Volume do Elipsóide

1. Calcule o volume de um elipsóide cuja equação é $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Para calcular o volume, basta a resolver a equação: $\iiint_G dV$

Note que o elipsóide está centrado na origem, e como ele é simétrico a todos os eixos coordenados em questão, calcularemos o volume do primeiro octante e multiplicaremos por oito:

$$V=8\int_0^a\int_0^b\int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz\,dy\,dx$$

Para tanto, faça uma mudança de eixos coordenados, de forma que a equação da quádrica no novo sistema possa facilitar as contas. Tome:

$$\begin{aligned} x&=\chi & &\Rightarrow & dx&=d\chi \\ y&=\frac{b}{a}\gamma & &\Rightarrow & dy&=\frac{b}{a}d\gamma \\ z&=\frac{c}{a}\zeta & &\Rightarrow & dz&=\frac{c}{a}d\zeta \end{aligned}$$

Dessa forma........

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}= \quad \frac{\chi^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{b}{a}\gamma\right)^2}{b^2}+\frac{\left(\frac{c}{a}\zeta\right)^2}{c^2}= \quad \frac{\chi^2}{a^2}+\frac{b^2\gamma^2}{a^2b^2}+\frac{c^2\zeta^2}{a^2c^2}= \quad \frac{\chi^2}{a^2}+\frac{\gamma^2}{a^2}+\frac{\zeta^2}{a^2}=1$$

Assim, a equação inicial tem o formato de uma "esfera" nas novas coordenadas: $\chi^2+\gamma^2+\zeta^2=a^2$ e o cálculo necessário, então, torna-se:

$$V=8\int_0^a\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-\chi^2-\gamma^2}}\frac{bc}{a^2}\,d\zeta\,d\gamma\,d\chi= \; 8\,\frac{bc}{a^2}\int_0^a\int_0^a\sqrt{a^2-\chi^2-\gamma^2}\,d\zeta\,d\gamma\,d\chi$$

Passando para polares $\chi^2+\gamma^2=r^2$: (note que $0\le\theta\le\pi/2$ e $0\le r\le a$)

$$V=8\,\frac{bc}{a^2}\int_0^{\pi/2}\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr\,d\theta= \;\cdots\; =8\,\frac{bc}{a^2}\int_0^{\pi/2}-\frac{1}{3}\left[(a^2-r^2)^{3/2}\right]_{r=0}^{r=a}d\theta=$$

$$=8\,\frac{bc}{a^2}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{3}a^3\,d\theta=\frac{8}{3}\,\frac{a^3bc}{a^2}\int_0^{\pi/2}d\theta \;=$$

$$=\frac{8}{3}\,abc[\theta]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \;=\; \left(\frac{8}{3}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)abc$$

Portanto, o volume do elipsóide é dado por $V=\frac{4}{3}\pi\,abc$

Bruno Groner Queiroz 8/11/2007