

Publicação Especial

Nº 03/97

UM MODELO MATEMÁTICO PARA AJUSTAMENTO  
GRAVIMÉTRICO COM APRIMORAMENTO DAS FUNÇÕES  
DE CALIBRAÇÃO DOS GRAVIMETROS LACOSTE E ROMBERG

Fernando José Soares e Silva Dias

Tese de Mestrado

Rio de Janeiro, 1997

**CNPq**  
**OBSERVATÓRIO NACIONAL**  
Coordenação de Informação e Documentação  
Rua General José Cristino, 77  
São Cristóvão  
20.921-030 Rio de Janeiro-RJ  
**BRASIL**  
Tel.: (021) 585-3215 R: 285  
Fax: (021) 589-3959  
Fax: (021) 580-0332

CONSELHO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO CIENTÍFICO E TECNOLÓGICO  
OBSERVATÓRIO NACIONAL  
DEPARTAMENTO DE GEOFÍSICA

"UM MODELO MATEMÁTICO PARA AJUSTAMENTO  
GRAVIMÉTRICO COM APRIMORAMENTO DAS FUNÇÕES DE  
CALIBRAÇÃO DOS GRAVÍMETROS LACOSTE & ROMBERG"

FERNANDO JOSÉ SOARES E SILVA DIAS

Orientador: Dr. ÍRIS PEREIRA ESCOBAR

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Geofísica do Observatório Nacional como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Ciências.

Banca examinadora:

Dr. Íris Pereira Escobar  
Curso de Pós-Graduação do Observatório Nacional ( CNPq )

Dr. Camil Gerael  
Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas ( UFPri )

Dr. Valiya Mannathal Hamza  
Curso de Pós-Graduação do Observatório Nacional ( CNPq )

À Norma, Fernanda, Daniel e, em memória, aos meus pais.

Expresso a minha gratidão

- ao meu professor e orientador, Dr. Íris Escobar, pelo incentivo e dedicação,
- aos amigos Íris, Newton, Arlindo e Dantas, pela camaradagem generosa em conhecimento e experiência,
- ao Leo, Constantino, e aos Drs. Muniz, Wladimir, Carlos Henrique e Braga, pelas sugestões,
- ao Departamento de Geofísica do O.N. pelo apoio, e a todos aqueles que, direta ou indiretamente, ajudaram-me a realizar esta etapa acadêmica.

## Resumo

É proposto um modelo matemático para ajustamento de medidas gravimétricas diferenciais, adequado ao aprimoramento das funções de calibração dos gravímetros LaCoste & Romberg, modelo G. Ele é formulado em função das leituras instrumentais, dos coeficientes definidos pelo fabricante para as funções de calibração, e dos valores de gravidade nas estações.

O modelo é testado através de sua aplicação à uma linha gravimétrica de aproximadamente 1750 mGal<sup>1</sup> de abrangência, selecionada dos levantamentos da Rede Gravimétrica Fundamental Brasileira. A esta linha estão conectadas 11 estações de controle, com valores de gravidade determinados por queda livre, com  $\pm 0,010$  mGal de precisão.

O modelo mostrou-se consistente, estável e convergente.

Os resultados exemplificam a possibilidade de aprimoramento das funções de calibração dos gravímetros, bem como uma melhor estimativa dos valores de gravidade, advinda da flexibilidade admitida para os coeficientes de calibração.

---

<sup>1</sup>Este trabalho adota o mGal como unidade temporariamente aceita para aceleração da gravidade. Para conversão ao S.I. é válida a relação:  $1 \text{ mGal} = 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$ .

## Abstract

A mathematical model is proposed for the adjustment of differential gravity measurements, which involves implicitly and simultaneously, instrumental readings, coefficients of the calibration function and gravity values of selected base stations. This model is also found to be capable of improving calibration functions, and in the present work it is to data sets acquired using LaCoste & Romberg, model G gravimeters.

Tests were performed for a set of base stations lying along a gravimetric line, where gravity variations are found to have a total range of 1750 mGal. To this line were linked 11 control stations where gravity values had been measured by the free fall method, with an accuracy of  $\pm 10 \mu Gal$ .

The model presents good characteristics of stability, consistency and convergence. Results show the possibility of improving the calibration functions of gravimeters, as well as better estimation of the gravity values, which derives from flexibility admitted to the values of the calibration coefficients.

## Sumário

Resumo	I
Abstract	II
Sumário	III

### Capítulo 1 INTRODUÇÃO

1.1 Introdução.	1
-----------------	---

### Capítulo 2 CAMPO DA GRAVIDADE TERRESTRE

2.1 Gravitação.	3
2.2 Campo gravitacional.	3
2.3 Gravidade.	5
2.4 Maré luni-solar.	7
2.5 Força centrifuga.	7
2.6 Variação da gravidade com a latitude.	8
2.7 A medida da gravidade.	10
2.8 O gravímetros LaCoste & Romberg.	13

**Capítulo 3**  
**AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES**

3.1 Adequação de um modelo.	15
3.2 Solução de sistemas superabundante.	17
3.3 Aplicando o método dos mínimos quadrados ponderado.	18
3.4 Solução para um modelo linear.	23
3.5 Solução para um modelo não linear.	23
3.6 Matrizes de covariâncias dos resultados.	24
3.7 Matriz de covariâncias para os "erros de fechamento".	26
3.8 Covariâncias das incógnitas ajustadas.	27
3.9 Covariâncias das observações ajustadas.	28

**Capítulo 4**  
**TRATAMENTOS DOS DADOS**

4.1 Fonte de dados.	30
4.2 Considerações sobre os efeitos sistemáticos.	32
4.3 A leitura instrumental como parâmetro do modelo.	34
4.4 Efeitos não sistemáticos.	36
4.5 O valor da leitura para cada estação.	36
4.6 Critérios para rejeição de leituras.	38
4.7 Ponderação das observações.	38

**Capítulo 5**  
**MODELO MATEMÁTICO PROPOSTO**

5.1 Formulação do modelo.	40
5.2 Solução para o modelo proposto.	43
5.3 Vetor “erro de fechamento”.	43
5.4 Matriz dos coeficientes das incógnitas.	43
5.5 Matriz dos coeficientes das observações.	45
5.6 Matriz de pesos das observações.	47
5.7 A estimativa das variâncias para os coeficientes de calibração.	49
5.8 Correção da maré luni-solar às leituras.	49
5.9 Controle sobre a qualidade do ajustamento.	50

**Capítulo 6**  
**RESULTADOS E CONCLUSÕES**

6.1 Resultados	52
6.2 Conclusões	60

**Apêndices**

I Tabela do fabricante com a calibração do gravímetro nº 257.	63
II Relatório completo com resultados de ajustamento.	67
III Valores de gravidade da RGFB para as estações comuns.	77

Bibliografia	84
--------------	----

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

Tradicionalmente, o ajustamento de medidas gravimétricas seguem a sugestão de Urho Uotila [MORELLI et al., 1971], para a modelagem com os parâmetros estimados da diferença de gravidade entre dois pontos:

$$g_i^a - g_j^a - (d_i^a - d_j^a) - \delta^a(t_i - t_j) - k^a(d_i^a - d_j^a) - \ell^a(d_i^{a2} - d_j^{a2}) - m^a(d_i^{a3} - d_j^{a3}) = 0$$

onde:

- $g_i^a$ ,  $g_j^a$  = valores de gravidade nas estações i e j,
- $d_i^a$ ,  $d_j^a$  = leituras instrumentais corrigidas dos efeitos sistemáticos, em mGal,
- $\delta^a$  = coeficiente de deriva instrumental,
- $t_i$ ,  $t_j$  = tempo das leituras nas estações i e j,
- $k^a$  = coeficiente linear residual de escala,
- $\ell^a$  = coeficiente residual de escala de segunda ordem,
- $m^a$  = coeficiente residual de escala de terceira ordem,
- $a$  = índice superior indicando valor ajustado.

Uma família de modelos pode derivar deste pela omissão de um ou mais coeficientes, sendo comum ocorrer a falta de significância estatística para os coeficientes  $\ell$  e  $m$ , dos dois últimos termos do modelo.

Quando a amplitude do conjunto de medidas gravimétricas é da ordem de 2000 mGal, ou maior, torna-se necessário levar em consideração os termos não lineares deste modelo. Esta conclusão considera o estágio de desenvolvimento do padrão primário de gravidade à época da IGSN-71, cuja precisão era da ordem de 0,1 mGal.

- A evolução instrumental atual indica a necessidade de aprimoramento daquele modelo. Esta necessidade já era sentida em levantamentos de 1<sup>a</sup> ordem, inferência e calibração com gravímetros La Coste & Romberg.

O presente trabalho propõe um modelo linear para intervalo de gravidade, ainda não utilizado, que envolve também as funções de calibração dos gravímetros, de modo a permitir o seu aprimoramento em qualquer amplitude de escala abrangida, com reflexos positivos na qualidade do ajustamento.

## CAPÍTULO 2

### CAMPO DA GRAVIDADE TERRESTRE

Neste capítulo será estabelecido o conceito de gravidade e o escopo das correções feitas aos valores aparentes da gravidade medida.

#### 2.1 Gravitação.

O Sol contém muito mais matéria do que os planetas que em torno dele orbitam. Movimenta-se, também, mais lentamente, o que o torna um adequado referencial para o sistema solar. Esta hipótese de Nicolau Copérnico (1473-1543), bem como a análise cuidadosa de um conjunto de medidas astronômicas realizadas por Tycho Brahe (1546-1601), permitiram a Johannes Kepler (1571-1630) formular as leis para o movimento planetário.

Conhecidas como leis de Kepler, são uma descrição cinemática do movimento planetário. Restava, então, fundamentar a interação responsável pela dinâmica do sistema planetário. Foi Sir Isaac Newton (1642-1727) quem deu esta notável contribuição, formulando a lei da gravitação universal. Esta lei, estabelecida para partículas, simplificadamente enuncia que a força associada à interação gravitacional age ao longo da linha que une as partículas, é atrativa e proporcional às massas dos corpos, e varia inversamente com o quadrado da distância entre elas.

É fato bem comprovado experimentalmente que, próximo à Terra, todos os corpos caem com a mesma aceleração, e ao longo deste trabalho serão indistinguíveis os conceitos de massa gravitacional e massa inercial.

#### 2.2 Campo Gravitacional.

Todo corpo material produz no espaço circundante uma perturbação que chamare-

mos de campo gravitacional.

Este campo pode ser sentido pela força atrativa que surge em qualquer outro corpo material. Esta força gravitacional, sempre atrativa, não pode ser desviada por si e nada pode evitar a sua ação, pois não foi detectada ainda matéria com propriedades anti-gravitacionais.

O campo gravitacional gerado pela matéria atua sobre a própria matéria, bem como sobre a luz e a radiação. Permeando todo o universo, as interações gravitacionais produzidas participam de sua organização, desde os átomos de hidrogênio aos aglomerados de galáxias.

Simplificadamente, seja um corpo pontual de massa  $m$ , e uma segunda massa pontual  $m'$  colocada em um ponto qualquer em torno de  $m$ , conforme a figura 2.2.1.

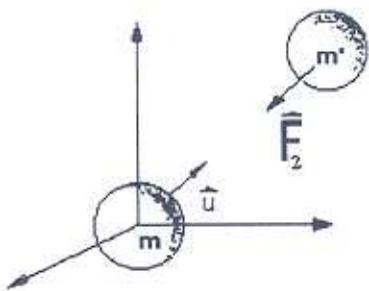


Fig. 2.2.1 - Atração gravitacional entre duas partículas.

Examinando somente  $m'$ , em qualquer posição que ocupe, sobre ela atua uma força gravitacional descrita por:  $\vec{F} = -G \frac{mm'}{r^2} \vec{u}_r$ , onde  $r$  é a distância que as separam,  $G$  é uma constante de proporcionalidade determinada experimentalmente e que depende das unidades usadas, e  $\vec{u}_r$  é o vetor unitário na direção radial.

O valor adotado para  $G$ , conhecida como constante gravitacional, pela União Astronômica Internacional [Vanicek & Krakiwsky, 1982] é:

$$G = 6,672 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} \text{ ou } \text{m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}.$$

Para o sistema CGS,  $G = 6,672 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$ , com precisão estimada de  $0,001 \times 10^{-8} \text{ cm}^{-3} \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$ .

A intensidade do campo gravitacional,  $|\vec{e}|$ , produzido pela massa pontual  $m$  em um ponto distante  $|\vec{r}|$ , é definida por:

$$|\vec{\epsilon}| = \left| \frac{\vec{F}}{m'} \right| = \left| -\frac{Gm}{r^2} \vec{u}_r \right|$$

Por esta definição resulta que o campo gravitacional tem unidade de aceleração. Em homenagem à Galileu Galilei esta unidade recebeu o nome de *gal*, cuja abreviatura é *Gal*, com as seguintes correspondências:

$$1 \text{ Gal} = 1 \text{ cm.s}^{-2} = 10^{-2} \text{ m.s}^{-2}.$$

Seus múltiplos mais usados são o mGal ( 1 miligal =  $10^{-3}$  Gal ) e o  $\mu\text{Gal}$  ( 1 microgal =  $10^{-6}$  Gal =  $10^{-8}$  m.s $^{-2}$  ).

O campo gravitacional  $\vec{\epsilon}$ , uma grandeza vetorial, está associado a uma grandeza escalar  $V$  de grande poder de concisão, chamada de potencial gravitacional, através da relação:

$$\vec{\epsilon} = \text{grad } V \quad (2.2.1)$$

com  $\text{grad} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z$  e  $\vec{u}$  designando vetores unitários.

Considerando um corpo de dimensões finitas, com volume  $\vartheta$  e distribuição de densidade  $\rho(x, y, z)$ , o potencial gravitacional fora do volume que contém a massa é dado pela equação:

$$V = G \int_{\vartheta} \frac{\rho(x, y, z)}{r(x, y, z)} d\vartheta \quad (2.2.2)$$

### 2.3 Gravidade.

Ao longo deste trabalho, a grandeza física denominada gravidade, é a componente de maior intensidade do campo da gravidade terrestre, medida em um ponto fixo em relação à superfície física da Terra.

Contudo, o observador também estará sujeito ao movimento de rotação da Terra em torno do seu eixo. Assim, em relação ao referencial geocêntrico, o que é medido é a

resultante de dois campos predominantes: o gravitacional terrestre  $\vec{F}_g$  e o centrífugo,  $\vec{F}_c$ .

A figura 2.3.1 representa estes campos, bem como todos os parâmetros usados na formulação que se segue.

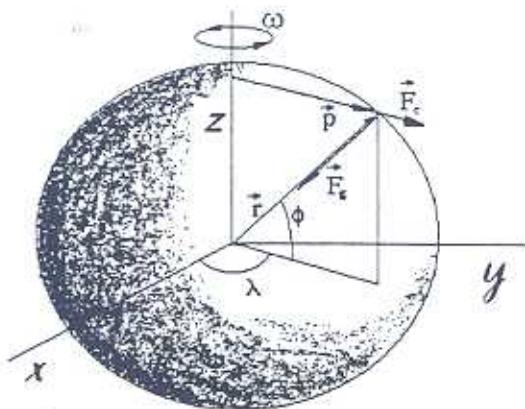


Fig. 2.3.1 - Representação das forças gravitacional e centrífuga.

O campo resultante medido pelo observador fixo em relação a superfície física terrestre será chamada de *campo da gravidade terrestre*. Este campo também relaciona-se a um potencial  $W$ , designado por *potencial da gravidade terrestre* descrito por:

$$W = G \int_{\vartheta} \frac{\rho(x, y, z)}{r(x, y, z)} d\vartheta + \frac{1}{2}(r \cos(\phi))^2 w^2 \quad (2.3.3)$$

com a distribuição interna de massa descrita por  $\rho(x, y, z)$ .

A partir da função do potencial da gravidade terrestre (ou Geopotencial), obtém-se o campo da gravidade terrestre. Neste sentido, analogamente ao que já foi dito:

$$\vec{g} = \text{grad } W \quad (2.3.4)$$

Para um ponto qualquer na superfície da Terra, ou acima desde que fixo em relação a esta, distante  $r$  da origem geocêntrica e com latitude  $\phi$ , o campo da gravidade resulta em:

$$\vec{g} = G \text{ grad} \int_{\vartheta} \frac{\rho(x, y, z)}{r(x, y, z)} d\vartheta + \frac{w^2}{2} \text{ grad}(r^2 \cos^2 \phi) \quad (2.3.5)$$

Considerando como simplificação a Terra com simetria esférica e com densidade  $\rho$  constante, a sua massa resulta em  $M = \rho \int_{\vartheta} d\vartheta$ . Assim, verifica-se que o campo da

gravidade terrestre é determinado por:

$$\begin{aligned}\vec{g} = & \left(-\frac{GM}{r^2} + rw^2\right) \cos \phi \cos \lambda \vec{u}_x + \\ & + \left(-\frac{GM}{r^2} + rw^2\right) \cos \phi \sin \lambda \vec{u}_y - \frac{GM}{r^2} \sin \phi \vec{u}_z\end{aligned}\quad (2.3.6)$$

O termo Gravimetria será usado para designar o conjunto de técnicas e procedimentos que têm, por finalidade, medir a intensidade do campo da gravidade terrestre.

#### 2.4 Maré Luni-Solar.

Na determinação da gravidade terrestre, a correção ao efeito devido ao campo da maré luni-solar, gerado pela interação gravitacional do Sol e da Lua com a Terra, não pode ser desprezada devido à sua magnitude. O valor desta correção é função da posição do observador na Terra, e das posições relativas a este, do Sol e da Lua, no instante da observação. Esta influência periódica na medida da gravidade é chamada de maré luni-solar, e a sua componente vertical, ou seja, na direção do campo da gravidade no ponto de medida, tem uma amplitude de variação [Tsuboi, 1983] de aproximadamente  $\pm 0,23 \text{ mGal}$ .

#### 2.4 Força Centrífuga.

A gravidade varia na superfície da Terra, entre, aproximadamente, 978 Gal no equador e 983 Gal nos pólos, ou seja, dentro de 5 Gal. Isto se deve à forma aproximadamente elipsoidal da Terra, com achatamento nos pólos, somado ao efeito provocado pela variação da força centrífuga.

A força centrífuga varia de zero, no polo, a 3,4 Gal no equador, o que a torna a maior causa da variação da gravidade na Terra.

