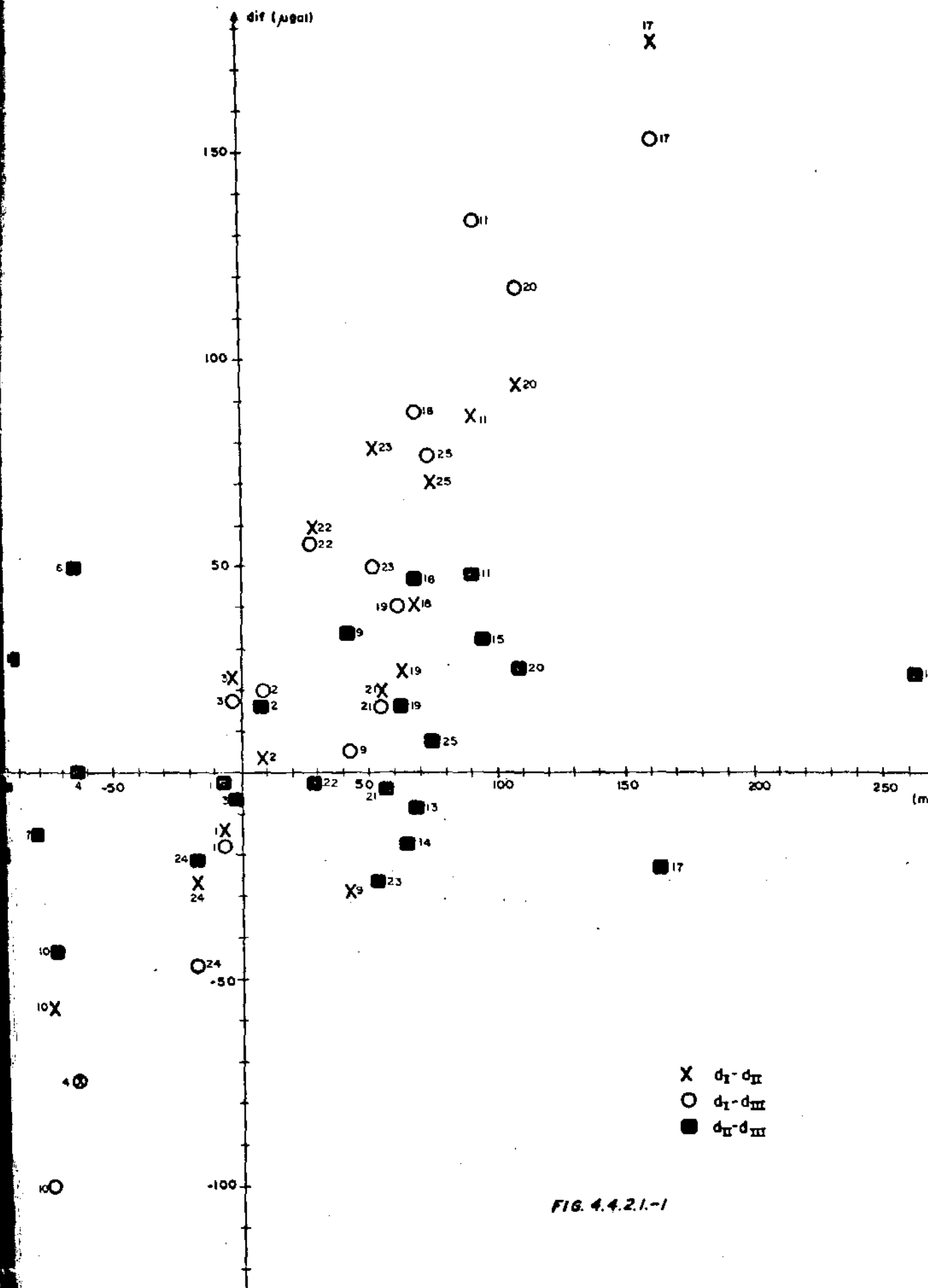


FIG. 4.4.2.1.-1

escala do datum IGSN-71 ( $\kappa_I \neq 1$ ,  $\kappa_{II} \neq 1$ ,  $\kappa_{III} \neq 1$ ). O gráfico, além disso, nos leva a supor que os coeficientes  $\kappa_I$ ,  $\kappa_{II}$  e  $\kappa_{III}$  sejam diferentes entre si (o que foi mostrado no exemplo 2.2.5.1.1, para G-41 e G-372): essas duas hipóteses facilitam e justificam a adoção do modelo matemático que utilizaremos no ajustamento pelo método dos parâmetros (inclusão de três parâmetros de escala).

#### 4.4.2.2.- Equações de observação

A equação 2.2.5.1.-3, admitindo variações lineares de escala (ou seja, empregando um coeficiente de escala de 1ª ordem apenas), pode ser reescrita com

$$d_i = \bar{l}_i - \bar{l}_{i-1}$$

considerando-se  $d_i$  como uma observação, tal como havíamos feito em 4.3.2, resultando:

$$g_i - g_{i-1} = \kappa d_i \quad (4.4.2.2.-1)$$

fazendo

$$k = \frac{1}{\kappa} \quad (4.4.2.2.-2)$$

podemos expressar uma observação em função dos parâmetros  $g_i$ ,  $g_{i-1}$  e  $k$ :

$$d_i = k(g_i - g_{i-1}) \quad (4.4.2.2.-3)$$

sendo que a não-consideração dos coeficientes de ordem superior à 1ª representa uma simplificação operacional do modelo.



O número de observações, igual ao número de equações 4.4.2.2.-3, pode ser retirado do Quadro 4.4.2.1.-1, sendo:

$$n = 67$$

Quanto ao número de parâmetros do modelo, é dado pela soma dos valores de  $g$  em 21 estações com os três coeficientes de escala (inversos) a determinar; então:

$$u = 24$$

O conjunto das equações de observação, sendo  $k_I$ ,  $k_{II}$  e  $k_{III}$  os inversos de  $\kappa_I$ ,  $\kappa_{II}$  e  $\kappa_{III}$  e os índices  $a$  indicando valores ajustados, será, seguindo a ordem indicada na figura 4.1.-1. (associaremos ao sistema o número 4.4.2.2.-4):

$$d_{a_1}^I = k_{a_I} (g_{a_1} - g_p)$$

$$d_{a_2}^{II} = k_{a_{II}} (g_{a_2} - g_{a_1})$$

$$d_{a_1}^{II} = k_{a_{II}} (g_{a_1} - g_p)$$

$$d_{a_2}^{III} = k_{a_{III}} (g_{a_2} - g_{a_1})$$

$$d_{a_1}^{III} = k_{a_{III}} (g_{a_1} - g_p)$$

$$d_{a_3}^I = k_{a_I} (g_{a_3} - g_{a_2})$$

$$d_{a_2}^I = k_{a_I} (g_{a_2} - g_{a_1})$$

$$d_{a_3}^{II} = k_{a_{II}} (g_{a_3} - g_{a_2})$$

$$d_{a_3}^{III} = k_{a_{III}} (g_{a_3} - g_{a_2})$$

$$d_{a_8}^{II} = k_{a_{II}} (g_{a_8} - g_{a_7})$$

$$d_{a_4}^I = k_{a_I} (g_{a_4} - g_{a_3})$$

$$d_{a_8}^{III} = k_{a_{III}} (g_{a_8} - g_{a_7})$$

$$d_{a_4}^{II} = k_{a_{II}} (g_{a_4} - g_{a_3})$$

$$d_{a_9}^I = k_{a_I} (g_{a_9} - g_{a_8})$$

$$d_{a_4}^{III} = k_{a_{III}} (g_{a_4} - g_{a_3})$$

$$d_{a_9}^{II} = k_{a_{II}} (g_{a_9} - g_{a_8})$$

$$d_{a_5}^{II} = k_{a_{II}} (g_{a_5} - g_{a_4})$$

$$d_{a_9}^{III} = k_{a_{III}} (g_{a_9} - g_{a_8})$$

$$d_{a_5}^{III} = k_{a_{III}} (g_{a_5} - g_{a_4})$$

$$d_{a_{10}}^I = k_{a_I} (g_{a_{10}} - g_{a_9})$$

$$d_{a_6}^{II} = k_{a_{II}} (g_{a_6} - g_{a_5})$$

$$d_{a_{10}}^{II} = k_{a_{II}} (g_{a_{10}} - g_{a_9})$$

$$d_{a_6}^{III} = k_{a_{III}} (g_{a_6} - g_{a_5})$$

$$d_{a_{10}}^{III} = k_{a_{III}} (g_{a_{10}} - g_{a_9})$$

$$d_{a_7}^{II} = k_{a_{II}} (g_{a_7} - g_{a_6})$$

$$d_{a_{11}}^I = k_{a_I} (g_{a_{11}} - g_{a_{10}})$$

$$d_{a_7}^{III} = k_{a_{III}} (g_{a_7} - g_{a_6})$$

$$d_{a_{11}}^{II} = k_{a_{II}} (g_{a_{11}} - g_{a_{10}})$$

$$d_{a_{11}}^{III} = k_{a_{III}} (g_{a_{11}} - g_{a_{10}})$$

$$d_{a_{16}}^{II} = k_{a_{II}} (g_p - g_{a_{15}})$$

$$d_{a_{12}}^I = k_{a_I} (g_{a_{12}} - g_{a_{11}})$$

$$d_{a_{16}}^{III} = k_{a_{III}} (g_p - g_{a_{15}})$$

$$d_{a_{12}}^{II} = k_{a_{II}} (g_{a_{12}} - g_{a_{11}})$$

$$d_{a_{17}}^I = k_{a_I} (g_{a_{16}} - g_{a_{12}})$$

$$d_{a_{12}}^{III} = k_{a_{III}} (g_{a_{12}} - g_{a_{11}})$$

$$d_{a_{17}}^{II} = k_{a_{II}} (g_{a_{16}} - g_{a_{12}})$$

$$d_{a_{13}}^{II} = k_{a_{II}} (g_{a_{13}} - g_{a_{12}})$$

$$d_{a_{17}}^{III} = k_{a_{III}} (g_{a_{16}} - g_{a_{12}})$$

$$d_{a_{13}}^{III} = k_{a_{III}} (g_{a_{13}} - g_{a_{12}})$$

$$d_{a_{18}}^I = k_{a_I} (g_{a_{17}} - g_{a_{16}})$$

$$d_{a_{14}}^{II} = k_{a_{II}} (g_{a_{14}} - g_{a_{13}})$$

$$d_{a_{18}}^{II} = k_{a_{II}} (g_{a_{17}} - g_{a_{16}})$$

$$d_{a_{14}}^{III} = k_{a_{III}} (g_{a_{14}} - g_{a_{13}})$$

$$d_{a_{18}}^{III} = k_{a_{III}} (g_{a_{17}} - g_{a_{16}})$$

$$d_{a_{15}}^{II} = k_{a_{II}} (g_{a_{15}} - g_{a_{14}})$$

$$d_{a_{19}}^I = k_{a_I} (g_F - g_{a_{17}})$$

$$d_{a_{15}}^{III} = k_{a_{III}} (g_{a_{15}} - g_{a_{14}})$$

$$d_{a_{19}}^{II} = k_{a_{II}} (g_F - g_{a_{17}})$$

$$d_{a_{19}}^{III} = k_{a_{III}} (g_F - g_{a_{17}})$$

$$d_{a_{23}}^I = k_{a_I} (g_{a_{20}} - g_F)$$

$$d_{a_{20}}^I = k_{a_I} (g_{a_{18}} - g_F)$$

$$d_{a_{23}}^{II} = k_{a_{II}} (g_{a_{20}} - g_F)$$

$$d_{a_{20}}^{II} = k_{a_{II}} (g_{a_{18}} - g_F)$$

$$d_{a_{23}}^{III} = k_{a_{III}} (g_{a_{20}} - g_F)$$

$$d_{a_{20}}^{III} = k_{a_{III}} (g_{a_{18}} - g_F)$$

$$d_{a_{24}}^I = k_{a_I} (g_{a_{20}} - g_{a_{21}})$$

$$d_{a_{21}}^I = k_{a_I} (g_{a_{19}} - g_{a_{18}})$$

$$d_{a_{24}}^{II} = k_{a_{II}} (g_{a_{20}} - g_{a_{21}})$$

$$d_{a_{21}}^{II} = k_{a_{II}} (g_{a_{19}} - g_{a_{18}})$$

$$d_{a_{24}}^{III} = k_{a_{III}} (g_{a_{20}} - g_{a_{21}})$$

$$d_{a_{21}}^{III} = k_{a_{III}} (g_{a_{19}} - g_{a_{18}})$$

$$d_{a_{25}}^I = k_{a_I} (g_{a_{18}} - g_{a_{21}})$$

$$d_{a_{22}}^I = k_{a_I} (g_P - g_{a_{19}})$$

$$d_{a_{25}}^{II} = k_{a_{II}} (g_{a_{18}} - g_{a_{21}})$$

$$d_{a_{22}}^{II} = k_{a_{II}} (g_P - g_{a_{19}})$$

$$d_{a_{25}}^{III} = k_{a_{III}} (g_{a_{18}} - g_{a_{21}})$$

$$d_{a_{22}}^{III} = k_{a_{III}} (g_P - g_{a_{19}})$$

4.4.3.- Vetor  $X_0$  (valores aproximados dos parâmetros)

Os valores aproximados de  $g$  nas estações foram calculados com os valores médios  $d_p$  (Quadro 4.3.2.-1); para os pontos 8, 12 e 18, foram usadas as médias dos valores de  $g$  obtidos através dos vários percursos. Quanto aos valores aproximados dos inversos dos coeficientes de escala, foram arbitrariamente iguais a unidade.

Nº	SIMB.	VALOR	Nº	SIMB.	VALOR
01	$g_1^0$	979297,854mgal	13	$g_{13}^0$	978886,993mgal
02	$g_2^0$	305,439	14	$g_{14}^0$	950,286
03	$g_3^0$	303,426	15	$g_{15}^0$	979043,679
04	$g_4^0$	238,267	16	$g_{16}^0$	978981,618
05	$g_5^0$	108,329	17	$g_{17}^0$	979049,802
06	$g_6^0$	041,610	18	$g_{18}^0$	219,828
07	$g_7^0$	978959,319	19	$g_{19}^0$	275,471
08	$g_8^0$	864,711	20	$g_{20}^0$	163,763
09	$g_9^0$	905,995	21	$g_{21}^0$	145,852
10	$g_{10}^0$	831,405	22	$k_I^0$	1(adimensional)
11	$g_{11}^0$	921,994	23	$k_{II}^0$	1 "
12	$g_{12}^0$	819,062	24	$k_{III}^0$	1 "

QUADRO 4.4.3.-1

4.4.4.- Vetor L

Com o uso das equações 4.4.1.-5 e 6, dos valores observados  $L_b$  ( $d_i^I$ ,  $d_i^{II}$ ,  $d_i^{III}$ , Quadro 4.4.2.1.-1), dos valores aproximados dos parâmetros  $X_o$  (Quadro 4.4.3.-1) e das equações de observação (item 4.4.2.2), seguindo a ordem dessas últimas, calculamos os componentes do vetor L:

Nº	$\ell_o$ (mgal)	$\ell_b$ (mgal)	$\ell$ (mgal)	Nº	$\ell_o$ (mgal)	$\ell_b$ (mgal)	$\ell$ (mgal)
01	-7,146	-7,156	0,010	21	41,284	41,406	-0,122
02	-7,146	-7,141	-0,005	22	41,284	41,434	-0,150
03	-7,146	-7,139	-0,007	23	41,284	41,401	-0,117
04	7,585	7,592	-0,007	24	-74,590	-74,642	-0,052
05	7,585	7,589	-0,004	25	-74,590	-74,585	-0,005
06	7,585	7,572	0,013	26	-74,590	-74,542	-0,048
07	-2,013	-1,998	-0,015	27	90,589	90,662	-0,073
08	-2,013	-2,022	0,009	28	90,589	90,576	0,013
09	-2,013	-2,016	0,003	29	90,589	90,528	0,061
10	-65,159	-65,209	0,050	30	-102,932	-103,072	0,140
11	-65,159	-65,134	-0,025	31	-102,932	-102,966	0,034
12	-65,159	-65,134	-0,025	32	-102,932	-102,946	0,014
13	-129,938	-129,985	0,047	33	67,931	67,789	0,142
14	-129,938	-129,890	-0,048	34	67,931	67,798	0,133
15	-66,719	-66,694	-0,025	35	63,293	63,284	0,009
16	-66,719	-66,744	0,025	36	63,293	63,302	-0,009
17	-82,291	-82,298	0,007	37	93,393	93,409	-0,016
18	-82,291	-82,283	-0,008	38	93,393	93,377	0,016
19	-94,608	-94,465	-0,143	39	261,321	261,332	-0,011
20	-94,608	-94,493	-0,115	40	261,321	261,308	0,013

