

**IRIS PEREIRA ESCOBAR**

**ALTITUDE:**

**Conceituação, Realização, Modelamento Matemático e Ajustamento.**

**Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação  
em Geofísica para obtenção do Grau de Doutor  
em Ciências pela Universidade de São Paulo.**

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

**1991**

**IRIS PEREIRA ESCOBAR**

**ALTITUDE:**

**Conceituação, Realização, Modelamento Matemático e Ajustamento.**

**Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação  
em Geofísica para obtenção do Grau de Doutor  
em Ciências pela Universidade de São Paulo.**

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

**1991**

**ii**

**“...d Ele, por Ele e para Ele...”**

**À Sonia, minha querida esposa  
e ao meu filho Fabio.**

## **AGRADECIMENTOS**

Desejo apresentar os meus agradecimentos aos professores **Dr.Camil Gemael** e **Dr. Denizar Blitzkow**, pela orientação deste trabalho, bem como às pessoas e instituições abaixo relacionadas que contribuíram efetivamente para a sua elaboração:

**UERJ**

**CNPq-Observatório Nacional**

**Instituto Astronômico e Geofísico/USP**

**IBGE**

**Eng. Newton Pereira dos Santos**

**Eng. Gilberto Pessanha Ribeiro**

## **RESUMO**

O problema da altitude é abordado, com vistas ao estabelecimento de uma metodologia que possa ser aplicada ao ajustamento de uma rede altimétrica. É proposto um novo modelo matemático, formulado em função dos desníveis, valores de gravidade e altitude dos pontos que compõem uma rede. O desempenho do modelo é verificado no ajustamento de uma rede altimétrica com 1248 referências de nível, interconectadas por 1259 desníveis observados e vinculadas a 7 marégrafos. O ajustamento é feito pelo método dos mínimos-quadrados, onde as altitudes de referência determinadas a partir dos marégrafos e os valores de gravidade observados não são fixados, são introduzidos através de um modelo secundário, como injunções relativas, com pesos iguais aos inversos de suas variâncias. Como resultado final obtém-se as altitudes nas referências de nível da rede, bem como as estimativas de seus desvios-padrão. O geóide, ou seja, a superfície de referência resultante, situa-se numa posição intermediária àquelas definidas pelos marégrafos.

## **ABSTRACT**

In order to establish an accurate procedure to be applied in the adjustment of a network, the problem of elevation is studied. A new mathematical model, based on gravity values, height and levelled height differences from a network, is proposed. To test performance of the model, a vertical network adjustment was executed. The chosen network section is composed of 1248 bench-marks connected by 1259 observed height differences, linked to 7 tide-gauges. The least squares method is adopted, where reference heights determined from tide-gauges and observed gravity values are introduced by means of a secondary model, as relative constraints, weighted according to the inverse of their variances. The adjusted values of the network bench marks and their estimated standard deviations are represented as the final result. The geoid, i.e., the reference surface, obtained by this procedure is located between those defined by the tide gauges.

## SUMÁRIO

	<b>Página</b>
<b>Título . . . . .</b>	<b>ii</b>
<b>Dedicatória . . . . .</b>	<b>iii</b>
<b>Agradecimentos . . . . .</b>	<b>iv</b>
<b>Resumo . . . . .</b>	<b>v</b>
<b>Abstract . . . . .</b>	<b>vi</b>
<b>Sumário . . . . .</b>	<b>vii</b>

## CAPÍTULO 1

<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>1</b>
-----------------------------	----------

## CAPÍTULO 2

### CAMPO DA GRAVIDADE TERRESTRE

<b>2.1. Gravidade . . . . .</b>	<b>4</b>
<b>2.2. Potencial da Gravidade . . . . .</b>	<b>8</b>
<b>2.2.1. Sentido Físico do Potencial da Gravidade . . . . .</b>	<b>9</b>
<b>2.3. Anomalia da Gravidade . . . . .</b>	<b>12</b>
<b>2.3.1. Anomalia de Ar Livre (“Free Air”) . . . . .</b>	<b>15</b>
<b>2.3.2. Correção do Terreno . . . . .</b>	<b>18</b>
<b>2.3.3. Anomalia Bouguer . . . . .</b>	<b>19</b>

## CAPÍTULO 3

### ALTITUDES

3.1.	Requisitos Básicos . . . . .	21
3.2.	Número Geopotencial (C) . . . . .	22
3.3.	Altitude Dinâmica ( $H^D$ ) . . . . .	24
3.4.	Altitude Ortométrica (H) . . . . .	26
3.5.	Altitude Normal ( $H^N$ ) . . . . .	30
3.6.	Comentários Gerais sobre as Altitudes . . . . .	33

## CAPÍTULO 4

### REALIZAÇÃO DE UM SISTEMA GEODÉSICO DE ALTITUDES

4.1.	Datum Vertical . . . . .	36
4.2.	Nivelamento Geométrico . . . . .	39
4.2.1.	Efeitos Sistemáticos Envolvidos . . . . .	40
4.3.	Gravimetria . . . . .	43
4.3.1.	Datum Gravimétrico . . . . .	43
4.3.2.	Determinação da Gravidade. . . . .	44
4.3.2.1.	Determinação Absoluta da Gravidade . . . . .	44
4.3.2.2.	Determinação Relativa da Gravidade . . . . .	45
4.4.	Redes Gravimétricas. . . . .	46



## **CAPÍTULO 5**

### **BASES METODOLÓGICAS DO AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES**

5.1.	Metodologia . . . . .	48
5.2.	Formulação do Modelo Matemático . . . . .	49
5.3.	Classificação dos Modelos quanto à Solução . . . . .	53
5.4.	Solução de Modelos Superabundantes por Mínimos- -Quadrados . . . . .	54
5.4.1.	Formulação do Problema . . . . .	56
5.4.2.	Solução do Problema de Mínimos-Quadrados . . . . .	58
5.4.3.	Matrizes de Covariâncias dos Resultados . . . . .	65

## **CAPÍTULO 6**

### **DESENVOLVIMENTO E SOLUÇÃO DE MODELOS PARA**

### **OBTENÇÃO DE UM SISTEMA DE ALTITUDES ORTOMÉTRICAS**

6.1.	Desenvolvimento de Modelos Matemáticos . . . . .	70
6.2.	Solução dos Modelos . . . . .	73

## **CAPÍTULO 7**

### **APLICAÇÃO DOS MODELOS MATEMÁTICOS NO AJUSTAMENTO DE UMA REDE ALTIMÉTRICA**

<b>7.1.</b>	<b>Descrição da Rede . . . . .</b>	<b>79</b>
<b>7.2.</b>	<b>Ajustamento da Rede . . . . .</b>	<b>81</b>
<b>7.2.1.</b>	<b>Ajustamento da Rede Nodal . . . . .</b>	<b>83</b>
<b>7.2.2.</b>	<b>Ajustamento das RRNN Intercaladas . . . . .</b>	<b>84</b>
	<b>CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>89</b>

<b>APÊNDICE A</b>	
<b>VALORES DE GRAVIDADE E ALTITUDES</b>	
<b>PRELIMINARES . . . . .</b>	<b>92</b>
<b>APÊNDICE B</b>	
<b>DESNÍVEIS OBSERVADOS . . . . .</b>	<b>97</b>
<b>APÊNDICE C</b>	
<b>DESNÍVEIS INTERNODAIS OBSERVADOS . . . . .</b>	<b>101</b>
<b>APÊNDICE D</b>	
<b>DESNÍVEIS INTERNODAIS AJUSTADOS . . . . .</b>	<b>104</b>
<b>APÊNDICE E</b>	
<b>DESNÍVEIS INTERCALADOS AJUSTADOS . . . . .</b>	<b>109</b>
<b>APÊNDICE F</b>	
<b>ALTITUDES AJUSTADAS. MÉTODO DOS MÍNIMOS-</b>	
<b>QUADRADOS . . . . .</b>	<b>116</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .</b>	<b>143</b>

## **CAPÍTULO 1**

### **INTRODUÇÃO.**

Tradicionalmente a atividade de posicionamento ocupa lugar de destaque na Geodésia, em grande parte devido a sua aplicação em diversas ciências. Sua importância, entretanto, transcende ao âmbito científico e faz-se sentir nas diversas áreas da atividade humana.

A descrição matemática da superfície topográfica da Terra é feita, normalmente, a partir da seleção de um conjunto finito de pontos representativos do terreno, os quais têm suas posições determinadas em um sistema de coordenadas. A realização desse sistema de coordenadas é obtida através de medições de grandezas observáveis que conectam entre si pontos previamente monumentados, de modo a se formar uma estrutura de rede.

Dependendo de como as posições dos pontos são definidas, as redes geodésicas de precisão são classificadas, tradicionalmente, em duas categorias: redes geodésicas verticais ou redes altimétricas, definidas por uma única coordenada, a “altitude acima do nível do mar” ( $H$ ) e redes geodésicas horizontais, com posições geodésicas, latitude ( $\phi$ ) e longitude ( $\lambda$ ), conhecidas. Esta separação em rede altimétrica e rede horizontal deve-se a razões de cunho eminentemente prático. Enquanto que o transporte de coordenadas horizontais é feito adequadamente usando a superfície do elipsóide de referência, é conveniente que as altitudes estejam relacionadas com o campo da gravidade da Terra, que condiciona as diversas atividades humanas, referindo-se, portanto, ao geóide, considerado como materializado pelo nível não-perturbado do mar. Além disso, as coordenadas horizontais, até o momento, não são determinadas com o mesmo grau de precisão da altitude.

Não obstante ser a coordenada geodésica conhecida com mais precisão, a altitude pode ser conceituada de variadas maneiras, de acordo com o modelo utilizado para representar o campo da gravidade da Terra. Dos diferentes tipos de altitude normalmente adotados, destaca-se a altitude ortométrica que baseia-se exclusivamente no campo da gravidade real.

Com o advento das modernas técnicas de posicionamento por satélites artificiais, mormente o “Global Positioning System” ( GPS ), a altitude ortométrica aumentou de importância. Devido a sua associação com a altura geoidal,  $N$ , afastamento entre o elipsóide e o geóide, e a altitude  $h$  acima do elipsóide, através da fórmula:

$$h \cong H + N, \quad (1.1)$$

visto que  $h$  pode ser determinada utilizando-se satélites artificiais, o conhecimento da altitude ortométrica,  $H$ , conduz ao conhecimento da altura geoidal,  $N$ , e vice-versa. Os dois membros de (1.1) não são rigorosamente iguais porque  $h$  e  $H$  não são colineares, a primeira é definida ao longo da normal ao elipsóide enquanto que a segunda sobre a vertical.

Um dos métodos atualmente utilizados para a obtenção de redes de altitudes ortométricas, baseia-se na correção dos desníveis observados, procurando transformá-los em desníveis ortométricos pela aplicação da correção do não-parallelismo das superfícies equipotenciais do campo da gravidade, indevidamente chamada por alguns de correção ortométrica, utilizada em diversos países do continente americano, inclusive no Brasil. Os desníveis corrigidos são, então, ajustados pelo método dos mínimos-quadrados, dando origem às altitudes. Entretanto, a eficácia de tal correção na consecução do objetivo a que se propõe pode ser contestada.

Outro método utilizado é a obtenção dos números geopotenciais, a partir dos desníveis e dos valores da gravidade observados nos pontos da rede. Através de ajustamento pelo método dos mínimos-quadrados, os números geopotenciais são estimados e, com base nestes, as altitudes ortométricas podem ser calculadas num segundo estágio.

O objetivo deste trabalho é, a partir do conceito de altitude e das técnicas usualmente adotadas na realização de sistemas de altitudes, apresentar o desenvolvimento de um modelo matemático que envolve, simultaneamente, as grandezas observáveis ( altitudes maregráficas, desníveis e gravidade ) e as altitudes ortométricas dos pontos da rede altimétrica. A solução do modelo conduz, dentre outras coisas, aos valores estimadores das altitudes e de suas precisões, em um único processo, sem a necessidade de determinação preliminar dos números geopotenciais (capítulo 6).

Para testar o modelo, são utilizados desníveis observados pelo IBGE e valores de gravidade observados pelo IAG/USP e CNPq/ON em uma rede de 1248 referências de nível, interconectadas por 1259 desníveis observados, situada no sul do Brasil. Como datum vertical são utilizadas as altitudes transportadas a partir das determinações em 7 marégrafos, cujos valores são introduzidos no problema através de um modelo injuntivo, secundário, que também introduz os valores de gravidade. Todas as grandezas observáveis - altitudes maregráficas, desníveis e gravidade - são ponderadas de acordo com suas precisões estimadas. O problema é resolvido pelo método dos mínimos-quadrados, dando como resultado as altitudes nas RRNN da rede, com desvios-padrão estimados entre 3 e 6 centímetros (capítulo 7).

## CAPÍTULO 2

### CAMPO DA GRAVIDADE TERRESTRE.

#### 2.1. GRAVIDADE.

As medições geodésicas, normalmente, são feitas na superfície física da Terra, ou acima dela. Os resultados dessas medições estão sujeitos, portanto, aos efeitos das forças físicas que atuam naquele espaço físico. Dentre estas forças destaca-se, notavelmente, a gravidade. Assim, os aspectos geométricos do campo da gravidade ocupam relevante posição nos estudos dos fenômenos geodésicos, mormente da altitude.

A lei da gravitação universal estabelece que todos os corpos atraem-se mutuamente com uma força cuja intensidade é proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas. Para duas massas pontuais,  $M$  e  $m$ , a lei da gravitação pode ser escrita da seguinte forma:

$$f^g = GMm/r^2 \quad (2.1)$$

onde  $f^g$  é a intensidade da força gravitacional,  $M$  e  $m$  são massas pontuais interativas, concentradas em um volume negligenciável em comparação com a distância,  $r$ , entre elas e  $G$  é um coeficiente de proporcionalidade, conhecido como constante de gravitação, cujo valor numérico no sistema CGS é de  $6,672 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ , com precisão estimada de  $0,001 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$  e, no SI, é de  $6,672 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ , adotado pela União Astronômica Internacional em 1976 (Vanicek & Krakiwsky, 1986, p.71).

Embora a atração gravitacional entre duas massas seja mútua, na prática, é usual distinguir-se dentre elas a atraída e a atrativa. Assim, se  $m$  é atraída por  $M$ , composta de várias partículas, a equação (2.1) pode ser escrita como a soma das atrações exercidas sobre  $m$  pelas

partículas de  $M$ . Quando a massa  $M$  é contínua, as massas consideradas sobre o total volume,  $v$ , do corpo são integradas, em vez de serem somadas. Então a seguinte equação vetorial pode ser escrita:

$$\mathbf{f}^g = -Gm \int_V (dM/r^2)(\mathbf{r}/r), \quad (2.2)$$

onde os vetores são representados em negrito e  $dM = \rho dv$ , sendo  $\rho$  a massa específica do corpo.

Esta equação pode ser usada para estudar a força gravitacional exercida pela Terra sobre corpos cujas dimensões possam ser consideradas negligenciáveis em comparação com a da Terra.

Além da força gravitacional, uma outra força atua sobre as massas vinculadas à Terra, como consequência de seu movimento de rotação. Se considerarmos uma rotação com velocidade angular constante  $\omega$ , com um raio de rotação  $\mathbf{p}$ , em torno de um eixo considerado fixo em relação à Terra (Fig. 2.1), essa força, chamada de *força centrífuga*, é dada por:

$$\mathbf{f}^c = \mathbf{p}\omega^2 m. \quad (2.3)$$

A resultante entre as forças gravitacional e centrífuga constitui o que é conhecido como força da gravidade, ou seja,

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^g + \mathbf{f}^c,$$

ou

$$\mathbf{f} = \left[ -G \int_V (1/r^2)(\mathbf{r}/r) dM + \mathbf{p}\omega^2 \right] m. \quad (2.4)$$

Pode-se dizer que a massa  $M$  da Terra produz um efeito físico no espaço em torno de si, comumente chamado de campo da gravidade, percebido através da força exercida sobre outra massa  $m$ , situada nessa região.

O *campo da gravidade*  $\mathbf{g}$ , normalmente chamado apenas *gravidade*, produzido pela Terra em um determinado ponto, pode ser definido como a força exercida por unidade de massa colocada naquele ponto. Então



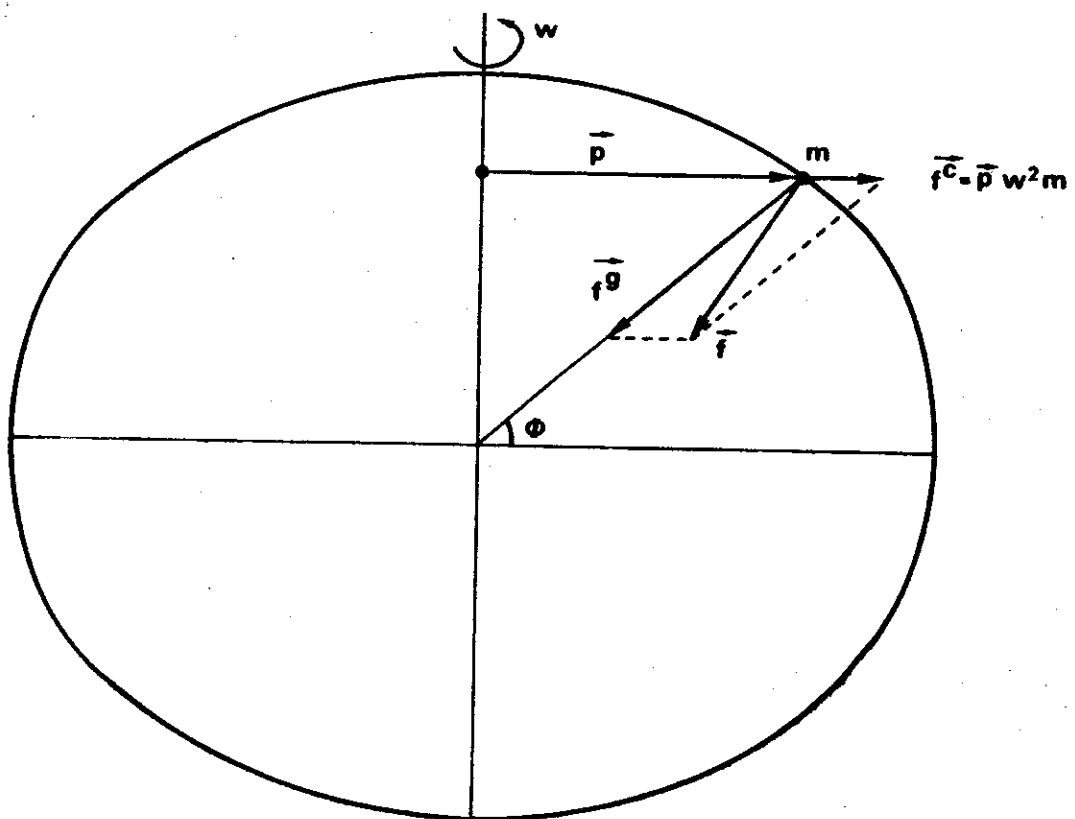


FIG. 2.1 - COMPONENTES DA FORÇA DE GRAVIDADE

$$\mathbf{g} = -G \int_V \frac{1}{r^2} (\mathbf{r}/r) dM + \mathbf{p}\omega^2, \quad (2.5)$$

cuja intensidade, negligenciando a pequena diferença de direção entre a resultante e a componente gravitacional, face à pequena intensidade da componente centrífuga, é dada por

$$g = G \int_V \frac{1}{r^2} dM - p\omega^2 \cos \phi', \quad (2.6)$$

onde  $\phi'$  é a latitude geocêntrica.

No SI a intensidade do campo da gravidade é medida em  $\text{N.kg}^{-1}$  ou  $\text{m.s}^{-2}$  e equivale dimensionalmente a uma aceleração. No sistema CGS a gravidade é medida em  $\text{cm.s}^{-2}$ , também chamada de *gal* em homenagem a Galileu. Entretanto, nas medidas gravimétricas a unidade básica adotada é o *miligal* (mGal) que é a milésima parte do gal. Assim,

$$1 \text{ gal} = 10^{-2} \text{ m.s}^{-2}$$

e

$$1 \text{ mGal} = 10^{-5} \text{ m.s}^{-2}.$$

A intensidade da gravidade na superfície da Terra varia entre aproximadamente 978 gals no equador e 983 gals nos polos, isto é, dentro de 5 gals. Considerando o valor de  $\omega = 72,92115 \times 10^{-6} \text{ rd.s}^{-1}$ , a componente centrífuga é cerca de 1/288 do valor total da força da gravidade e varia de zero nos polos a 3,4 gals no equador. Apesar de sua pequena intensidade, se comparada com a componente gravitacional, a componente centrífuga atua como a causa básica da variação da gravidade na superfície da Terra. O achatamento nas regiões polares também contribui para esse efeito, aumentando da mesma forma o valor da gravidade nos polos.

## 2.2. POTENCIAL DA GRAVIDADE.

Sabe-se que o campo da gravidade é conservativo e que, portanto, possui um correspondente potencial escalar  $W = W(x,y,z)$ , tal que

$$\mathbf{g} = \text{grad } W.$$

Esse escalar é conhecido como potencial da gravidade e pode ser definido como a energia potencial por unidade de massa colocada no campo da gravidade. O potencial da gravidade é então expresso em  $\text{J.kg}^{-1}$  ou  $\text{m}^2.\text{s}^{-2}$ .

O potencial da gravidade da Terra, também chamado *geopotencial*, pode ser escrito como a soma do potencial gravitacional  $W^g$  com o potencial centrífugo  $W^c$ . Assim,

para

$$W^g = G \int_v (1/r) dM \quad (2.7)$$

e

$$W^c = (1/2) p^2 \omega^2, \quad (2.8)$$

$$W = W^g + W^c$$

e

$$\mathbf{g} = \text{grad } (W^g + W^c) = \text{grad } W^g + \text{grad } W^c. \quad (2.9)$$

É importante observar que o potencial centrífugo age somente sobre os corpos ou partículas vinculados à Terra, incluindo a atmosfera. Assim, corpos que não giram com a Terra estão isentos do potencial centrífugo  $W^c$ , estando sujeitos apenas ao potencial gravitacional  $W^g$ , e.g., os satélites artificiais.

O incremento do geopotencial  $dW$  ao se fazer um deslocamento elementar  $ds = (dx, dy, dz)$  em uma direção arbitrária no campo da gravidade é dado por:

$$dW = (\partial W / \partial x) dx + (\partial W / \partial y) dy + (\partial W / \partial z) dz$$

ou, considerando que pela equação (2.9),

$$\mathbf{g} = (\partial W / \partial x, \partial W / \partial y, \partial W / \partial z),$$

conclui-se que

$$dW = g \cdot ds \quad (2.10)$$

donde se obtém:

$$dW = g ds \cos(g, s)$$

ou

$$dW/ds = g \cos(g, s) \quad (2.11)$$

ou, ainda,

$$dW/ds = g_s,$$

que é a componente da gravidade segundo a direção do deslocamento  $ds$ .

### 2.2.1. SENTIDO FÍSICO DO POTENCIAL DA GRAVIDADE.

A equação (2.10) mostra que o incremento do geopotencial é zero se o vetor deslocamento  $ds$  for perpendicular à direção do vetor  $g$ . Neste caso,

$$dW = 0$$

e

$$W = \text{constante} = C. \quad (2.12)$$

Esta é a equação de uma superfície em relação à qual a gravidade é sempre normal. Tal superfície é chamada de superfície de nível ou superfície equipotencial do campo da gravidade ou, simplesmente, *geope*, devido à constância do potencial nela.

Atribuindo valores diferentes à constante em (2.12) obtém-se uma família de superfícies equipotenciais que têm a propriedade de não se tocarem. Caso isso acontecesse, as duas superfícies teriam o mesmo potencial  $C$  no ponto comum e, de acordo com (2.12), isso significaria que todos os pontos de ambas as superfícies teriam o mesmo potencial  $C$ , isto é, as superfícies seriam totalmente coincidentes.

Devido à distribuição irregular de massa na Terra, os geopes possuem pequenas, porém significantes, irregularidades. Seus raios de curvatura variam irregularmente de ponto para ponto, provocando torções nas linhas de força em todas as direções. Portanto a vertical não é uma curva plana mas reversa (Vanicek & Krakiwsky, 1986, p.85).

A equação (2.11) mostra que a derivada da função potencial em relação a qualquer direção é igual à componente da força segundo essa direção. Quando uma massa pontual se desloca ao longo da linha de ação da gravidade, porém em sentido contrário, então  $\cos(\mathbf{g}, \mathbf{s}) = -1$  e

$$dH = - dW/g. \quad (2.13)$$

onde  $dH$  é o deslocamento normal à superfície equipotencial, em sentido contrário ao da gravidade, e  $H$  é chamada de altitude ortométrica. Esta equação fornece a conexão entre uma quantidade física, diferença de potencial, e uma quantidade geométrica, diferença de altitude, de geopes vizinhos.

De acordo com (2.13) a distância entre duas superfícies equipotenciais infinitamente próximas é inversamente proporcional à intensidade do campo. Pode-se, portanto, concluir que as superfícies equipotenciais estão mais próximas quanto maior for a intensidade da gravidade. Assim, os geopes estão mais próximos nos polos do que no equador.

Como o incremento  $dW$  do potencial é constante na transferência de uma superfície para outra, não dependendo da posição do ponto na mesma, também não dependerá da trajetória seguida pelo ponto em seu deslocamento; será apenas função dos pontos extremos

do percurso. Donde se conclui que o incremento do potencial  $dW$  em um circuito fechado é igual a zero.

O geope mais notável é o *geóide*, do qual faria parte a superfície dos oceanos, caso estes não estivessem sujeitos à ação das marés, ventos, correntes e outros fenômenos relacionados com a sua dinâmica. Portanto, compreende-se por *geóide* uma superfície equipotencial do campo da gravidade terrestre, coincidente com o nível imperturbado dos oceanos e que se prolonga sob os continentes de modo tal que a direção da gravidade  $l_h$  é perpendicular em todos os seus pontos. O *geóide* é uma superfície contínua e levemente ondulada, mas não é uma superfície analítica, sua curvatura varia descontinuamente com a densidade no interior da Terra (Heiskanen & Moritz, 1967, p.51). Portanto, a forma do *geóide*, como também de qualquer geope, é resultado da distribuição de massa na Terra.

Para pontos situados no exterior ou na superfície da Terra é válida a equação diferencial generalizada de Laplace:

$$\Delta W = \partial^2 W / \partial x^2 + \partial^2 W / \partial y^2 + \partial^2 W / \partial z^2 = 2\omega^2 \quad (2.14)$$

onde  $\Delta$  é o operador laplaciano.

No interior da Terra, o geopotencial  $W$  satisfaz a equação diferencial generalizada de Poisson (Dehlinger, 1978, p.25-26):

$$\Delta W = -4\pi G\rho + 2\omega^2, \quad (2.15)$$

onde  $\rho$  é a massa específica no ponto considerado. No espaço exterior ( $\rho = 0$ , negligenciando a massa específica do ar) a equação de Poisson iguala-se à de Laplace.

Em um sistema de coordenadas locais  $xyz$ , cujo eixo  $z$  é vertical e os eixos  $x$  e  $y$  são tangentes ao geope no ponto  $P$ , origem do sistema, a curvatura média  $J$  do geope em  $P$  é definida por (Heiskanen & Moritz, 1967, p.52):

$$J = -(W_{xx} + W_{yy})/2g \quad (2.16)$$

onde os subscritos denotam derivada parcial:

$$W_{xx} = \partial^2 W / \partial x^2 \quad \text{e} \quad W_{yy} = \partial^2 W / \partial y^2.$$

A equação (2.11), para  $s = z$ , permite concluir que  $\partial g / \partial z = -W_{zz}$ , já que  $\cos(g, z) = -1$ .

Combinando-se a equação diferencial generalizada de Poisson (2.15) com a (2.16), obtém-se a relação:

$$J = -(\Delta W - W_{zz}) / 2g$$

ou

$$-W_{zz} = -2gJ - \Delta W$$

que, considerando  $W_z = -g$  e  $W_{zz} = -\partial g / \partial z = -\partial g / \partial H$ , resulta:

$$\partial g / \partial H = -2gJ + 4\pi G\rho - 2\omega^2, \quad (2.17)$$

que é a relação entre a variação vertical da gravidade e a curvatura média do geope.

### 2.3. ANOMALIA DA GRAVIDADE.

A determinação da gravidade normalmente é feita na superfície física da Terra, algumas vezes subterrânea ou subaquática. Os valores observados dependem, principalmente, da localização do ponto na superfície da Terra (isto é, de suas coordenadas horizontais e altitude) e, em menor grau, da topografia circundante e da distribuição de massa no subsolo. Desse modo, tais valores não podem ser comparados entre si na forma como são obtidos. Estas irregularidades do campo da gravidade, embora significativas e facilmente observadas, são pequenas se comparadas com a magnitude da própria gravidade. Portanto, para melhor analisá-las é conveniente dividir o campo da gravidade em duas partes, uma que varia regularmente, refletindo uma forma ideal da Terra, representada por um modelo, e outra que varia irregularmente, chamada de *anomalia*.

A parte que varia regularmente corresponde ao campo da gravidade gerado por um elipsóide de revolução, com ligeiro achatamento polar, dotado de movimento de rotação em torno de seu eixo menor, coincidente com o eixo principal de inércia polar da Terra, com massa e velocidade angular iguais às desta. Esta terra fictícia, denominada *terra normal* é geradora do *campo da gravidade normal*, cuja intensidade é denotada por  $\gamma$ . O potencial da gravidade da terra normal é chamado de *esferopotencial*, normalmente representado pela letra U. A superfície equipotencial do campo da gravidade da terra normal é comumente chamada de *esferope*.