Quando as medições da gravidade são realizadas a bordo de navios e aeronaves, o observador está em movimento em relação à superfície. A componente leste-oeste

- do seu movimento, modifica a sua velocidade angular em relação ao eixo da Terra, alterando portanto, a atuação da força centrífuga no ponto de observação. Esta variação é conhecida como efeito de Eötvös, e pode alcançar valores expressivos. Isto pode ser visto no seguinte exemplo [Tsuboi, 1983]: um observador deslocando-se à velocidade de  $1 \frac{m}{s}$ , sobre o equador, no sentido oeste-leste, medirá um valor aparente de gravidade, menor cerca de  $15 \text{ mGal}$ . De outra maneira, caso aquele observador móvel tenha 60 kilogramas de massa, o seu peso aparente será equivalente ao de uma massa, aproximadamente menor em  $0,9 \text{ gramas}$ .

## 2.6 Variação da gravidade com a latitude.

O potencial da Terra real é denominado Geopotencial. Quando a Terra é representada por uma figura geométrica ideal, com mesma massa e rotação, o potencial recebe a designação de Esferopotencial.

A superfície equipotencial elipsoidal, uma figura matemática visando a melhor aproximação à superfície física da Terra, gerada por um elipsóide de revolução com semi-eixos  $a$  e  $b$ , contendo a massa  $M$  e a velocidade angular  $w$ , resultará, pelo teorema de Stokes-Poincaré, independente da distribuição interna de densidades. Tal superfície tem como principal vantagem ser função das constantes  $a$ ,  $b$ ,  $M$  e  $w$ , e é uma referência importante em geodésia, geofísica, astronomia e hidrografia. A teoria do elipsóide equipotencial foi elaborada por Pizzetti em 1894, e recebeu posteriormente contribuições de Somigliana em 1929. Esta teoria serviu de base para a padronização da Fórmula Internacional da Gravidade Normal (componente normal à superfície do elipsóide de referência).

A gravidade normal, na superfície do elipsóide de referência,  $\gamma = |\text{grad } U|$ , é dada pela fórmula de Somigliana,

$$\gamma = \frac{a\gamma_e \cos^2 \phi + b\gamma_p \sin^2 \phi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi}} \quad (2.6.7)$$

onde as constantes  $\gamma_e$  e  $\gamma_p$  representam os valores da gravidade normal no equador e nos pólos, e  $\phi$  é a latitude geográfica.

Este valor teórico resulta do desenvolvimento do potencial da *gravidade normal* em série de funções harmônicas, e vale na superfície elipsoidal não considerando a atmosfera. A inclusão do efeito atmosférico à equação padrão da gravidade normal implicaria em perda de clareza e simplicidade. Por esta razão, optou-se pela formulação onde o efeito atmosférico não seria incluído. Não obstante, o elipsóide de referência foi definido contendo a massa da Terra mais a massa de sua atmosfera, idealizando toda a massa atmosférica concentrada em sua superfície. Assim, o campo da gravidade normal pode ser determinado sem qualquer consideração às variações da densidade atmosférica. Os valores para as correções do efeito atmosférico  $\delta g$  com a altitude [Moritz, 1984] podem ser vistos na figura 2.6.1.

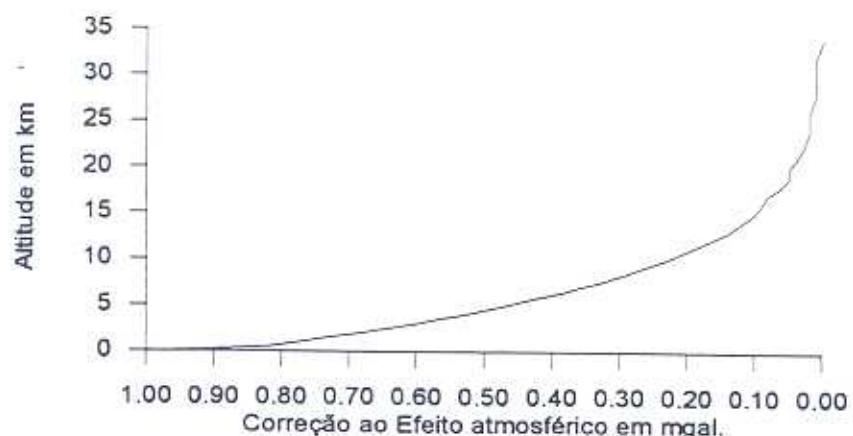


Fig. 2.6.1 - Correção ao efeito atmosférico em relação a altitude.

O Sistema Geodésico de Referência 1980 ( GRS80 ), propõe para a gravidade normal em função da latitude, a fórmula:

$$\begin{aligned} \gamma = 978\,032,\,677\,15 & ( 1 + 0,005\,279\,0414 \sin^2 \phi \\ & + 0,000\,023\,2718 \sin^4 \phi \\ & + 0,000\,000\,1262 \sin^6 \phi \\ & + 0,000\,000\,0007 \sin^8 \phi ) \end{aligned} \quad (2.6.8)$$

com a acurácia de 0,0001 *mGal* [Moritz, 1984].

Uma estimativa teórica da variação da gravidade com a latitude, conseguida com a equação 1.6.8, é visualizada na figura 2.6.2.

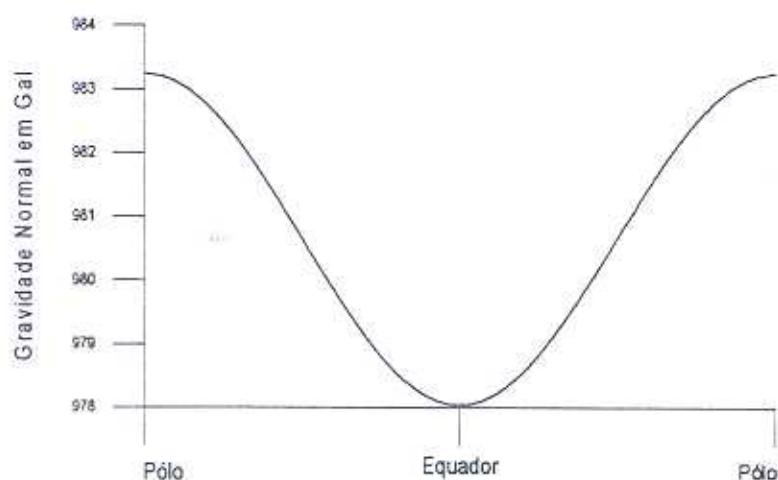


Fig. 2.6.2 - Variação da gravidade com a latitude.

## 2.7 A medida da gravidade.

A medida gravimétrica baseia-se na observação dos efeitos físicos que o campo da gravidade produz, e tem nos gravímetros mecânicos diferenciais o seu principal instrumento de execução.

A medida da gravidade é dita diferencial, quando medida a diferença de gravidade entre dois pontos.

Ao longo deste trabalho é considerada somente a componente normal à superfície equipotencial da gravidade terrestre, contendo o ponto no qual é referenciada a medida. Em relação a esta superfície, é usado o termo **vertical do lugar** como sinônimo de normal. Fica reservado somente em relação a superfície do elipsóide de referência, o uso do termo **normal**.

É usual denominar de medida *absoluta* do valor da gravidade, à determinação pontual e independente de qualquer datum gravimétrico. Nestes casos, são medidos comprimento e tempo, através de um experimento *dinâmico*, com os restantes parâmetros controlados. Exemplo disto são as medidas de tempo e distância entre níveis de passagem, para um objeto em queda livre.

Alternativamente, também é possível precisão melhor do que  $1\mu gal$  na determinação absoluta da gravidade, através da medida de frequência e intensidade de corrente elétrica, em instrumentos nos quais campos eletromagnéticos substituem o uso clássico da elasticidade mecânica.

A medida diferencial tem importância instrumental por ser executada com a observação direta de apenas um parâmetro. Quando o intervalo de tempo não é a grandeza observada, o método é dito *estático*.

Medidas diferenciais de gravidade podem ser obtidas indiretamente do alongamento de molas, ou pelo deslocamento angular de um pêndulo de torsão, ou ainda, pelo período de uma lâmina ou corda vibrante.

Os gravímetros *dinâmicos* baseiam-se na relação existente entre o período de oscilação e o valor da gravidade, sejam de lâmina (Holweck-Lejay) ou de corda vibrante (Shell).

Muito difundidos, os gravímetros mecânicos têm como princípio de funcionamento, o equilíbrio de repouso de um corpo sob a ação do campo da gravidade. O equilíbrio é conseguido contrapondo-se uma outra força com intensidade controlada. Nos gravímetros mecânicos mais comuns esta força é de origem elástica, com molas (LaCoste & Romberg, Askania, Thyssen, North American), lâminas circulares ou anelares (Molodenski, Gulf), fios de torção (Nørgaard), e mola combinada com fio de torção (Worden, GAK-3M) [Shokin, 1963][Escobar, 1985][Sazhina, 1971].

Os gravímetros mecânicos em que são lidas diretamente as pequenas variações de comprimento dos componentes elásticos, da ordem de  $10^{-10}$  metros, são classificados como *estáveis* [Escobar, 1985].

Uma acentuada melhora da sensibilidade é obtida com a concepção de mecanismos geradores de equilíbrio instável. Nestes, quando não estão em equilíbrio de repouso, forças suplementares agem ampliando o deslocamento do sistema elástico e, consequentemente, a resolução da medida [Escobar, 1985]. Estes gravímetros são classificados como *astáticos* e são os mais difundidos.

Apesar de qualidades notáveis como sensibilidade, precisão, portabilidade e rapidez de manejo, os gravímetros mecânicos apresentam também características próprias que impõem cuidados no seu uso e transporte, bem como limitações ao seu campo de

aplicação. As mais importantes são: deriva instrumental, calibração e amplitude de medida.

Os sistemas elásticos apresentam lenta e irreversível deformação que resulta em variação na leitura, a qual é conhecida como deriva instrumental. A deriva instrumental estática ocorre quando o gravímetro está em repouso. O transporte sujeita o gravímetro a vibrações e acelerações que mudam a sua taxa de deriva no tempo. Sempre que possível, as medidas diferenciais são realizadas em intervalos de tempo curtos, o suficiente para os quais a deriva do equipamento possa ser considerada linear no tempo, e possibilitar uma correção simples aos seus efeitos.

A medida é obtida com a leitura da escala e dial do gravímetro. Estas escalas e diferenças mínimas nas características de componentes, individualizam a resposta de cada equipamento. Assim, cada gravímetro tem a sua própria função de calibração, que converte a leitura em escala, para a unidade *miligal*. A determinação da curva de calibração de um gravímetro por alterações diretas em seu mecanismo, exige conhecimento da gravidade e campo magnético local, bem como condições controladas de temperatura e pressão, pois estas afetam elástica e geometricamente partes do mecanismo do gravímetro.

Os gravímetros diferenciais tratados aqui medem *diferenças* de gravidade, como por exemplo, uma régua mede distâncias relativas. A exemplo desta, onde um conjunto de réguas fabricadas sob um mesmo padrão de comprimento apresentam diferenças, os gravímetros apresentam também diferença de escala em relação a um datum ( padrão de valor ) gravimétrico qualquer. A adequação ao datum gravimétrico, possível se este possuir, no mínimo, dois valores de gravidade conhecidos em pontos distintos, resulta na determinação do *fator residual de escala* do gravímetro. O fator residual de escala é um fator de correção às medidas de um gravímetro, e complementa a sua função de calibração.

Para os gravímetros com amplitude de escala de 100 a 200 *mGal*, usados em trabalhos de projeção, a função de calibração é linear e pode ser determinada a partir de medições sobre pontos com valor de gravidade já conhecidos. Porém, os gravímetros chamados geodésicos têm amplitude de escala que varia entre 3000 e 7000 *mGal*, e para uma cobertura completa da sua curva de calibração, necessitam

de ser utilizados em um conjunto de pontos conhecidos com grande abrangência de gravidade. Com esta finalidade, um trajeto (*linha de calibração*) com pontos de gravidade conhecidos e amplitude gravimétrica compatível com a faixa de utilização, deve ser periodicamente ocupado.

Tendo em vista que a gravidade varia muito mais rapidamente com a altitude do que com a latitude, uma linha de calibração vertical permite grande economia de tempo e recursos [Escobar et al, 1996].

## 2.8 O gravímetro LaCoste & Romberg modelo G.

O seu funcionamento baseia-se no princípio do sismógrafo vertical de largo período, idealizado por La Coste em 1934.

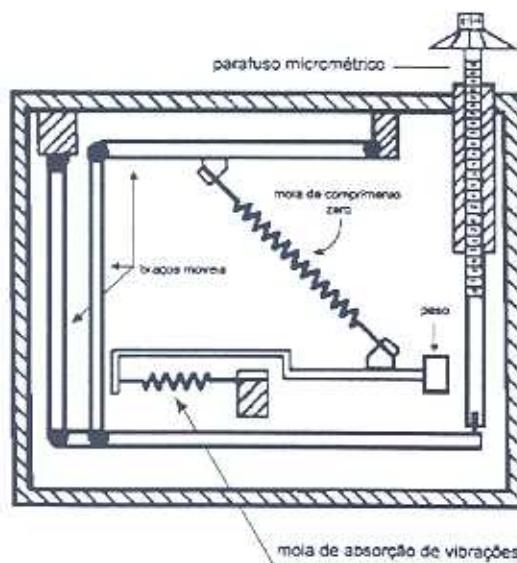


Fig. 2.8.1 - Desenho esquemático do gravímetro LaCoste & Romberg.

A leitura consiste na observação do estado de equilíbrio de um pêndulo horizontal, movimentando-se em um plano vertical, e com uma massa fixa em sua extremidade. A posição do pêndulo é quase horizontal, e a força de compensação é gerada por uma mola, cujo comprimento é zero [Shokin, 1963], quando livre de carga. O comprimento zero da mola é conseguido pelo condicionamento das espiras a uma tensão prévia,

quando construída.

Para eliminar os efeitos devidos à variação da temperatura e pressão, e do campo magnético terrestre, o instrumento é termoestável, vedado, com dispositivo interno de compensação de pressão, e o sensor desmagnetizado é acondicionado no interior de uma blindagem magnética [LaCoste & Romberg, 1990]. O nivelamento do gravímetro é obtido com dois níveis de bolha fixos ao corpo do aparelho, um nível longitudinal e outro transversal ao plano de movimento do pêndulo interno, e dois parafusos calantes.

O erro nas leituras, devido ao nivelamento, será inferior a 0.01  $mGal$  se assegurada acurácia melhor do que  $0.5'$  [Escobar, 1985].

O gravímetro La Coste & Romberg geodésico tem amplitude de medida de 7000 miligals sem que haja necessidade de qualquer reposicionamento no sistema de medida. A precisão nominal é de 0.01  $mGal$ .

As medidas gravimétricas diferenciais resultam das leituras do contador e dial, expressando o avanço de um parafuso micrométrico que mede a variação do comprimento da mola. A função *calibração* é a relação entre este avanço e os valores da gravidade em *miligal*. No caso do gravímetro La Coste & Romberg, a função calibração não é linear, sendo apresentada pelo fabricante na forma tabular (Apêndice I), para intervalos iguais de 100 unidades de leitura.

## CAPÍTULO 3

### AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES

#### 3.1 Adequação do modelo.

Geralmente, as grandezas físicas ou geométricas que se pretende determinar, não são diretamente observáveis. Será designado por modelo matemático, as relações funcionais entre grandezas observáveis e incógnitas a serem determinadas.

Assim, o evento em estudo, pode ser descrito através de combinações de parâmetros incógnitos, funcionalmente ligados às observações. Alternativamente, podem ocorrer situações mais adequadamente descritas por combinações de observações, funcionalmente ligadas às incógnitas.

No entanto, existem situações que podem ser descritas somente através de relações entre observações. A solução, neste caso, resulta diretamente de um sistema de combinações de observações e constantes.

Porém, quando condições são impostas às observações e às incógnitas, o modelo adequado é generalizado pela forma:

$$F(X, L) = 0 \tag{3.1.1}$$

onde  $F$  denota o vetor das funções que relacionam os valores ajustados das incógnitas  $X$ , e das observações  $L$ .

Caso  $F$  não seja linear, pode ser linearizada pela expansão em série de Taylor multidimensional, daí resultando um sistema de equações lineares em  $X$  e  $L$ .

É conhecido como modelo implícito ou combinado, na forma da equação 3.1.1, pois envolve simultaneamente grandezas observáveis e incógnitas [Gerael, 1994].

O modelo combinado, na forma linear, é descrito por [Gemael, 1994]:

$$\mathbf{AX} + \mathbf{BL} + \mathbf{W} = \mathbf{0} \quad (3.1.2)$$

onde:  $\mathbf{A}$  é a matriz dos coeficientes de  $\mathbf{X}$ , com dimensão  $(m, u)$ ;  $\mathbf{B}$  é a matriz dos coeficientes de  $\mathbf{L}$ , com dimensão  $(m, n)$ ; e  $\mathbf{W}$  é um vetor de valores conhecidos com dimensão  $(m, 1)$ , e recebe a designação de vetor de fechamento, ou, vetor do erro de fechamento.

Mais adiante será visto como são definidas estas matrizes.

A relação inicial, 3.1.1, sugere um sistema de equações homogêneo. Se as observações, ou medidas, pudessem ser feitas sem erros, para um conjunto de  $n$  incógnitas independentes, bastariam  $n$  equações para que o sistema tivesse solução única. Porém, os erros inerentes às observações, expressos na matriz  $\mathbf{W}$ , tornam o sistema de equações não homogêneo, e com a seguinte forma:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{L}) = \mathbf{W} \quad (3.1.3)$$

O modelo combinado é o de maior generalidade. Não obstante, algumas vezes é aplicado com simplificações. Estas simplificações são citadas, abaixo, pelas designações [Gemael, 1994]:

a) Modelo das equações de condição ou dos correlatos.

Ocorre quando a sua formulação é possível sem incógnitas. Neste caso,  $\mathbf{F}(\mathbf{L}) = \mathbf{0}$ . Como não existem incógnitas,  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ , resultando de 3.1.2 a forma linear:

$$_m \mathbf{B}_{n n} \mathbf{L}_1 + _m \mathbf{W}_1 = \mathbf{0} \quad (3.1.4)$$

b) Modelo dos parâmetros ou das equações de observação.

Expressa as observações como função das incógnitas,  $\mathbf{L} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$ . Na forma linear, este modelo resulta de 3.1.2, com  $\mathbf{B} = -\mathbf{I}$  (*matriz identidade*),

$$_n \mathbf{L}_1 = _n \mathbf{A}_{u u} \mathbf{X}_1 + _n \mathbf{W}_1 \quad (3.1.5)$$

c) E, finalmente, o caso em que os parâmetros são expressos como função das grandezas observáveis,  $\mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{L})$ , resultando de 3.1.2 com  $\mathbf{A} = -\mathbf{I}$ ,

$$_u \mathbf{X}_1 = _u \mathbf{B}_{n n} \mathbf{L}_1 + _u \mathbf{W}_1 \quad (3.1.6)$$

O caso mais simples ocorre quando é possível medir diretamente as incógnitas:

$$_n X_1 =_n L_1 \quad (3.1.7)$$

com:  $A = -B = I$  e  $W = 0$ .