Nº	$\ell_o$ (mgal)	$\ell_b$ (mgal)	$\ell$ (mgal)	Nº	$\ell_o$ (mgal)	$\ell_b$ (mgal)	$\ell$ (mgal)
41	162,556	162,725	-0,169	55	55,643	55,631	0,012
42	162,556	162,549	0,007	56	29,529	29,452	0,077
43	162,556	162,572	-0,016	57	29,529	29,394	0,135
44	68,184	68,228	-0,044	58	29,529	29,396	0,133
45	68,184	68,188	-0,004	59	51,373	51,416	-0,043
46	68,184	68,140	0,044	60	51,373	51,338	0,035
47	62,588	62,609	-0,021	61	51,373	51,366	0,007
48	62,588	62,585	0,003	62	-17,911	-17,936	0,025
49	62,588	62,569	0,019	63	-17,911	-17,910	-0,001
50	107,438	107,516	-0,078	64	-17,911	-17,889	-0,022
51	107,438	107,423	0,015	65	73,976	74,018	-0,042
52	107,438	107,398	0,040	66	73,976	73,948	0,028
53	55,643	55,647	-0,004	67	73,976	73,941	0,035
54	55,643	55,628	0,015				

QUADRO 4.4.4.-1

4.4.5.- Matriz P

Adotando os critérios do item 4.3.7 (peso de cada valor observado  $d_b$  igual ao número de medidas que lhe corresponde, valores nulos para as covariâncias), a matriz P (67x67) será então diagonal, ordenada conforme as equações de observação (item 4.4.2.2.), tendo seus elementos não-nulos (diagonal principal) os valores abaixo:

$$p_{1,1} \quad a \quad p_{12,12} : 4$$

$$P_{13,13} \quad a \quad P_{40,40} : 2$$

$$P_{41,41} \quad e \quad P_{42,42} : 4$$

$$P_{43,43} \quad a \quad P_{46,46} : 2$$

$$P_{47,47} \quad a \quad P_{49,49} : 4$$

$$P_{50,50} \quad a \quad P_{67,67} : 2$$

#### 4.4.6.- Matriz A

A matriz A (67x24) é dada pela equação 4.4.1.-3, ou seja:

$$A_{67 \times 24} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial g_{a_1}} & \frac{\partial F_1}{\partial g_{a_2}} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial g_{a_{21}}} & \frac{\partial F_1}{\partial k_{a_I}} & \frac{\partial F_1}{\partial k_{a_{II}}} & \frac{\partial F_1}{\partial k_{a_{III}}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial g_{a_1}} & \frac{\partial F_2}{\partial g_{a_2}} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial g_{a_{21}}} & \frac{\partial F_2}{\partial k_{a_I}} & \frac{\partial F_2}{\partial k_{a_{II}}} & \frac{\partial F_2}{\partial k_{a_{III}}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{67}}{\partial g_{a_1}} & \frac{\partial F_{67}}{\partial g_{a_2}} & \dots & \frac{\partial F_{67}}{\partial g_{a_{21}}} & \frac{\partial F_{67}}{\partial k_{a_I}} & \frac{\partial F_{67}}{\partial k_{a_{II}}} & \frac{\partial F_{67}}{\partial k_{a_{III}}} \end{bmatrix}$$

(4.4.6.-1)

As funções  $F_i$  são as equações de observação (item 4.4.2.2.); as derivadas parciais são calculadas para os valores aproximados dos



[illegible]

parâmetros (Quadro 4.4.3.-1). A matriz completa figura no quadro 4.4.6.-1.

#### 4.4.7.- Cálculo do vetor das correções aos valores aproximados dos parâmetros (X) e do fator de variância a posteriori ( $\hat{\sigma}_0^2$ )

##### 4.4.7.1.- Cálculo e inversão da matriz dos coeficientes das equações normais (N)

O cálculo foi executado num computador Hewlett - Packard mod. 9830. O produto matricial  $N=A^T P A$  foi feito indiretamente, devido à pequena capacidade de memória do computador. Baseamo-nos na figura 4.4.7.1.-1, o programa 4 (Apêndice D) calculando os elementos diagonais ( $n_{ij}$ ,  $i=j$ ) e triangular-superiores ( $n_{ij}$ ,  $i < j$ ); como N (24x24) é simétrica, os elementos triangular-inferiores ( $n_{ij}$ ,  $i > j$ ) são obtidos através de  $n_{ji}=n_{ij}$ . Calculou-se  $N^{-1}$ , que reproduzimos no Quadro 4.4.7.1.-1, no mesmo programa (subrotina MAT INV). Os dados de entrada são: os elementos diagonais de P, os elementos não-nulos e não-unitários da matriz A (colunas 22, 23 e 24) e as variáveis C e D, definidas no início da listagem do programa.

##### 4.4.7.2.- Cálculo de X e $\hat{\sigma}_0^2$

O programa 5 (Apêndice D) calcula indiretamente o produto  $U=A^T P L$ , efetua  $X=-N^{-1}U$  diretamente e calcula os escalares  $X^T U$  e  $L^T P L$  (ver formulários, item 4.4.1). Dados de entrada: o vetor L, os elementos diagonais de P, os elementos da matriz A correspondentes às colunas 22, 23 e 24, as variáveis C e D e a matriz  $N^{-1}$ .

Os resultados são:



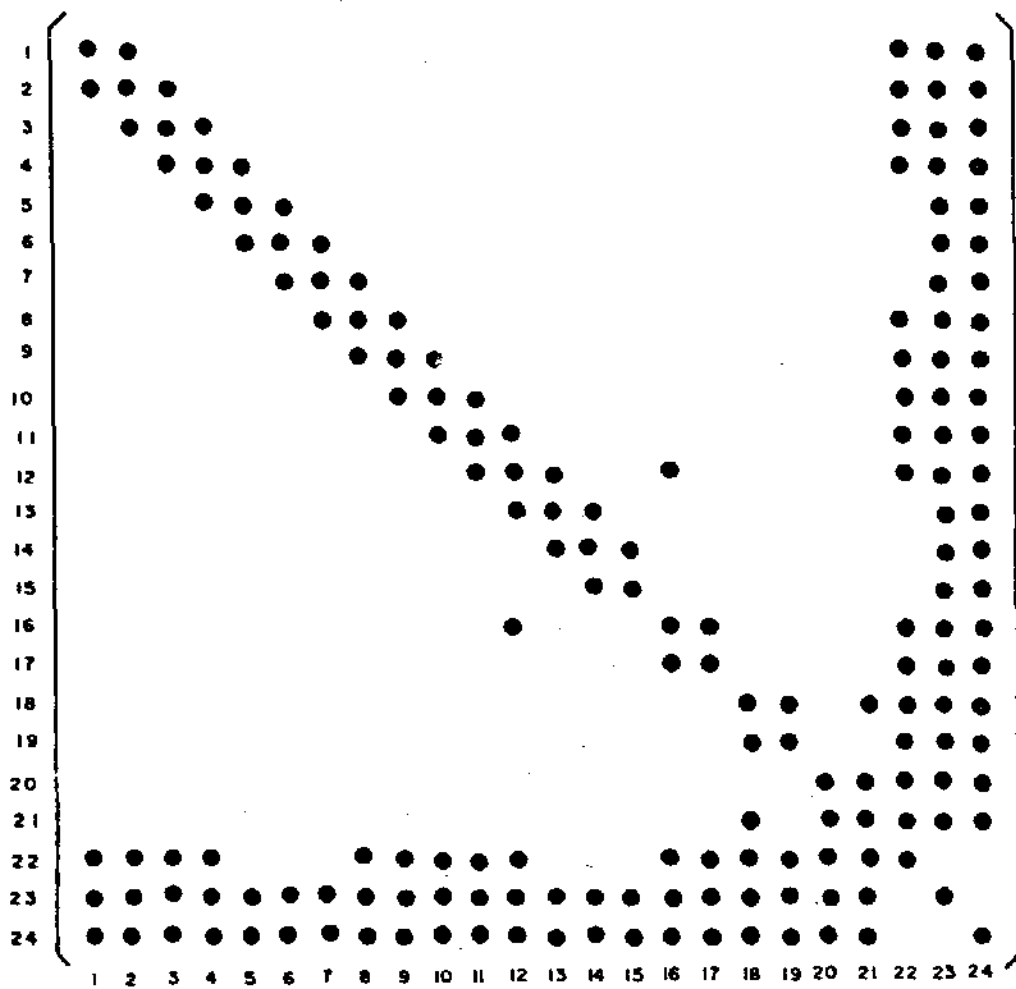


FIG. 4.4.7.1.-1

${}_{24}X_1 =$ 

-0,005mgal
-0,003 "
-0,005 "
-0,042 "
-0,159 "
-0,221 "
-0,297 "
-0,255 "
-0,106 "
-0,150 "
-0,105 "
-0,226 "
-0,319 "
-0,278 "
-0,211 "
-0,080 "
-0,036 "
+0,066 "
+0,094 "
+0,033 "
+0,028 "
+0,000102921 (adimensional)
-0,000802027 (adimensional)
-0,000920910 (adimensional)

(4.4.7.2.-1)

$$\hat{\sigma}_0^2 = 0,000940176\text{mgal}^2$$

(4.4.7.2.-2)

#### 4.4.8.- Cálculo da matriz variância-covariância dos parâmetros ajustados ( $\Sigma X_a$ ).

A matriz é obtida simplesmente pelo produto de  $\hat{\sigma}_0^2$  (equação 4.4.7.2.-2) pela matriz  $N^{-1}$  (Quadro 4.4.7.1.-1). O quadro 4.4.8.-1, tal como foi feito no item 4.3.9, apresenta as variâncias dos parâmetros (elementos triangular-superiores) e os coeficientes de correlação entre os parâmetros (elementos triangular-inferiores).

#### 4.4.9.- Valores ajustados da gravidade nas estações da sub-rede e dos coeficientes de escala

Os parâmetros ajustados são obtidos da equação 4.4.1.-4, ou seja:

$$X_a = X_0 + X \quad (4.4.9.-1)$$

Quanto aos desvios-padrão dos parâmetros, provêm das variâncias dos mesmos, ou seja, dos elementos da diagonal principal da matriz  $\Sigma X_a$  (Quadro 4.4.8.-1).



#### 4.4.8.- Cálculo da matriz variância-covariância dos parâmetros ajustados ( $\Sigma X_a$ ).

A matriz é obtida simplesmente pelo produto de  $\hat{\sigma}_0^2$  (equação 4.4.7.2.-2) pela matriz  $N^{-1}$  (Quadro 4.4.7.1.-1). O quadro 4.4.8.-1, tal como foi feito no item 4.3.9, apresenta as variâncias dos parâmetros (elementos triangular-superiores) e os coeficientes de correlação entre os parâmetros (elementos triangular-inferiores).

#### 4.4.9.- Valores ajustados da gravidade nas estações da sub-rede e dos coeficientes de escala

Os parâmetros ajustados são obtidos da equação 4.4.1.-4, ou seja:

$$X_a = X_0 + X \quad (4.4.9.-1)$$

Quanto aos desvios-padrão dos parâmetros, provêm das variâncias dos mesmos, ou seja, dos elementos da diagonal principal da matriz  $\Sigma X_a$  (Quadro 4.4.8.-1).





Nº	ESTAÇÃO	$g_a$ (mgal)	$\sigma$ (mgal)	Nº	ESTAÇÃO	$g_a$ (mgal)	$\sigma$ (mgal)
01	BUTIÃ F	979297,849	0,009	12	CURITIBANOS F	978818,836	0,036
02	CACHOEIRA DO SUL F	305,436	0,012	13	LAGES F	886,674	0,034
03	SÃO SEPE F	303,421	0,015	14	VACARIA F	950,008	0,031
04	SANTA MARIA F	238,225	0,017	15	CAXIAS DO SUL F	979043,468	0,025
05	IJUÍ F	108,170	0,025	16	RIO DO SUL F	978981,538	0,021
06	CARAZINHO F	041,389	0,029	17	ITAJAÍ F	979049,766	0,011
07	FR.WESTPHALEN F	978959,022	0,034	18	TORRES F	219,894	0,011
08	S.MIGUEL D'OESTE F	864,456	0,039	19	OSÓRIO F	275,565	0,011
09	CHAPECÓ F	905,889	0,035	20	IMBITUBA F	163,796	0,011
10	PONTE SERRADA F	831,255	0,039	21	CRICIÚMA F	145,880	0,012
11	JOAÇABA F	921,889	0,030				

a) Valores ajustados da gravidade (parâmetros nº 01 a 21)

QUADRO 4.4.9.-1

- b) Valores ajustados dos inversos dos coeficientes de escala (para metros nº 22 a 24)

Nº	Parâmetro	$k_a$ (adimensional)	$\sigma$ (adimensional)
22	$k_I$	1,000102921	0,000114018
23	$k_{II}$	0,999197973	0,000095666
24	$k_{III}$	0,999079090	0,000094721

QUADRO 4.4.9.-2

- c) Coeficientes de escala de 1ª ordem e seus desvios-padrão

Usaremos aqui as aproximações fornecidas por [1]:

$$E \left[ \frac{X}{Y} \right] = \frac{\mu_X}{\mu_Y} - \frac{1}{2} \frac{\text{cov}[X, Y]}{\mu_X \mu_Y} + \frac{\mu_X}{3} \frac{\text{var}[Y]}{\mu_Y^2} \quad (4.4.9.-2)$$

$$\text{var} \left[ \frac{X}{Y} \right] = \left( \frac{\mu_X}{\mu_Y} \right)^2 \left( \frac{\text{var}[X]}{\mu_X^2} + \frac{\text{var}[Y]}{\mu_Y^2} - \frac{2\text{cov}[X, Y]}{\mu_X \mu_Y} \right) \quad (4.4.9.-3)$$

onde:  $E \left[ \frac{X}{Y} \right]$  - esperança matemática da razão X/Y

$\mu_X, \mu_Y$  - valores médios de X e Y

$\text{var}[X], \text{var}[Y], \text{var} \left[ \frac{X}{Y} \right]$  - variâncias de X, Y, X/Y

$\text{cov}[X, Y]$  - covariância de X e Y

No nosso ajustamento, temos (equação 4.4.2.2.-3):

$$\kappa = \frac{1}{K} \quad (4.4.9.-4)$$

e, conseqüentemente, nas expressões 4.4.9.-2 e 3, fazemos:

$$X = 1$$

$$Y = k$$

$$\mu_X = 1$$

$$\mu_Y = k \text{ (calculado no ajustamento)}$$

$$\text{var}[X] = 0$$

$$\text{var}[Y] = \sigma_k^2 \text{ (estimado no ajustamento)}$$

$$\text{cov}[X, Y] = 0$$

resultando então, para um coeficiente de escala, a expressão:

$$\kappa = \epsilon \left[ \frac{1}{k} \right] \approx \frac{1}{k} + \frac{\sigma_k^2}{k^3} \quad (4.4.9.-5)$$

e, para a sua variância:

$$\text{var}[\kappa] = \text{var} \left[ \frac{1}{k} \right] = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{\sigma_k^2}{k^2} = \frac{\sigma_k^2}{k^4} \quad (4.4.9.-6)$$

Substituindo, nessas duas últimas expressões, os valores de  $k_I$ ,  $k_{II}$  e  $k_{III}$  (Quadro 4.4.9.-2), bem como de suas variâncias respectivas (quadro 4.4.8.-1, elementos  $\sigma_{22,22}^2$ ,  $\sigma_{23,23}^2$  e  $\sigma_{24,24}^2$ ), resulta:

GRAVÍMETRO	COEFICIENTE DE ESCALA	VALOR(4.4.9.-5)	$\sigma$ (4.4.9.-6)
G-41	$\kappa_I$	0,999897103	0,000113994
G-372	$\kappa_{II}$	1,000802680	0,000095820
G-454	$\kappa_{III}$	1,000921768	0,000094895

QUADRO 4.4.9.-3

e, conseqüentemente, nas expressões 4.4.9.-2 e 3, fazemos:

$$X = 1$$

$$Y = k$$

$$\mu_X = 1$$

$$\mu_Y = k \text{ (calculado no ajustamento)}$$

$$\text{var}[X] = 0$$

$$\text{var}[Y] = \sigma_k^2 \text{ (estimado no ajustamento)}$$

$$\text{cov}[X, Y] = 0$$

resultando então, para um coeficiente de escala, a expressão:

$$\kappa = \epsilon \left[ \frac{1}{k} \right] \approx \frac{1}{k} + \frac{\sigma_k^2}{k^3} \quad (4.4.9.-5)$$

e, para a sua variância:

$$\text{var}[\kappa] = \text{var} \left[ \frac{1}{k} \right] \approx \frac{1}{k^2} \cdot \frac{\sigma_k^2}{k^2} = \frac{\sigma_k^2}{k^4} \quad (4.4.9.-6)$$

Substituindo, nessas duas últimas expressões, os valores de  $k_I$ ,  $k_{II}$  e  $k_{III}$  (Quadro 4.4.9.-2), bem como de suas variâncias respectivas (quadro 4.4.8.-1, elementos  $\sigma_{22,22}^2$ ,  $\sigma_{23,23}^2$  e  $\sigma_{24,24}^2$ ), resulta:

GRAVÍMETRO	COEFICIENTE DE ESCALA	VALOR(4.4.9.-5)	$\sigma$ (4.4.9.-6)
G-41	$\kappa_I$	0,999897103	0,000113994
G-372	$\kappa_{II}$	1,000802680	0,000095820
G-454	$\kappa_{III}$	1,000921768	0,000094895