O valor de  $\gamma$  depende da distância ao centro de massa da Terra e da latitude  $\phi$ . Por ser dotado de simetria rotacional, seu valor independe da longitude. O valor da gravidade normal na superfície do elipsóide de referência é geralmente denotado por  $\gamma_0$ .

Procurando unificar mundialmente a definição de gravidade normal, a IAG adotou em 1930, em Estocolmo, a fórmula:

$$\gamma_0 = 978\,049,0(1 + 0,005\,2884 \sin^2\phi - 0,000\,0059 \sin^2 2\phi) \text{ mGal}, \quad (2.18)$$

recomendando o seu uso para todos os trabalhos gravimétricos. Esta fórmula tornou-se conhecida como "*fórmula internacional da gravidade*". Em 1967, a Assembléia Geral da IAG aprovou novos parâmetros para o elipsóide de referência, cuja gravidade normal é expressa pela fórmula:

$$\gamma_0 = 978\,031,85(1 + 0,005\,278\,895 \sin^2\phi + 0,000\,023\,462 \sin^4\phi) \text{ mGal}, \quad (2.19)$$

ou, equivalentemente,

$$\gamma_0 = 978031,85(1 + 0,005\,3024 \sin^2\phi - 0,000\,0059 \sin^2 2\phi) \text{ mGal}$$

com precisão de  $4 \mu\text{Gal}$ . A equação (2.19) foi chamada de "*fórmula internacional da gravidade 1967*". A fórmula da gravidade normal mais recentemente adotada pela IAG é a "*fórmula internacional da gravidade 1980*":

$$\gamma_0 = 978\,032,7(1 + 0,005\,279\,041\,4 \sin^2\phi + 0,000\,023\,271\,8 \sin^4\phi + 0,000\,000\,126\,2 \sin^6\phi) \text{ mGal} \quad (2.20)$$



com precisão de  $0,7 \mu\text{Gal}$ .

Tradicionalmente, a anomalia,  $\Delta g$ , é definida como a diferença entre o valor da gravidade na superfície do geóide,  $g_o$ , e o valor da gravidade normal no elipsóide,  $\gamma_o$ :

$$\Delta g = g_o - \gamma_o.$$

Esta definição de anomalia atende aos objetivos geodésicos, visto que a aplicação da integral de Stokes, utilizada na determinação da altura geoidal  $N$ , pressupõe a inexistência de massas exteriores ao geóide.

Como a gravidade é observada na superfície física da Terra, ponto A (Fig. 2.2), para a obtenção da anomalia é necessário reduzi-la para a superfície do geóide. Esta operação é conhecida como redução dos valores da gravidade. Para tanto a distância AO entre o ponto na superfície física e o geóide, como também a lei de variação do valor da gravidade real neste trajeto, devem ser conhecidas. Visto que a variação do valor da gravidade sobre AO é função da distribuição de massa no interior da Terra e, portanto, não pode ser rigorosamente conhecida, a redução da gravidade é feita com base na variação da gravidade normal, o que preserva na anomalia o efeito daquela heterogênea distribuição.

Portanto as magnitudes das anomalias dependem de:

- a) Distribuição de massa no interior da Terra, principalmente na crosta.
- b) Altura geoidal  $N$ .

Assim, a partir do conhecimento das anomalias da gravidade sobre a superfície total da Terra, a altura do geóide em relação ao elipsóide pode ser determinada ( a solução deste problema é considerada na Geodésia Física). Quando as medidas gravimétricas são utilizadas para fins geológicos, leva-se em conta a relação entre anomalias e distribuição de massa; a relação entre anomalia e altura geoidal é, então, negligenciada ou considerada na forma de pequenas correções. Como a variação na altura do geóide é pequena e gradual, o fator de

correção aplicável varia muito pouco de ponto para ponto e na prática é considerado constante em áreas não muito extensas.

Com as modernas técnicas de posicionamento por satélites, a determinação da altitude geométrica AO', em muitos casos, se tornou mais acessível do que a determinação da altitude ortométrica AO. Assim, para objetivos geofísicos é mais prático e conveniente usar a altitude geométrica, que elimina o efeito da altura geoidal N, reduzindo a gravidade observada para a superfície do elipsóide. Obviamente este procedimento não atende aos objetivos geodésicos.

Por outro lado, ao invés de utilizar a variação da gravidade normal com a altitude, para redução do valor da gravidade, poderia ser utilizada a variação da gravidade real, observada na superfície física. Este procedimento reduziria o efeito da distribuição de massa e seria conveniente para os objetivos geodésicos. Entretanto, isso não contempla os interesses geofísicos.

Assim, a definição inicial de anomalia atende, sem grandes prejuízos, aos objetivos geodésicos e geofísicos e, portanto, sempre que possível, deve ser adotada em benefício da homogeneização de sua definição.

### **2.3.1. ANOMALIA DE AR LIVRE ("FREE AIR").**

Para se obter uma anomalia deve-se reduzir o valor de g para o ponto O a uma profundidade H. Isso pode ser feito com auxílio de uma fórmula que correlaciona a variação da gravidade normal com a altitude (Vanicek & Krakiwsky, 1986, p.498):

$$\partial\gamma/\partial H = -2\gamma_0(1 + m + 2\alpha\cos^2\phi)/a, \quad (2.21)$$

que expressa o valor da variação da gravidade normal com a altitude na superfície do elipsóide de referência.

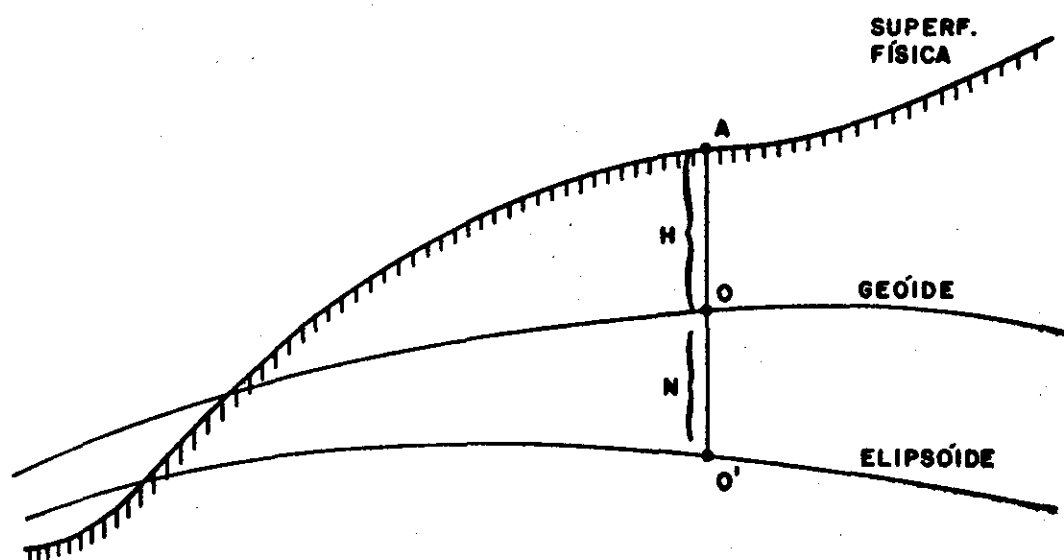


FIG. 2.2 \_ REDUÇÃO DA GRAVIDADE

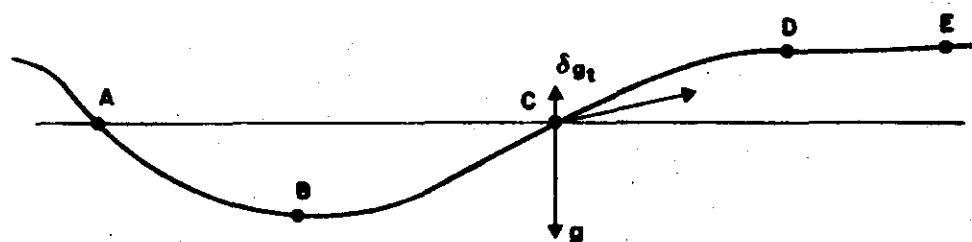


FIG. 2.3 \_ CORREÇÃO DO TERRENO

Para o elipsóide de referência de 1967, achatamento  $\alpha = 0,003\,352\,9237$ , razão entre a força centrífuga e a gravidade no equador  $m = 0,003\,449\,8014$  e  $a = 6\,378\,160\text{m}$ , o valor de  $\partial\gamma/\partial H$  para a latitude de  $45^\circ$  é:

$$\partial\gamma/\partial H = -0,30856 \text{ mGal/m.} \quad (2.22)$$

Este valor, que não diferencia muito daqueles para o equador e os polos, é normalmente utilizado para representar a chamada *redução de ar livre* (“free air”).

A fórmula para o cálculo da *anomalia de ar livre* pode, portanto, ser escrita como a diferença entre os valores da gravidade reduzida e normal, ou seja:

$$g_o = g + 0,3086H$$

e

$$\Delta g_a = g - \gamma_o + 0,3086H \quad (2.23)$$

Na redução de ar livre as massas situadas entre os níveis do ponto de observação e da superfície do geóide são ignoradas. Contudo a presença dessas massas aumenta o valor observado da gravidade  $g$ , o que aumenta o valor da anomalia. Esse efeito é particularmente percebido em montanhas onde a anomalia de ar livre para pontos localizados nos cumes é sempre maior do que para pontos nos vales. Assim, a anomalia de ar livre, além de refletir os efeitos da altura geoidal e das diferenças de massa específica nas rochas situadas abaixo do ponto de observação, reflete também o efeito das massas externas, causado pelas diferenças nas altitudes dos pontos de observação. Para compensar esta indesejável correlação positiva que a anomalia de ar livre possui com a altitude, algumas correções devem ser adicionadas.

Existem diversos tipos de reduções que representam correções adicionais, com base em diferentes suposições acerca das massas internas e externas da Terra e seus efeitos.

De modo geral a anomalia da gravidade pode ser escrita na forma:

$$\Delta g = g - \gamma_o + 0,3086H + \delta g,$$

onde  $\delta g$  é uma correção que define a natureza específica da redução.

### 2.3.2. CORREÇÃO DO TERRENO.

A *correção do terreno* considera todas as formas de relevo de modo a reduzir o valor da gravidade em um determinado ponto àquele que seria obtido se a camada de massa fosse plana e uniforme abaixo do ponto considerado.

A presença de uma massa extra CDE (Fig. 2.3) acima do ponto de observação originará uma força adicional dirigida para aquela massa. A componente vertical  $\delta g_t$  dessa força reduzirá o valor de  $g$ . A lacuna de massa na região ABC também diminuirá o valor de  $g$  em relação ao valor que seria obtido se essa região fosse completamente cheia. Portanto a correção do terreno é sempre positiva, tendendo para zero quando o terreno circunvizinho ao ponto de observação for pouco acidentado.

Ao avaliar o efeito do relevo é usual representar a área circunvizinha ao ponto de observação como prismas curvilíneos adjacentes, limitados por circunferências concêntricas no ponto e por radiais ao mesmo. O efeito de cada prisma é calculado analiticamente considerando sua espessura constante. O efeito total do relevo é obtido pela soma dos efeitos individuais dos prismas.

A atração de um prisma correspondente à  $n$ -ésima parte do anel é dada por (Sazhina & Grushinsky, 1971, p.63):

$$\delta g_t = 2\pi G\rho[(R_1^2 + \Delta H^2)^{1/2} - (R_2^2 + \Delta H^2)^{1/2} + R_2 - R_1]/n \quad (2.24)$$

onde  $R_1$  e  $R_2$  são, respectivamente, os raios interno e externo do anel e  $\Delta H$  é a altura do prisma.

Na prática, costuma-se empregar uma grade transparente que representa os prismas em planta por compartimentos em forma de trapézios curvilíneos, delimitados por circunferências concêntricas e radiais. Essa grade é superposta a um mapa topográfico de modo que seu centro

coincide com a observação em estudo. Para cada transeio curvilíneo é extraída do mapa a sua altitude

### 2.3.3. ANOMALIA BOUGUER.

A redução de Bouguer é adicionada à anomalia de ar livre de modo a corrigir o efeito da atração da camada de massa existente entre a superfície do geóide e a altitude do ponto, camada essa representada por um disco homogêneo, de raio infinito e espessura constante H igual à altitude do ponto de observação. Tal correção é dada pela equação (Groten, 1981, p.309):

$$\delta g_b = -2\pi G\rho H. \quad (2.25)$$

Substituindo  $\pi$  e G pelos seus valores e fazendo as adequadas conversões de unidades, obtém-se:

$$\delta g_b = -0,0419\rho H, \quad (2.26)$$

onde  $\delta g_b$  é dada em mGal, para  $\rho$  em g/cm<sup>3</sup> e H em metros.

Essa é a expressão da *correção de Bouguer propriamente dita*, que corrige o efeito da atração do platô de Bouguer. Tal efeito aproxima-se sensivelmente daquele produzido por uma calota de mesma espessura e raio esférico igual a 166,7 km. Para fins geofísico é suficiente considerar apenas a correção de Bouguer propriamente dita associada à correção do terreno. Para fins geodésicos, entretanto, é incluído um terceiro termo com a função de converter o platô de Bouguer na calota mencionada. Assim, a *anomalia de Bouguer* é dada pela fórmula:

$$\Delta g_b = g - \gamma_o + 0,3086H - 0,0419\rho H + C + \delta g_i. \quad (2.27)$$

Do ponto de vista da melhor representação do efeito das massas anômalas reveladas nas anomalias da gravidade, a anomalia Bouguer apresenta vantagens sobre a anomalia de ar livre, particularmente em virtude da remoção do efeito da camada de massa entre o ponto de observação e o geóide. A dependência da anomalia Bouguer em relação à altitude é muito menor do que na anomalia de ar livre, o que significa que em regiões montanhosas a primeira varia mais suavemente do que a segunda. Esta última qualidade torna a anomalia Bouguer mais indicada do que a de ar livre para interpolação de valores da gravidade. Aliás esta talvez seja a utilidade mais relevante da anomalia Bouguer para o geodesta. Na maioria das vezes ela é apenas utilizada como etapa intermediária para a obtenção de outros tipos mais completos de anomalias que consideram o efeito das massas externas ao geóide até o antípoda, e.g., anomalia isostática. Entretanto, para o objetivo deste trabalho é suficiente a conceituação da anomalia Bouguer. Os demais tipos de anomalias são analisados em seus pormenores por Gemael (1983) e não serão aqui abordados.

## CAPÍTULO 3

### ALTITUDES.

#### 3.1. REQUISITOS BÁSICOS.

O objetivo básico da *altitude* é definir o posicionamento vertical. Para tal a altitude deve preencher alguns requisitos, tais como:

- 1) deve estar ligada a um referencial terrestre suficientemente bem definido e fisicamente acessível;
- 2) deve ser univocamente definida.

Talvez o modo mais intuitivo de se definir a altitude de um ponto seja referindo-a ao campo da gravidade terrestre, considerado invariável com o tempo, descrevendo-a em termos do geopotencial  $W$  no ponto e tomando como datum o nível médio dos mares, considerando-o como materialização do geóide. De acordo com (2.11), a diferença de potencial entre duas superfícies equipotenciais próximas pode ser escrita como

$$\delta W = -g\delta l, \tag{3.1}$$

onde  $\delta l$  denota o desnível observado, através da operação de nivelamento.

Sabe-se que a diferença de potencial  $\delta W$  ao se deslocar de um ponto para outro do campo da gravidade é apenas função dos pontos extremos do percurso, independentemente do caminho usado no deslocamento. Assim, a diferença de potencial  $\delta W$  pode ser definida univocamente a partir dos desníveis  $\delta l$  e dos valores observados da gravidade  $g$ . Entretanto, o mesmo não pode ser dito dos desníveis  $\delta l$  que, devido ao não-parallelismo das superfícies de



nível, são dependentes do percurso de integração, conforme pode ser visto na Fig. 3.1. Os desniveis  $\delta l$  medidos em dois percursos distintos, a partir do geóide até o ponto P, no topo da montanha, mostram que a altitude de P, obtida pela soma dos  $\delta l$ , receberá dois valores diferentes, porque as superfícies equipotenciais estão mais espaçadas no lado direito do que no esquerdo.

### 3.2. NÚMERO GEOPOTENCIAL (C).

Pela equação (3.1) a diferença de potencial entre um ponto A na superfície da Terra e um ponto O na superfície do geóide, conectado a A por uma linha de nivelamento (Fig. 3.2), pode ser dada por:

$$-(W_A - W_O) = \int_O^A g dl = \int_O^A g' dh = C. \quad (3.2)$$

A diferença de potencial negativa  $C_A = W_O - W_A$  é conhecida como *número geopotencial* do ponto A.

O conceito de número geopotencial foi adotado pela Associação Internacional de Geodésia em 1955, tendo por unidade a chamada unidade geopotencial (u.g.p.), tal que:

$$1 \text{ u.g.p.} = 1 \text{ kGal.m} = 10 \text{ m}^2.\text{s}^{-2}.$$

$$\text{Como } g = 9,8 \text{ m.s}^{-2} = 0,98 \text{ kGal},$$

$$C = gH = 0,98H,$$

os valores dos números geopotenciais são cerca de 2% menores do que os valores das respectivas altitudes.

Por se tratar de uma diferença de potencial, o número geopotencial C possui as seguintes características:

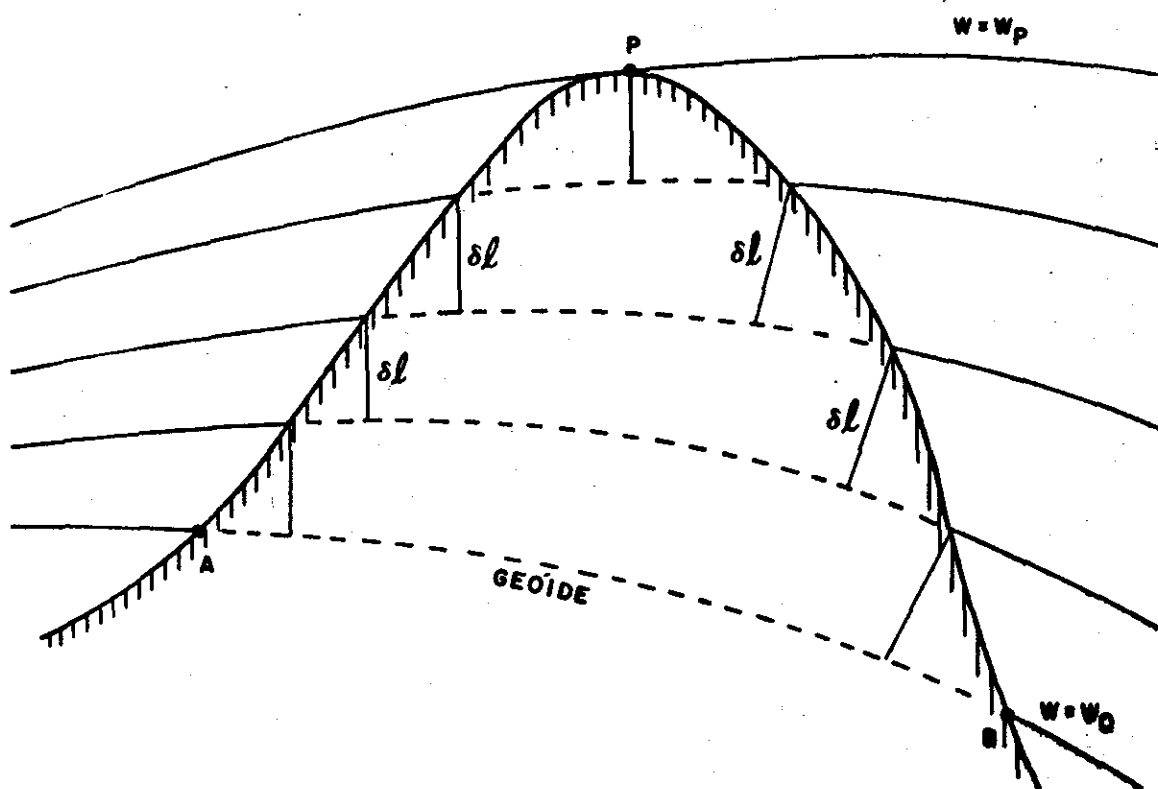


FIG. 3.1 - NIVELAMENTO

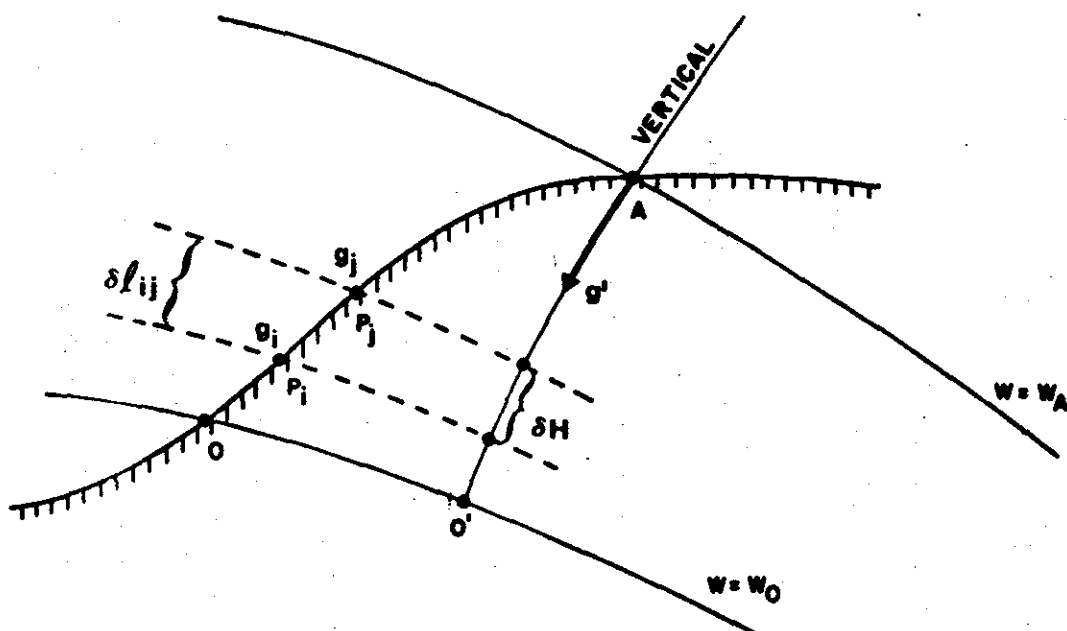


FIG. 3.2 - NÚMERO GEOPOTENCIAL

1) é univocamente definido para cada ponto, ou seja, não depende da trajetória da linha de nivelamento usada para referir o ponto ao nível do mar;

2) a integral de  $C$  em um circuito fechado é zero;

3) é igual para todos os pontos de uma mesma superfície equipotencial;

4) é positivo acima do geóide, zero no geóide e negativo abaixo dele;

5) pode ser obtido a partir de observações feitas apenas sobre a superfície física da Terra;

6) não tem dimensão de comprimento.

Na prática,  $g$  e  $l$  não são conhecidos como funções contínuas de posição. Assim, a integral na equação (3.2) não pode ser resolvida analiticamente, senão de modo discreto com o emprego de valores observados de  $g$  e  $\delta l$  ao longo de linha de nivelamento. Tem-se, portanto,

$$C = \sum_O^A g_{ij} \delta l_{ij}, \quad (3.3)$$

onde

$$g_{ij} = (g_i + g_j)/2, \quad (3.4)$$

$\delta l_{ij}$  é o desnível observado entre as estações de ordem  $i$  e  $j$  da linha  $OA$  e  $g_i$  e  $g_j$  são os valores observados da gravidade nas estações.

### 3.3. ALTITUDE DINÂMICA ( $H^D$ ).

Para evitar a inconveniência do número geopotencial não ser expresso em unidades de comprimento, surgiu o conceito de *altitude dinâmica*  $H^D$ , que é obtida pela divisão do número geopotencial por uma gravidade de referência constante  $\gamma_r$ , i.e., para um ponto  $A$ ,

$$H_A^D = C / \gamma_r, \quad (3.5)$$

onde  $\gamma_r$  é a gravidade normal para uma latitude padrão arbitrária  $\phi_r$ . Tal gravidade de referência pode ser encarada como um fator de escala, cujo único objetivo é converter a unidade do número geopotencial de potencial para comprimento. Com exceção deste pormenor, a altitude dinâmica reúne as mesmas propriedades do número geopotencial; seu significado físico é o de um potencial, ainda que obscurecido pela divisão por  $\gamma_r$ . Além disso, embora possuindo dimensão de comprimento,  $H^D$  não possui qualquer significado geométrico.

Uma diferença de altitude dinâmica pode ser decomposta em duas partes: uma principal, correspondente ao desnível observado, e uma correção, chamada de *correção dinâmica* CD, adicionada àquela, cuja expressão pode ser obtida a partir da equação (3.5). Assim, para uma linha de nivelamento que parte do ponto A para o ponto B,

$$H_B^D - H_A^D = (C_B - C_A) / \gamma_r = (1/\gamma_r) \int_A^B g \, dl. \quad (3.6)$$

Somando e subtraindo  $\gamma_r$  à integral precedente, obtém-se:

$$\Delta H_{AB}^D = (1/\gamma_r) \int_A^B (g - \gamma_r + \gamma_r) dl = \int_A^B dl + (1/\gamma_r) \int_A^B (g - \gamma_r) dl, \quad (3.7)$$

onde a primeira integral representa o desnível observado  $\Delta l_{AB}$  entre A e B e a segunda a correção dinâmica:

$$CD_{AB} = (1/\gamma_r) \int_A^B (g - \gamma_r) dl = (1/\gamma_r) \sum_A^B (g_{ij} - \gamma_r) \delta l_{ij}. \quad (3.8)$$

Consequentemente a diferença de altitude dinâmica é dada por:

$$\Delta H_{AB}^D = \Delta l_{AB} + CD_{AB}. \quad (3.9)$$

Não obstante a altitude dinâmica apresentar a conveniência de ser igual para uma mesma superfície equipotencial (pontos Pi, Fig. 3.3), o que corresponde à intuição de que a altitude não se altera com um deslocamento horizontal, a correção dinâmica pode atingir valores elevados, em função da variação de  $g$  do equador (cerca de 978 gals) para os polos (cerca de

983 gals). No equador, tomando para gravidade de referência o seu valor médio,  $\gamma_r = 980,5$  gals, para um desnível de 1000 metros a equação (3.8) dá a correção dinâmica de aproximadamente

$$CD = (978 - 980,5) \times 1000 / 980,5 = -2,5 \text{ metros.}$$

Por isso, a altitude dinâmica não se firmou na prática geodésica.

### 3.4. ALTITUDE ORTOMÉTRICA (H).

Considerando a natureza geométrica das coordenadas horizontais (latitude e longitude), talvez seja mais conveniente uma coordenada vertical de mesma natureza.

A *altitude ortométrica* H de um ponto é definida como a distância linear do geóide ao ponto, medida ao longo da vertical que passa pelo ponto (Fig. 3.4).

Para um ponto A, na superfície física da Terra, a equação (2.13) permite escrever

$$H_A = -\int_O^A dW/g = \int_O^A dC/g, \quad (3.10)$$

onde a integral é calculada sobre a vertical.

