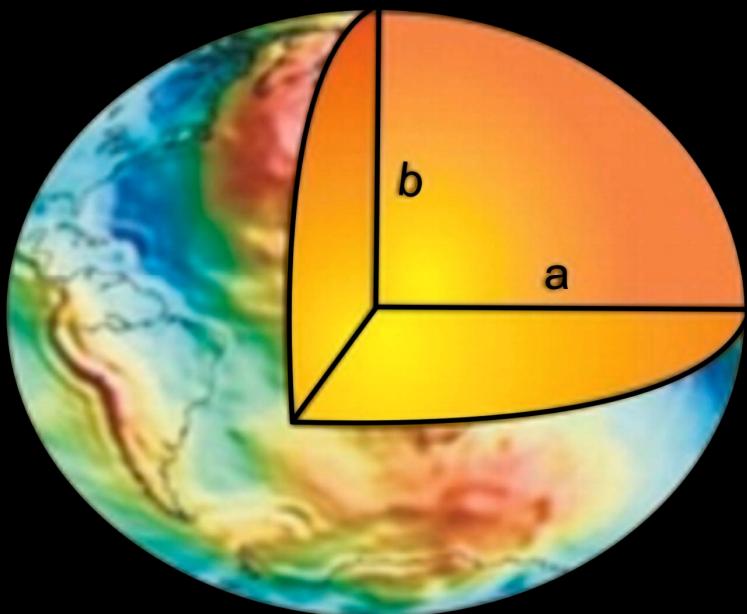


# Elementos de Geodésia

1994



Nelsi Côgo de Sá

IAG-USP  
Departamento de Geofísica

# SUMÁRIO

1. ESBOÇO HISTÓRICO	05
1.1 AS PRIMEIRAS IDÉIAS SOBRE A FORMA DA TERRA	05
<i>A era da forma esférica</i>	05
<i>A era da forma elipsoidal</i>	07
<i>A era da forma geoidal</i>	08
2. INTRODUÇÃO	11
2.1. APLICAÇÕES DA GEODÉSIA	12
<i>Mapeamento</i>	12
<i>Projetos de engenharia</i>	12
<i>Administração urbana</i>	13
<i>Demarcação de fronteiras</i>	13
<i>Ecologia</i>	13
<i>Administração ambiental</i>	13
<i>Geografia</i>	13
2.2. RELAÇÃO DA GEODÉSIA COM OUTRAS CIÊNCIAS	13
<i>Geofísica</i>	14
<i>Ciências espaciais</i>	14
<i>Astronomia</i>	14
<i>Oceanografia</i>	14
<i>Geologia</i>	15
3. CONCEITOS E DEFINIÇÕES	16
<i>Superfíciefísica da terra (SF)</i>	16
<i>Superfície geoidal (SG)</i>	16
<i>Superfície elipsoidal (SE)</i>	17
<i>Geóide</i>	17
<i>Vertical de ponto (v)</i>	17
<i>Normal de ponto(n)</i>	17
3.1. COORDENADAS CARTESIANAS GEOCÊNTRICAS	18
3.2. COORDENADAS ASTRONÔMICAS	18
<i>Esfera celeste</i>	19
<i>Eixo do mundo</i>	19
<i>Polos celestes</i>	19
<i>Equador celeste</i>	20

<i>Paralelos celestes</i>	20
<i>Meridianos celestes</i>	20
<i>Meridiano local</i>	20
<i>Meridiano médio de Greenwich (MG)</i>	20
<i>Latitude astronômica de um ponto (<math>\Phi</math>)</i>	20
<i>Longitude astronômica de um ponto (<math>\Lambda</math>)</i>	21
 3.3. COORDENADAS GEODÉSICAS	21
 <i>Latitude geodésica de um ponto (<math>\varphi</math>)</i>	21
<i>Longitude geodésica de um ponto (<math>\lambda</math>)</i>	22
<i>Diferença entre as coordenadas astronômicas e geodésicas de um ponto</i>	22
<i>Altitude ortométrica de um ponto (H)</i>	22
<i>Altitude geométrica de um ponto (h)</i>	22
<i>Altura geoidal de um ponto (N)</i>	23
<i>Azimute da direção entre dois pontos (A)</i>	23
 3.4. RELAÇÕES ENTRE COORDENADAS ASTRONÔMICAS E GEODÉSICAS	23
 <i>Componente meridiana do desvio da vertical (<math>\xi</math>)</i>	24
<i>Componente primeiro vertical do desvio da vertical (<math>\eta</math>)</i>	24
 3.5. RELAÇÃO ENTRE COORDENADAS CARTESIANAS E GEODÉSICAS	25
 4. SISTEMAS GEODÉSICOS DE REFERÊNCIA	28
 4.1. O ELIPSÓIDE DE REFERÊNCIA	28
 4.2. ELIPSÓIDE INTERNACIONAL 1930	29
 <i>Constantes geocêntricas (1924 mantidas em -1930)</i>	30
<i>Fórmula da gravidade teórica (1930)</i>	30
 4.3. SISTEMA GEODÉSICO DE REFERÊNCIA 1967	31
 <i>Constantes astronômicas (1964)</i>	31
<i>Constantes fundamentais (1967)</i>	31
<i>Constantes geocêntricas derivadas (1967)</i>	31
<i>Constantes físicas derivadas (1967)</i>	32
<i>Fórmula da gravidade teórica (1967)</i>	32
 4.4. SISTEMA GEODÉSICO DE REFERÊNCIA 1980	32
 <i>Constantes fundamentais (1980):</i>	32
<i>Constantes geocêntricas derivadas (1980):</i>	33
<i>Constantes físicas derivadas (1980)</i>	33

<b>5. POSICIONAMENTO</b>	<b>34</b>
<b>5.1. CONCEITOS DE DATUM</b>	<b>35</b>
<i>Datum horizontal</i>	36
<i>Datum vertical</i>	36
<b>5.2. POSICIONAMENTO TERRESTRE</b>	<b>37</b>
<i>Triangulação</i>	37
<i>Transporte de coordenadas</i>	39
<b>5.3. POSICIONAMENTO EXTRATERRESTRE</b>	<b>41</b>
<b>5.3.1. POSICIONAMENTO POR SATÉLITES</b>	<b>41</b>
<i>Posicionamento DOPPLER</i>	42
<i>Posicionamento GPS</i>	43
<i>Posicionamento por LASER</i>	44
<i>Posicionamento interferométrico (VLBI)</i>	45
<b>6. O CAMPO DE GRAVIDADE DA TERRA</b>	<b>48</b>
<b>6.1. FORÇA E ACELARAÇÃO GRAVITACIONAIS</b>	<b>48</b>
<b>6.2. POTENCIAL DE ATRAÇÃO GRAVITACIONAL</b>	<b>51</b>
<b>6.3. O CAMPO DE GRAVIDADE</b>	<b>54</b>
<b>6.4. ANOMALIAS GRAVIMÉTRICAS</b>	<b>54</b>
<b>6.5. ANOMALIA AR-LIVRE</b>	<b>56</b>
<b>6.6. ANOMALIA BOUGUER</b>	<b>57</b>
<b>6.7. ANOMALIA ISOSTÁTICA</b>	<b>58</b>
<b>7. PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS</b>	<b>59</b>
<b>7.1. INTRODUÇÃO</b>	<b>59</b>
<b>7.2. CLASSIFICAÇÃO E TERMINOLOGIA</b>	<b>60</b>
<i>Projeção conforme</i>	62
<i>Projeção equivalente</i>	62
<i>Projeção equidistante</i>	62
<i>Escala linear</i>	62
<i>Escala de área</i>	62
<i>Linhas padrões</i>	62
<i>Meridiano central</i>	63
<i>Deformação angular</i>	63
<i>Padrão de deformação</i>	63
<i>Padrão cilíndrico</i>	63
<i>Padrão cônico</i>	63

<i>Padrão azimutal</i>	63
<i>Deformação média (angular ou de área)</i>	63
7.3. ESCALA	64
7.4. DEFORMAÇÃO	66
8. REFERÊNCIAS E BIBLIOGRAFIA	68

## **1. ESBOÇO HISTÓRICO**

A curiosidade do homem primitivo levou-o a se interessar pelo planeta em que vivia. Fenômenos que observava em torno de si, com temor ou medo, originaram várias superstições, ritos e cultos. Essa observações motivaram-no a uma melhor compreensão dos eventos e delas resultaram diversas culturas e civilizações, que por sua vez adquiriram profundidade admirável na compreensão de fenômenos naturais, esta deixada na forma de monumentos, templos e cidades. Esses fenômenos naturais estão freqüentemente relacionados com a forma, as dimensões, o campo de gravidade da terra e suas variações temporais e, para entendê-los eram evocados alguns conhecimentos geodésicos.

Durante muitos séculos, os únicos meios disponíveis para o estudo da geometria da Terra foram observações ao Sol, à Lua, às estrelas e aos planetas, ou seja, observações astronômicas. Assim, as primeiras descobertas geodésicas basearam-se em conhecimentos astronômicos. Embora haja poucos registros históricos sobre as realizações geodésicas das civilizações antigas atualmente, há várias indicações de que elas realizaram observações muito precisas dos movimentos básicos da Terra.

### **1.1. AS PRIMEIRAS IDÉIAS SOBRE A FORMA DA TERRA**

A história da geodésia começa realmente pelos primeiros relatos documentados na era grega. Naquela época a Geodésia era uma ciência que desafiava os intelectuais, fazendo com que alguns dos maiores nomes da história dedicassem a ela parte das suas energias.

As primeiras idéias sobre a forma da Terra surgiram na época de Tales de Mileto (625 – 547 a.C.), reconhecido como o fundador da trigonometria. Para ele a Terra tinha a forma de um disco e flutuava num oceano infinito. Já para seu contemporâneo, Anaximander de Mileto (611 – 545 a.C.) a terra tinha o formato de um cilindro orientado na direção este-oeste. Este foi o primeiro a utilizar o conceito de Esfera Celeste, idéia que atravessou os séculos e ainda hoje utilizada em Astronomia de Posição. Anaximenes (601 – 532 a.C.), discípulo de Anaximander discordava de tales dizendo que a terra flutuava num oceano finito, mantida no espaço por ar comprimido.

#### ***A era da forma esférica***

A escola de Pitágoras (580 – 500 a.C.) foi a primeira a acreditar na esfericidade da terra, idéia que prevaleceu por dois milênios e meio. As primeiras alusões sobre a atração gravitacional provavelmente são de Aristóteles (384 – 322 a.C.), que também apresentou os primeiros argumentos plausíveis da esfericidade terrestre, que são:

- a) Contorno circular da sombra da Terra projetada durante os eclipses lunares.
- b) Diferença de horário na observação do mesmo eclipse entre observadores em dois meridianos diferentes
- c) Variação do aspecto do céu estrelado com a latitude.

Com a aceitação da esfericidade terrestre, surgiram as coordenadas esféricas, usadas pela primeira vez por Dicaerchus (353 – 285 a.C.) no final do século III numa compilação atualizada do mapa-múndi que continha informações sobre o sul da Ásia conquistada por uma expedição militar de Alexandre Magnus. Os progressos em Astronomia nessa época estavam relacionados aos trabalhos de Aristarco (310 – 250 a.C.) sobre a determinação das distâncias e dimensões da Lua e do Sol. Cerca de meio século mais tarde, Eratóstenes (276 – 194 a.C.), considerado o precursor da Geodésia, realizou o primeiro trabalho realmente científico na determinação das dimensões da Terra. O método utilizado por Eratóstenes, exemplificado na Figura 1.1, consistiu em medir o arco de meridiano “s” por observações geométricas e medir o ângulo “ $\alpha$ ” nas extremidades desse arco através de observações astronômicas. O cálculo do raio “R” terrestre a partir desses dados é obtido através de relações fundamentais da Geometria.

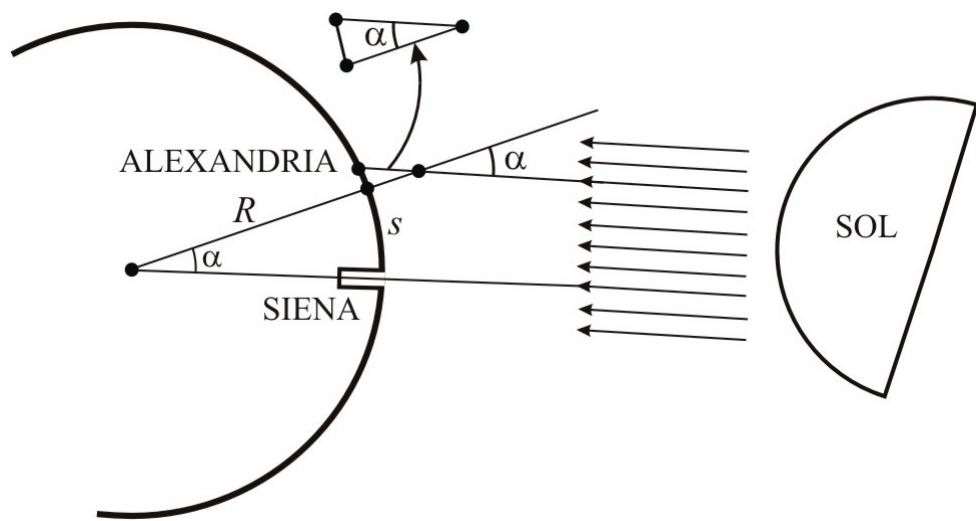


Figura 1.1 – Determinação do raio da Terra por Eratóstenes.

$$\frac{2\pi R}{s} = \frac{2\pi}{\alpha} \therefore R = \frac{s}{\alpha} \quad (1.1)$$

Onde :

$\alpha$  = ângulo corresponde ao arco de meridiano, em radianos;

$s$  = comprimento do arco de meridiano; e

$R$  = raio da Terra.

É fácil entender que quanto maior for o arco e mais precisa for a observação astronômica tanto mais preciso será o valor calculado para o raio terrestre. Eratóstenes sabia através de uma lenda que em Siena, atual Assuam, no solstício de verão o sol iluminava o fundo de um poço e, assim, situava-se próximo ao trópico de Câncer. A sua medição mostrou que em Alexandria, no mesmo horário, a direção da sombra de uma haste formava com a vertical um ângulo de  $7^{\circ}12'$ . Supondo Siena e Alexandria no mesmo meridiano, este correspondente ao ângulo central formado pelas duas verticais. A distância entre as duas cidades, conhecida na época de Eratóstenes, era 5000 estádias.

Não se sabe ao certo se essa distância foi medida ou resultou da agrimensura realizada no Vale do Nilo. A distância zenital do Sol em Alexandria foi obtida por Eratóstenes com o auxílio de um gnômon e representa 1/50 da circunferência. Admitindo-se para a estádia o comprimento de 157,5m, como lhe atribuem alguns autores (Fischer, 1975), obtêm-se para o comprimento da circunferência 39.375.000m e para o raio 6.266.726m. Considerando que Alexandria e Siena não estão no mesmo meridiano, que o sol naquela época não poderia iluminar exatamente o fundo de um poço na direção vertical em Siena e que o comprimento do arco foi medido por processos rudimentares, é surpreendente que o valor encontrado por Eratóstenes para o comprimento da circunferência seja muito próximo do que se conhece atualmente. O mérito de Eratóstenes está sobretudo na metodologia utilizada, combinando observações astronômicas e geométricas para medir o raio terrestre. Hoje em dia os geodesistas continuam utilizando o princípio idealizado por Eratóstenes, obviamente com instrumentos modernos para as medições de ângulos e distâncias, no posicionamento de alta precisão através da triangulação geodésica.

A triangulação foi utilizada pela primeira vez pelo astrônomo dinamarquês Tycho Brhae (1546 – 1601) para estabelecer a ligação geodésica entre a ilha de Vem e as principais ilhas da Dinamarca. Como método de posicionamento, entretanto, a triangulação foi desenvolvida por Snélius (1591 – 1626), que também a usou na determinação do raio terrestre. Snélius desenvolveu uma cadeia formada por 33 triângulos com a qual obteve o comprimento de 9.660km para o comprimento de meridiano de um quadrante. Em 1660, surgiu a Academia de Ciências de Paris, tendo como um de seus objetivos principais a determinação do raio terrestre. A tarefa foi confiada a Picard (1620 – 1682) que, com base na triangulação desenvolvida entre paris e Amiens, utilizando pela primeira vez lunetas munidas de retículos, encontrou 10.009km para o comprimento de meridiano num quadrante. Este é o primeiro resultado realmente comparável com as medidas atuais tanto pela metodologia quanto pela precisão.

### *A era da forma elipsoidal*

O período decorrido entre Eratóstenes e Picard constitui a era esférica da geodésia, pois a Terra era considerada uma esfera e a determinação de suas dimensões consistia na determinação do raio a partir das observações. A nova era se iniciou com as investigações teóricas de Newton (1642 – 1727) e de seu contemporâneo Huygens (1629 – 1695) sobre a forma de equilíbrio hidrostático de um fluído em rotação. Ambos estavam convictos do achatamento polar da terra devido a sua rotação. Um dos argumentos experimentais de Newton, em favor de suas conclusões teóricas, foi o aumento do período nos relógios pendulares com o decréscimo da latitude, observado por Richter (1630 – 1696) e outros astrônomos na época. O achatamento polar, preconizado na teoria por Newtow, estava em contradição com os trabalhos de Cassini (1625 – 1712) na medição de um arco de meridiano, que indicavam alongamento polar. Nesse trabalho Cassini prosseguiu com a triangulação de Picard ao norte, até Dunquerque, e ao sul, até os Pirineus. Os resultados mostravam que o comprimento de um arco de meridiano decrescia junto com o aumento da latitude, o que indicava uma Terra alongada nos pólos. A contradição entre a teoria de Newton e as conclusões de Cassini originou a histórica polêmica entre as escolas que se formaram na Europa: os adeptos de uma Terra achatada e os adeptos de uma Terra alongada, vide Figura 1.2.

Para esclarecer essa contradição a Academia patrocinou a medição de dois arcos de meridianos: um próximo do equador, outro próximo ao ártico.

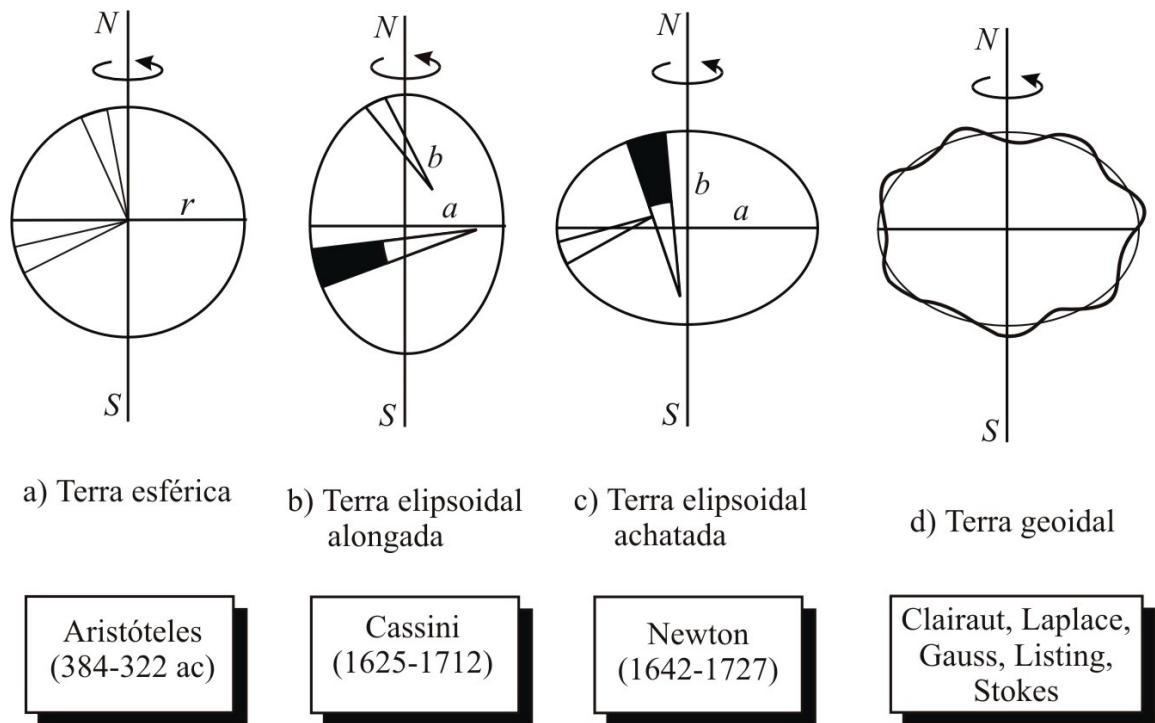
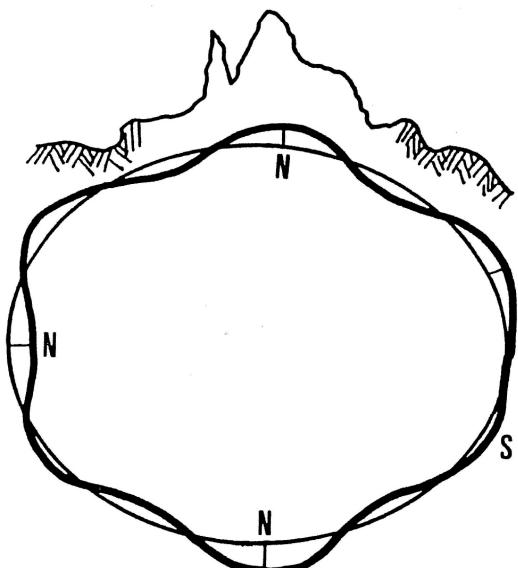


Figura 1.2 – Terra esférica e elipsoidal e Geoidal.