Aqui são tratados somente os modelos lineares, pois os não lineares, fogem ao escopo do presente trabalho.

### 3.2 Solução de Sistemas Superabundantes.

Um maior número de equações do que incógnitas indica, que foram feitas mais observações do que o necessário para a determinação das incógnitas. Isto é uma prática comum, e visa a redução do efeito provocado pelos erros acidentais inerentes às observações.

A inconsistência do sistema, com soluções diferentes para cada conjunto de  $n$  equações, conduz a uma solução obtida por injunções (condições de contorno, vínculos) impostas ao sistema. A relação funcional entre observações e incógnitas, colocada pelo modelo, é a primeira injunção estabelecida.

Em um conjunto de medidas com distribuição normal, corrigidas de qualquer tendência e erros grosseiros, é natural imaginar que aquelas de menor variância deverão influenciar mais fortemente a solução pretendida para o sistema. Portanto, o método utilizado para o ajustamento deve permitir a ponderação das grandezas observáveis. Um método que atende a este propósito é o que resulta da aplicação do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ), que torna mínima a função definida por  $\varphi = V^T P V$ , onde  $V$  é o vetor dos resíduos das observações, e  $P$  a matriz de pesos. A análise posterior dos resíduos e das matrizes de variância-covariância permite avaliar a qualidade do ajustamento obtido.

A introdução de vínculos adicionais pode ser conseguida pela inclusão, no sistema, de novas equações através de um segundo modelo. Aqui, a condição que, necessariamente, tem de ser satisfeita, é que o domínio das incógnitas, seja um subconjunto dos mesmos parâmetros incógnitos já estabelecidos no modelo principal.

- Estas injunções, ou vínculos adicionais, são caracterizadas como [Gemael, 1994]:
  - a) injunção funcional: quando o modelo correlaciona apenas incógnitas entre si;
  - b) injunção absoluta quando o modelo expressa uma condição física ou geométrica em que incógnitas são correlacionadas com constantes, ou seja, são consideradas fixas;
  - c) injunção relativa: quando o modelo correlaciona incógnitas e observações. Neste caso, as observações devem estar associadas aos pesos (que são inversamente proporcionais às variâncias).

### 3.3 Aplicando o método dos mínimos quadrados (MMQ).

O desenvolvimento algébrico será realizado para o modelo combinado, no qual a solução representará uma transformação estatística, definida por:

$$(L_o, C_{L_o}, X_o) \longrightarrow (L, C_L, X, C_X) \quad (3.3.1)$$

onde:

$L_o$  - é o vetor das observações,  
 $C_{L_o}$  - é a matriz variância-covariância das observações,  
 $X_o$  - é o vetor das estimativas para as incógnitas, funcionalmente ligado ao vetor  $L_o$ ,

$L$  - é o vetor das observações ajustadas,  
 $C_L$  - é a matriz variância-covariância das observações ajustadas,  
 $X$  - é o vetor das incógnitas ajustadas,  
 $C_X$  - é a matriz variância-covariância das incógnitas ajustadas.

Definido o modelo, é preciso reformulá-lo para a aplicação do MMQ. Assim,  $L$  será substituído por seu estimador:

$$L = L_o + V \quad (3.3.2)$$

onde  $L_o$  é o vetor das observações, e  $V$ , o vetor dos resíduos para as observações.

Daí, resulta sob nova forma, que:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{L}) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{L}_o + \mathbf{V}) = 0 \quad (3.3.3)$$

Como já foi visto, as observações com os seus erros inerentes, tornam o sistema inconsistente. Com a nova formulação fica claro que, a melhor estimativa para  $\mathbf{L}$  depende do critério empregado na estimativa de  $\mathbf{V}$ .

A injunção dos mínimos quadrados é, então, aplicada aos resíduos das grandezas observáveis, e consiste [Gemael, 1994][Vanicek & Krakiwsky, 1982] na minimização da função  $\varphi$ , definida por:

$$\varphi = \mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} \quad (3.3.4)$$

com a matriz de pesos  $\mathbf{P}$  definida como:

$$\mathbf{P} = \sigma_o^2 \mathbf{C}_{\mathbf{L}_o}^{-1} \quad (3.3.5)$$

onde:  $\sigma_o^2$  é a variância da unidade de peso, ou seja, a variância de uma observação cujo peso é igual a 1, e  $\mathbf{C}_{\mathbf{L}_o}$ , a matriz variância-covariância das observações.

As observações, ou mesmo, uma estimativa qualquer para  $\mathbf{L}_o$ , conduzem, através do modelo principal, a uma estimativa para as incógnitas  $\mathbf{X}_o$ . Disto resulta:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{L}) = \mathbf{F}(\mathbf{X}_o + \mathbf{H}, \mathbf{L}_o + \mathbf{V}) \quad (3.3.6)$$

com a introdução do vetor das correções às incógnitas estimadas,  $\mathbf{H}$ .

Supondo que  $\mathbf{L}_o$  e  $\mathbf{X}_o$  estejam suficientemente próximos de  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{X}$ , pode-se expandir o modelo principal em torno do ponto  $(\mathbf{X}_o, \mathbf{L}_o)$ , em uma série de Taylor multidimensional:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{L}) = \mathbf{F}(\mathbf{X}_o, \mathbf{L}_o) + \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\substack{\mathbf{X}=\mathbf{X}_o \\ \mathbf{L}=\mathbf{L}_o}} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_o) + \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{L}} \right|_{\substack{\mathbf{X}=\mathbf{X}_o \\ \mathbf{L}=\mathbf{L}_o}} (\mathbf{L} - \mathbf{L}_o) + \dots = 0 \quad (3.3.7)$$

Caso o modelo seja linear, como no presente trabalho, equivale aos termos lineares da série. Assim, com:

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\substack{\mathbf{X}=\mathbf{X}_o \\ \mathbf{L}=\mathbf{L}_o}}$$

$$\mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{L}} \right|_{\begin{subarray}{l} \mathbf{X} = \mathbf{X}_o \\ \mathbf{L} = \mathbf{L}_o \end{subarray}}$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{F}(\mathbf{X}_o, \mathbf{L}_o)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_o$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{L} - \mathbf{L}_o$$

obtem-se uma equação análoga à 3.1.2, em função de  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{V}$ :

$$\mathbf{A}\mathbf{H} + \mathbf{B}\mathbf{V} + \mathbf{W} = 0 \quad (3.3.8)$$

As condições de contorno são estabelecidas através de um ou mais modelos injuntivos. Para um modelo injuntivo combinado qualquer, analogamente, próximo ao ponto  $(\mathbf{X}'_o, \mathbf{L}'_o)$ , tem-se:

$$\mathbf{A}'\mathbf{H} + \mathbf{B}'\mathbf{V}' + \mathbf{W}' = 0 \quad (3.3.9)$$

As equações 3.3.8 e 3.3.9 são, respectivamente, as formas diferenciais dos modelos principal e injuntivo.

Com a introdução do modelo injuntivo, as incógnitas passam a ser  $\mathbf{L}, \mathbf{V}$  e  $\mathbf{V}'$ , e a função de variação tem a forma [Gemael, 1994]:

$$\varphi = \mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} + \mathbf{V}'^T \mathbf{P}' \mathbf{V}' \quad (3.3.10)$$

onde  $\mathbf{P}'$  é a matriz de pesos associada às observações injuntivas, e  $\mathbf{V}'$ , os resíduos das observações do modelo injuntivo.

Geralmente não é possível explicitar  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{V}'$  das equações 3.3.8 e 3.3.9, uma vez que  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{B}'$  não são matrizes regulares. O problema é contornado com o uso da função de variação  $\varphi$  modificada, proposta por Lagrange:

$$\varphi = \mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V} + \mathbf{V}'^T \mathbf{P}' \mathbf{V}' - 2 \mathbf{K}^T (\mathbf{AH} + \mathbf{BV} + \mathbf{W}) - 2 \mathbf{K}'^T (\mathbf{A}'\mathbf{H} + \mathbf{B}'\mathbf{V}' + \mathbf{W}') \quad (3.3.11)$$

Os vetores arbitrários  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{K}'$  são conhecidos como multiplicadores de Lagrange, e são também incógnitos como  $\mathbf{H}, \mathbf{V}$  e  $\mathbf{V}'$ .

Pode ser visto que, se  $\mathbf{H}, \mathbf{V}$  e  $\mathbf{V}'$  satisfazem à 3.3.8 e 3.3.9, a equação 3.3.11 reduz-se à equação 3.3.10.

O extremo da função de variação, 3.3.11 , pode ser obtido com as derivadas em relação a  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{V}'$ ,  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{K}'$ , igualadas a vetores nulos:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{V}} = 2\mathbf{PV} - 2\mathbf{K}^T \mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{PV} - \mathbf{B}^T \mathbf{K} = 0 \quad (3.3.12)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{V}'} = 2\mathbf{P}'\mathbf{V}' - 2\mathbf{K}'^T \mathbf{B}' = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}'\mathbf{V}' - \mathbf{B}'^T \mathbf{K}' = 0 \quad (3.3.13)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{H}} = -2\mathbf{K}^T \mathbf{A} - 2\mathbf{K}'^T \mathbf{A}' = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^T \mathbf{K} + \mathbf{A}'^T \mathbf{K}' = 0 \quad (3.3.14)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{K}} = -2(\mathbf{AH} + \mathbf{BV} + \mathbf{W}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{AH} + \mathbf{BV} + \mathbf{W} = 0 \quad (3.3.15)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{K}'} = -2(\mathbf{A}'\mathbf{H} + \mathbf{B}'\mathbf{V}' + \mathbf{W}') = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}'\mathbf{H} + \mathbf{B}'\mathbf{V}' + \mathbf{W}' = 0 \quad (3.3.16)$$

Explicitando  $\mathbf{V}$  em 3.3.12,  $\mathbf{V} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T \mathbf{K}$  , e substituindo em 3.3.15, obtem-se:

$$\mathbf{AH} + \mathbf{BP}^{-1}\mathbf{B}^T \mathbf{K} + \mathbf{W} = 0 \quad (3.3.17)$$

Para  $\mathbf{M} = \mathbf{BP}^{-1}\mathbf{B}^T$  , pode-se reescrever a 3.3.17 como:

$$\mathbf{AH} + \mathbf{MK} + \mathbf{W} = 0 \quad (3.3.18)$$

que, resolvida para  $\mathbf{K}$ , conduz à:

$$\mathbf{K} = -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{AH} + \mathbf{W}) \quad (3.3.19)$$

Analogamente, para 3.3.13 e 3.3.16, com  $\mathbf{M}' = \mathbf{B}'\mathbf{P}'^{-1}\mathbf{B}^T$ , resulta:

$$\mathbf{K}' = -\mathbf{M}'^{-1}(\mathbf{A}'\mathbf{H} + \mathbf{W}') \quad (3.3.20)$$

Substituindo 3.3.19 e 3.3.20 em 3.3.14:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{K} + \mathbf{A}'^T \mathbf{K}' = -\mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{AH} + \mathbf{W}) - \mathbf{A}'^T \mathbf{M}'^{-1}(\mathbf{A}'\mathbf{H} + \mathbf{W}') = 0 \quad (3.3.21)$$

resulta:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{AH} + \mathbf{W}) + \mathbf{A}'^T \mathbf{M}'^{-1} (\mathbf{A}'\mathbf{H} + \mathbf{W}') = 0 \quad (3.3.22)$$

ou

$$[\mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{A}'^T \mathbf{M}'^{-1} \mathbf{A}'] \mathbf{H} + [\mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{W} + \mathbf{A}'^T \mathbf{M}'^{-1} \mathbf{W}'] = 0 \quad (3.3.23)$$

ou, simplificadamente:

$$\mathbf{N} \mathbf{H} + \mathbf{U} = 0 \quad (3.3.24)$$

com:

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{A}'^T \mathbf{M}'^{-1} \mathbf{A}' \quad (3.3.25)$$

e

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{W} + \mathbf{A}'^T \mathbf{M}'^{-1} \mathbf{W}' \quad (3.3.26)$$

A equação matricial 3.3.24 consiste em um sistema de equações normais, onde:

$\mathbf{N}$  é a matriz dos coeficientes, e  $\mathbf{U}$ , é um vetor constante.

Para que o extremo encontrado pela primeira derivada da função de variação seja um mínimo, é necessário que a segunda derivada de  $\varphi$  resulte em uma matriz positivo-definida. Assim, como a variável incógnita é  $\mathbf{H}$ , a segunda derivada resulta em:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{H}} (\mathbf{NH} + \mathbf{U}) = \mathbf{N} \quad (3.3.27)$$

Portanto, se  $\mathbf{N}$  for uma matriz positivo-definida, é garantida a condição de *mínimo*, e a solução para o MMQ, a partir de 3.3.24, será:

$$\mathbf{H} = -\mathbf{N}^{-1} \mathbf{U} \quad (3.3.28)$$

### 3.4 Solução para um modelo linear.

Da equação 3.3.28 é obtido o vetor  $H$ .

Conhecido  $H$ , através de 3.3.19 e 3.3.20 são calculados  $K$  e  $K'$ , respectivamente. Em seguida são determinados os resíduos através das equações 3.3.12 e 3.3.13, ou seja:

$$\begin{cases} V = P^{-1}B^T K \\ V' = P'^{-1}B'^T K' \end{cases} \quad (3.4.1)$$

Finalmente, conhecidos  $V$ ,  $V'$  e  $H$ , são determinados  $X$  e  $L$ :

$$\begin{cases} X = X_o + H \\ L = L_o + V \\ L' = L'_o + V' \end{cases} \quad (3.4.2)$$

### 3.5 Solução para um modelo não linear.

Em alguns casos, modelos não lineares podem ser linearizados, e considerados apenas os termos de 1º grau de sua expansão em série de Taylor. A solução do problema, neste caso, é obtida iterativamente até que seja obtida a convergência das grandezas ajustadas. Na  $n$ -ésima iteração, para o ponto  $(X^{(n)}, L^{(n)})$ , e com os estimadores  $A^{(n)}$  e  $B^{(n)}$ , resulta:

$$A^{(n)} ( X^{(n+1)} - X^{(n)} ) + B^{(n)} ( L^{(n+1)} - L^{(n)} ) + F( X^{(n)}, L^{(n)} ) = 0 \quad (3.5.1)$$

Esta equação pode ser expressa em função do resíduo  $V^{(n)}$ , tendo-se em vista que:

$$\begin{aligned} L^{(n+1)} - L_o &= V^{(n)} \\ \Rightarrow L^{(n+1)} - L_o - L^{(n)} &= V^{(n)} - L^{(n)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow L^{(n+1)} - L^{(n)} = V^{(n)} - L^{(n)} + L_o \quad (3.5.2)$$

- Por outro lado, fazendo

$$\mathbf{X}^{(n+1)} - \mathbf{X}^{(n)} = \mathbf{H}^{(n)} \quad (3.5.3)$$

e, substituindo a 3.5.2 e 3.5.3 na 3.5.1, obtém-se:

$$\mathbf{A}^{(n)}\mathbf{H}^{(n)} + \mathbf{B}^{(n)}[\mathbf{V}^{(n)} + (\mathbf{L}_o - \mathbf{L}^{(n)})] + \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(n)}, \mathbf{L}^{(n)}) = 0 \quad (3.5.4)$$

ou

$$\mathbf{A}^{(n)}\mathbf{H}^{(n)} + \mathbf{B}^{(n)}\mathbf{V}^{(n)} + \mathbf{B}^{(n)}(\mathbf{L}_o - \mathbf{L}^{(n)}) + \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(n)}, \mathbf{L}^{(n)}) = 0 \quad (3.5.5)$$

Porém, com:

$$\mathbf{W}^{(n)} = \mathbf{B}^{(n)}(\mathbf{L}_o - \mathbf{L}^{(n)}) + \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(n)}, \mathbf{L}^{(n)}) \quad (3.5.6)$$

resulta, finalmente:

$$\mathbf{A}^{(n)}\mathbf{H}^{(n)} + \mathbf{B}^{(n)}\mathbf{V}^{(n)} + \mathbf{W}^{(n)} = 0 \quad (3.5.7)$$

que, analogamente à 3.3.8 e 3.3.9, tem como solução, as mesmas equações.

A importância da equação 3.5.6 é que ela indica o quanto o resultado da  $n$ -ésima interação afastou-se da solução inicial [Gemael, 1994], e permite formular o modelo em função de  $\mathbf{V}^{(n)}$ , que é o resíduo na  $n$ -ésima iteração, em vez de  $\mathbf{L}^{(n+1)} - \mathbf{L}^{(n)}$ , que não representa um resíduo.

A convergência é conseguida quando duas iterações consecutivas conduzem aos mesmos valores de  $\mathbf{H}$ , ou seja:

$$\mathbf{H}^{(n+1)} - \mathbf{H}^{(n)} \cong 0 \quad (3.5.8)$$

### 3.6 Matrizes de Covariâncias dos Resultados

Normalmente, diferentes premissas iniciais conduzem a um conjunto de soluções possíveis, todas elas dentro de uma adequada significância estatística. As matrizes de variância-covariância são importantes instrumentos de análise, que auxiliam no refinamento da escolha da solução mais adequada, dentre as possíveis.

A variância de uma medida será tanto *menor* quanto maior for a sua precisão. E a covariância de dois parâmetros indica a medida da correlação estatística entre eles.

As variâncias  $\sigma_i^2$  e as covariâncias  $\sigma_{ij}$ , dos parâmetros, podem ser dispostas segundo uma matriz quadrada e simétrica, designada por matriz variância-covariância. Para uma variável n-dimensional, por exemplo, Z, a matriz variância-covariância  $C_Z$  será:

$$C_Z = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \sigma_{n1} & \cdots & & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad (3.6.1)$$

com  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ .

Quando as componentes de Z são independentes, as covariâncias são nulas, e  $C_Z$  reduz-se a uma matriz diagonal.