Da equação (3.2) resulta que

$$C_A = \int_{O'}^A g' dH = H \cdot (1/H) \int_{O'}^A g' dH$$

ou

$$C = g^m H, \quad (3.11)$$

onde

$$g^m = (1/H) \int_{O'}^A g' dH \quad (3.12)$$

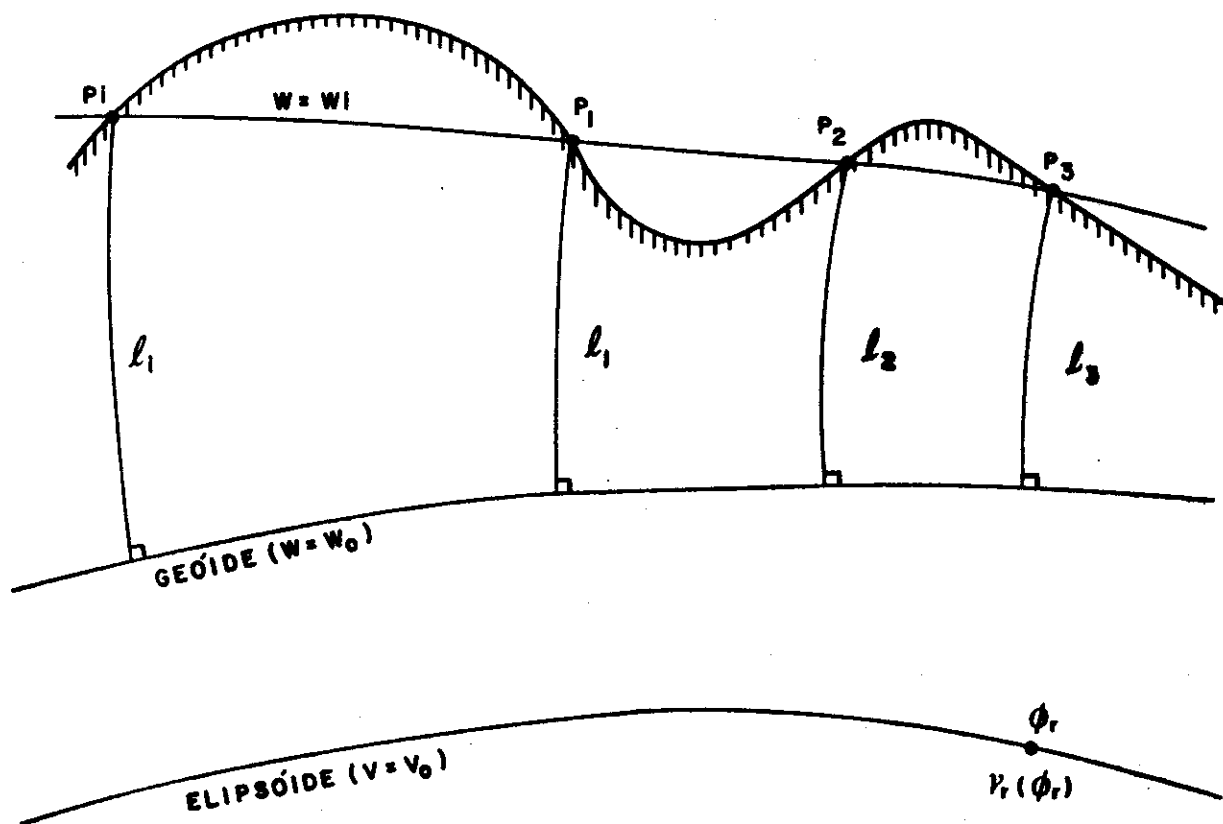


FIG. 3.3 - ALTITUDE DINÂMICA

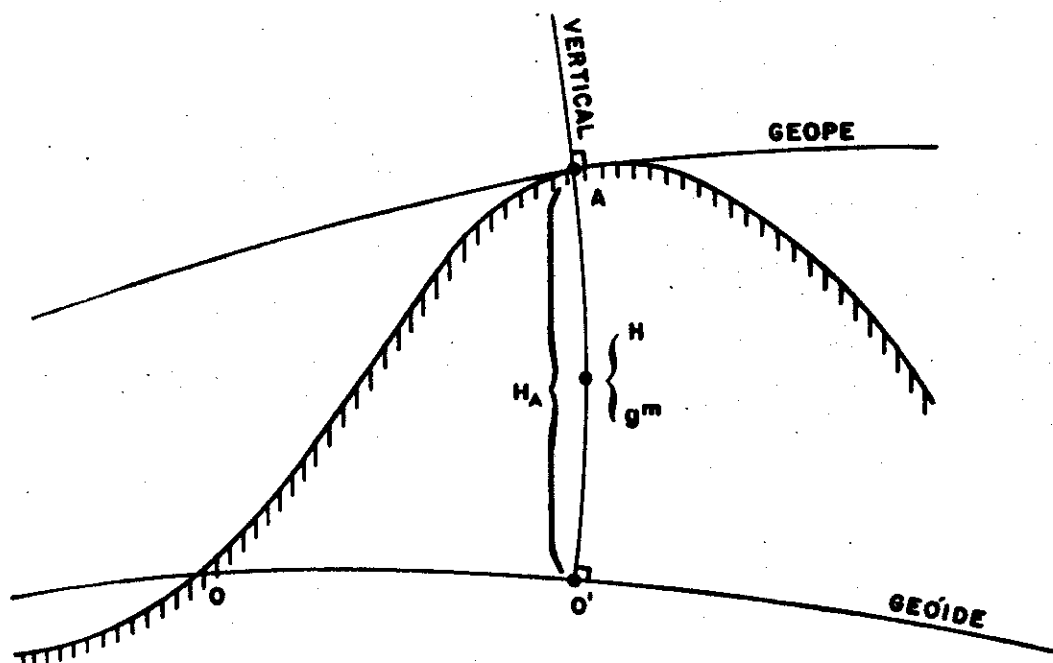


FIG. 3.4 - ALTITUDE ORTOMÉTRICA

é o valor médio da gravidade ao longo da vertical entre o ponto O' no geóide e o ponto A na superfície física.

Então, a altitude ortométrica H pode ser obtida da equação (3.11), uma vez conhecido o valor de  $g^m$ ,

$$H = C/g^m. \quad (3.13)$$

A equação (3.12) pode ser escrita como:

$$g^m = (1/H) \int_{O'}^A g(z) dz, \quad (3.14)$$

onde  $g(z)$  é a gravidade real medida sobre a vertical de A a uma altitude z. Para a obtenção de  $g(z)$  pode-se considerar que

$$g(z) = g - \int_z^H (\partial g / \partial H) dH, \quad (3.15)$$

onde g é a gravidade observada no ponto A e  $\partial g / \partial H$  é a variação da gravidade com a altitude no interior da Terra, dada pela equação (2.17),

$$\partial g / \partial H = -2gJ + 4\pi G\rho - 2\omega^2, \quad (3.16)$$

que aplicada ao campo da gravidade normal com  $\rho = 0$ , conduz a

$$\partial \gamma / \partial n = -2\gamma J_o - 2\omega^2, \quad (3.17)$$

onde n é a normal ao elipsóide e  $J_o$  é a curvatura média da superfície equipotencial do campo da gravidade normal. Considerando com suficiente aproximação  $gJ = \gamma J_o$ , tem-se, a partir de (3.16) e (3.17):

$$\partial g / \partial H = \partial \gamma / \partial n + 4\pi G\rho. \quad (3.18)$$

ou, considerando a (2.22),  $\rho = 2,67 \text{ g/cm}^3$  e  $G = 66,7 \times 10^{-9}$  unidades c.g.s.

$$\partial g / \partial H = -0,3086 + 0,2238 = -0,0848 \text{ mGal/m} \quad (3.19)$$

Aplicando este valor na equação (3.15), resulta que

$$g(z) = g + 0,0848(H-z)$$

que substituída em (3.14), fornece

$$g^m = g + 0,0424 H. \quad (3.20)$$

A associação da (3.20) à (3.13), conduz a:

$$H = C/(g + 0,0424 H), \quad (3.21)$$

que é conhecida como altitude de Helmert, obtida a partir da hipótese simplificativa de que a massa da Terra externa ao geóide é de espessura constante, homogênea e de massa específica  $\rho$  igual a  $2,67 \text{ g/cm}^3$ .

Analogamente à altitude dinâmica, o cálculo da altitude ortométrica, normalmente, é feito corrigindo-se o desnível observado pela aplicação da chamada *correção ortométrica* CO (Heiskanen & Moritz, 1967, p.168). Assim, para uma linha de nivelamento entre dois pontos A e B,

$$CO_{AB} = \{ [\sum_B^A (g_{ij} - \gamma_r) \delta l_{ij}] + (g_A^m - \gamma_r) H_B - (g_B^m - \gamma_r) H_A \} / \gamma_r, \quad (3.22)$$

ou

$$CO_{AB} = CD_{AB} + [(g_A^m - \gamma_r) H_B - (g_B^m - \gamma_r) H_A] / \gamma_r \quad (3.23)$$

onde  $g_A^m$  e  $g_B^m$  são, respectivamente, os valores médios da gravidade ao longo das verticais de A e B, dados pela equação (3.20), e  $\gamma_r$  é um valor constante arbitrário, e.g., a gravidade normal para a latitude de  $45^\circ$ . A correção ortométrica é normalmente pequena – 15 cm para 1 km de desnível em circunstâncias bem desfavoráveis – (Heiskanen & Moritz, 1967, p.172).

Pode-se demonstrar a univocidade da altitude ortométrica a partir da equação (3.23). Assim,



$$\int_0^{2\pi} dH = \Delta H_{AB} + \Delta H_{BA} = \Delta l_{AB} + CO_{BA} + \Delta l_{BA} + CO_{AB}$$

ou

$$\int_0^{2\pi} dH = \Delta l_{AB} + CO_{AB} + \Delta l_{BA} + CO_{BA},$$

já que os outros quatro termos cancelam-se. Portanto,

$$\int_0^{2\pi} dH = \int_0^{2\pi} dH^D$$

e, como a variação da altitude dinâmica é nula em um circuito fechado, a variação da altitude ortométrica também o é. Assim,

$$\int_0^{2\pi} dH = 0. \quad (3.24)$$

O principal inconveniente da altitude ortométrica reside no fato de que  $g^m$  não pode ser medido. Seu cálculo baseado em hipóteses simplificativas, tais como na altitude de Helmert, dá margem ao surgimento de tantos tipos de altitudes ortométricas quantos forem os valores de  $g^m$  selecionados. Além disso, exceto para o geóide, pontos situados na mesma superfície equipotencial geralmente não têm a mesma altitude ortométrica, ou seja, a altitude ortométrica da superfície imperturbada de um lago normalmente não é constante.

Não obstante estas imperfeições, a altitude ortométrica possui significados físico e geométrico muito claros (altitude acima do geóide ou, mais precisamente, do nível médio do mar), além de reunir as principais propriedades enumeradas para o número geopotencial, com a vantagem de possuir dimensão de comprimento.

### 3.5. ALTITUDE NORMAL ( $H^N$ ).

A dificuldade na determinação de  $g^m$  levou Molodensky a estabelecer o conceito de *altitude normal*  $H^N$ :

$$H^N = C/\gamma^m, \quad (3.25)$$

onde

$$\gamma^m = (1/H^N) \int_0^{H^N} \gamma dH^N \quad (3.26)$$

é a gravidade normal média entre o elipsóide e o ponto de altitude normal  $H^N$ .

Para compreender o significado da altitude normal, observe-se o ponto A na superfície da Terra (Fig. 3.5), situado no geope  $W = W(A)$ . Sobre a normal ao elipsóide  $U = U_0$  toma-se um ponto  $A_1$  cujo esferopotencial  $U = U(A_1)$  é igual a  $W(A)$ . A distância  $A_0 A_1$ , medida ao longo da normal, define a altitude normal do ponto A.

Se analogamente fossem definidos pontos  $P_1$  correspondentes a todos os pontos P da superfície física da Terra, tais pontos situar-se-iam em uma superfície que Hirvonen denominou “teluróide”.

A distância  $AA_1$  entre a superfície física e o teluróide é chamada de *anomalia de altitude*, comumente denotada por  $\zeta$ .

Como a superfície do elipsóide não é materializável, Molodensky definiu uma superfície auxiliar à qual denominou “quase-geóide” que é o lugar geométrico dos pontos que se situam  $\zeta$  da superfície do elipsóide. Desse modo a altitude normal pode ser entendida como a distância entre o ponto na superfície física e o quase-geóide, medida ao longo da normal.

O valor de  $\gamma^m$  pode ser obtido com precisão a partir da variação da gravidade normal com a altitude (Gemael, 1983; Heiskanen & Moritz, 1967):

$$\gamma^m = \gamma_0 [1 - (1 + \alpha + m - 2\alpha \sin^2 \phi) H^N/a + H^N/a^2], \quad (3.27)$$

que substituindo em (3.25) e desenvolvendo em série de potências de  $H^N$ , fornece:

$$H^N = [1 + (1 + m + \alpha \cos^2 \phi) C/\alpha \gamma_0 + (C/\alpha \gamma_0)^2] C/\gamma_0, \quad (3.28)$$

expandindo  $H^N$  em potências de  $C/\gamma_0$ .

Analogamente às correções dinâmica e ortométrica, a correção normal CN é dada por:

$$CN_{AB} = \{[\Sigma_A^B (g_i - \gamma_r) \delta l_i] + (\gamma_A^m - \gamma_r) H_A^N - (\gamma_B^m - \gamma_r) H_B^N\} / \gamma_r \quad (3.29)$$

ou

$$CN_{AB} = CD_{AB} + [(\gamma_A^m - \gamma_r) H_A^N - (\gamma_B^m - \gamma_r) H_B^N] / \gamma_r \quad (3.30)$$

tal que

$$\Delta H_{AB}^N = H_B^N - H_A^N = \Delta l_{AB} + CN_{AB} \quad (3.31)$$

De modo análogo àquele utilizado para o caso da altitude ortométrica, pode-se demonstrar que a variação da altitude normal é nula em um circuito fechado e, portanto, pode ser definida univocamente para qualquer ponto.

Da definição de quase-geóide decorrem duas propriedades importantes:

1) O quase-geóide não é uma superfície equipotencial. Como o próprio teluróide, a partir do qual ele é determinado, não é uma superfície equipotencial, o quase-geóide também não o é.

2) Na superfície média dos mares e oceanos o quase-geóide coincide com o geóide. Naqueles lugares, o número geopotencial e, conseqüentemente, a altitude normal são nulos. Portanto, as altitudes dos pontos situados na superfície dos mares, medida a partir do elipsóide, será igual à anomalia de altitude  $\zeta$ , ou seja, o geóide corresponde ao quase-geóide.

### 3.6. COMENTÁRIOS GERAIS SOBRE AS ALTITUDES.

Os significados físico e geométrico da altitude normal são menos óbvios do que os da altitude ortométrica, que é mais intuitiva, visto estar totalmente referida ao campo da gravidade

real. Entretanto, a altitude normal pode ser rigorosamente definida, não dependendo de hipótese simplificativa, embora seja dependente do elipsóide de referência. A magnitude da correção normal é a mesma da correção ortométrica e, como a altitude ortométrica, a altitude normal não é igual para os pontos de uma mesma superfície equipotencial.

Analizando com atenção a equação (3.25), a altitude normal é nula para qualquer ponto sobre o geóide, já que ela é definida em função do número geopotencial. Assim, rigorosamente falando, a superfície de referência para a altitude normal é, na verdade, o geóide, do qual o quase-geóide é uma aproximação, que decorre da utilização da gravidade normal em lugar da gravidade real. Desse modo, a altitude normal pode ser encarada como um tipo de altitude ortométrica especial. É importante, ainda, ressaltar que com o avanço da geodésia celeste, usando dinâmica de satélites, atualmente é mais simples determinar o geóide, que é uma superfície equipotencial do campo da gravidade terrestre, do que o quase-geóide.

No início do século, a pouca disponibilidade de observações gravimétricas na superfície da Terra e, conseqüentemente, a dificuldade de se obter o número geopotencial, levou Bowie e Avers a desenvolverem uma expressão para correção altimétrica com base na gravidade normal, em vez da observada, dada pela equação (Vanicek et al, 1980):

$$CH = -2H \Delta\phi \alpha \sin 2\phi [1 + (\alpha - 2\beta/\alpha) \cos 2\phi] \quad (3.32)$$

onde H é a altitude média dos dois pontos extremos do desnível,  $\phi$  é a latitude média,  $\alpha = 0,002644$  e  $\beta = 0,000007$  são coeficientes da fórmula da gravidade normal adotada pelo “U.S. Coast and Geodetic Survey (USCGS)”:

$$\gamma_o = \gamma_{45} (1 - \alpha \cos 2\phi + \beta \cos^2 2\phi). \quad (3.33)$$

Tal correção, utilizada nos Estados Unidos e em muitos países da América Latina, inclusive no Brasil, pretendendo ser uma aproximação da correção ortométrica, é com frequência indevidamente confundida com aquela. Todavia, sua dedução considera o não-paralelismo das superfícies equipotenciais, com base no campo da gravidade normal (Bomford, 1977, p.229), o que torna as altitudes, calculadas com sua aplicação, dependentes do

itinerário percorrido no nivelamento. Por outro lado, nenhum significado geométrico ou físico pode ser atribuído a estas altitudes. Assim, a correção altimétrica do USCGS, embora ainda esteja em uso em alguns países, não atende, rigorosamente falando, os pré-requisitos de altitude.

## **CAPÍTULO 4**

### **REALIZAÇÃO DE UM SISTEMA GEODÉSICO DE ALTITUDES**

A realização de um sistema geodésico de altitudes compreende essencialmente três atividades operacionais: definição e materialização do datum vertical, nivelamento geométrico e gravimetria. Neste capítulo serão abordados os principais aspectos destas três etapas.

#### **4.1. DATUM VERTICAL.**

Como já foi visto anteriormente, o datum utilizado para definição das altitudes é o geóide. A materialização do geóide pode ser feita na costa oceânica através do registro das variações do nível do mar usando marégrafos, estabelecidos em pontos adequados. O nível médio obtido após grandes intervalos de tempo ( $\geq 1$  ano) é considerado como uma aproximação do geóide.

O valor médio, contudo, devido às influências sistemáticas presentes nos registros maregráficos, como consequência da dinâmica do oceano, não é rigorosamente coincidente com o geóide. O afastamento entre o nível médio do mar e o geóide é chamado de *topografia da superfície do mar* (Fig. 4.1) e pode atingir valores iguais ou superiores a 1 metro (Torge, 1980, p.47).

Dentre as influências sistemáticas que afetam o nível do mar podem ser destacadas as seguintes: marés oceânicas, variações na pressão atmosférica, alterações nas correntes oceânicas, variações nos ventos, mudanças na massa específica da água – em função da temperatura, salinidade e pressão –, flutuações nas descargas dos rios, alterações na configuração batimétrica e fusão glacial, entre outras.

As variações periódicas do nível do mar são, em sua maior parte, eliminadas pela adoção do nível médio. Todavia, influências não-periódicas, tais como algumas componentes da maré e efeitos oceanográficos e meteorológicos aproximadamente constantes, afetam o valor médio. Embora a precisão interna da média anual dos valores das observações do nível do mar seja da ordem de 1 cm, podem ocorrer desvios ocasionais da ordem de 10 cm, ou maiores, entre médias anuais, em função dos efeitos geradores da topografia da superfície do mar.

Com o propósito de corrigir o efeito de tal topografia na determinação do datum vertical, têm sido desenvolvidos alguns métodos, tais como: *nivelamento "estérico"* ("steric leveling"), *estudo de circulação global* (Forrester, 1980) e *altimetria por satélite* (Marsh & Martin, 1982). Entretanto, com base no conhecimento atual do comportamento do oceano, a correção da topografia da superfície do mar ainda não pode ser feita de modo eficaz. Na melhor das hipóteses os métodos propostos permitem a determinação do afastamento instantâneo entre o nível do mar e o geóide. A topografia "permanente" ou "quase-estacionária", só poderia ser obtida após a repetição das observações e cálculos durante um período relativamente longo.

Outros fenômenos, tais como: deslocamentos tectônicos de massas, redistribuição sazonal da massa atmosférica e águas subterrâneas e suas implicações nas variações do geóide, têm sido objeto de estudos (Larden, 1980). Todavia o estágio atual de desenvolvimento desses estudos ainda não permitem o estabelecimento de modelos que permitam expressá-los matematicamente com precisão desejável à sua aplicação no problema das altitudes.

Assim, não obstante a fácil definição do geóide, superfície equipotencial do campo da gravidade, atualmente o acesso físico a esta superfície só pode ser conseguido a menos da topografia da superfície do mar, o que tem gerado diferenças de datum entre redes verticais de países distintos, que podem atingir valores da ordem de 1 metro (Rapp, 1980).

## 4.2. NIVELAMENTO GEOMÉTRICO.

As redes geodésicas verticais são determinadas pelo método de nivelamento geométrico de precisão ou alta precisão, projetados de modo que os itinerários formem *circuitos* fechados, com perímetros de 400 km ou menos, conectados aos marégrafos. Os circuitos são compostos por *linhas de nivelamento*, de comprimento máximo de 100 km, que ligam os pontos nodais da rede. As linhas, por sua vez, são formadas por *seções* de 3 km ou menos, que conectam estações adjacentes. Uma estação da rede vertical é denominada de *referência de nível* (RN) e geralmente é materializada no terreno por uma placa cravada em construção, rocha ou marcos de concreto, ao longo das principais rodovias.

Os instrumentos utilizados no nivelamento geométrico são o *nível* e a *mira*. O nível consiste basicamente de um telescópio adequado, capaz de girar em torno de seu eixo vertical. A linha de visada é posicionada horizontalmente com auxílio de um nível de bolha em conjunção com um parafuso calante ou automaticamente por um compensador. A mira tem uma fita de invar com graduação simples ou dupla, cujos erros geralmente são menores do que 0,02 mm; quando calibradas o comprimento entre duas divisões consecutivas é determinado com erro inferior a 0,01 mm.

O desnível  $\delta l$ , entre dois pontos vizinhos, ocupados por um par de miras ou a mesma mira posicionada sucessivamente em cada lado do nível (Fig. 4.2), é determinado pela diferença entre a leitura na mira de ré menos a leitura na mira de vante. De modo a reduzir os efeitos sistemáticos nos desníveis observados, são adotados cuidados operacionais, tais como o levantamento em perfil duplo (ida e volta) e o posicionamento equidistante da(s) mira(s) em relação ao nível. O desnível  $\Delta l$  entre dois pontos A e B consiste do somatório dos  $n$  desníveis parciais  $\delta l$  medidos entre aqueles pontos, ou seja:

$$\Delta l_{AB} = \sum_{i=1}^n \delta l_i \quad (4.1)$$



#### 4.2.1. EFEITOS SISTEMÁTICOS ENVOLVIDOS.

Dentre os efeitos sistemáticos que afetam o nivelamento geométrico podem ser destacados os seguintes:

- *Refração atmosférica.* É o efeito de curvatura da linha de visada em consequência das variações na massa específica da atmosfera, causadas basicamente pela mudança de temperatura do ar. De todos os efeitos é, provavelmente, o que exige mais cuidados (restrições no comprimento das visadas e na leitura mínima na mira mais alta, equidistância da(s) mira(s) em relação ao nível).

- *Colimação imperfeita do nível.* É o efeito da defasagem angular entre a linha de visada e a horizontal, devido a uma imperfeição sistemática no processo de materialização da horizontalidade da linha de visada.

- *Verticalidade imperfeita da mira.* É o efeito da falta de alinhamento da mira com a direção do vetor gravidade em cada estação.

- *Calibração imperfeita da mira.* Trata-se do efeito devido à falta de exatidão nas graduações da mira.

- *Maré terrestre.* É o efeito da deflexão da vertical, causado pela componente horizontal do campo de maré gerado pela interação gravitacional entre a Terra e outros corpos celestes, principalmente a Lua e o Sol.

A descrição pormenorizada dos efeitos sistemáticos envolvidos no nivelamento geométrico, bem como dos procedimentos operacionais usuais, pode ser encontrada em contribuições especializadas (D'Alge, 1986; Bomford, 1977). Contudo é importante enfatizar dentre os efeitos citados aqueles que não podem ser compensados ou evitados apenas por cuidados operacionais de campo, como os efeitos de calibração imperfeita da mira e de maré terrestre, que normalmente são negligenciados nos trabalhos de nivelamento. D'Alge (1986)

apresenta uma descrição minuciosa dos efeitos sistemáticos relacionados com a falta de calibração adequada da mira. O efeito da maré terrestre merecerá aqui uma análise especial.

A componente horizontal do campo de maré luni-solar provoca um leve desvio na direção da gravidade, ocasionando inclinação na linha de visada. Este efeito é dependente do instante da observação e do azimute da linha de visada, sendo mais acentuado para linhas orientadas na direção norte-sul e menos na direção leste-oeste. Bomford (1977) apresenta a seguinte fórmula para o efeito médio da maré lunar, para o semi-período orbital da Lua de 14 dias, em uma linha norte-sul:

$$e_L = 0,042 \sin 2\phi (3 \cos \delta - 2) \text{ mm/km}, \quad (4.2)$$

onde  $\delta$  é a declinação da Lua e  $\phi$  é a latitude média do lance. Quando a declinação da Lua for máxima ( $\delta \cong 28^\circ$ )  $e_L$  será mínimo e igual a  $0,027 \sin 2\phi$  mm/km. Para  $\delta = 0^\circ$   $e_L$  será máximo e igual a  $0,042 \sin 2\phi$  mm/km.

Tomando para  $e_L$  o seu valor médio, ou seja,  $0,035 \sin 2\phi$  mm/km, que transformado em mm/rd dá  $223 \sin 2\phi$  mm/rd, tem-se para o efeito total da maré lunar em uma linha norte-sul que percorra o Território Nacional do equador até a latitude de  $-30^\circ$ :

$$E_L = 223 \int_0^{\pi/6} \sin 2\phi d\phi \text{ mm}$$

ou

$$E_L = -111 \cos 2\phi \Big|_0^{\pi/6} \text{ mm} = 55,5 \text{ mm}.$$

O efeito médio da maré solar  $E_S$  na mesma linha é cerca da metade do obtido para a Lua com o mesmo sinal, ou seja,

$$E_S \cong 27,7 \text{ mm},$$

resultando para o efeito médio da maré luni-solar  $E_T$ , em uma linha norte-sul, na faixa de latitude de  $0^\circ$  a  $-30^\circ$ :

$$E_T = 55,5 + 27,7 = 83,2 \text{ mm},$$

que é de mesma ordem de grandeza que a estimativa do erro accidental esperado em uma linha de nivelamento geométrico de alta precisão ( $2\text{mm}\sqrt{k}$ , onde  $k$  é o comprimento da linha em km). Como o efeito de maré, por ser sistemático, é cumulativo, sua correção torna-se essencial para redes verticais que abrangem grandes extensões na direção norte-sul. Tal correção é denominada *correção astronômica*, CA, e pode ser expressa por (Balazs & Young, 1982):

$$CA = 0,7.S[\text{tg}\eta_L.\cos(A_L - A) + \text{tg}\eta_S.\cos(A_S - A)] \quad (4.3)$$

para

$$\eta_L = [3GM_L r.\text{sen}2z_L / 2d_L^3 + 3GM_L r^2(5\cos^2z_L - 1)\text{sen}z_L / 2d_L^4] / g$$

e

$$\eta_S = (3GM_S r.\text{sen}2z_S / 2d_S^3) / g ,$$

onde,  $S$  é o comprimento da seção,  $\eta_L$  e  $\eta_S$  são respectivamente as deflexões da vertical causadas pela componente horizontal da maré lunar e solar,  $A_L$  e  $A_S$  são respectivamente os azimutes da Lua e do Sol,  $A$  é o azimute da seção,  $G$  é a constante de gravitação,  $M_L$  e  $M_S$  são respectivamente as massas da Lua e do Sol,  $z_L$  e  $z_S$  são as distâncias zenitais da Lua e do Sol,  $d_L$  e  $d_S$  são as distâncias Terra-Lua e Terra-Sol,  $r$  é a distância entre o ponto na superfície terrestre e o centro da Terra e  $g_m$  é o valor médio da gravidade na seção.

### 4.3. GRAVIMETRIA.

A realização de um sistema geodésico de altitudes necessita do conhecimento dos valores da gravidade nas RRNN que compõem a rede altimétrica. Tais valores são essenciais para a obtenção dos números geopotenciais, que são a base de qualquer sistema de altitudes. As operações gravimétricas de campo são bem menos dispendiosas e mais rápidas do que os procedimentos envolvidos no nivelamento geométrico de uma linha. O pequeno acréscimo no custo total dos levantamentos necessários ao estabelecimento de uma rede altimétrica, resultante da inclusão da gravimetria na sua rotina, é compensado de longe pelo benefício da realização de um sistema de altitudes unívoco, que não pode ser alcançado apenas com o nivelamento geométrico. Neste ítem serão resumidos os principais aspectos relacionados com as atividades gravimétricas necessárias à consecução dos objetivos deste trabalho.

#### 4.3.1. DATUM GRAVIMÉTRICO.

Em geodésia é fundamental que os valores da gravidade estejam referidos a um sistema de referência global. O primeiro datum gravimétrico mundial foi o de Viena, adotado em 1900 e que vigorou até 1909, quando foi substituído pelo datum de Potsdam. Em ambos os casos o referencial era constituído de um único ponto onde o valor da gravidade foi determinado diretamente através de pêndulos. O datum de Potsdam vigorou até 1971, quando uma nova idéia foi concebida, segundo a qual a referência não é mais um único ponto mas uma rede internacional de estações gravimétricas distribuídas por diversos países. De acordo com esta nova concepção a Assembléia Geral da I.U.G.G., reunida em Moscou, adotou a “*International Gravity Standardization Net*” 1971(IGSN71) como novo datum. A IGSN71 é o atual datum gravimétrico mundial, que contém 1854 estações, cujos valores de gravidade foram determinados com desvios padrão inferiores a 0,1 mGal, a partir do ajustamento de 10 medidas

absolutas da gravidade, obtidas com gravímetros de queda livre (ver item 4.3.2), e aproximadamente 24000 medidas relativas (IAG,1974).

#### **4.3.2. DETERMINAÇÃO DA GRAVIDADE.**

A determinação do valor da gravidade pode ser obtida tanto pelo método absoluto como pelo relativo. No método absoluto a gravidade é determinada diretamente como função da leitura instrumental e das constantes do aparelho. No método relativo determina-se a variação da gravidade de ponto para ponto, de modo que a gravidade é obtida a partir do conhecimento prévio de seu valor em pelo menos um dos pontos.

##### **4.3.2.1. DETERMINAÇÃO ABSOLUTA DA GRAVIDADE.**

Nas últimas duas décadas a gravimetria passou por mudanças substanciais, como decorrência da evolução da tecnologia instrumental, mormente no que diz respeito aos equipamentos de determinação absoluta. Embora em alguns países do leste os pêndulos ainda sejam usados, o progresso dos instrumentos absolutos de queda livre foi tão rápido que atualmente as determinações absolutas da gravidade são feitas quase que exclusivamente com esses instrumentos.

O *gravímetro de queda livre* baseia-se no deslocamento de um corpo em queda livre no vácuo de acordo com a equação do movimento uniformemente acelerado:

$$z_i = z_o + v_o(t_i - t_o) + g(t_i - t_o)^2/2 \quad (4.4)$$

onde  $z_i$  é a posição do corpo no instante  $t_i$ ,  $z_o$  e  $v_o$  são, respectivamente, a posição e a velocidade no instante inicial  $t_o$ .

O valor de  $g$  é determinado medindo-se  $z_i$  em diversos instantes  $t_i$ , por técnicas interferométricas combinadas com cronometragem eletrônica controlada por cristal de quartzo. No caso de obtenção de um sistema superabundante, com redundância de observações, pode-se utilizar o método dos mínimos quadrados para a obtenção de  $g$ ,  $t_0$ ,  $z_0$  e  $v_0$ .

Os gravímetros de queda livre experimentaram grande evolução nos últimos trinta anos; sua resolução deslocou-se da casa dos centésimos de miligal para o microgal. Todavia, por não serem instrumentos portáteis e necessitarem de ambiente especial para sua instalação e operação, o uso de tais equipamentos ainda está restrito aos laboratórios, embora possam ser desmontados e transportados de um laboratório para outro. Informações pormenorizadas sobre a tecnologia envolvida nas medidas da gravidade por queda livre podem ser encontradas no trabalho de Faller(1965).