A expedição equatorial (1735 – 1744), formada por Bouguer, Godin, La Condamine e dois jovens oficiais espanhóis, foi enviada para o Peru, latitude 1°30' S. Este grupo mediou dois arcos de meridiano com aproximadamente 3° de amplitude e obteve num deles, para o arco de 1° o comprimento de 110.614m. A expedição polar (1736 – 1737), formada inicialmente por Maupertuis, Camus, Célsius e depois Clairaut, foi enviada para a Lapônia, latitude 66°20' N. Ao concluírem os trabalhos, essa equipe obteve para o arco de 1° o comprimento de 111.948m o que confirmou a teoria de Newton sobre uma Terra achatada.

### ***A era da forma geoidal***

No início do século XIX vários cientistas de renome, tais quais Clairaut (1713 – 1765), Laplace (1749 – 1827), Gauss (1777 – 1855) e Bessel (1784 – 1846) lançaram as bases da nova teoria que atribui à Terra uma forma mais irregular e complexa do que aquela adotada pelo modelo elipsoidal. Inicialmente, surgiu a noção de superfícies equipotenciais e nos trabalhos de Clairaut e Laplace, depois surgiu a superfície equipotencial de nível zero (origem das altitudes) denominada superfície geoidal, proposta por Listing (1872). Os fundamentos teóricos para a apresentação do geóide foram desenvolvidos por Stokes (1819 – 1903) no seu famoso trabalho “On the Variation of Gravity and the Surface of the Earth”, no qual apresenta a fórmula para o cálculo da alturas geoidais a partir de anomalias gravimétricas, Figura 1.3.



$$N = C \int_F \Delta g \, ds$$

Figura 1.3 – O geóide e a integral de Stokes.

O trabalho de Bruns (1878) denominado “The Earth’s Figure” representa o primeiro esforço direcionado na integração de medidas geodésicas visando o posicionamento e a representação do campo de gravidade. Nessa época, Helmert (1843 - 1917) ocupava-se com a representação formal dos fundamentos matemáticos e físicos da Geodésia publicadas em seu livro “Mathematical and Physical Theory of Geodesy”. Em 1927, Vening Meinesz publicou as fórmulas para o cálculo das componentes do desvio vertical a partir de anomalias gravimétricas. Em 1945, surgiu o trabalho notável do geodesista soviético Molodenskii denominado “Basic Problems of Geodetic Gravimetry”, estabelecendo um novo meio de referência denominado quase-geóide.

Com o advento da era espacial em 1957 a geodésia passou a explorar as observações resultantes do rastreio de satélites artificiais colocados em órbita da Terra tanto para o posicionamento quanto para o representação do campo de gravidade. A Geodésia por satélite, originada nessa época, pode ser dividida em três fases:

- Desenvolvimento dos métodos Básicos:** (1957-1970) - caracterizou-se basicamente pelo rastreio ótico dos satélite e observação de direções através de câmaras fotográficas. Os resultados principais obtidos nessa fase foram a determinação dos coeficientes de baixo grau do geopotencial e os modelos terrestres obtidos pelo *Smithsonian Astrophysical Observatory* (SAO SE I e SAO SE II), e pelo *Goddard Space Flight Center* da NASA (*Goddard Earth*

*Models GEM). A Única rede global puramente geométrica foi implantada a partir de observações do satélite PAGEOS com câmara BC4*

- b) **Fase dos Projetos Científicos** (1970 – 1980): - várias técnicas de observação foram desenvolvidas e refinadas, particularmente no rastreio de satélites através de raio laser e na altimetria por satélite. O sistema TRANSIT foi utilizado no posicionamento por geodesistas explorando o efeito Doppler. Essa fase melhorou o posicionamento e proporcionou novos modelos terrestres (GEM10 e GRIM) mais precisos que os da fase anterior. A precisão das observações nessa fase possibilitaram a monitoração para estudos geodinâmica (rotação da Terra, movimentos dos pólos, deformação crustal). O posicionamento através do rastreio de satélites explorando o efeito Doppler foi intensamente utilizado em todo o mundo para a implantação e manutenção de redes geodésicas.
- c) **Fase Operacional** (1980 em diante): - as técnicas de posicionamento por satélite tornaram-se operacionais em Geodésia, Geodinâmica e nas aplicações rotineiras como levantamento de apoio básico para mapeamentos, navegação e etc. Os aspectos que mais se destacaram nessa fase foram:  
uso intensivo do posicionamento por satélite para e a substituição das técnicas convencionais, que começou com os primeiros resultados obtidos com o NAVSTAR Global Position System (GPS), proporcionando novas perspectivas para as mais diversas aplicações do posicionamento por satélite;

A alta precisão obtida no posicionamento por satélite substituiu as técnicas astrométricas na monitoração da rotação da Terra, do pólo e da crosta terrestre.

## 2. INTRODUÇÃO

Na segunda metade do século XX, a definição de geodésia passou por três alterações que refletem a evolução científica e tecnológica do mundo moderno. Até a década de 1950, ela manteve-se na terminologia de Helmert (1880), que definiu a Geodésia como a ciência que estuda a forma e as dimensões da Terra. Mas, com o advento da era espacial, que se iniciou com o lançamento do primeiro satélite artificial em 1957, proporcionando informações globais do campo de gravidade até então desconhecidas dos geodesistas, marcou uma nova fase da Geodésia que inclui na sua definição o estudo do campo de gravidade. Assim, na década de sessenta a Geodésia passou a ser definida como a ciência que estuda a forma, as dimensões e o campo de gravidade da Terra. Mas essa definição ainda não mensurava as variações temporais do posicionamento e do campo de gravidade que a instrumentação moderna podia detectar e a metodologia geodésica poderia estudar a partir da década de 1970. Isso levou os geodesistas a uma nova modificação na qual a Geodésia recebeu a definição atual:

*Geodésia é a ciência que estuda a forma, as dimensões, o campo de gravidade da Terra e suas variações temporais.*

Tal como ocorre com outras ciências, a geodésia tem algumas subdivisões. A Geodésia clássica, por exemplo pode, pode ser dividida em: Geodésia geométrica, Geodésia física, Geodésia matemática e geodésia dinâmica. Mas, nos últimos tempos, surgiram novas aplicações e novas metodologias, originando várias especificações de Geodésias como, por exemplo, Geodésia Satélite, Geodésia inercial, Geodésia marinha, Geodésia espacial e até mesmo geodésia vertical e Geodésia horizontal. Ainda que algumas designações pareçam razoáveis, a especificidade excessiva pode tornar-se inconveniente. Poderíamos chamar, por exemplo, o levantamento geodésico feito com teodolito de Geodésia teodolito? Por outro lado, se aceitar-mos a denominação Geodésia vertical, por que não a Geodésia oblíqua? Nessa diversidade de Geodésias, não é surpreendente que muito usuários e até mesmo geodesistas estejam perdidos e confusos.

Para alguns geodesistas (Vanícek & Krakiwsky, 1986), a síndrome de tantas Geodésias tem reflexos na falta de interesse pela própria ciência. Além disso, não se pode negar que são os geodesistas os maiores responsáveis por este estado de confusão conceitual. Seja como for, o fato é que em algumas partes do mundo a Geodésia está sendo mistificada, enquanto que em outras partes ela vem sendo considerada irrelevante. Nenhum destes extremos é salutar para uma ciência.

A solução para esses problemas pode ser alcançada atribuindo-se à Geodésia as suas funções primordiais. Isso pode ser feito ao mesmo tempo através de uma definição de Geodésia que seja ao mesmo tempo geral e concisa. Essa idéia (Vanícek & Krakiwsky, 1986) conduz a uma subdivisão em três disciplinas fundamentais, contidas na própria definição de Geodésia:

- O posicionamento;
- O campo de gravidade;
- As variações temporais de ambos.

Com essa divisão conceitual da Geodésia evita-se o aparecimento de subdivisões artificiais inúteis no contexto primordial da Geodésia como ciência.

O posicionamento de pontos na superfície terrestre constitui o objetivo principal da Geodésia, tal como a entende uma grande parte da comunidade. Os pontos podem ser posicionados individualmente ou como parte de redes constituídas por grandes quantidades de pontos. Estas alternativas conduzem ao posicionamento absoluto (onde a posição é definida a partir de um sistema de coordenadas) ou ao posicionamento relativo (onde a posição é definida a partir de outros pontos da rede). Mas, o posicionamento pressupõe o conhecimento da geometria do campo de gravidade para a redução das observações geodésicas, obtidas na superfície física da Terra (espaço físico), ao sistema de referência sobre o qual as posições são definidas (espaço geométrico). Isso significa que o conhecimento do campo de gravidade é imprescindível para a Geodésia.

As variações temporais que ocorreram no posicionamento de campos no campo de gravidade da Terra resultam das deformações relacionadas com as marés terrestres, as cargas crustais, as forças tectônicas, e outras forças que constituem fenômenos ainda desconhecidos. Enquanto a Geodésia estuda a geometria dessas deformações, a geofísica estuda suas causas e as implicações no conhecimento da estrutura e das propriedades físicas da Terra.

## **2.1. APLICAÇÕES DA GEODÉSIA**

Durante séculos, o papel da Geodésia foi basicamente servir ao mapeamento, o que muitas pessoas ainda consideram como o seu objetivo principal. Mas, atualmente a restrição da Geodésia ao posicionamento de pontos para o controle do mapeamento é incorreta. Ainda que uma parte considerável dos dados fornecidos pela Geodésia esteja associada ao apoio cartográfico, uma parte igualmente considerável não está. Algumas aplicações geodésicas importantes são:

### ***Mapeamento***

A implantação do apoio básico através de pontos de controle horizontais e verticais para a produção de mapas nacionais (pequenas escalas) ou municipais (grandes escalas) constituiu uma atividade geodésica imprescindível.

### ***Projetos de engenharia***

A construção de grandes estruturas tais como barragens, pontes e fábricas envolvem o assentamento de componentes estruturais em locais pré-determinados. Para isso, são utilizadas as coordenadas vinculadas a pontos de controle. Muitas vezes são necessários estudos do movimento do solo e do nível da água antes e durante os trabalhos. A construção de barragens, túneis de água, projetos, entre outros envolve o conhecimento da forma das superfícies equipotenciais do campo de gravidade. A monitoração de estruturas e a determinação de superfícies são também trabalhos geodésicos.

### ***Administração urbana***

Nas áreas urbanas, as obras realizadas pelo homem tais como serviços de utilidade pública devem ser definidos e documentados através de pontos de controle para futuras referências.

### ***Demarcação de fronteiras***

A definição de fronteiras internacionais e nacionais é realizada através do posicionamento geodésico. Atualmente, tornou-se importante a rapidez e a precisão com que esses trabalhos são realizados nas demarcações de áreas para arrendamento mesmo nas regiões remotas e inóspitas como, por exemplo: na Região Ártica, no Mar do Norte e selvas continentais. O posicionamento e a demarcação dessas fronteiras são mais econômicas através das redes de pontos, que constituem redes geodésicas

### ***Ecologia***

Nas últimas décadas, vem sendo reconhecida a necessidade de estudos sobre os efeitos da ação do homem no meio em que vivemos. Um desses efeitos é a movimentação do solo causada pela remoção de recursos minerais (água, óleo, minério) ou depósitos subterrâneos de lixo. A monitoração desses movimentos de matéria também é uma aplicação geodésica importante.

### ***Administração ambiental***

A implantação de bancos de dados ambientais, visando um sistema integrado de informações para transporte, uso da Terra, serviços comunitários e sociais, cobranças de impostos, estatística populacional, entre outros, devem ter suas posições vinculadas a redes geodésicas.

### ***Geografia***

Todas as informações posicionais usadas em Geografia são fornecidas pela Geodésia. Ainda que não seja necessário a alta precisão nas informações geométricas e posicionais, elas têm escalas global e por isso são fornecidas pela Geodésia.

## **2.2 RELAÇÃO DA GEODÉSIA COM OUTRAS CIÊNCIAS**

As aplicações geodésicas atualmente transcendem o posicionamento de pontos para o apoio cartográfico e diversificam-se através de novas metodologias. A Geodésia se entrelaça com outras ciências na troca recíproca de informações. Por exemplo:

## ***Geofísica***

Historicamente, é a ciência que tem maior afinidade com a Geodésia. Em muitos temas, não há uma linha divisória perfeitamente nítida que separa uma da outra. Os estudos geofísicos relacionados com a deformação terrestre envolvem posicionamento e parâmetros geométricos de alta precisão, fornecidos pela Geodésia. As técnicas geodésicas vem sendo usadas com sucesso há mais de uma década na monitoração dos movimentos tectônicos (Savage e Burford, 1973) e nos estudos da Geodinâmica contemporânea (Vanicek, 1977).

O campo de gravidade é uma fonte de informações usadas tanto em Geodésia teórica como aplicada. Em Geofísica, os dados gravimétricos são importantes para estudar a distribuição da massa terrestre sobretudo na crosta e no manto. Em Geodésia, eles são usados no estudo da geometria do campo. Isto significa que ambas as ciências estão igualmente interessadas na medição e no processamento de dados do campo de gravidade (Gravimetria). As variações temporais do campo de gravidade fornecem informações sobre os movimentos verticais da crosta, atualmente estudados no contexto da Geodinâmica. A Geofísica, por sua vez, explica a reação física da Terra sob a ação de forças, as variações de densidade no seu interior e os efeitos da estrutura interna nos seus movimentos. Essas informações são necessárias na escolha de modelos matemáticos de interesse geodésico.

## ***Ciências espaciais***

A interação da Geodésia com as Ciências Espaciais ocorre de várias maneiras. Há interesse comum no conhecimento da geometria do campo gravitacional para a descrição do movimento orbital de veículos espaciais. O posicionamento das estações rastreadoras permanentes, por requerer alta precisão, é fornecido pela Geodésia. Por outro lado, as Ciências Espaciais vêm desenvolvendo poderosos sistemas de posicionamento através de satélites artificiais que ampliam as potencialidades da metodologia geodésica tradicional. A análise dos elementos orbitais dos satélites próximos da Terra fornecem atualmente a melhor representação global do campo de gravidade, incluindo o achatamento, e o rastreio de sondas distantes constitui a técnica mais apropriada para a determinação da massa terrestre.

## ***Astronomia***

É a ciência com a qual a Geodésia interage desde o seu nascimento. Ainda que a independência tenha diminuído nos últimos tempos, a Astronomia de posição ainda é uma aliada importante da Geodésia. No futuro certamente haverá maior interação através da Radio-Astronomia e da monitoração da rotação da Terra.

## ***Oceanografia***

É outra ciência com a qual a Geodésia compartilha interesses. Ambas estando envolvidas com o movimento da linha costeira. A Geodésia fornece aos oceanógrafos a altitude relativa nos marégrafos e seus movimentos verticais, o posicionamento de

objetos marinhos incluindo navios e blocos de gelo. Entre os dados oceanográficos de interesse geodésico estão a dinâmica da superfície oceânica, as variações do nível médio do mar em relação à equipotencial do campo de gravidade, necessária na definição do DATUM vertical.

### ***Geologia***

O mapeamento geológico envolve tanto o apoio horizontal como o vertical, fornecidos pela Geodésia. Entre as informações de interesse para os geodesistas, fornecidas pela Geologia, estão a morfologia e a estabilidade locais de diferentes formações geológicas. A estabilidade é um requisito imprescindível tanto na monumentação do apoio geodésico básico para o mapeamento como na instalação de observatórios.

### **3. CONCEITOS E DEFINIÇÕES**

A Geodésia tem como objetivos principais o posicionamento de pontos e a representação do campo de gravidade da Terra, incluindo as suas variações temporais. A complexidade da geometria e da distribuição da massa terrestre conduzem a utilização de dois modelos: o elipsoidal e o geoidal, vide Figura 3.1

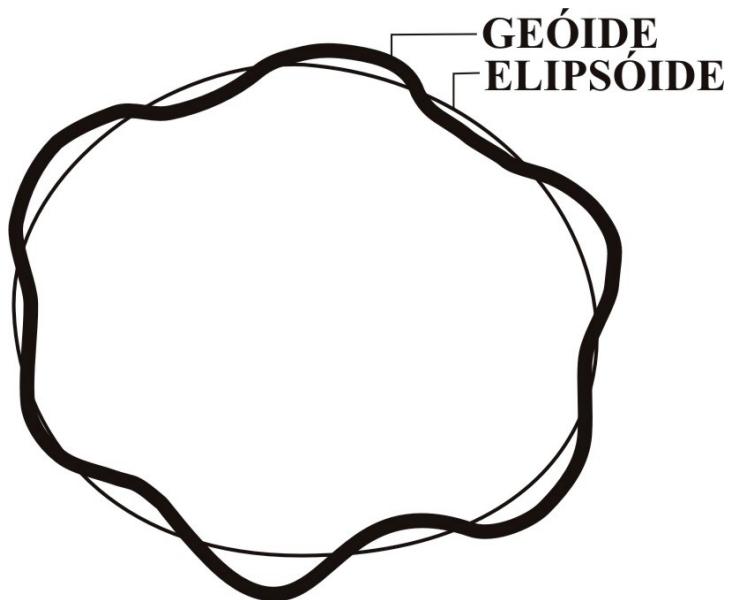


Figura 3.1 – o geóide e o elipsóide.

Isto significa que a determinação das coordenadas de pontos na superfície terrestre e a descrição do campo de gravidade externo envolvem três superfícies: a superfície física da Terra, a superfície geoidal e a superfície elipsoidal, exemplificadas na Figura 3.2.

#### ***Superfície física da Terra (SF)***

É a superfície limitante do relevo topográfico continental ou oceânico. É sobre ela que são realizadas as medições geodésicas de distâncias, de ângulos, entre outras.

#### ***Superfície geoidal (SG)***

É a equipotencial que coincide com o nível médio dos mares não perturbados. Esta é a superfície que teoricamente passa pelos pontos de altitude nula, determinados pelos marégrafos

### **Superfície elipsoidal (SE)**

É a equipotencial limitante do elipsóide adotado. As observações geodésicas, obtidas na superfície física da Terra, são reduzidas à superfície elipsoidal para todos os cálculos geodésicos. A superfície geoidal proporciona a definição do geóide, que é um elemento importante em Geodésia

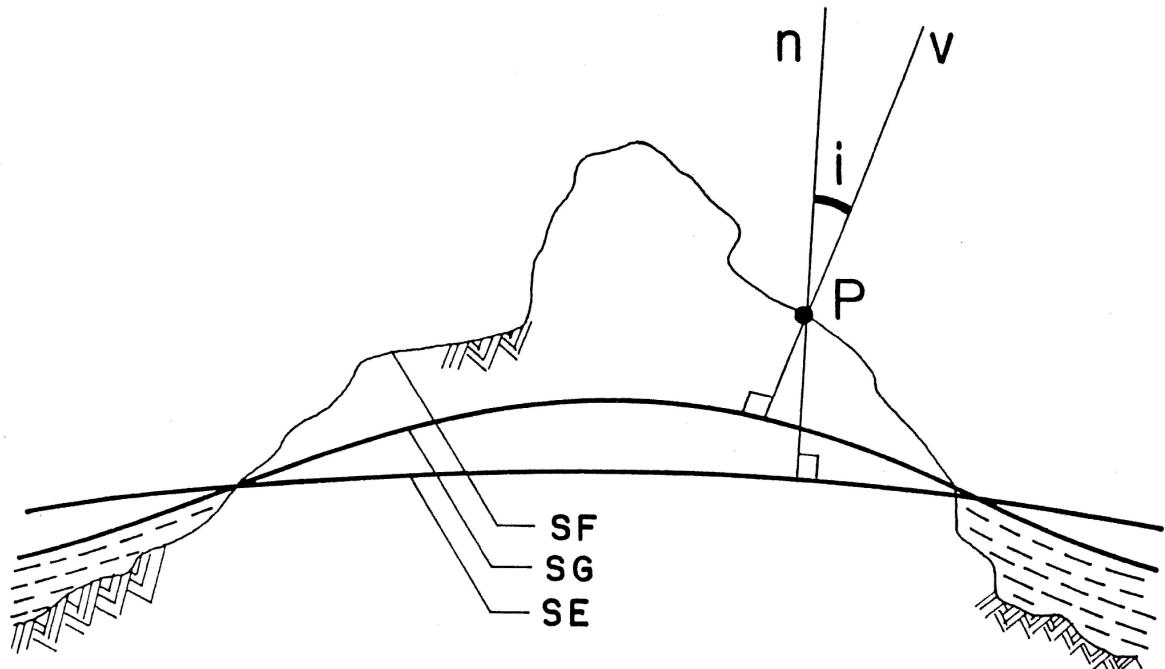


Figura.3.2 – Superfície física (SF), geoidal (SG), elipsoidal (SE) e desvio da vertical.

### **Geóide**

É a forma geométrica limitada pela superfície geoidal.

### **Vertical de um ponto (v)**

É a linha de força do campo de gravidade da Terra real que passa pelo ponto. Na prática, a vertical é a tangente à linha de força no ponto considerado.