Uma propriedade importante das matrizes de variância-covariância, conhecida como *Lei da Propagação das Covariâncias*, pode suscitamente ser descrita como [Grael, 1994]:

- para duas variáveis n-dimensionais X e Y, relacionadas por  $Y = GX + C$ , tem-se que a matriz variância-covariância de Y relaciona-se com a matriz variância-covariância de X por:

$$C_Y = G C_X G^T. \quad (3.6.2)$$

Também, para uma dependência não linear através de  $Y = F(X)$ , com os termos lineares da expansão em série de Taylor,

$$Y = F(X) \cong F(X_o) + \frac{\partial F}{\partial X} \Big|_{x_o} (X - X_o) \quad (3.6.3)$$

resulta analogamente,

$$C_Y = G C_X G^T \quad (3.6.4)$$

onde,

$$G = \frac{\partial F}{\partial X} \Big|_{x_0} = \left[ \begin{array}{cccc} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{array} \right] \Big|_{x_0} \quad (3.6.5)$$

Aplicando a equação 3.6.2 às relações já estabelecidas até aqui, e buscando explicitá-las em função do "erro de fechamento"  $\mathbf{W}$ , permite obter-se as matrizes de variância-covariância explicitamente conhecidas para as observações e incógnitas ajustadas.

### 3.7 Matriz de Covariâncias $\mathbf{W}$ para o "erro de fechamento".

Para o modelo combinado,  $\mathbf{W} = F(\mathbf{X}_o, \mathbf{L}_o)$ , onde  $\mathbf{X}_o$  é um estimador qualquer para os parâmetros incógnitos, e  $\mathbf{L}_o$  os valores das grandezas observadas.

O vetor  $\mathbf{X}_o$  é conhecido e tem variância nula. Assim, a variância para  $\mathbf{W}$  resultará uma função apenas das precisões de  $\mathbf{L}_o$ , ou seja:

$$\mathbf{W} = F(\mathbf{L}_o) \Rightarrow$$

$$C_w = D C_{L_o} D^T \quad (3.7.1)$$

com

$$D = \left[ \begin{array}{ccccc} \frac{\partial F_1}{\partial L_1} & \frac{\partial F_1}{\partial L_2} & \frac{\partial F_1}{\partial L_3} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial L_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial L_1} & \frac{\partial F_n}{\partial L_2} & \frac{\partial F_n}{\partial L_3} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial L_n} \end{array} \right] \Big|_{L=L_o} = \frac{\partial F}{\partial L} \Big|_{L=L_o} = B \quad (3.7.2)$$

$$\Rightarrow C_w = B C_{L_o} B^T \quad (3.7.3)$$

Substituindo  $C_{L_0} = \sigma_0^2 P^{-1}$ , onde  $P$  é a matriz de pesos das observações:

$$C_w = \sigma_0^2 B P^{-1} B^T \quad (3.7.4)$$

ou

$$C_w = \sigma_0^2 M \quad (3.7.5)$$

Para o modelo injuntivo, análogamente:

$$C'_w = \sigma_0^2 M' \quad (3.7.6)$$

### 3.8 Covariância das incógnitas ajustadas X.

Resolvendo a equação 3.3.23 para  $H$ , e aplicando-lhe a 3.6.2, temos:

$$C_H = (-N^{-1}A^T M^{-1}) C_w (-N^{-1}A^T M^{-1})^T + (-N^{-1}A'^T M'^{-1}) C_{w'} (-N^{-1}A'^T M'^{-1})^T \quad (3.8.1)$$

Lembrando que:  $C_w = \sigma_0^2 M$  e  $N = A^T M^{-1} A + A'^T M'^{-1} A'$ , resulta:

$$\begin{aligned} C_H &= \sigma_0^2 N^{-1} A^T M^{-1} M M^{-1} A N^{-1} + \sigma_0^2 N^{-1} A'^T M'^{-1} M' M'^{-1} A' N^{-1} \\ &= \sigma_0^2 N^{-1} (A^T M^{-1} A) N^{-1} + \sigma_0^2 N^{-1} (A'^T M'^{-1} A') N^{-1} \\ &= \sigma_0^2 N^{-1} (A^T M^{-1} A + A'^T M'^{-1} A') N^{-1} \\ &= \sigma_0^2 N^{-1} N N^{-1} \\ \Rightarrow C_H &= \sigma_0^2 N^{-1} \end{aligned}$$

Como  $X_o$  é uma constante e  $X = X_o + H$ :

$$C_X = C_H = \sigma_0^2 N^{-1} \quad (3.8.2)$$

### 3.9 Covariância das observações ajustadas $L$ e $L'$ .

a) Combinando-se as seguintes equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} V = P^{-1}B^T K \\ K = M^{-1}(AH + W) \\ H = -N^{-1}A^T M^{-1}W - N^{-1}A'^T M'^{-1}W' \end{array} \right.$$

é obtida uma relação entre  $V$  e duas variáveis independentes,  $W$  e  $W'$ :

$$\begin{aligned} V &= -P^{-1}B^T M^{-1} [ A(-N^{-1}A^T M^{-1}W - N^{-1}A'^T M'^{-1}W') + W ] \\ &= (P^{-1}B^T M^{-1}A N^{-1}A^T M^{-1} - P^{-1}B^T M^{-1}) W + P^{-1}B^T M^{-1}A N^{-1}A'^T M'^{-1} W' \end{aligned} \quad (3.9.1)$$

Se aplicada à 3.6.2 a 3.9.1, resulta:

$$C_V = Q C_W Q^T + S C_{W'} S^T \quad (3.9.2)$$

com:  $Q = -P^{-1}B^T M^{-1}A N^{-1}A^T M^{-1} - P^{-1}B^T M^{-1}$  e  
 $S = P^{-1}B^T M^{-1}A N^{-1}A'^T M'^{-1}$ .

Substituindo  $C_W$  e  $C_{W'}$ , e com algumas simplificações algébricas, obtem-se:

$$C_V = \sigma_0^2 P^{-1} B^T M^{-1} [ I - A N^{-1} A^T M^{-1} ] B P^{-1} \quad (3.9.3)$$

e, analogamente:

$$C_{V'} = \sigma_0^2 P'^{-1} B'^T M'^{-1} [ I - A' N^{-1} A'^T M'^{-1} ] B' P'^{-1} \quad (3.9.4)$$

b) Substituindo  $V$  em  $L = L_o + V$ :

$$L = L_o + (P^{-1}B^T M^{-1}A N^{-1}A^T M^{-1} - P^{-1}B^T M^{-1}) W + P^{-1}B^T M^{-1}A N^{-1}A'^T M'^{-1} W' \quad (3.9.5)$$

Tendo em vista, também, que  $W = F(X_o, L_o)$  e  $W' = F'(X_o, L'_o)$ , verifica-se ser  $L$  uma função das variáveis independentes  $L_o$  e  $L'_o$ .

Linearizando 3.9.5 com:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial L_o} = I + P^{-1} B^T M^{-1} A N^{-1} A^T M^{-1} \frac{\partial W}{\partial L_o} - P^{-1} B^T M^{-1} \frac{\partial W}{\partial L'_o} \\ \frac{\partial L}{\partial L'_o} = P^{-1} B^T M^{-1} A N^{-1} A' M'^{-1} \frac{\partial W'}{\partial L'_o} \end{array} \right.$$

e, aplicando a 3.6.2, obtem-se:

$$C_L = \frac{\partial L}{\partial L_o} C_{L_o} \left( \frac{\partial L}{\partial L_o} \right)^T + \left( \frac{\partial L}{\partial L'_o} \right) C_{L'_o} \left( \frac{\partial L}{\partial L'_o} \right)^T \quad (3.9.6)$$

Se feitas as substituições respectivas no 2º membro, e, lembrando que:

$$C_{L_o} = \sigma_0^2 P^{-1}$$

$$C_{L'_o} = \sigma_0^2 P'^{-1}$$

$$M = BP^{-1}B^T$$

$$M' = B'P'^{-1}B'^T$$

$$A'M'^{-1}A'^T = A'^T M'^{-1} A'$$

$$N = A^T M^{-1} A + A'^T M'^{-1} A'$$

$$\frac{\partial W}{\partial L_o} = B$$

$$\frac{\partial W'}{\partial L'_o} = B'$$

resulta, após alguns passos [Escobar, 1991]:

$$C_L = \sigma_0^2 [P^{-1} + P^{-1} B^T M^{-1} A N^{-1} A^T M^{-1} B P^{-1} - P^{-1} B^T M^{-1} B P^{-1}] \quad (3.9.7)$$

e, analogamente:

$$C_{L'} = \sigma_0^2 [P'^{-1} + P'^{-1} B'^T M'^{-1} A' N^{-1} A'^T M'^{-1} B' P'^{-1} - P'^{-1} B'^T M'^{-1} B' P'^{-1}] \quad (3.9.8)$$

A comparação entre a 3.9.3 e a 3.9.7 [Escobar, 1991], conduz a:

$$C_L = C_{L_o} - C_v \quad (3.9.9)$$

Este é um resultado esperado, verificando que as variâncias das observações ajustadas são menores do que as variâncias das observações iniciais.

## CAPÍTULO 4

### TRATAMENTO DOS DADOS

Com o objetivo de organizar os dados gravimétricos por trajetos, remover efeitos sistemáticos, criticar e processar o ajustamento, foram desenvolvidos três programas em FORTRAN IV ANSI.

O primeiro programa realiza as correções dos efeitos sistemáticos nos intervalos de gravidade observados, entre estações, por trajeto e gravímetro. A análise comparativa destes intervalos de gravidade corrigidos, permitiu a rejeição das leituras com desvio da média maior do que  $50 \mu Gal$ , para cada ligação, entre estações.

Em seguida, um segundo programa calcula a média das leituras em cada estação, de cada intervalo, por trajeto e gravímetro.

E um terceiro programa, com o algoritmo da formulação do método dos mínimos quadrados ponderados para o modelo proposto, processa os dados já agrupados, e emite um relatório com os valores ajustados e os parâmetros estatísticos necessários à análise dos resultados.

#### 4.1 Fonte de dados.

Para a Rede Gravimétrica Fundamental Brasileira foram realizadas aproximadamente 6000 ligações entre 562 estações distintas, com 14 gravímetros LaCoste & Romberg modelo G. Deste acervo foi selecionada uma linha gravimétrica de 118 estações, ligando Sta Elena Uairen (VEN) a Payssandu (URU), conectada a 11 estações absolutas, e com aproximadamente 1800  $mGal$  de amplitude. Estão incluídos, nos 380 intervalos de gravidade selecionados, os dados referentes a diversas ocupações da linha de calibração ON-Agulhas Negras.

Nos levantamentos selecionados, foram utilizados 6 gravímetros LaCoste & Romberg, com os seguintes números de série: 13, 61, 257, 602, 622 e 674.

A tabela 4.1.1 mostra a distribuição por intervalo de leitura e gravímetro.

frequência por intervalos de leitura e gravímetros							
	gravímetros						
intervalos	13	61	257	602	622	674	total
$0 \leq \Delta\ell < 50$	17	176	277	160	102	38	770
$50 \leq \Delta\ell < 100$	2	24	110	132	85	20	373
$100 \leq \Delta\ell < 150$	4	17	29	18	4		72
$150 \leq \Delta\ell < 200$	4		106	57	98	63	328
$200 \leq \Delta\ell$			4	6	1		11
total	27	217	526	373	290	121	1554

Tabela 4.1.1 - Conjunto das observações.

A América do Sul dispõem de um datum gravimétrico estabelecido por estações absolutas, cujos valores de gravidade foram determinados por queda livre, com precisão de  $\pm 0.01 \text{ mGal}$  [Gemael et al., 1990]. A origem e escala serão estabelecidas por 11 estações absolutas deste datum, através dos seus valores conhecidos [Torge et al., 1994] de gravidade e precisão.

As estações absolutas usadas como controle estão listadas na tabela 4.1.2.

ESTAÇÃO	CIDADE	g (mGal)	DESVIO PADRÃO
IFE-40	Sta Elena Uíaren (VEN)	977822.084	.010
EGA-01	Terezina	978016.343	.010
EGA-02	Brasília	978048.798	.010
EGA-03	Viçosa	978460.230	.010
EGA-04	Vassouras	978637.581	.010
EGA-05	Vinhedo	978563.778	.010
EGA-06	Curitiba	978760.387	.010
EGA-07	Sta Maria	979261.636	.010
EGA-08	Rivera (URU)	979344.377	.010
EGA-09	Toledo (URU)	979715.855	.010
EGA-10	Payssandu (URU)	979523.526	.010

Tabela 4.1.2 - Conjunto das estações de controle.

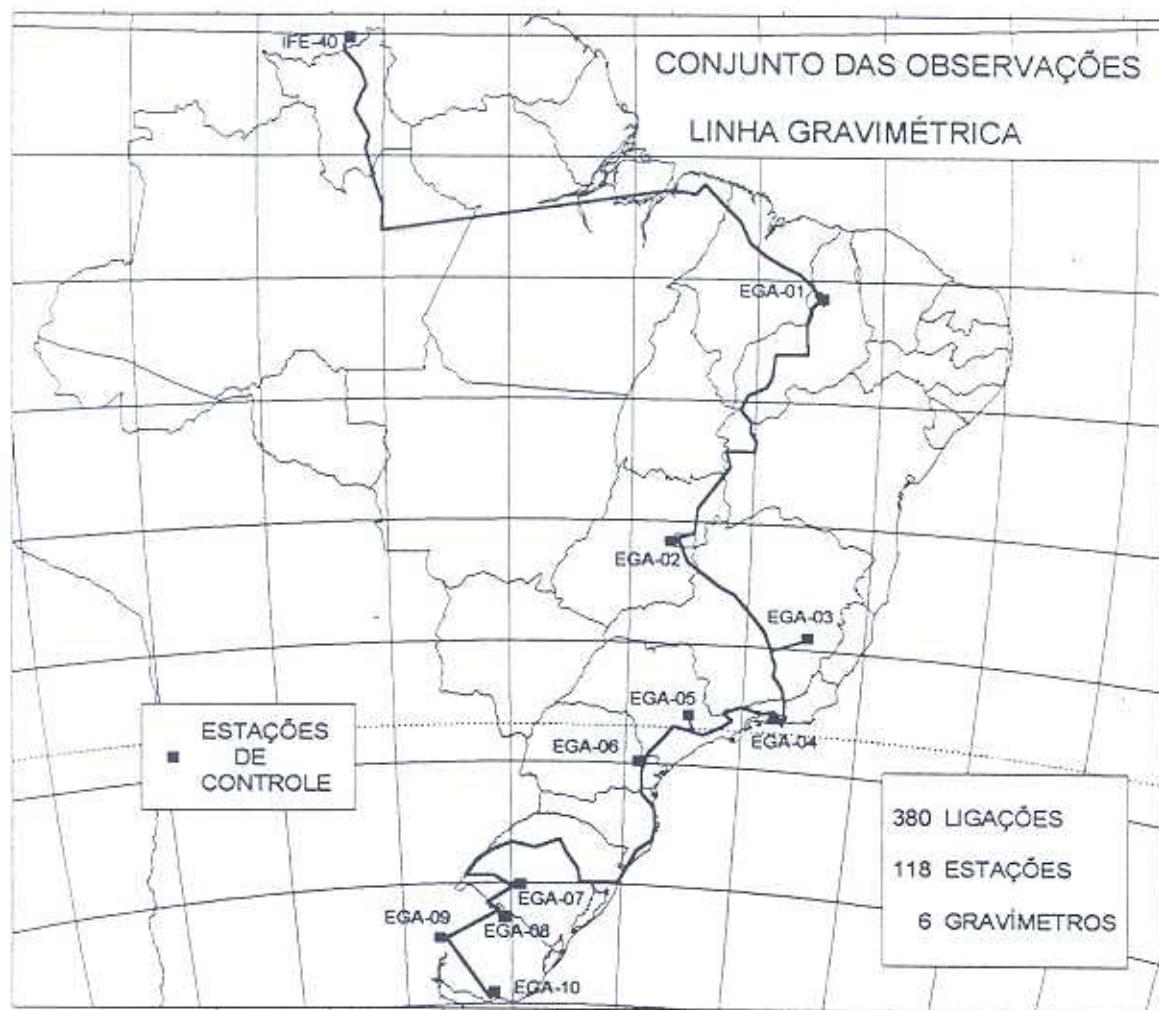


Fig. 4.1.1 - Distribuição geográfica da linha gravimétrica selecionada.

#### 4.2 Considerações sobre os efeitos sistemáticos.

Todo o conjunto de observações considerado foi adquirido segundo os procedimentos estabelecidos para os levantamentos gravimétricos de 1<sup>a</sup> ordem da Rede Gravimétrica Fundamental Brasileira [Escobar, 1985].

A pré-análise dos dados revela que:

- Somente gravímetros LCR foram utilizados na obtenção dos dados.

- De um modo geral as amplitudes dos trajetos são pequenas quando comparadas à amplitude de toda a rede, aproximadamente 1850  $mGal$ . Os gravímetros LCR-602, LCR-622, e sobretudo o LCR-257, participaram em quase toda a extensão dos dados selecionados, estando desta forma, vinculados em ampla faixa instrumental.

- As ligações gravimétricas foram realizadas quase sempre em duas idas e vindas, e com pelo menos dois gravímetros. Ou alternativamente, em ida e vinda, com, pelo menos, quatro gravímetros. Exceções podem ser encontradas em ligações na região Amazônica, impostas por dificuldades logísticas.

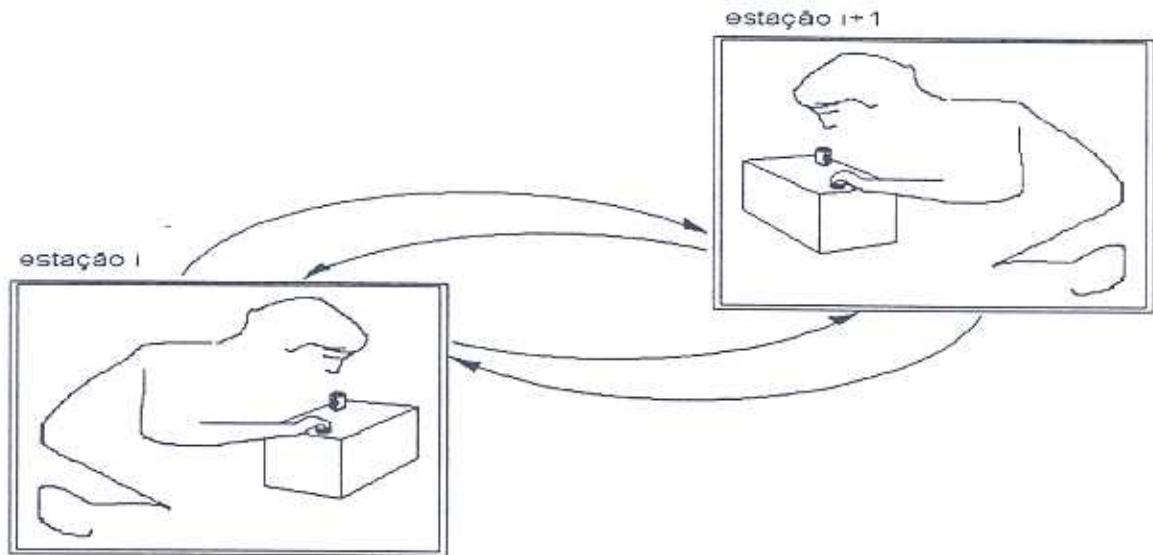


Fig. 4.2.1 - Exemplo de ligação gravimétrica, com 2 idas e vindas, para 2 estações.