No Brasil foi implantada recentemente uma rede de estações gravimétricas absolutas, dentro do programa de cooperação da Universidade Federal do Paraná com a Universidade de Hanover, com a participação de outras instituições. Esse trabalho, de há muito almejado pela comunidade geodésica nacional, é uma grande contribuição para o estabelecimento de um referencial gravimétrico preciso no país.

#### **4.3.2.2. DETERMINAÇÃO RELATIVA DA GRAVIDADE.**

A determinação relativa da gravidade é feita com o uso de *gravímetros diferenciais* ou *relativos*. Devido à sua portabilidade e facilidade operacional, os gravímetros diferenciais são tão largamente usados que é comum associar-se o termo gravímetro a esse tipo de instrumento. Contudo, tais instrumentos não são capazes de medir diretamente a gravidade; medem somente diferenças de gravidade entre pontos. No passado recente sua precisão era significativamente mais alta do que a dos gravímetros absolutos. Entretanto, com a evolução destes, atualmente as precisões são equivalentes, variando entre 0,1 e 0,001 mGal, dependendo do tipo de instrumento.

De acordo com o tipo de sensor utilizado costuma-se distinguir dentre os gravímetros diferenciais os *mecânicos* e os *supercondutores*. Os gravímetros mecânicos são de longe os mais utilizados nos trabalhos geodésicos. Os supercondutores, até o presente momento, são usados apenas para medidas estacionárias relacionadas principalmente com estudos de variações da gravidade.

Os gravímetros mecânicos baseiam-se no princípio do dinamômetro, de acordo com a lei de Hooke. São constituídos basicamente de uma mola da qual pende uma massa, cujo peso varia com a gravidade. A variação do peso é compensada pela variação da tensão na mola, que por sua vez é proporcional à mudança no seu comprimento. Assim, a diferença de gravidade entre dois pontos pode ser determinada em função da variação do comprimento da mola.

Dentre os gravímetros mecânicos atualmente em uso destaca-se o LaCoste & Romberg, que na versão geodésica é capaz de medir diferenças de gravidade de amplitude até 7000 mGal, com precisão melhor do que 0,05 mGal. Informações mais minuciosas sobre os gravímetros, suas características e cuidados operacionais podem ser encontradas nas contribuições de Groten(1980) e Escobar(1985).

#### **4.4. REDES GRAVIMÉTRICAS.**

Analogamente às redes altimétricas, geralmente os levantamentos gravimétricos são conduzidos em linhas, ao longo das principais rodovias, de modo a formar uma estrutura de rede. As redes gravimétricas são comumente divididas em categorias, de acordo com o rigor das prescrições técnicas obedecidas nos levantamentos. Assim, costuma-se designar por *rede gravimétrica fundamental*, básica, de 1ª ordem ou de alta precisão, àquela que é ligada diretamente ao datum mundial (IGSN71), extraído deste sua escala e origem e em cujo levantamento são obedecidas as prescrições adequadas (DMA,1974).

As redes fundamentais são normalmente redes nacionais que visam tornar o referencial gravimétrico mais acessível no território de um país. No Brasil, estão sendo ultimados os

esforços para o estabelecimento da rede gravimétrica fundamental brasileira, com a participação de algumas instituições, dentre as quais podem ser citadas: Observatório Nacional, Universidade Federal do Paraná e o Instituto Astronômico e Geofísico da Universidade de São Paulo (Escobar,1981).

*Redes regionais*, de 2ª ordem ou de adensamento, são estabelecidas normalmente com objetivos específicos, v.g., realização de sistemas de altitudes, prospecção geofísica, entre outros. As prescrições, neste caso, são menos rigorosas e variam de acordo com o objetivo colimado.



## **CAPÍTULO 5**

### **BASES METODOLÓGICAS DO AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES.**

#### **5.1. METODOLOGIA.**

A consecução de um objetivo científico comumente envolve a adoção de um conjunto de procedimentos que frequentemente conduzem à estimativa das quantidades que contribuem direta ou indiretamente com o tema em estudo. Dentre esses procedimentos usualmente chamados de metodologia, podem ser identificadas algumas fases:

a) Definição das grandezas a serem investigadas, denominadas parâmetros (incógnitas a determinar), e suas especificações de precisão.

b) Formulação do modelo matemático.

Geralmente os parâmetros não podem ser medidos diretamente. É necessário formular funções que os relacionem com outras grandezas que podem ser medidas - as observáveis.

c) Preamálie.

Antes de fazer as medidas requeridas suas exatidões devem ser especificadas, em função das exatidões desejadas para os parâmetros e do modelo matemático.

d) Medição e análise das observações.

As medidas são efetuadas e as observações são analisadas para verificar se reúnem, ou não, as especificações de exatidão prescritas.

e) Obtenção dos parâmetros.

Os parâmetros e suas exatidões são obtidos pela solução do modelo matemático, em função das observações pré-processadas.

f)Análise simultânea das observações e modelo matemático.

É feita a análise de adequação do modelo matemático, buscando o seu aperfeiçoamento, bem como das observações, procurando corrigi-las quando necessário.

g)Análise dos parâmetros.

O último estágio envolve a análise dos parâmetros calculados e um exame de suas compatibilidades com outras determinações independentes, se estas existirem.

## **5.2.FORMULAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO.**

Genericamente pode-se definir um modelo matemático como uma relação matemática entre grandezas particulares, baseado em certas leis. É o elemento central do planejamento da experiência e do processamento dos dados observados. Consiste na formulação da relação funcional entre os parâmetros e as grandezas observadas que, genericamente, pode ser escrita:

$$f(x,l) = 0 \quad (5.1)$$

onde,

$f = f_i, i = 1, \dots, m$  é o vetor das funções;

$x = x_i, i = 1, \dots, u$  são grandezas sobre as quais há pouca ou nenhuma informação, conhecidas como parâmetros, e.g., altitudes ou outras coordenadas, deflexão da vertical, alturas geoidais etc;

$l = l_i, i = 1, \dots, n$  são grandezas físicas ou geométricas capazes de serem observadas, denominadas observáveis às quais são atribuídos números, com uma certa precisão,

denominados observações. O processo de atribuição destes números é denominado medição e é executado através de um instrumento ou sensor.

Além das grandezas mencionadas, outras grandezas consideradas perfeitamente conhecidas, ou seja, isentas de erro, denominadas constantes, podem estar presentes no modelo matemático, e.g., constante gravitacional de Newton, velocidade da luz no vácuo etc.. Estas grandezas, entretanto, são consideradas como inerentes ao modelo matemático.

Correspondendo às três componentes do modelo matemático (5.1) estão os três espaços vetoriais: parâmetros,  $X$ , observações,  $L$ , e espaço do modelo,  $F$ , (Fig. 5.1). As matrizes  $A$  e  $B$ , e suas funções, serão definidas adiante neste capítulo.

A equação (5.1) está formulada no espaço do modelo, cujos elementos são as  $m$  funções;  $\dim \mathbf{f} = m$ . Tal forma é conhecida como modelo implícito, ou combinado, que envolve simultaneamente as observáveis e os parâmetros e pode ser linear ou não-linear.

O modelo implícito linear pode ser escrito como:

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{Bl} + \mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad (5.2)$$

onde  $A$  é a matriz dos coeficientes de  $\mathbf{x}$ , com dimensão  $(m,u)$ ;  $B$  é a matriz dos coeficientes de  $\mathbf{l}$ , com dimensão  $(m,n)$ ; enquanto que  $\mathbf{w}$  é o vetor constante cuja dimensão é igual a  $m$ .

O modelo implícito é o mais geral, mas podem ser destacados dois casos especiais de formas explícitas que derivam dele: modelo explícito em  $\mathbf{x}$  e modelo explícito em  $\mathbf{l}$ .

a) O modelo explícito em  $\mathbf{x}$  é escrito como

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{l}) \quad (5.3)$$

onde  $\mathbf{f}$  é função explícita. Como  $\mathbf{f}$  transforma  $L$  em  $X$ , ambos os lados de (5.3) pertencem a  $X$  e o modelo é dito ser formulado no espaço dos parâmetros  $X$ . O modelo explícito linear em  $\mathbf{x}$  é obtido fazendo-se  $A = -I$  na equação (5.2), onde  $I$  é a matriz unidade. Assim,

$$\mathbf{x} = \mathbf{Bl} + \mathbf{w} \quad (5.4)$$

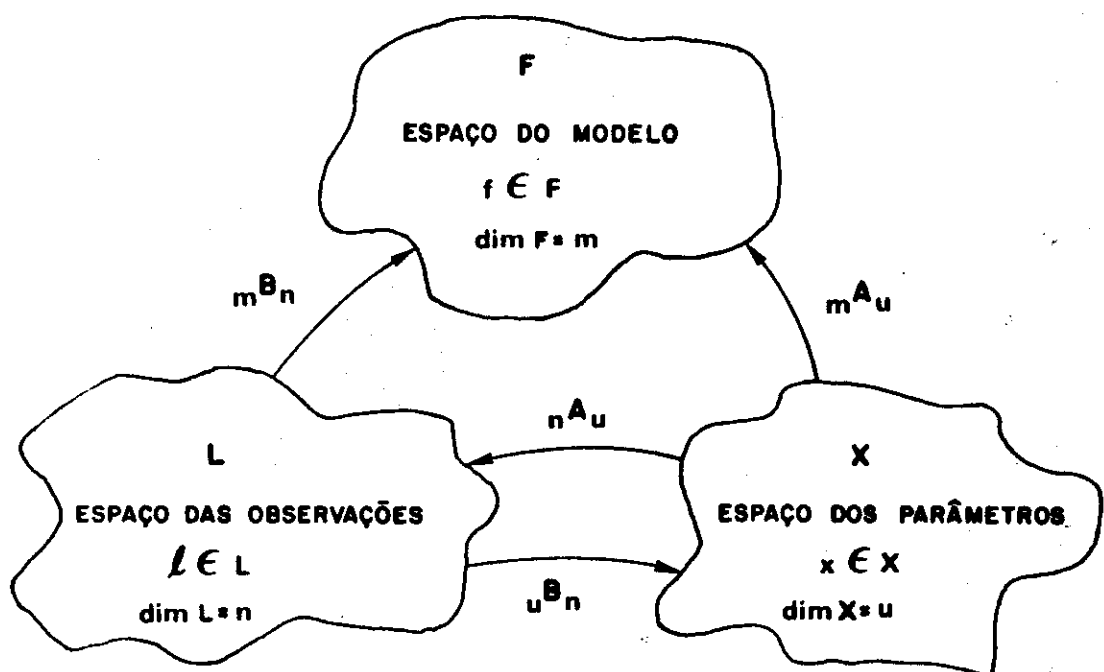


FIG. 5.1. - RELAÇÃO ENTRE OS ESPAÇOS DO MODELO, DOS PARÂMETROS E DAS OBSERVAÇÕES.

e, neste caso,  $\dim \mathbf{B} = (u, n)$ ,  $\dim \mathbf{w} = u = m$ .

O caso mais simples de um modelo explícito ocorre quando é possível medir diretamente o parâmetro incógnita. Nesta situação, a equação (5.4) toma a forma:

$$\mathbf{x} = \mathbf{l} \quad (5.5)$$

tal que  $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ ;  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$  e  $u = n = m$ .

Sob certas circunstâncias os parâmetros podem estar totalmente ausentes do modelo explícito. Neste caso, o modelo torna-se:

$$\mathbf{f}(\mathbf{l}) = \mathbf{0}, \quad (5.6)$$

e é conhecido como “modelo condição”, que reflete condições físicas ou geométricas que relacionam apenas as observáveis entre si. O modelo condição linear é obtido fazendo a matriz  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$  na equação (5.2), já que não existem parâmetros. Assim,

$$\mathbf{B}\mathbf{l} + \mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad (5.7)$$

onde  $\dim \mathbf{B} = (m, n)$ ,  $\dim \mathbf{l} = n$  e  $\dim \mathbf{w} = m$ . Por exemplo, na relação com os três ângulos,  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ , de um triângulo plano, a matriz  $\mathbf{B}$  é dada por:

$$\mathbf{B} = (1, 1, 1),$$

o vetor de observáveis é

$$\mathbf{l} = (\alpha, \beta, \gamma)^T$$

e o vetor constante, neste caso de um elemento, é igual a

$$\mathbf{w} = (-\pi).$$

b) O modelo explícito em  $\mathbf{l}$  expressa as observações como funções dos parâmetros, ou seja,

$$l = f(x). \quad (5.8)$$

Como  $f$  transforma  $X$  em  $L$ , este tipo de modelo é dito ser formulado no espaço das observações. A forma linear deste modelo pode ser obtido da equação (5.2), fazendo  $B = -I$ , ou seja,

$$l = Ax + w, \quad (5.9)$$

onde  $\dim A = (n, u)$  e  $\dim w = n = m$ .

É importante notar que  $A$  transforma  $X$  em  $F$  ou  $L$ , e  $B$  transforma  $L$  em  $F$  ou  $X$  (Fig. 5.1). As dimensões das matrizes  $A$  e  $B$ , e suas características, ditam se o modelo é indeterminado, indefinido ou univocamente determinado.

### 5.3. CLASSIFICAÇÃO DOS MODELOS QUANTO À SOLUÇÃO.

De modo geral, a solução de um modelo consiste na determinação do vetor dos parâmetros,  $x$ , e sua precisão, a matriz de covariâncias  $C_x$ .

Existem três tipos de solução possíveis para modelos lineares ou linearizados: única, indeterminada e indefinida. Se o modelo não é naturalmente linear deve ser linearizado, conforme será visto no item 5.4.1. Modelos não-lineares, caracterizados por parâmetros incógnitas encerrados em expressões funcionais, são solucionados através de técnicas matemáticas especiais, no domínio das soluções não-lineares, tal como análise espectral. A explanação dessas técnicas está fora dos objetivos deste trabalho.

No exame da possibilidade de solução de um modelo linear podem ser encontradas as seguintes situações:

a)  $u = m$  e  $A$  é regular. Neste caso o modelo tem solução única, obtida da equação (5.2); isto é,

$$\mathbf{x} = -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{B}\mathbf{l} + \mathbf{w}). \quad (5.10)$$

No entanto, se  $\mathbf{A}$  for singular não haverá solução única e será necessário o uso de inversas generalizadas.

b)  $u > m$ . Deparamos com um modelo com soluções indeterminadas, ou seja, apresentam um número infinito de soluções que satisfazem as equações. Tudo o que se pode fazer é expressar alguns parâmetros incógnitas em função de outros.

c)  $u < m$ . Trata-se de um modelo superabundante, com solução indefinida de  $\mathbf{x}$ , ou seja, geralmente não existe  $\mathbf{x}$  que satisfaça o sistema de equações. Esta classe de modelo é muito comum nos trabalhos geodésicos. Portanto será analisada em seus pormenores no próximo item.

#### 5.4. SOLUÇÃO DE MODELOS SUPERABUNDANTES POR MÍNIMOS-QUADRADOS.

Quando o modelo é superabundante, ou seja, tem mais equações do que os  $u$  parâmetros, a solução é indefinida. Geralmente, o excesso de equações indica que foram feitas mais observações do que o necessário para a determinação das incógnitas, prática comum nas operações geodésicas, que visa reduzir o efeito dos erros acidentais inerentes às observações. Tais erros tornam o sistema matematicamente inconsistente, que fornece soluções diferentes para cada conjunto de  $u$  equações.

Para contornar o problema da indefinição pode-se reformular o modelo através da substituição de  $\mathbf{l}$  por seu estimador, i. e.,

$$\mathbf{l} = \mathbf{l}^o + \mathbf{v},$$

onde  $\mathbf{l}^o$  é o vetor das observações e  $\mathbf{v}$  é denominado vetor dos resíduos. Assim, o modelo pode ser escrito na forma

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{l}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{l}^o + \mathbf{v}) = \mathbf{0}. \quad (5.11)$$

O vetor  $v$  é introduzido para tornar as equações consistentes ao admitir mudar as observações (de  $l$  para  $l^o$ ). Nota-se que o valor estimado para  $l$  depende do critério a ser empregado na estimativa de  $v$ . A melhor solução é normalmente procurada no espaço das observações com a introdução da condição de mínimos-quadrados através da minimização da função  $v^T C_v^{-1} v$ , ou seja:

$$\min_{x,v} (v^T C_v^{-1} v),$$

onde  $C_v$  é a matrix de covariâncias do vetor dos resíduos. Como  $C_v$  é equivalente à matriz de covariâncias das observações,  $C_{l^o}$  (Vanicek & Krakiwsky, 1986, p.201), a condição de mínimos-quadrados pode ser expressa por:

$$\min_{x,v} (v^T C_{l^o}^{-1} v). \quad (5.12)$$

É importante notar que, com a reformulação do problema, existem agora dois vetores incógnitas ( $x$  e  $v$ ) e, portanto, a minimização deve ser conduzida com respeito a ambos.

Esta condição é frequentemente referida como “*forma quadrática mínima dos resíduos ponderados*”, ou como “*soma mínima dos quadrados dos resíduos ponderados*”. Entretanto, esta última designação só é verdadeira quando a matriz  $C_{l^o}$  é diagonal, ou seja, quando  $v$  for estatisticamente independente.

As aplicações práticas da técnica de mínimos-quadrados frequentemente esbarram no problema do desconhecimento da escala da matriz  $C_{l^o}$ , i.e., apenas os tamanhos relativos dos seus elementos são conhecidos. A solução do problema passa pela definição da matriz  $P$ , inversa da matriz dos elementos de escala arbitrária, ou seja,

$$P = \sigma_o^{-2} C_{l^o}^{-1} \quad (5.13)$$

ou

$$C_{l^o}^{-1} = P / \sigma_o^{-2}$$



onde o fator de escala  $\sigma_o^2$  é denominado de fator de variância, variância da unidade de peso ou, ainda, variância da observação de peso unitário, e a matriz  $P$  é chamada de matriz de pesos. Assim, a condição de mínimos-quadrados pode ser escrita como

$$\min_{\mathbf{x}, \mathbf{v}} (\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}). \quad (5.14)$$

No item 5.4.3 será demonstrado que o conhecimento de  $\sigma_o^2$  a priori não é necessário para se chegar aos valores corretos de  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{v}$ , e que, embora a obtenção das matrizes covariâncias  $C_x$ ,  $C_v$  e  $C_l$  dependam de  $\sigma_o^2$ , é possível obter-se um valor estimado dessa grandeza com base nos resultados, antes da estimativa das covariâncias.

#### 5.4.1. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA .

Objetivando a simplificação da solução, o modelo matemático é normalmente aproximado com a parte linear de uma série de Taylor. Geralmente são escolhidos para pontos de expansão os valores observados ( $\mathbf{l}^o$ ) no espaço das observações  $L$  e valores aproximados ( $\mathbf{x}^o$ ) dos parâmetros no espaço dos parâmetros  $X$ , que resulta em:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{l}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^o + \mathbf{d}, \mathbf{l}^o + \mathbf{v})$$

onde  $\mathbf{d} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^o$  é o vetor das correções que devem ser atribuídas a  $\mathbf{x}^o$  para se obter  $\mathbf{x}$ .

Portanto,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{l}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^o, \mathbf{l}^o) + \left. \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^o, \mathbf{l}=\mathbf{l}^o} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^o) + \left. \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{l} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^o, \mathbf{l}=\mathbf{l}^o} (\mathbf{l} - \mathbf{l}^o) = \mathbf{0}$$

ou, simplesmente,

$$\mathbf{A} \mathbf{d} + \mathbf{B} \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad (5.15)$$

cuja forma é idêntica à (5.2) para

$$A = \partial f / \partial x \big|_{x=x^0, l=l^0}, \quad B = \partial f / \partial l \big|_{x=x^0, l=l^0}, \quad w = f(x^0, l^0), \quad (5.16)$$

onde  $w$  é chamado de vetor de fechamento.

As soluções práticas de alguns problemas são condicionadas à introdução de informações adicionais, não contidas no modelo principal  $f$ . Estas informações podem ser expressas na forma de relações funcionais adicionais entre os parâmetros e as observáveis. Na literatura tais funções são conhecidas como funções injuntivas (“constraint functions”) ou vínculos.

O modelo injuntivo também pode ser implícito ou explícito, linear ou não-linear mas, normalmente, não é tratado isoladamente. Funciona como modelo secundário, associado ao modelo principal e, simbolicamente, pode ser escrito:

$$f'(x, l') = 0,$$

onde,

$f' = f'_i, i = 1, \dots, r$  é o vetor das funções injuntivas;

$x$  é o mesmo vetor dos parâmetros considerado no modelo principal e

$l' = l'_i, i = 1, \dots, s$  é o vetor das observáveis injuntivas.

Como o modelo principal, o modelo injuntivo também pode ser aproximado por série de Taylor, o que resulta em:

$$f'(x, l') = f'(x^0 + d, l'^0 + v') \quad (5.17)$$

ou

$$A'd + B'v' + w' = 0 \quad (5.18)$$

com  $A', B'$  e  $w'$  definidos de modo análogo a  $A, B$  e  $w$ , para  $f = f', l = l'$  e  $l^0 = l'^0$ .

Costuma-se distinguir três tipos de injunções (de Andrade, 1977):

a) Injunção funcional: quando o modelo matemático correlaciona apenas parâmetros entre si, através de uma relação física ou matemática.

b) Injunção absoluta: quando o modelo matemático expressa uma condição física ou matemática em que os parâmetros são correlacionados com constantes, ou seja, são considerados fixos.

c) Injunção relativa: quando o modelo matemático correlaciona parâmetros com observações. Neste caso as observações devem estar associadas a pesos que expressem suas precisões relativas.

As equações (5.15) e (5.18) são formas diferenciais dos modelos matemáticos principal e injuntivo que descrevem as relações das grandezas nas vizinhanças de  $\mathbf{x}^o$ ,  $\mathbf{l}^o$ ,  $\mathbf{l}^{*o}$ ,  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{w}'$  (Fig. 5.2). As matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  transportam as grandezas  $\mathbf{d}$  e  $\mathbf{v}$  para o espaço  $m$ -dimensional do modelo principal  $F$ , assim como as matrizes  $\mathbf{A}'$  e  $\mathbf{B}'$  transportam as grandezas  $\mathbf{d}$  e  $\mathbf{v}'$  para o espaço  $r$ -dimensional do modelo injuntivo  $F'$ . Portanto, os termos de (5.15) –  $\mathbf{A}\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{B}\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  – são vetores  $m$ -dimensionais e os termos de (5.18) –  $\mathbf{A}'\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{B}'\mathbf{v}'$  e  $\mathbf{w}'$  – são vetores  $r$ -dimensionais.  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{A}'$ ,  $\mathbf{B}'$  e  $\mathbf{w}'$  são conhecidos, enquanto que  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v}'$  são incógnitas.

#### **5.4.2. SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE MÍNIMOS-QUADRADOS.**

O problema injungido, ou vinculado, com modelos principal e secundário na forma implícita, é o caso mais geral, e, portanto, será tratado neste item. Os demais casos podem ser considerados como casos particulares, cujas soluções podem ser obtidas a partir de considerações simplificativas análogas àquelas abordadas no item 5.2.

Com a introdução do modelo injuntivo, uma nova incógnita foi introduzida no problema, o vetor dos resíduos das observações injuntivas,  $\mathbf{v}'$ . Portanto, as soluções do problema injungido

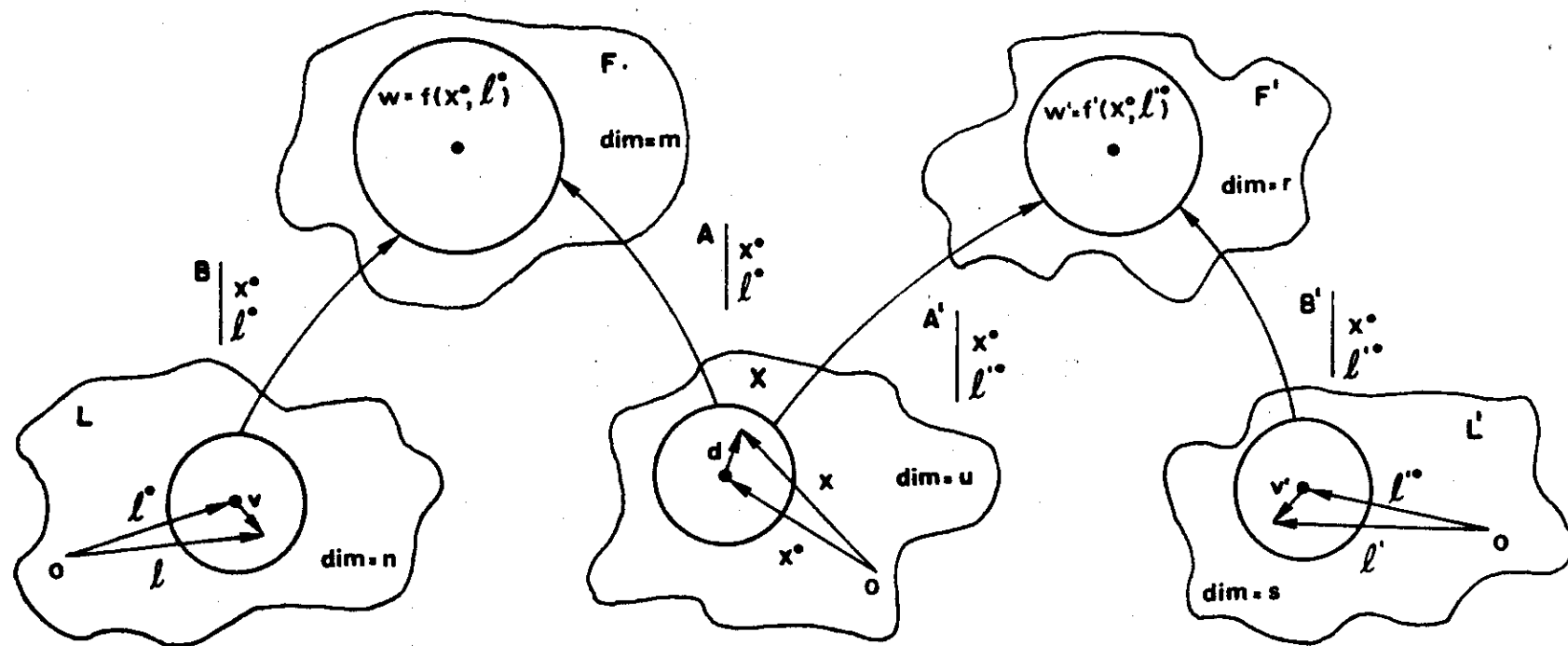


FIG. 5.2 - LINEARIZAÇÃO

por mínimos-quadrados são:  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v}'$ , que devem ser obtidos minimizando os comprimentos dos vetores  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v}'$ , utilizando a condição expressa por:

$$\min_{\mathbf{d}, \mathbf{v}, \mathbf{v}'} (\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} + \mathbf{v}'^T \mathbf{P}' \mathbf{v}'), \quad (5.19)$$

onde  $\mathbf{P}'$  é a matriz dos pesos associados às observações injuntivas.

Visto que as matrizes  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{B}'$ , geralmente, não são regulares, as substituições de  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v}'$  em (5.19) a partir de (5.15) e (5.18) não são possíveis. A solução normalmente usada para o problema foi oferecida por Lagrange, que baseou-se na idéia de envolver outras grandezas no modelo, através de um artifício matemático. Os vetores equação (5.15) e (5.18) são multiplicados por vetores arbitrários  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{k}'$ . Os produtos escalares resultantes são nulos para quaisquer  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{k}'$  finitos, desde que  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v}'$  satisfaçam as equações (5.15) e (5.18). Assim, tais produtos podem ser subtraídos das formas quadráticas ( $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$  e  $\mathbf{v}'^T \mathbf{P}' \mathbf{v}'$ ) sem afetar seus valores. Portanto, é válida a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}, \mathbf{v}, \mathbf{v}'} (\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} + \mathbf{v}'^T \mathbf{P}' \mathbf{v}') = \\ \min_{\mathbf{d}, \mathbf{v}, \mathbf{v}'} [\phi = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} + \mathbf{v}'^T \mathbf{P}' \mathbf{v}' - 2\mathbf{k}^T (\mathbf{A} \mathbf{d} + \mathbf{B} \mathbf{v} + \mathbf{w}) - 2\mathbf{k}'^T (\mathbf{A}' \mathbf{d} + \mathbf{B}' \mathbf{v}' + \mathbf{w}')]. \end{aligned} \quad (5.20)$$

A função  $\phi$  é usualmente chamada de “função de variação” e os vetores  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{k}'$  são os correlatos de Lagrange ou lagrangianos, que desempenham papel de incógnitas como os vetores  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v}'$ .