QUADRO 4.4.9.-3

#### 4.4.10.- Estimativa da qualidade das observações não ajustadas

Repetindo o procedimento do item 4.3.11, uma vez que, no ajustamento pelo método paramétrico, também não houve estimativa a priori do fator de variância, estabelecemos o intervalo de 95% de confiança para  $\sigma_0^2$  (equação 4.3.11.-1). No presente caso, temos:

$$r = n - u = 43 \text{ graus de liberdade}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = 0,000940176 \text{mgal}^2$$

sendo que uma tabela da distribuição qui-quadrado  $\chi^2$  nos fornece, mediante interpolação:

$$\chi_{43,0.025}^2 = 62,96$$

$$\chi_{43,0.975}^2 = 26,81$$

Calculamos:

$$L_1 = \frac{r \cdot \hat{\sigma}_0^2}{\chi_{43,0.025}^2} \therefore L_1 = 0,000642 \text{mgal}^2$$

$$L_2 = \frac{r \cdot \hat{\sigma}_0^2}{\chi_{43,0.975}^2} \therefore L_2 = 0,001508 \text{mgal}^2$$

$$\text{Portanto: } P [0,000642 \text{mgal}^2 \leq \sigma_0^2 \leq 0,001508 \text{mgal}^2] = 0,950$$

O número de medidas que conduziu à estimativa de um valor observado (diferença de gravidade entre duas estações sucessivas), igual ao peso atribuído a esse valor observado, vale, nesse

ajustamento, 2 ou 4 (ver item 4.4.5.). Continuando aqui o procedimento de 4.3.11, ou seja, substituindo os valores de  $L_1$  e  $L_2$  acima na equação 4.3.11.-3, obtemos:

$$\text{a) para } p_1 = 2: 0,000321\text{mgal}^2 \leq \sigma_{b_1}^2 \leq 0,000754\text{mgal}^2$$

$$\text{ou: } 0,018\text{mgal} \leq \sigma_{b_1} \leq 0,027\text{mgal}$$

$$\text{b) para } p_1 = 4: 0,000161\text{mgal}^2 \leq \sigma_{b_1}^2 \leq 0,000377\text{mgal}^2$$

$$\text{ou: } 0,013\text{mgal} \leq \sigma_{b_1} \leq 0,019\text{mgal}$$

#### 4.4.11.- Verificação da solução (vetor X)

O cálculo e inversão da matriz N e o cálculo do vetor X (correções aos valores aproximados dos parâmetros), citados nos itens 4.4.7.1 e 4.4.7.2, tiveram de ser executados com precisão simples (pequena capacidade de memória do computador Hewlett-Packard mod. 9830), o que resultou na presença de erros de arredondamento. Tal pode ser visualizado na matriz  $N^{-1}$  (quadro 4A.7.1-1) que apresenta uma certa assimetria (elementos  $n_{ij}$  não exatamente iguais aos elementos  $n_{ji}$ ) e lançou dúvidas quanto aos resultados obtidos (item 4.4.7.2).

No entanto, o mesmo sistema foi resolvido por um processo iterativo (método dos gradientes conjugados com adequação de escala) pelo prof. Romualdo Wandresen, no computador DecSystem-10 da Universidade Federal do Paraná, apresentando convergência após 21 iterações, com os seguintes resultados:

$${}_{24}X_1 = \begin{bmatrix} -0,005\text{mgal} \\ -0,003 \text{ " } \\ -0,005 \text{ " } \\ -0,042 \text{ " } \\ -0,159 \text{ " } \\ -0,221 \text{ " } \\ -0,297 \text{ " } \\ -0,255 \text{ " } \\ -0,106 \text{ " } \\ -0,150 \text{ " } \\ -0,104 \text{ " } \\ -0,226 \text{ " } \\ -0,319 \text{ " } \\ -0,278 \text{ " } \\ -0,210 \text{ " } \\ -0,080 \text{ " } \\ -0,036 \text{ " } \\ 0,066 \text{ " } \\ 0,094 \text{ " } \\ 0,033 \text{ " } \\ 0,028 \text{ " } \\ 0,000103531 \text{ (adimensional)} \\ -0,000801395 \text{ (adimensional)} \\ -0,000919661 \text{ (adimensional)} \end{bmatrix} \quad (4.4.11.-1)$$

A comparação dos vetores 4.4.7.2.-1 e 4.4.11.-1 mostra que os nossos resultados podem ser considerados como satisfatórios.



4.4.12.- Coefficientes de escala de 1<sup>a</sup> ordem para os gravímetros G-41 e G-372 obtidos através dos dados do exemplo 2.2.5.1.1.

- a) Os sistemas de equações 2.2.5.1.1.-1 e 3 calculam os coeficientes de escala de 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> ordem, respectivamente, para os gravímetros G-41 e G-372, utilizando medidas efetuadas em circuitos aéreos. Resolvendo-os para os coeficientes de 1<sup>a</sup> ordem  $\kappa_1$ , ou seja, admitindo  $\kappa_2=0$ , obtemos:

$$G-41: \kappa_I = 0,999957656$$

$$G-372: \kappa_{II} = 1,000195438$$

- b) pode-se emitir dúvidas quanto aos resultados da conexão aérea Curitiba-Rio de Janeiro. Ocorreu, com efeito, um desligamento acidental dos termostatos dos dois instrumentos, antes do percurso de volta, e a instabilidade resultante do fiel dos gravímetros dificultou as leituras na estação IGSN/71 nº 40123/L (Aeroporto Santos Dumont, Rio de Janeiro). Se utilizarmos somente as estações 2, 3, 4 e 5 (exemplo 2.2.5.1.1, tabela 2.2.5.1.1.-1), omitindo a ligação com a estação 1, resolveremos as equações nº 6 a 12, dos sistemas 2.2.5.1.1.-1 e 3, para  $\kappa_2=0$ , obtendo:

$$G-41: \kappa_I = 0,999884366$$

$$G-372: \kappa_{II} = 1,000765056$$

Esses últimos valores aproximam-se bastante daqueles obtidos através do ajustamento (Quadro 4.4.9.-3). Recordemos, a propósito,

que no ajustamento foram incluídas apenas as estações IGSN-71 nº 40 178/A e 43 801/B (estações 2 e 4, tabela 2.2.5.1.1.-1).

#### 4.4.13.- Comentários gerais

- a) algumas correções aos valores iniciais  $X_0$  dos parâmetros são bastante importantes, como, por exemplo (matriz 4.4.7.2.-1):

$$x_7 = -0,297\text{mgal}, \quad x_8 = -0,255\text{mgal}, \quad x_{13} = -0,319\text{mgal} \quad \text{e}$$

$$x_{14} = -0,278\text{mgal}$$

- b) a inspeção da matriz variância-covariância (quadro 4.4.8.-1) mostra que as variâncias dos parâmetros ajustados não são excessivamente elevadas, podendo ser consideradas como satisfatórias para estações de 1ª ordem. Os maiores desvios-padrão são (tabela 4.4.9.-1):

$$\sigma_7 = 0,034\text{mgal}, \quad \sigma_8 = 0,039\text{mgal}, \quad \sigma_9 = 0,035\text{mgal},$$

$$\sigma_{10} = 0,039\text{mgal}, \quad \sigma_{12} = 0,036\text{mgal} \quad \text{e} \quad \sigma_{13} = 0,034\text{mgal}$$

- c) os resultados do item 4.4.10 permitem estimar que uma observação (diferença de gravidade), executada \* por qualquer um dos três gravímetros LaCoste & Romberg empregados na sub-rede, possua um desvio-padrão compreendido entre 0,018mgal e 0,027mgal, compatível com a ordem de grandeza da precisão nominal de leitura desses instrumentos.

\* sendo conduzida duas vezes.

#### 4.4.14.- Comentários sobre os coeficientes de escala ( $\kappa$ ).

- a) seus valores simplesmente compatibilizam os valores de  $g$  nas estações da sub-rede com os valores de  $g$  ajustados às duas estações IGSN-71 ocupadas;
- b) podem ser considerados válidos somente no interior das faixas de leituras efetuadas pelos respectivos gravímetros, as quais correspondem a uma determinada região de operação dos parafusos micrométricos dos instrumentos (ver item 2.2.5, a). Reproduzimos abaixo as leituras mínima e máxima dessas faixas, bem como as leituras obtidas nas estações IGSN-71, que são internas às faixas: a determinação dos  $\kappa$  equivale, nesse caso e de certa forma, a uma extrapolação (uma situação mais favorável ocorreria se as leituras nas estações do datum fossem externas às faixas de leituras nas estações da sub-rede);

GRAVÍ-METRO	LEITURAS APROXIMADAS (mgal)			
	MÍNIMA	MÁXIMA	IGSN 40178/A	IGSN 43801/B
G-41	2459	2952	2758	2951
G-372	2590	3086	2889	3085
G-454	2489	2988	2788	2985

QUADRO 4.4.13.-1

- c) o modelo matemático adotado é arbitrariamente simplificado: o cálculo dos  $\kappa$  pode ter absorvido influências não especificadas no modelo. Além disso, seria necessário verificar a conveniência da introdução de coeficientes de 2ª ordem ( $\kappa_2$ ).

#### 4.5.- Segundo ajustamento da sub-rede pelo método dos correlatos

O ajustamento executado no item 4.3. será aqui refeito, empregando-se os coeficientes de escala determinados no item 4.4. na correção às observações da sub-rede. O formulário, equações de condição, suas transformadas, matrizes B e P e programas utilizados são os mesmos do item 4.3.

##### 4.5.1.- Valores observados ( $L_p$ ) corrigidos da escala.

Os valores observados que figuram no quadro 4.5.1.-1 são obtidos multiplicando-se os valores de  $d$ , que constam do quadro 4.3.2.-1, pelos coeficientes  $\kappa_I$ ,  $\kappa_{II}$  e  $\kappa_{III}$  (tabela 4.4.9.-3). Sendo:

$$\bar{d}_j = \bar{l}_{i+1} - \bar{l}_i \quad (4.5.1.-1)$$

a diferença de leituras, em mgal, não corrigidas dos erros de escala, entre as estações  $i$  e  $i+1$ , e sendo:

$$l_i = \kappa \bar{l}_i \quad \text{e} \quad l_{i+1} = \kappa \bar{l}_{i+1}$$

podemos escrever:

$$d_j = \kappa (\bar{l}_{i+1} - \bar{l}_i)$$

ou, simplesmente:

$$d_j = \kappa \bar{d}_j \quad (4.5.1.-2)$$

para uma diferença de gravidade corrigida dos erros de escala.

d(mgal)							MÉDIAS
G-41		G-372		G-454		d <sub>b</sub> (mgal)	
1	2	1	2	1	2		
-7,162	-7,148	-7,149	-7,145	-7,142	-7,150	-7,149	
7,599	7,584	7,615	7,575	7,582	7,575	7,588	
-2,005	-1,990	-2,034	-2,015	-2,030	-2,006	-2,013	
-65,197	-65,207	-65,194	-65,180	-65,206	-65,183	-65,194	
		-130,089		-130,011		-130,050	
		-66,748		-66,806		-66,777	
		-82,365		-82,359		-82,362	
		-94,541		-94,580		-94,561	
41,402		41,467		41,439		41,436	
-74,634		-74,645		-74,611		-74,630	
90,653		90,650		90,611		90,638	
-103,061		-103,049		-103,041		-103,050	
		67,843		67,860		67,852	
		63,335		63,361		63,348	
		93,484		93,463		93,474	
		261,542		261,550		261,546	
162,705	162,712	162,672	162,688		162,722	162,700	
68,221		68,243		68,203		68,222	
62,601	62,606	62,623	62,648	62,638	62,616	62,622	
107,505		107,509		107,497		107,504	
55,641		55,673		55,682		55,665	
29,449		29,418		29,424		29,430	
51,411		51,379		51,413		51,401	
-17,935		-17,924		-17,905		-17,921	
74,010		74,008		74,009		74,009	

QUADRO 4.5.1.-1

4.5.2.- Vetor W

Conforme as equações 4.3.4.-9,10,11 e 12, obtemos:

$${}^4W_1 = \begin{bmatrix} 0,096 \\ -0,077 \\ -0,015 \\ -0,066 \end{bmatrix} \text{ mgal} \quad (4.5.2.-1)$$

4.5.3.- Correcções aos valores observados (V), valores observados ajustados ( $L_a$ ) e fator de variância a-posteriori ( $\hat{\sigma}_0^2$ )

Operando como no item 4.3.8, obtemos:

$${}^{25}V_1 = \begin{bmatrix} -0,002 \\ -0,002 \\ -0,002 \\ -0,002 \\ -0,005 \\ -0,005 \\ -0,005 \\ -0,005 \\ -0,003 \\ -0,003 \\ -0,003 \\ -0,003 \\ -0,014 \\ -0,014 \\ -0,014 \\ -0,014 \\ 0,003 \\ 0,006 \\ 0,003 \\ 0,000 \\ 0,005 \\ 0,005 \\ 0,005 \\ 0,005 \\ 0,005 \end{bmatrix} \text{ mgal} \quad (4.5.3.-1) \quad {}^{25}L_{a1} = \begin{bmatrix} d_{a1} \\ d_{a2} \\ d_{a3} \\ : \\ : \\ : \\ d_{a25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7,151 \\ 7,586 \\ -2,015 \\ -65,196 \\ -130,055 \\ -66,782 \\ -82,367 \\ -94,566 \\ 41,432 \\ -74,633 \\ 90,634 \\ -103,053 \\ 67,838 \\ 63,334 \\ 93,460 \\ 261,532 \\ 162,703 \\ 68,228 \\ 62,625 \\ 107,504 \\ 55,670 \\ 29,435 \\ 51,406 \\ -17,916 \\ 74,014 \end{bmatrix} \text{ mgal} \quad (4.5.3.-2)$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = 0,001 \ 255 \ 31 \text{ mgal}^2 \quad (4.5.3.-3)$$

#### 4.5.4.- Matriz variância-covariância dos valores observados ajustados ( $\sum_{L_a}$ )

De acordo com as operações do item 4.3.9., resulta o quadro 4.5.4.-1.

A partir das variâncias (diagonal principal, quadro 4.5.4.-1), calculamos os desvios-padrão associados a cada um dos valores observados ajustados ( $d_a$ ):

Nº	$\sigma$ (mgal)	Nº	$\sigma$ (mgal)	Nº	$\sigma$ (mgal)	Nº	$\sigma$ (mgal)	Nº	$\sigma$ (mgal)
01	0,010	06	0,017	11	0,014	16	0,016	21	0,012
02	0,010	07	0,017	12	0,014	17	0,010	22	0,012
03	0,010	08	0,017	13	0,016	18	0,013	23	0,012
04	0,010	09	0,014	14	0,016	19	0,010	24	0,012
05	0,017	10	0,014	15	0,016	20	0,011	25	0,012

TABELA 4.5.4.-1

#### 4.5.5.- Valores ajustados da gravidade nas estações da sub-rede

Procedendo como em 4.3.10, resulta o quadro 4.5.5.-1.

[illegible]



ESTAÇÃO			g <sub>a</sub> (mgal)	ESTAÇÃO			g <sub>a</sub> (mgal)
Nº	NOME			Nº	NOME		
01	BUTIÃ	F	979297,849	12	CURITIBANOS	F	978818,834
02	CACHOEIRA DO SUL	F	305,435	13	LAGES	F	886,672
03	SÃO SEPE	F	303,420	14	VACARIA	F	950,006
04	SANTA MARIA	F	238,224	15	CAXIAS DO SUL	F	979043,466
05	IJUÍ	F	108,169	16	RIO DO SUL	F	978981,537
06	CARAZINHO	F	041,387	17	ITAJAÍ	F	979049,765
07	FR. WESTPHALEN	F	978959,020	18	TORRES	F	219,894
08	S.MIGUEL D'OESTE	F	864,454	19	OSÓRIO	F	275,564
09	CHAPECÓ	F	905,886	20	IMBITUBA	F	163,796
10	PONTE SERRADA	F	831,253	21	CRICIÚMA	F	145,880
11	JOAÇABA	F	921,887				

QUADRO 4.5.5.-1

#### 4.5.6.- Estimativa da qualidade das observações não-ajustadas

Repetindo o procedimento seguido no item 4.3.11, resulta, para uma observação conduzida duas vezes: ( $p_1=2$ ), adotando o novo valor de  $\bar{\sigma}_0^2$  (4.5.3.-3):

$$0,000226\text{mgal}^2 \leq \sigma_{b_1}^2 \leq 0,005231\text{mgal}^2$$

$$0,015\text{mgal} \leq \sigma_{b_1} \leq 0,072\text{mgal}$$

#### 4.5.7.- Comentários

- a) os resíduos (vetor V, 4.5.3.-1) diminuíram sensivelmente, em relação àqueles obtidos no item 4.3. (vetor V, 4.3.8.-1). Notar que os de maior valor absoluto (0,014mgal) se referem a  $d_{13}, d_{14}, d_{15}$  e  $d_{16}$ ;
- b) os maiores desvios-padrão têm valor  $\leq 0,017\text{mgal}$  e se referem a  $d_5, d_6, d_7$  e  $d_8$ , os quais, no item 4.3., haviam apresentado  $\sigma = 0,068\text{mgal}$ ;
- c) as correlações fortes, comentadas no item 4.3.12, se mantêm praticamente inalteradas nesse último ajustamento;
- d) o desvio-padrão da observação de uma diferença de gravidade não-ajustada, efetuada duas vezes com qualquer um dos três instrumentos, apresenta-se com intervalo bastante reduzido (item 4.5.6.); compará-lo com o intervalo estimado no item 4.3.11;
- e) finalmente, a melhoria geral que se pode verificar no rea-

justamento pelo método dos correlatos, com as correções de escala, parece confirmar a observação que havíamos formulado no final do item 4.3.12. (predominância dos erros de escala entre as causas dos resultados insatisfatórios do primeiro ajustamento).