- A metodologia usada na ocupação de estações consecutivas, nos circuitos da RGFB, estão em acordo com normas sugeridas internacionalmente [DMATC, 1974].

- A distância média entre estações consecutivas da RGFB, aproximadamente de 100 km, permite realizar duas ou mais idas e vindas no curto período de 24 horas. Dentro deste período, é considerado que a deriva dinâmica tem um comportamento aproximadamente linear no tempo. A prática mostrou também, que para este período, ela é estatisticamente da ordem do erro cometido pelo operador ( $\pm 4 \mu Gal$ ), ou menor.

A precisão nominal de leitura do LCR é de  $\pm 0,01 mGal$  [LaCoste & Romberg, 1990], com precisão melhor do que  $\pm 0,05 mGal$  para um intervalo de gravidade.

- A correção de maré luni-solar [Longman, 1959; GSC, 1988] utilizada leva em consideração, para o fator gravimétrico, o valor médio de 1,16 [De Freitas, 1993]. O erro na determinação da correção da maré é menor do que  $\pm 6 \mu Gal$ .

#### 4.3 A leitura instrumental como parâmetro do modelo.

Qualquer que seja a relação funcional usada no ajustamento gravimétrico, obtém-se uma considerável simplificação em sua aplicação, com as correções a priori nas leituras, das derivas estática e dinâmica. A deriva e a maré luni-solar, são os mais evidentes efeitos sistemáticos.

Assim, quando realizam-se medidas em um circuito e é necessário fazer-se uma interrupção, ocupa-se um determinado ponto ao parar, e reocupa-se este mesmo ponto no início da retomada dos trabalhos. A *diferença de leitura*, neste ponto, é a deriva estática ocorrida durante aquela interrupção.

Para a deriva dinâmica, adota-se um modelo linear de variação da leitura com o tempo. Na maioria dos gravímetros LCR, o efeito da deriva dinâmica é pequeno para intervalos de até 24 horas, e normalmente é suplantado pelos erros acidentais nas observações.

Adotar-se-á a seguinte sequência de procedimentos:

- a maré luni-solar é convertida em unidades do dial do gravímetro, usando-se inversamente, as funções de calibração dos equipamentos;
- a leitura é também corrigida da deriva estática, caso ocorra;
- e finalmente é calculado um valor de leitura  $\bar{L}_i$  para cada estação, como forma de se obter um estimador não tendencioso para estes parâmetros.

Em resumo, após a correção da maré e deriva estática nas leituras, é adotado um procedimento que considera a deriva dinâmica aproximadamente linear, durante a execução de um trajeto gravimétrico, cujo tempo total de fechamento seja menor do que 24 horas.

O ajustamento no presente trabalho, é conduzido sobre um valor de leitura em cada estação, para cada trajeto. Assim, em cada equação do sistema, as leituras

devem ser estimadores não tendenciosos, livres de erros grosseiros.

Com este objetivo, considera-se que:

1) É conhecido que a deriva dinâmica varia com o tempo. Entretanto, podem ocorrer descontinuidades nos valores de leitura, "saltos", atribuídos às condições de transporte do equipamento [Angus & Brulé, 1967], cuja identificação e eliminação só é possível pelo uso simultâneo de mais de um gravímetro. Em cada ligação foram usados pelo menos dois gravímetros.

2) É necessário estimar um valor representativo da leitura para cada estação do trajeto, para a qual é feita a aquisição na tabela de calibração, do respectivo coeficiente de calibração.

3) A primeira medida de uma linha gravimétrica não é afetada pela deriva dinâmica. E a medida seguinte sim, mas dentre todas as restantes, será a menos afetada. E assim por diante. Quando conhecido o valor estatisticamente representativo para a primeira leitura (valor de leitura para a primeira estação), e se atendido o critério de rejeição, é imediata a determinação das leituras nas restantes estações, a partir das médias para os intervalos.

4) Entretanto, quando o primeiro intervalo de leituras for rejeitado, porém o segundo intervalo não, ainda assim é considerada como leitura para a primeira estação, aquela que resulta da leitura média estabelecida para a segunda estação, subtraída do valor médio do primeiro intervalo de gravidade.

5) No entanto, quando o resíduo da média para o intervalo entre a 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> estações, bem como para o intervalo entre a 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> estações, forem rejeitados, não resta outra alternativa senão desprezar toda a primeira ida e volta do trajeto, para o gravímetro em questão. A razão disto é a impossibilidade de ser estabelecido um valor que seja representativo para leitura da 1<sup>a</sup> estação, e, em seguida, distribuir ponderado pelo tempo, o efeito sistemático da deriva dinâmica, mais o erro de operação, para as leituras das restantes estações do trajeto.

#### 4.4 Efeitos não sistemáticos.

A análise dos dados indica existirem efeitos não sistemáticos, introduzidos pelos diferentes equipamentos, operadores e logísticas. As causas mais relevantes são:

- baixa deriva dinâmica em alguns gravímetros, e acentuada em outros. Para tanto, é levado em consideração o intervalo de 24 horas, e a tolerância de  $\pm 50 \mu Gal$  para o fechamento de um trajeto.

- o número de rejeições para a leitura de abertura em alguns trajetos, em determinada época, é maior do que o esperado estatisticamente. Estabilidade térmica, operação, ou mesmo características próprias do equipamento são causas prováveis. A metodologia seguida no presente trabalho não prescinde que sejam feitas, pelo menos, quatro medidas na primeira estação, na abertura de um trajeto.

- especificamente, o gravímetro LCR, de número 674 apresenta a maior deriva dinâmica dentre todos os utilizados, e parece necessitar, também, de maior tempo para estabilização, após ficar travado por muitas horas.

#### 4.5 O valor de Leitura para cada Estação.

O seguinte procedimento foi adotado na determinação dos valores de leitura, corrigidos da maré, representativos para cada estação, em um trajeto gravimétrico qualquer:

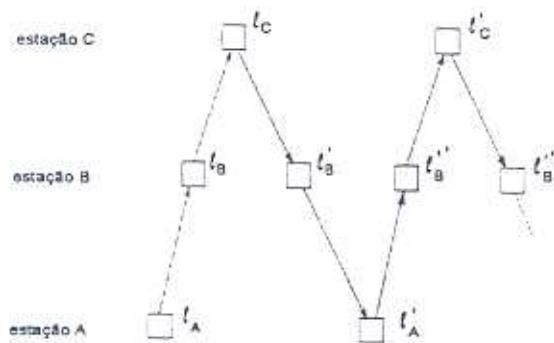


Fig. 4.5.1 - Exemplo de trajeto com 3 estações.

- 1) É calculada a média dos intervalos de leitura, ponderando-as pelo inverso do intervalo de tempo.

Como exemplo, consideremos um circuito análogo ao da figura 3.6.1. Assim;

$$\overline{\Delta l}_{AB} = \frac{\sum_i \frac{|\Delta l_i|}{(\Delta t_i)}}{\sum_i \left( \frac{1}{\Delta t_i} \right)}, \quad \text{com: } \Delta l_1 = l_B - l_A, \Delta l_2 = l'_A - l'_B, \dots \text{ e}$$

analogamente para  $\Delta t_i$ .

$$\overline{\Delta l}_{BC} = \frac{\sum_i \frac{|\Delta l_i|}{(\Delta t_i)}}{\sum_i \left( \frac{1}{\Delta t_i} \right)}, \quad \text{com: } \Delta l_1 = l_C - l_B, \Delta l_2 = l'_B - l'_C, \dots \text{ e}$$

analogamente para  $\Delta t_i$ .

- 2) Um critério de rejeição, descrito na próxima seção, é então aplicado sobre os intervalos  $\overline{\Delta l}$ .
- 3) Conhecidos  $\overline{\Delta l}_{AB}$  e  $\overline{\Delta l}_{BC}$ , resta então definir o valor de leitura para a primeira estação. Como já foi dito, não havendo rejeição no primeiro intervalo de leituras, resultará:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \text{estações: } & \mathbf{A}, & \mathbf{B}, & \mathbf{C}, & \dots \\ \text{leituras: } & l_A, & l_B = l_A + \overline{\Delta l}_{AB}, & l_C = l_A + \overline{\Delta l}_{AB} + \overline{\Delta l}_{BC}, & \dots \end{array} \right.$$

#### 4.6 Critério para a rejeição de leituras.

De ajustamento realizado anteriormente [Escobar et al., 1996], foi obtido um desvio padrão  $\sigma = \pm 0,03 \text{ mGal}$  para um intervalo qualquer,  $\Delta g$ , da RGFB. Corresponde a 90,5% do conjunto de medidas, o intervalo de tolerância de  $1,67\sigma = 50 \mu\text{Gal}$ . Este valor será adotado como tolerância, para os desvios dos intervalos de leituras:

$$|\Delta l_{ij} - \overline{\Delta l}_{ij}| \leq 0,05 \quad (4.6.1)$$

Se algum intervalo  $\Delta l_{ij}$  não satisfaz à equação acima, ele é rejeitado, e é calculada uma nova média com as restantes observações do mesmo par de estações, quando o número de idas e vindas assim o permitir.

Este procedimento é consistente com o que é realizado nos procedimentos de campo da RGFB, havendo reocupação sempre que o erro de fechamento de um trajeto gravimétrico for maior do que  $\pm 50 \mu\text{Gal}$ .

#### 4.7 Ponderação das observações.

O método dos mínimos quadrados é construído sobre a hipótese de que a melhor distribuição das imprecisões do conjunto de observações, é aquela que minimiza a soma ponderada dos quadrados dos resíduos. A ponderação é realizada pelos pesos atribuídos a cada observação.

A matriz variância-covariância das observações é:

$$C_{Lo} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \dots \\ & \sigma_2^2 \\ \vdots & \ddots \\ & & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad (4.7.1)$$

A matriz dos pesos, como em 3.3.5, fica definida por:

$$P_{Lo} = \sigma_o^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & & \\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & & & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & p_n \end{bmatrix} \quad (4.7.2)$$

onde os pesos  $p_i$  são inversamente proporcionais às respectivas variâncias, e escalados por  $\sigma_o^2$ .

Por outro lado, é imediato verificar em 4.7.2, que:

$$p_1\sigma_1^2 = p_2\sigma_2^2 = \dots = p_n\sigma_n^2 = \sigma_o^2 \Rightarrow p_i = \frac{\sigma_o^2}{\sigma_i^2} \quad (4.7.3)$$

Se  $p_i = 1 \Rightarrow \sigma_o^2 = \sigma_i^2$ , o que explica a denominação até aqui dada a  $\sigma_o^2$ : variância da observação de peso unitário [Gemael, 1994].

## CAPÍTULO 5

### MODELO MATEMÁTICO PROPOSTO

#### 5.1 Formulação do modelo.

O fabricante fornece para cada gravímetro, uma tabela da função de calibração, em intervalos de 100 *mGal*. Usando o LCR-257 como exemplo:

<i>leitura do dial</i>	<i>valor da leitura em mGal</i>	<i>coeficiente para o intervalo</i>
000	000,00	1,06825
100	106,83	1,06823
200	213,65	1,06818
300	320,47	1,06813
400	427,28	1,06807
—	—	—
—	—	—
—	—	—

Associando :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ell_i - \text{leituras do dial (escala do parafuso micrométrico)}, \\ \ell'_i - \text{leituras corrigidas para mGal}, \\ \alpha_i - \text{coeficientes da função de calibração para o intervalo} \end{array} \right.$$

Verifica-se a seguinte lei de formação, para intervalos de leitura fixos de 100 unidades, iniciando em zero:

$$\ell'_0 = 0.000$$

$$\ell'_1 = 100\alpha_0 + \ell'_0$$

$$\ell'_2 = 100(\alpha_0 + \alpha_1) + \ell'_0$$

$$\ell'_3 = 100(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) + \ell'_0$$

;

$$\Rightarrow \ell'_n = 100 * \left( \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \right) + \ell'_0 \quad (5.1.1)$$

O conjunto de retas da equação acima, em intervalos fixos de leituras múltiplos de 100 unidades, linearizam por partes, a função de calibração. Isto é equivalente à tabela de calibração, tal qual é fornecida pelo fabricante, para cada gravímetro.

Busca-se, agora, a lei de formação para um valor qualquer de  $\ell'$ , em *miligal*. Considere-se um  $\delta$  tal que,  $0 < \delta < 100$ , e também, uma função  $\Im$  que, aplicada sobre um número real, fornece a sua parte inteira. Assim, um valor de leitura  $\ell$  pode ser convenientemente representado por:

$$\ell = 100 * \Im \left( \frac{\ell}{100} \right) + \delta \quad \text{ou} \quad \delta = \ell - 100 * \Im \left( \frac{\ell}{100} \right) \quad (5.1.2)$$

Aplicado à tabela de calibração para a conversão em *mGal*, resulta em:

$$\ell'_n = 100 * \left( \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \right) + \ell'_0 + \left[ \ell - 100 * \Im \left( \frac{\ell}{100} \right) \right] * \alpha_n \quad (5.1.3)$$

Para as leituras realizadas em duas estações,  $p$  e  $q$ , considere-se que as funções, **I** e **J**, sejam definidas como:  $\mathbf{I} = \Im \left( \frac{\ell_q}{100} \right)$  e  $\mathbf{J} = \Im \left( \frac{\ell_p}{100} \right)$ , e que o intervalo de gravidade, entre aquelas duas estações, seja determinado por:

$$g_q - g_p = k_r (\ell'_q - \ell'_p) \quad (5.1.4)$$

onde :  $\begin{cases} g & - \text{é o valor da gravidade em } mGal, \\ \ell' & - \text{é a leitura corrigida do LCR em unidades } mGal, \\ k_r & - \text{é o fator residual de escala para o gravímetro } r, \text{ entre o datum} \\ & \text{de calibração e o datum representado pelas estações de controle.} \end{cases}$

Substituindo 5.1.3 em 5.1.4, resulta finalmente, num modelo para intervalo de gravidade, envolvendo: as leituras instrumentais  $\ell$ , os valores de gravidade em cada estação  $g$ , os coeficientes da linearização  $\alpha$ , da função de calibração do LCR, e o fator residual de escala,  $k$ . Este modelo é definido por:

$$\begin{aligned} g_q - g_p + k_r (\ell_p, \alpha_J - \ell_q, \alpha_I - 100 \mathbf{J}, \alpha_J + \\ + 100 \mathbf{I}, \alpha_I + 100 \sum_{n=0}^{J-1} \alpha_n - 100 \sum_{n=0}^{I-1} \alpha_n) = 0 \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

Na aplicação do modelo 5.1.5, são consideradas como grandezas observáveis,  $\mathbf{L}$ , as leituras e os coeficientes de calibração. Como incógnitas,  $\mathbf{X}$ , os valores de gravidade nas estações, e os coeficientes residuais de escala para os gravímetros.

Assim:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_1 \\ - \\ l_m \\ 1\alpha_1 \\ - \\ r\alpha_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} g_1 \\ - \\ g_l \\ k_1 \\ - \\ k_r \end{bmatrix}$$

onde:

$m$  é o nº de leituras,

$n$  o nº de coeficientes de calibração distintos, afetados pela abrangência das leituras, para todos os gravímetros,

$l$  o nº de estações gravimétricas distintas, e

$r$  o nº de gravímetros.

A vinculação dos valores ajustados, aos valores conhecidos nas *estações absolutas*, é obtida através do modelo injuntivo:

$$\mathbf{g} - \mathbf{g}_{abs} = 0 \quad (5.1.6)$$

com:  $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{g} - \text{valores ajustados da gravidade para as estações de controle,} \\ \mathbf{g}_{abs} - \text{valores da gravidade conhecidos (absolutos) nas estações de controle.} \end{array} \right.$

A exemplo do modelo principal, o modelo injuntivo é também combinado, com:

$${}_{\mathbf{t}}\mathbf{L}'_1 = \begin{bmatrix} g_{abs_1} \\ \vdots \\ g_{abs_t} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad {}_{\mathbf{t}}\mathbf{X}'_1 = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_t \end{bmatrix}$$

onde  $t$  é o número de estações absolutas.

## 5.2 Solução para o Modelo proposto.

Nas seções seguintes, serão detalhadas as matrizes geradas pelo desenvolvimento do capítulo 2, aplicado ao modelo principal, 5.1.5, e injuntivo, 5.1.6.

## 5.3 Vetor erro de fechamento.

Para o modelo principal, 5.1.5, com uma equação para cada ligação, o vetor erro de fechamento,  $\mathbf{W}$ , é determinado por:

$$\mathbf{W} = \mathbf{F}(\mathbf{X}_o, \mathbf{L}_o) \quad (5.3.1)$$

E para o modelo injuntivo, 5.1.6, com uma equação para cada estação de controle:

$$\mathbf{W}' = \mathbf{F}'(\mathbf{X}'_o, \mathbf{L}'_o) \quad (5.3.2)$$

onde:

$\mathbf{X}_o$  e  $\mathbf{X}'_o$  são os vetores das estimativas iniciais para as incógnitas, e  
 $\mathbf{L}_o$  e  $\mathbf{L}'_o$  são os vetores das observações.

## 5.4 Matriz A dos coeficientes das incógnitas.

Esta matriz é definida por:

$$\left. \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\substack{X=X_o \\ L=L_o}} = \left( \begin{array}{ccccccccc} \frac{\partial F_1}{\partial q_1} & \frac{\partial F_1}{\partial g_2} & \frac{\partial F_1}{\partial g_3} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial g_l} & \frac{\partial F_1}{\partial k_1} & \frac{\partial F_1}{\partial k_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial k_r} \\ \frac{\partial F_2}{\partial q_1} & \frac{\partial F_2}{\partial g_2} & & & & & & & \frac{\partial F_2}{\partial k_r} \\ \frac{\partial g_1}{\partial g_1} & & & & & & & \ddots & \\ \frac{\partial F_m}{\partial g_1} & & & & & & & \ddots & \frac{\partial F_m}{\partial k_r} \end{array} \right) \Bigg|_{\substack{X=X_o \\ L=L_o}} \quad (5.4.1)$$

Em uma ligação qualquer, com o sentido de percurso da estação  $p$  para a estação  $q$ , resulta:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{g}_i} = \begin{cases} i = q & \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{g}_q} = 1 \\ i = p & \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{g}_p} = -1 \\ i \neq q, i \neq p & \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{g}_i} = 0 \end{cases} \quad (5.4.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{k}_i} = \begin{cases} i = r \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{k}_r} & \Big|_{\substack{X=X_o \\ L=L_o}} = ( l_p, \alpha_J - l_q, \alpha_I - 100 J, \alpha_J + 100 I, \alpha_I + \\ & + 100 \sum_{m=0}^{J-1} r \alpha_m - 100 \sum_{m=0}^{I-1} r \alpha_m ) \Big|_{\substack{X=X_o \\ L=L_o}} \\ i \neq r \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{k}_i} = 0 & \end{cases} \quad (5.4.3)$$

onde  $r$  é o índice atribuído a cada um dos gravímetros usados.