A minimização da função  $\phi$  é um problema de extremo da matemática. O método padrão para solução é achar as derivadas de  $\phi$  com relação a  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}'$ ,  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{k}'$ , igualando-as a vetores nulos. Assim,

$$(1/2) \cdot (\partial \phi / \partial \mathbf{v}) = \mathbf{P} \mathbf{v} - \mathbf{B}^T \mathbf{k} = \mathbf{0}, \quad (5.21)$$

$$(1/2) \cdot (\partial \phi / \partial \mathbf{v}') = \mathbf{P}' \mathbf{v}' - \mathbf{B}'^T \mathbf{k}' = \mathbf{0}, \quad (5.22)$$

$$(-1/2) \cdot (\partial \phi / \partial \mathbf{d}) = \mathbf{A}^T \mathbf{k} + \mathbf{A}'^T \mathbf{k}' = \mathbf{0}, \quad (5.23)$$

$$(-1/2) \cdot (\partial \phi / \partial \mathbf{k}) = \mathbf{A} \mathbf{d} + \mathbf{B} \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad (5.24)$$

$$(-1/2) \cdot (\partial\phi/\partial\mathbf{k}') = \mathbf{A}'\mathbf{d} + \mathbf{B}'\mathbf{v}' + \mathbf{w}' = 0. \quad (5.25)$$

Resolvendo a equação (5.21) em relação a  $\mathbf{v}$  e substituindo o resultado em (5.24), tem-se:

$$\mathbf{v} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{k} \quad (5.26)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{d} + \mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{k} + \mathbf{w} = 0$$

ou, fazendo

$$\mathbf{M} = \mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T, \quad (5.27)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{d} + \mathbf{M}\mathbf{k} + \mathbf{w} = 0,$$

que, resolvida em relação a  $\mathbf{k}$ , conduz a:

$$\mathbf{k} = -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{d} + \mathbf{w}). \quad (5.28)$$

Procedendo de modo análogo com as equações (5.22) e (5.25), resulta:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{P}'^{-1}\mathbf{B}'^T\mathbf{k}', \quad (5.29)$$

$$\mathbf{M}' = \mathbf{B}'\mathbf{P}'^{-1}\mathbf{B}'^T \quad (5.30)$$

e

$$\mathbf{k}' = -\mathbf{M}'^{-1}(\mathbf{A}'\mathbf{d} + \mathbf{w}'). \quad (5.31)$$

Substituindo (5.28) e (5.31) em (5.23), resulta:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{d} + \mathbf{w}) + \mathbf{A}'^T\mathbf{M}'^{-1}(\mathbf{A}'\mathbf{d} + \mathbf{w}') = 0,$$

ou

$$(A^T M^{-1} A + A'^T M'^{-1} A')d + (A^T M^{-1} w + A'^T M'^{-1} w') = 0. \quad (5.32)$$

ou, fazendo

$$N = A^T M^{-1} A + A'^T M'^{-1} A' \quad (5.33)$$

e

$$u = A^T M^{-1} w + A'^T M'^{-1} w', \quad (5.34)$$

tem-se

$$Nd + u = 0. \quad (5.35)$$

Esta equação matricial é chamada de sistema de equações normais, onde  $N$  é denominada matriz dos coeficientes e  $u$  é um vetor constante.

De modo a determinar se o extremo é máximo ou mínimo, deve-se achar a segunda derivada da (5.35) que é igual a  $N$ , que é uma matriz positivo-definida. Então o extremo é mínimo, que é o que se deseja.

A solução de mínimos-quadrados é então escrita como:

$$d = -N^{-1}u. \quad (5.36)$$

Os correlatos,  $k$  e  $k'$ , são determinados usando as equações (5.28) e (5.31) e os resíduos,  $v$  e  $v'$ , são obtidos através das equações (5.26) e (5.29). Finalmente, o estimador de mínimos-quadrados dos parâmetros e das observações são dados, respectivamente, por:

$$x = x^o + d, \quad (5.37)$$

$$l = l^o + v, \quad (5.38)$$

e

$$l' = l^o + v'. \quad (5.39)$$

Quando o modelo matemático não é linear, a aproximação linear por série de Taylor introduz o “efeito de não-linearidade”, aludido no item 5.3. Neste caso, a solução do problema pode ser obtida iterativamente até que se estabeleça a convergência das grandezas ajustadas. Assim, para a  $n$ -ésima iteração, o modelo linearizado é dado por:

$$A^{(n)}(x^{(n+1)} - x^{(n)}) + B^{(n)}(l^{(n+1)} - l^{(n)}) + f(x^{(n)}, l^{(n)}) = 0, \quad (5.40)$$

onde  $(x^{(n)}, l^{(n)})$  é o último ponto de expansão e  $A^{(n)}, B^{(n)}$  são estimadores neste ponto (Fig. 5.3). Entretanto, se bem que do ponto de vista matemático o problema estaria bem formulado, do ponto de vista estatístico o resíduo  $v^{(n)}$  deve refletir a discrepância entre o último valor estimado de  $l$  e seu valor observado,  $l^o$ , e não o valor estimado na iteração anterior, ou seja,  $v^{(n)} = l^{(n+1)} - l^o$ . Para compatibilizar conceitualmente a equação 5.40, deve-se observar que

$$l^{(n+1)} - l^{(n)} = v^{(n)} - l^{(n)} + l^o$$

que substituída naquela equação conduz a:

$$A^{(n)}d^{(n)} + B^{(n)}v^{(n)} + B^{(n)}(l^o - l^{(n)}) + f(x^{(n)}, l^{(n)}) = 0$$

ou, fazendo

$$w^{(n)} = f(x^{(n)}, l^{(n)}) + B^{(n)}(l^o - l^{(n)}), \quad (5.41)$$

chega-se a

$$A^{(n)}d^{(n)} + B^{(n)}v^{(n)} + w^{(n)} = 0$$



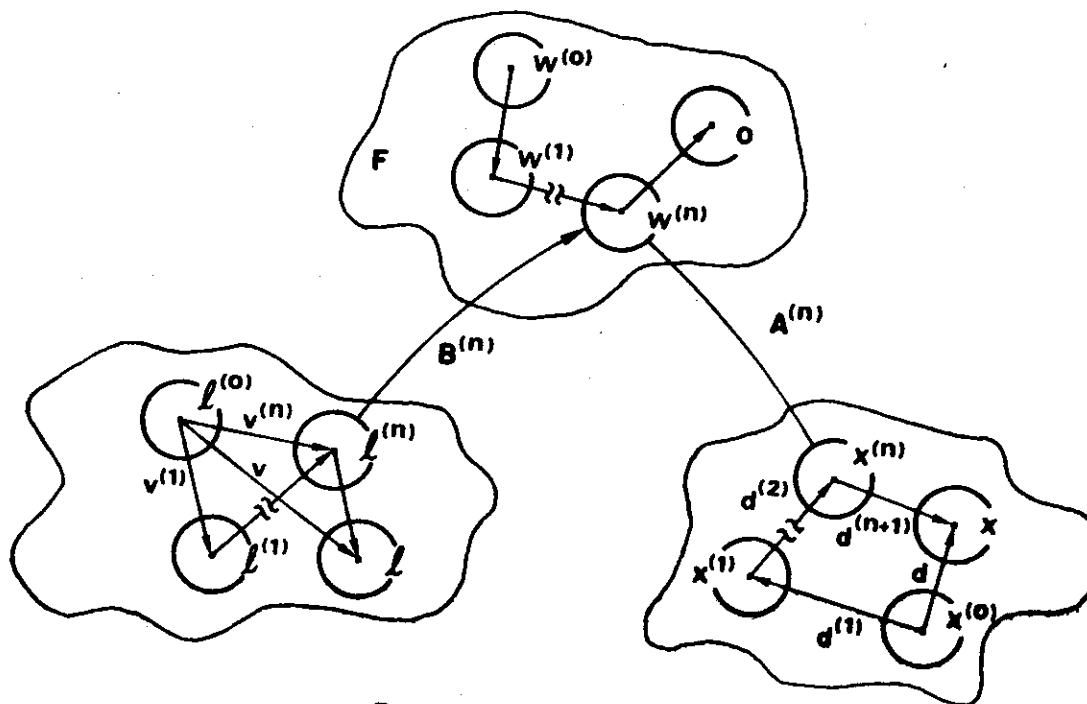


FIG. 5.3 - ITERAÇÕES

que apresenta a mesma forma de (5.15) e (5.18) e, portanto, pode ser resolvida usando as mesmas equações.

Observe-se que é o segundo termo em (5.41) que torna a  $n$ -ésima iteração diferente da solução inicial, isto é, se  $l^{(n)} = l^0$ , então  $w^{(n)} = w^0$  se reduz à equação (5.16). A iteração deve ser conduzida até que dois incrementos sucessivos, i.e.,  $d^{(n)}$  e  $d^{(n+1)}$ , sejam nulos.

### 5.4.3. MATRIZES DE COVARIÂNCIAS DOS RESULTADOS.

Nesta seção serão deduzidas as fórmulas para os cálculos das matrizes de covariâncias dos vetores erros de fechamento,  $w$  e  $w'$ , correções aos parâmetros aproximados,  $d$ , resíduos,  $v$  e  $v'$ , e observações ajustadas,  $l$  e  $l'$ .

a) Visto que  $x^0$  é constante, aplicando a lei da covariância à equação (5.16), obtém-se:

$$C_w = B C_l B^T = \sigma_o^2 B P^{-1} B^T$$

ou

$$C_w = \sigma_o^2 M. \quad (5.42)$$

Analogamente,

$$C_{w'} = \sigma_o^2 M'. \quad (5.43)$$

b) Considerando a equação (5.37), como  $x^0$  é constante,

$$C_x = C_d.$$

Com base na equação (5.36) pode-se escrever:

$$\mathbf{d} = -\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{w} - \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}'^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{w}'. \quad (5.44)$$

Aplicando a lei da covariância à equação acima, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_x &= (-\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{M}^{-1})\mathbf{C}_w(-\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{M}^{-1})^T + (-\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}'^T\mathbf{M}^{-1})\mathbf{C}_{w'}(-\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}'^T\mathbf{M}^{-1})^T \\ \mathbf{C}_x &= \sigma_o^2\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1} + \sigma_o^2\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}'^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}'\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{N}^{-1} \\ \mathbf{C}_x &= \sigma_o^2\mathbf{N}^{-1}(\mathbf{A}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{N}^{-1} + \sigma_o^2\mathbf{N}^{-1}(\mathbf{A}'^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}')\mathbf{N}^{-1} \\ \mathbf{C}_x &= \sigma_o^2\mathbf{N}^{-1}(\mathbf{A}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{A}'^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}')\mathbf{N}^{-1} \end{aligned}$$

que resulta, considerando a (5.33),

$$\mathbf{C}_x = \sigma_o^2\mathbf{N}^{-1}. \quad (5.45)$$

c) Considerando as equações (5.26) e (5.28), obtém-se:

$$\mathbf{v} = -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{d} + \mathbf{w}).$$

Substituindo  $\mathbf{d}$  pela sua expressão, dada pela equação (5.44), vem:

$$\mathbf{v} = -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{M}^{-1}[\mathbf{A}(-\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{w} - \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}'^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{w}') + \mathbf{w}]$$

ou

$$\mathbf{v} = (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{M}^{-1} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{M}^{-1})\mathbf{w} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}'^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{w}', \quad (5.46)$$

que é uma expressão que envolve apenas as variáveis independentes  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{w}'$ .

Aplicando a lei das covariâncias à (5.46) resulta que

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_v &= (-\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{M}^{-1} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{M}^{-1})\mathbf{C}_w(-\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{M}^{-1} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{M}^{-1})^T + \\ &\quad + (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}'^T\mathbf{M}^{-1})\mathbf{C}_{w'}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}'^T\mathbf{M}^{-1})^T \end{aligned}$$

ou, substituindo  $C_w$  e  $C_w$  por suas expressões dadas pela equações (5.42) e (5.43), tem-se, após algumas simplificações algébricas:

$$C_v = \sigma_o^2 P^{-1} B^T M^{-1} [I - A N^{-1} A^T M^{-1}] B P^{-1}. \quad (5.47)$$

De modo análogo chega-se a

$$C_{v'} = \sigma_o^2 P'^{-1} B'^T M'^{-1} [I - A' N'^{-1} A'^T M'^{-1}] B' P'^{-1}. \quad (5.48)$$

d) As expressões para as observações ajustadas são dadas pelas equações (5.38) e (5.39). Assim,

$$l = l^o + v$$

ou, substituindo  $v$  pela sua expressão dada pela equação (5.46),

$$l = l^o + (P^{-1} B^T M^{-1} A N^{-1} A^T M^{-1} - P^{-1} B^T M^{-1}) w + P^{-1} B^T M^{-1} A N^{-1} A'^T M'^{-1} w'. \quad (5.49)$$

Considerando que

$$w = f(x^o, l^o) \quad \text{e} \quad w' = f'(x^o, l'^o)$$

a expressão contém duas variáveis independentes,  $l^o$  e  $l'^o$ . Assim, visto que

$$\partial w / \partial l^o = B \quad \text{e} \quad \partial w' / \partial l'^o = B',$$

tem-se

$$\partial l / \partial l^o = I + P^{-1} B^T M^{-1} A N^{-1} A^T M^{-1} B - P^{-1} B^T M^{-1} B$$

e

$$\partial l / \partial \mathbf{l}^* = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}' \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}'.$$

Aplicando a lei das covariâncias à equação (5.49) resulta que

$$\mathbf{C}_1 = (\partial l / \partial \mathbf{l}^*) \mathbf{C}_{1^*} (\partial l / \partial \mathbf{l}^*)^T + (\partial l / \partial \mathbf{l}^*) \mathbf{C}_{\mathbf{p}^*} (\partial l / \partial \mathbf{l}^*)^T.$$

Considerando a equação (5.13), substituindo as derivadas pelas respectivas expressões, observando que  $\mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T = \mathbf{M}$ ,  $\mathbf{B}' \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}'^T = \mathbf{M}'$ ,  $\mathbf{A}' \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}'^T = \mathbf{A}'^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}'$  e  $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{A}'^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}'$ , chega-se a

$$\mathbf{C}_1 = \sigma_o^2 [\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}'^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1}]. \quad (5.50)$$

Analogamente, obtém-se

$$\mathbf{C}_{\mathbf{p}'} = \sigma_o^2 [\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}'^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}' \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}'^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}'^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{P}^{-1}]. \quad (5.51)$$

Comparando-se (5.47) com (5.50) observa-se que

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_{1^*} - \mathbf{C}_{\mathbf{v}}. \quad (5.52)$$

Como era de se esperar, a variância das observações ajustadas são menores do que as variâncias antes do ajustamento.

Uma análise da equação (5.44) permite verificar que é desnecessário o conhecimento a priori de um valor de  $\sigma_o^2$  para se chegar ao valor correto de  $\mathbf{d}$ .

Analogamente, (5.46) mostra que  $\mathbf{v}$  também não é dependente do conhecimento de  $\sigma_o^2$  a priori. Entretanto, as matrizes de covariâncias são dependentes de  $\sigma_o^2$  e, portanto, deve-se conhecer o seu valor antes da estimativa daquelas matrizes. Isso pode ser feito a partir dos resultados, ou seja,

$$\sigma_o^2 = (\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} + \mathbf{v}'^T \mathbf{P}' \mathbf{v}') / (m + r - u) \quad (5.53)$$

onde

$$m + r - u = \nu$$

define o número de graus de liberdade, também chamado redundância.

## **CAPÍTULO 6**

### **DESENVOLVIMENTO E SOLUÇÃO DE MODELOS PARA OBTENÇÃO DE UM SISTEMA DE ALTITUDES ORTOMÉTRICAS.**

Neste capítulo serão desenvolvidos e solucionados modelos matemáticos com o objetivo de gerar um sistema de altitudes ortométricas, em função das observáveis e dos parâmetros envolvidos neste problema. Os modelos são baseados nos conceitos expostos nos capítulos precedentes e estão sendo propostos neste trabalho como sua principal contribuição.

#### **6.1. DESENVOLVIMENTO DE MODELOS MATEMÁTICOS.**

Partindo da equação da altitude ortométrica, dada pela equação (3.13), aplicada a um ponto genérico de ordem  $i$ , tem-se:

$$H_i = C_i / g_i^m$$

ou

$$C_i = g_i^m H_i.$$

Considerando um segundo ponto de ordem  $j$ , obtém-se a equação

$$g_i^m H_i - g_j^m H_j = C_i - C_j$$

que, tendo em vista a equação (3.2), resulta em:

$$g_i^m H_i - g_j^m H_j = W_j - W_i = \delta W_{ij}. \quad (6.1)$$

Com base na equação (3.20) pode-se escrever:

$$g^m = g - \theta H/2, \quad (6.2)$$

onde  $\theta = \partial g / \partial H$  é a variação da gravidade com a altitude no interior da crosta terrestre e  $g$  é o valor da gravidade observado na superfície física.

Aplicando a (6.2) aos pontos  $i$  e  $j$  e substituindo em (6.1) chega-se a

$$(g_i - \theta H_i/2)H_i - (g_j - \theta H_j/2)H_j = \delta W_{ij}. \quad (6.3)$$

Para pontos  $i$  e  $j$  de uma linha de nivelamento, suficientemente próximos, pode-se escrever, com base na equação (3.1):

$$\delta W_{ij} = -(g_i + g_j)\delta l_{ij}/2 \quad (6.4)$$

que substituindo em (6.3), conduz a:

$$g_i H_i - g_j H_j + (H_j^2 - H_i^2)\theta/2 + (g_i + g_j)\delta l_{ij}/2 = 0 \quad (6.5)$$

onde  $g_i$  e  $g_j$  são valores de gravidade observados nos pontos de ordem  $i$  e  $j$ ,  $H_i$  e  $H_j$  são as altitudes ortométricas nos mesmos pontos e  $\delta l_{ij}$  é o desnível observado. O valor de  $\theta$  depende do tipo de altitude que se deseja obter. Se  $\theta = -0,0848$  mGal/m serão obtidas altitudes de Helmert.

A equação (6.5) é válida para cada par de pontos da rede altimétrica, onde os valores da gravidade foram determinados e entre os quais o desnível foi observado. Tal equação é a expressão de uma função típica que compõe o modelo matemático principal no ajustamento de uma rede altimétrica. O modelo é composto por  $n$  equações, correspondentes aos  $n$  desníveis



81 observados, que formam o vetor  $l$ . Envolve  $u$  parâmetros, vetor  $x$ , referentes às  $u/2$  altitudes  $H$  e igual número de valores de gravidade  $g$  obtidos nas referências de nível contidas na rede.

Na verdade os valores de gravidade conhecidos poderiam ser considerados como constantes neste modelo, preservando como parâmetros apenas as altitudes, que são as verdadeiras incógnitas do problema. Entretanto, para evitar que um erro ou equívoco no valor da gravidade influencie negativamente a estimativa das próprias altitudes, é preferível encará-los como parâmetros no modelo principal e introduzi-los no problema, como injunções relativas, ponderadas de acordo com os inversos das estimativas de suas variâncias, através de um modelo secundário.

O referencial da rede é extraído das altitudes transportadas a partir das determinações do nível médio do mar nos marégrafos. Devido aos erros inerentes à determinação do nível médio do mar, mencionados no item 4.1, mormente a existência da topografia da superfície do mar, a coerência entre as altitudes maregráficas é muito menor do que a coerência interna da rede altimétrica. A escolha de um único marégrafo, dentre os existentes, para servir de referência esbarra na dificuldade de se discernir a priori qual deles fornece valor de nível médio mais próximo do geóide. Um critério poderia ser utilizar a série histórica de observações, escolhendo-se, por exemplo, o de maior período de observação. Entretanto, isso não elimina o efeito da topografia da superfície do mar. Assim, em lugar de se selecionar uma única altitude maregráfica e fixá-la, como constante no modelo, é preferível utilizar todas as altitudes maregráficas conhecidas, sem fixá-las, inserindo-as como injunções relativas através do modelo injuntivo, ponderando-as em função das correções que o próprio ajustamento lhes atribuir. Deste modo, a incoerência entre as determinações maregráficas será evidenciada pela maior coerência interna da rede, que, por sua vez, extrairá das altitudes maregráficas o seu referencial.

Do exposto depreende-se que é necessária a formulação de um modelo matemático injuntivo, que introduza no problema os valores de gravidade e as altitudes maregráficas. As equações desse modelo são, portanto, de dois tipos:

$$H_i - H_i^l = 0$$

e

(6.6)

$$g_i - g_i^l = 0$$

onde  $H_i^l$  e  $g_i^l$  são os valores observados de altitude maregráfica e gravidade, que compõem o vetor  $l'$  das observações injuntivas. O número de equações do primeiro tipo é igual ao de pontos de referência, enquanto que as equações do segundo tipo são em quantidade igual ao número de estações da rede. Portanto, o número total de equações do modelo injuntivo é igual à soma do número de equações dos dois tipos. O vetor dos parâmetros aqui é o mesmo do modelo principal.

## 6.2. SOLUÇÃO DOS MODELOS.

Considerando o modelo principal (6.5), o vetor dos parâmetros,  $x$ , é:

$$x = (H_1, H_2, H_3, \dots, H_{u/2}, g_1, g_2, g_3, \dots, g_{u/2})^T.$$

O vetor  $l$ , das observações, é composto pelos desníveis observados. Supondo, por exemplo, que os pontos extremos dos desníveis sejam 1 e 2, 2 e 3, 3 e 1, etc., o vetor  $l$  será:

$$l = (\delta l_{12}, \delta l_{23}, \delta l_{31}, \dots, \delta l_{ij})^T.$$

Na forma linear, expressa pela equação (5.15), ou seja,

$$Ad + Bv + w = 0,$$

para as equações do modelo principal, correspondentes aos desníveis que compõem  $l$ , as matrizes  $A$  e  $B$  e o vetor  $w$ , dados pelas equações (5.16), para  $x^o$  e  $l^o$ , são:

$$A = \begin{pmatrix} g_1^o - \theta H_1^o & -g_2^o + \theta H_2^o & 0 & \dots & H_1^o + \delta l_1^o / 2 & -H_2^o + \delta l_1^o / 2 & 0 & \dots \\ 0 & g_2^o - \theta H_2^o & -g_3^o + \theta H_3^o & \dots & 0 & H_2^o + \delta l_2^o / 2 & -H_3^o + \delta l_2^o / 2 & \dots \\ -g_1^o + \theta H_1^o & 0 & g_3^o - \theta H_3^o & \dots & -H_1^o + \delta l_1^o / 2 & 0 & H_3^o + \delta l_3^o / 2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} (g_1^o + g_2^o) / 2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & (g_2^o + g_3^o) / 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & (g_1^o + g_3^o) / 2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

e

$$w = \begin{pmatrix} g_1^o H_1^o - g_2^o H_2^o + (H_2^{o2} - H_1^{o2}) \theta / 2 + (g_1^o + g_2^o) \delta l_1^o / 2 \\ g_2^o H_2^o - g_3^o H_3^o + (H_3^{o2} - H_2^{o2}) \theta / 2 + (g_2^o + g_3^o) \delta l_2^o / 2 \\ g_3^o H_3^o - g_1^o H_1^o + (H_1^{o2} - H_3^{o2}) \theta / 2 + (g_1^o + g_3^o) \delta l_3^o / 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Supondo, por exemplo, que as estações de referência sejam as de ordem 1, 4 e 6, o modelo injuntivo pode ser escrito:

$$\begin{aligned}
H_1 - H_1^I &= 0 \\
H_4 - H_4^I &= 0 \\
H_6 - H_6^I &= 0 \\
\mathbf{f} = g_1 - g_1^I &= 0 \\
g_2 - g_2^I &= 0 \\
\ldots \ldots \ldots \\
g_{w/2} - g_{w/2}^I &= 0
\end{aligned}$$

O vetor dos parâmetros  $\mathbf{x}$  é o mesmo do modelo principal e o vetor  $\mathbf{l}'$  é dado por:

$$\mathbf{l}' = (H_1^I, H_4^I, H_6^I, g_1^I, g_2^I, \dots, g_{w/2}^I)^T.$$

Considerando a forma linear, dada pela equação (5.18),

$$\mathbf{A}'\mathbf{d} + \mathbf{B}'\mathbf{v}' + \mathbf{w}' = \mathbf{0},$$

a matriz  $\mathbf{A}'$  é:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\
\ldots \ldots \ldots
\end{pmatrix}$$

$\mathbf{B}' = -\mathbf{I}$  e, se forem tomados para valores aproximados dos parâmetros os próprios valores conhecidos,  $\mathbf{w}' = \mathbf{0}$ .

As matrizes de pesos  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{P}'$  podem ser obtidas a partir das estimativas das variâncias das observações. No caso de  $\mathbf{P}$  é usual admitir que a variância de um desnível é proporcional à distância nivelada,  $S$ , ou seja,

$$\sigma_{\delta 1}^2 = \sigma_1^2 S \quad \text{e} \quad p_{\delta 1} = 1/\sigma_1^2 S, \quad (6.7)$$

onde  $\sigma_1^2$  é a variância da distância unitária, normalmente adotada igual a 1 km. A equação (6.7) é obtida supondo desníveis observados estatisticamente independentes e, portanto, a matriz  $\mathbf{P}$  será diagonal.  $\mathbf{P}'$  pode ser montada sem dificuldade, uma vez conhecidas as estimativas das variâncias das altitudes maregráficas e dos valores de gravidade. Estas últimas normalmente são facilmente avaliadas, contudo as variâncias das altitudes maregráficas por serem de avaliação mais complexa é aconselhável que sejam inicialmente arbitradas e posteriormente aprimoradas em sucessivos ajustamentos, em função das correções a elas atribuídas e da análise da variância da unidade de peso a posteriori, que para os pesos aqui adotados deverá ser aproximadamente igual a 1.

Do que foi exposto anteriormente é possível aplicar as equações dos itens 5.4.2 e 5.4.3 na solução do problema em estudo. Assim, considerando que  $\mathbf{B}$  é diagonal e  $\mathbf{B}' = -\mathbf{I}$ , as equações (5.27) e (5.30), conduzem a:

$$\mathbf{M} = \mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{B}^T \quad \text{e} \quad \mathbf{M}' = \mathbf{B}'\mathbf{P}'^{-1}\mathbf{B}'^T = \mathbf{P}'^{-1}, \quad (6.8)$$

donde

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{P}(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1} \quad \text{e} \quad \mathbf{M}'^{-1} = \mathbf{P}', \quad (6.9)$$

que substituídas em (5.33) e (5.34), resulta:

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{A}'^T \mathbf{P}' \mathbf{A}' \quad (6.10)$$

e

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{w} + \mathbf{A}'^T \mathbf{P}' \mathbf{w}'. \quad (6.11)$$

O vetor  $\mathbf{d}$  pode ser obtido a partir da equação (5.36):

$$\mathbf{d} = -\mathbf{N}^{-1}\mathbf{u}, \quad (6.12)$$

o que permite o cálculo dos parâmetros  $\mathbf{x}$  com a aplicação da equação (5.37), ou seja,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^o + \mathbf{d}. \quad (6.13)$$

As equação (5.28), considerando a primeira das (6.9), conduz a:

$$\mathbf{k} = -\mathbf{P}(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{d} + \mathbf{w})$$

que substituída em (5.26) resulta, para o vetor dos resíduos  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{v} = -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{d} + \mathbf{w})$$

donde

$$\mathbf{v} = -\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{d} + \mathbf{w}). \quad (6.14)$$

Da equação (5.31), considerando a segunda das (6.9) e como  $\mathbf{w}' = \mathbf{0}$ , pode-se chegar a:

$$\mathbf{k}' = -\mathbf{P}'\mathbf{A}'\mathbf{d}$$

que, substituída na (5.29), permite escrever:

$$\mathbf{v}' = -\mathbf{P}'^{-1}\mathbf{B}'^T\mathbf{P}'\mathbf{A}'\mathbf{d}.$$

Como  $\mathbf{B}' = -\mathbf{I}$ , conclui-se que

$$\mathbf{v}' = \mathbf{A}'\mathbf{d}. \quad (6.15)$$

A variância da observação de peso unitário  $\sigma^2_0$  é obtida pela equação (5.53), onde  $m$  é a dimensão do modelo principal (igual à quantidade de desníveis),  $r$  é a dimensão do modelo injuntivo, igual ao número de equações, e  $u$  é a dimensão do vetor dos parâmetros  $\mathbf{x}$ .

A matriz de covariâncias dos parâmetros ajustados  $\mathbf{C}_x$  é dada pela equação (5.45), ou seja,

$$\mathbf{C}_x = \sigma^2_0 \mathbf{N}^{-1} \quad (6.16)$$

e as matrizes de covariâncias das observações,  $\mathbf{C}_p$  e observações injuntivas,  $\mathbf{C}_r$ , ajustadas são obtidas a partir de (5.50) e (5.51), considerando as (6.9) e que  $\mathbf{B}' = -\mathbf{I}$ . Assim,

$$\mathbf{C}_1 = \sigma^2_0 (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B}^{-1}) \quad (6.17)$$

e

$$\mathbf{C}_r = \sigma^2_0 (\mathbf{A}' \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}'). \quad (6.18)$$

## **CAPÍTULO 7**

### **APLICAÇÃO DOS MODELOS MATEMÁTICOS NO AJUSTAMENTO DE UMA REDE ALTIMÉTRICA.**

#### **7.1. DESCRIÇÃO DA REDE.**

Neste capítulo, os conceitos emitidos nos capítulos precedentes serão aplicados no ajustamento de parte da rede altimétrica implantada pelo IBGE, na região sul do Brasil. Tal ajustamento visa eliminar as ambiguidades resultantes dos erros acidentais inerentes às observações efetuadas nos levantamentos que deram origem à rede. Esta parte da rede, representada esquematicamente pela figura 7.1, é constituída de 1248 RRNN, das quais 7 possuem altitudes transportadas a partir de marégrafos, a saber: 25A (Paranaguá), 15D (São Francisco do Sul), 13U (Itajaí), 13I (Porto Belo), 6O (Florianópolis), 4X (Imbituba) e 12X (Torres). As RRNN são ligadas por 1259 desníveis, medidos de acordo com as especificações de nivelamento geométrico de precisão, adotadas pelo IBGE, sem a aplicação da correção ortométrica. Os valores de gravidade nas referências de nível foram observados pelo IAG/USP e pelo Observatório Nacional. Para os poucos pontos onde não se dispunha de valor observado de gravidade, esta grandeza foi determinada por interpolação linear a partir dos pontos adjacentes, utilizando para isso a anomalia de Bouguer propriamente dita. Os levantamentos gravimétricos foram, em sua maior parte, efetuados com gravímetros LaCoste & Romberg. Apenas algumas observações mais antigas foram efetuadas com gravímetro Worden.

Para a execução dos cálculos foi desenvolvido um programa em linguagem FORTRAN, implantado no computador IBM/370-XA, modelo 4381, do Laboratório Nacional de Computação Científica, LNCC, com acesso através dos terminais instalados no Observatório Nacional.