### **Normal de um ponto(n)**

É a linha de força do campo de gravidade da Terra normal ou teórica que passa pelo ponto. Na prática, a vertical é a tangente à linha de força no ponto considerado

### 3.1. COORDENADAS CARTESIANAS GEOCÊNTRICAS

O sistema cartesiano geocêntrico ( $X, Y, Z$ ), também conhecido como sistema terrestre convencional é representado na Figura 3.3, e definido do seguinte modo:  
origem O coincide com o centro de massa da Terra;  
eixo Z orientado para o *Conventional International Origin* (CIO), conforme definição do *International Service of Polar Motion* (ISPM);  
eixo X contido no plano do meridiano médio de Greenwich; e  
eixo Y orientado a  $90^\circ$  do eixo X.

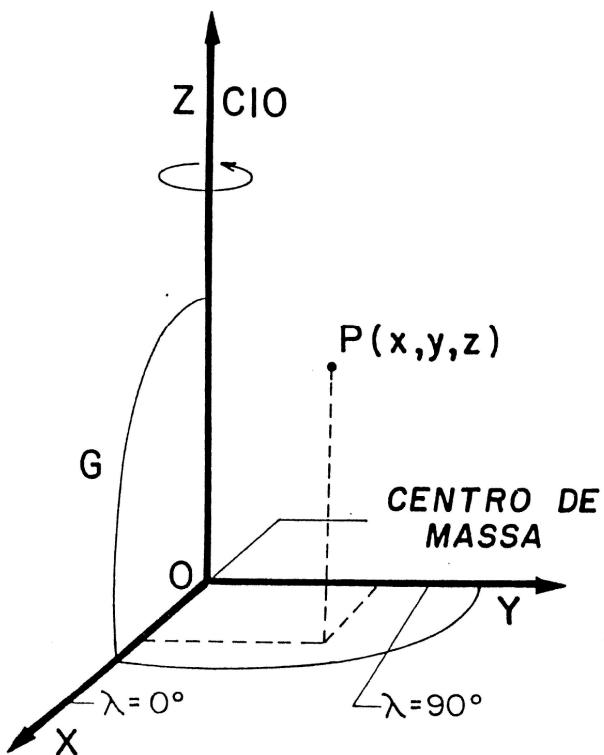


Figura 3.3 – Sistema terrestre convencional.

Neste sistema, as coordenadas ( $x, y, z$ ) de um ponto da superfície terrestre são invariáveis para a Terra rígida e sem movimentos da crosta.

### 3.2. COORDENADAS ASTRONÔMICAS

O posicionamento geodésico convencional não pode ser dissociado das observações astronômicas. A orientação de uma triangulação se faz através dos pontos nos quais se determinam as coordenadas astronômicas e o azimute de uma direção. A definição das coordenadas astronômicas envolve os conceitos de esfera celeste, paralelos e meridianos.

### ***Esfera celeste***

É a esfera ideal de raio infinito centrada no geocentro, sobre a superfície da qual se projetam todos os astros, com girando aparentemente (devido à rotação da Terra) de leste para oeste, arrastando consigo todos os corpos celestes, (Figura 3.4). Nas noites estreladas, temos dela uma impressão quase real quando assistimos ao espetáculo deslumbrante de uma abóbada negra, salpicada de pontos brilhantes, deslocando-se do nascente para o poente.

Os problemas nos quais se usa Astronomia de campo não envolvem a distância dos astros ao centro da esfera, envolvem apenas as direções segundo as quais eles são vistos, o que permite considerá-los a igual distância da Terra.

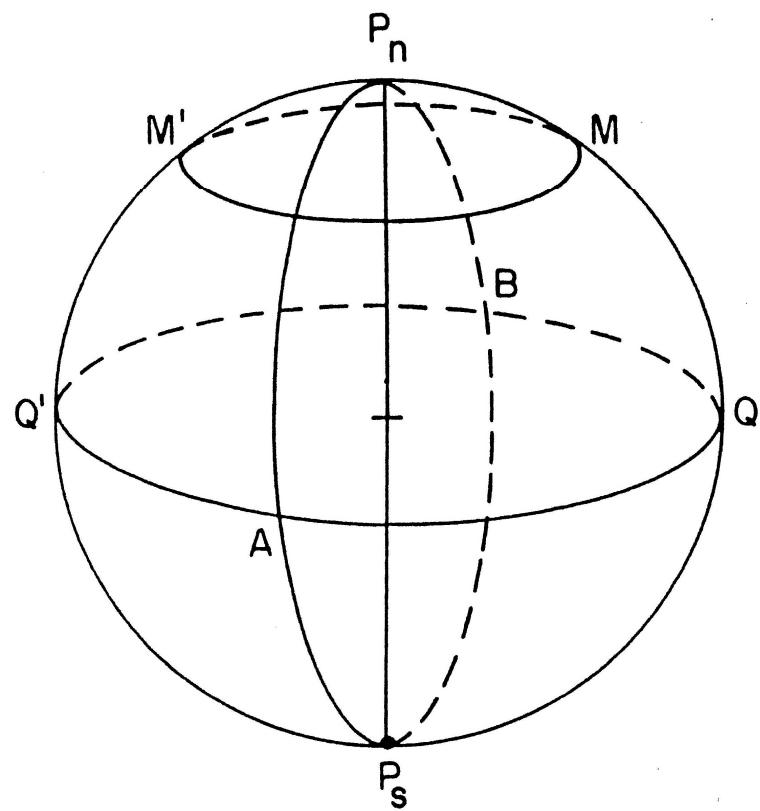


Figura 3.4 – Esfera celeste

### ***Eixo do mundo***

É a reta imaginária  $P_nP_s$  (Figura 3.4) resultante do prolongamento do eixo de rotação da Terra, entorno do qual se processa o movimento aparente de rotação da esfera celeste.

### ***Polos celestes***

São os dois pontos da esfera celeste (Figura 3.4) diametralmente opostos definidos pelo eixo do mundo. Um é o pólo norte  $P_n$ , boreal ou ártico, outro é o polo sul  $P_s$ , austral ou antártico.

Nenhum dos astros conhecidos materializa exatamente os pólos. A estrela  $\alpha$  Umi (Polaris) é a que está mais próxima ( $1^\circ$ ) do polo norte e a estrela 6 Oct (6<sup>a</sup> grandeza) é a que está mais próxima ( $55'$ ) do polo sul.

### ***Equador celeste***

É o círculo máximo  $QQ'$ , determinado pelo plano perpendicular ao eixo do mundo (Figura 3.4), dividindo a esfera celeste em dois hemisférios que recebem o nome do polo que contêm.

### ***Paralelos celestes***

São círculos menores, determinados pelos planos perpendiculares ao eixo do mundo.

### ***Meridianos celestes***

São círculos máximos determinados pelos planos que contêm o eixo do mundo (Figura 3.4),  $P_nAP_sB$  e  $P_nQP_sQ'$ .

### ***Meridiano local***

É um caso particular do meridiano celeste, já que contém a vertical do lugar.

### ***Meridiano médio de Greenwich (MG)***

É o meridiano cuja direção é a média das direções de 77 planos (paralelos à direção da CIO) e forma ângulos fixos com os meridianos (plano paralelos à CIO e à vertical do ponto) de 77 observatórios (Bomfort, 1980).

As coordenadas astronômicas são definidas na esfera celeste termos dos elementos fundamentais, Figura 3.5.

### ***Latitude astronômica de um ponto ( $\Phi$ )***

É o ângulo que a vertical desse ponto forma com a sua projeção sobre o plano do equador (origem). Por convenção, a latitude astronômica é positiva no hemisfério norte e negativa no hemisfério sul.

### **Longitude astronômica de um ponto ( $\Lambda$ )**

É o ângulo do diedro formado pelo meridiano médio de Greenwich (origem) e pelo meridiano local (do ponto). Por convenção, a longitude astronômica é positiva contada por este e negativa se contada por oeste de Greenwich.

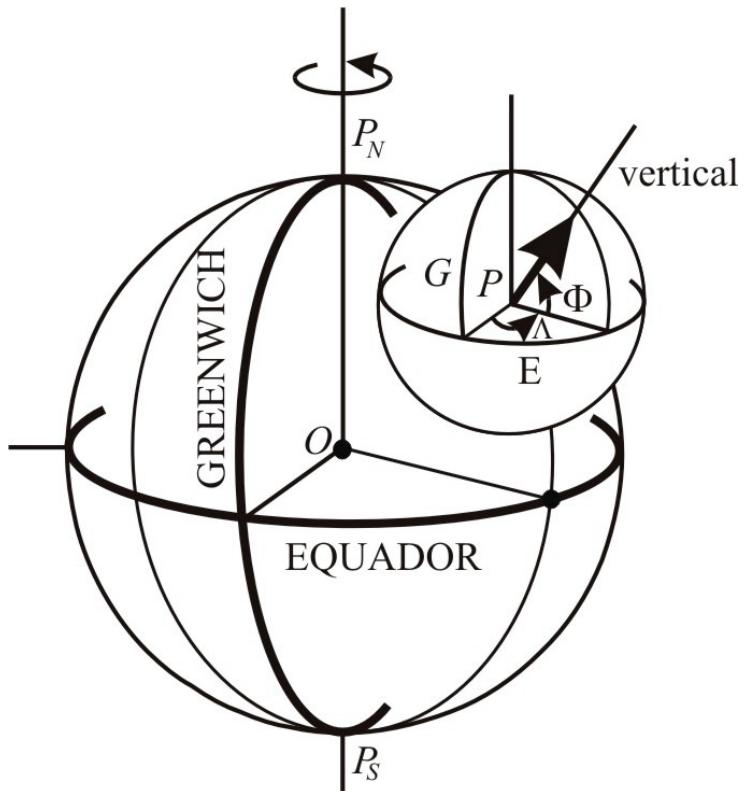


Figura 3.5 – Coordenadas astronômicas.

### **3.3. COORDENADAS GEODÉSICAS**

As coordenadas geodésicas são definidas sobre um elipsóide de revolução, adotado como modelo matemático da Terra. Como não se conhece a posição do centro de massa da Terra, não é possível estabelecer a coincidência dos eixos de rotação. Mas, é necessário impor a condição de paralelismo entre o eixo de rotação do modelo e o eixo de rotação médio da Terra. Tem-se, então, a latitude e a longitude geodésicas (Figura 3.6) definidas do seguinte modo:

### **Latitude geodésica de um ponto ( $\phi$ )**

É ângulo formado pela normal que passa pelo ponto e a projeção sobre o plano do equador. Por convenção, a latitude geodésica é positiva no hemisfério norte e negativa no hemisfério Sul.

### **Longitude geodésica de um ponto ( $\lambda$ )**

É o ângulo do diedro formado pelo meridiano médio de Greenwich e o meridiano do ponto. Por convenção, a longitude é positiva contada por leste e negativa contada por oeste de Greenwich.

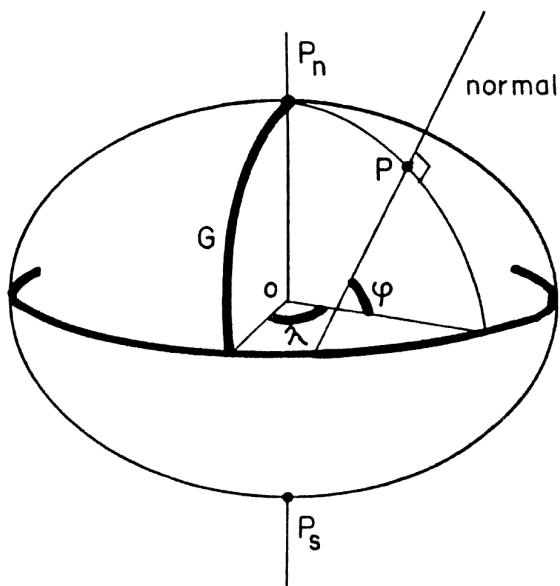


Figura 3.6 – Coordenadas geodésicas.

### **Diferença entre as coordenadas astronômicas e geodésicas de um ponto**

As coordenadas astronômicas definem posições de ponto sobre o geóide enquanto que as coordenadas geodésicas definem posições de ponto sobre o elipsóide.

Para o posicionamento de pontos sobre a superfície física da Terra, são necessárias ainda a altitude ortométrica ( $H$ ), a altitude geométrica ( $h$ ) e a altura geoidal ( $N$ ).

### **Altitude ortométrica de um ponto ( $H$ )**

É a distância, contada sobre a vertical entre o ponto considerado e o geóide. Por convenção, a altitude ortométrica é positiva acima da superfície geoidal e negativa abaixo dela.

### **Altitude geométrica de um ponto ( $h$ )**

É a distância, contada sobre a normal entre o ponto considerado e o elipsóide.

### **Altura geoidal de um ponto (N)**

É a distância, contada sobre a normal, entre as superfícies geoidal e elipsoidal. Por convenção a altura geoidal é positiva acima da superfície elipsoidal e negativa abaixo dela.

### **Azimute da direção entre dois pontos (A)**

É o ângulo que o meridiano do ponto forma com a direção convencionada entre esses pontos. Na Figura 3.7,  $A_{12}$  representa o azimute da direção 1.2, contada do norte por leste,  $A_{21}$  representa o azimute da direção 2.1, ou contra-azimute da direção 1.2. Convém observar que não há uma convenção plenamente adotada na origem do azimute. O usuário ao consultar a literatura deve identificar a convenção adotada pelo autor.

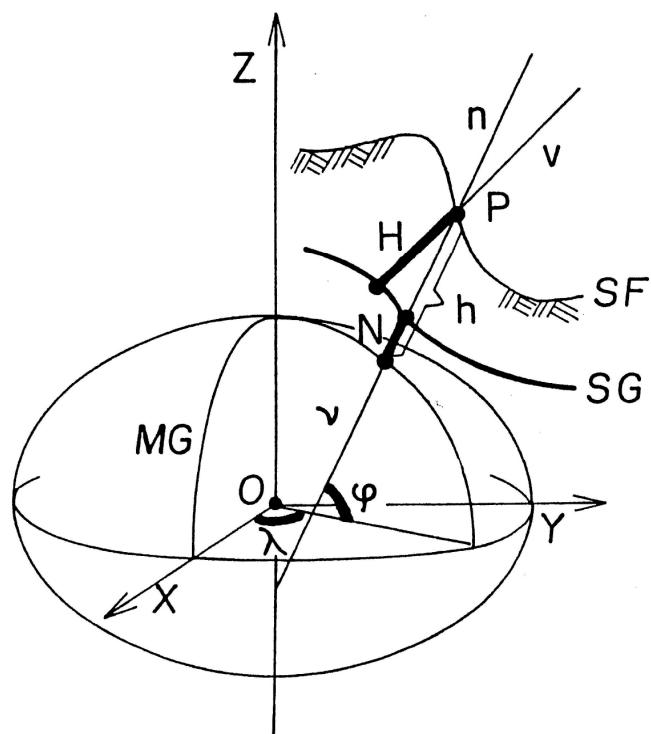


Figura 3.7 – Posicionamento astronômico

### **3.4. RELAÇÕES ENTRE COORDENADAS ASTRONÔMICAS E GEODÉSICAS**

Como a deformação do geóide em relação ao elipsóide é relativamente pequena, (a altura geoidal, em valor absoluto, não ultrapassa 100m), e a inclinação entre as superfícies geoidal e elipsoidal é moderada (em todos os pontos a superfície geoidal é convexa), pode-se esperar que as diferenças entre as coordenadas astronômicas e a geodésicas sejam também pequenas. Isso realmente ocorre e pode ser facilmente verificado. A inclinação entre as superfícies geoidal e elipsoidal num ponto, denominado

desvio da vertical, é representado através das componentes meridianas e primeiro vertical, Figura 3.9.

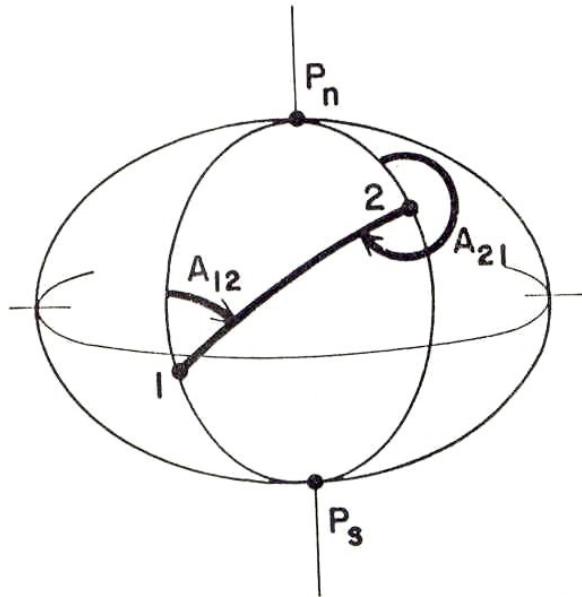


Figura 3.9 – Azimute e contra-azimute

#### **Componente meridiano do desvio vertical ( $\xi$ )**

É a diferença entre a latitude astronômica e a latitude geodésica desse ponto.

$$\xi = \Phi - \varphi$$

Onde :

$\xi$  = componente meridiana do desvio da vertical no ponto;

$\Phi$  = latitude astronômica do ponto; e

$\varphi$  = latitude geodésica do mesmo ponto.

#### **Componente primeiro vertical do desvio vertical ( $\eta$ )**

É a diferença entre a longitude astronômica e a longitude geodésica, multiplicada pelo co-seno da latitude geodésica.

$$\eta = (\Lambda - \lambda) \cos \varphi$$

Onde :

$\eta$  = componente meridiana do desvio da vertical no ponto;

$\Lambda$  = longitude astronômica do ponto;

$\lambda$  = longitude geodésica do ponto; e

$\varphi$  = latitude geodésica do mesmo ponto.

A componente do primeiro vertical pode também ser expressa a partir dos azimutes astronômico e geodésico da mesma direção.

$$\eta = (A_a - A_g) \cot \varphi$$

Onde :

$\eta$  = componente meridiana do desvio da vertical no ponto;

$A_a$  = azimute astronômico do ponto;

$A_g$  = azimute geodésico do ponto; e

$\varphi$  = latitude geodésica do mesmo ponto.

Comparando as equações 3.2 e 3.3 obtém-se a equação de Laplace (3.4) para azimute:

$$A_g = A_a - (\Lambda - \lambda) \cos \varphi$$

Onde :

$A_g$  = azimute geodésico do ponto;

$A_a$  = azimute astronômico do ponto;

$\Lambda$  = longitude astronômica do ponto;

$\lambda$  = longitude geodésica do ponto; e

$\varphi$  = latitude geodésica do mesmo ponto.

Esta expressão permite transformar um azimute astronômico em azimute e longitude independente das componentes do desvio da vertical.

Os vértices de uma triangulação onde se realiza a medições de azimute e longitude são chamados Pontos de Laplace e proporcionam a orientação da rede

### 3.5. RELAÇÃO ENTRE COORDENADAS CARTESIANAS E GEODÉSICAS

Além das coordenadas geográficas (astronômicas e elipsoidais) a Geodésia usa as coordenadas geocêntricas e locais. As coordenadas cartesianas geocêntricas do ponto P sobre o elipsóide de referência, Figura 3.10, em função das elipsoidais são expressas por

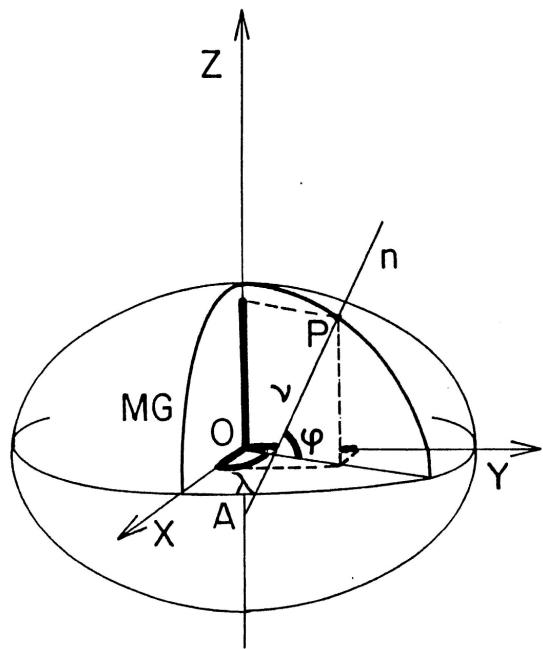


Figura 3.10 – Componentes do desvio astro-geodésico da vertical.

$$x = v \cos \varphi \cos \lambda$$

$$y = v \cos \varphi \sin \lambda \quad (3.5)$$

$$z = v(1 - e^2) \sin \varphi$$

Onde :

$v$  = grande normal; e  
 $e$  = primeira excentricidade.