### 5.5 Matriz B dos coeficientes das observações.

Cada equação corresponde a um intervalo gravimétrico, entre um par de estações de um trajeto qualquer. Todas as leituras (a leitura média de cada estação, em cada trajeto) são consideradas variáveis independentes. Assim, com relação apenas às leituras, o número de colunas da matriz  $B$  será igual ao dobro do número de equações.

Por outro lado, no caso dos coeficientes de calibração  $\alpha$ , em equações distintas, mas para o mesmo  $\alpha_i$ , os termos  $\frac{\partial F}{\partial \alpha_j}$  correspondem sempre à mesma coluna da matriz  $B$ .

Para uma ligação, com o sentido da estação  $p$ , para a estação  $q$  resulta:

$$\left| \begin{array}{c} \frac{\partial F}{\partial L_i} \\ X=X_0 \\ L=L_0 \end{array} \right| = \left\{ \begin{array}{ll} i=p & \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial l_p} = k_{r,r} \alpha_J \\ & \quad \quad \quad \left| \begin{array}{c} X=X_0 \\ L=L_0 \end{array} \right. \\ i=q & \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial l_q} = -k_{r,r} \alpha_I \\ & \quad \quad \quad \left| \begin{array}{c} X=X_0 \\ L=L_0 \end{array} \right. \\ i \neq q \text{ e } i \neq p & \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial l_q} = 0 \end{array} \right. \quad (5.5.1)$$

Em seguida são resolvidos os termos relativos aos fatores  $\alpha$ .

Com  $J > I$  e  $i = r$ :

1)

$$\left. \frac{\partial F}{\partial_i \alpha_J} \right|_{\substack{X=X_o \\ L=L_o}} = [k_r(l_p - 100 * J)] \quad \left. \right|_{\substack{X=X_o \\ L=L_o}} \quad (5.5.2)$$

e

$$\left. \frac{\partial F}{\partial_i \alpha_I} \right|_{\substack{X=X_o \\ L=L_o}} = [-k_r(l_q - 100 * I) + 100] \quad \left. \right|_{\substack{X=X_o \\ L=L_o}} \quad (5.5.3)$$

2) para os índices  $\delta$  contidos entre  $I$  e  $J$ , tem-se:  $\frac{\partial F}{\partial_i \alpha_\delta} = 100$

3) quando  $i \neq r \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial_i \alpha_n} = 0$

Com  $I > J$  e  $i = r$ :

1)

$$\left. \frac{\partial F}{\partial_i \alpha_J} \right|_{\substack{X=X_o \\ L=L_o}} = [k_r(l_p - 100 * J) - 100] \quad \left. \right|_{\substack{X=X_o \\ L=L_o}} \quad (5.5.4)$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial_i \alpha_I} \right|_{\substack{X=X_o \\ L=L_o}} = [-k_r(l_q - 100 * I)] \quad \left. \right|_{\substack{X=X_o \\ L=L_o}} \quad (5.5.5)$$

2) para os índices  $\delta$ , contidos entre  $J$  e  $I$ , tem-se  $\frac{\partial F}{\partial_i \alpha_\delta} = -100$

3) se  $i \neq r \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial_i \alpha_n} = 0$

Quando,  $I = J$  e  $i = r$ , existe um só elemento:

$$\frac{\partial F}{\partial_{r\alpha_I}} = \frac{\partial F}{\partial_{r\alpha_J}} = k_r(l_p - l_q) \quad (5.5.6)$$

Finalmente, para  $n \neq J$  e  $n \neq I$ , resulta:

$$\frac{\partial F}{\partial_{i\alpha_n}} = 0 \quad (5.5.7)$$

com qualquer  $i$ .

## 5.6 Matriz de Pesos das Observações.

Na aplicação do modelo são consideradas como observações, o conjunto das leituras instrumentais, e, o conjunto dos coeficientes que linearizam as funções de calibração.

A matriz de peso das observações para o modelo principal é definida pela arbitragem inicial dos seguintes valores:

- estimativa da variância da observação de peso unitário,
- estimativa da variância de uma leitura instrumental qualquer,
- estimativa da variância de um coeficiente de calibração qualquer.

Na definição da matriz de pesos do modelo injuntivo, para as observações feitas nas estações de controle, são usadas as precisões relativas à determinação da gravidade por queda livre.

A leitura em cada estação, conforme seção 3.6, resultou da média ponderada pelo inverso do tempo, como forma de corrigir o efeito sistemático linear causado pela deriva dinâmica.

O modelo aplica-se a intervalos de leituras, conforme equação 5.1.4.

As variâncias das leituras, relacionam-se às variâncias das médias dos intervalos de leituras por:

$$\overline{\Delta\ell} = \frac{\sum \Delta\ell}{n} = \overline{\ell_p} - \overline{\ell_q} \Rightarrow \sigma_{\Delta\ell}^2 = \sigma_{\ell_p}^2 + \sigma_{\ell_q}^2 \simeq 2\sigma_{\ell}^2 \quad (5.6.1)$$

com  $\sigma_{\ell_p}^2 \simeq \sigma_{\ell_q}^2$ .

Tendo em vista a equação 4.7.2, e que  $\sigma_{\Delta t}^2 = \frac{\sigma_{\Delta t}^2}{n}$ , podem ser usadas as seguintes relações para a atribuição do peso à leitura média de cada estação:

$$p_i = \sigma_0^2 \frac{1}{\sigma_{\ell_i}^2} = \sigma_0^2 \frac{2}{\sigma_{\Delta t}^2} = \sigma_0^2 \frac{2n_i}{\sigma_{\Delta t}^2} = \sigma_0^2 \frac{n_i}{\sigma_{\ell_i}^2} \quad (5.6.2)$$

Assim, a matriz de pesos é construída em função das estimativas iniciais para  $\sigma_{\ell_i}^2$  e  $\sigma_0^2$ .

Será adotado, a priori, para a variância da observação de peso unitário:

$$\sigma_0^2 = 1 \quad (5.6.3)$$

A matriz de pesos é dependente do valor arbitrado a priori para  $\sigma_0^2$ . E também, as grandezas ajustadas e sua respectivas precisões, conforme equações 3.4.2, 3.7.5, 3.7.6, 3.8.2, 3.9.7 e 3.9.8. Isto indica a necessidade de ser conhecida uma estimativa imparcial para  $\sigma_0^2$ , intrinsecamente vinculada ao resultado do ajustamento.

A estimativa imparcial do escalar  $\sigma_0^2$ , pode ser calculada a posteriori, através da relação [Gemael, 1994]:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V}}{\nu} \quad (5.6.4)$$

onde  $\nu$  é o número de graus de liberdade do sistema.

Retornando à definição da matriz de peso, as observações são consideradas estatisticamente independente, com os respectivos elementos da matriz diagonal de pesos abaixo:

a) pesos para as leituras:

$$p_i = \sigma_0^2 \frac{n_i}{\sigma_{\ell_i}^2} \quad (5.6.5)$$

onde:

$n_i$  é o número de leituras não rejeitadas, e

$\sigma_{\ell_i}^2$  a variância estimada, a priori, para uma leitura qualquer.

b) pesos para os coeficientes  $\alpha$  das funções de calibração:

$$p = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_\alpha^2} \quad (5.6.6)$$

onde  $\sigma_\alpha^2$  é a variância estimada, a priori, para os coeficientes de calibração.

### 5.7 A estimativa para a variância dos coeficientes $\alpha$ das funções de calibração.

Verifica-se na tabela de calibração do fabricante, apresentada no apêndice III, que os coeficientes,  $\alpha$ , são expressos com 5 ordens significativas nos decimais.

Porém, o arredondamento feito aos valores em miligals, na tabela, expressos com dois decimais, sugerem poder haver uma incerteza menor do que 5 unidades, na quinta casa decimal dos valores tabelados de  $\alpha$ .

Assumindo uma incerteza menor ou igual a 5 unidades, na quinta decimal, serão adotadas estimativas de variância dos coeficientes  $\alpha$ , compreendidas entre:

$$0 \leq \sigma_\alpha^2 \leq 0.25 * 10^{-8} \quad (5.7.1)$$

### 5.8 Correção da maré luni-solar às leituras.

No presente trabalho, as leituras instrumentais são parâmetros do modelo, o que torna necessário determinar correções de maré luni-solar às leituras, em unidades de escala do parafuso micrométrico (dial).

Designando por  $\xi_o$  a correção de maré luni-solar, em unidades do dial, e o valor da correção da maré em mGal, por  $\xi$ , verifica-se que:

$$\xi_o = \frac{\xi}{\alpha} \quad (5.8.1)$$

com o coeficiente de calibração do gravímetro expresso, dimensionalmente, por:

$$[\alpha] = \text{mGal} / \text{número de rotações do parafuso micrométrico}$$

No ponto de observação, é medido pelo instrumento, a gravidade e a maré lunisolunar. A equação 5.8.1 segue, por analogia, a aplicação da função de calibração às leituras. A aplicação da equação 5.8.1 pode ser verificada com:

$$I = \left[ \text{parte inteira de } \left( \frac{l_o}{100} \right) \right] * 100 \quad \text{e} \quad T = \text{valor tabelado correspondente a } l_o.$$

Assim,

$$l_{\text{corrigida}} = \{(l_o + \xi_o) - I\} * \alpha + T$$

$$l_{\text{corrigida}} = \left\{ \left( l_o + \frac{\xi}{\alpha} \right) - I \right\} * \alpha + T$$

$$l_{\text{corrigida}} = \underbrace{\{l_o - I\} * \alpha + T}_{\text{conversão da leitura em mGal}} + \underbrace{\xi}_{\text{correção da maré (mGal)}}$$

O coeficiente de calibração usado em  $\xi_o = \frac{\xi}{\alpha}$ , é escolhido na tabela de calibração em correspondência com o valor da leitura instrumental.

## 5.9 Controle sobre a qualidade do ajustamento.

No presente trabalho, são feitas estimativas iniciais para as precisões das observações. Será estabelecido, a seguir, um intervalo de confiança para os resultados do ajustamento.

Através das equações 3.8.2, 3.9.3 e 3.9.4, as imprecisões das observações são transferidas para as variáveis do modelo no ajustamento.

Pode ser verificado [Gemael, 1994] que:

$$\frac{\mathbf{V}^T \mathbf{C}_{L_0}^{-1} \mathbf{V}}{\nu} \sim \chi^2 \quad (5.9.1)$$

tem distribuição qui-quadrado, onde  $\nu$  é o número de graus de liberdade.

Substituindo 4.7.2 e 5.6.4 em 5.9.1, resulta:

$$\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \nu \sim \chi^2 \quad (5.9.2)$$

ou, em relação a  $\chi^2$  reduzida:

$$\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{\nu}^2 \quad (5.9.3)$$

Se o modelo expressa adequada relação entre os seus parâmetros, e se foram bem estimadas, inicialmente, as dispersões das observações, a variância da observação de peso unitário, calculada a posteriori,  $\hat{\sigma}_0^2$ , estará muito próxima da estimativa feita a priori para  $\sigma_0^2$ . Este resultado corresponde ao valor de qui-quadrado reduzido:

$$\chi_{\nu}^2 \cong 1. \quad (5.9.4)$$

Concluindo, a melhor inferência estatística para a qualidade do ajustamento, modelo e estimativas iniciais, é verificada quando:

$$\hat{\sigma}_0^2 \longrightarrow \sigma_0^2 \quad (5.9.5)$$

Não obstante, a inferência estatística não prescinde da análise de adequabilidade da solução à realidade física do problema.

## CAPÍTULO 6

### RESULTADOS E CONCLUSÕES

#### 6.1 Resultados.

Para a avaliação do modelo foram realizados vários ajustamentos, com sucessivos refinamentos das estimativas iniciais. Através de iterações com o modelo linear, onde a matriz de pesos das observações é modificada por diferentes estimativas iniciais das variâncias, é procurada a solução estatisticamente mais adequada à realidade física dos dados.

Todos os parâmetros estão em unidades adequadas à obtenção de valores de gravidade em  $mGal$ , ou seja:  $\sigma_t$  em unidades de leitura e,  $\sigma_\alpha$  em  $mGal/unidades\ de\ leitura$ . O incremento mínimo, escolhido para a variação de  $\sigma_t$ , é aproximadamente equivalente a  $1\ \mu Gal$ . Nos levantamentos de campo, as leituras instrumentais também foram realizadas com estimativa correspondente ao microgal.

Para  $\sigma_\alpha$ , o arredondamento verificado na tabela do fabricante sugere o intervalo de precisão:  $0 \leq |\sigma_\alpha| \leq 0,00005$ .

Na primeira tentativa de ajustamento, foram considerados a priori:

$$\begin{cases} \sigma_t = 0,019 \\ \sigma_\alpha = 0,00001 \end{cases} \quad (6.1.1)$$

Ao nível de confiança de  $100 - \alpha = 95\%$ , corresponde o intervalo:

$$0,869 < \chi^2_v < 1,105 \quad (6.1.2)$$

Considerando a equação 5.9.5, e  $\sigma_0^2 = 1$ , o intervalo de confiança equivale a:

$$0,869 < \hat{\sigma}_0^2 < 1,105 \quad (6.1.3)$$

O valor calculado a posteriori satisfaz a inequação 6.1.3:  $\hat{\sigma}_0^2 = 1,075$

A cada equação do sistema corresponde um intervalo de gravidade e, portanto, um par de leituras. As duas leituras de cada intervalo têm pesos iguais, e quando ajustadas, apresentam resíduos iguais e simétricos. Não obstante, no desenvolvimento do modelo, todas as leituras foram tratadas como eventos independentes. Assim, quando o número de observações permitir, uma distribuição normal é esperada para os resíduos das primeiras leituras dos intervalos, com média igual a zero. Analogamente, isto também vale para as segundas leituras. As figuras 6.1.1 e 6.1.2 apresentam a distribuição dos resíduos para as primeiras leituras ajustadas dos intervalos.

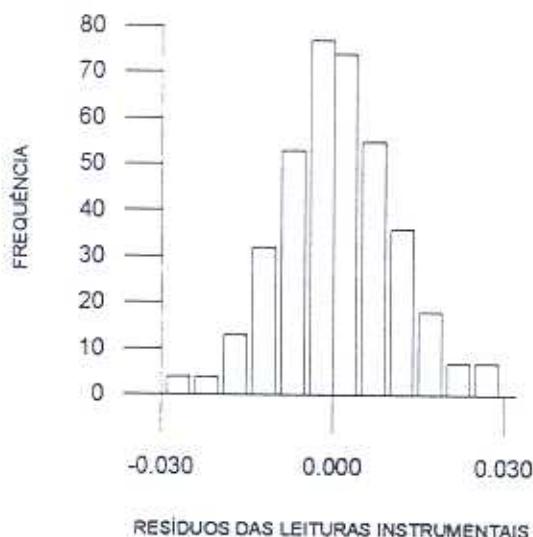


Fig. 6.1.1 - Distribuição normal dos resíduos.

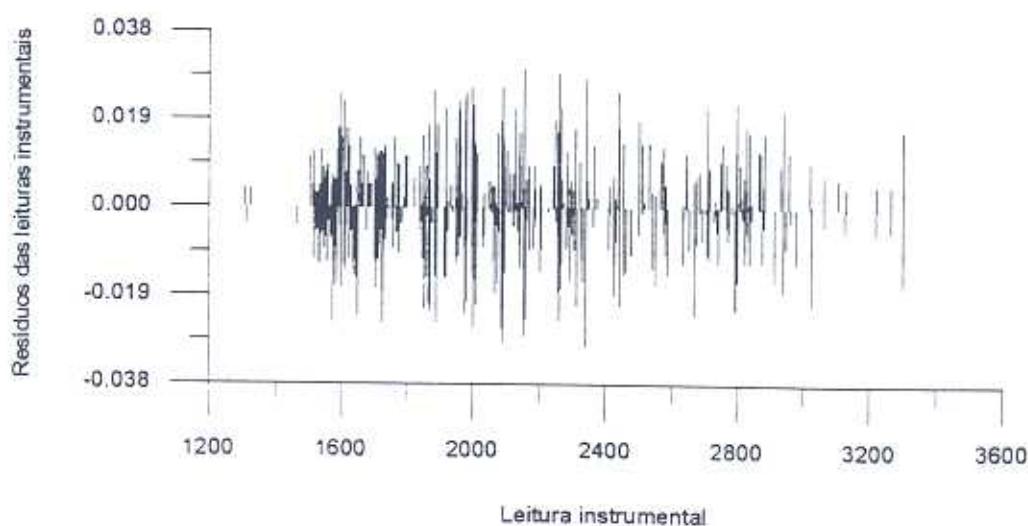


Fig. 6.1.2 - Intervalo de variação dos resíduos das leituras.

Os resíduos das leituras estão contidos no intervalo de  $\pm 2\sigma_t$ , e a figura 6.1.2 mostra os resíduos distribuídos ao longo do circuito gravimétrico. A exemplo do que é sugerido pela figura 6.1.1, naquela, também, não fica evidenciada nenhuma tendência que possa ser atribuída à metodologia ou ao modelo.

Os resíduos para os valores de gravidade ajustados, nas estações de controle, estão na tabela 6.1.3.

Estações de controle		
estação	resíduo	$\sigma_g$
IFE-40	0,001	0,010
EGA-01	-0,004	0,010
EGA-02	0,008	0,010
EGA-03	0,001	0,010
EGA-04	0,006	0,009
EGA-05	-0,015	0,009
EGA-06	0,003	0,006
EGA-07	-0,013	0,008
EGA-08	0,025	0,008
EGA-09	-0,013	0,010
EGA-10	0,002	0,009

Tabela 6.1.3 - Resíduo e precisão em mGal  
dos valores de gravidade ajustados.

A estação de controle EGA-08, com precisão de gravidade de  $\pm 0,01mGal$ , apresentou resíduo alto para o valor de gravidade ajustado:  $0,025\text{ mGal}$ . Analisadas as ligações com esta estação, não foi encontrada explicação para tal discrepância, induzindo suspeição sobre o valor de gravidade conhecido para esta estação. A EGA-08 será retirada do conjunto de estações de controle, deixando de pertencer ao domínio do modelo injuntivo, porém continuando para o modelo principal.