#### 4.6.- Resumo dos resultados

Os valores do módulo da aceleração da gravidade nas estações da sub-rede, obtidos através dos três ajustamentos, vêm reunidas na tabela 4.6.-1.

E S T A Ç Ã O			g <sub>a</sub> (mgal)		
			A J U S T A M E N T O		
Nº	NOME		CORRELATOS (SEM CORREÇÕES DE ESCALA)	CORRELATOS (COM CORREÇÕES DE ESCALA)	PARÂMETROS
01	BUTIÃ	F	979297,847	979297,849	979297,849
02	CACHOEIRA DO SUL	F	305,423	305,435	305,436
03	SÃO SEPÊ	F	303,403	303,420	303,421
04	SANTA MARIA	F	238,236	238,224	238,225
05	IJUÍ	F	108,275	108,169	108,170
06	CARAZINHO	F	041,532	041,387	041,389
07	FR. WESTPHALEN	F	978959,217	978959,020	978959,022
08	S. MIGUEL D'OESTE	F	864,714	864,454	864,456
09	CHAPECÓ	F	906,112	905,886	905,889
10	PONTE SERRADA	F	831,506	831,253	831,255
11	JOACABA	F	922,079	921,887	921,889
12	CURITIBANOS	F	819,070	818,834	818,836
13	LAGES	F	886,896	886,672	886,674
14	VACARIA	F	950,221	950,006	950,008
15	CAXIAS DO SUL	F	979043,646	979043,466	979043,468
16	RIO DO SUL	F	978981,674	978981,537	978981,538
17	ITAJAÍ	F	979049,822	979049,765	979049,766
18	TORRES	F	219,865	219,894	219,894
19	OSÓRIO	F	275,543	275,564	275,565
20	IMBITUBA	F	163,778	163,796	163,796
21	CRICIÚMA	F	145,881	145,880	145,880

QUADRO 4.6.-1

CONCLUSÕES

Como pode ser visto no quadro 4.6.1, nas duas últimas colunas, os ajustamentos pelo método paramétrico e pelo método dos correlatos (corrigindo-se as observações com os coeficientes de escala  $\kappa_I$ ,  $\kappa_{II}$  e  $\kappa_{III}$ ) forneceram resultados praticamente iguais, confirmando a hipótese, emitida no item 4.3.12, dos erros das funções de escala dos instrumentos se constituírem na principal causa das deficiências do primeiro ajustamento pelo método dos correlatos. Pode-se verificar, no mesmo quadro, a influência dos erros das funções de calibração sobre os valores de  $g$ , atingindo 0,260 mgal na estação S. Miguel d'Oeste (F).

O método dos correlatos exige, evidentemente, a correção prévia das observações (coeficientes de escala), sendo que o número de cálculos é reduzido. O método paramétrico é muito mais flexível, permitindo a introdução, além dos parâmetros de escala, dos coeficientes de deriva dinâmica (item 3.5.2) e de quaisquer outros fatores cuja presença possa ser julgada necessária (temperatura, pressão); porém, o volume de cálculos é bem maior. O processo direto que utilizamos para a resolução das equações normais comportou a inversão de u'a matriz de dimensões 24x24.

As limitações que afetam a determinação dos coeficientes  $\kappa$  foram apontadas no item 4.4.14, podendo-se acrescentar-lhes os desvios-padrão elevados (quadro 4.4.9.-3). Uma determinação de caráter mais preciso e definitivo poderia ser feita ajustando circuitos (linhas de calibração) envolvendo o maior número possível de estações IGSN-71 disponíveis no território nacional, sendo que a inclusão de um certo número de estações absolutas seria desejável. De qualquer forma, julgamos prematuro recomendar o emprego dos coeficientes estimados no presente trabalho para a correção das observações conduzidas com os gravímetros LaCoste & Romberg

G-41, G-372 e G-454.

Podem ser, aqui, esboçadas as seguintes sugestões:

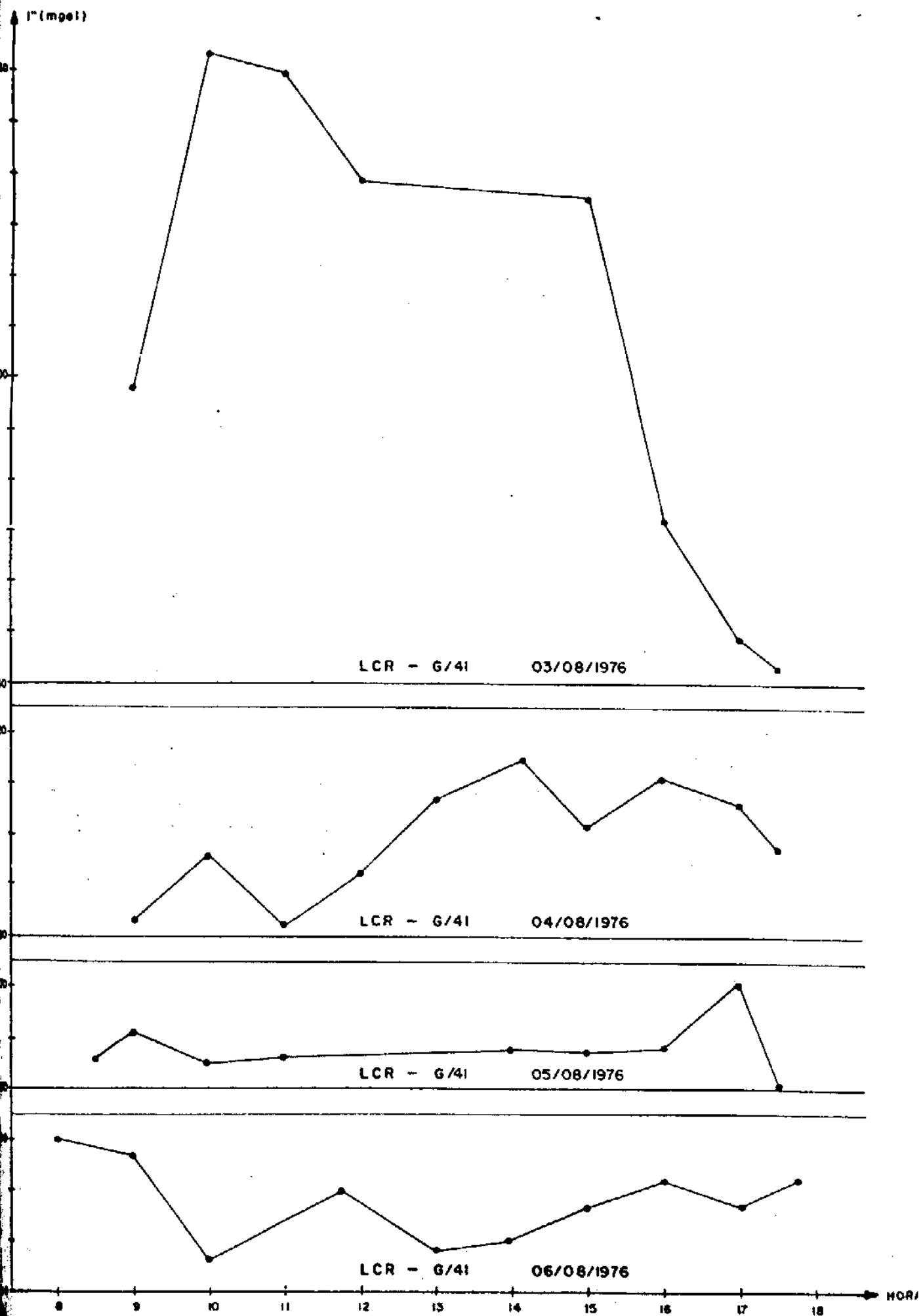
- a) investigações acerca do emprego do método combinado para o ajustamento de observações gravimétricas,  $F(L_a, X_a) = 0$ , com a inclusão simultânea dos coeficientes de escala de ordem superior ( $2^a$ ,  $3^a$ , etc.) e dos coeficientes de deriva;
- b) experimentos com a utilização dos ajustamentos livres, sem fixar os valores IGSN-71 e empregando-lhes os desvios-padrão respectivos;
- c) análise do problema das covariâncias das observações;
- d) estudo da significância dos coeficientes de pressão e temperatura, partindo-se do pressuposto de que os coeficientes termostáticos não se igualam à unidade e que o isolamento barométrico dos gravímetros não é completo; isso pode ser feito anexando-se parâmetros térmicos e barométricos no ajustamento de circuitos, por exemplo;
- e) investigação de critérios mais eficientes para a correção da deriva dinâmica. O circuito Porto Alegre-Curitibanos mostra, para o gravímetro G-454, a inadequação da correção habitual.

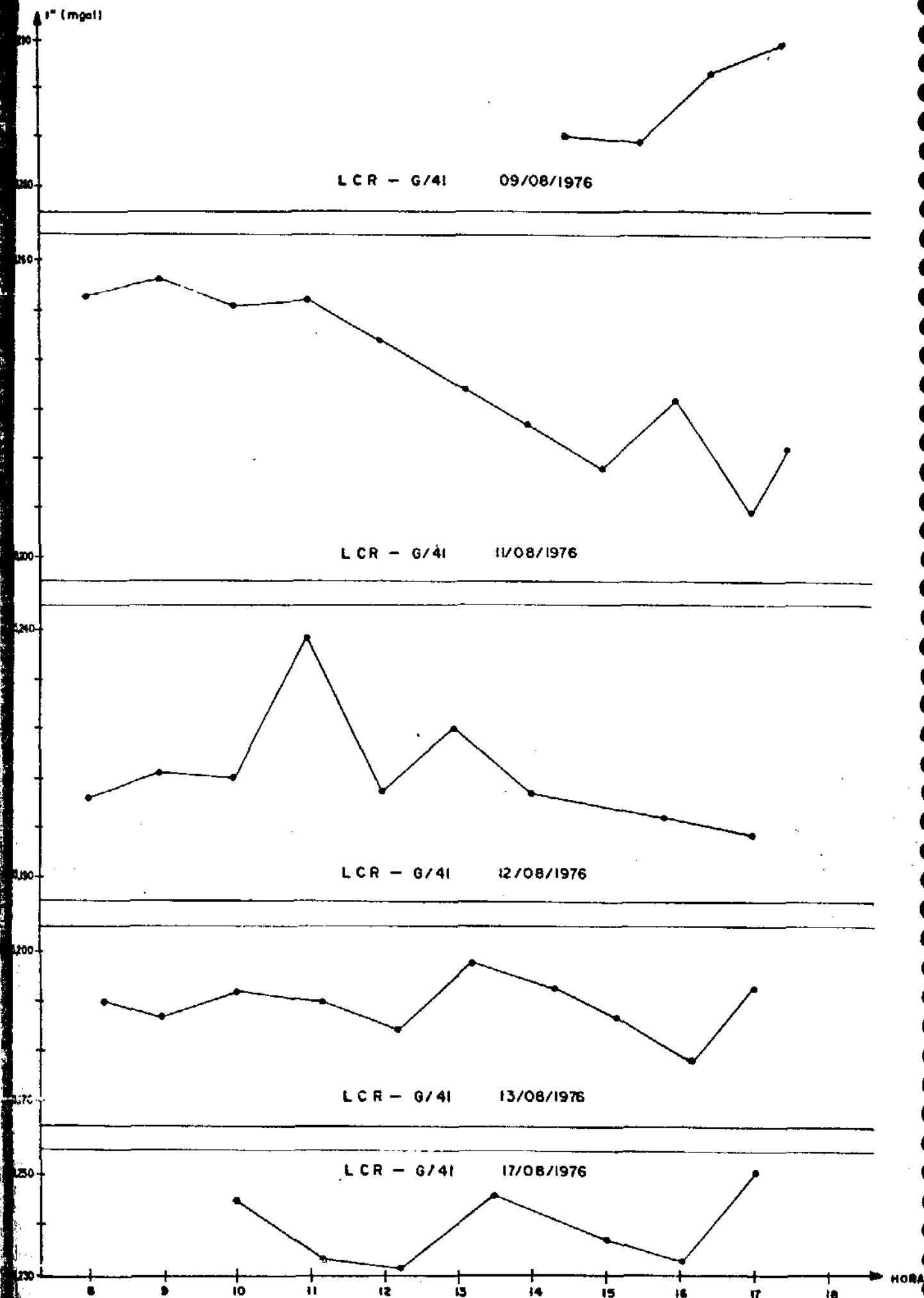
APÊNDICE A

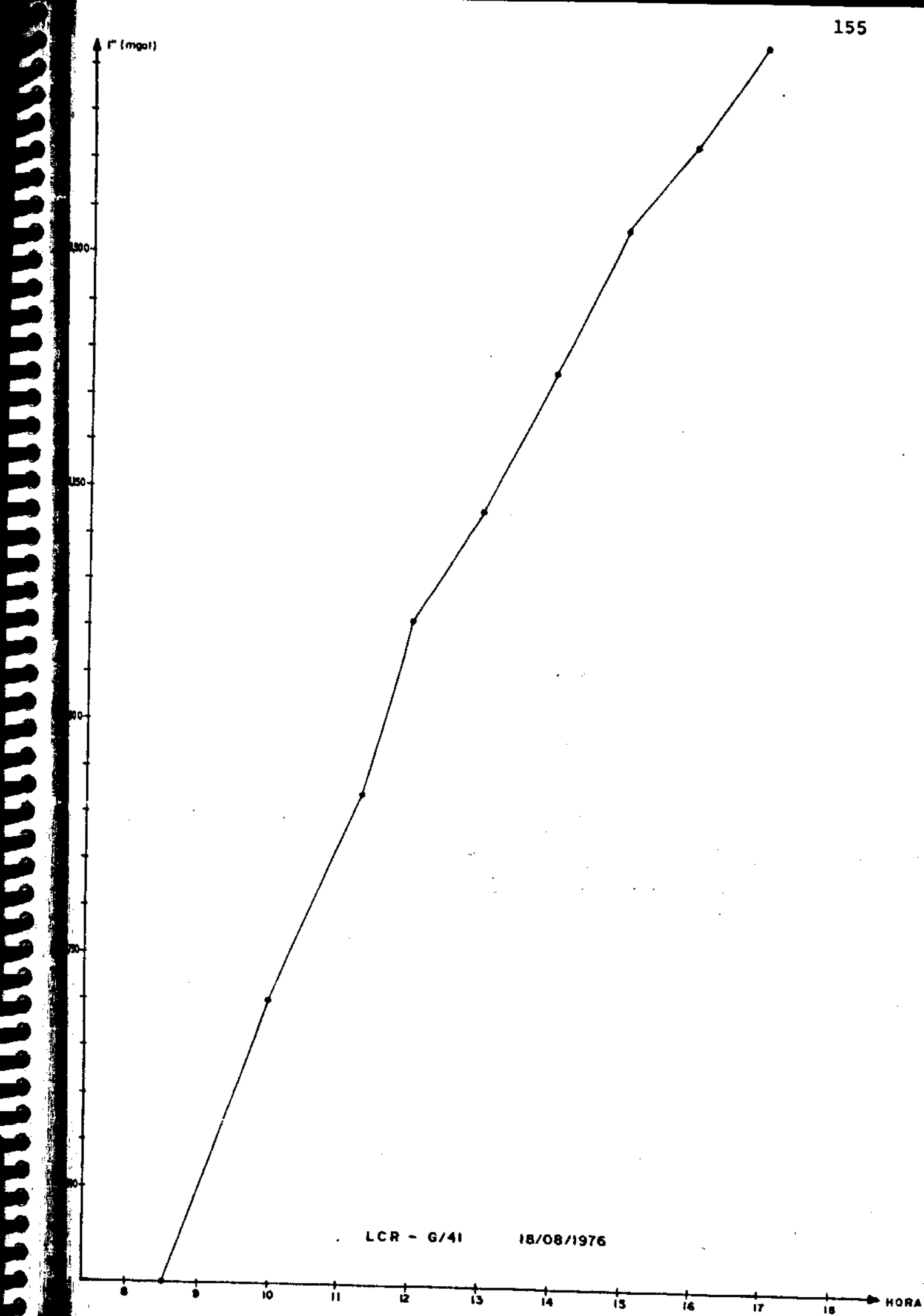


## DERIVAS INSTRUMENTAIS (GRÁFICOS)

a) deriva estática







p\* (mg/l)

LCR - G/41

19/08/1976

LCR - G/41

20/08/1976

LCR - G/372

03/08/1976

LCR - G/372

04/08/1976

HORA

I<sup>+</sup> (mg/l)