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (3.6)$$

Onde :

$a$  e  $b$  são parâmetros do elipsóide.

$$v = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (3.7)$$

As coordenadas de um ponto sobre a superfície física da Terra são obtidas diretamente através da altitude geométrica (Figura 3.7)

$$x = (v + h) \cos \varphi \cos \lambda$$

$$y = (\nu + h) \cos \varphi \sin \lambda \quad (3.8)$$

$$z = [\nu(1 - e^2) + h] \sin \varphi$$

A (3.8) proporciona as coordenadas cartesianas de um ponto  $(x, y, z)$  da superfície física a partir das suas coordenadas geodésicas  $(\varphi, \lambda, h)$ . A transformação inversa, isto é, a determinação das coordenadas geodésicas a partir das cartesianas não admite uma representação analítica simples. Mas, as coordenadas geodésicas podem ser obtidas facilmente pelo método iterativo. A latitude aproximada  $(\varphi_0)$  é obtida inicialmente pela expressão (Heiskanen & Moritz, 1967)

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg} \left[ \frac{z}{p(1 - e^2)} \right] \quad (3.9)$$

Com  $(\varphi_0)$  obtém-se a altitude geométrica aproximada  $(h_0)$

$$h_0 = \frac{P}{\cos \varphi_0} - \nu \quad (3.10)$$

Onde:

$$P = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.11)$$

Na segunda iteração, calcula-se  $(\varphi_1)$ :

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \left[ \frac{z}{P} \left( 1 - \frac{\nu_0}{\nu_0 + h_0} \right) \right] \quad (3.12)$$

e:

$$h_1 = \frac{P}{\cos \varphi_1} - \nu_1 \quad (3.13)$$

Repetindo este procedimento até que a diferença entre os valores obtidos entre duas iterações sucessivas torne-se desprezível, obtém-se  $\Phi$  e  $h$ . A longitude  $\lambda$  pode ser expressa analiticamente em função das coordenadas cartesianas.

$$\lambda = \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{x} \right) \quad (3.14)$$

Isso completa as fórmulas para a transformação entre coordenadas cartesianas e geodésicas.

## 4. SISTEMAS GEODÉSICOS DE REFERÊNCIA

O posicionamento de pontos da superfície física da Terra envolve necessariamente um modelo terrestre. Assim, uma preocupação dos geodesistas é a determinação dos parâmetros geométricos e físicos do modelo adequado ao posicionamento e à representação do campo de gravidade teórico. Adequado é o termo que está associado com as necessidades de uma época. No século XIX, por exemplo, adequado significava a precisão de 1 parte em  $10^4$  nos parâmetros geométricos. Atualmente, adequado significa a precisão de 1 parte em  $10^6$  nos mesmos parâmetros. Um dos objetivos da Geodésia é o apoio básico nos trabalhos de mapeamento. Portanto, um modelo internacionalmente aceito e usado promove a cooperação entre países e constitui a base na qual podem ser apoiados os grandes projetos. Isto significa que a permanência ou, pelo menos a perenidade, é tão importante quanto a precisão para um modelo terrestre.

Para evitar a proliferação e o uso indiscriminado de modelos em trabalhos científicos, eles são determinados pelos grupos de trabalho formados por especialistas indicados e aprovados pela IAG (*International Association of Geodesy*). Os canais de comunicação são formalizados e garantidos através da ICSU (*International Council of Scientific Union*) da UNESCO (*United Nations of Education, Scientific and Cultural Organization*). A organização internacional responsável pela aprovação e recomendação dos Sistemas Geodésicos de Referência é a IUGG (*International Union of Geodesy and Geophysics*) através da IAG. Cabe ao organismo competente de cada país a adoção, a recomendação e o apoio aos usuários nacionais. No Brasil, o órgão responsável por essas atividades é o IBGE (Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística)

### 4.1. O ELIPSÓIDE DE REFERÊNCIA

O modelo terrestre é um elipsóide de revolução (bidual), definido através dos seguintes parâmetros, Figura 4.1.

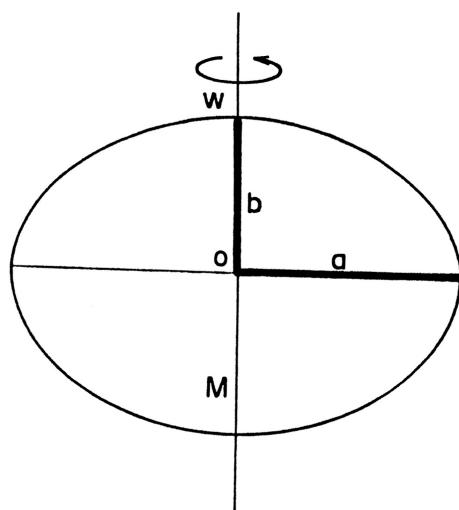


Figura 4.1 – Modelo elipsoidal.

## **Geométricos**

- semi eixo maior (a);
- o semi eixo menor (b) ou achatamento ( $\alpha$ ).

## **Físicos:**

- a massa terrestre (M);
- a velocidade angular (W); e

## **tal que:**

- a superfície limitante seja equipotencial.

Nestas condições, o modelo elipsoidal ou terra normal proporciona univocamente a definição de pontos e a representação do campo de gravidade a ele associado.

A precisão do modelo obviamente depende dos valores numéricos adotados para os parâmetros. Na realidade, eles são recalculados quando as observações possibilitam uma melhoria significativa. O valor numérico de a é relativamente bem determinado a partir de arcos de meridiano obtidos pela triangulação. O valor de W depende integralmente de medidas astronômicas. Porém, as determinações de M e  $\alpha$  são mais difíceis porque o número de observações disponíveis é relativamente pequeno.

Para evitar o inconveniente da limitação de medidas M e  $\alpha$  atualmente são substituídos pela constante gravitacional geocêntrica (GM) e pela constante dinâmica de forma ( $J_2$ ), respectivamente. Enquanto as técnicas convencionais, que usam Gravimetria, proporcionam M com precisão de 1 parte em  $10^3$ , as técnicas modernas que usam o rastreamento de satélites artificiais proporcionam GM com precisão de 1 parte em  $10^7$ . Para a determinação de  $\alpha$  já foram usados vários métodos tradicionais envolvendo os aspectos geométricos e físicos. Entretanto, até o advento da era espacial, a sua precisão era de 1 parte em  $10^2$ . Os dados globais, obtidos com o rastreamento de satélites artificiais a partir de 1957, permitem o cálculo de  $J_2$  com precisão de 1 parte em  $10^3$ . Como a constante  $J_2$  é diretamente relacionada com  $\alpha$ , ela passou a integrar os parâmetros dos atuais modelos terrestres. Com essas alterações, o elipsóide de referência passou a ser definido através das constantes fundamentais (a,  $J_2$ , GM, W), de constantes geométricas e de constantes físicas, essas derivadas das fundamentais.

## **4.2 ELIPSÓIDE INTERNACIONAL 1930**

Os fundamentos teóricos de um modelo terrestre elipsoidal foram desenvolvidos por Helmert (1880) no final do século XIX. Mas, as especificações de um modelo unificado para aplicações geométricas e físicas só foram formuladas no começo do século XX. A partir dessa época, foram intensificados os trabalhos para a determinação dos parâmetros geométricos, que fossem adequados ao uso em grandes triângulos, e do modelo matemático para a representação da gravidade normal no cálculo de anomalias gravimétricas. Nessa época, os trabalhos de Helmert praticamente dominaram a pesquisa da definição dos parâmetros geométricos do modelo terrestre. Em 1901, ele determinou o achatamento terrestre ( $\alpha = 1/298,3$ ) a partir de medidas gravimétricas. Cinco anos depois, obteve o semi-eixo maior ( $a = 6.378.140m$ ) através de arco de meridiano medido na Europa. A surpreendente semelhança dos valores números desses parâmetros com os atuais (GRS80) tanto no achatamento ( $\alpha = 1/298,245$ ) como semi-eixo maior

$(a = 6.378.137m)$  é mera questão de sorte, como mostra o trabalho subsequente do próprio Helmert, no qual aumentou consideravelmente o número de dados e recalculou o semi-eixo maior  $(a = 6.378.200m)$ . A metodologia usada por Helmert consiste em minimizar (no sentido dos mínimos quadrados) os resíduos da Terra real em relação ao modelo elipsoidal. No mesmo ano em que Helmert divulgou esses resultados (1906), surgiram também os trabalhos de Hayford cujos resultados preliminares foram apresentados na Conferência Geral da International Geodetic Association (mãe da International Association of Geodesy). A versão revisada do achatamento ( $\alpha = 1/297$ ) e do semi-eixo maior ( $a = 6.378.388m$ ) foi apresentada na conferência seguinte, realizada em 1909. Na Assembléia Geral da IUGG, realizada em Madri, em 1924, foi adotado oficialmente o elipsóide de revolução como modelo terrestre e foram recomendados os parâmetros geométricos determinados por Hayford em 1909. Na assembléia realizada em Praga, em 1927, foi debatida, mas sem que houvesse consenso, a adoção de uma fórmula para a representação da gravidade (teórica) sobre o modelo terrestre. Na Assembléia Geral da IUGG, realizada em Estocolmo, em (1930) foi adotada oficialmente a fórmula proposta por Cassini (1930), baseada nos trabalhos de Pizetti & Somigliana (Heiskanen & Moritz, 1967).

$$\gamma = \gamma_e (1 + \beta_0 \operatorname{sen}^2 \varphi + \beta_1 \operatorname{sen}^2 2\varphi) \quad (4.1)$$

Onde  $\gamma_e$  é a gravidade teórica na equador,  $\beta_0$  e  $\beta_1$  são coeficientes que dependem das dimensões do elipsóide de referência e da velocidade angular. Os parâmetros  $(\gamma_e, \beta_0, \beta_1)$ , adotados oficialmente em 1930, foram determinados por Heiskanen (1928) a partir das medidas gravimétricas disponíveis naquela época, dos parâmetros geométricos  $(a, \alpha)$  e dos parâmetros físicos  $(M, W)$  do elipsóide adotado em 1924. Os valores encontrados foram

$$\begin{aligned}\gamma_e &= 978049,0 \text{mGal} \\ \beta_0 &= 0,0052884 \\ \beta_1 &= -0,0000059\end{aligned}$$

Portanto, o Geodetic Reference System 1930 (GRS30) ficou definido através das constantes geométricas adotadas em 1924 e da fórmula da gravidade teórica adotada naquele ano

#### **Constantes geométricas (1924 mantidas em 1930)**

$$\begin{aligned}a &= 6378388m && \text{semi-eixo maior do elipsóide} \\ \alpha &= 0,003367003 && \text{achatamento do elipsóide} \\ &= 1:297\end{aligned}$$

#### **Fórmula da gravidade teórica (1930):**

$$\gamma_{30} = 978049(1 + 0,0052884 \operatorname{sen}^2 \varphi - 0,0000059 \operatorname{sen}^2 2\varphi) \text{ mGal} \quad (4.2)$$

### 4.3. SISTEMA GEODÉSICO DE REFERÊNCIA 1967

As alterações mais importantes dos Sistemas Geodésicos de Referência que sucederam o de 1930 estão relacionados com o uso de dados globais, obtidos com o rastreio de satélites artificiais. O advento da era espacial alterou a filosofia de definição dos modelos terrestres. A partir da década de 60, os modelos passaram a ser definidos através de um conjunto de parâmetros fundamentais e dois conjuntos de parâmetros derivados: os geométricos e os físicos.

Em 1964, na Assembléia Geral, realizada em Hamburgo, a International Astronomical Union (IAU) adotou as:

**Constantes astronômicas** (1964):

$A = 149600 \times 10^6 m$	unidade astronômica
$c = 2997292,5 km s^{-1}$	velocidade da luz
$a = 6378160 m$	eixo maior do elipsóide
$J_2 = 10827 \times 10^9 rads^{-1}$	constante dinâmica de forma
$GM = 398603 \times 10^9 m^3 s^{-2}$	constante gravitacional geocêntrica
$\mu = 1 : 81,30$	relação entre as massas lunar e terrestre
$\pi = 8,792''$	paralaxe solar
$w = 72921 \times 10^{-9} rads^{-1}$	velocidade angular

Em 1967, na Assembléia Geral, realizada em Lucerne, a IUGG adotou oficialmente o Geodetic Reference System em 1967 (GRS67) representado por (IAG,1971)

**Constantes fundamentais** (1967):

$a = 6378160 m$	semi-eixo maior do elipsóide
$J_2 = 10827 \times 10^{-7}$	constante dinâmica de forma
$GM = 398603 \times 10^9 M^3 S^{-2}$	constante gravitacional geocêntrica
$W = 7,292115 \times 10^{-5} rads^{-1}$	velocidade angular

**Constantes físicas derivadas** (1967):

$b = 6356774,52 m$	semi-eixo menor do elipsóide
$E = 521864,67 m$	excentricidade linear
$c = 6399617,43 m$	raio polar
$e^2 = 0,006694605$	primeira excentricidade
$e'^2 = 0,006739725$	segunda excentricidade
$\alpha = 0,003352924$	achatamento
$= 1 : 298,247167$	

$Q = 10002001,23m$	comprimento de um quadrante
$R_1 = 6371031,51m$	raio médio
$R_2 = 6371029,91m$	raio da esfera de mesma superfície
$R_3 = 6371023,52m$	raio da esfera de mesmo volume

### *Constantes físicas derivadas (1967)*

$U_\circ = 6263703,05kGalm$	potencial sobre o elipsóide
$J_4 = -0,000002370912$	coeficiente de grau 4 do esferopotencial
$J_6 = 0,000000006083$	coeficiente de grau 6 do esferopotencial
$J_8 = -0,0000000000014$	coeficiente de grau 8 do esferopotencial
$m = 0,003449801434$	$m = (w^2 a^2 b)GM$
$\gamma_e = 978031,845mGal$	gravidade teórica no equador
$\gamma_p = 983217,717mGal$	gravidade teórica nos pólos

### *Fórmula da gravidade teórica (1967):*

$$\gamma_{67} = \gamma_e \left( 1 + 0,005278895 \operatorname{sen}^2 \varphi = 0,000023462 \operatorname{sen}^4 \varphi \right) \quad (4.3)$$

com a unidade em mGal.

## 4.4. SISTEMA GEODÉSICO DE REFERÊNCIA 1980

Em 1970, Assembléia Geral realizada em Camberra, a IUGG, reconhecendo que para alguns fins o GRS67 era inadequado, adotou oficialmente o Geodetic Reference System 1980 (GRS80), consistente com o System of Astronomical Constants 1976 (SAC76), adotado pela IAU. No GRS80 foi removida a deformação permanente de maré da constante dinâmica de forma ( $J_2$ ) e fixados os erros padrões das constantes fundamentais. Os valores numéricos das constantes são os seguintes (IAG,1980):

### *Constantes fundamentais (1980):*

$a = 6378137m$	semi-eixo maior do elipsóide
$J_2 = 108264 \times 10^{-8}$	constante dinâmica de forma
$GM = 398600 \times 10^8 m^3 s^{-2}$	constante gravitacional geocêntrica
$w = 7292115 \times 10^{-11} rads^{-1}$	velocidade angular

### *Constantes geométricas derivadas (1980):*

$b = 635752,314m$	semi-eixo menor
$E = 521854,010m$	excentricidade linear

$c = 6399593,626m$	raio polar
$e^2 = 0,006694380023$	primeira excentricidade
$e'^2 = 0,006739496775$	segunda excentricidade
$\alpha = 0,003352810681$	achatamento
$= 1 : 298.257222101$	
$Q = 10001965.729m$	comprimento de um quadrante
$R_1 = 6371008,771m$	raio médio
$R_2 = 6371007,181m$	raio da esfera de mesma superfície
$R_3 = 6371000,790m$	raio da esfera de mesmo volume

### ***Constantes físicas derivadas (1980)***

$U_\circ = 6263686,085 M^2 S^{-2}$	potencial sobre o elipsóide
$J_4 = -0,000002370912$	coeficiente de grau 4 do esferopotencial
$J_6 = 0,000000006083$	coeficiente de grau 6 do esferopotencial
$J_8 = -0,000000000014$	coeficiente de grau 8 do esferopotencial
$m = 0,003449786003$	$m = (w^2 a^2) GM$
$\gamma_e = 9,780326776 ms^{-2}$	gravidade teórica no equador
$\gamma_p = 9,832186368 ms^{-2}$	gravidade teórica nos pólos

### ***Fórmula da gravidade teórica (1980):***

$$\gamma_{80} = \gamma_e \left( 1 + 0,005279041 \operatorname{sen}^2 \varphi + 0,000023272 \operatorname{sen}^4 \varphi + 0,000000126 \operatorname{sen}^6 \varphi \right) \text{ mGal} \quad (4.4)$$

## 5. POSICIONAMENTO

O posicionamento consiste em determinar posições de objetos estáticos ou móveis através das coordenadas associadas a um referencial. O posicionamento pode ser realizado de várias formas, usando diversos instrumentos ou sistemas de instrumentos distintos. O referencial caracteriza o tipo de posicionamento. Isto significa que as posições podem ser determinadas:

- Em relação a um sistema, usualmente definido através de três coordenadas, convenientemente orientado em relação à Terra (Figura 5.1), constituindo o **posicionamento absoluto**; ou
- Em relação a um ponto, considerado como a origem de um sistema de coordenadas local (Figura 5.2), constituindo o **posicionamento relativo**.

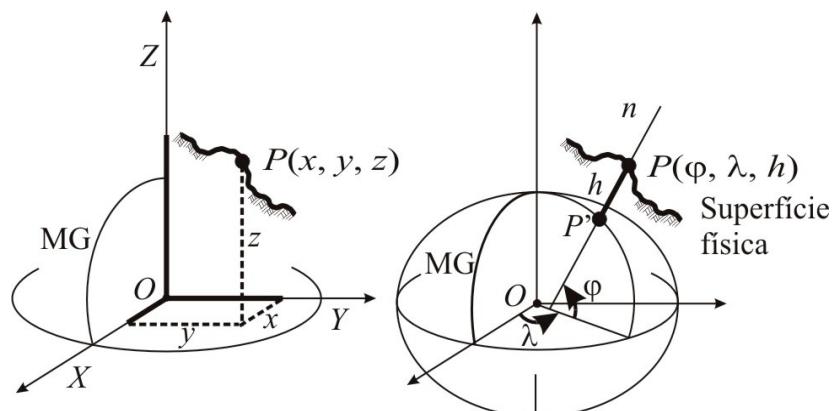


Figura 5.1 – Posicionamento absoluto

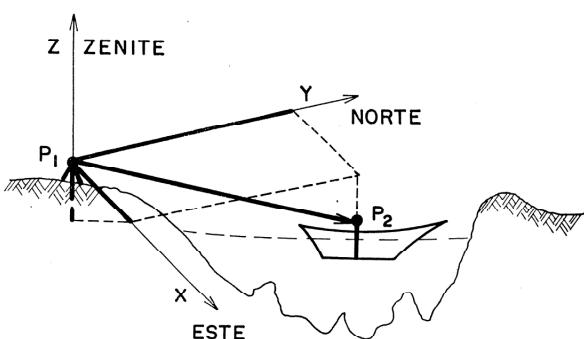


Figura 5.2 – Posicionamento relativo

Se o objeto posicionado é estacionário, tem-se o **posicionamento estático**; se o objeto estiver em movimento, tem-se o **posicionamento cinemático**.

O posicionamento relativo obviamente é mais simples do que o absoluto quando há intervisibilidade dos objetos. Existem várias técnicas de posicionamento relativo envolvendo conceitos físicos e geométricos e qualquer sistema de coordenadas locais pode ser usado no posicionamento relativo.

Em algumas aplicações, é conveniente o posicionamento relativo através de um conjunto de pontos formando uma rede (Figura 5.3). Neste caso, cada segmento é

considerado como um vetor de posição e cada par de pontos adjacentes como pontos da rede a serem posicionados (relativamente) entre si. Se todos os vetores de posições forem determinados através de medições lineares e angulares, a rede pode ser usada como um meio de propagação, permitindo posicionar as extremidades dos vetores. Nestas condições, a rede de pontos pode ser considerada como um posicionamento incremental. O posicionamento relativo através de uma rede de pontos é a sistemática mais usada na implantação de grandes redes. Os pontos iniciais adotados são chamados pontos de controle.

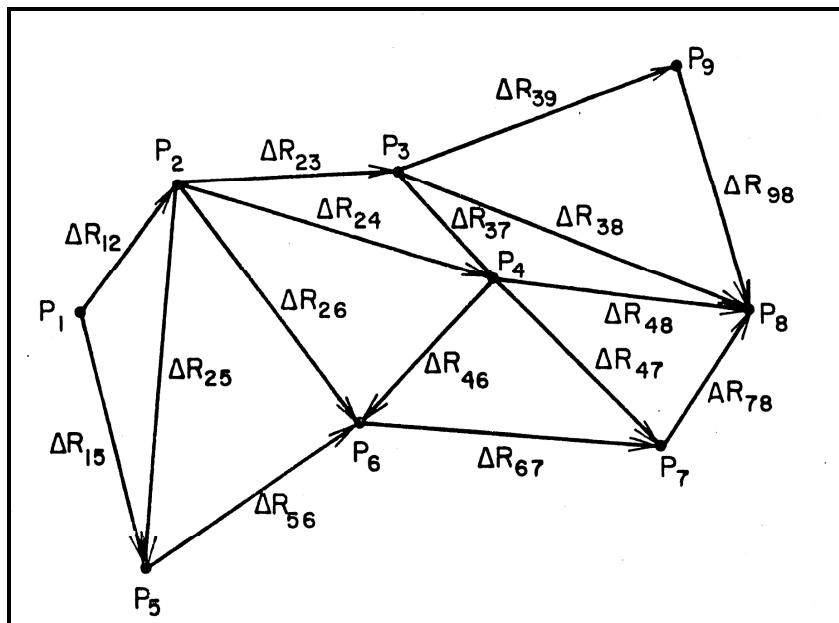


Figura 5.3 – Posicionamento relativo através de um conjunto de pontos

Em muitos casos em que a alta precisão é um requisito básico, como por exemplo o posicionamento geodésico para o apoio cartográfico, recorre-se ao posicionamento relativo incremental. Como esta técnica usa a instrumentação ótica convencional (teodolitos, distâncias eletro-óticas, níveis, entre outros), o posicionamento pode ser horizontal ou vertical mas restringe-se a pontos intervisíveis. Uma rede geodésica horizontal, por exemplo, requer alta precisão nas coordenadas horizontais (latitude e longitude) mas pode admitir baixa precisão nas altitudes. Uma rede geodésica altimétrica, por outro lado, requer alta precisão nas altitudes dos pontos e pode admitir precisão inferior nas coordenadas horizontais.