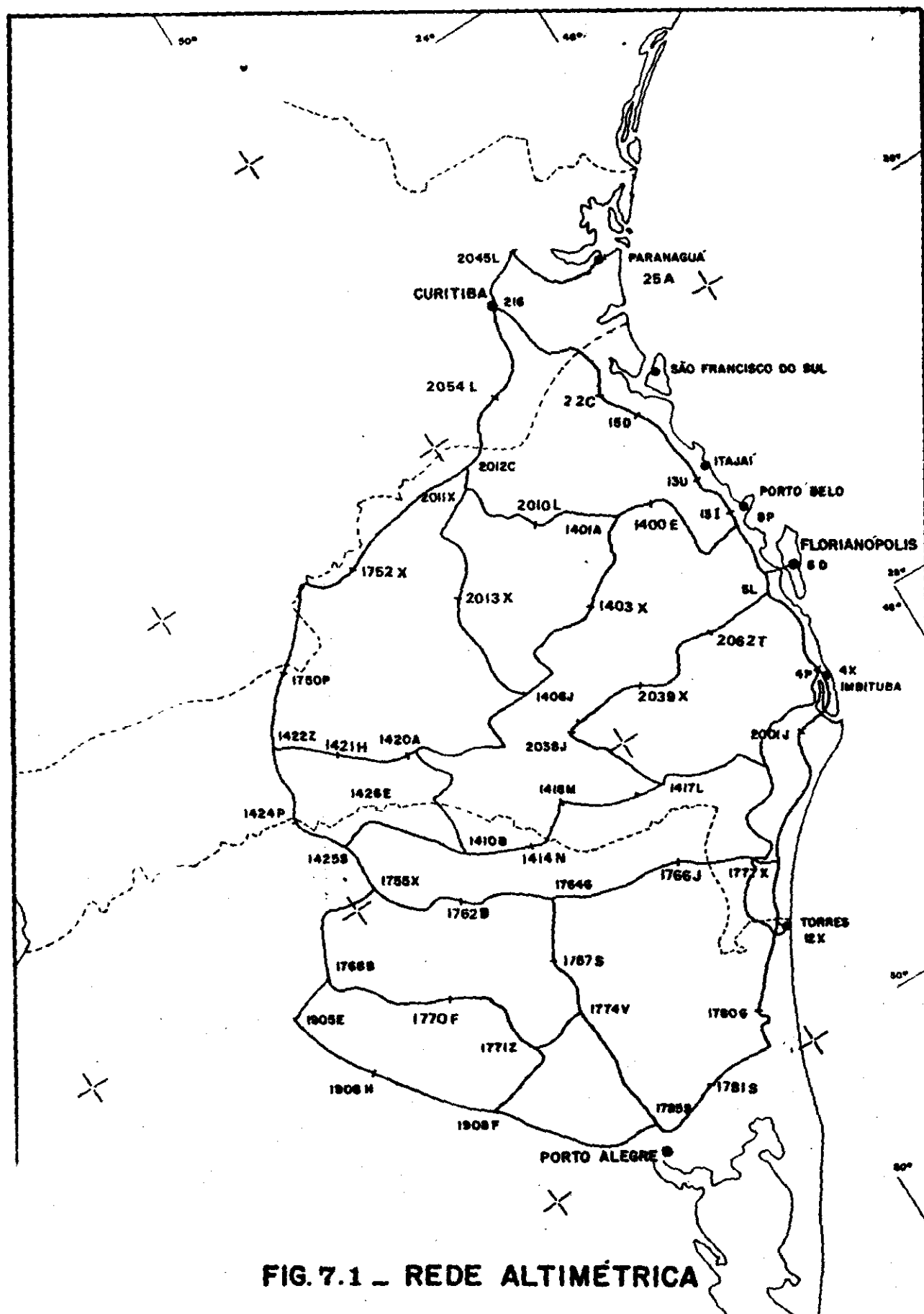


FIG. 7.1 - REDE ALTIMÉTRICA

No apêndice A é apresentada uma amostra do arquivo de RRNN, onde são discriminados os códigos, valores de gravidade com respectivas estimativas de desvios-padrão e valores preliminares de altitudes, obtidos por transporte a partir do marégrafo de Imbituba. A letra à frente do código designa um tipo especial de RN: conhecida (C), com altitude transportada a partir dos marégrafos, para as quais são apresentadas as respectivas estimativas de desvios-padrão; nodal (N), que constitui um nó da rede. Aquelas que não são precedidas de letra intercalam-se entre as conhecidas e nodais.

As altitudes maregráficas atribuídas às RRNN conhecidas foram extraídas do trabalho elaborado por de Alencar (1990). Para o transporte rigoroso deveriam ser conhecidos os valores de gravidade nos marégrafos. Face à inexistência de tais valores o transporte foi feito com base apenas nos desníveis observados. Contudo, considerando os curtos comprimentos das linhas de nivelamento usadas nos transportes, é pouco provável que haja diferenças significativas.

Uma amostragem dos desníveis observados pode ser encontrada no apêndice B. Estes são identificados pelos seus extremos (origem e destino) e para cada um, além do valor observado, é assinalado o comprimento da seção em km.

## **7.2. AJUSTAMENTO DA REDE.**

O primeiro passo a seguir no ajustamento de uma rede é a análise de sua coerência, onde são eliminados eventuais enganos e avaliadas as estimativas das precisões das observações, com vistas à atribuição de pesos. Esta não é uma operação apenas matemática, mas exige o conhecimento das circunstâncias em que as observações foram obtidas e, conseqüentemente, da magnitude dos erros aos quais podem estar sujeitas.

O critério de pesos para os desníveis foram abordados no item 6.2, onde a equação (6.7) define o peso em função do comprimento da seção. Resta, contudo, determinar o valor de  $\sigma_1$ . Nas especificações técnicas do IBGE a tolerância para fechamento de uma linha de nivelamento

de alta precisão é de  $2\text{ mm}\sqrt{S}$  e no caso de nivelamento de precisão é de  $4\text{ mm}\sqrt{S}$ . Portanto é razoável começar o ajustamento com um valor de  $\sigma_1$  compreendido entre 2 mm e 4 mm.

Para os valores de gravidade, considerando que em sua maior parte foram obtidos sem controle, ou seja, em perfil simples, sem volta, uma estimativa razoável de erro estaria situada nas proximidades de 0,1 mGal. Quanto as altitudes maregráficas, suas precisões são de difícil avaliação a priori, não só devido às razões relacionadas com a dinâmica dos oceanos, abordadas no item 4.1, como também à falta de informações precisas sobre os períodos de observações e demais circunstâncias envolvidas na obtenção daqueles valores. Assim, a única alternativa é arbitrar um valor inicial como desvio-padrão, igual para todas as altitudes maregráficas, adequando-os durante sucessivos ajustamentos, com base nos resíduos que lhes são atribuídos. Os valores finais obtidos desse modo são aqueles registrados no apêndice A ao lado das respectivas altitudes.

A fim de reduzir as dimensões do sistema de equações, com reflexo positivo no tempo de processamento e no espaço de armazenamento na memória do computador, o ajustamento da rede foi efetuado em duas etapas: inicialmente foram considerados apenas os desníveis internodais, entendendo-se por tais aqueles que interligam RRNN nodais (N) ou conhecidas (C), ou, ainda, uma nodal com uma conhecida. Com este artifício, as dimensões da matriz N na equação (6.10), são reduzidas ao número de estações nodais acrescido do número de conhecidas. Após o ajustamento nodal, foram ajustados os desníveis e altitudes intercaladas.

Com o objetivo de reduzir o comprimento de alguns desníveis internodais, de modo a torná-los mais homogêneos neste particular, foram inseridas na rede algumas RRNN nodais falsas, ou seja, que não são realmente nós da rede.

O apêndice C apresenta os 69 desníveis internodais que compõem a rede, calculados a partir dos desníveis observados apresentados no apêndice B, bem como o comprimento de cada um deles. A coluna índice serve apenas para assinalar com o número 1 os desníveis entre RRNN conhecidas. A composição dos desníveis internodais foi feita de modo que o comprimento máximo se situasse em torno de 100 km, visando a aplicabilidade da equação 6.4.

### 7.2.1. AJUSTAMENTO DA REDE NODAL.

O ajustamento da rede foi feito com base nos modelos propostos no capítulo 6, onde os valores de gravidade e as altitudes maregráficas são inseridos como injunções relativas, com pesos iguais aos inversos dos quadrados das estimativas dos respectivos desvios-padrão. O mesmo critério é usado para atribuição dos pesos aos desníveis observados. Como as observações são consideradas estatisticamente independentes, as matrizes dos pesos **P** e **P'** são diagonais, compostas pelos pesos obtidos conforme foi descrito no item anterior. Caso os desvios-padrão estimados estejam coerentes e, conseqüentemente, os pesos atribuídos sejam válidos, o valor da variância da observação de peso unitário a posteriori,  $\sigma_o^2$ , deve ser próximo da unidade. Após poucas tentativas o valor  $\sigma_o^2 = 0,99447$  foi obtido, adotando-se  $3,4 \text{ mm}\sqrt{5}$  para estimativa dos desvios-padrão dos desníveis e os valores registrados no apêndice A para as altitudes maregráficas. Quanto aos valores de gravidade, observou-se que com os desvios-padrão estimados em 0,1 mGal, não haviam correções para os valores iniciais destas grandezas, e que tais correções só apareciam, assim mesmo em valor negligenciável, a partir da estimativa de 0,5 mGal para os desvios-padrão, interferindo muito pouco no valor de  $\sigma_o^2$ . Portanto, este último valor foi adotado. Para os valores interpolados arbitrou-se a precisão de 5 mGal.

O apêndice D apresenta os resultados do ajustamento da rede nodal. No primeiro bloco são apresentados os valores dos parâmetros ajustados com as respectivas correções. No segundo bloco são exibidos os desníveis ajustados e seus respectivos resíduos. É importante notar que, como as próprias altitudes maregráficas foram utilizados para valores preliminares de altitudes (apêndice A), as correções a estes valores são os próprios resíduos. As correções obtidas foram as seguintes:

RN	Localidade	Correção (m)
25A	Paranaguá	-0,0182
15D	São Francisco do Sul	-0,0151
13U	Itajaí	0,0994
13 I	Porto Belo	0,2007
6O	Florianópolis	-0,1289

4X	Imbituba	-0,0050
12X	Torres	0,0152

Analisando os valores absolutos das correções, observa-se que o menor foi atribuído à RN 4X (Imbituba) que é o atual datum geodésico vertical brasileiro. O maior valor incidiu sobre a RN 13I (Porto Belo), seguida da 6O (Florianópolis) e 13U (Itajaí). O melhor valor em Imbituba pode ser explicado em função de seu maior período de registros maregráficos, que justificou a sua escolha para datum vertical. Motivo inverso pode ser alegado para os resultados mais desfavoráveis nas outras três referências. Entretanto, não se pode excluir a possibilidade de influência da topografia da superfície do mar, que poderia ser responsável pela maior correção em Porto Belo.

As correções incidentes sobre os valores de gravidade, que também coincidem com os resíduos, pela mesma razão apontada para o caso das altitudes maregráficas, são em sua maior parte na casa do microgal, com excessão daquelas RRNN para as quais os valores de gravidade foram obtidos por interpolação, cujos pesos são menores. Assim mesmo, nesses casos, as correções não passaram da casa dos centésimos de mGal (0,064 mGal para a RN 5L).

O maior resíduo obtido para os desníveis internodais foi de 43,8 mm, atribuído ao desnível de ordem 12. Este valor é da ordem de  $4 \text{ mm}\sqrt{S}$ , que é a tolerância admitida para o nivelamento de precisão. Os desvios-padrão dos desníveis ajustados, obtidos através da equação (6.17), são indicados ao lado de cada desnível. A última linha do apêndice D registra o valor de  $\sigma^2_0$  a posteriori, obtido no ajustamento.

### 7.2.2. AJUSTAMENTO DAS RRNN INTERCALADAS.

As altitudes nas RRNN intercaladas foram obtidas efetuando-se um ajustamento para cada linha internodal, de modo análogo ao empregado no ajustamento nodal. Contudo, neste caso, não é conveniente que os valores ajustados na primeira etapa sofram correções. Isso reintroduziria ambiguidades na rede, que é exatamente o que o ajustamento se propõe eliminar.

Assim, as altitudes e os valores de gravidade obtidos no primeiro ajustamento são considerados constantes, ou seja, isentos de erro nos ajustamentos intercalados. Todavia a matriz de covariâncias das altitudes ajustadas, dada pela equação (6.16), basicamente, será função dos erros cometidos nas observações dos desníveis, sem a influência das variâncias das grandezas ajustadas na primeira etapa. Para resolver este problema é necessário deduzir a influência da propagação das variâncias das altitudes e gravidades nodais na estimativa das variâncias das altitudes intercaladas. Isto pode ser feito considerando a equação (6.5) aplicada a um ponto genérico de ordem  $i$ , intercalado em uma linha internodal, cujos extremos são os pontos A e B. Neste caso, a altitude  $H_i$  no ponto de ordem  $i$  pode ser obtida resolvendo-se o sistema de equações:

$$\begin{aligned} g_A H_A - g_i H_i - [H_A^2 - (H_i^0)^2] \theta / 2 + (g_A + g_i) \delta l_{Ai} / 2 &= 0, \\ g_B H_B - g_i H_i - [H_B^2 - (H_i^0)^2] \theta / 2 + (g_B + g_i) \delta l_{Bi} / 2 &= 0. \end{aligned}$$

O único parâmetro do sistema é a própria altitude  $H_i$  que se deseja determinar. As observações são os desníveis  $\delta l_{Ai}$  e  $\delta l_{Bi}$ . Assim, as matrizes A e B serão dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} -g_i + \theta H_i^0 \\ -g_i + \theta H_i^0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} (g_A + g_i)/2 & 0 \\ 0 & (g_B + g_i)/2 \end{bmatrix}.$$

A solução do sistema conduz a:

$$x_i = c (aw_A + bw_B) / (a + b) \quad (7.1)$$

para

$$w_A = g_A H_A - g_i H_i^0 - [H_A^2 - (H_i^0)^2] \theta / 2 + (g_A + g_i) \delta l_{Ai}^0 / 2 \quad (7.2)$$

$$w_B = g_B H_B - g_i H_i^0 - [H_B^2 - (H_i^0)^2] \theta / 2 + (g_B + g_i) \delta l_{Bi}^0 / 2 \quad (7.3)$$

$$a = p_A / (g_A + g_i)^2 \quad (7.4)$$

$$b = p_B / (g_B + g_i)^2 \quad (7.5)$$

$$c = 1 / (g_i - \theta H_i^o) \quad (7.6)$$

onde  $p_A$  e  $p_B$  são respectivamente os pesos dos desníveis  $\delta l_{Ai}$  e  $\delta l_{Bi}$ . Como  $H_i = H_i^o + x_i$  e  $H_i^o = \text{constante}$ ,  $\sigma_{Hi}^2 = \sigma_{xi}^2$ . Portanto,  $H_i$  pode ser expressa como função das variáveis que compõem na expressão de  $x_i$ . Assim,

$$H_i = f(g_A, H_A, g_B, H_B, g_i, \delta l_{Ai}, \delta l_{Bi}), \quad (7.7)$$

já que  $\theta$ ,  $H_i^o$ ,  $p_A$  e  $p_B$  são constantes.

As variáveis que compõem a expressão de  $H_i$ , por sua vez, podem ser divididas em dois vetores:  $y = (H_A, H_B, g_A, g_B)^T$  e  $z = (g_i, \delta l_{Ai}, \delta l_{Bi})$ . O vetor  $y$  é composto pelas grandezas ajustadas na rede nodal, enquanto que  $z$  é composto pelas grandezas observadas. Portanto, pode-se escrever:

$$H_i = f(y, z)$$

e, portanto,

$$\sigma_{Hi}^2 = (\partial H_i / \partial y) C_y (\partial H_i / \partial y)^T + (\partial H_i / \partial z) C_z (\partial H_i / \partial z)^T \quad (7.8)$$

considerando que  $y$  e  $z$  são estatisticamente independentes.

O segundo termo do segundo membro de (7.8) corresponde ao termo de ordem  $i$  da diagonal principal da matriz de covariâncias, resultante do ajustamento dos desníveis intercalados, visto serem funções das mesmas variáveis. O primeiro termo representa a contribuição da propagação das variâncias das grandezas ajustadas na rede nodal e é o que se deseja deduzir. Assim, denotando este termo por  $\sigma_y^2$ ,

$$\sigma_y^2 = (\partial H_i / \partial y) C_y (\partial H_i / \partial y)^T \quad (7.9)$$

onde  $C_y$  é a matriz de covariâncias dos elementos de  $y$ , que é conhecida do ajustamento nodal e

$$\partial H_i / \partial y = (\partial H_i / \partial H_A, \partial H_i / \partial H_B, \partial H_i / \partial g_A, \partial H_i / \partial g_B)$$

sendo

$$\partial H_i / \partial H_A = ca(g_A - \theta H_A) / (a + b), \quad (7.10)$$

$$\partial H_i / \partial H_B = cb(g_B - \theta H_B) / (a + b), \quad (7.11)$$

$$\partial H_i / \partial g_A = ca[(a + b)(H_A + \delta l_{Ai} / 2) + 2b(w_B - w_A) / (g_A + g_i)] / (a + b)^2, \quad (7.12)$$

$$\partial H_i / \partial g_B = cb[(a + b)(H_B + \delta l_{Bi} / 2) + 2a(w_B - w_A) / (g_B + g_i)] / (a + b)^2. \quad (7.13)$$

Para efeito prático pode-se considerar que:  $c \cong 1/g$ ,  $a \cong p_A / 4g^2$ ,  $b \cong p_B / 4g^2$ ,  $g_A - \theta H_A \cong g_B - \theta H_B \cong g$  e  $g_A + g_i \cong g_B + g_i \cong 2g$ . Assim, substituindo nas derivadas parciais, tem-se:

$$\partial H_i / \partial H_A \cong p_A, \quad (7.14)$$

$$\partial H_i / \partial H_B \cong p_B, \quad (7.15)$$

$$\partial H_i / \partial g_A \cong [(H_A + \delta l_{Ai} / 2) + p_B(w_B - w_A) / g] p_A / g \quad e \quad (7.16)$$

$$\partial H_i / \partial g_B \cong [(H_B + \delta l_{Bi} / 2) + p_A(w_B - w_A) / g] p_B / g. \quad (7.17)$$

Estas equações são as expressões das componentes do vetor  $\partial H_i / \partial y$ , que, substituído na equação (7.9), fornece o valor de  $\sigma_y^2$ . Este valor adicionado ao  $i$ -ésimo elemento da diagonal principal da matriz de covariâncias das altitudes intercaladas ajustadas, fornece a estimativa da variância da altitude correspondente.

O apêndice E apresenta uma amostragem dos ajustamentos dos desníveis intercalados, consistindo de 6 linhas referentes aos desníveis internodais de ordem 3, 4, 10, 11, 13 e 14. Os resultados são dispostos na mesma forma utilizada no ajustamento da rede nodal. Observa-se,



entretanto, que os valores de  $\sigma^2_{\circ}$  a posteriori são diferentes entre si e todos são diferentes da unidade. Esta divergência de valores, deve-se ao fato de ter sido usado para os desníveis intercalados o mesmo padrão de peso utilizado no ajustamento nodal, ou seja,  $\sigma_{\delta_1} = 3,4 \text{ mm}\sqrt{S}$ . Aquele valor, entretanto, é representativo do total dos desníveis da rede. Cada desnível internodal pode apresentar desvio-padrão distinto dos demais, maior ou menor do que aquele que representa o conjunto, o que resulta em diferentes valores para  $\sigma^2_{\circ}$  a posteriori. Assim, os desníveis internodais 3, 4 e 14 apresentam valores de  $\sigma^2_{\circ}$  bem inferiores à unidade, o que significa que os pesos dos desníveis intercalados, neste caso, deveriam ser maiores. O desnível internodal 10 mostra valor de  $\sigma^2_{\circ}$  próximo da unidade, indicando que os pesos não devem ser muito diferentes do utilizado. As linhas referentes aos desníveis entre nós de ordens 11 e 13 exibem  $\sigma^2_{\circ}$  superiores à unidade, revelando que, neste caso, os pesos deveriam ser menores.

Embora o valor de  $\sigma^2_{\circ}$  a posteriori dependa dos pesos adotados, esta variação, contudo, não afeta o resultado final das matrizes de covariâncias, dadas pelas equações (6.16), (6.17) e (6.18), já que a mudança em  $\sigma^2_{\circ}$  é compensada pela alteração na matriz N em decorrência da mesma variação de peso.

O apêndice F exibe os valores das altitudes ajustadas para todas as RRNN da rede e os respectivos desvios-padrão. Ao final da lista encontra-se o valor de  $\theta$  adotado, ou seja,  $\theta = -0,0848 \text{ mGal/m}$ , o que indica tratar-se de altitudes de Helmert. Os desvios-padrão variam entre 3 e 6 cm, sendo menores para as estações mais próximas dos marégrafos e maiores nas mais afastadas, como consequência da propagação dos erros proporcionalmente às distâncias.

## CONCLUSÕES.

Os resultados apresentados no capítulo 7 mostram a adequação do modelo matemático proposto, ao ajustamento da rede altimétrica, tomada como exemplo. Os resíduos pequenos e normalmente distribuídos, com  $\sigma^2_0 = 0,999474$ , revelam que os resultados não estão afetados por efeitos sistemáticos significativos. A introdução das altitudes maregráficas como injunções relativas, através de um modelo secundário, revela o grau de coerência entre elas e ao mesmo tempo possibilita a adoção de um geóide intermediário como superfície de referência. Desse modo, além de se evitar a subordinação a uma única altitude maregráfica, que pode eventualmente estar sujeita a problemas de natureza operacional ou física (topografia da superfície do mar), o ajustamento é enriquecido com informações adicionais, geralmente disponíveis, ainda que de qualidade heterogênea.

O modelo matemático proposto permite a obtenção direta das altitudes em um único processo, ou seja, não necessita o cálculo prévio dos números geopotenciais ou a aplicação da correção ortométrica aos desníveis observados.

O ensaio feito no ítem 4.2.1 mostrou que a correção astronômica pode ser significativa para uma rede altimétrica com grande extensão na direção norte-sul. Considerando as dimensões territoriais do Brasil, seria aconselhável introduzi-la na rotina dos cálculos dos desníveis. O valor médio obtido, cerca de 8 cm, para uma linha entre as latitudes de  $0^\circ$  e  $-30^\circ$ , é maior do que os desvios-padrão estimados para as altitudes ajustadas neste trabalho.

Foram feitas algumas tentativas para se obter altitudes ortométricas sem a fixação do valor da variação da gravidade com a altitude no interior da crosta,  $\theta$ , inserindo-o como parâmetro a determinar. Entretanto esta iniciativa não teve êxito; o valor de  $\theta$  não convergiu em nenhuma tentativa. A causa deste insucesso pode estar relacionada com a falta de resolução do modelo para determinação de  $\theta$ , face à pequena magnitude do termo que o envolve, em comparação com os demais. Por isso, o valor de  $\theta$  foi considerado como constante igual a  $-0,0848\text{mGal/m}$ , o que conduz às altitudes de Helmert, conforme definida no ítem 3.4. Por

outro lado, como o efeito do não-paralelismo entre os geopes aumenta com a extensão da rede, principalmente devido à variação da componente centrífuga da gravidade e ao achatamento polar da Terra, a representabilidade do modelo matemático proposto é proporcional à variação de latitude abrangida pela rede. Para o intervalo de latitude da rede geodésica vertical brasileira este modelo é bastante representativo. Entretanto, para intervalos de latitude muito pequenos, os geopes tendem ao paralelismo, ou seja  $g = \text{constante}$ , negligenciando as influências menores devidas às anomalias decorrentes da heterogeneidade na distribuição de massas no interior da Terra e da topografia. Neste caso, o modelo matemático proposto tende a expressar apenas a relação entre as altitudes e os desníveis observados.

Talvez a maior dificuldade na tarefa de ajustamento de redes resida na necessidade de solução de grandes sistemas de equações. Com frequência é necessário recorrer-se à computadores de grande porte. Uma das maneiras de se contornar o problema é diminuir as dimensões do sistema de equações, resolvendo o problema para os nós da rede. Como as ambiguidades que se deseja eliminar se manifestam nesses pontos notáveis, ajustar a rede nodal é, praticamente, ajustar toda a rede, restando, após isso, tornar compatíveis as observações e parâmetros intercalados, ajustando-os aos nós. Um outro método seria a aplicação da técnica de partição de matrizes, resolvendo o sistema em sua dimensão total, por partes. Este método forneceria, em um único processo, os valores das grandezas ajustadas e suas estimativas de precisão em todos os pontos da rede. Neste trabalho adotou-se o método dos nós, por ser de mais simples programação e satisfazer o objetivo de testar o modelo matemático. A principal restrição a este método está relacionada com a aplicabilidade da equação (6.4) no tocante à distância entre os pontos extremos do intervalo. Entretanto, como pode ser visto no apêndice E, as magnitudes dos resíduos encontrados nos ajustamentos dos desníveis intercalados foram pequenas, a maioria na casa do décimo de milímetro, o que mostra que a distância da ordem de 100 km, adotada para os intervalos internodais, é compatível com a solução do problema.

Finalmente, é importante ressaltar que a realização de um sistema de altitudes depende fundamentalmente de três tipos de grandezas observáveis: nível do mar, desníveis e gravidade. No Brasil, a atividade de nivelamento tem sido executada pelo IBGE desde 1945, contando hoje com mais de 150000 km nivelados (de Alencar, 1990), contudo a gravimetria sobre RRNN

apenas recentemente começou a ser executada com mais intensidade, o que possibilitou a realização deste trabalho. Porém, é necessário que sejam apoiadas as iniciativas no sentido de se incorporar a gravimetria à rotina do nivelamento geométrico de precisão, incluindo aí os marégrafos. Afinal, sem gravimetria o nivelamento de precisão perde boa parte do seu sentido. Quanto às medições do nível do mar, é imperiosa a adoção de um sistema de coordenação dessa atividade, tão importante para a Geodésia, que permita o levantamento das condições atuais dos marégrafos existentes nas costas brasileiras e a padronização dos sistemas operacionais, de modo a se obter informações homogêneas e de alta qualidade, compatíveis com a qualidade do nivelamento e da gravimetria que estão sendo executados.