L C R - G/372

05/08/1976

L C R - G/372

06/08/1976

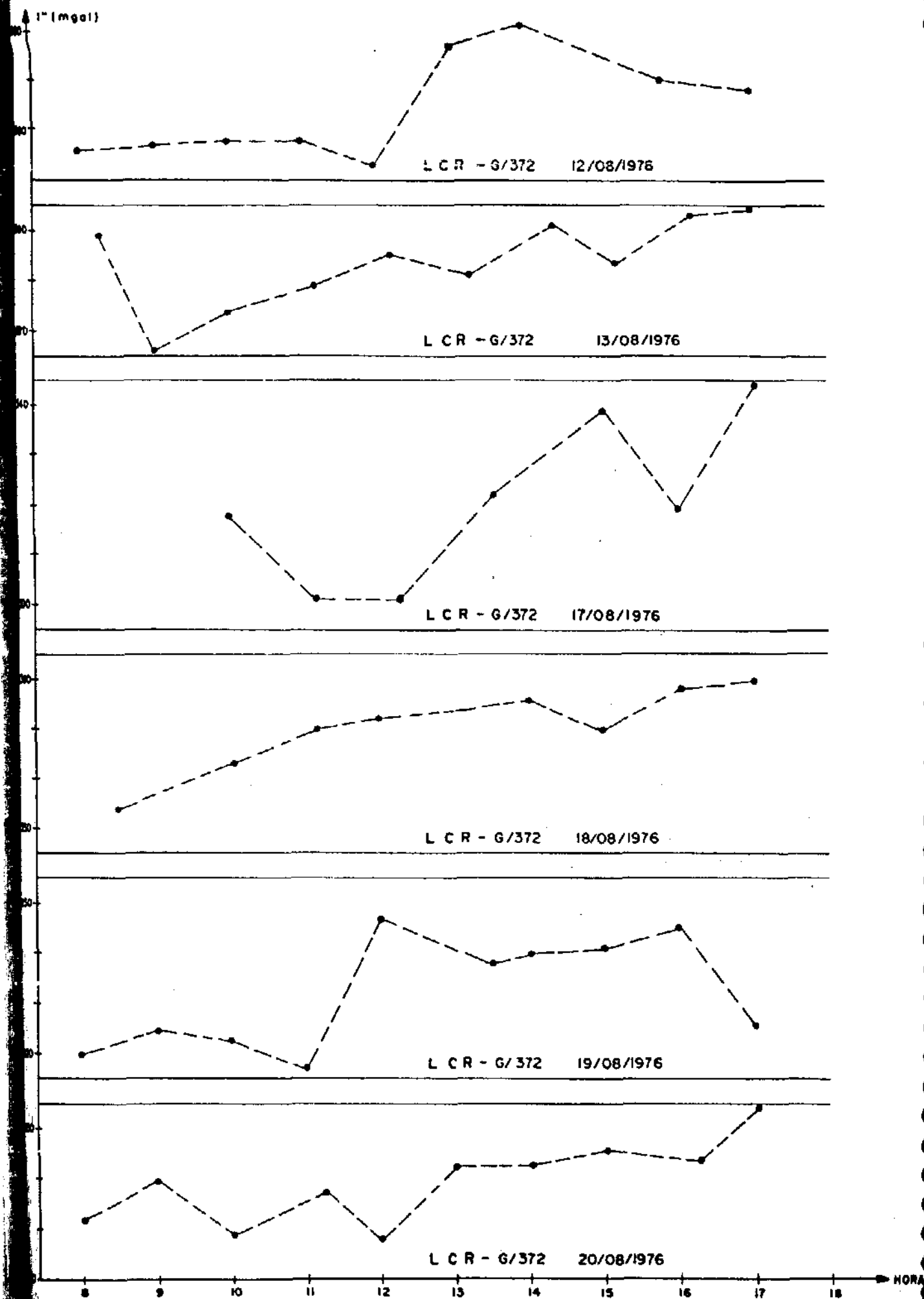
L C R - G/372

09/08/1976

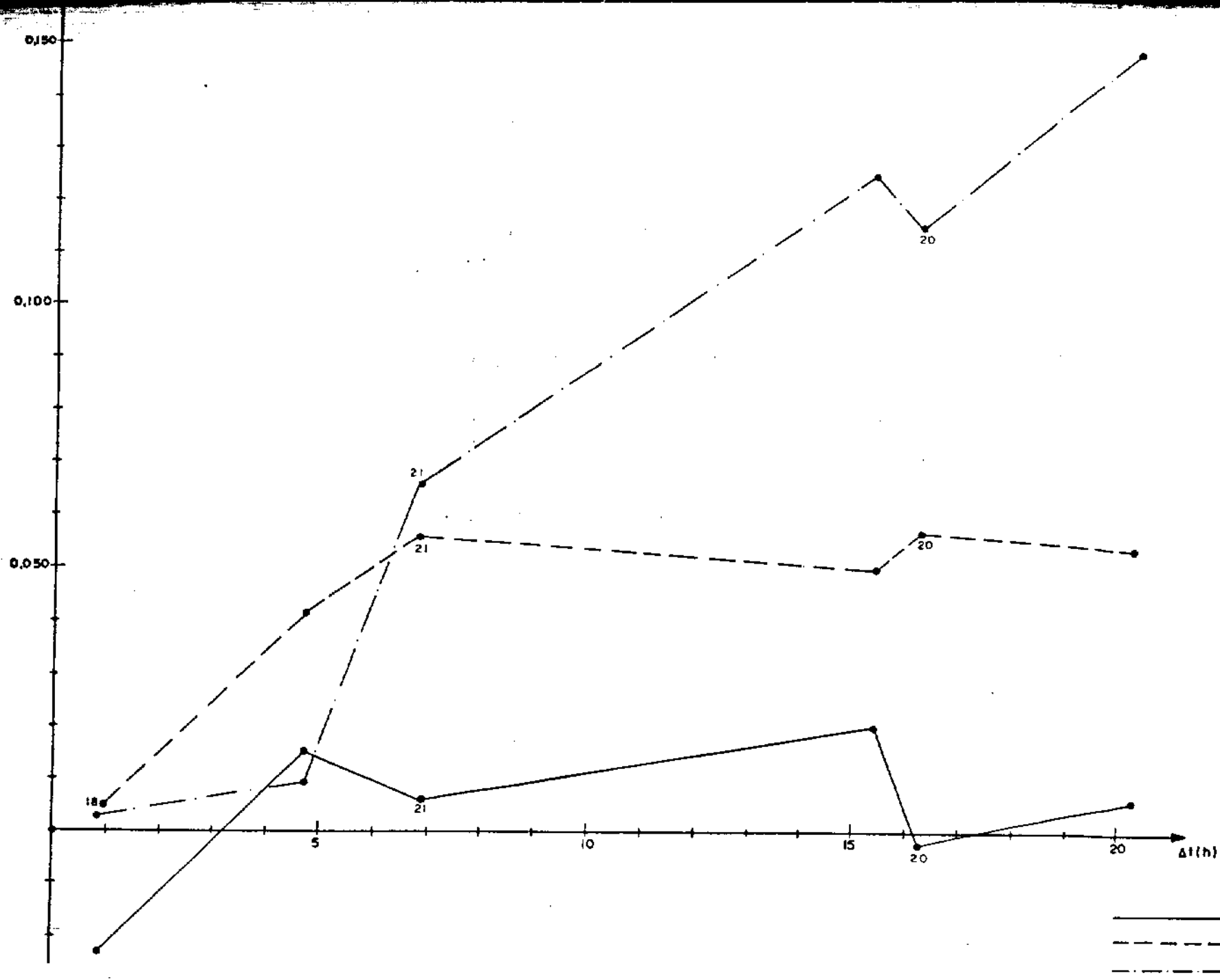
L C R - G/372

11/08/1976

HORA

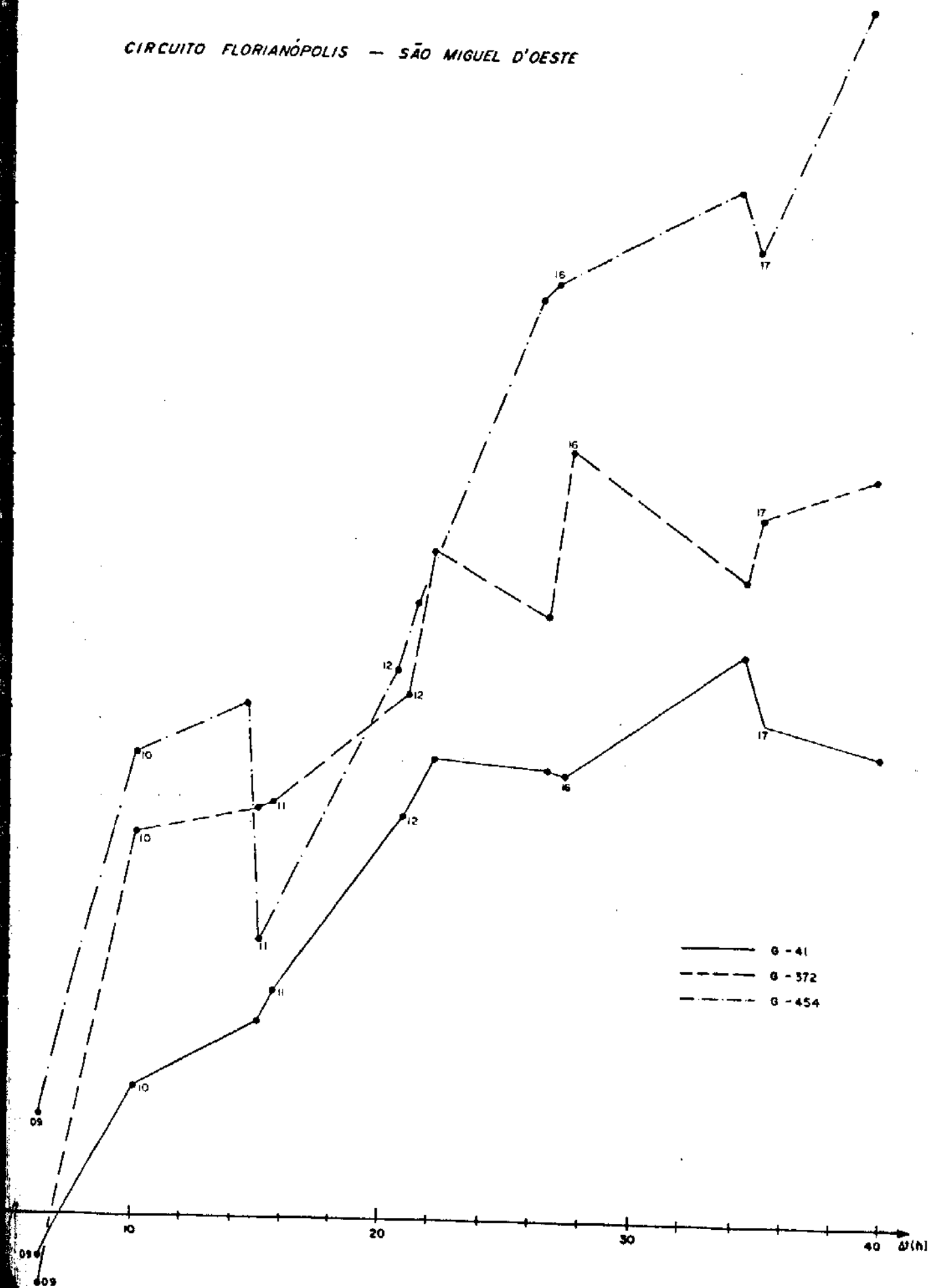


b) deriva dinamică

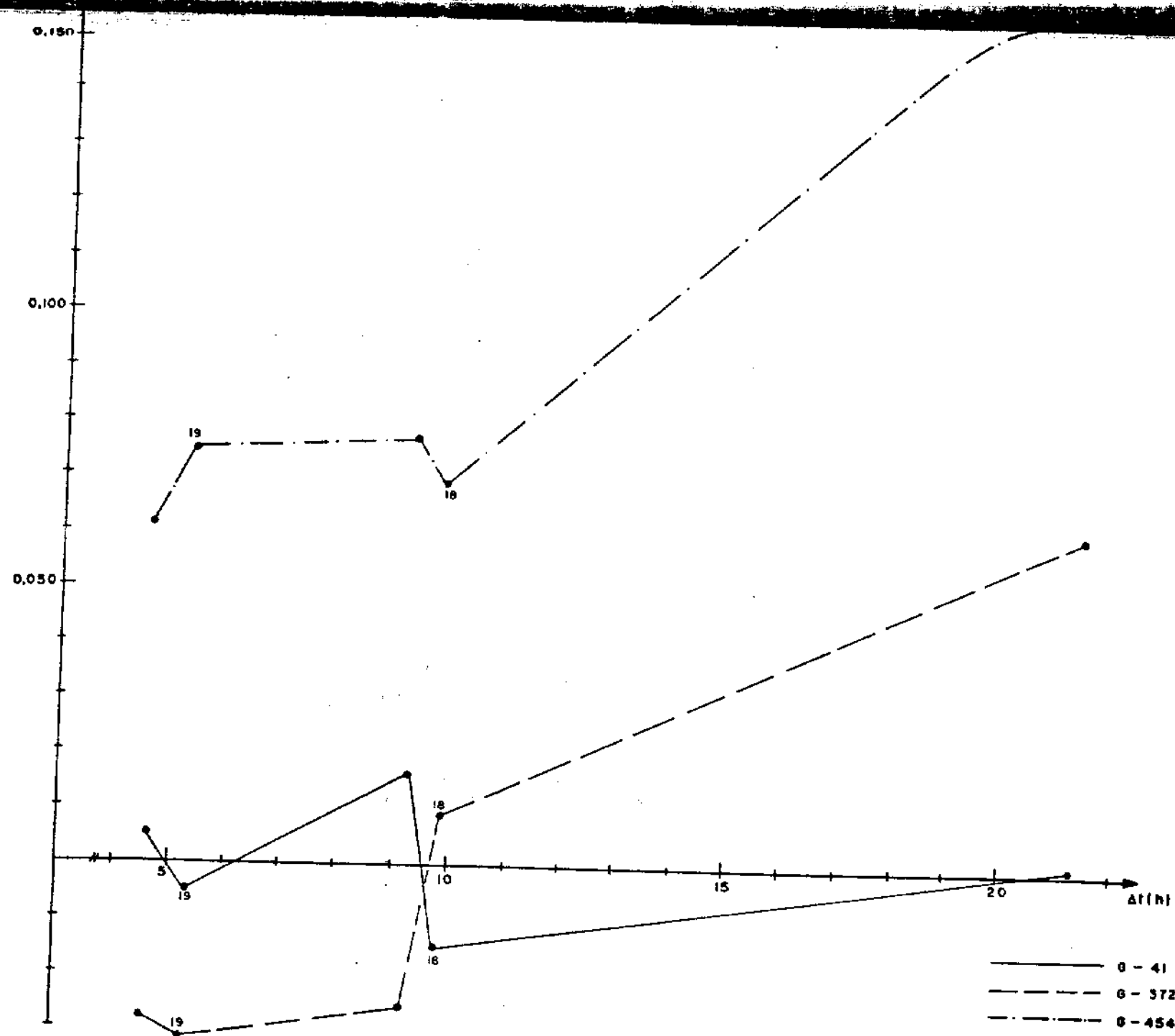


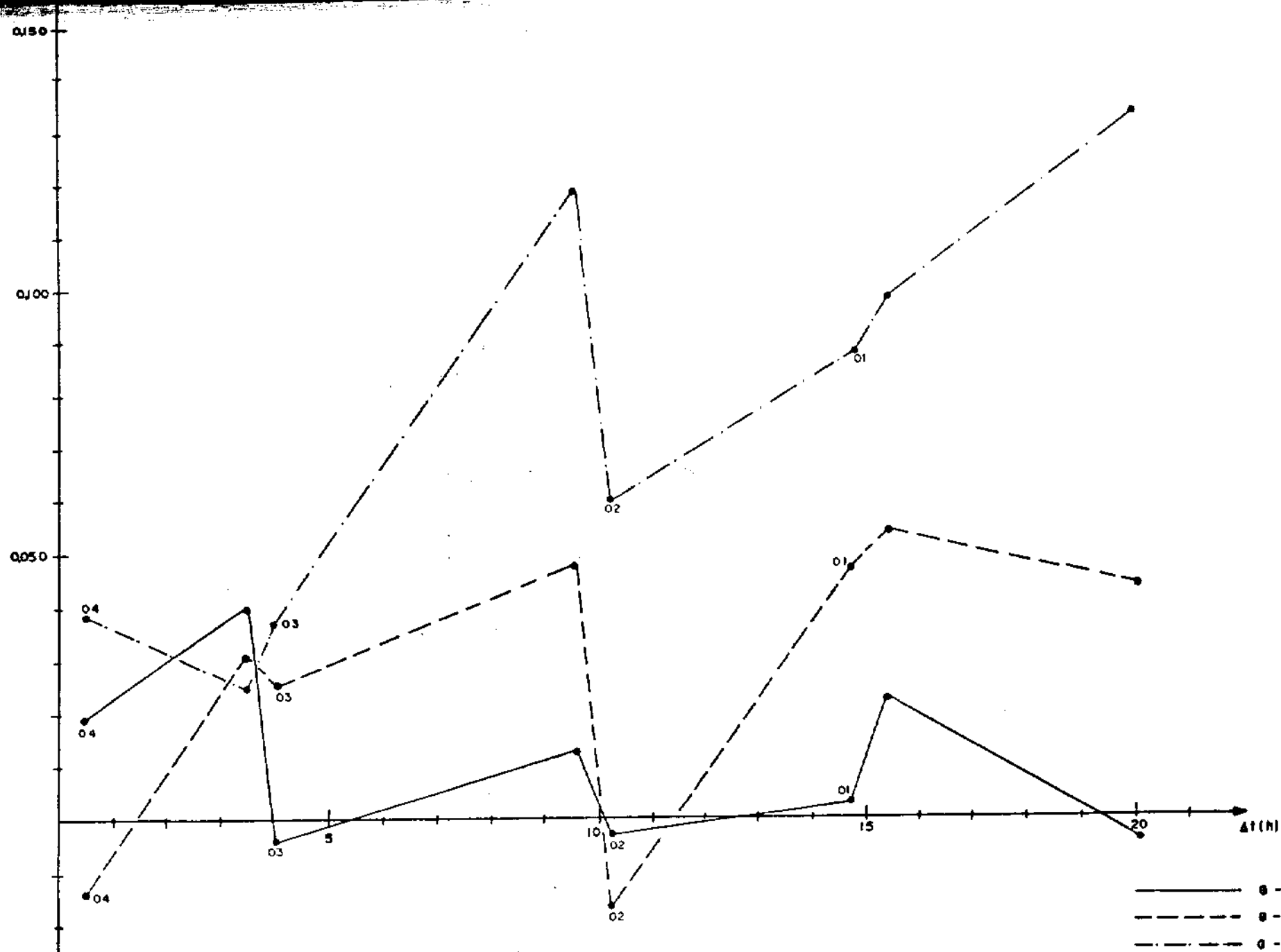
$\mu''(\text{mgul})$ 

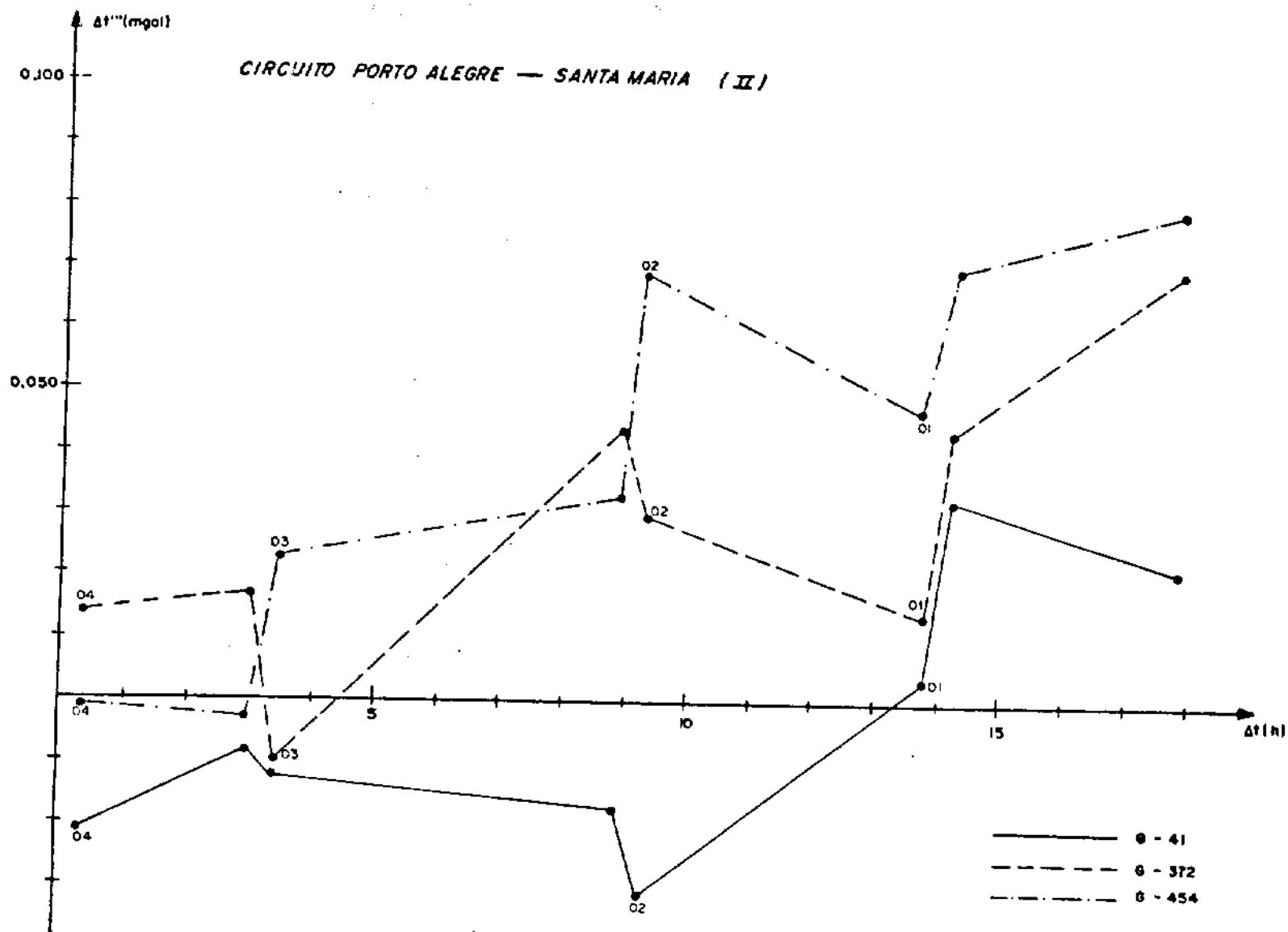
## CIRCUITO FLORIANÓPOLIS — SÃO MIGUEL D'OESTE

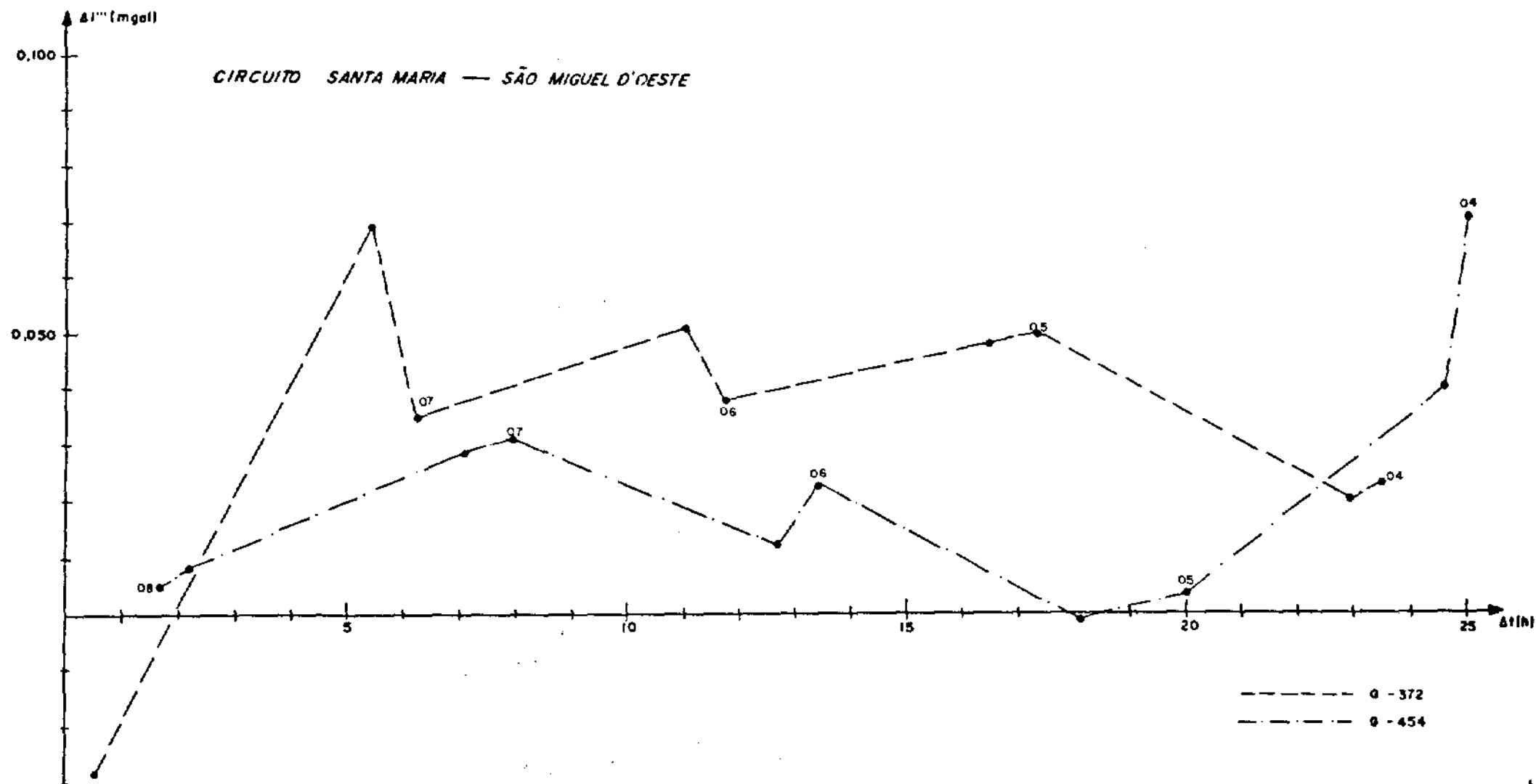




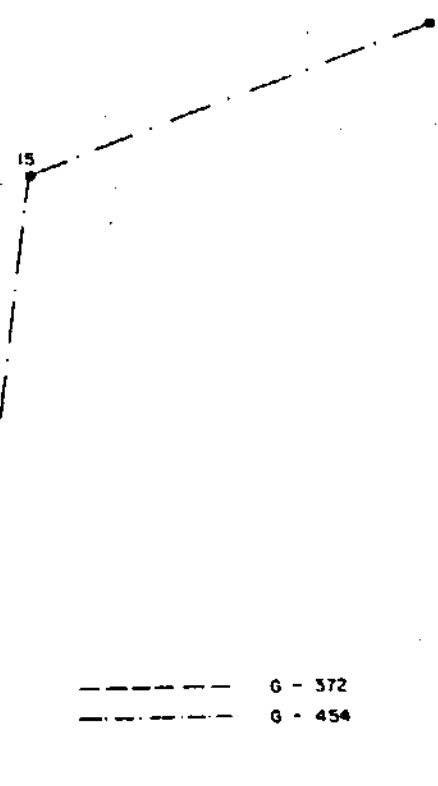
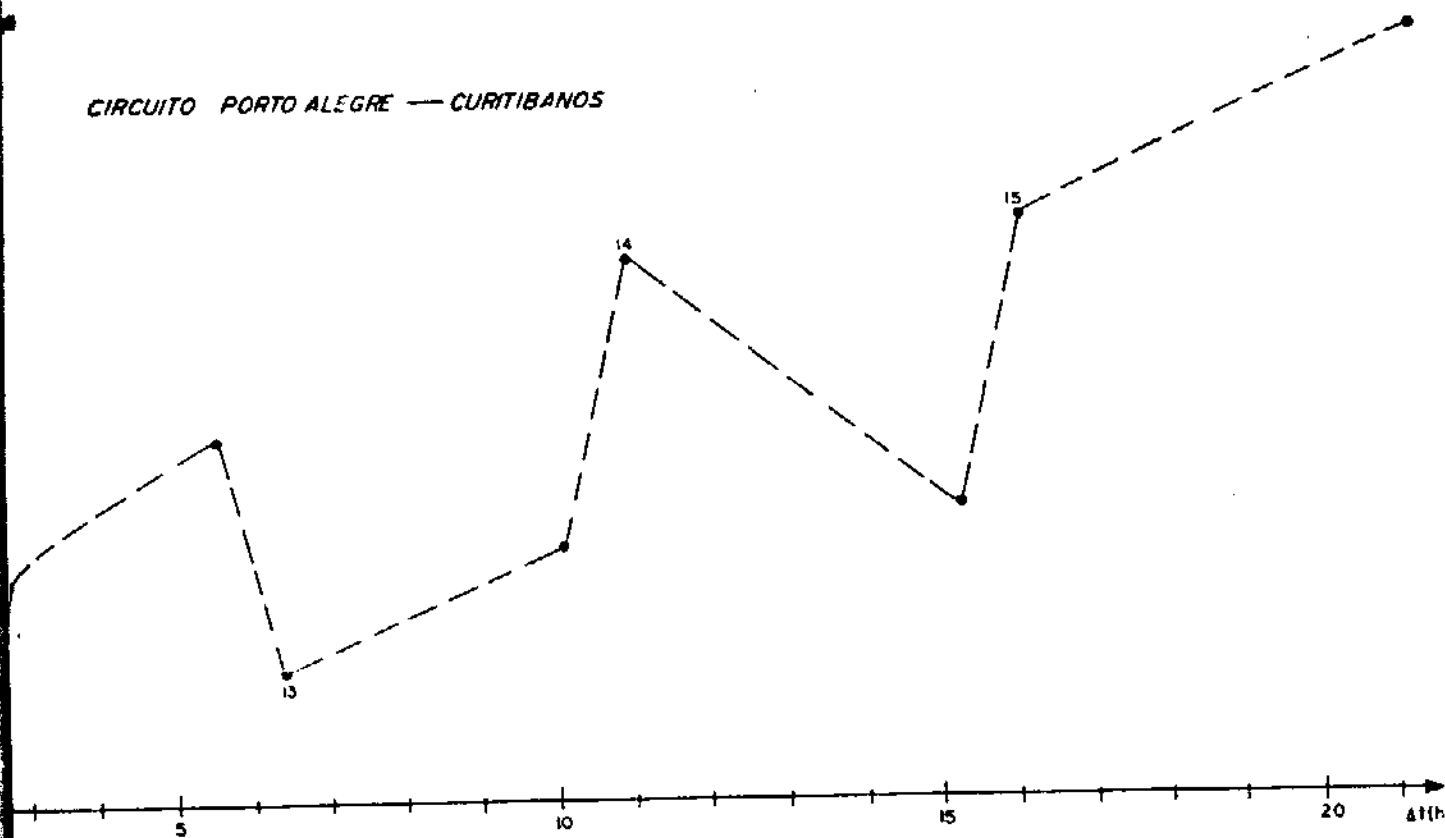








CIRCUITO PORTO ALEGRE — CURITIBANOS



----- G - 372  
----- G - 454

APÉNDICE B

## EXEMPLO DO CÁLCULO DE UM CIRCUITO

(PORTO ALEGRE-CURITIBANOS) PELO PROCESSO CLÁSSICO

As folhas de (1) a (5) constituem a caderneta do cálculo preliminar dos valores de  $g$  nas várias estações do circuito. As etapas correspondem ao que foi descrito no item 3.5.1, seguindo-se a mesma notação. As colunas "estação" e "coordenadas aproximadas", na folha (1), apresentam os mesmos valores para os gravímetros G-372 e G-454, não sendo, por esse motivo, preenchidas para este último instrumento.