## 5.1. CONCEITOS DE DATUM

O posicionamento geodésico envolve superfícies de referência. As coordenadas (latitude e longitude) dos pontos que constituem as redes geodésicas horizontais são referidas à superfície elipsoidal e as coordenadas verticais (altitudes ortométricas) dos pontos que constituem as redes altimétricas são referidas à superfície geoidal. Cada uma dessas superfícies usadas como referências constitui um Datum. Portanto, definem-se

### Datum horizontal

É a superfície do elipsóide adotado na determinação das coordenadas da rede geodésica horizontal. Esta superfície é definida através de dois parâmetros geométricos do elipsóide ( $a, \alpha$ ) e três parâmetros da sua orientação ( $n, \xi, \eta$ )

### Datum vertical

É a superfície geoidal adotada na determinação das altitudes da rede geodésica vertical. Esta é a equipotencial do campo de gravidade que praticamente coincide com o nível médio dos mares, definido a partir dos registros fornecidos pelos marégrafos. A altitude ortométrica, obtida através do nivelamento, é referida a esta superfície enquanto que a altitude geométrica, obtida através do posicionamento tridimensional, é referida à superfície elipsoidal (Figura 5.4).

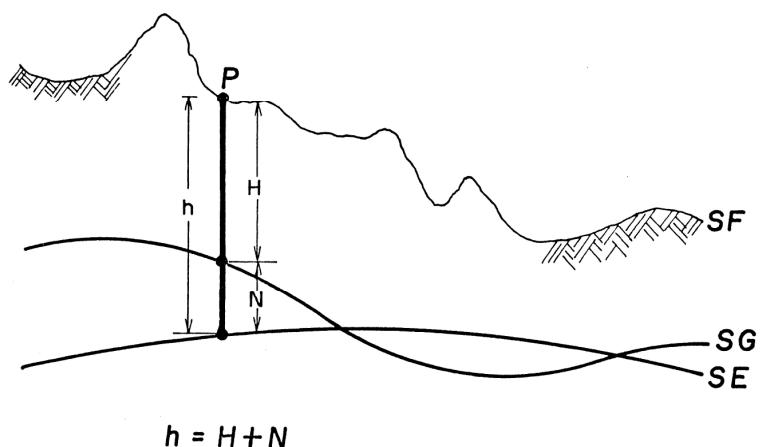


Figura 5.4 – Relativo entre altitudes ortométrica ( $H$ ), geométrica ( $h$ ) e a altura geoidal ( $N$ )

A alta precisão com que a altitude geométrica pode ser obtida atualmente proporciona duas aplicações importantes: o cálculo da altura geoidal quando se conhece a altitude ortométrica ou cálculo da altitude ortométrica quando se conhece a altura geoidal no mesmo ponto.

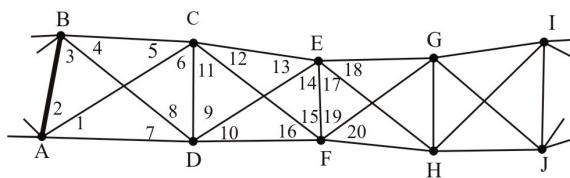
Dependendo da posição do centro do elipsóide em relação ao geocentro, o datum horizontal pode ser geocêntrico, quando o centro do elipsóide coincide com o geocentro, ou local, quando o elipsóide tangencia o geóide num ponto que passa a ser o datum, sem que haja coincidência dos centros.

Teoricamente, o uso de um sistema cartesiano como o Terrestre Convencional, por exemplo, prescinde o uso de um datum horizontal e outro vertical. Conceitualmente, isto é o que ocorre com o posicionamento por satélites. Na prática, entretanto, as coordenadas cartesianas ( $x, y, z$ ) são transformadas em geodésicas ( $\varphi, \lambda, h$ ) e isto envolve tanto os parâmetros de translação e rotação do elipsóide como a altura geoidal.

## 5.2 POSICIONAMENTO TERRESTRE

### *Triangulação*

A Geodésia, visando a determinação das dimensões da Terra, o apoio cartográfico para o mapeamento e outras aplicações, implanta arcabouços de pontos, materializados no terreno, cujas coordenadas geodésicas devem ser rigorosamente calculadas. Esse conjunto de pontos, que constitui o apoio cartográfico fundamental, recebe a denominação genérica de TRIANGULAÇÃO e os pontos que a formam são chamados VÉRTICES da triangulação. Assim, uma REDE de TRIANGULAÇÃO GEODÉSICA consiste num conjunto de vértices A,B,C,...,(materializados no terreno), ligados por linhas (visadas) de maneira a formar uma série de quadrilátero (Figura 5.5). Os lados AB,BC,CD,..., representam geometricamente as visadas efetuadas com teodolitos a partir de cada vértice aos vértices imediatamente vizinhos. Isto significa que os ângulos horizontais 1,2,3,..., foram medidos no terreno, garantindo a interligação geométrica de todos os vértices.



AB                  base geodésica medida  
 A, B, C... vértices materializados  
 1, 2, 3... ângulos medidos  
 BC, CD... lados calculados

Figura 5.5 – Triangulação geodésica.

Essas informações angulares, mesmo que convenientemente reduzidas ao elipsóide, são insuficientes para projeção de todos os pontos sobre o modelo. Isto porque, partindo somente de direções, pode-se construir sobre o elipsóide triangulações semelhantes as do terreno (três ângulos não determinam um triângulo) e cada uma destas, por sua vez, pode assumir infinitas posições através de translação e rotação (se nada for fixado). A indeterminação não existe quando se conhece:

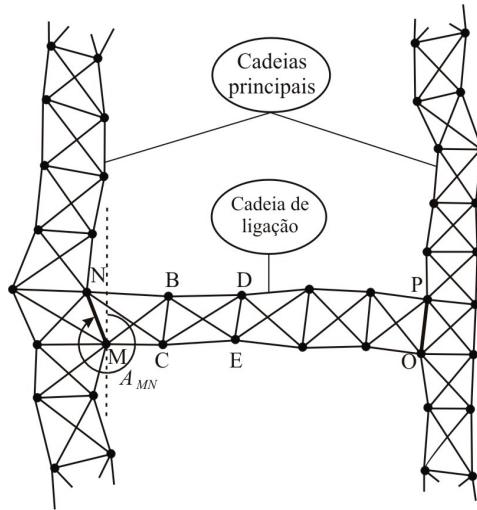
As coordenadas do primeiro ponto (eliminam translação);

Azimute de uma direção (elimina rotação); e

Comprimento do lado inicial (introduz escala).

Com essas quatro condições iniciais impostas (duas coordenadas geodésicas, uma direção e um comprimento) é possível projetar, sem ambigüidade, a triangulação realizada na superfície física sobre o elipsóide de revolução adotado, transformando-a numa rede ideal na qual se efetuam todos os cálculos. logo, conhecendo-se os parâmetros

do modelo, latitude e a longitude do ponto inicial (DATUM) podem ser transportadas matematicamente, vértice a vértice, em toda triangulação projetada (Figura 5.6).



M,N,O,P : vértices (coordenadas conhecidas)

MN, OP : lados (conhecidos)

$A_{MN}$  : azimute (conhecido)

B,C,D,E : vértices (coordenadas)

Figura 5.6 – Cadeias principais e de ligação.

As fórmulas para o transporte de coordenadas podem ser encontradas nos textos clássicos de Geodésia (Bonford, 1975 e Zakatov, 1981). Elas envolvem todos os lados (comprimentos) da triangulação, mas isso não constitui problema pois eles podem ser obtidos pela resolução dos triângulos a partir do primeiro no qual se conhece um lado (base geodésica).

Na maioria dos sistemas geodésicos nacionais, o datum caracteriza-se pela orientação arbitrária do modelo de referência adotado, isto é,

$$N = \xi = \eta = 0 \quad (5.1)$$

Esta condição equivale a deslocar o elipsóide por meio de translações (mantendo o paralelismo entre os dois eixos de rotação) até que ele tangencie o geóide no datum. A coincidência entre a normal e a vertical no datum, contida na (5.1), implica na igualdade entre as coordenadas geodésicas e astronômicas

$$\begin{aligned} \varphi_{\circ} &= \Phi \\ \lambda_{\circ} &= \Lambda \end{aligned} \quad (5.2)$$

enquanto que a equação de Laplace assegura a igualdade entre os azimutes geodésico e astronômico

$$A_{\circ} = A \quad (5.3)$$

onde o índice  $\circ$  indica coordenadas geodésicas na origem.

Nestas condições, três das quatro injunções iniciais, necessárias para definir de maneira única um sistema geodésico, são obtidos diretamente através de observações astronômicas no datum.

O Sistema Geodésico Brasileiro (SGB) atualmente integra o Sistema Geodésico Sul-americano que tem como datum o vértice CHUÁ (Minas Gerais) definido através dos parâmetros (IBGE, 1983)

### *Coordenadas Geodésicas*

$$\begin{aligned}\varphi_{\circ} &= 19^{\circ}45'41,6527''S \\ \lambda_{\circ} &= 48^{\circ}06'04,0639''W\end{aligned}\tag{5.4}$$

### *Azimute*

$$A_{\circ} = 271^{\circ}30'05,05'' - \text{CHUÁ-UBERABA}\tag{5.5}$$

### *Altura Geoidal*

$$N = 0\tag{5.6}$$

com as componentes do desvio da vertical calculada através de um ajustamento que envolve grande número de estações astro-geodésicas, resultando em (Fischer, 1973):

$$\begin{aligned}\zeta &= -0,31'' \\ \eta &= 0,59''\end{aligned}\tag{5.7}$$

A recomendação deste datum para todas as nações sul-americanas representa uma tentativa de unificar toda a rede geodésica implantada na América do Sul.

### *Transporte de coordenadas*

Os vértices de triangulação, poligonação ou trilateração são materializados através de marcos de alvenaria e têm suas coordenadas (latitude e longitude geodésica) matematicamente determinadas. O problema básico consiste em transportar as coordenadas de um ponto inicial (DATUM) a todos os demais vértices. Este transporte, normalmente efetua-se sobre o elipsóide de referência, com as fórmulas desenvolvidas pela geometria das superfícies. No caso do sistema de projeção Universal Transversa Mercator (UTM), o transporte se processa no plano-conforme de Gauss.

O topógrafo rotineiramente efetua o transporte de coordenadas sobre o plano topográfico, o que simplifica a solução embora o problema seja conceitualmente o mesmo.

A poligonal representa na Figura 5.7 está referida ao sistema cartesiano cuja origem coincide com o ponto inicial e cujos eixos são orientados para o norte

(ordenadas) e para leste (abscissa). Determinando-se o azimute de primeiro lado ( $A_{12}$ ) através da medição astronômica

$$A_{12} = A_{10} + \alpha_{12} \quad (5.8)$$

a medição dos ângulos da poligonal permite o cálculo dos azimutes dos demais lados.

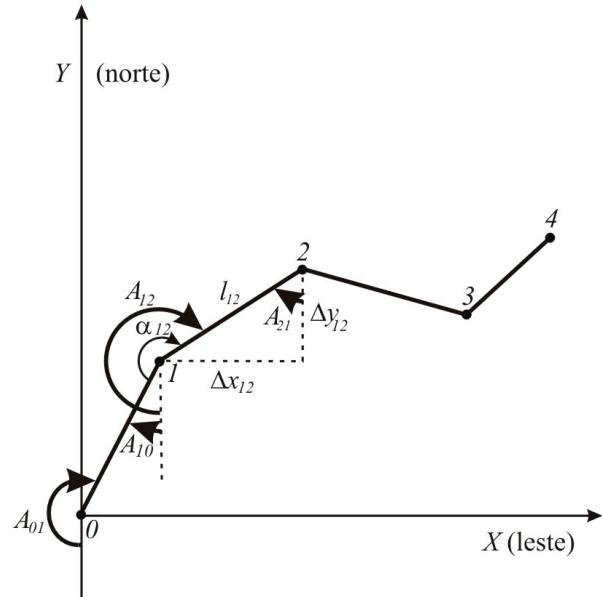


Figura 5.7 – Transporte de coordenadas.

Em função destes e dos comprimentos medidos eletronicamente, podem ser obtidas as diferenças de coordenadas entre dois vértices consecutivos.

$$x_2 = x_1 + \Delta x_1 = x_1 + l_2 \cos(270^\circ - A_{12}) \quad (5.9)$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = y_1 + l_2 \sin(270^\circ - A_{12}) \quad (5.10)$$

Este problema pode ser formulado do seguinte modo:

Dados:

coordenadas de um ponto;  
distância ao ponto seguinte; e  
azimute do lado que os liga.

Determinar:

as coordenadas do segundo ponto.

Os problemas para a esfera e para o elipsóide são mais complexos mas conceitualmente análogos.

### 5.3. POSICIONAMENTO EXTRATERRESTRE

O posicionamento extraterrestre consiste em posicionar pontos da superfície terrestre através da radiação eletromagnética emitida ou refletida por um objeto em órbita da Terra ou localizado a uma grande distância dela. Esta denominação genérica inclui o posicionamento astronômico convencional e todos aqueles que foram originados com o desenvolvimento da tecnologia espacial a partir de 1957 (Figura 5.8).

Atualmente as principais técnicas espaciais de posicionamento exploram as ondas de rádio nos sistemas TRANSIT e GPS; os raios laser no rastreio de satélites artificiais (SLR) ou da Lua (LLR); e a interferometria na recepção do mesmo sinal por receptores que estão a grandes distâncias (VLBI).

As técnicas espaciais contribuem também com informações de interesse geodésico e geofísica como, por exemplo, os parâmetros que descrevem o campo de gravidade e a orientação da crosta em relação ao eixo de rotação da Terra.

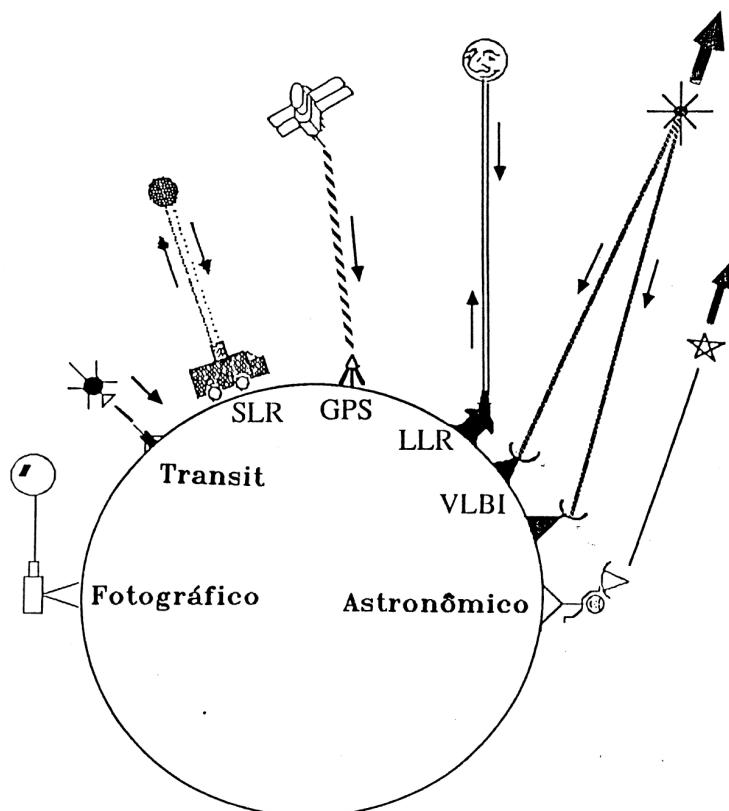


Figura 5.8– Posicionamento extraterrestre.

Atualmente, além dessas técnicas espaciais, existem outras que usam sinais de radar e são de grande interesse na monitoração da superfície oceânica, contribuindo também para a determinação do geóide e do campo gravitacional externo.

#### 5.3.1. POSICIONAMENTO POR SATÉLITES

O conceito do posicionamento por satélites está representado na Figura 5.9

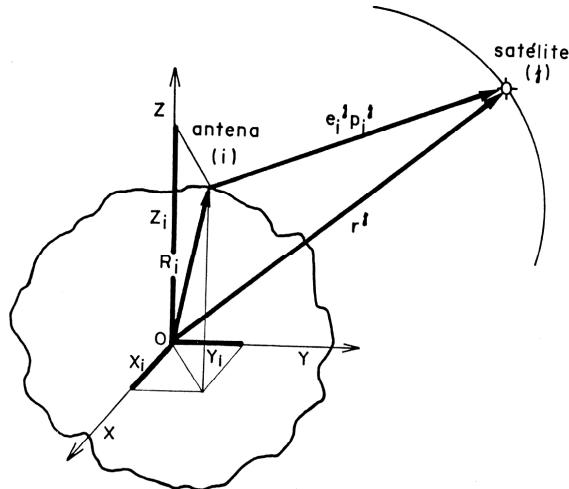


Figura 5.9 – Posicionamento por satélite.

onde:

- $R_i$  é o vetor posição;
- $r^j$  é o vetor posição do satélite; e
- $e_i^j p_i^j$  é o vetor resultante.

Basicamente, o que se determina no posicionamento por satélite é o raio vetor ( $R_i$ ) da antena (dispositivo que recebe o sinal emitido pelo satélite) a partir do vetor de posição do satélite que emite o sinal ( $r^j$ ) e da distância medida ( $p_i^j$ ).

Conforme os meios usados na medição da distância ( $p_i^j$ ), tem-se as diferentes técnicas de posicionamento por satélites. Prever precisamente a posição do satélites rastreado ( $r^j(t)$ ) no instante  $t$  constitui uma tarefa difícil neste tipo de posicionamento. A determinação das efemérides, que é tempo apropriado para designar  $r^j$  em função do tempo, requer conhecimentos da dinâmica dos satélites e, historicamente, pertence à Mecânica Celeste. As efemérides, em geral são determinadas e preditas (no tempo) pelos operadores do sistema de satélites. Mas aos usuários do sistema podem melhorá-las. É possível também aos usuários estabelecer uma rede independente de rastreio permanente, de preferência global, e calcular as efemérides após as missões

### Posicionamento DOPPLER

As experiências realizadas por pesquisadores do *Applied Physics Laboratory* (APL) da *Johns Hopkins University*, na década de 50, mostraram que a órbita de um satélite artificial pode ser determinado pela análise do efeito Doppler nos sistemas de rádio transmitidos pelo satélite. Logo depois, eles constataram ainda que se a órbita do satélite for conhecida pode-se determinar a posição do receptor do sinal transmitido pelo satélite. Esta realização proporcionou o desenvolvimento do *Navy Navigation Satellite System* (NNSS) pelo APL, conhecido como sistema *Transit*. Os satélites destes sistemas são rastreados e controlados pelo centro de controle do *Naval Aeronautics Group* (NAG) com sede na Califórnia. Para isso, são usadas quatro estações rastreadoras permanentes, instaladas em território norte americano. Os dados coletados de todos os satélites

operacionais são transmitidos à estação de controle para processamento e atualização das órbitas através de suas duas estações que injetam as efemérides atualizadas na memória de cada satélite para transmissão subsequente aos usuários. Os satélites rastreados têm órbitas polares, circulares, com alturas aproximadas de 100 km e período em torno de 107 minutos (Figura 5.10).

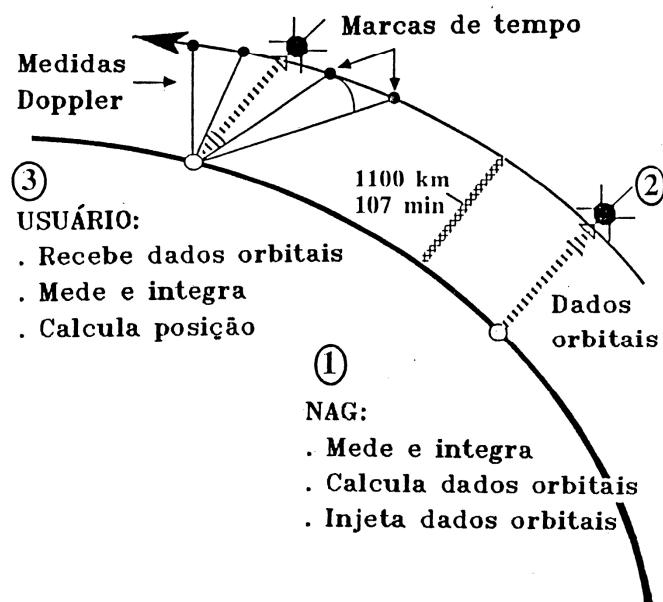


Figura 5.10 – Estações de controle

Cada satélite transmite duas freqüências portadoras, harmonicamente relacionadas. Uma em 400 mHz e outra em 150 mHz. O uso de duas freqüências permite calcular a correção do efeito dispersivo da ionosfera. A freqüência do sinal recebido é comparada com a freqüência padrão, gerada pelo oscilador do receptor, e a diferença entre elas é integrada, resultando as contagens Doppler, que são as observações. Combinado as contagens Doppler com os elementos orbitais do satélite rastreado determinam-se as coordenadas cartesianas do receptor.