**APÊNDICE A**  
**VALORES DE GRAVIDADE E ALTITUDES PRELIMINARES**

VALORES DE GRAVIDADE E ALTITUDES PRELIMINARES

NO. ORD.	ESTAÇÃO	GRAVIDADE(mGal)	DPG	ALTITUDE(m)	DPAL
1	N 2045L	978779.61	0.50	843.270	0.0
2	2047A	978774.60	0.50	869.080	0.0
3	2047B	978764.57	0.50	907.290	0.0
4	2047C	978798.21	0.50	720.180	0.0
5	2047D	978823.82	0.50	579.790	0.0
6	2047E	978844.72	0.50	469.260	0.0
7	2047F	978868.14	0.50	353.290	0.0
8	2047G	978897.41	0.50	203.460	0.0
9	2047H	978928.78	0.50	80.460	0.0
10	2047J	978938.18	0.50	56.860	0.0
11	2047L	978948.72	0.50	24.860	0.0
12	2047M	978938.76	0.50	74.950	0.0
13	2047N	978950.09	0.50	20.820	0.0
14	2047V	978955.19	0.50	10.150	0.0
15	2047X	978956.90	0.50	11.160	0.0
16	24K	978957.98	0.50	8.260	0.0
17	2048A	978958.83	0.50	7.030	0.0
18	2048B	978957.37	0.50	9.540	0.0
19	2048C	978955.99	0.50	7.420	0.0
20	2048D	978950.53	0.50	21.660	0.0
21	2048E	978954.14	0.50	9.830	0.0
22	2048F	978955.04	0.50	19.310	0.0
23	2048H	978953.83	0.50	17.270	0.0
24	2048J	978958.54	0.50	13.600	0.0
25	2048L	978963.43	0.50	10.690	0.0
26	2048M	978963.33	0.50	15.450	0.0
27	2048N	978966.37	0.50	9.400	0.0
28	2048P	978965.90	0.50	9.260	0.0
29	2048R	978966.03	0.50	11.410	0.0
30	2048T	978966.01	0.50	4.710	0.0
31	2048U	978966.44	0.50	3.900	0.0
32	C 25A	978967.91	0.50	3.633	0.050
33	2042J	978757.67	0.50	926.010	0.0
34	2053H	978757.04	0.50	921.560	0.0
35	2053L	978754.91	0.50	929.120	0.0
36	2053V	978759.62	0.50	911.070	0.0
37	2053X	978761.90	0.50	911.420	0.0
38	2053Z	978769.77	0.50	878.420	0.0
39	2054A	978773.15	0.50	880.710	0.0
40	2054C	978770.98	0.50	904.670	0.0
41	2054D	978770.86	0.50	902.600	0.0
42	2054E	978772.80	0.50	893.220	0.0
43	2054F	978770.21	0.50	901.520	0.0
44	2054G	978772.29	0.50	894.040	0.0
45	2054H	978767.47	0.50	916.920	0.0
46	2054J	978764.36	0.50	926.480	0.0
47	N 2054L	978761.33	0.50	936.160	0.0
48	2054M	978761.10	0.50	937.050	0.0

49	2054N	978766.26	0.50	909.340	0.0
----	-------	-----------	------	---------	-----

VALORES DE GRAVIDADE E ALTITUDES PRELIMINARES

NO. ORD.	ESTAÇÃO	GRAVIDADE(mGal)	DPG	ALTITUDE(m)	DPAL
344	1409U	978868.88	0.50	887.520	0.0
345	1409N	978901.38	0.50	708.540	0.0
346	1409M	978900.56	0.50	714.020	0.0
347	1409L	978896.84	0.50	737.320	0.0
348	1409J	978890.06	0.50	770.270	0.0
349	1409H	978884.61	0.50	786.390	0.0
350	1409C	978845.69	0.50	995.440	0.0
351	1409E	978857.74	0.50	917.310	0.0
352	1409D	978853.22	0.50	942.850	0.0
353	1409A	978855.34	0.50	1012.180	0.0
354	1408Z	978863.66	0.50	964.450	0.0
355	15I	979017.05	0.50	14.510	0.0
356	15J	979016.60	5.00	4.970	0.0
357	15K	979016.50	5.00	6.190	0.0
358	C 15D	979021.60	5.00	2.977	0.050
359	15E	979025.55	0.50	3.950	0.0
360	14S	979016.75	0.50	10.810	0.0
361	14R	979017.45	0.50	9.540	0.0
362	14O	979026.55	0.50	10.570	0.0
363	14L	979030.15	0.50	7.980	0.0
364	14I	979029.85	0.50	16.760	0.0
365	14G	979038.35	0.50	11.160	0.0
366	14D	979044.15	0.50	9.990	0.0
367	14B	979047.75	0.50	6.440	0.0
368	13V	979048.35	0.50	2.860	0.0
369	C 13U	979051.80	5.00	1.500	0.100
370	13T	979055.45	0.50	1.700	0.0
371	13R	979057.95	0.50	9.480	0.0
372	13O	979053.35	0.50	4.230	0.0
373	13M	979032.95	0.50	121.270	0.0
374	13J	979063.60	5.00	2.088	0.0
375	C 13I	979066.85	0.50	2.552	0.200
376	13F	979065.95	0.50	2.390	0.0
377	N 8P	979064.65	0.50	2.120	0.0
378	8K	979068.15	0.50	15.660	0.0
379	8G	979081.35	0.50	7.360	0.0
380	8C	979095.45	0.50	4.750	0.0
381	C 6O	979105.45	0.50	8.518	0.150
382	N 21G	978772.00	5.00	906.760	0.0
383	19J	978811.00	0.50	780.850	0.0
384	13E	979066.83	0.50	1.710	0.0
385	21I	978772.56	0.50	916.090	0.0
386	21L	978769.94	0.50	890.240	0.0
387	21N	978765.44	0.50	925.660	0.0
388	21P	978764.56	0.50	963.150	0.0
389	21R	978784.25	0.50	945.710	0.0
390	21T	978790.06	0.50	913.130	0.0

391	21V	978795.13	0.50	926.030	0.0
392	21Y	978813.06	0.50	858.080	0.0

VALORES DE GRAVIDADE E ALTITUDES PRELIMINARES

NO. ORD.	ESTAÇÃO	GRAVIDADE(mGal)	DPG	ALTITUDE(m)	DPAL
687	S5N	979100.88	5.00	7.130	0.0
688	5M	979098.38	0.50	4.950	0.0
689	5N	979100.81	5.00	7.630	0.0
690	5K	979110.94	0.50	16.080	0.0
691	5B	979145.88	0.50	10.150	0.0
692	C 4X	979152.63	5.00	8.636	0.050
693	N 4P	979153.63	0.50	19.790	0.0
694	1446X	979122.25	0.50	119.030	0.0
695	1446V	979113.94	0.50	147.940	0.0
696	1446T	979104.94	0.50	188.230	0.0
697	1446S	979091.31	0.50	244.950	0.0
698	1446R	979071.88	0.50	326.980	0.0
699	1446N	979075.31	0.50	296.210	0.0
700	1446H	979090.13	0.50	219.970	0.0
701	1446G	979074.88	0.50	289.880	0.0
702	1446F	979061.00	0.50	348.150	0.0
703	1446D	979059.81	0.50	346.240	0.0
704	1446B	979041.75	0.50	431.600	0.0
705	1445Z	979007.94	0.50	581.720	0.0
706	1445X	978986.88	0.50	671.750	0.0
707	N 1445V	978962.50	0.50	768.940	0.0
708	1445M	978853.81	0.50	1356.070	0.0
709	1445J	978874.88	0.50	1245.010	0.0
710	1445G	978883.88	0.50	1203.440	0.0
711	1445E	978859.44	0.50	1312.250	0.0
712	1445D	978880.94	0.50	1201.540	0.0
713	1445B	978838.13	0.50	1415.240	0.0
714	1417N	978851.75	0.50	1353.800	0.0
715	1417P	978824.00	0.50	1385.390	0.0
716	1417U	978821.44	0.50	1480.490	0.0
717	1417X	978823.63	0.50	1467.280	0.0
718	1417Z	978821.81	0.50	1485.330	0.0
719	1444X	978855.06	0.50	1320.440	0.0
720	1444Z	978856.31	0.50	1322.930	0.0
721	1445A	978827.06	0.50	1473.200	0.0
722	1445H	978880.38	0.50	1218.370	0.0
723	1445L	978869.25	0.50	1277.090	0.0
724	1445N	978850.38	0.50	1370.340	0.0
725	1445P	978834.31	0.50	1419.140	0.0
726	1445R	978850.69	0.50	1346.190	0.0
727	C 12X	979220.94	0.05	18.015	0.050
728	4O	979155.88	0.50	7.560	0.0
729	4M	979162.44	0.50	6.220	0.0
730	4L	979166.13	0.50	6.560	0.0
731	4I	979136.25	0.50	10.290	0.0
732	4G	979102.25	0.50	121.310	0.0



733		4D	979121.94	0.50	32.300	0.0
734		4A	979131.06	0.50	15.810	0.0
735	N	1K	979133.75	0.50	13.200	0.0

VALORES DE GRAVIDADE E ALTITUDES PRELIMINARES

NO. ORD.	ESTAÇÃO	GRAVIDADE(mGal)	DPG	ALTITUDE(m)	DPAL
1226	1906M	979063.19	0.50	663.020	0.0
1227	1906L	979050.88	0.50	711.970	0.0
1228	1906F	979046.00	0.50	724.340	0.0
1229	N 1906H	979050.00	0.50	719.660	0.0
1230	1906E	979047.94	0.50	691.820	0.0
1231	1906C	979063.38	0.50	567.240	0.0
1232	1906B	979074.75	0.50	493.250	0.0
1233	1905Z	979054.88	0.50	583.350	0.0
1234	1905X	979079.31	0.50	458.440	0.0
1235	1905V	979074.06	0.50	477.010	0.0
1236	1905U	979084.69	0.50	423.230	0.0
1237	1905T	979063.56	0.50	517.700	0.0
1238	1905S	979078.19	0.50	452.040	0.0
1239	1905R	979086.19	0.50	415.110	0.0
1240	1905P	979074.38	0.50	472.600	0.0
1241	1905N	979071.00	0.50	500.380	0.0
1242	1905M	979084.88	0.50	442.530	0.0
1243	1905J	979063.25	0.50	553.840	0.0
1244	1905H	979072.94	0.50	503.270	0.0
1245	1905G	979067.00	0.50	520.780	0.0
1246	1905F	979058.75	0.50	541.250	0.0
1247	N 1905E	979051.50	0.50	563.410	0.0
1248	1784C	979246.94	0.50	43.940	0.0

**APÊNDICE B**  
**DESNÍVEIS OBSERVADOS**

# DESNÍVEIS OBSERVADOS

NO. ORD.	ORIGEM	DESTINO	DESNÍVEL(m)	DISTÂNCIA(km)
1	1422Z	1423A	5.8550	3.01
2	1423A	1423B	-40.5550	3.30
3	1423B	1423F	-159.4981	5.00
4	1423F	1423G	-50.4105	2.89
5	1423G	1423H	-85.5489	2.15
6	1423H	1423L	-117.1822	5.71
7	1423L	1423N	13.8444	5.97
8	1423N	1423P	151.5326	2.72
9	1423P	1423R	25.5026	3.07
10	1423R	1423T	-139.2090	4.75
11	1423T	1424E	-45.5618	6.51
12	1424E	1424G	-86.6014	6.47
13	1424G	1424H	-68.7702	3.33
14	1424H	1424J	-76.2338	3.31
15	1424J	1424L	-88.8270	3.08
16	1424L	1424M	128.6600	2.82
17	1424M	1424P	100.5736	5.27
18	1422Z	1427T	-51.3477	6.13
19	1427T	1427V	-37.5274	6.67
20	1427V	1427X	22.2968	3.09
21	1427X	1427Z	45.0211	3.12
22	1427Z	1428A	-90.0228	3.00
23	1428A	1428B	-14.2811	2.30
24	1428B	1428E	52.5489	3.18
25	1428E	1428F	20.2159	2.78
26	1428F	1428G	-145.4316	2.99
27	1428G	1428H	-105.9706	2.74
28	1428H	1428J	-4.0604	1.47
29	1428J	1428M	18.5850	3.12
30	1428M	1428N	-19.4795	2.48
31	1428N	1428P	-1.7893	1.30
32	1428P	1428S	51.5621	3.70
33	1428S	1428T	-73.8774	2.75
34	1428T	1428U	131.9850	2.22
35	1428U	1428X	101.5484	4.18
36	1428X	1429A	-36.4648	5.47
37	1429A	1429B	-43.3099	2.88
38	1429B	1429C	-13.8366	3.02
39	1429C	1429D	28.2758	2.50
40	1429D	1429G	-183.2863	6.86
41	1429G	1429H	-63.8122	2.88
42	1429H	1429J	-33.1936	3.12
43	1429J	1429R	31.8203	2.87
44	1429R	1429U	80.9642	6.45
45	1429U	1429X	-4.1788	5.41
46	1750P	1750R	-39.2802	3.43
47	1750R	1750S	-58.3804	3.07
48	1750S	1750T	-40.1290	3.17
49	1750T	1750U	-14.3612	3.09

# DESNÍVEIS OBSERVADOS

NO. ORD.	ORIGEM	DESTINO	DESNÍVEL(m)	DISTÂNCIA (km)
638	2039P	2039R	51.4221	2.67
639	2039R	2039S	-22.5476	2.80
640	2039S	2039T	-11.4153	2.78
641	2039T	2039U	-26.0381	2.41
642	2039U	2039V	56.9332	2.50
643	2039V	2039X	-22.6980	2.83
644	2039X	2039Z	-20.8061	2.90
645	2039Z	2061G	22.0638	2.83
646	2061G	2061H	-20.8450	2.80
647	2061H	2061J	9.5133	3.09
648	2061J	2061L	-3.6874	2.86
649	2061L	2061M	23.1528	2.93
650	2061M	2061N	-16.6289	2.86
651	2061N	2061P	11.3544	3.09
652	2061P	2061R	10.8834	3.02
653	2061R	2061S	-1.0579	2.80
654	2061S	2061T	1.7669	2.36
655	2061T	2061U	-2.8893	2.05
656	2061U	2061V	10.6725	2.90
657	2061V	2061X	-15.3066	2.81
658	2061X	2061Z	-50.2332	2.87
659	2061Z	2062A	-63.9772	2.68
660	2062A	2062C	-223.2189	5.12
661	2062C	2062D	-75.8459	2.18
662	2062D	2062E	-9.0542	1.41
663	2062E	2062M	130.8677	15.31
664	2062M	2062N	53.3125	2.60
665	2062N	2062R	317.5388	5.07
666	2062R	2062S	88.2731	2.66
667	2062S	2062T	-69.5015	2.70
668	2062T	2062U	-179.9292	2.20
669	2062U	2062V	-102.3636	2.63
670	2062V	2062X	-51.8131	2.76
671	2062X	2062Z	-10.4864	2.80
672	2062Z	2063B	200.3286	4.80
673	2063B	2063C	37.3672	2.42
674	2063C	2063D	-63.7804	2.31
675	2063D	2063E	-17.2484	0.88
676	2063E	2063F	-13.2480	2.63
677	2063F	2063G	25.4130	2.60
678	2063G	2063J	-355.8583	4.61
679	2063J	2063L	-149.0966	2.73
680	2063L	2063M	-68.0132	2.82
681	2063M	2063N	-12.2586	2.53
682	2063N	2063P	-22.1242	2.71
683	2063P	2063R	-7.3530	2.27
684	2063R	2063T	-33.4128	5.48
685	2063T	2063U	-27.3793	2.17
686	2063U	2063V	-70.9622	2.51

# DESNÍVEIS OBSERVADOS

NO. ORD.	ORIGEM	DESTINO	DESNÍVEL(m)	DISTÂNCIA(km)
1226	1908B	1908C	-78.7672	3.16
1227	1908C	1908D	32.3710	3.30
1228	1908D	1908E	3.4616	3.11
1229	1908E	1908F	-22.7446	2.82
1230	1905E	1905F	-22.1147	3.32
1231	1905F	1905G	-20.4956	3.57
1232	1905G	1905H	-17.4934	3.06
1233	1905H	1905J	50.5368	2.69
1234	1905J	1905M	-111.2834	6.23
1235	1905M	1905N	57.8648	4.24
1236	1905N	1905P	-28.0282	3.63
1237	1905P	1905R	-57.2597	3.33
1238	1905R	1905S	36.9306	3.33
1239	1905S	1905T	65.6754	3.17
1240	1905T	1905U	-94.5270	3.11
1241	1905U	1905V	53.8227	3.00
1242	1905V	1905X	-18.5778	3.24
1243	1905X	1905Z	124.9154	3.62
1244	1905Z	1906B	-90.1074	6.84
1245	1906B	1906C	73.7718	3.35
1246	1906C	1906E	124.8063	6.20
1247	1906E	1906F	32.5217	2.93
1248	1906F	1906H	-4.6627	3.42
1249	1768B	1768C	-39.5862	3.26
1250	1768C	1768D	-22.0352	2.98
1251	1768D	1768F	3.2030	6.66
1252	1768F	1768G	-12.2231	3.04
1253	1768G	1768H	-46.2754	3.10
1254	1768H	1768L	28.0622	6.40
1255	1768L	1768M	-9.9386	2.80
1256	1768M	1768N	-24.1484	3.23
1257	1768N	1768P	7.3538	3.91
1258	1768P	1768R	-19.0942	3.60
1259	1768R	1905E	3.8589	3.31

**APÊNDICE C**  
**DESNÍVEIS INTERNODAIS OBSERVADOS**

**DESNÍVEIS INTERNODAIS OBSERVADOS**

<b>NO. ORD.</b>	<b>ORIGEM</b>	<b>DESTINO</b>	<b>DESNÍVEL(m)</b>	<b>DISTÂNCIA</b>	<b>ÍNDICE</b>
1	2045L	25A	-839.9180	85.99	0
2	2045L	21G	63.2269	50.75	0
3	2054L	21G	-29.6989	66.64	0
4	2054L	2012C	-69.2575	83.46	0
5	2012C	1752X	-100.8661	97.12	0
6	2012C	2011X	-21.4026	11.70	0
7	2011X	2010L	-24.4404	79.10	0
8	2011X	2013X	395.1993	103.51	0
9	2010L	1401A	-752.3488	71.95	0
10	1401A	1400E	-52.1993	15.92	0
11	1401A	1403X	297.9278	102.96	0
12	1400E	8P	-14.5182	112.59	0
13	1403X	1406J	489.5622	91.56	0
14	1406J	2013X	384.4120	96.59	0
15	1406J	1420A	-87.5022	115.31	0
16	1752X	1752E	-15.4549	40.06	0
17	1752E	1750P	591.8522	88.11	0
18	1750P	1422Z	-235.1116	61.70	0
19	1422Z	1424P	-532.4297	69.36	0
20	1422Z	1429X	-337.0465	98.68	0
21	1422Z	1421H	-246.2942	63.14	0
22	1424P	1425S	42.7266	53.17	0
23	1421H	1420A	-92.2993	71.32	0
24	1420A	1410B	177.0290	94.75	0
25	15D	13U	-1.3531	73.26	1
26	15D	22C	767.6816	86.89	0
27	13U	13I	1.1538	37.41	1
28	13I	8P	-0.6165	14.12	0
29	8P	6O	6.2691	49.84	0
30	6O	5L	-4.2505	25.85	0
31	21G	22C	-136.0607	59.56	0
32	1417L	2038J	-446.7891	86.63	0
33	1417L	1418M	-350.2664	119.56	0
34	1417L	1445V	-590.4319	66.23	0
35	2062T	2039X	-106.3471	81.90	0
36	2062T	5L	-977.9875	79.92	0
37	2039X	2038J	36.8591	79.75	0
38	1418M	1414N	-46.4083	62.86	0
39	1414N	1410B	-16.8356	65.00	0
40	1410B	1425S	-328.1614	104.36	0
41	1425S	1755X	12.1736	44.86	0
42	5L	4P	15.5526	60.24	0
43	4X	4P	11.0222	12.66	0
44	4P	1K	-6.3952	85.29	0
45	4P	2001J	-12.1861	73.53	0
46	1445V	2	-707.1730	76.60	0
47	12X	12E	25.8648	70.30	0
48	1K	2	48.7040	74.04	0
49	2	12E	-18.0075	86.91	0

# DESNÍVEIS INTERNODAIS OBSERVADOS

NO. ORD.	ORIGEM	DESTINO	DESNÍVEL(m)	DISTÂNCIA	ÍNDICE
50	2001J	1777X	15.0224	81.23	0
51	1777X	1766J	1049.1649	99.40	0
52	1777X	1780G	-8.2458	86.63	0
53	1766J	1764G	-109.2416	81.55	0
54	1764G	1762B	-127.8300	74.89	0
55	1764G	1767S	-213.3375	47.10	0
56	1762B	1755X	-204.5190	61.89	0
57	1755X	1768B	64.6665	90.30	0
58	1768B	1770F	-213.1223	89.83	0
59	1768B	1905E	-130.8232	42.29	0
60	1770F	1771Z	189.6632	103.46	0
61	1767S	1774V	-284.0127	80.47	0
62	1774V	1785S	-457.2805	109.02	0
63	1774V	1771Z	206.1227	59.72	0
64	1771Z	1908F	-617.5634	100.10	0
65	1785S	1781S	18.7199	75.80	0
66	1785S	1908F	45.9009	108.14	0
67	1780G	1781S	12.1513	81.51	0
68	1908F	1906H	666.5459	110.87	0
69	1906H	1905E	-156.2956	72.28	0



**APÊNDICE D**  
**DESNÍVEIS INTERNODAIS AJUSTADOS**

# DESNÍVEIS INTERNODAIS AJUSTADOS

RN	ALT. AJUST.	CORR. A	G AJUST.	CORR. G
2045L	843.5765	0.3065	978779.609	-0.001
25A	3.6151	-0.0182	978967.909	-0.001
2054L	936.5054	0.3454	978761.330	0.000
2012C	867.2250	0.4350	978789.040	-0.000
2011X	845.8175	0.2775	978793.620	-0.000
2010L	821.3160	0.2360	978854.721	0.001
1401A	68.9052	0.0052	979033.132	0.002
1400E	16.6992	0.1092	979049.300	0.000
1403X	366.8624	0.2824	978992.842	0.002
1406J	856.4874	0.1174	978887.691	0.001
2013X	1241.0147	0.4847	978754.470	-0.000
1752X	766.3715	0.3815	978803.610	-0.000
1752E	750.9211	0.1711	978808.561	0.001
1750P	1342.8172	0.4772	978732.191	0.001
1422Z	1107.6376	0.4576	978815.459	-0.001
1429X	770.6027	0.3327	978831.910	-0.000
1424P	575.1297	0.3897	978961.649	-0.001
1421H	861.3246	0.4046	978858.480	-0.000
1420A	769.0080	0.3080	978891.920	0.000
15D	2.9615	-0.0151	979021.643	0.043
13U	1.5993	0.0994	979051.801	0.001
13I	2.7529	0.2007	979066.850	0.000
8P	2.1371	0.0171	979064.650	0.000
6O	8.3892	-0.1289	979105.450	-0.000
21G	906.8010	0.0410	978772.001	0.001
22C	770.6979	-0.0121	978829.441	0.001
1417L	1359.6070	0.4471	978850.380	-0.000
2062T	982.2856	0.2656	978886.131	0.001
2039X	875.9408	0.2408	978898.440	-0.000
2038J	912.8094	0.2393	978890.630	0.000
1418M	1009.2926	0.4027	978905.191	0.001
1414N	962.8544	0.1645	978929.690	0.000
1410B	946.0294	0.4593	978910.380	0.000
1425S	617.8700	0.4701	978946.630	-0.000
5L	4.1270	-0.0730	979298.064	0.064
4X	8.6312	-0.0050	979152.629	-0.001
4P	19.6531	-0.1369	979153.630	-0.000
1445V	769.1218	0.1819	978962.497	-0.003
12X	18.0297	0.0152	979220.940	0.000
1K	13.2339	0.0339	979133.750	-0.000
2	61.9166	-0.7634	979136.748	-0.002
12E	43.9008	0.0008	979176.630	0.000
2001J	7.4515	0.1015	979163.750	-0.000
1777X	22.4567	0.3367	979180.187	-0.003
1766J	1071.6821	0.4321	978938.997	-0.003
1764G	962.4186	0.1386	978950.001	0.001
1762B	834.5776	0.4775	978949.191	0.001
1755X	630.0330	0.4729	978976.941	0.001
1768B	694.6662	0.4062	979009.940	0.000

# DESNÍVEIS INTERNODAIS AJUSTADOS

RN	ALT. AJUST.	CORR. A	G AJUST.	CORR. G
1770F	481.5132	0.2832	979051.940	0.000
1767S	749.0361	0.3462	979021.810	-0.000
1774V	464.9856	-0.0244	979112.311	0.001
1771Z	671.1324	0.0025	979078.750	-0.000
1785S	7.6494	0.1594	979289.561	0.001
1780G	14.2130	0.2930	979241.880	0.000
1781S	26.3665	0.2765	979283.880	-0.000
1908F	53.5336	0.4036	979244.749	-0.001
1906H	720.1229	0.4630	979049.999	-0.001

# DESNÍVEIS INTERNODAIS AJUSTADOS

NO.	ORD.	ORIGEM	DESTINO	DESNÍVEL(m)	DIST. (km)	RES. (m)	DPDES (m)
1		2045L	25A	-839.9107	85.99	0.0073	0.02900
2		2045L	21G	63.2226	50.75	-0.0043	0.02313
3		2054L	21G	-29.6967	66.64	0.0022	0.02586
4		2054L	2012C	-69.2603	83.46	-0.0028	0.02835
5		2012C	1752X	-100.8485	97.12	0.0176	0.03035
6		2012C	2011X	-21.4051	11.70	-0.0025	0.01146
7		2011X	2010L	-24.4512	79.10	-0.0108	0.02658
8		2011X	2013X	395.1912	103.51	-0.0081	0.02961
9		2010L	1401A	-752.3586	71.95	-0.0098	0.02570
10		1401A	1400E	-52.2055	15.92	-0.0062	0.01335
11		1401A	1403X	297.9538	102.96	0.0260	0.02985
12		1400E	8P	-14.5620	112.59	-0.0438	0.03098
13		1403X	1406J	489.5853	91.56	0.0231	0.02868
14		1406J	2013X	384.4195	96.59	0.0075	0.02896
15		1406J	1420A	-87.4821	115.31	0.0201	0.03148
16		1752X	1752E	-15.4476	40.06	0.0073	0.02075
17		1752E	1750P	591.8682	88.11	0.0160	0.02921
18		1750P	1422Z	-235.1004	61.70	0.0112	0.02517
19		1422Z	1424P	-532.4210	69.36	0.0087	0.02555
20		1422Z	1429X	-337.0465	98.68	-0.0000	0.03388
21		1422Z	1421H	-246.2907	63.14	0.0035	0.02437
22		1424P	1425S	42.7333	53.17	0.0067	0.02298
23		1421H	1420A	-92.2953	71.32	0.0040	0.02551
24		1420A	1410B	177.0508	94.75	0.0218	0.02809
25		15D	13U	-1.3621	73.26	-0.0090	0.02575
26		15D	22C	767.6861	86.89	0.0045	0.02808
27		13U	13I	1.1536	37.41	-0.0002	0.01966
28		13I	8P	-0.6158	14.12	0.0007	0.01254
29		8P	6O	6.2523	49.84	-0.0168	0.02220
30		6O	5L	-4.2609	25.85	-0.0104	0.01665
31		21G	22C	-136.0638	59.56	-0.0031	0.02426
32		1417L	2038J	-446.7948	86.63	-0.0057	0.02904
33		1417L	1418M	-350.2840	119.56	-0.0176	0.03338
34		1417L	1445V	-590.4178	66.23	0.0141	0.02572
35		2062T	2039X	-106.3417	81.90	0.0054	0.02839
36		2062T	5L	-977.9928	79.92	-0.0053	0.02810
37		2039X	2038J	36.8644	79.75	0.0053	0.02808
38		1418M	1414N	-46.4175	62.86	-0.0092	0.02559
39		1414N	1410B	-16.8452	65.00	-0.0096	0.02597
40		1410B	1425S	-328.1527	104.36	0.0087	0.02892
41		1425S	1755X	12.1830	44.86	0.0094	0.02204
42		5L	4P	15.5243	60.24	-0.0283	0.02343
43		4X	4P	11.0219	12.66	-0.0003	0.01194
44		4P	1K	-6.4195	85.29	-0.0243	0.02778
45		4P	2001J	-12.2015	73.53	-0.0154	0.02753
46		1445V	2	-707.1567	76.60	0.0163	0.02731
47		12X	12E	25.8698	70.30	0.0050	0.02681
48		1K	2	48.6829	74.04	-0.0211	0.02637
49		2	12E	-18.0137	86.91	-0.0062	0.02932

# DESNÍVEIS INTERNODAIS AJUSTADOS

NO. ORD.	ORIGEM	DESTINO	DESNÍVEL(m)	DIST. (km)	RES. (m)	DPDES (m)
50	2001J	1777X	15.0054	81.23	-0.0170	0.02874
51	1777X	1766J	1049.1404	99.40	-0.0245	0.02984
52	1777X	1780G	-8.2425	86.63	0.0033	0.02893
53	1766J	1764G	-109.2617	81.55	-0.0201	0.02775
54	1764G	1762B	-127.8516	74.89	-0.0216	0.02635
55	1764G	1767S	-213.3355	47.10	0.0020	0.02182
56	1762B	1755X	-204.5369	61.89	-0.0179	0.02448
57	1755X	1768B	64.6593	90.30	-0.0072	0.02875
58	1768B	1770F	-213.1386	89.83	-0.0163	0.02802
59	1768B	1905E	-130.8189	42.29	0.0043	0.02098
60	1770F	1771Z	189.6444	103.46	-0.0188	0.02931
61	1767S	1774V	-284.0093	80.47	0.0034	0.02695
62	1774V	1785S	-457.3028	109.02	-0.0223	0.02769
63	1774V	1771Z	206.1374	59.72	0.0147	0.02309
64	1771Z	1908F	-617.5568	100.10	0.0066	0.02672
65	1785S	1781S	18.7170	75.80	-0.0029	0.02741
66	1785S	1908F	45.8829	108.14	-0.0180	0.02850
67	1780G	1781S	12.1544	81.51	0.0031	0.02824
68	1908F	1906H	666.5347	110.87	-0.0112	0.03053
69	1906H	1905E	-156.3029	72.28	-0.0073	0.02625

VARIÂNCIA DA OBSERVAÇÃO DE PESO UNITÁRIO = 0.994474211

**APÊNDICE E**  
**DESNÍVEIS INTERCALADOS AJUSTADOS**

DESNÍVEIS INTERCALADOS AJUSTADOS  
DESNÍVEL INTERNODAL 3 ( 2054L - 21G )

RN	ALT. AJUST.	CORR. A	G AJUST.	CORR. G
2054J	926.8526	0.3726	978764.360	-0.000
2054H	917.0444	0.1244	978767.470	-0.000
2054G	894.3722	0.3322	978772.290	-0.000
2054F	901.8593	0.3393	978770.210	-0.000
2054E	893.5354	0.3154	978772.800	0.000
2054D	902.9392	0.3392	978770.860	0.000
2054C	905.0091	0.3391	978770.980	-0.000
2054A	881.0571	0.3471	978773.150	-0.000
2053Z	878.7820	0.3620	978769.770	0.000
2053X	911.7469	0.3269	978761.900	0.000
2053V	911.4447	0.3747	978759.620	0.000
2053L	929.1377	0.0177	978754.910	0.000
2053H	921.8910	0.3310	978757.040	-0.000
2042J	926.1398	-0.0042	978757.670	0.000
2042H	923.9682	0.3382	978757.880	-0.000
2042G	888.5121	0.3221	978765.360	-0.000

ORIGEM	DESTINO	DESNÍVEL(m)	DISTÂNCIA(km)	RESÍDUO(m)	DPDES(m)
2054L	2054J	-9.6507	2.71	0.0001	0.00044
2054J	2054H	-9.8060	2.75	0.0001	0.00045
2054H	2054G	-22.6695	2.70	0.0001	0.00044
2054G	2054F	7.4857	2.77	0.0001	0.00045
2054F	2054E	-8.3221	2.81	0.0001	0.00045
2054E	2054D	9.4027	3.02	0.0001	0.00047
2054D	2054C	2.0702	2.82	0.0001	0.00045
2054C	2054A	-23.9519	3.60	0.0001	0.00051
2054A	2053Z	-2.2783	2.90	0.0001	0.00046
2053Z	2053X	32.9603	1.90	0.0001	0.00037
2053X	2053V	-0.3043	2.76	0.0001	0.00045
2053V	2053L	17.6900	5.04	0.0002	0.00059
2053L	2053H	-7.2453	4.78	0.0002	0.00058
2053H	2042J	4.2498	7.52	0.0003	0.00071
2042J	2042H	-2.1716	1.12	0.0000	0.00029
2042H	2042G	-35.4519	1.86	0.0001	0.00037
2042G	21G	18.2964	15.58	0.0005	0.00095

VARIÂNCIA DA OBSERVAÇÃO DE PESO UNITÁRIO = 0.189498138E-01

DESNÍVEIS INTERCALADOS AJUSTADOS  
DESNÍVEL INTERNODAL 4 ( 2054L - 2012C )