## GRAVÍMETRO: LCR G-372

1	ESTAÇÃO	COORDENADAS APROXIMADAS			IDA +						VOLTA +					
		LAT.	LONG.	ALT. (m)	DATA			HORA (TU)		m <sub>i</sub> (mgal)	DATA			HORA (TU)		m <sub>i</sub> (mgal)
					ANO	MES	DIA				ANO	MES	DIA			
01	IGSN-43801/B	30°00'S	51°12'W	0	1978	02	20	10	29	-0,011	1978	02	21	18	42	0,011
02	CAXIAS DO SUL (F)	29°11'S	51°12'W	750				13	09	0,120				16	07	0,137
03	CAXIAS DO SUL (E)	29°11'S	51°12'W	750				13	44	0,137				15	52	0,143
04	VACARIA (F)	28°30'S	50°57'W	950				16	00	0,125				13	47	0,128
05	VACARIA (E)	28°30'S	50°57'W	950				16	32	0,104				13	31	0,118
06	LAGES (F)	27°49'S	50°20'W	900				18	44	-0,014				11	59	0,042
07	LAGES (E)	27°49'S	50°20'W	900				19	20	-0,043				11	47	0,030
08	CURITIBANOS (E)	27°16'S	50°35'W	950				21	04	-0,086				10	25	-0,043
09	CURITIBANOS (F)	27°16'S	50°35'W	950				21	26	-0,085				10	09	-0,054
10	D. ESTÁTICA	27°16'S	50°35'W	950				22	17	-0,072				09	10	-0,082



GRAVÍMETRO: LCR G-454

1	ESTAÇÃO	COORDENADAS APROXIMADAS			IDA ↓						VOLTA ↑					
		LAT.	LONG.	ALT. (m)	DATA			HORA (TU)		m <sub>1</sub> (mgal)	DATA			HORA (TU)		m <sub>1</sub> (mgal)
					ANO	MES	DIA				ANO	MES	DIA			
01					1978	02	20	10	33	-0,008	1978	02	21	18	48	0,006
02								13	17	0,124				16	13	0,134
03								13	48	0,138				15	57	0,141
04								16	06	0,122				13	51	0,130
05								16	37	0,101				13	37	0,122
06								18	51	-0,020				12	04	0,047
07								19	25	-0,046				11	52	0,035
08								21	11	-0,086				10	29	-0,040
09								21	30	-0,085				10	13	-0,052
10								22	21	-0,070				09	15	-0,081

FOLHA (2): CÁLCULO DAS LEITURAS EM mgal ( $l_i'$ ) E DA DERIVA ESTÁTICA(e)

GRAVÍMETRO: LCR G-372

i	IDA			VOLTA		
	$r_i$	$l_i'$ (mgal)	e (mgal)	$r_i$	$l_i'$ (mgal)	e (mgal)
01	2889,506	3086,463		2889,584	3086,547	-0,006
02	2644,696	2825,013		2644,757	2825,078	-0,006
03	2646,037	2826,445		2646,073	2826,483	-0,006
04	2557,226	2731,602		2557,295	2731,676	-0,006
05	2557,403	2731,790		2557,425	2731,815	-0,006
06	2498,125	2668,486		2498,094	2668,453	-0,006
07	2498,604	2668,997		2498,586	2668,978	-0,006
08	2429,235	2594,919		2429,227	2594,911	-0,006
09	2434,717	2600,774		2434,702	2600,758	-0,006
10	2434,569	2600,616		2434,584	2600,632	-0,006

GRAVÍMETRO: LCR G-454

i	IDA			VOLTA		
	$r_i$	$l_i'$ (mgal)	e (mgal)	$r_i$	$l_i'$ (mgal)	e (mgal)
01	2845,230	2988,559		2845,243	2988,572	-0,072
02	2596,804	2727,127		2596,802	2727,125	-0,072
03	2598,211	2728,607		2598,168	2728,562	-0,072
04	2508,075	2633,785		2508,011	2633,717	-0,072
05	2508,245	2633,964		2508,178	2633,893	-0,072
06	2448,014	2570,611		2447,913	2570,504	-0,072
07	2448,560	2571,185		2448,418	2571,036	-0,072
08	2378,061	2497,038		2378,019	2496,994	-0,072
09	2383,571	2502,832		2383,584	2502,846	-0,072
10	2383,413	2502,666		2383,492	2502,749	-0,072

FOLHA (3): CÁLCULO DAS CORREÇÕES DE DERIVA DINÂMICA ( $f_i$ )

GRAVÍMETRO: LCR G-372

i	IDA ↓			VOLTA ↑			CÁLCULO DE c	
	$\ell_i'''$ (mgal)	$T_i$ (h)	$f_i$ (mgal)	$\ell_i'''$ (mgal)	$T_i$ (h)	$f_i$ (mgal)	$\Delta \ell_i'''$ mgal	$\Delta t_i$ (h)
01	3086,452	0,0000	0,000	3086,552	21,3333	-0,094	0,100	21,3333
02	2825,133	2,6667	-0,012	2825,209	18,7500	-0,083	0,076	16,0933
03	2826,582	3,2500	-0,014	2826,620	18,5000	-0,082	0,038	15,2500
04	2731,727	5,5167	-0,024	2731,798	16,4167	-0,072	0,071	10,9000
05	2731,894	6,0500	-0,027	2731,927	16,1500	-0,071	0,033	10,1000
06	2668,472	8,2500	-0,036	2668,489	14,6167	-0,064	0,017	6,3667
07	2668,954	8,8500	-0,039	2669,002	14,4167	-0,064	0,048	5,5667
08	2594,833	10,5833	-0,047	2594,862	13,0500	-0,058	0,029	2,4667
09	2600,689	10,9500	-0,048	2600,698	12,7833	-0,056	0,009	1,8333

 $c = +0,0044 \text{ mgal/h}$ 

GRAVÍMETRO: LCR G-454

i	IDA ↓			VOLTA ↑			CÁLCULO DE c	
	$\ell_i'''$ (mgal)	$T_i$ (h)	$f_i$ (mgal)	$\ell_i'''$ (mgal)	$T_i$ (h)	$f_i$ (mgal)	$\Delta \ell_i'''$ mgal	$\Delta t_i$ (h)
01	2988,551	0,0000	0,000	2988,506	21,3500	0,138	-0,045	21,3500
02	2727,251	2,7333	0,018	2727,187	18,7667	0,122	-0,064	16,0334
03	2728,745	3,2500	0,021	2728,631	18,5000	0,120	-0,114	15,2500
04	2633,907	5,5500	0,036	2633,775	16,4000	0,106	-0,132	10,8500
05	2634,065	6,0667	0,039	2633,943	16,1667	0,105	-0,122	10,1000
06	2570,591	8,3000	0,054	2570,479	14,6167	0,095	-0,112	6,3167
07	2571,139	8,8667	0,057	2570,999	14,4167	0,093	-0,140	5,5500
08	2496,952	10,6333	0,069	2496,882	13,0333	0,084	-0,070	2,4000
09	2502,747	10,9500	0,071	2502,722	12,7667	0,083	-0,025	1,8167

 $c = -0,0065 \text{ mgal/h}$

FOLHA (4): CÁLCULO DAS LEITURAS CORRIGIDAS ( $\bar{\ell}_1$ ) E DAS DIFERENÇAS DE GRAVIDADE ( $\bar{d}_{1-1}$ )

GRAVÍMETRO: G-372

i	IDA	VOLTA	$\bar{\ell}_1^V - \bar{\ell}_1^I$ (mgal)	$\bar{\ell}_1$ (mgal)	$\bar{d}_{1-1}^p$ (mgal)
	$\bar{\ell}_1^I$ (mgal)	$\bar{\ell}_1^V$ (mgal)			
01	3086,452	3086,458	0,006	3086,455	-
02	2825,121	2825,126	0,005	2825,124	-261,331
03	2826,568	2826,538	-0,030	2826,553	1,429
04	2731,703	2731,726	0,023	2731,715	-94,838
05	2731,867	2731,856	-0,011	2731,862	0,147
06	2668,436	2668,425	-0,011	2668,431	-63,431
07	2668,915	2668,938	0,023	2668,927	0,496
08	2594,786	2594,804	0,018	2594,795	-74,132
09	2600,641	2600,642	0,001	2600,642	5,847

GRAVÍMETRO: G-454

i	IDA	VOLTA	$\bar{\ell}_1^V - \bar{\ell}_1^I$ (mgal)	$\bar{\ell}_1$ (mgal)	$\bar{d}_{1-1}^q$ (mgal)
	$\bar{\ell}_1^I$ (mgal)	$\bar{\ell}_1^V$ (mgal)			
01	2988,551	2988,644	0,093	2988,598	-
02	2727,269	2727,309	0,040	2727,289	-261,309
03	2728,766	2728,751	-0,015	2728,759	1,470
04	2633,943	2633,881	-0,062	2633,912	-94,847
05	2634,104	2634,048	-0,056	2634,076	0,164
06	2570,645	2570,574	-0,071	2570,610	-63,466
07	2571,196	2571,092	-0,104	2571,144	0,534
08	2497,021	2496,966	-0,055	2496,994	-74,150
09	2502,818	2502,805	-0,013	2502,812	5,818

FOLHA (5): CÁLCULO DOS VALORES PRELIMINARES DA GRAVIDADE ( $g_i^0$ )

1	ESTAÇÃO	$\bar{d}_{i-1}^p$ (mgal)	$\bar{d}_{i-1}^o$ (mgal)	$\bar{d}_{i-1}$ (mgal)	$q_i^0$ (mgal)
01	IGSN-43801/B	-	-	-	979305,000 *
02	CAXIAS DO SUL (F)	-261,331	-261,309	-261,320	979043,680
03	CAXIAS DO SUL (E)	1,429	1,470	1,450	979045,130
04	VACARIA (F)	-94,838	-94,847	-94,842	978950,288
05	VACARIA (E)	0,147	0,164	0,156	978950,444
06	LAGES (F)	-63,431	-63,466	-63,448	978886,996
07	LAGES (E)	0,496	0,534	0,515	978887,511
08	CURITIBANOS (E)	-74,132	-74,150	-74,141	978813,370
09	CURITIBANOS (F)	5,847	5,818	5,832	978819,202

\* VALOR IGSN/71

OBS.: Notar as diferenças  $\bar{\ell}_i^V - \bar{\ell}_i^I$  para o gravímetro G-454, na folha (4), excedendo, em sua maioria, o valor 0,050mgal (item 3.5.1, b); notar também a curva irregular de deriva dinâmica que o instrumento apresentou no circuito em questão (Apêndice A). Este é um exemplo dos casos em que a correção usual da deriva dinâmica (item 2.2.4.1.2) revela-se inadequada. De qualquer forma, não julgamos conveniente abandonar essas leituras, as quais foram usadas nos ajustamentos do Capítulo Quarto.

APÉNDICE C

## LISTA DAS LEITURAS EFETUADAS NAS ESTAÇÕES

## FUNDAMENTAIS DA SUB-REDE

As leituras abaixo ( $\bar{l}_i$ ) foram retiradas das cadernetas do cálculo clássico, arquivadas no Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas (UFPR), e correspondem à equação 3.5.1.-3. A numeração das estações é a da figura 4.1.-1; as observações ( $r_i$ ) são da inteira responsabilidade do autor.

## a) circuito FLORIANÓPOLIS-TORRES

ESTAÇÃO			$\bar{l}_i$ (mgal)		
Nº	NOME		G-41	G-372	G-454
-	IGSN-40178/A		2758,434	2889,757	2788,315
20	IMBITUBA	F	2809,850	2941,095	2839,681
21	CRICIÔMA	F	2791,914	2923,185	2821,792
18	TORRES	F	2865,932	2997,134	2895,733

## b) circuito FLORIANÓPOLIS-S.MIGUEL D'OESTE

ESTAÇÃO			$\bar{l}_i$ (mgal)		
Nº	NOME		G-41	G-372	G-454
-	IGSN-40178/A		2758,419	2889,825	2788,515
15	ITAJAÍ	F	2695,812	2827,252	2725,935
16	RIO DO SUL	F	2627,584	2759,064	2657,796
12	CURITIBANOS	F	2464,856	2596,507	2495,224
11	JOAÇABA	F	2567,927	2699,473	2598,171
10	PONTE SERRADA	F	2477,265	2608,896	2507,643
09	CHAPECÓ	F	2551,907	2683,481	2582,185
08	S.MIGUEL D'OESTE	F	2510,501	2642,047	2540,784

## c) circuito FLORIANÓPOLIS-PORTO ALEGRE

ESTAÇÃO			$\bar{\ell}_1$ (mgal)		
Nº	NOME		G-41	G-372	G-454
-	IGSN-40178/A		2759,200	2891,379	2791,774
18	TORRES	F	2866,716	2998,802	2899,172
19	OSÓRIO	F	2922,363	3054,429	2954,803
-	IGSN-43801/B		2951,815	3083,823	2984,199

## d) circuito PORTO ALEGRE-SANTA MARIA (I)

ESTAÇÃO			$\bar{\ell}_1$ (mgal)		
Nº	NOME		G-41	G-372	G-454
-	IGSN-43801/B		2951,784	3082,840	2984,273
01	BUTIÁ	F	2944,621	3076,697	2977,138
02	CACHOEIRA DO SUL	F	2952,221	3084,306	2984,713
03	SÃO SEPE	F	2950,216	3082,274	2982,685
04	SANTA MARIA	F	2885,012	3017,133	2917,539

## e) circuito PORTO ALEGRE-SANTA MARIA (II)

ESTAÇÃO			$\bar{\ell}_1$ (mgal)		
Nº	NOME		G-41	G-372	G-454
-	IGSN-43801/B		2951,792	3083,906	2984,446
01	BUTIÁ	F	2944,643	3076,767	2977,303
02	CACHOEIRA DO SUL	F	2952,228	3084,336	2984,871
03	SÃO SEPE	F	2950,237	3082,323	2982,867
04	SANTA MARIA	F	2885,023	3017,195	2917,744



## f) circuito SANTA MARIA-S. MIGUEL D'OESTE

ESTAÇÃO			$\bar{l}_i$ (mgal)	
Nº	NOME		G-372	G-454
04	SANTA MARIA	F	3019,153	2921,353
05	IJUÍ	F	2889,168	2791,463
06	CARAZINHO	F	2822,474	2724,719
07	FR. WESTPHALEN	F	2740,175	2642,436
08	S. MIGUEL D'OESTE	F	2645,710	2547,943

## g) circuito PORTO ALEGRE-CURITIBANOS

ESTAÇÃO			$\bar{l}_i$ (mgal)	
Nº	NOME		G-372	G-454
-	IGSN-43801/B		3086,455	2988,598
15	CAXIAS DO SUL	F	2825,124	2727,289
14	VACARIA	F	2731,715	2633,912
13	LAGES	F	2668,431	2570,610
12	CURITIBANOS	F	2600,642	2502,812

## h) circuito CURITIBA-RIO DO SUL (parcial)

ESTAÇÃO			$\bar{l}_i$ (mgal)	
Nº	NOME		G-41	G-372
12	CURITIBANOS	F	2461,757	2588,357
16	RIO DO SUL	F	2624,478	2750,899

## i) circuito CURITIBA-FLORIANÓPOLIS (parcial)

ESTAÇÃO			$\bar{l}_i$ (mgal)		
Nº	NOME		G-41	G-372	G-454
17	ITAJAÍ	F	2696,960	2829,308	2730,656
-	IGSN-40178/A		2759,571	2891,906	2793,214

APENDICE D

## PROGRAMAS (BASIC) UTILIZADOS NOS AJUSTAMENTOS

## PROGRAMA 1

```

10  DIM AS(25,4),BS(4,25),K(4,1),LS(25,1),M(4,4),OS(25,1),
20  DIM P(25),S(1,1),T(1,4),VS(25,1),W(4,1)
30  REM-----
40  DISP "MATRIZ B"
50  WAIT 5000
60  FOR I=1 TO 4
70  FOR J=1 TO 25
80  INPUT B(I,J)
90  NEXT J
100 NEXT I
110 MAT PRINT B
120 REM-----
130 DISP "MATRIZ O = LB (OBSERVACOES)"
140 WAIT 5000
150 FOR I=1 TO 25
160 INPUT O(I,1)
170 NEXT I
180 MAT PRINT O
190 REM-----
200 DISP "MATRIZ P-1"
210 WAIT 4000
220 FOR I=1 TO 25
230 INPUT P(I)
240 NEXT I
250 MAT PRINT P
260 REM-----
270 DISP "MATRIZ W"
280 WAIT 5000
290 FOR I=1 TO 4
300 INPUT W(I,1)
310 NEXT I
320 MAT PRINT W
330 REM-----
340 DISP "CALCULO DA MATRIZ A = P-1BT"
350 FOR I=1 TO 25
360 FOR J=1 TO 4
370 A(I,J)=P(I)*B(J,I)
380 NEXT J
390 NEXT I
400 MAT PRINT A
410 REM-----
420 DISP "CALCULO DAS MATRIZES M E M-1"
430 MAT M=B*A
440 MAT PRINT M
450 MAT M=INV(M)
460 MAT PRINT M
470 REM-----
480 DISP "CALCULO DA MATRIZ K"
490 MAT K=M*W
500 MAT K=(-1)*K
510 MAT PRINT K
520 REM-----

```

```
530 DISP "CALCULO DA MATRIZ V"
540 MAT V=A*K
550 MAT PRINT V
560 REM-----
570 DISP "CALCULO DA MATRIZ LA (VALORES OBSERVADOS AJUS
-TADOS) "
580 MAT L=0+V
590 MAT PRINT L
600 REM-----
610 DISP "CALCULO DE SIGMA-0**2 A POSTERIORI"
620 MAT T=TRN(K)
630 MAT S=T*W
640 MAT S=(-1)*S
650 S2=S(1,1)/4
660 PRINT
670 PRINT "SIGMA-0**2 A-POSTERIORI =",S2
680 END
```

## PROGRAMA 2

```
10  DIM XS(25,4),YS(4,25),BS(4,25),TS(25,4),M(4,4),PS(25)
20  REM-----
30  DISP "MATRIZ B"
40  WAIT 5000
50  FOR I=1 TO 4
60  FOR J=1 TO 25
70  INPUT B(I,J)
80  NEXT J
90  NEXT I
100 REM-----
110 DISP "MATRIZ M-1"
120 WAIT 5000
130 FOR I=1 TO 4
140 FOR J=1 TO 4
150 INPUT M(I,J)
160 NEXT J
170 NEXT I
180 REM-----
190 DISP "MATRIZ P-1"
200 WAIT 5000
210 FOR I=1 TO 25
220 INPUT P(I)
230 NEXT I
240 REM-----CALCULO DA MATRIZ X = BTM-1
250 MAT T=TRN(B)
260 MAT X=T*M
270 MAT PRINT X
280 PRINT
290 PRINT
300 REM-----CALCULO DA MATRIZ Y = BP-1
310 FOR I=1 TO 4
320 FOR J=1 TO 25
330 Y(I,J)=P(J)*B(I,J)
340 NEXT J
350 NEXT I
360 MAT PRINT Y
380 END
```