### Posicionamento GPS

O *Navigation System using time and Ranging* (NAVSTAR) ou *Global Positioning System* (GPS), como é mais conhecido, é um sistema de posicionamento por satélite que vem sendo desenvolvido e testado pelo departamento de defesa norte americano desde 1973. O GPS tal como no sistema *Transit*, envolve satélites, rastreio de controle e usuários (Figura 5.11). Esse sistema usa uma constelação de 21 satélites operacionais e 3 reservas (Figura 5.12). Os satélites têm órbitas em 6 planos com inclinação de 55° em relação ao equador. As órbitas são circulares e a altura dos satélites é de 20.183 km, com período de 12 horas siderais. Cada satélite transmite os sinais  $l_1$  na freqüência de 1575,42 mHz, e  $l_2$  na freqüência de 1227,60 mHz. Esses sinais são caracterizados pela freqüência fundamental de 10,23 mHz gerada por um oscilador atômico de célio.

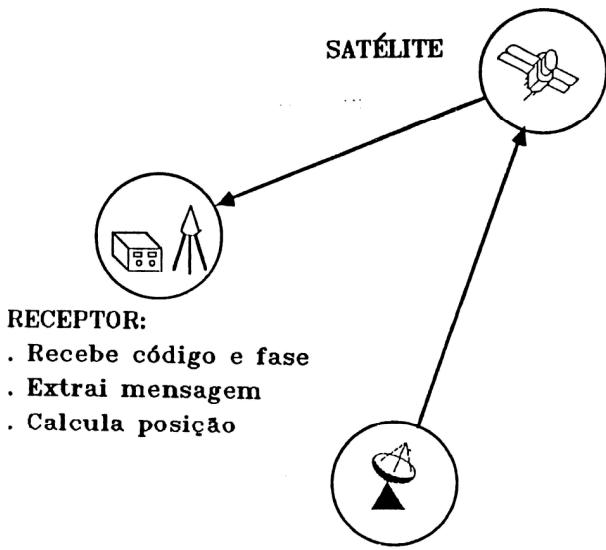
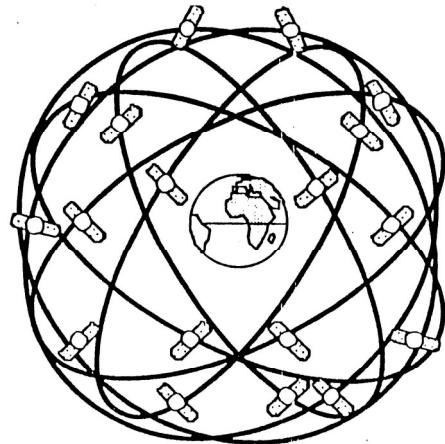


Figura 5.11 – Segmento do usuário



#### CONFIGURAÇÃO DO GPS:

- . 18 satélites ativos, mais 3 reservas
- . 6 planos orbitais
- . período de 12 horas
- . altura de 20.200 km.
- . total cobertura terrestre

Figura 5.12 – Satélites em órbitas

O sistema de controle é formado por 4 estações rastreadoras permanentes, conectadas à estação fundamental no Centro de Operações Espaciais do Colorado. O objetivo deste sistema é observar o comportamento dos satélites (incluindo os relógios atômicos), determinar suas órbitas e injetar mensagens para atualização orbital e instrumental nos satélites.

Os usuários realizam o posicionamento através de receptores que rastreiam os códigos e as fases das ondas portadoras e, na maioria dos casos, extraem a mensagem transmitida. Comparando a réplica do sinal recebido, gerado no receptor, a distância receptor - satélite pode ser determinada. Se as distâncias de 4 estações forem combinadas com os elementos orbitais dos satélites rastreados, o receptor pode ser posicionado no sistema Terrestre Convencional.

### ***Posicionamento por LASER***

O laser é a denominação genérica de uma fonte de luz coerente, isto é, de luz monocromática cujas ondas se movem na mesma direção. As letras que formam a palavra inglesa laser são as iniciais das seguintes: “Light amplification (by) stimulated emission radiation”.

O princípio do rastreamento de um satélite artificial pela emissão e recepção de raios laser está ilustrado na Figura 5.13. Um pulso de luz laser intensa é emitido por um telescópio a um satélite dotado de prismas retrorefletores. O raio laser é refletido e retorna ao sistema (SLR) onde os fôtons são capturados por um telescópio e detectados por um tubo foto-multiplicador. Medindo-se o tempo decorrido entre a emissão e a recepção do pulso laser, a distância entre a estação e o satélite pode ser determinada. Atualmente existem cerca de 25 estações que usam o SLR espalhados pelo mundo. Além

dessas estações fixas, existem 8 estações móveis construídas pela *National Aeronautics and Space Administration* (NASA) e mais 2 construídas na Europa.

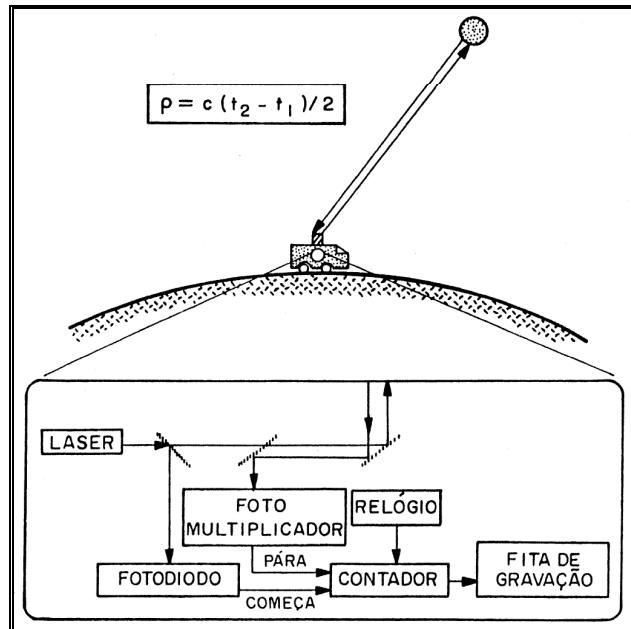


Figura 5.13 - Posicionamento a LASER.

Os dados obtidos com o SLR usualmente são analisados através de uma aproximação dinâmica na qual os dados obtidos por várias estações durante períodos de 5 a 30 dias são combinados. As posições das estações, os elementos orbitais dos satélites e as componentes sistemáticas são obtidas simultaneamente. As grandes distâncias entre as estações fixas (bases) são determinadas com precisão de 3 a 5 cm. Essa rede de estações SLR fornece parâmetros de alta precisão que descrevem o movimento de rotação da Terra.

Cerca de 15 satélites equipados com refletores já foram colados em órbitas da terra. Entre eles, o LAGEOS e o STARLETE foram os satélites totalmente espelhados que tiveram vida mais longa. Recentemente, o Japão lançou um terceiro satélite para rastreio exclusivamente a laser, denominado AJISI.

O rastreio a laser do satélite natural da Terra é denominado *Lunar Laser Ranging* (LLR) e também é realizado por algumas estações especialmente equipadas. Os refletores foram instalados na superfície lunar pelas tripulações das Apolos 11, 14, 15 e pelo controle remoto de duas sondas lunares soviéticas.

### **Posicionamento interferométrico (VLBI)**

A técnica de posicionamento denominado *Very Long Baseline Interferometry* (VLBI) é a mais precisa de todas. Inicialmente, ela foi desenvolvida por astrônomos como um meio de aumentar a resolução dos rádios telescópios. Mas, mesmo antes dos primeiros testes, realizados em 1967, foi constado independentemente por astrônomos canadenses e norte-americanos que constituía uma técnica geodésica ideal para medição de grandes distâncias.

O VLBI usa o princípio da interferência de ondas, análogo ao experimento dos dois orifícios realizados por Young na ótica clássica. Os sinais de rádio emitido por objetos extra - galácticos são recebidos nas antenas de dois ou mais radiotelescópios (Figura 5.14).

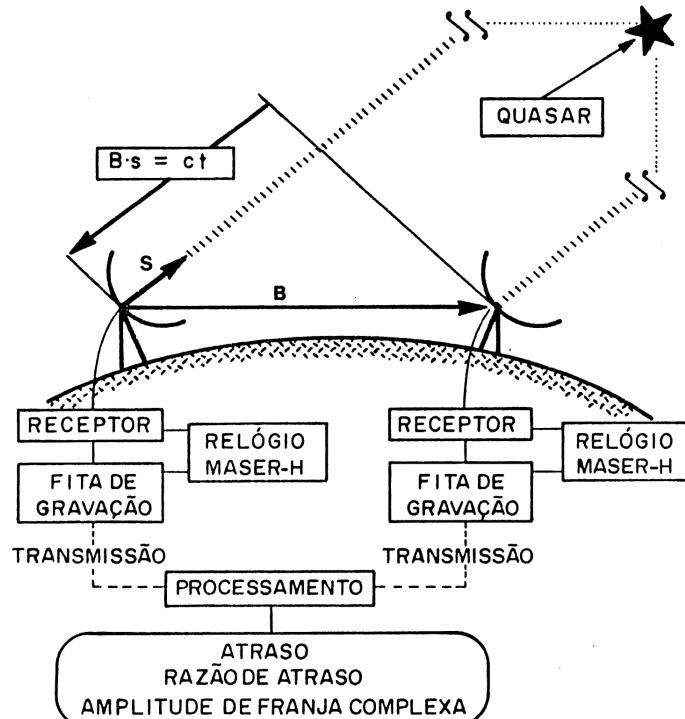


Figura 5.14 – Posicionamento por VLBI

Esses sinais são amplificados e convertidos numa banda de baixa freqüência através de uma freqüência padrão de hidrogênio maser. Os sinais convertidos são digitalizados, referidos a um sistema de tempo e gravados em fitas magnéticas. Posteriormente, as fitas são lidas para o processo que consiste no cálculo da correção cruzada através de um dispositivo que retarda e multiplica os sinais registrado num par de radiotelescópios. O resultado é uma função covariância amostral equivalente às franjas do experimentos de Young. A observação primária no VLBI geodésico é o retardo do grupo, isto é, a diferença entre os tempos de chegada da frente de onda do sinal do quasar nos radiotelescópios. Em princípio, esse retardo pode ser medido no processo de correlação, observando o tempo decorrido entre os registros de um par de fitas magnéticas para a correlação máxima. A fase (retardo) da função de correlação e a sua razão de variação com o tempo (razão de retardo) também são medidos. Na prática, o retardo do grupo é obtido a partir das medidas dos retardos de fase em diferentes freqüências. A componente primária do retardo do grupo medido é o retardo geométrico

$$\tau = \frac{B \cdot S}{c} \quad (5.11)$$

onde  $B$  é o vetor (base) entre os dois radiotelescópios,  $s$  é o vetor unitário na direção da fonte, e  $c$  é a velocidade da luz. Com as observações de uma dúzia ou mais de fontes numa sessão de 24 horas, as três componentes de  $B$  podem ser determinadas.

## 6. O CAMPO DE GRAVIDADE DA TERRA

### 6.1. FORÇA E ACELARAÇÃO GRAVITACIONAIS

A atração gravitacional é uma força de natureza física que se manifesta em todo o universo, aglomerando os corpos materiais em uma entidade comum através de ações gravitacionais recíprocas. Excetuando-se de outras forças, e suas origens causais, a força gravitacional é medida indiretamente através de seus efeitos. O caráter universal da atração gravitacional, entretanto, verificada na predição dos movimentos dos planetas, cometas, asteróides e meteoros em torno do sol; dos satélites em torno de seus planetas; do movimentos do sol em torno do centro de gravidade do sistema solar, etc.

Para explicar os movimentos dos planetas, sintetizados nas leis de Kepler, Newton propôs a lei universal da gravitação: "Toda partícula do universo atrai outra partícula com uma força que é diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional à distância entre elas". Simbolicamente, a intensidade da força gravitacional pode ser escrita na forma:

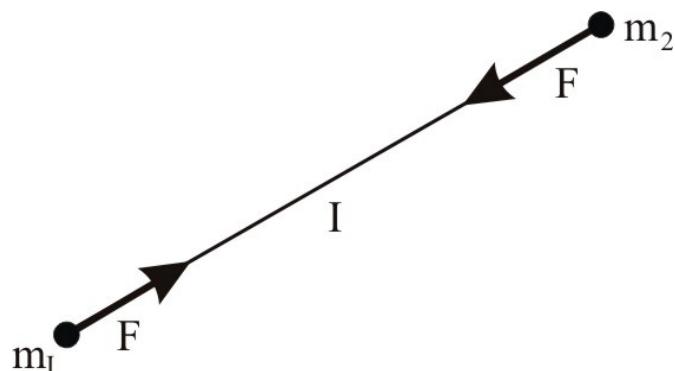


Figura 6.1 – Atração gravitacional entre partículas pela lei universal da gravitação

$$F = G \frac{m_1 m_2}{l^2} \quad (6.0)$$

onde  $G$  é a constante universal da gravitação,  $m_1$  e  $m_2$  são massas das partículas e  $l$  é a distância entre elas. O valor numérico da constante universal da gravitação depende apenas das unidades utilizadas. No sistema CGS, que é o usual em Gravimetria, resulta:

$$G = 6,670 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2} \quad (6.1)$$

Convém observar que a lei de Newton tem um aspecto teórico bem específico pois se aplica a partículas. No estudo da atração gravitacional entre massas de formas arbitrárias, em princípio existem duas alternativas: considerar cada uma das massa constituídas de partículas discretas ou utilizar a concepção de distribuição contínua de matéria. Ambas as alternativas são logicamente possíveis, mas a de distribuição contínua de matéria é mais conveniente tanto no aspecto conceitual como no aspecto prático

Pela lei universal da gravitação, a intensidade da aceleração gravitacional que a massa  $m_1$  imprime à massa  $m_2$  é expressa por:

$$a = \frac{F}{m_2} = G \frac{m_1}{l^2} \quad (6.2)$$

mas, a interação gravitacional entre partículas pode também ser descrita convenientemente a partir do conceito de campo. Neste caso, em vez de considerar a ação de uma partícula sobre outra, admite-se que cada partícula gera um campo no espaço, chamado campo gravitacional. Em simbologia vetorial, o campo gravitacional gerado por uma partícula de massa  $m$  (atrativa) que atua sobre a partícula de massa unitária (atraída) é expressa por (Figura 6.2)

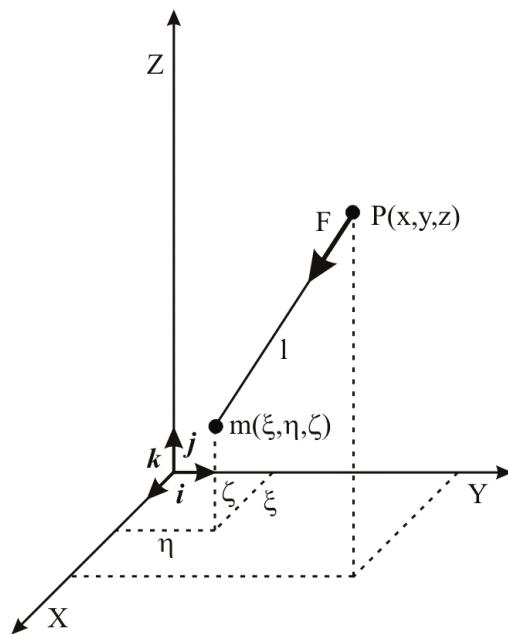


Figura 6.2 –Força e aceleração gravitacionais.

$$\vec{F} = -\frac{GM}{l^3} \vec{l} \quad (6.3)$$

onde:

$$\vec{l} = (x - \xi)\hat{i} + (y - \eta)\hat{j} + (z - \zeta)\hat{k}$$

e:

$$l = |\vec{l}|$$
(6.4)

Para obter as equações do campo, considera-se inicialmente uma única partícula. O campo gravitacional, então, é dado pela (6.3). Considerando uma superfície fechada  $s$ ,

calcula-se a integral de superfície da componente de  $\vec{F}$  normal a esta superfície (Figura 6.3)

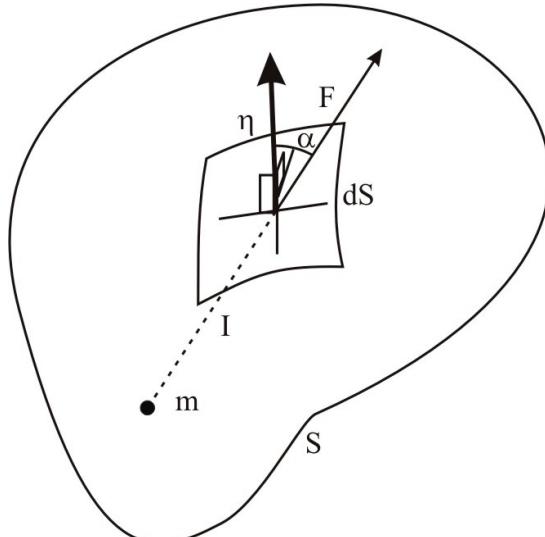


Figura 6.3 – Propriedades do campo gravitacional  
Equações de Passion e de Laplace.

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = -G \int_S \frac{m \vec{l} \cdot \vec{n}}{l^3} ds \quad (6.5)$$

onde  $ds$  é um elemento de área da superfície  $S$  e  $\vec{n}$  é versor normal à superfície e orientado para o exterior (Figura 6.3). A projeção do mesmo elemento de área  $ds$  sobre um plano normal ao raio vetor  $\vec{l}$  é dada por:

$$\frac{\vec{l} \cdot \vec{n} ds}{l} = ds \cos \alpha = ds \cdot \hat{l} \quad (6.6)$$

onde  $\alpha$  é ângulo entre  $\vec{l}$  e  $\vec{n}$ . Por definição de ângulo sólido  $\sigma$ , tem-se:

$$\frac{\vec{l} \cdot \vec{n} ds}{l^3} = \frac{ds \cos \alpha}{l^2} = d\sigma \quad (6.7)$$

com  $d\sigma$  igual ao ângulo sólido subentendido na origem pelo elemento de área  $ds$ . Então:

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = -Gm \int_S d\sigma = -4\pi Gm \quad (6.8)$$

pois o ângulo sólido subentendido por uma superfície fechada em torno da origem é  $4\pi$ .

É possível generalizar a (6.3) para uma distribuição de massa de forma arbitrária, pois cada partícula, interior a  $S$  contribui para a integração de superfície com um termo  $4\pi Gm$ , enquanto que a contribuição das partículas exteriores a  $S$  é nula (verifique isso!). Logo, o valor da integral será  $4\pi G$  vezes a massa total interior a  $S$ . Assim, no caso de uma distribuição contínua de densidade  $p(\xi, \eta, \zeta)$ , tem-se:

$$\int_s \vec{F} \cdot \vec{n} ds = -4\pi G \int_v p dv \quad (6.9)$$

onde  $\mathbf{v}$  é o volume limitado pela superfície  $S$  e:

$$p = \frac{dm}{dv}, \quad \text{com } dv = d\xi d\eta d\zeta \quad (6.10)$$

Mas, pelo teorema de Gauss, a integral de superfície é igual a integral de volume do divergente de  $\vec{F}$ , logo:

$$\int_s \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \int_v \operatorname{div} \vec{F} dv \quad (6.11)$$

De modo que a (6.9) pode ser escrita na forma

$$\int_v (\operatorname{div} \vec{F} + 4\pi G p) dv = 0 \quad (6.12)$$

Esta expressão é verdadeira para um volume de forma arbitrária se o integrando for nulo. Logo:

$$\operatorname{div} \vec{F} = -4\pi G p \quad (6.13)$$

Se  $\mathbf{v}$  não contém massa, obtém-se de (6.12)

$$\int_v \operatorname{div} \vec{F} dv = 0 \quad (6.14)$$

o que será possível para um volume de forma arbitrária somente se:

$$\operatorname{div} \vec{F} = 0 \quad (6.15)$$

Assim, no interior de  $\mathbf{v}$  o campo gravitacional é descrito pela (6.13) e no exterior de  $\mathbf{v}$  descrito por 6.15.