Realizado novo ajustamento, é obtido o valor de  $\hat{\sigma}_0^2 = 1,053$ , e o resíduo de  $-0,015\text{ mGal}$ , na estação de controle EGA-05, é o mais acentuado. A análise dos levantamentos indicam problemas com a ligação desta estação ao circuito gravimétrico. Assim, a EGA-05 também será retirada do conjunto das estações de controle nas iterações seguintes.

Repetido o ajustamento com  $\sigma_t = 0,019$ ,  $\sigma_\alpha = 0,00001$ , e 9 estações de controle, resultou um bom ajustamento, como indicam os seguintes parâmetros:

$-\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = 1,035$  está bem próximo ao ponto de máximo para a densidade de probabilidade de qui-quadrado reduzido:  $\chi_\nu^2 = 1$ .

- o maior resíduo (em módulo) das leituras ajustadas, 0,030, é menor do que duas vezes o desvio padrão para uma leitura qualquer ( $\sigma_t = 0,019$ ).
- o maior resíduo (em módulo) para os coeficientes  $\alpha$  ajustados, 0,000 007 2, é pequeno. As correções aos coeficientes  $\alpha$  obtidos, não são significativas.
- os resíduos dos valores de gravidade ajustados nas 9 estações de controle, tabela 6.1.5, mostram-se compatíveis com as precisões conhecidas para estas estações ( $\pm 10 \mu Gal$ ).

Com o objetivo de conhecer o comportamento do modelo na vizinhança da solução com  $\chi_\nu^2 \cong 1$ , outros ajustamento foram realizados. A descrição é feita a seguir.

Mantida fixa a estimativa de  $\sigma_\alpha = 0,00001$ , foram obtidos resultados de boa significância estatística para  $\sigma_t = \{0,018, 0,019 \text{ e } 0,020\}$ .

Em seguida, com aqueles valores de  $\sigma_t$ , é tentado um refinamento através de  $\sigma_\alpha$ , com a sua variação limitada ao intervalo estabelecida na seção 5.7.

Os resultados obtidos com estes conjuntos de estimativas estão agrupados nas tabelas seguintes.

$\sigma_\alpha$	$\sigma_t$	$\chi_\nu^2$
0,00005	0,018	1,0873
0,00001	0,019	1,0353
0,00002	0,019	1,0251
0,00003	0,019	1,0111
0,00004	0,019	0,9958
0,00005	0,019	0,9803
0,00001	0,020	0,9350
0,00002	0,020	0,9266
0,00003	0,020	0,9149

Tabela 6.1.4 - Estimativas para a precisão das observações e consequentes  $\chi_\nu^2$

Os resíduos dos valores de gravidade ajustados nas estações de controle, referentes

às estimativas iniciais da tabela 6.1.4, estão agrupados na tabela 6.1.5.

Estações de controle : resíduos de g (mGal)					
$\sigma_t = 0.019$					
$\sigma_\alpha$	0,00001	0,00002	0,00003	0,00004	0,00005
estações					
IFE-40	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006
EGA-01	-0,0045	-0,0046	0,0046	0,0046	0,0046
EGA-02	0,0071	0,0071	0,0070	0,0070	0,0069
EGA-03	0,0000	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003
EGA-04	0,0019	0,0019	0,0019	0,0019	0,0019
EGA-06	-0,0052	-0,0052	0,0053	0,0054	0,0055
EGA-07	0,0031	0,0032	0,0033	0,0034	0,0035
EGA-09	-0,0090	-0,0090	0,0091	0,0090	0,0090
EGA-10	0,0060	0,0060	0,0060	0,0060	0,0060

Tabela 6.1.5 - Resíduos dos valores de gravidade  
nas estações de controle.

Maiores resíduos das leituras e coef. de calibração ajustados						
$\sigma_t$	0,018	0,019				0,020
$\sigma_\alpha$	0,00005	0,00001	0,00002	0,00003	0,00004	0,00005
leituras	-0,0305	-0,0299	-0,0301	-0,0303	-0,0305	-0,0305
$\alpha$	12,1E-05	-0,7E-05	-2,6E-05	5,2E-05	8,2E-05	11,2E-05

Tabela 6.1.6 - Estimativas iniciais de precisão  
e maior resíduo para as observações.

Fator residual de escala: G013			
$\sigma_t$	$\sigma_\alpha$	K	$\sigma_K$
0,018	0,00005	0,998833	0,77E-04
0,019	0,00001	0,998835	0,76E-04
0,019	0,00002	0,998835	0,76E-04
0,019	0,00003	0,998834	0,77E-04
0,019	0,00004	0,998834	0,77E-04
0,019	0,00005	0,998834	0,77E-04
0,020	0,00001	0,998836	0,76E-04

Tabela 6.1.7 - Fator linear residual de escala e sua precisão,  
para o gravímetro 13.

Fator residual de escala: G061			
$\sigma_t$	$\sigma_\alpha$	K	$\sigma_K$
0,018	0,00005	1,000008	0,04E-04
0,019	0,00001	1,000006	0,04E-04
0,019	0,00002	1,000007	0,04E-04
0,019	0,00003	1,000007	0,04E-04
0,019	0,00004	1,000008	0,04E-04
0,019	0,00005	1,000008	0,04E-04
0,020	0,00001	1,000006	0,04E-04

Tabela 6.1.8 - Fator linear residual de escala e sua precisão,  
para o gravímetro 61.

Fator residual de escala: G257			
$\sigma_t$	$\sigma_\alpha$	K	$\sigma_K$
0,018	0,00005	1,000336	0,37E-04
0,019	0,00001	1,000318	0,36E-04
0,019	0,00002	1,000321	0,34E-04
0,019	0,00003	1,000328	0,34E-04
0,019	0,00004	1,000330	0,35E-04
0,019	0,00005	1,000335	0,36E-04
0,020	0,00001	1,000318	0,34E-04

Tabela 6.1.9 - Fator linear residual de escala e sua precisão,  
para o gravímetro 257.

Fator residual de escala: G602			
$\sigma_t$	$\sigma_\alpha$	K	$\sigma_K$
0,018	0,00005	1,000466	0,37E-04
0,019	0,00001	1,000472	0,35E-04
0,019	0,00002	1,000471	0,35E-04
0,019	0,00003	1,000470	0,36E-04
0,019	0,00004	1,000468	0,36E-04
0,019	0,00005	1,000467	0,37E-04
0,020	0,00001	1,000472	0,35E-04

Tabela 6.1.10 - Fator linear residual de escala e sua precisão,  
para o gravímetro 602.

Fator residual de escala: G622			
$\sigma_t$	$\sigma_\alpha$	K	$\sigma_K$
0,018	0,00005	1,000409	0,38E-04
0,019	0,00001	1,000396	0,36E-04
0,019	0,00002	1,000398	0,36E-04
0,019	0,00003	1,000401	0,37E-04
0,019	0,00004	1,000404	0,37E-04
0,019	0,00005	1,000408	0,38E-04
0,020	0,00001	1,000396	0,36E-04

Tabela 6.1.11 - Fator linear residual de escala e sua precisão, para o gravímetro 622.

Fator residual de escala: G674			
$\sigma_t$	$\sigma_\alpha$	K	$\sigma_K$
0,018	0,00005	1,000558	0,45E-04
0,019	0,00001	1,000547	0,41E-04
0,019	0,00002	1,000549	0,41E-04
0,019	0,00003	1,000552	0,42E-04
0,019	0,00004	1,000555	0,43E-04
0,019	0,00005	1,000557	0,47E-04
0,020	0,00001	1,000547	0,40E-04

Tabela 6.1.12 - Fator linear residual de escala e sua precisão, para o gravímetro 674.

As condições de contorno do ajustamento são impostas pelo domínio do modelo injuntivo. Origem e escala resultam dos valores de gravidade conhecidos (queda livre) nas estações de controle. É natural, portanto, inferir o resíduo dos valores de gravidade obtido por ajustamento, com o intervalo de precisão da gravidade para estas mesmas estações de controle. Ainda que estatisticamente sejam esperados valores de resíduos dentro do intervalo de, mais ou menos, três vezes a precisão conhecida para estas estações, é um forte indicativo da qualidade do ajustamento verificar que o resíduo do valor da gravidade é igual, ou menor, do que uma vez o desvio padrão da gravidade, nas estações de controle. É o que mostra a tabela 6.1.5.

Os sucessivos valores de gravidade obtidos para uma mesma estação, com  $0,00001 \leq |\sigma_\alpha| \leq 0,00005$ , discrepam entre si em menos do que  $\pm 5 \mu Gal$ . É um valor compatível

com a distribuição dos valores de leituras, e o modelo usado. Porém, é pequeno quando comparado com a precisão nominal do equipamento,  $\pm 10 \mu Gal$ , e parece evidenciar a estabilidade do modelo.

A acentuada variação dos resíduos para os coeficientes das funções de calibração, tabela 6.1.6, mostram a boa resolução do modelo para estes parâmetros. Os valores dos coeficientes foram obtidos com sucessivos refinamentos aos valores de  $\sigma_\alpha$ , e estão intrinsecamente ligados ao conjunto de dados processados.

A contribuição ao ajustamento que resulta do aprimoramento dos coeficientes  $\alpha$ , do ponto de vista estatístico, é apresentada na figura 5.1.3. É mostrada a convergência  $\hat{\sigma}_o^2 \rightarrow \sigma_o^2$  (eixo vertical) para diferentes valores de  $\sigma_\alpha$  (eixo horizontal).

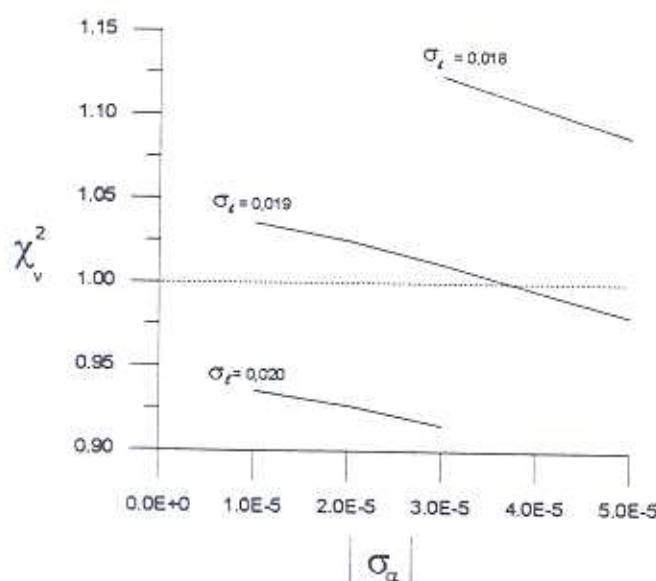


Fig. 6.1.3 - Refinamento do ajustamento advindo da flexibilização dos  $\sigma_\alpha$ .

Os valores dos fatores residuais de escala são concordantes com valores conhecidos [Escobar et al., 1996]. Mais especificamente, para o gravímetro 257, com o mesmo datum usado neste trabalho, porém, com a consistência e rigidez de toda a RGFB, foi obtido o valor para o fator:  $k = 1,000317 \pm 0,000021$  [Escobar et al., 1996].

Escolhido por ser o gravímetro de maior abrangência no conjunto dos dados, os valores agrupados na tabela 6.1.9 para os fatores de escala do G-257, mostram excelente concordância com aquele resultado.

A convergência com  $\hat{\sigma}_o^2 \cong \sigma_o^2$  foi obtida para um intervalo pequeno de estimativas

- iniciais das precisões das leituras:  $0,018 \leq \sigma_t \leq 0,020$ . Concorre para esta acentuada convergência nas sucessivas iterações, o uso de 9 estações de controle distribuídas ao longo da linha gravimétrica.

Os valores de gravidade ajustados, quando comparados aos respectivos valores estabelecidos para as mesmas estações pela RGFB [Escobar, 1996], Apêndice III, discrepam em até  $58 \mu Gal$  apenas no mais longo trecho entre estações de controle, de Sta Elena a Terezina. Este trecho contém apenas 10 % do total de estações. Nas restantes as diferenças do valor de gravidade são menores do que  $15 \mu Gal$ . Estas diferenças nos valores de gravidade, mesmo considerando as diferentes metodologias usadas, são justificadas pela escolha de uma linha gravimétrica, enquanto a RGFB conta com a rigidez de uma malha de ligações, em que o número de polígonos é da ordem de 10% do número total de estações.

Pode ser verificado nas tabelas 6.1.4 e 6.1.6, que correspondem às precisões estimadas  $\sigma_t = 0,019$  e  $\sigma_\alpha = 0,00004$ , a maior proximidade ao ponto de máximo  $\chi^2_\nu = 1$ . O relatório completo deste ajustamento encontra-se no Apêndice II.

## 6.2 Conclusões.

O método escolhido para o ajustamento, elegante e simples, é notoriamente sensível a eventuais desvios grosseiros da média, ainda que localizados e em pequeno número. As variâncias das observações ajustadas mostram, contudo, que foram adequados os procedimentos usados na eliminação dos erros grosseiros e no tratamento dos efeitos sistemáticos. A redução de todas as influências à ordem da precisão nominal dos gravímetros, ou menor, justificam a escolha do método dos mínimos quadrados.

O pré-tratamento do sinal gravimétrico simplificou, também, a formulação do modelo.

Os resultados da aplicação do modelo são concordantes, em valor de gravidade e precisão, com os conhecidos para a RGFB, da qual foram usados apenas 20% do

acervo de levantamentos. A proximidade dos resultados aos da RGFB, obtidos com tão disparem densidades de dados, parecem indicar que a inclusão dos coeficientes de calibração ao modelo, trouxe um significativo aprimoramento na abordagem deste tipo de aplicação.

A necessidade de aprimoramento dos coeficientes de calibração, quando ocorrer, estará normalmente circunscrita a uma banda gravimétrica pequena, e será colocada pela necessidade de acurácia da aplicação. Na condução, per si, do aprimoramento dos coeficientes de calibração, não podem ser avaliados separadamente, metodologia, modelo e base de dados.

Neste sentido, a qualidade dos resultados mostra a compatibilidade do modelo com a realidade física, sendo bem atendido o objetivo de permitir o aprimoramento dos coeficientes de calibração. Um conjunto mais homogêneo de dados, tanto na densificação como na geometria das ligações, traria maior significância aos valores ajustados dos coeficientes de calibração e fatores residuais de escala.

Verifica-se que o modelo proposto no presente trabalho, permite também, o refinamento dos coeficientes de calibração para frações menores, dos intervalos de 100 *mGal* apresentados pelo fabricante.

Foram utilizados gravímetros LaCoste & Romberg, modelo G, porém, a metodologia pode ser aplicada a outros gravímetros mecânicos diferenciais.

A motivação do presente trabalho foi a de contribuir para o aprimoramento da tabela de calibração de gravímetros LaCoste & Romberg, e a sua aplicação mais imediata em levantamentos gravimétricos de primeira ordem. Contudo, existem vantagens na generalidade de seu emprego, tendo em vista os reflexos positivos sobre a qualidade do ajustamento, obtidos com a flexibilização dos coeficientes de calibração.

A demanda computacional, criada pela metodologia apresentada, é bem atendida pela capacidade de processamento dos microcomputadores atuais.

## A P É N D I C E I

Tabela do fabricante LaCoste & Romberg para a conversão  
das leituras instrumentais em miligal.

Gravímetro número 257.

Valores em milligal para o gravímetro LCR nr. 257

leitura no dial	valor em milligal	fator do intervalo	leitura no dial	valor em milligal	fator do intervalo
000	000,00	1,06825	3600	3846,22	1,06970
100	106,83	1,06823	3700	3953,19	1,06948
200	213,65	1,06818	3800	4060,17	1,06983
300	320,47	1,06813	3900	4167,15	1,06987
400	427,28	1,06807	4000	4274,14	1,06991
500	537,09	1,06798	4100	4381,13	1,06997
600	640,88	1,06792	4200	4488,12	1,06005
700	747,68	1,06788	4300	4595,13	1,06016
800	854,46	1,06784	4400	4702,15	1,06026
900	961,25	1,06782	4500	4809,17	1,06033
1000	1068,03	1,06780	4600	4916,20	1,06037
1100	1174,81	1,06779	4700	5023,24	1,06041
1200	1281,59	1,06780	4800	5130,28	1,06043
1300	1388,37	1,06783	4900	5237,33	1,06044
1400	1495,15	1,06787	5000	5344,37	1,06044
1500	1601,94	1,06792	5100	5451,41	1,06043
1600	1708,73	1,06797	5200	5558,46	1,06042
1700	1815,53	1,06799	5300	5665,50	1,06039
1800	1922,33	1,06803	5400	5772,54	1,06034
1900	2029,13	1,06813	5500	5879,57	1,06027
2000	2135,94	1,06825	5600	5986,60	1,06020
2100	2242,77	1,06835	5700	6093,62	1,06012
2200	2349,60	1,06843	5800	6200,63	1,06002
2300	2456,45	1,06848	5900	6307,63	1,06992
2400	2563,29	1,06855	6000	6414,62	1,06981
2500	2670,15	1,06864	6100	6521,61	1,06966
2600	2777,01	1,06876	6200	6628,57	1,06950
2700	2883,89	1,06888	6300	6735,52	1,06931
2800	2990,78	1,06901	6400	6842,45	1,06912
2900	3097,68	1,06911	6500	6949,36	1,06891
3000	3204,59	1,06920	6600	7056,26	1,06869
3100	3311,51	1,06927	6700	7163,12	1,06845
3200	3418,44	1,06935	6800	7269,97	1,06820
3300	3525,37	1,06940	6900	7376,79	1,06795
3400	3632,31	1,06948	7000	7483,58	-,-
3500	3739,26	1,06958		-,-	-,-



## A PÊNDICE II

Relatório do ajustamento realizado com as seguintes estimativas iniciais, para as precisões das observações:

$$\sigma_\ell = 0,019$$

$$\sigma_\alpha = 0,0004$$



# RELATÓRIO DE AJUSTAMENTO

## CONJUNTO DAS OBSERVAÇÕES:

Arquivo de dados contém: 380 intervalos de gravidade.