## PROGAMA 3

```

10  DIM ZS(1,25),XS(1,4),YS(4,25),PS(1,25)
20  REM-----
30  DISP "SIGMA-0**2 A-POSTERIORI"
40  WAIT 5000
50  INPUT S2
60  REM-----
70  DISP "MATRIZ Y"
80  WAIT 5000
90  FOR I=1 TO 4
100  FOR J=1 TO 25
110  INPUT Y(I,J)
120  NEXT J
130  NEXT I
140  REM-----
150  DISP "MATRIZ P-1"
160  FOR I=1 TO 25
170  INPUT P(1,I)
180  NEXT I
190  MAT P=(S2)*P
200  REM-----CALCULO DA MATRIZ VARIANCIA-COVARI-
    -ANCIA
210  FOR K=1 TO 25
220  DISP "LINHA MAT. X",K
230  WAIT 4000
240  FOR I=1 TO 4
250  INPUT X(1,I)
260  NEXT I
270  FOR N=1 TO 25
280  Z(1,N)=X(1,1)*Y(1,N)+X(1,2)*Y(2,N)+X(1,3)*
    *Y(3,N)+X(1,4)*Y(4,N)
290  NEXT N
300  Z(1,K)=1-Z(1,K)
310  FOR G=1 TO 25
320  Z(1,G)=Z(1,G)*P(1,K)
330  NEXT G
340  MAT PRINT Z
350  NEXT K
360  END

```

## PROGRAMA 4

MATRIZES N = ATPA, N-1

VARIÁVEIS AUXILIARES:

C: 0,1 - ESTACAO ANTERIOR A IGSN OU ULTIMA DA NUMERACAO

D: BIFURCACAO (IGSN EXCLUIDAS)    1 - CONVERGENCIA  
                                      -1 - DIVERGENCIA  
                                      0 - SEM BIFURCACAO

```

10  DIM NS(24,24),PS(9)
20  MAT N=ZER
30  FOR I=1 TO 21
40  DISP "ENTRADA N.",I
50  WAIT 5000
60  FOR J=1 TO 9
70  INPUT P(J)
80  NEXT J
90  INPUT Z1,Z2,Z3,C,D
100 N(I,I)=(P(1)+P(4)+P(7))+(P(2)+P(5)+P(8))+(P(3)+P(6)+P(9))
110 IF I>20 THEN 170
120 N(I,I+1)=N(I+1,I)=-(1-C)*(P(4)+P(5)+P(6))
130 IF I≠12 THEN 150
140 N(I,16)=N(16,I)=-(P(7)+P(8)+P(9))
150 IF I≠18 THEN 170
160 N(I,21)=N(21,I)=-(P(7)+P(8)+P(9))
170 N(I,22)=N(22,I)=(P(1)*Z1-P(4)*Z2+D*P(7)*Z3)
180 N(I,23)=N(23,I)=(P(2)*Z1-P(5)*Z2+D*P(8)*Z3)
190 N(I,24)=N(24,I)=(P(3)*Z1-P(6)*Z2+D*P(9)*Z3)
200 N(22,22)=N(22,22)+P(1)*Z1+2+C*P(4)*Z2+2
210 N(23,23)=N(23,23)+P(2)*Z1+2+C*P(5)*Z2+2
220 N(24,24)=N(24,24)+P(3)*Z1+2+C*P(6)*Z2+2
230 NEXT I
240 MAT PRINT N
250 PRINT
260 MAT N=INV(N)
270 MAT PRINT N
280 END

```

## PROGRAMA 5

```

10  DIM LS(9),NS(1,24),PS(9),TS(1,24),US(24,1),V(1,1),
    XS(24,1),Y(1,1)
20  MAT U=ZER
30  F=0
40  FOR I=1 TO 21
50  DISP "ENTRADA N.",I
60  WAIT 3000
70  FOR J=1 TO 9
80  INPUT L(J)
90  NEXT J
100 FOR K=1 TO 9
110 INPUT P(K)
120 NEXT K
130 INPUT Z1,Z2,C,D
140 U(I,1)=P(1)*L(1)+P(2)*L(2)+P(3)*L(3)-(P(4)*L(4)+
    P(5)*L(5)+P(6)*L(6))
150 U(I,1)=U(I,1)+D*(P(7)*L(7)+P(8)*L(8)+P(9)*L(9))
160 U(22,1)=U(22,1)+P(1)*L(1)*Z1+C*P(4)*L(4)*Z2
170 U(23,1)=U(23,1)+P(2)*L(2)*Z1+C*P(5)*L(5)*Z2
180 U(24,1)=U(24,1)+P(3)*L(3)*Z1+C*P(6)*L(6)*Z2
190 F=F+P(1)*L(1)+2+P(2)*L(2)=2+P(3)*L(3)+2
200 F=F+C*(P(4)*L(4)+2+P(5)*L(5)+2+P(6)*L(6)+2)
210 NEXT I
220 PRINT "MAT U"
230 MAT PRINT U
240 FOR I=1 TO 24
250 DISP "LINHA MAT.N-1",I
260 WAIT 3000
270 FOR J=1 TO 24
280 INPUT N(1,J)
290 NEXT J
300 MAT Y=N*U
310 X(I,1)=-Y(1,1)
320 NEXT I
330 PRINT "MAT X"
340 MAT PRINT X
350 MAT T=TRN(X)
360 MAT V=T*U
370 E=V(1,1)
380 PRINT "XTU    =",E
390 PRINT "LTPL   =",F
400 S=E+F
410 PRINT "VTPV    =",S
420 S=S/43
430 PRINT "SIGMA-0**2 A-POSTERIORI  =",S
440 END

```



## NOTAS DE REFERÊNCIAS

|<sup>01</sup>| MORELLI, C. The international gravity standardization net 1971 (I.G.S.N. 71). Paris, Bureau Central de l'Association Internationale de Géodésie, s.d. 194p. (Publication spéciale nº 4). p.8.

|<sup>02</sup>| SAZHINA, N. & GRUSHINSKY, N. Gravity Prospecting. Moscow, Mir Publishers, 1971. p.319.

|<sup>03</sup>| LEJAY, P. Développements modernes de la gravimétrie. Paris, Gauthier-Villars, 1947. p.24-25.

|<sup>04</sup>| MELCHIOR, P. Physique et dynamique planétaires. Louvain, Vander, 1971. v.2. p.95-96.

|<sup>05</sup>| SHOKIN, P.F. Gravimetry (apparatus and methods for measuring gravity). Jerusalem, Israel Program for Scientific Translations, 1963. p.241.

|<sup>06</sup>| LEJAY, p.25.

|<sup>07</sup>| Ibid., p.12.

|<sup>08</sup>| MELCHIOR, p.83-85.

|<sup>09</sup>| MIRONOV, V.S. Curso de prospección gravimétrica. Barcelona, Reverté, 1977. p.124-128.

|<sup>10</sup>| PICK, W. et alii Theory of the earth's gravity field. Amsterdam, Elsevier, 1973. p.141-142.

|<sup>11</sup>| SHOKIN, p.155.

|<sup>12</sup>| GEPSTENECKER, C. Die genaue Messung von kleinen Schwereunterschieden. Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C, München, (191): 6., 1973.

[<sup>13</sup>] MIRONOV, p.123.

[<sup>14</sup>] PICK, p.140.

[<sup>15</sup>] SHOKIN, p.153.

[<sup>16</sup>] PICK, p.143.

[<sup>17</sup>] SHOKIN, p.158.

[<sup>18</sup>] Ibid., p.202.

[<sup>19</sup>] MIRONOV, p.121.

[<sup>20</sup>] Ibid., p.131-132.

[<sup>21</sup>] SHOKIN, p.158.

[<sup>22</sup>] MIRONOV, p.133.

[<sup>23</sup>] PICK, p.143.

[<sup>24</sup>] SHOKIN, p.160.

[<sup>25</sup>] SAZHINA, p.238-245.

[<sup>26</sup>] SHOKIN, p.162-165.

[<sup>27</sup>] MIRONOV, p.137.

[<sup>28</sup>] PICK, p.144.

[<sup>29</sup>] SHOKIN, p.166.

[<sup>30</sup>] MIRONOV, p.138.

[<sup>31</sup>] SHOKIN, p.167.

[<sup>32</sup>] PICK, p.146.

|<sup>33</sup>| SHOKIN, p.168.

|<sup>34</sup>| LA COSTE & ROMBERG, INC. Instruction Manual for LaCoste & Romberg, Inc. model G gravity meter nº G-372. Austin, s.d. Nao paginado.

|<sup>35</sup>| SHOKIN, p.169-171.

|<sup>36</sup>| MIRONOV, p.118-120.

|<sup>37</sup>| SHOKIN, p.146-149.

|<sup>38</sup>| WATERMANN, H. Über systematische Fehler bei Gravimetermessungen. Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C, München, (21): 3-7, 1957.

|<sup>39</sup>| ESTADOS UNIDOS. Defense Mapping Agency Topographic Center. General land gravity survey instructions. s.l., 1974. p.48.

|<sup>40</sup>| HAMILTON, A.C. & BRULÉ, B.G. Vibration-induced drift in LaCoste & Romberg geodetic gravimeters. Journal of Geophysical Research, 72(8):2187-2197, 1967.

|<sup>41</sup>| SHOKIN, p.270.

|<sup>42</sup>| Ibid., p.270.

|<sup>43</sup>| GERSTENECKER, p.57-59.

|<sup>44</sup>| Ibid., p.26.

|<sup>45</sup>| WATERMANN, p.49.

|<sup>46</sup>| GERSTENECKER, p.38-43.

|<sup>47</sup>| MIRONOV, p.153-154.

|<sup>48</sup>| PICK, p.148.

|<sup>49</sup>| Ibid., p.147.

|<sup>50</sup>| SHOKIN, p.189.

|<sup>51</sup>| MAKAROV, N.P. Geodetic gravimetry. St. Louis, Defense Mapping Agency Aerospace Center, 1972. p.476-479.

|<sup>52</sup>| SHOKIN, p.196-198.

|<sup>53</sup>| Ibid., p.172.

|<sup>54</sup>| MAKAROV, p.464.

|<sup>55</sup>| SHOKIN, p.172.

|<sup>56</sup>| GODIN, G. The analysis of tides. Toronto, University of Toronto Press, 1972. p.16-20.

|<sup>57</sup>| MELCHIOR, P. Physique et dynamique planétaires. Louvain, Vander, 1971. v.1. p.117-118.

|<sup>58</sup>| GODIN, p.16-20.

|<sup>59</sup>| MELCHIOR, v.1, p.117-118.

|<sup>60</sup>| GEMAEL, C. & HIBLER, I. Efeito da atracção luni-solar sobre as medidas gravimétricas (gráficos para o ano de 1978). Boletim da Universidade Federal do Paraná - Geodésia. Curitiba, (22):5, 1978.

|<sup>61</sup>| MAKAROV, p.467.

|<sup>62</sup>| LONGMAN, I.M. Formulas for computing the tidal accelerations due to the moon and the sun. Journal of Geophysical Research, Richmond, 64(12):2351-2355, 1959.

|<sup>63</sup>| Ibid., p.2351-2355.

|<sup>64</sup>| Ibid., p.2355.

|<sup>65</sup>| EUROPEAN ASSOCIATION OF EXPLORATION GEOPHYSICISTS. Tidal gravity corrections for 1979. The Hague, 1978. p.1-53.

|<sup>66</sup>| GEMAEL, C. & HIBLER, I., p.1-32.

|<sup>67</sup>| LONGMAN, p.2351-2355.

|<sup>68</sup>| MIRONOV, p.61.

|<sup>69</sup>| ESTADOS UNIDOS, p.2.

|<sup>70</sup>| Ibid., p.5.

|<sup>71</sup>| Ibid., p.3.

|<sup>72</sup>| Ibid., p.2.

|<sup>73</sup>| Ibid., p.4.

|<sup>74</sup>| SHOKIN, p.271.

|<sup>75</sup>| WATERMANN, p.26-37.

|<sup>76</sup>| Ibid., p.36-37.

|<sup>77</sup>| LACOSTE & ROMBERG, INC.

|<sup>78</sup>| GERSTENECKER, p.8-9.

|<sup>79</sup>| LACOSTE & ROMBERG, INC.

|<sup>80</sup>| ESTADOS UNIDOS, p.11.

|<sup>81</sup>| Ibid., p.

|<sup>82</sup>| GEMAEL, C. Aplicações do cálculo matricial em geodésia;  
2ª parte: ajustamento de observações. Curitiba, UFPR, Curso de  
Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1974. p.32-39.

|<sup>83</sup>| MORELLI, p.77-79.

|<sup>84</sup>| GEMAEL, p.52-57.

|<sup>85</sup>| MORELLI, p.77-79.

|<sup>86</sup>| MIRONOV, p.217.

|<sup>87</sup>| UOTILA, U.A. Introduction to adjustment computations with matrices. s.l., The Ohio State University, 1976. p.64.

|<sup>88</sup>| HAMILTON, W.C. Statistics in physical science: estimation, hypothesis testing, and least squares. New York, Ronald Press, 1964. p.207.

|<sup>89</sup>| GEMAFEL, p.36.

|<sup>90</sup>| Ibid., p.32-39.

|<sup>91</sup>| MOOD, A. M. et alii. Introduction to the theory of statistics. Tokyo, McGraw-Hill Kogakusha, 1974. p.181.

|<sup>92</sup>| HAMILTON, W.C., p.207.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

01. ESTADOS UNIDOS. Defense Mapping Agency Topographic Center. General land gravity survey instructions. s.l., 1974. 50p.
02. EUROPEAN ASSOCIATION OF EXPLORATION GEOPHYSICISTS. Tidal gravity corrections for 1979. The Hague, 1978. 53p.
03. GEMMEL, C. Aplicações do cálculo matricial em geodésia; 2ª parte: ajustamento de observações. Curitiba, UFPR, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1974. 103p.
04. GEMMEL, C. & HIBLER, I. Efeito da atração luni-solar sobre as medidas gravimétricas (gráficos para o ano de 1978). Boletim da Universidade Federal do Paraná - Geodésia. Curitiba, (22): 32p., 1978.
05. GERSTENECKER, C. Die genaue Messung von kleinen Schwereunterschieden. Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C, München, (191):81p, 1973.
06. GODIN, G. The analysis of tides. Toronto, University of Toronto Press, 1972. 264p.
07. HAMILTON, A.C. & BRULÉ, B.G. Vibration-induced drift in LaCoste & Romberg geodetic gravimeters. Journal of Geophysical Research, Richmond, 72(8):2187-2197, 1967.
08. HAMILTON, W.C. Statistics in physical science: estimation, hypothesis testing, and least squares. New York, Ronald Press, 1964. 230p.
09. KIVINIEMI, A. The first order gravity net of Finland. Suomen Geodeettisenlaitoksen Julkaisuja. Helsinki, (59):48p., 1964.

10. \_\_\_\_\_. High precision measurements for studying the secular variation in gravity in Finland. Suomen Geodeettisen Laitoksen Julkaisuja. Helsinki, (78):68p., 1974.
11. LACOSTE & ROMBERG, INC. Instruction manual for LaCoste & Romberg, Inc. model G gravity meter n° G-372. Austin, s.d. Nao paginado.
12. LEJAY, P. Développements modernes de la gravimétrie. Paris, Gauthier-Villars, 1947. 243p.
13. LONGMAN, I.M. Formulas for computing the tidal accelerations due to the moon and the sun. Journal of Geophysical Research, Richmond, 64(12):2351-2355, 1959.
14. MAKAROV, N.P. Geodetic gravimetry. St. Louis, Defense Mapping Agency Aerospace Center, 1972. 566p.
15. MELCHIOR, P. Physique et dynamique planétaires. Louvain, Vander, 1971. V. 1,2.
16. MIRONÓV, V.S. Curso de prospección gravimétrica. Barcelona, Reverté, 1977. 525p.
17. MOOD, A.M. et alii Introduction to the theory os statistics. Tokyo, McGraw-Hill Kogakusha, 1974. 564p.
18. MORELLI, C. The international gravity standardization net 1971 (I.G.S.N. 71). Paris, Bureau Central de l'Association Internationale de Géodésie, s.d. 194p. (Publication spéciale, 4).
19. PICK, M. et alii Theory of the earth's gravity field. Amsterdam, Elsevier, 1973. 538p.
20. SAZHINA, N. & GRUSHINSKY, N. Gravity prospecting. Moscow, Mir Publishers, 1971. 491p.
21. SCHIEUSENER, A. et alii Präzisionsschweremessungen in Nordostisland 1970/71, Beiträge zu den geodätischen und geophysikalischen Forschungsarbeiten in Island. Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe B, München, (206):25p., 1974.



22. SHOKIN, P.F. Gravimetry (apparatus and methods for measuring gravity). Jerusalem, Israel Program for Scientific Translations, 1963. 323p.
23. TORGE, W. et alii Eichung von LaCoste-Romberg-Gravimetern auf der europäischen Gravimetereichlinie zwischen München und Bodø. Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe B, München, (219):57p., 1976.
24. TORGE, W. et alii Verbindung des niederländischen Schwerenetzes mit dem "International Gravity Standardization Net 1971" (IGSN 71). Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe B, München, (195):16p., 1973.
25. UOTILA, U.A. Introduction to adjustment computations with matrices. s.l., The Ohio State University, 1976. Paginação irregular.
26. WATERMANN, H. Über systematische Fehler bei Gravimetermessungen. Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe B, München, (21):67p., 1957.