## 6.2. POTENCIAL DE ATRAÇÃO GRAVITACIONAL

O campo gravitacional da Terra pode ser expresso pelo potencial gravitacional, o que é particularmente útil para o estudo da distribuição da massa terrestre através da densidade  $p(\xi, \eta, \zeta)$  contida no volume  $\mathbf{v}$  (Figura 6.4), o potencial gravitacional gerado

por um elemento de massa  $dm$ , que atua sobre a partícula de massa unitária, situada em  $P(x,y,z)$  é expressa por:

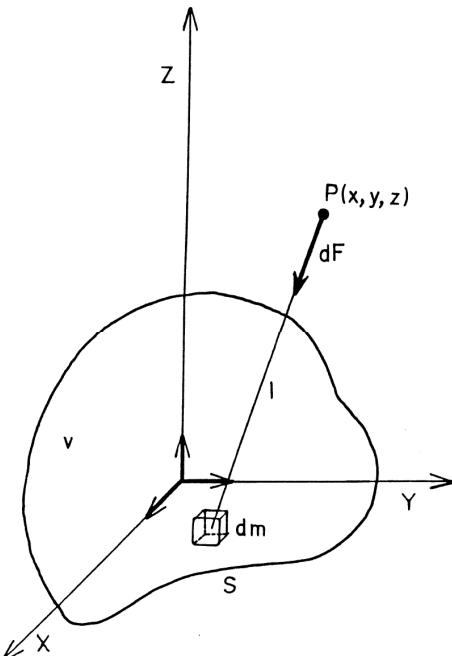


Figura.6.4 – Potencial gravitacional de u sólido.

$$d\vec{F} = -\frac{Gdm}{l^3} \vec{l} \text{ onde: } dm = \rho d\xi d\eta d\zeta = \rho dv \quad (6.16)$$

Usando a (6.4), pode-se escrever (6.16) na forma

$$d\vec{F} = -\frac{G}{l^3} [(x-\xi)\hat{i} + (y-\eta)\hat{j} + (z-\zeta)\hat{k}] dm \quad (6.17)$$

O campo gravitacional gerado por v, que atua sobre a partícula é dada pela integral em v, então:

$$\vec{F} = -G \int \left[ \frac{(x-\xi)}{l^3} \hat{i} + \frac{(y-\eta)}{l^3} \hat{j} + \frac{(z-\zeta)}{l^3} \hat{k} \right] dm \quad (6.18)$$

onde das componentes de  $\vec{F}$  podem ser expressas pelas derivadas parciais, em relação a x, y, z, da função escalar

$$V = G \int \frac{dm}{l} = \frac{Gm}{l} \quad (6.19)$$

esta função é denominada função potencial ou potencial de atração gravitacional e tem aplicações importantíssimas no estudo do campo gravitacional terrestre. As derivadas parciais de (6.18) são

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x} &= G \int \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{I}{I^3} \right) dm = -G \int \frac{x - \xi}{I^3} dm \\
\frac{\partial V}{\partial y} &= G \int \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{I}{I^3} \right) dm = -G \int \frac{y - \eta}{I^3} dm \\
\frac{\partial V}{\partial z} &= G \int \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{I}{I^3} \right) dm = -G \int \frac{z - \zeta}{I^3} dm
\end{aligned} \tag{6.20}$$

Com essas derivadas, a (6.17) pode ser escrita na forma:

$$\vec{F} = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} = \text{grad}V \tag{6.21}$$

que representa um campo vetorial conservativo, pois as derivadas parciais de  $V$  em relação aos eixos são as componentes de  $\vec{F}$  segundo os mesmos eixos. Com isso, o campo gravitacional pode ser expresso a partir da função escalar  $V$ . De (6.13), tem-se:

$$\text{div}F = -a\pi Gp \tag{6.22}$$

mas, por (6.20)

$$F = \text{grad}V \tag{6.23}$$

Então:

$$\text{div}(\text{grad}V) = -4\pi Gp \tag{6.24}$$

que, com o operador

$$\nabla^2V = \frac{\partial^2V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2V}{\partial z^2} \tag{6.25}$$

representa a equação de Poisson (interior de v):

$$\nabla^2V = -4\pi Gp \tag{6.26}$$

Analogamente, de (6.15) vem:

$$\text{div}(\text{grad}V) = 0 \tag{6.27}$$

ou para  $\rho = 0$  (exterior de v)

$$\nabla^2\nabla = 0 \tag{6.28}$$

que é a equação de Laplace para o potencial gravitacional.

### 6.3. O CAMPO DE GRAVIDADE

O potencial de gravidade da Terra ( $W$ ) ou geopotencial é descrito pela soma do potencial gravitacional, gerado pela massa da Terra, e pelo potencial centrífugo, gerado pelo movimento de rotação terrestre:

$$W = V + \phi \quad (6.29)$$

onde  $V$  é o potencial de atracão gravitacional e  $\Phi$  é o potencial centrífugo. Portanto, a aceleração que a massa terrestre( $M$ ) imprime à partícula de massa  $m_2$  é denominada aceleração de gravidade, sendo expressa por:

$$\vec{g} = \frac{1}{m_2} \vec{F} = G \frac{M}{l^3} \vec{l} \quad (6.30)$$

Nas aplicações de dados gravimétricos, a quantidade que apresenta maior interesse é a intensidade da aceleração de gravidade dada por

$$g = |\vec{g}| \quad (6.31)$$

A unidade de aceleração no Sistema Internacional é  $ms^{-2}$ , mas ainda é aceitável a unidade que ficou em uso por muito tempo denominada Gal (em homenagem a Galileu). Esta, corresponde à unidade de aceleração no Sistema CGS, isto é

$$1Gal = 1cms^{-2}$$

Em casos que envolvem valores numéricos pequenos, usam-se submúltiplos como por exemplo:

o miligal (mGal)

$$1mGal = 10^{-3} Gal$$

e o microgal ( $\eta Gal$ )

$$1\eta Gal = 10^{-6} Gal$$

### 6.4. ANOMALIAS GRAVIMÉTRICAS

O maior interesse nas aplicações da Gravimetria não está na aceleração de gravidade e sim nas anomalias gravimétricas. Genericamente, anomalia gravimétrica é a diferença entre a aceleração de gravidade medida na superfície terrestre (corrigida das

variações periódicas e da topografia) e a aceleração de gravidade produzida por um modelo. Na Figura 6.5,  $g_*$  representa a intensidade da aceleração de gravidade medida, reduzida à superfície geoidal, e  $\gamma$  representa a intensidade da aceleração de gravidade teórica na superfície do modelo.

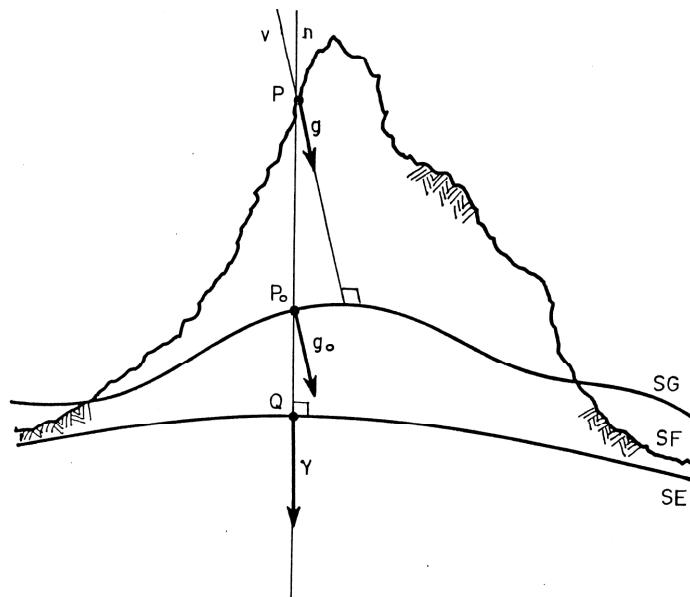


Figura 6.5 – Aceleração de gravidade medida ( $g$ ), reduzida ao geóide ( $g_*$ ) e teórica ( $\gamma$ )

Nesta condições, a anomalia gravimétrica é expressa por

$$\nabla g = g_* - \gamma \quad (6.32)$$

Convém enfatizar que  $g_*$  está sobre o geóide e  $\lambda$  está sobre o elipsóide. As correções utilizadas para a obtenção de  $g_*$  a partir de  $g$  caracterizam diferentes tipos de anomalias. A anomalia Bouguer Por exemplo, tão importante do ponto de vista geológico e geofísicos, pouco significa se considerada isoladamente nas investigações sobre o geóide; enquanto que as anomalias isostáticas, que podem interessar a geólogos, geofísicos e geodesistas, não apresentam interesse nos trabalhos de prospecção de natureza local.

Na forma genérica, a anomalia gravimétrica envolve a gravidade sobre o geóide, obtida a partir da gravidade observada na superfície física da Terra. A correção ar-livre ( $C_a$ ) elimina somente o efeito gravitacional decorrente da altitude do ponto de observação, sem considerar a massa topográfica existente entre o geóide e o referido ponto (Figura 6.5). A anomalia gravimétrica que se obtém através da correção ar-livre chama-se anomalia ar-livre ( $\Delta g_a$ ) e tem a expressão

$$\Delta g_a = g + C_a - \gamma \quad (6.33)$$

A correção que considera a massa topográfica existente entre o geóide e o ponto de observação denomina-se correção Bouguer ( $C_b$ ). A anomalia gravimétrica que se obtém através da correção Bouguer chama-se anomalia Bouguer ( $\Delta g_b$ ). Assim, tem-se:

$$\Delta g_b = g + C_a + C_b - \gamma \quad (6.34)$$

Para considerar o equilíbrio isostático da crosta, usa-se ainda a correção isostática ( $C_i$ ) na forma:

$$\Delta g_i = g + C_a + C_b + C_i - \gamma \quad (6.35)$$

O cálculo da correção isostática, assim como a correção topográfica que será vista mais adiante, envolvem modelos topográficos digitais, obtidos a partir de mapas topográficos em escalas adequadas. Isto significa que essas correções podem ser obtidas somente para as regiões mapeadas numa escala não inferior a 1:100.000.

## 6.5. ANOMALIA AR-LIVRE

A correção ar-livre para uma estação gravimétrica com altitude ortométrica  $H$  é expressada por (Figura 6.6)

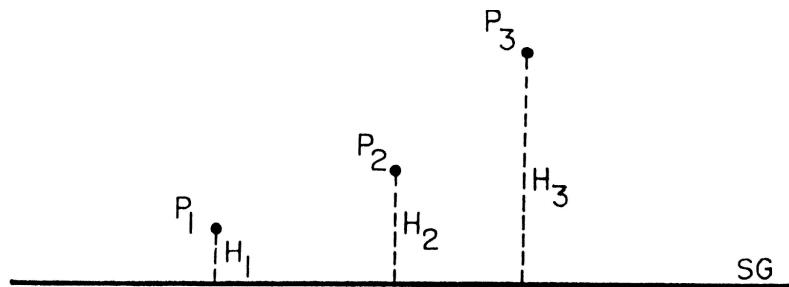


Figura 6.6

$$C_a = -\frac{\partial g}{\partial H} H \cong 0,3086 H \quad (6.36)$$

onde  $\frac{\partial g}{\partial H}$  é o gradiente vertical da aceleração de gravidade. Com  $H$  em metros, a correção ar-livre é expressa em mGal.

Portanto a anomalia ar-livre tem a expressão

$$\nabla g_a = g + 0,3086 H - \gamma \quad (6.37)$$

onde  $g$  é a gravidade observada e  $\gamma$  é a gravidade teórica.

Convém observar que a medição relativa de  $g$ , utilizando um gravímetro, é operação simples que se conclui em poucos minutos com notável precisão. Mas a obtenção da anomalia ar-livre pressupõe a definição cartográfica da estação: latitude para o cálculo da gravidade teórica e altitude para o cálculo da correção ar-livre. Os gravímetros usados atualmente têm uma precisão de  $\pm 1\text{m}$  na altitude, o que implica numa incerteza de  $\pm 0,31\text{ mGal}$  na anomalia ar-livre.

## 6.6. ANOMALIA BOUGUER

A anomalia Bouguer considera a massa topográfica existente entre o geóide e a superfície da Terra. A aceleração gravitacional exercida pelas massas topográficas é expressas por

$$C_b = B = C \quad (6.38)$$

onde o primeiro termo ( $B$ ) constitui a correção Bouguer propriamente dita, que corresponde à componente vertical da aceleração gravitacional exercida por uma camada horizontal, com espessura  $H$  e dimensões infinitas, sobre a massa unitária situada no ponto de observação. O segundo termo ( $C$ ), denominado correção topográfica, leva em conta as irregularidades da topografia em relação à camada horizontal. Em regiões de topografia pouco acidentadas, como é o caso do Brasil, a correção topográfica é relativamente pequena e geralmente não é considerada ( $C=0$ ) nos trabalhos de escala regional. Mas ela é necessária nos trabalhos de escala local como, por exemplo, prospecção mineral e de petróleo. O cálculo da correção topográfica é moroso e requer modelos topográficos digitais para uso de computador.

Portanto, a correção Bouguer simplifica, considerando somente o efeito gravitacional da placa horizontal com densidade  $\rho$  e espessura  $H$  é dada por (Figura 6.7)

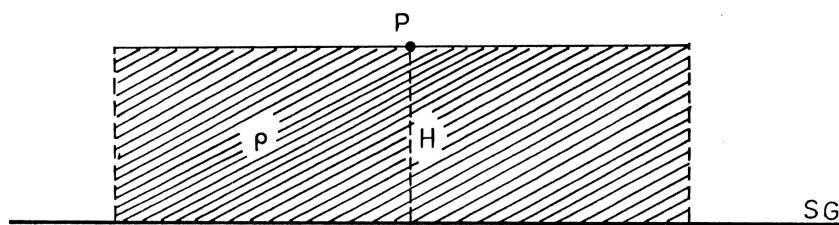


Figura 6.7 Correções gravimétricas padrões  
 a) Correção ar-livre  
 b) Correção Bouguer

$$C_b = B = -2\pi G \rho H \cong -0,1119H \quad (6.39)$$

onde  $G$  é a constante gravitacional ( $G = 6,670 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$ ) e  $\rho$  é a densidade média da crosta ( $\rho = 2,67 \text{ g cm}^{-3}$ ). Com  $H$  em metros, a correção Bouguer é expressa em mGal. Então, a anomalia Bouguer é expressa por

$$\Delta g_b = g = 0.3086H - 0.1119H - \gamma \quad (6.40)$$

## 6.7. ANOMALIA ISOSTÁTICA

A isostasia estuda o estado de equilíbrio sob os efeitos da gravidade. Aos excessos (montanhas) e às deficiências (oceano) de massa em relação ao geóide correspondem massas internas de compensação.

Em certas regiões, o equilíbrio isostático pode estar plenamente atingido (regiões ditas compensadas), em outras pode se achar em fase de processamento (regiões ditas subcompensadas), ou ter sido ultrapassado (regiões supercompensadas), daí o processamento no sentido inverso. Não se dispõe de provas concretas de que a isostasia seja uma realidade: mas o fato das anomalias Bouguer serem sistematicamente negativa nos continentes e positivas nos oceanos, indica a existência de irregularidade internas da densidade, negativas nos continentes e positivas nos oceanos, tal como preconiza a isostasia. Anomalias isostáticas aproximadamente nulas indicam equilíbrio isostático; anomalias fortemente negativas indicam supercompensação, e anomalias positivas indicam subcompensação.

Um exemplo notável é a existência de anomalias isostáticas negativas na península escandinava e Finlândia, e também na região nordeste dos Estados Unidos, onde a crosta acha-se, desde a desglaciação do quaternário, em elevação segundo informações geológicas e geodésicas.

A correção que leva em conta o estado de equilíbrio isostático na litosfera chama-se correção isostática ( $C_i$ ). A anomalia gravimétrica que se obtém com a inclusão da correção isostática denomina-se anomalia isostática ( $\Delta g_i$ ) e tem a expressão:

$$\Delta g_i = g + C_a + C_b + C_i - \gamma \quad (6.41)$$

Dependendo do modelo isostático utilizado na correção tem-se diferentes anomalias isostáticas.

## 7. PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS

### 7.1. INTRODUÇÃO

Como a Terra é aproximadamente esférica e os mapas são planos, o problema básico no mapeamento terrestre é a projeção da superfície curva da Terra sobre a superfície plana do mapa (Figura 7.1).

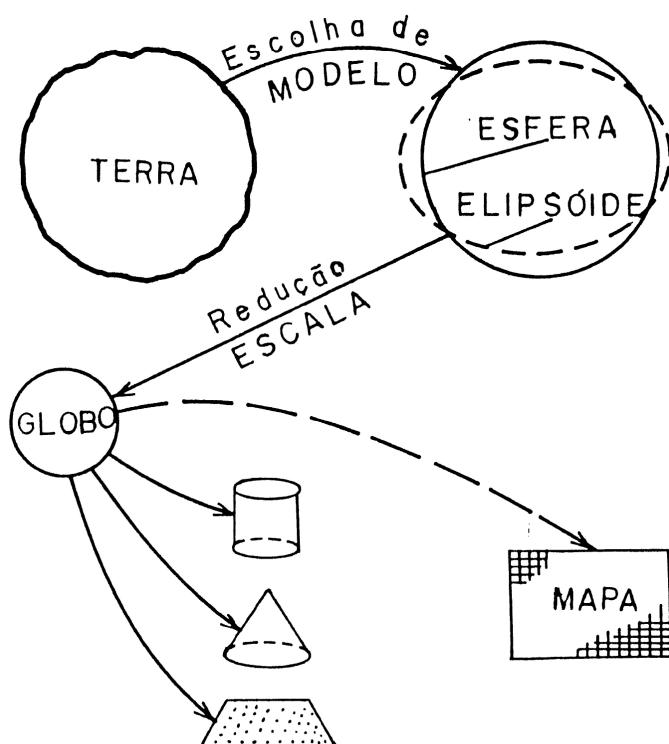


Figura 7.1. – Evolução da projeção cartográfica.

A forma da Terra geralmente é apresentada por um esferóide de revolução (esfera ou elipsóide) ao qual são referidos os pontos da superfície física da terrestre. A determinação dos parâmetros que definem o modelo terrestre é objeto da Geodésia. Assim, o mapeamento de uma superfície terrestre envolve duas etapas: a redução através da escala, para que a área possa ser representada nos limites do papel, e a projeção das coordenadas através dos critérios cartográficos. Os critérios básicos utilizados na projeção cartográficas são estabelecidos segundo as propriedades de:

- eqüidistância: representação correta de distâncias;
- conformidade: representação correta de ângulos;
- eqüivalência: representação correta de áreas.

Estes critérios são mutuamente excludentes, isto é, o mapa de uma região da superfície terrestre não pode representar ao mesmo tempo, por exemplo, áreas e formas

sem distorções. Isto significa que não há uma projeção cartográfica ideal que atenda todos os propósitos.

Na escolha do sistema de projeção, vários fatores devem ser considerados, mas não há fórmulas que possam indicar a seleção correta pois os mapas geralmente ficam sujeitos a uma combinação complexa de objetivos e condições. Um dos fatores mais importantes na escolha de uma projeção está no arranjo das deformações em relação à área mapeada. Mapeamentos sistemáticos como topográfico ou geológico têm requisitos diferentes daqueles dos mapas geográficos individuais.

Um requisito desejável no uso das projeções cartográficas é fazer com que qualquer porção da área mapeada preserve em si as mesmas características de simetria e deformação. Para muitos mapas, o tipo de projeção cartográfica é mais importante do que certas propriedades da projeção (conformidade, eqüidistância ou equivalência). Tais atributos como, por exemplo, projeções de paralelos como retas paralelas, deformação localizada e coordenadas retangulares freqüentemente são requisitos importantes nas utilizações do mapa. Num mapa índice por exemplo, é recomendável que os paralelos e meridianos tenham projeções retas, possibilitando o uso de coordenadas retangulares.

## 7.2. CLASSIFICAÇÃO E TERMINOLOGIA

A classificação usual das projeções cartográficas é feita em função de algumas características geométricas. Teoricamente, a esfera ou o elipsóide são transformados em uma superfície desenvolvível. Esta, é a forma geométrica capaz de tornar-se plana como, por exemplo, um cone ou um cilindro que podem ser cotados e desenvolvidos como mostra a Figura 7.2.

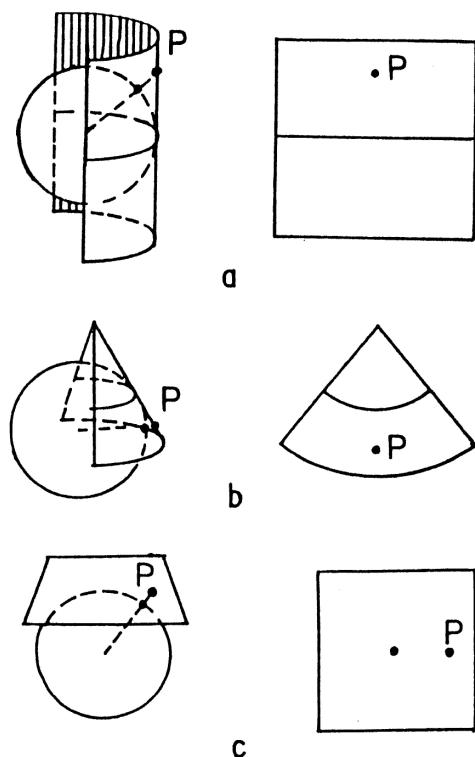


Figura 7.2. – Superfícies de projeção

- a) Cilindro tangente ao globo no equador
- b) Cone tangente ao globo em um paralelo
- c) Plano tangente ao globo no polo norte

Por convenção, os eixos do cone e do cilindro coincidem com o eixo terrestre de modo a simplificar o reticulado da projeção. As projeções cartográficas são classificadas a partir de padrões tais que qualquer projeção (não convencional) possa ser identificada através de um conjunto de critérios e, reciprocamente, um conjunto de critérios possa descrever qualquer projeção. Assim, o esquema de classificação segue um número de critérios subdivididos em CLASSEs e VARIEDADEs. As classes podem ser consideradas sob diferentes pontos de vista (natureza, coincidência, posição, entre outras) e não são mutualmente excludentes. As variedades são as subdivisões existentes em cada classe (plana, cônica, cilíndrica, etc.) e são mutualmente excludentes. Para facilitar o esquema de classificação, são consideradas alguns elementos como a região projetada, a superfície de projeção e a projeção em si. A superfície de projeção constitui o PROBLEMA EXTRÍNSECO e o processo de projeção constitui o PROBLEMA INTRÍNSECO (Figura 7.3).