Número de estações distintas : 118

Números de gravímetros usados: 6

grav.	menor leitura	maior leitura	interv. não rejeitados
13	2509	3301	27
61	1515	2242	217
257	1524	2962	526
602	1306	3221	373
622	1537	3264	290
674	1531	2349	121

## ESTIMATIVAS INICIAIS:

$$\sigma_\ell = 0,019$$

$$\sigma_\alpha = 0,0004$$

### RESÍDUO DAS OBSERVAÇÕES AJUSTADAS:

Maior Resíduo de Leitura = -0,030484

Menor Resíduo de Leitura = -0,000002

Maior Resíduo de  $\alpha$  = 0,00008209

Menor Resíduo de  $\alpha$  = 0,0000000256

ESTAÇÕES DE CONTROLE	
resíduos de g (mGal)	
IFE-40	0,0006
EGA-01	-0,0046
EGA-02	0,0070
EGA-03	0,0002
EGA-04	0,0019
EGA-06	-0,0054
EGA-07	0,0034
EGA-09	0,0090
EGA-10	0,0060

### VARIÂNCIA DA OBSERVAÇÃO DE PESO UNITÁRIO:

$$\text{a priori} \quad - \quad \sigma_o^2 = 1.000$$

$$\text{a posteriori} \quad - \quad \hat{\sigma}_o^2 = 0.995702$$

VALORES DE GRAVIDADE AJUSTADOS (mGal)					
estação	g	$\sigma_t$	estação	g	$\sigma_t$
250887	979342,0555	0,013	141083	979349,8183	0,013
250187	979732,4020	0,014	250287	979731,4017	0,015
250387	979527,2713	0,012	250487	979438,7044	0,015
EGA-01	978016,3384	0,010	250587	979323,8499	0,015
140583	979292,6407	0,014	250687	979596,9406	0,015
250787	979422,0162	0,015	EGA-08	979344,4458	0,013
EGA-09	979715,8460	0,009	EGA-10	979523,5320	0,009
031878	978000,1962	0,029	033378	978027,8819	0,028
081179	978022,2088	0,027	081481	978018,8490	0,028
081279	978019,3758	0,026	081079	978027,1538	0,025
091981	978019,9502	0,024	091881	978030,4218	0,023
091781	978011,1145	0,021	091681	977988,0277	0,021
091581	978012,3646	0,019	091481	978006,7958	0,017
091381	978014,3754	0,015	091080	977980,7310	0,015
091180	978017,3727	0,013	050579	978105,2959	0,019
060979	978016,8831	0,018	061079	978061,8192	0,018
061179	978153,9231	0,017	061279	978104,7757	0,015
021477	978090,3424	0,014	021577	978084,5287	0,013
021677	978088,3541	0,013	021777	978099,8139	0,016
022377	978250,7592	0,017	022677	978259,8677	0,018
022977	978264,8171	0,018	023377	978343,4885	0,019
023877	978363,0475	0,018	013476	978368,5540	0,018
013776	978415,8686	0,016	013576	978385,5335	0,018
013876	978400,1046	0,015	014076	978394,6731	0,012
010176	978789,8542	0,015	010276	978637,8931	0,012
014176	978485,0930	0,014	014276	978550,1398	0,016
014376	978549,1045	0,016	014476	978655,5708	0,016
010376	978647,4713	0,014	010476	978605,5867	0,016
010576	978619,7393	0,017	010776	978617,4018	0,017
010876	978639,7245	0,017	010976	978636,5249	0,016
011276	978613,4904	0,019	290991	977813,2237	0,014
IFE-40	977822,0846	0,010	290791	978020,7085	0,020
290891	977959,0891	0,017	290691	978007,8144	0,027

VALORES DE GRAVIDADE AJUSTADOS (mGal)					
estação	g	$\sigma_\ell$	estação	g	$\sigma_\ell$
032478	978018,9118	0,026	290491	978014,4924	0,029
290591	978028,4331	0,028	290291	978029,1960	0,030
290391	978015,8515	0,029	290191	978011,6703	0,029
160884	978037,4845	0,017	160984	978019,5292	0,016
180185	978010,5694	0,018	180285	978032,2457	0,019
180385	978012,6560	0,020	180485	978034,1741	0,020
180585	978074,0053	0,020	180685	978039,1517	0,020
180785	978083,6419	0,021	180885	978062,7977	0,020
180985	978035,7822	0,020	181085	978063,2380	0,020
EGA-02	978048,8050	0,009	EGA-03	978460,2302	0,009
EGA-04	978637,5829	0,009	EGA-05	978563,6860	0,022
121582	978652,6457	0,016	121482	978670,4155	0,015
121382	978835,7341	0,013	121282	978763,4674	0,012
EGA-06	978760,3816	0,009	130182	979015,1846	0,014
130282	979049,7906	0,015	130382	979112,4329	0,016
130582	979163,8115	0,017	130682	979146,0915	0,017
130882	979220,9722	0,018	140183	979108,2211	0,012
EGA-07	979261,6394	0,009	CAL-02	978601,0846	0,015
CAL-03	978419,5500	0,018	CAL-04	978325,5714	0,020
CAL-05	978163,0919	0,024	CAL-01	978768,7220	0,020
016080	978791,6254	0,016	131082	979276,1734	0,018
131182	979304,9637	0,018	131382	979246,8831	0,016
131482	979049,2858	0,015	131582	979042,0155	0,014
140283	979118,5490	0,014	140383	979183,5429	0,014
140483	979242,9097	0,014	140683	979290,1467	0,016
140783	979278,7850	0,014	140883	979315,7154	0,013

FATORES DE ESCALA		
gravímetro	K	$\sigma_k$
13	0,9988343	0,0000766
61	1,0000076	0,0000044
257	1,0003295	0,0000351
602	1,0004681	0,0000363
622	1,0004042	0,0000373
674	1,0005545	0,0000429

**COEFICIENTES DE CALIBRAÇÃO**

gravímetro: 13

	valores da Tabela	$\alpha$ ajustado	$\sigma_\alpha$
2500	1,04844	1,04843	0,00004
2600	1,04846	1,04847	0,00004
2700	1,04851	1,04851	0,00004
2800	1,04858	1,04857	0,00004
2900	1,04868	1,04868	0,00004
3000	1,04880	1,04880	0,00004
3100	1,04894	1,04894	0,00004
3200	1,04909	1,04909	0,00004
3300	1,04923	1,04923	0,00004

**COEFICIENTES DE CALIBRAÇÃO**

gravímetro: 61

	valores da Tabela	$\alpha$ ajustado	$\sigma_\alpha$
1500	1,03765	1,03764	0,00004
1600	1,03770	1,03772	0,00004
1700	1,03775	1,03775	0,00004
1800	1,03785	1,03786	0,00004
1900	1,03795	1,03796	0,00004
2000	1,03810	1,03813	0,00004
2100	1,03820	1,03822	0,00004
2200	1,03825	1,03826	0,00004

COEFICIENTES DE CALIBRAÇÃO			
gravímetro: 257			
valores da Tabela	$\alpha$ ajustado	$\sigma_\alpha$	
1500	1,06792	1,06793	0,00004
1600	1,06797	1,06797	0,00004
1700	1,06799	1,06800	0,00004
1800	1,06803	1,06803	0,00004
1900	1,06813	1,06815	0,00004
2000	1,06825	1,06823	0,00004
2100	1,06835	1,06837	0,00004
2200	1,06843	1,06841	0,00004
2300	1,06848	1,06840	0,00004
2400	1,06855	1,06853	0,00004
2500	1,06864	1,06866	0,00004
2600	1,06876	1,06877	0,00004
2700	1,06888	1,06888	0,00004
2800	1,06901	1,06903	0,00004
2900	1,06911	1,06913	0,00004
gravímetro: 602			
valores da Tabela	$\alpha$ ajustado	$\sigma_\alpha$	
1300	1,03667	1,03667	0,00004
1400	1,03680	1,03680	0,00004
1500	1,03692	1,03691	0,00004
1600	1,03705	1,03709	0,00004
1700	1,03720	1,03724	0,00004
1800	1,03733	1,03729	0,00003
1900	1,03747	1,03746	0,00003
2000	1,03760	1,03763	0,00004
2100	1,03775	1,03783	0,00004
2200	1,03788	1,03789	0,00004
2300	1,03803	1,03799	0,00004
2400	1,03818	1,03816	0,00004
2500	1,03833	1,03832	0,00004
2600	1,03848	1,03848	0,00004
2700	1,03862	1,03858	0,00004
2800	1,03876	1,03875	0,00004
2900	1,03885	1,03883	0,00004
3000	1,03903	1,03903	0,00004
3100	1,03916	1,03916	0,00004
3200	1,03931	1,03931	0,00004

COEFICIENTES DE CALIBRAÇÃO			
gravímetro: 622			
	valores da Tabela	$\alpha$ ajustado	$\sigma_\alpha$
1500	1,01920	1,01922	0,00004
1600	1,01929	1,01928	0,00004
1700	1,01939	1,01937	0,00004
1800	1,01950	1,01946	0,00004
1900	1,01961	1,01955	0,00004
2000	1,01972	1,01974	0,00004
2100	1,01983	1,01984	0,00004
2200	1,01994	1,01994	0,00004
2300	1,02007	1,02009	0,00004
2400	1,02020	1,02021	0,00004
2500	1,02033	1,02033	0,00004
2600	1,02046	1,02045	0,00004
2700	1,02061	1,02063	0,00004
2800	1,02076	1,02077	0,00004
2900	1,02091	1,02091	0,00004
3000	1,02106	1,02106	0,00004
3100	1,02120	1,02120	0,00004
3200	1,02133	1,02133	0,00004

COEFICIENTES DE CALIBRAÇÃO			
gravímetro: 674			
	valores da Tabela	$\alpha$ ajustado	$\sigma_\alpha$
1500	1,01207	1,01207	0,00004
1600	1,01214	1,01213	0,00004
1700	1,01222	1,01224	0,00004
1800	1,01231	1,01233	0,00004
1900	1,01240	1,01240	0,00004
2000	1,01249	1,01246	0,00004
2100	1,01257	1,01255	0,00004
2200	1,01266	1,01267	0,00004
2300	1,01276	1,01277	0,00004

## A PÊNDICE III

Este apêndice apresenta tabelas com valores e precisões de gravidade, da Rede Gravimétrica Fundamental Brasileira, para as estações comuns ao circuito trabalhado.

REDE GRAVIMÉTRICA FUNDAMENTAL BRASILEIRA			
Código	g mGal	$\sigma_g$	Localidade
290991	977813.237	.013	Paracaima
290891	978959.190	.015	Surumu
290791	978020.736	.015	Uraricuera
290691	978007.835	.023	Mucajáí
290591	978028.452	.022	Caracarai
290491	978014.512	.024	Rorainópolis
290391	978015.874	.024	Jundiá
290291	978029.215	.022	Abonari
290191	978011.688	.019	Pres. Figueiredo
031878	978000.215	.013	Manaus
081179	978022.238	.015	Belém
081079	978028.180	.017	S.Maria do Pará
091981	978019.973	.019	Capanema
091781	977011.126	.019	Nova Olinda
091681	977988.035	.019	Pindaré Mirim
091581	978012.371	.018	Bacabal
091481	978006.797	.016	Entronc. Codó
091381	978014.375	.014	Caxias
091180	978017.369	.011	Teresina
091080	977980.719	.014	Barro Duro
160984	978019.519	.015	Amarante
160884	978037.471	.016	Floriano
180185	978010.559	.017	Itaueira
180285	978032.236	.017	Canto do Buruti
180385	978012.651	.018	Eliseu Martins
180485	978034.164	.019	Bom Jesus
180585	978073.999	.019	Redenção Gurguéia
180685	978039.144	.020	Gilbués

REDE GRAVIMÉTRICA FUNDAMENTAL BRASILEIRA			
Código	g mGal	$\sigma_g$	Localidade
180785	978083.629	.019	Corrente
180885	978062.786	.019	Cristalândia Piauí
180985	978035.770	.018	Formosa do Rio Preto
181085	978063.235	.017	Riachão das Neves
050579	978105.288	.015	Barreiras
060979	978016.869	.015	RN-903 X
061079	978061.808	.015	Roda Velha
061179	978153.918	.014	Alvorada do Norte
061279	978104.774	.013	Formosa
021477	978090.342	.011	Brasília
021777	978099.810	.013	Cristalina
022377	978250.760	.014	Paracatu
022677	978259.867	.014	João Pinheiro
022977	978264.816	.013	Trevo BR-040-365
023377	978343.484	.014	Felixlândia
023877	978363.044	.014	Sete Lagoas
013476	978368.540	.013	Belo Horizonte
013776	978415.858	.014	Congonhas
013876	978400.094	.013	Lafaite
014076	978394.664	.011	Barbacena
014176	978485.086	.014	Santos Dumont
014276	978550.124	.015	Juiz de Fora
014476	978655.552	.015	Três Rios
010176	978789.849	.014	Rio de Janeiro
010276	978637.885	.011	Vassouras
010376	978647.464	.013	Barra Mansa
010476	978605.568	.014	Queluz
010576	978619.722	.015	Guaratinguetá
010776	978617.400	.016	Taubaté
010876	978639.724	.015	S. José Campos
010976	978636.524	.013	São Paulo
121582	978652.652	.014	Sorocaba
121482	978670.424	.013	Capão Bonito
121382	978835.742	.012	Ribeira
121282	978763.470	.011	Curitiba
130182	979015.192	.025	Joinville
130282	979049.797	.014	Itajaí
130382	79112.438	.015	Florianópolis
130582	979163.817	.016	Imbituba
130682	979146.095	.016	Criciuma
130882	979220.978	.016	Torres

REDE GRAVIMÉTRICA FUNDAMENTAL BRASILEIRA			
Código	g mGal	$\sigma_g$	Localidade
131082	979279.179	.015	Osório
131182	979304.964	.014	Porto Alegre
131382	979246.882	.014	Estrela
131482	979049.275	.013	Soledade
131582	979042.002	.012	Carazinho
140183	979108.206	.010	Ijuí
140283	979118.532	.013	S. Luiz Gonzaga
140383	979183.529	.013	São Borja
140483	979242.891	.013	Itaqui
140583	979292.615	.012	Uruguaiana
140783	979278.747	.012	Alegrete
140883	979315.670	.011	Rosário do Sul
141083	979349.771	.008	Sant. Livramento
250887	979342.001	.010	Rivera
250387	979527.282	.010	Paysandu
250187	979732.410	.011	Montevidéu
EGA-01	978016.337	.009	Teresina
250787	979421.971	.012	Tacuarembo
EGA-09	979715.852	.009	Toledo
081279	978019.403	.017	Belém
021677	978088.348	.010	Brasília
014376	978549.083	.015	Juiz de Fora
011276	978613.496	.014	Jundiaí
250287	979731.402	.015	Montevidéu
250487	979438.704	.015	Salto
250587	979323.834	.013	Bella Union
250687	979596.915	.012	Durazno
EGA-08	979344.387	.008	Rivera
EGA-10	979523.533	.009	Payssandu
033378	978027.924	.013	Santarém
081481	978018.880	.013	Belém
021577	978084.523	.013	Brasília
013576	978385.530	.013	Belo Horizonte
032478	978018.933	.016	Boa Vista
EGA-02	978048.801	.009	Brasília
EGA-03	978460.227	.009	Viçosa
EGA-04	978637.579	.009	Vassouras
EGA-05	978563.779	.009	Vinhedo
EGA-06	978760.384	.009	Curitiba
EGA-07	979261.625	.008	Sta Maria
016080	978791.660	.015	Rio de Janeiro
140683	979290.121	.016	Uruguaiana



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

- Angus, C. H., Brulé, B.G., "Vibration-Induced Drift in LaCoste & Romberg Geodetic Gravimeters", Journal of Geophysics Research, Vol 72, nº 8, 1967.
- De Freitas, S.R.C., "Marés Gravimétricas: Implicações para a Placa Sul-Americana". Tese de Doutorado, Dpto de Geofísica, IAG/USP, 1993.
- Dehlinger, P., "Marine Gravity". Amsterdam, Elsevies Scientific publishing Company, 1978.
- DMATC, Defense Mapping Agency Topographic Center, "General land Gravity Survey Introductions", s. 1, 1974.
- Escobar, I.P., N.C.de Sá, Dantas, J.J., Dias, F.J.S.S., "Linha de Calibração Gravimétrica Observatório Nacional-Agulhas Negras.". III Reunião Técnica da Comissão de Geofísica do IPGH, Taxco, México, 1995. Revista Brasileira de Geofísica, nº 14, 1996.
- Escobar, I.P., Resultados relativos ao ajustamento da RGFB, ainda não publicados. Comunicação Pessoal, 1996.
- Escobar, I.P., "Adjustment of the Brazilian Gravity Fundamental Network to the Absolute Stations and to the IGSN-71." Assembléia Geral da União Internacional de Geodésia e Geofísica, Boulder, EUA, 1995.
- Escobar, I.P., "Altitude: Conceituação, Realização, Modelamento Matemático e Ajustamento." Tese de Doutoramento. Instituto Astronômico e Geofísico, USP, 1991.
- Escobar, I.P., "Injunções Relativas em Ajustamento Gravimétrico." Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Paraná, 1985.

- Gemael, C., "Introdução ao ajustamento de Observações. Aplicações Geodésicas." Editora da Universidade Federal do Paraná, 1994.
- Gemael, C., Leite, O.S.H., Rosier, F.A., Torge,W., Röder, R.H. & Schnüll, M. "Large-scale absolute gravity control in Brazil", IAG Symp. n° 103, Edimburg, Scotland. IAG Symp. Proceedd., 49-55, Springer, New York, 1990.
- GSC - Geological Survey of Canada, Ottawa. Gravity Data Processing System, GRAVSY, 1988.
- LaCoste & Romberg Inc., "Instruction Manual for LaCoste & Romberg, Model G Gravity Meter", 1990.
- Longman, I.M., "Formulas for Computing the Tidal Acceleration Due to the Moon and the Sun.". Journal of Geophysical Research, Vol. 64, n° 12, 1959.
- Morelli, C., Gantar, C., Honkasalo, T., McConnell, R.K., Tanner, J.G., Szabo, B., Uotila, U. & Whalen, T., "The International Standardization Net 1971 (IGSN - 71)." Paris, Bureau Central de l'Association Internationale de Geodesie, publication speciale n°4, 1971.
- Parasnis, D. S., Principles of Applied Geophysics, London, Chapman and Hall Ltda, 1972.
- Sazhina, N., Grushinsky, N., "Gravity Prospecting". Mir Publishers, 1971.
- Shokin, P.F., "Gravimetry (apparatus and methods for measuring gravity)". Jerusalem, Israel, Program for Scientific Translation, 1963.
- Tsuboi C., "Gravity". GAL, London, 1983.
- Vanicek, P. & Krakiwsky, E.J., "Geodesy: the concepts". Amsterdam, North-Holland, 1982.
- Torge W., Timmen L.. Röder R.H..Schmill M., "The IFE Absolute Gravity Program 'South America' 1988-1991". Deutsche Geodätische Kommission № 299, München, 1994.