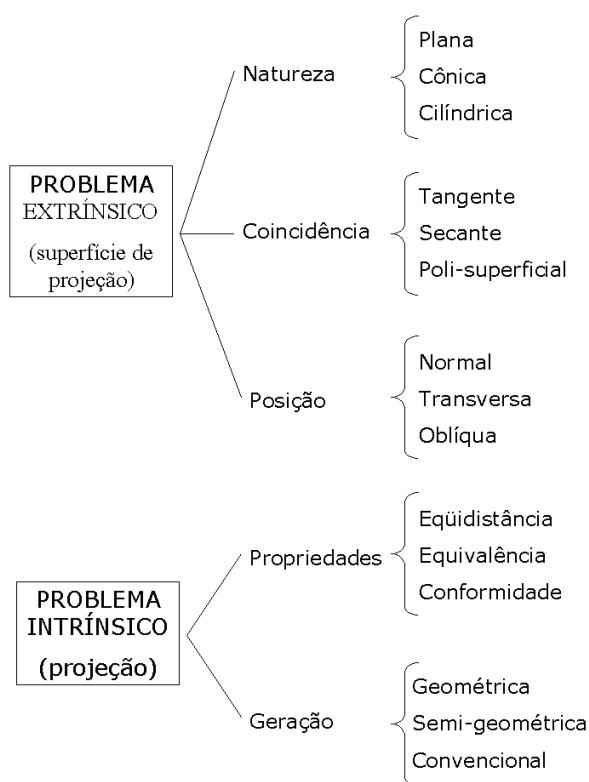


Figura 7.3 – Problemas EXTRÍNSECO E INTRÍNSECO  
(Classificação esquemática)

O problema extrínseco considera as propriedades da superfície de projeção em relação à área projetada, originando três classes:

- **natureza:** define a forma geométrica (plano, cone, cilindro);

- **coincidência:** define o contato da superfície de projeção com a superfície projetada (tangente, secante, poli-superficial)
- **posição:** define a orientação da superfície de projeção em relação à superfície projetada (normal, oblíqua, transversa)

O problema intrínseco considera a projeção sob o ponto de vista das propriedades cartográficas (conformidade, eqüidistância, equivalência) e o processo de geração (geométrica , semi-geométrica, convencional).

### **coincidência**

No estudo das projeções cartográficas, usualmente é empregada uma terminologia apropriada para possibilitar clareza na descrição e na análise de uma grande variedade de projeções. Para melhor compreensão, o processo de projeção deve ser visualizado em duas etapas: (a) redução da Terra às dimensões de um globo e (b) projeção desse globo sobre o plano. A inevitável alteração das dimensões do globo sobre o mapa pode ser pensada em termos de um fator de escala. Alguns termos indispensáveis no estudo e nas aplicações das projeções cartográficas são os seguintes:

#### ***Projeção conforme***

É aquela que preserva ângulos (direções) e consequentemente formas para pontos relativamente próximos no domínio projetado.

#### **Projeção equivalente**

É aquele que preserva áreas de figuras no domínio projetado.

#### **Projeção equidistanrte**

É aquela que preserva distâncias entre pontos no domínio projetado.

#### **Escala linear**

É a razão entre a distância sobre a direção projetada (mapa) e a distância sobre a direção verdadeira (superfície terrestre). Em outras palavras, é a razão entre a distância gráfica e a distância verdadeira.

#### **Escala áerea**

É a razão entre a área gráfica e a área verdadeira.

#### **Linhas padrões**

São as circunferências projetadas em verdadeira grandeza. Usualmente as linhas padrões são os paralelos e meridianos definidos através de coordenadas geográficas. Assim, é usual falar em paralelos padrões e meridianos padrões

## **Meridiano central**

É o meridiano que divide o mapa em duas partes aproximadamente iguais. Em muitas projeções convencionais são retas em relação às quais a projeção é simétrica, isto é em um lado da linha é a imagem do outro.

## **Deformação angular**

É a alteração que ocorre nas relações dos ângulos projetados.

## **Padrão de deformação**

É a combinação das deformações lineares e angulares de uma projeção, em geral representada por linhas de isodeformações. Assim, os valores das linhas indicam a deformação relativa e a densidade das linhas indicam o gradiente de deformação. Certas projeções têm padrões de deformação similares. Os padrões de deformação de algumas projeções usuais são dados seguir.

## **Padrão cônico**

Ocorre em todas as projeções que são realizadas pela transformação da superfície esférica em um cilindro tangente ou secante (Figura 7.4a). As linhas de mesma deformação são retas paralelas às linhas padrões. A deformação mínima naturalmente ocorre sobre as linhas de contado.

## **Padrão cônico**

Resulta se a transformação da superfície esférica é feita sobre a superfície do cone tangente ou secante em circunferências menores da esfera (Figura 7.4b). As linhas de mesma deformação são paralelas às projeções dos paralelos padrões.

## **Padrão azimutal**

Ocorre com a transformação da esfera sobre o plano tangente ou secante (Figura 7.4c) cujas linhas de contado são circunferências. Neste caso as linhas de isodeformação são concêntricas ao ponto de tangência ou ao centro da circunferência de interseção. A deformação em todos esses padrões aumenta a partir das linhas ou pontos padrões e o maior gradiente de deformação em geral ocorre na direção da normal à linha padrão.

## **Deformação média (angular ou de área)**

É a média ponderada das deformações que ocorrem na projeção.

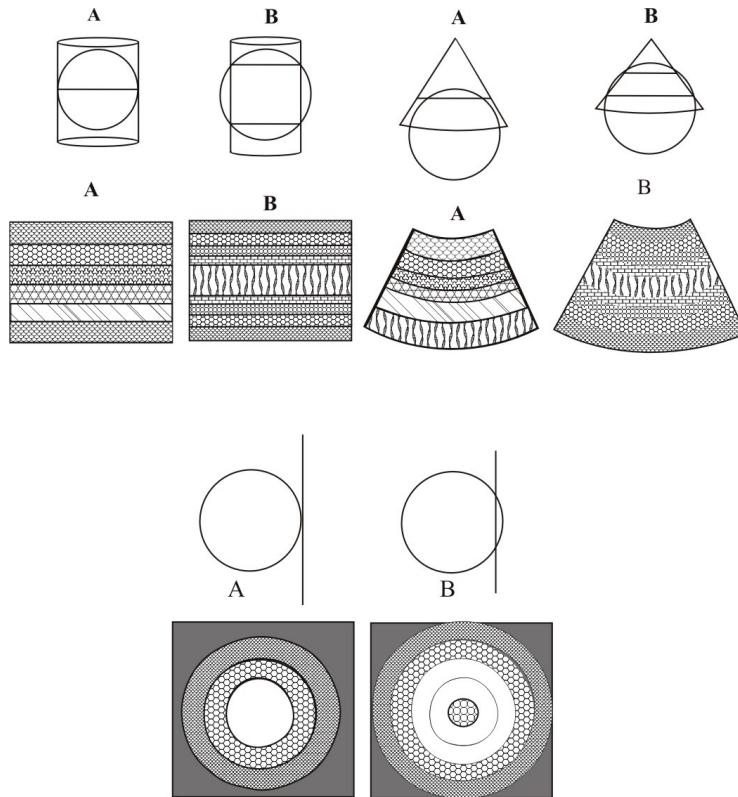


Figura 7.4. – Padrões de deformações

### 7.3. ESCALA

Quando uma grande área como, por exemplo, um hemisfério é mapeado sobre uma folha de papel, o mapa é dito de pequena escala; quando uma pequena área como, por exemplo, a de um município é mapeado sobre a mesma folha, o mapa é dito de grande escala. Em outras palavras, nos mapas de pequena escala há grande redução nas dimensões, nos de grande escala há pequena redução. Usualmente, a escala é expressa de um número adimensional (fração representativa) expressa por

$$E = \frac{d}{D}$$

onde  $d$  é a distância gráfica (representada) e  $D$  é a distância verdadeira (medida).

Assim, a escala de uma distância de 200 km, por exemplo, representada por um segmento de 1 cm sobre uma folha de papel, é dada por:

$$E = \frac{d}{D} = \frac{1\text{cm}}{200\text{km}} = \frac{1(\text{cm})}{200 \times 10^5 (\text{cm})} = \frac{1}{20.000.000}$$

Isto significa que uma distância de 200 km sobre a superfície terrestre é 20.000.000 vezes maior que a sua representação gráfica. As áreas são reduzidas em

ambas as dimensões; portanto, a área de um quadrado com lado de 200 km é 20.000000 vezes menor que a respectiva área gráfica.

A escala em geral varia de ponto para ponto e pode variar em diferentes direções no mesmo ponto. Essas características estão ilustradas na Figura 7.5, na qual um arco de  $90^\circ$  é projetado sobre a tangente em a. Se a, b, c, ... j. são marcas correspondentes a  $10^\circ$ , as respectivas posições na projeção são indicadas por a', b', c', ... j'. Assim, a reta aj' representa a projeção da linha aj.

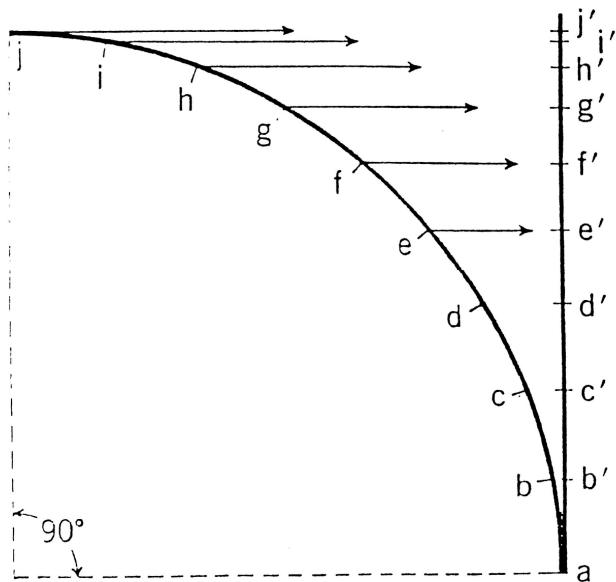


Figura 7.5 - Projeção ortográfica de um arco sobre uma reta.

Os intervalos entre pontos sucessivos do arco são iguais, mas o método de transformação não manteve esta característica. Os intervalos projetados sobre a tangente tornaram-se progressivamente menores na direção de j'. A razão de variação é indicada graficamente pela diminuição dos segmentos entre pontos. Como uma linha teoricamente contém infinitos pontos, o ponto de aj tem a projeção correspondente a aj', mas há uma variação contínua de escala sobre aj' e, como a variação de escala é contínua, cada ponto de aj' possui diferentes escalas. Para mostrar que a escala em um ponto pode ser diferente em diferentes direções, consideremos um retângulo abcd (Figura 7.6) e sua projeção ab'c'd'. O desenho em perspectiva mostra como isso é feito. Como ab é comum para o quadrilátero e sua projeção, não há variação de escala nesta direção. Como ab' é a metade do comprimento de ab e cuja variação ocorre uniformemente, então a escala sobre ab' é a metade da escala sobre ad. A projeção de ac é ac'; a razão entre ac' e ac constitui o fator de escala sobre ac', que é diferente de 1 sobre ad ou 0,5 sobre ab'. Qualquer outra diagonal de a para uma posição sobre bc, tem a interseção sobre b'c', cuja razão entre os comprimentos de diagonais similares sobre os dois retângulos é diferente. Assim, a escala em um ponto a no retângulo ab'c'd' é diferente em todas as direções, o que completa a explicação para as deformações.

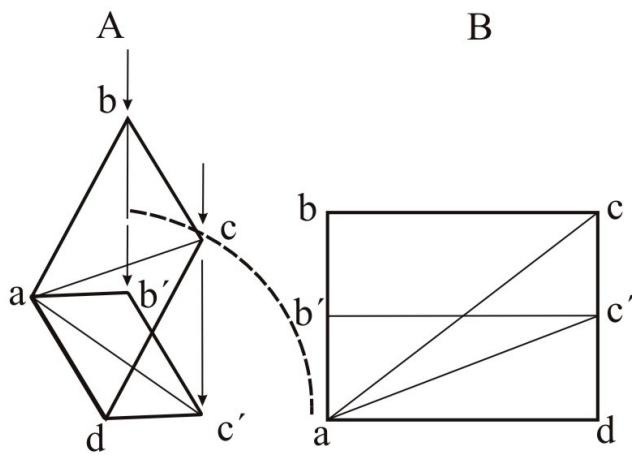


Figura 7.6 – Projeção de um retângulo sobre outro com um lado comum.

O desenho em perspectiva e projetado (figura A) mostra a relação geométrica dos dois retângulos, enquanto o desenho da direita mostra (figura B) mostra a relação entre os dois retângulos quando eles são rotacionados torno do lado comum.

#### 7.4. DEFORMAÇÃO

Em todo ponto da superfície esférica há um número infinito de direções e, naturalmente, infinitos pares de direções perpendiculares entre si tais como N-S com E-O, NE-SO com NO-SE e assim por diante. Assim, quando a superfície esférica é transformada em plano, todas as direções do globo são representadas por projetadas. Em geral, a relação angular entre as direções se altera no processo de transformação, isto é, um par de direções perpendiculares sobre o globo não são necessariamente perpendiculares na projeção.

Quando os ângulos são preservados na projeção (conformidade) então há um número infinito de pares de direções perpendiculares em cada ponto da projeção nas direções em que a escala é invariável, o que constitui um caso especial. Por outro lado, se a projeção não é conforme, há apenas um par de direções perpendiculares que é preservado na projeção (exceto em pontos particulares), e a escala nessas direções é variável.

A lei de deformação estabelece que em qualquer sistema de transformação "há em cada ponto da superfície esférica pelo menos duas direções perpendiculares que se mantêm perpendiculares na projeção", ainda que todos os outros ângulos naquele ponto possam ser alterado em relação à posição original.

Qualquer que seja o sistema empregado para transformar a superfície esférica em um plano, as relações geométricas válidas sobre a esfera não são inteiramente válidas sobre o plano. Ângulos, áreas, distâncias e direções estão sujeitos a alterações; há várias condições que podem ou não ser aplicadas nas projeções, tais como paralelismo de paralelos, convergência meridiana, interseções perpendiculares entre paralelos e meridianos, pontos representado pólos, etc. Entretanto, as maiores alterações estão nas que envolvem ângulos, áreas, distâncias e direções.

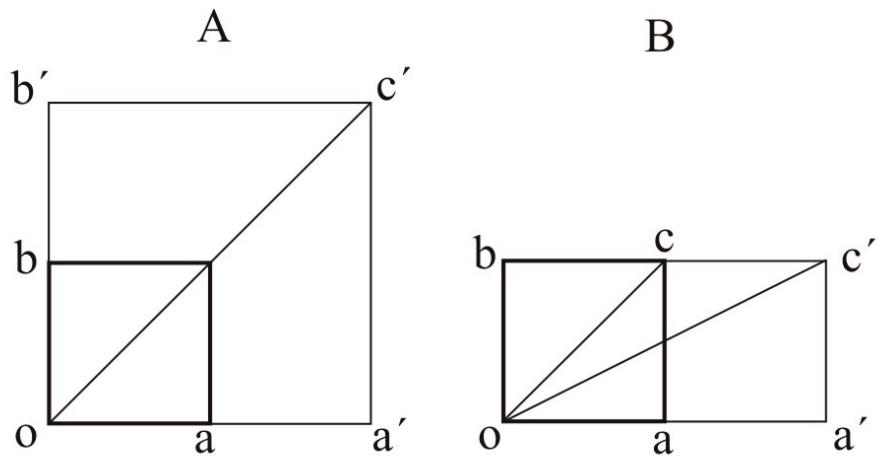


Figura 7.7 - Projeções de retângulos

Em A, o retângulo  $oacb$  foi projetado em um retângulo  $oa'c'b'$  tal que a razão dos comprimento  $ao'$  e  $ob'$  corresponde à razão entre os comprimentos  $oa$  e  $ob$ .  
 Em B, a razão não foi preservada. Em A foram preservados todos com vértice em  $o$ ; mas B não.

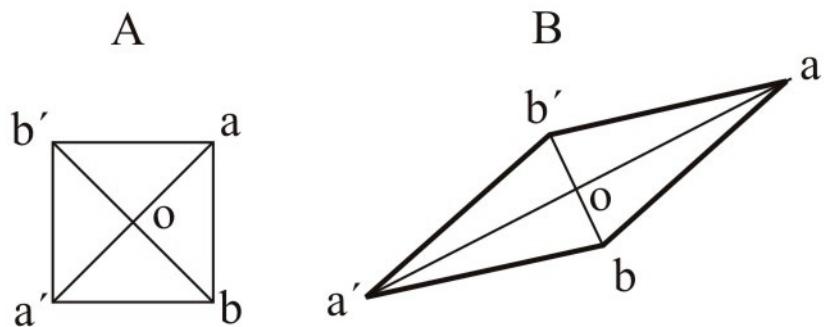


Figura 7.8 – Projeção de um quadrado

O quadrado  $aba'b'$  em A foi projetado em  $aba'b'$  em B. O produto das bissetrizes em A e em B são iguais. Portanto, as áreas das duas figuras são iguais.

## **REFERÊNCIAS E BIBLIOGRAFIA**

BONFORD, G. -1975- Geodesy. 3rd Edition. Oxford at the Clarendon Press, Oxford, 731 pp.

DEHLINGER, P. -1978- Marine gravity. Elsevier Scientific Publishing Co, N.York, 322 pp

FISCHER, I -1975- The figure of the Earth - Changes in Concepts. Geophys. Surveys (2): 3-54.

GEMAEL , C. -1974- Astronomia de campo. publ. do Diretório Acadêmico de Engenharia da Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 86 pp.

GEMAEL, C. -1978- Geodésia física. Publ. do Curso de Pós-graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 158 pp.

GEMAEL, C . -1981- Referenciais cartesianos utilizados em Geodésia. Publ. do Curso de Pós-graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 66 pp.

GROten, E, -1979- Geodesy and the Earth's gravity field. F. Dummler, Bonn, 385 pp.

HEISKANEN, W. A. & MORITZ, H. -1967- Physical Geodesy. Freeman, San Francisco, 364 pp.

HEISKANEN, W. A. & VENING MEINESZ, F. A. -1958- The Earth and its gravity field. McGraw-Hill Book Company Inc, N. York, 470 pp.

IAG (International Association of Geodesy) -1971- Geodetic Reference System 1967. Bull. Geod. Publication Speciale No 3, Bureau Central, Paris, 115 pp.

IAG (International Association of Geodesy) -1974- International Gravity Standardization Net 1971. Bull. Geod. Publication Speciale No. 4 Paris, France, 194 pp.

IAG (International Association of Geodesy) -1980- The geodesist's book. (I.I. Mueller ed.), Bull. Geod. 54 (3): 394-408.

LAMBERCK, K. -1988- Geophysical Geodesy: The slow deformations of the earth. Clarendon Press. Oxford, 718 pp.

LEICK, A -1990- GPS Satellite surveying. John Wiley & Sons, N. York, 352 pp.

PICK, M.; PICHA, J. & VYSKOCIL, V. -1973- Theory of the Earth's gravity field. Elsevier Scientific Publishing Co, Amsterdam, 538 pp.

SÁ, N. C. de & BLITZKOW, D. -1986- Uma tentativa de homogeneizar os dados Gravimétricos existentes no Brasil. Rev. Bras. Geofis.,4 (2): 73-77.

SÁ, N. C. de ; USSAMI, N. & MOLINA, E. C. -1992- Mapa gravimétrico do Brasil: modelos gravimétricos digitais ar-livres e Bouguer. Relatório Técnico, IAG/USP, São Paulo, 47 pp.

SÁ, N. C. de - 1993- Um geóide para aplicação do GPS Geociências. III Congresso Internacional da Sociedade de Geofísica. Rio de Janeiro, Anais I:584-589.

SÁ, N. C. de -1994- Redução de observações gravimétricas: teoria e prática. Relatório Técnico, IAG/USP, São Paulo, 105 pp.

SÁ, N. C. de -2000- GPS: fundamentos e aplicações. Texto de aulas. IAG/USP, São Paulo, 105 pp.

SEEBER, G. -1993- Satellite Geodesy: Foundations, methods and applications. Walter de Gruyter, N. York, 531 pp.

TORGE, W. -1980- Geodesy. Walter de Gruyter, Berlin, 254 pp.

TORGE, W. -1989- gravimetry. Walter de Gruyter, Berlin, 465 pp.

TSUBOY, C. -1983- gravity George Allen & Unwin, london, 254 pp

VANICEK, P. & KRAKIWSKY, E.-1986- Geodesy: The concepts. Elsevier, N York, 697 pp.

VANICEK, P. & CHRISTOU, N. (eds.) -1994- Geoid and its geophysical interpretations. CRC Press Inc. A. Arbor, 343 pp.