RN	ALT. AJUST.	CORR. A	G AJUST.	CORR. G
2054M	937.4478	0.3978	978761.100	0.000
2054N	909.7326	0.3926	978766.260	0.000
2055C	881.6849	0.3149	978780.210	0.000
2055D	836.5627	0.3127	978790.120	0.000
2055E	822.8629	0.2929	978794.240	0.000
2055G	813.3821	0.2921	978797.160	-0.000
2055H	853.3227	0.2827	978790.050	0.000
19J	780.9924	0.1424	978811.000	0.000
2012F	788.4280	0.3280	978808.130	-0.000
2012E	802.4431	0.3431	978805.030	-0.000

ORIGEM	DESTINO	DESNIVEL(m)	DISTÂNCIA (km)	RESÍDUO (m)	DPDES (m)
2054L	2054M	0.9423	2.92	-0.0001	0.00060
2054M	2054N	-27.7126	2.92	-0.0001	0.00060
2054N	2055C	-28.0370	8.80	-0.0003	0.00101
2055C	2055D	-45.1169	2.99	-0.0001	0.00061
2055D	2055E	-13.6972	2.88	-0.0001	0.00060
2055E	2055G	-9.4791	2.82	-0.0001	0.00059
2055G	2055H	39.9375	3.00	-0.0001	0.00061
2055H	19J	-72.3180	44.89	-0.0018	0.00163
19J	2012F	7.4338	4.04	-0.0002	0.00070
2012F	2012E	14.0135	2.38	-0.0001	0.00055
2012E	2012C	64.7730	5.82	-0.0002	0.00083
VARIÂNCIA DA OBSERVAÇÃO DE PESO UNITÁRIO =				0.321420002E-01	



DESNÍVEIS INTERCALADOS AJUSTADOS  
DESNÍVEL INTERNODAL 10 ( 1401A - 1400E )

RN	ALT. AJUST.	CORR. A	G AJUST.	CORR. G
1400Z	60.7752	0.2052	979034.450	0.000
1400J	64.9170	0.2370	979034.970	0.000
1400L	36.7332	0.0032	979041.070	0.000
1400H	36.3218	0.2018	979044.330	0.000
1400G	27.4910	0.3610	979043.750	0.000
1400F	32.7813	0.3313	979046.820	0.000

ORIGEM	DESTINO	DESNÍVEL(m)	DISTÂNCIA(km)	RESÍDUO(m)	DPDES(m)
1401A	1400Z	-8.1300	2.14	-0.0008	0.00212
1400Z	1400J	4.1418	2.96	-0.0012	0.00241
1400J	1400L	-28.1836	1.55	-0.0006	0.00184
1400L	1400H	-0.4112	1.86	-0.0007	0.00199
1400H	1400G	-8.8309	2.80	-0.0011	0.00236
1400G	1400F	5.2905	2.90	-0.0011	0.00239
1400F	1400E	-16.0821	1.71	-0.0007	0.00192
VARIÂNCIA DA OBSERVAÇÃO DE PESO UNITÁRIO =				0.604217226E+00	

**DESNÍVEIS INTERCALADOS AJUSTADOS**  
**DESNÍVEL INTERNODAL 11 ( 1401A - 1403X )**

RN	ALT. AJUST.	CORR. A	G AJUST.	CORR. G
1401C	75.1438	0.2838	979029.380	0.000
1401D	72.5028	0.1528	979029.310	0.000
1401E	79.9296	0.2996	979029.310	0.000
1401F	76.4847	0.2947	979026.290	-0.000
1401G	78.6189	0.3489	979026.940	0.000
1401J	81.1814	0.1514	979021.900	0.000
1401L	81.2951	0.1651	979023.110	0.000
1401N	87.8371	0.0171	979023.910	0.000
1401R	93.2767	0.2667	979024.530	0.000
1401S	99.7007	0.1207	979023.200	0.000
1401T	111.1976	0.1776	979021.330	0.000
1401V	130.2659	-0.0341	979017.003	0.003
1402B	395.7481	0.2881	978963.492	0.002
1402C	333.2144	0.2244	978976.530	-0.000
1402D	345.7297	0.0397	978975.390	0.000
1402E	345.3977	0.3077	978980.470	-0.000
1402F	338.3425	0.2725	978982.420	-0.000
1403H	342.3035	0.3035	978989.550	-0.000
1403J	338.2523	0.2823	978993.080	-0.000
1403L	341.3371	0.3471	978995.410	0.000
1403S	355.5012	0.2912	978993.591	0.001
1403T	402.7899	0.3599	978983.061	0.001
1403U	442.6109	0.3809	978975.720	-0.000

ORIGEM	DESTINO	DESNÍVEL(m)	DISTÂNCIA(km)	RESÍDUO(m)	DPDES (m)
1401A	1401C	6.2383	5.64	0.0016	0.00675
1401C	1401D	-2.6410	2.48	0.0007	0.00455
1401D	1401E	7.4268	2.82	0.0008	0.00484
1401E	1401F	-3.4452	2.90	0.0008	0.00491
1401F	1401G	2.1343	2.98	0.0009	0.00497
1401G	1401J	2.5621	5.63	0.0016	0.00675
1401J	1401L	0.1138	2.73	0.0008	0.00477
1401L	1401N	6.5421	4.68	0.0013	0.00618
1401N	1401R	5.4396	5.63	0.0016	0.00675
1401R	1401S	6.4240	2.03	0.0006	0.00412
1401S	1401T	11.4967	2.60	0.0007	0.00466
1401T	1401V	19.0680	5.86	0.0017	0.00687
1401V	1402B	265.4738	9.87	0.0028	0.00874
1402B	1402C	-62.5307	2.64	0.0008	0.00469
1402C	1402D	12.5152	2.78	0.0008	0.00481
1402D	1402E	-0.3302	2.79	0.0008	0.00482
1402E	1402F	-7.0547	2.40	0.0007	0.00448
1402F	1403H	3.9636	15.60	0.0045	0.01064
1403H	1403J	-4.0501	2.59	0.0007	0.00465
1403J	1403L	3.0856	2.54	0.0007	0.00460
1403L	1403S	14.1639	5.78	0.0017	0.00683
1403S	1403T	47.2862	2.32	0.0007	0.00440
1403T	1403U	39.8194	2.62	0.0008	0.00467
1403U	1403X	-75.7441	5.05	0.0015	0.00641

VARIÂNCIA DA OBSERVAÇÃO DE PESO UNITÁRIO = 0.213754713E+01

DESNÍVEIS INTERCALADOS AJUSTADOS  
DESNÍVEL INTERNODAL 13 ( 1403X - 1406J )

RN	ALT. AJUST.	CORR. A	G AJUST.	CORR. G
1403Z	374.6441	0.2841	978991.980	-0.000
1404B	355.9978	0.4078	978994.340	-0.000
1404D	354.3197	0.0397	978994.770	0.000
1404F	380.1571	0.2771	978990.090	0.000
1404G	357.9688	0.2888	978994.121	0.001
1404J	437.9537	0.2837	978974.474	0.004
1404N	751.0291	0.4091	978902.774	0.004
1404R	856.1641	0.3941	978880.221	0.001
1404T	868.9594	0.3794	978878.690	-0.000
1404U	847.4394	0.3694	978884.660	-0.000
1404X	848.0175	0.3775	978888.810	0.000
1404Z	891.2339	0.3439	978881.920	0.000
1405C	884.1584	0.1084	978886.419	-0.001
1405M	834.2809	0.3109	978892.020	-0.000
1405R	861.0164	0.4064	978885.750	0.000
1405S	836.7283	0.2783	978890.450	0.000
1405T	878.4751	0.3051	978882.580	0.000
1405U	883.8693	0.3293	978881.810	-0.000
1406B	866.5717	0.3917	978885.940	-0.000
1406C	861.2608	0.3808	978888.080	0.000
1406D	868.3054	0.3854	978886.930	-0.000
1406E	826.8171	0.3471	978895.060	-0.000
1406F	843.4344	0.0944	978891.280	0.000

ORIGEM	DESTINO	DESNÍVEL(m)	DISTÂNCIA(km)	RESÍDUO(m)	DPDES(m)
1403X	1403Z	7.7817	1.79	0.0005	0.00359
1403Z	1404B	-18.6461	3.23	0.0009	0.00478
1404B	1404D	-1.6780	0.85	0.0002	0.00248
1404D	1404F	25.8365	3.03	0.0009	0.00463
1404F	1404G	-22.1875	3.16	0.0009	0.00473
1404G	1404J	79.9797	5.43	0.0015	0.00612
1404J	1404N	313.0479	7.77	0.0022	0.00722
1404N	1404R	105.1238	4.27	0.0012	0.00546
1404R	1404T	12.7950	5.24	0.0015	0.00602
1404T	1404U	-21.5164	2.91	0.0008	0.00454
1404U	1404X	0.5817	5.68	0.0016	0.00625
1404X	1404Z	43.2136	2.79	0.0008	0.00445
1404Z	1405C	-7.0721	6.18	0.0017	0.00650
1405C	1405M	-49.8762	11.25	0.0032	0.00850
1405M	1405R	26.7320	8.20	0.0023	0.00740
1405R	1405S	-24.2858	2.72	0.0008	0.00440
1405S	1405T	41.7430	1.71	0.0005	0.00351
1405T	1405U	5.3939	2.46	0.0007	0.00419
1405U	1406B	-17.2952	2.09	0.0006	0.00387
1406B	1406C	-5.3094	2.21	0.0006	0.00398
1406C	1406D	7.0442	2.31	0.0007	0.00406
1406D	1406E	-41.4843	2.40	0.0007	0.00414
1406E	1406F	16.6153	2.30	0.0007	0.00405
1406F	1406J	13.0508	1.58	0.0004	0.00337

VARIÂNCIA DA OBSERVAÇÃO DE PESO UNITÁRIO = 0.183203307E+01

**DESNÍVEIS INTERCALADOS AJUSTADOS**  
**DESNÍVEL INTERNODAL 14 ( 1406J - 2013X )**

RN	ALT. AJUST.	CORR. A	G AJUST.	CORR. G
2015G	986.9375	0.3175	978851.890	0.000
2015F	920.6427	0.3627	978862.100	-0.000
2015E	961.5466	0.4566	978854.660	0.000
2015C	1082.6903	0.3803	978826.570	0.000
2015B	1056.3818	0.3418	978824.900	-0.000
2014X	933.3396	0.4096	978833.240	-0.000
2014V	986.6736	0.4636	978819.140	0.000
2014U	960.9345	0.1345	978823.660	-0.000
2014T	974.0902	0.3402	978821.440	0.000
2014R	1057.9658	0.3358	978806.320	0.000
2014N	1084.0893	0.3893	978805.330	0.000
2014J	1146.4432	0.4432	978791.310	0.000
2014G	1128.8893	0.1493	978792.320	-0.000
2014F	1136.7933	0.4433	978789.700	-0.000
2014E	1065.6175	0.3775	978804.490	-0.000
2014D	1093.9202	0.4002	978794.650	0.000
2014C	1129.8144	0.4044	978787.460	0.000
2014B	1130.5082	0.4382	978784.840	0.000
2014A	1135.3806	0.4506	978781.790	0.000

ORIGEM	DESTINO	DESNÍVEL(m)	DISTÂNCIA(km)	RESÍDUO(m)	DPDES (m)
1406J	2015G	130.4268	13.03	0.0011	0.00288
2015G	2015F	-66.2903	3.04	0.0003	0.00147
2015F	2015E	40.9001	3.19	0.0003	0.00150
2015E	2015C	121.1251	5.90	0.0005	0.00202
2015C	2015B	-26.3128	3.62	0.0003	0.00160
2015B	2014X	-123.0444	9.40	0.0008	0.00250
2014X	2014V	53.3246	2.36	0.0002	0.00130
2014V	2014U	-25.7367	2.88	0.0003	0.00143
2014U	2014T	13.1546	3.14	0.0003	0.00149
2014T	2014R	83.8673	6.19	0.0005	0.00206
2014R	2014N	26.1248	6.22	0.0005	0.00207
2014N	2014J	62.3439	9.40	0.0008	0.00250
2014J	2014G	-17.5544	4.28	0.0004	0.00173
2014G	2014F	7.9017	1.16	0.0001	0.00092
2014F	2014E	-71.1659	3.20	0.0003	0.00151
2014E	2014D	28.2945	3.61	0.0003	0.00160
2014D	2014C	35.8895	3.01	0.0003	0.00146
2014C	2014B	0.6909	2.94	0.0003	0.00145
2014B	2014A	4.8693	3.72	0.0003	0.00162
2014A	2013X	105.6118	6.30	0.0005	0.00208
VARIÂNCIA DA OBSERVAÇÃO DE PESO UNITÁRIO =				0.183542314E+00	

**APÊNDICE F**  
**ALTITUDES AJUSTADAS**

\* ALTITUDES AJUSTADAS \*  
\* MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS \*

NO. ORD.	ESTAÇÃO	ALTITUDE (m)	DPAL
1	N 2045L	843.576	0.039
2	2047A	869.392	0.039
3	2047B	907.636	0.039
4	2047C	720.466	0.038
5	2047D	580.079	0.038
6	2047E	469.594	0.038
7	2047F	353.548	0.038
8	2047G	203.712	0.038
9	2047H	80.729	0.037
10	2047J	57.117	0.037
11	2047L	25.135	0.037
12	2047M	75.210	0.037
13	2047N	21.025	0.037
14	2047V	10.459	0.037
15	2047X	11.415	0.037
16	24K	8.526	0.037
17	2048A	7.340	0.037
18	2048B	9.842	0.036
19	2048C	7.694	0.037
20	2048D	21.872	0.037
21	2048E	10.151	0.037
22	2048F	19.703	0.037
23	2048H	17.545	0.037
24	2048J	13.896	0.037
25	2048L	10.975	0.037
26	2048M	15.769	0.037
27	2048N	9.661	0.037
28	2048P	9.542	0.038
29	2048R	11.653	0.038
30	2048T	4.797	0.038
31	2048U	4.136	0.039
32	C 25A	3.615	0.039
33	2053H	921.891	0.037
34	2053L	929.138	0.038
35	2053V	911.445	0.038
36	2053X	911.747	0.038
37	2053Z	878.782	0.038
38	2054A	881.057	0.038
39	2054C	905.009	0.039
40	2054D	902.939	0.039
41	2054E	893.535	0.040
42	2054F	901.859	0.040
43	2054G	894.372	0.040
45	2054H	917.044	0.041
46	2054J	926.853	0.041
47	N 2054L	936.505	0.042
48	2054M	937.448	0.041
49	2054N	909.733	0.041

\* ALTITUDES AJUSTADAS \*  
\* MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS \*

NO. ORD.	ESTAÇÃO	ALTITUDE (m)	DPAL
50	2055D	836.563	0.040
51	2055E	822.863	0.040
52	2055G	813.382	0.040
53	2055H	853.323	0.040
54	2055C	881.685	0.040
55	2012F	788.428	0.041
56	2012E	802.443	0.042
57	N 2012C	867.225	0.042
58	2012B	830.935	0.042
59	2012A	837.524	0.042
60	2011Z	832.539	0.042
61	N 2011X	845.817	0.043
62	2011V	932.763	0.042
63	2011U	948.014	0.042
64	2011T	934.272	0.042
65	2011P	962.179	0.042
66	2011N	1011.558	0.042
67	2011M	979.310	0.042
68	2011H	924.355	0.042
69	2011G	955.045	0.042
70	2011F	936.210	0.042
71	2011E	945.588	0.042
72	2011D	938.410	0.042
73	2011C	970.628	0.042
74	2011B	939.416	0.042
75	2011A	943.703	0.042
76	2010Z	938.961	0.042
77	2010X	965.822	0.042
78	2010V	989.591	0.043
79	2010U	968.076	0.043
80	2010T	974.265	0.043
81	2010S	957.176	0.043
82	2010R	969.856	0.044
83	2010B	517.805	0.043
84	2010D	522.087	0.043
85	2010E	526.680	0.043
86	2010G	601.721	0.044
87	2010H	654.914	0.044
88	N 2010L	821.316	0.045
89	2010P	980.469	0.044
90	2010J	711.924	0.045
91	2010A	519.042	0.042
92	2009Z	524.102	0.042
93	2009X	486.649	0.042
94	2009V	440.705	0.042
95	2009U	407.074	0.042
96	2009T	295.441	0.042
97	2009S	228.108	0.042
98	2009R	146.073	0.042

\* ALTITUDES AJUSTADAS \*  
\* MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS \*

NO. ORD.	ESTAÇÃO	ALTITUDE(m)	DPAL
99	2009P	139.952	0.042
100	2009M	87.390	0.042
101	1402T	67.331	0.042
102	1402L	62.840	0.042
103	N 1401A	68.905	0.043
104	1400Z	60.775	0.042
105	1400J	64.917	0.042
106	1400L	36.733	0.042
107	1400H	36.322	0.042
108	1400G	27.491	0.042
109	1400F	32.781	0.042
110	N 1400E	16.699	0.042
111	1401C	75.144	0.043
112	1401D	72.503	0.043
113	1401E	79.930	0.043
114	1401F	76.485	0.043
115	1401G	78.619	0.043
116	1401J	81.181	0.044
117	1401L	81.295	0.044
118	1401N	87.837	0.044
119	1401R	93.277	0.044
120	1401S	99.701	0.044
121	1401T	111.198	0.045
122	1401V	130.266	0.045
123	1402B	395.748	0.045
124	1402C	333.214	0.046
125	1402D	345.730	0.046
126	1402E	345.398	0.046
127	1402F	338.343	0.046
128	1403H	342.304	0.047
129	1403J	338.252	0.047
130	1403L	341.337	0.047
131	1403S	355.501	0.047
132	1403T	402.790	0.047
133	1403U	442.611	0.047
134	N 1403X	366.862	0.048
135	1403Z	374.644	0.048
136	1404B	355.998	0.048
137	1404D	354.320	0.048
138	1404F	380.157	0.047
139	1404G	357.969	0.047
140	1404J	437.954	0.047
141	1404N	751.029	0.047
142	1404R	856.164	0.047
143	1404T	868.959	0.047
144	1404U	847.439	0.047
145	1404X	848.017	0.047
146	1404Z	891.234	0.047
147	1405C	884.158	0.047



\* ALTITUDES AJUSTADAS \*  
\* MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS \*

NO. ORD.	ESTAÇÃO	ALTITUDE (m)	DPAL
148	1405M	834.281	0.047
149	1405R	861.016	0.046
150	1405S	836.728	0.046
151	1405T	878.475	0.046
152	1405U	883.869	0.046
153	1406B	866.572	0.046
154	1406C	861.261	0.046
155	1406D	868.305	0.046
156	1406E	826.817	0.046
157	1406F	843.434	0.046
158	N 1406J	856.487	0.047
159	1406P	863.140	0.046
160	2015G	986.938	0.046
161	2015F	920.643	0.046
162	2015E	961.547	0.045
163	2015C	1082.690	0.045
164	2015B	1056.382	0.045
165	2014X	933.340	0.045
166	2014V	986.674	0.045
167	2014U	960.934	0.045
168	2014T	974.090	0.045
169	2014R	1057.966	0.045
170	2014N	1084.089	0.045
171	2014J	1146.443	0.046
172	2014G	1128.889	0.046
173	2014F	1136.793	0.046
174	2014E	1065.618	0.046
175	2014D	1093.920	0.047
176	2014C	1129.814	0.047
177	2014B	1130.508	0.047
178	2014A	1135.381	0.047
179	N 2013X	1241.015	0.048
180	2013V	1247.568	0.048
181	2013U	1154.991	0.047
182	1747Z	1164.049	0.047
183	2013T	1109.208	0.047
184	2013P	802.022	0.046
185	2013N	816.013	0.046
186	2013M	800.821	0.045
187	2013L	804.363	0.045
188	2013C	803.591	0.043
189	2013D	797.161	0.044
190	2013F	804.004	0.044
191	2013G	804.628	0.044
192	2013H	798.664	0.044
193	2013B	813.475	0.043
194	2013A	842.925	0.043
195	2012Z	836.112	0.043
196	2012X	820.410	0.043

\* ALTITUDES AJUSTADAS \*  
\* MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS \*

NO. ORD.	ESTAÇÃO	ALTITUDE (m)	DPAL
197	2012V	816.480	0.043
198	2012U	838.999	0.043
199	2012T	801.905	0.043
200	2012S	794.924	0.042
201	2012P	809.540	0.042
202	2012N	816.173	0.042
203	2012M	843.414	0.042
204	2012J	925.029	0.042
205	1754M	823.314	0.042
206	1754L	909.893	0.042
207	1754J	829.786	0.042
208	1754H	907.179	0.042
209	1754F	866.663	0.043
210	1754E	846.385	0.043
211	1754C	797.017	0.043
212	1754A	811.632	0.043
213	1753Z	799.453	0.043
214	1753V	810.697	0.044
215	1753U	811.658	0.044
216	1753T	797.062	0.044
217	1753P	784.219	0.045
218	1753M	778.441	0.045
219	1753L	796.885	0.045
220	1753H	829.690	0.046
221	1753G	781.316	0.046
222	1753F	778.378	0.046
223	1753E	771.622	0.047
224	1753C	809.339	0.047
225	1753B	764.094	0.048
226	1753A	771.298	0.048
227	1752Z	787.338	0.048
228	N 1752X	766.372	0.049
229	1752V	762.162	0.049
230	1752T	810.521	0.049
231	1752S	767.550	0.048
232	1752R	758.470	0.048
233	1752M	752.393	0.049
234	1752L	752.444	0.049
235	1752G	751.059	0.049
236	1752F	750.236	0.050
237	N 1752E	750.921	0.050
238	N 1750P	1342.817	0.050
239	1750R	1303.528	0.050
240	1750S	1245.136	0.050
241	1750T	1205.000	0.049
242	1750U	1190.634	0.049
243	1750V	1239.598	0.049
244	1750X	1232.170	0.048
245	1750Z	1252.167	0.048

\* ALTITUDES AJUSTADAS \*  
\* MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS \*

NO. ORD.	ESTAÇÃO	ALTITUDE(m)	DPAL
246	1751A	1243.946	0.048
247	1751B	1244.026	0.048
248	1751C	1236.801	0.048
249	1751D	1240.008	0.048
250	1751E	1202.709	0.048
251	1751F	1072.228	0.048
252	1751G	1096.863	0.048
253	1751L	1068.207	0.048
254	1751M	1034.158	0.048
255	N 1422Z	1107.638	0.048
256	1427T	1056.290	0.048
257	1427V	1018.755	0.049
258	1427X	1041.054	0.049
259	1427Z	1086.083	0.049
260	1428A	996.053	0.049
261	1428B	981.771	0.049
262	1428E	1034.328	0.049
263	1428F	1054.551	0.049
264	1428G	909.109	0.050
265	1428H	803.135	0.050
266	1428J	799.077	0.050
267	1428M	817.664	0.050
268	1428N	798.183	0.051
269	1428P	796.394	0.051
270	1428S	847.965	0.051
271	1428T	774.081	0.051
272	1428U	906.081	0.052
273	1428X	1007.646	0.052
274	1429A	971.180	0.053
275	1429B	927.867	0.053
276	1429C	914.029	0.054
277	1429D	942.307	0.054
278	1429G	758.996	0.055
279	1429H	695.176	0.056
280	1429J	661.978	0.056
281	1429U	774.777	0.058
282	1429R	693.802	0.057
283	N 1429X	770.603	0.059
284	N 1424P	575.130	0.049
285	1424M	474.551	0.049
286	1424L	345.886	0.048
287	1424J	434.716	0.048
288	1424H	510.955	0.048
289	1424G	579.729	0.048
290	1424E	666.337	0.047
291	1423T	711.902	0.047
292	1423R	851.127	0.047
293	1423P	825.624	0.047
294	1423N	674.080	0.047

\* ALTITUDES AJUSTADAS \*  
\* MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS \*

NO. ORD.	ESTAÇÃO	ALTITUDE(m)	DPAL
295	1423L	660.236	0.047
296	1423H	777.431	0.047
297	1423G	862.991	0.047
298	1423F	913.408	0.048
299	1423A	1113.491	0.048
300	1423B	1072.928	0.048
301	1422X	1150.944	0.048
302	1422V	1182.402	0.048
303	1422U	1165.918	0.048
304	1422R	880.227	0.047
305	1422P	851.381	0.047
306	1422M	870.677	0.047
307	1422J	947.138	0.047
308	1422G	945.522	0.047
309	1422C	856.452	0.048
310	1422D	968.482	0.047
311	1422B	817.775	0.048
312	1422A	736.038	0.048
313	1421Z	775.036	0.048
314	1421X	773.371	0.048
315	1421M	537.185	0.048
316	1421L	673.158	0.049
317	1421J	738.425	0.049
318	N 1421H	861.325	0.049
319	1421G	810.432	0.049
320	1421F	674.373	0.049
321	1421E	690.845	0.048
322	1421D	835.321	0.048
323	1421B	738.786	0.048
324	1421A	840.718	0.047
325	1420R	934.944	0.046
326	1420T	947.168	0.047
327	1420V	872.977	0.047
328	1420X	868.311	0.047
329	1420Z	850.831	0.047
330	1420U	884.788	0.047
331	1420N	910.564	0.046
332	1420M	876.315	0.046
333	1420L	898.855	0.046
334	1420J	929.782	0.046
335	1420H	922.442	0.046
336	1420G	895.892	0.046
337	1420F	872.663	0.046
338	1420E	893.929	0.046
339	1420D	934.483	0.047
340	1420C	815.543	0.047
341	1420B	790.228	0.047
342	N 1420A	769.008	0.047
343	1409V	860.403	0.047

\* ALTITUDES AJUSTADAS \*  
\* MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS \*

NO. ORD.	ESTAÇÃO	ALTITUDE(m)	DPAL
344	1409U	887.950	0.047
345	1409N	708.912	0.046
346	1409M	714.165	0.046
347	1409L	737.744	0.046
348	1409J	770.655	0.046
349	1409H	786.727	0.045
350	1409C	995.835	0.045
351	1409E	917.693	0.045
352	1409D	943.140	0.045
353	1409A	1012.578	0.045
354	1408Z	964.858	0.045
355	15I	14.454	0.034
356	15J	4.946	0.034
357	15K	6.168	0.034
358	C 15D	2.962	0.033
359	15E	3.891	0.034
360	14S	10.839	0.033
361	14R	9.477	0.033
362	14O	10.511	0.032
363	14L	7.920	0.032
364	14I	16.699	0.032
365	14G	11.099	0.032
366	14D	9.921	0.033
367	14B	6.372	0.033
368	13V	2.959	0.035
369	C 13U	1.599	0.035
370	13T	1.641	0.035
371	13R	9.408	0.034
372	13O	4.163	0.034
373	13M	121.280	0.034
374	13J	2.288	0.035
375	C 13I	2.753	0.035
376	13F	2.377	0.035
377	N 8P	2.137	0.035
378	8K	15.645	0.035
379	8G	7.361	0.035
380	8C	4.754	0.035
381	C 6O	8.389	0.036
382	N 21G	906.801	0.038
383	19J	780.992	0.041
384	13E	1.877	0.035
385	21I	916.089	0.037
386	21L	890.250	0.037
387	21N	925.677	0.036
388	21P	963.167	0.036
389	21R	945.709	0.036
390	21T	913.209	0.036
391	21V	926.024	0.037
392	21Y	858.070	0.037

\* ALTITUDES AJUSTADAS \*  
\* MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS \*

NO. ORD.	ESTAÇÃO	ALTITUDE(m)	DPAL
393	N	22A	871.288
394		22C	770.698
395		22D	707.613
396		22F	401.382
397		22G	256.165
398		22I	140.494
399		22J	90.932
400		22K	50.005
401		22M	22.633
402		22N	21.608
403		22P	7.886
404		22S	23.656
405		17I	22.017
406		2045B	907.518
407		2045C	924.477
408		2045D	918.876
409		2045E	915.126
410		2045F	859.590
411		2045G	834.187
412		2045H	836.872
413		2045J	854.195
414		2043A	898.187
415		2043B	896.085
416		2043C	921.869
417		2042G	888.512
418		2042H	923.968
419		2042J	926.140
420		2004S	5.362
421		2004R	4.635
422		2004P	32.835
423		2004H	4.096
424		2004G	5.098
425		2004F	4.916
426		2004D	8.244
427		2004C	4.236
428		2004A	69.549
429		2003Z	61.826
430		2003V	15.629
431		2003U	9.472
432		2003T	5.751
433		2003S	16.808
434		2003R	22.772
435		2003P	25.295
436	N	1417L	1359.607
437		2061F	1286.415
438		2061E	1168.604
439		2061D	1272.226
440		2061B	1243.141
441		2061A	1250.653

\* ALTITUDES AJUSTADAS \*  
\* MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS \*

NO. ORD.	ESTAÇÃO	ALTITUDE(m)	DPAL
442	2064D	8.028	0.049
443	2064C	18.320	0.051
444	2064B	9.546	0.053
445	2064A	12.634	0.055
446	2063Z	35.601	0.057
447	2063X	69.768	0.058
448	2063V	59.930	0.059
449	2063U	130.897	0.060
450	2063T	158.279	0.061
451	2063R	191.700	0.062
452	2063P	199.056	0.063
453	2063N	221.184	0.063
454	2063M	233.446	0.063
455	2063L	301.463	0.063
456	2063J	450.571	0.062
457	2063G	806.463	0.061
458	2063F	781.056	0.060
459	2063E	794.309	0.059
460	2063D	811.561	0.059
461	2063C	875.350	0.058
462	2063B	837.983	0.057
463	2062Z	637.647	0.054
464	2062X	648.138	0.051
465	2062V	699.958	0.049
466	2062U	802.333	0.046
467	N 2062T	982.286	0.043
468	2062S	1051.795	0.043
469	2062R	963.512	0.043
470	2062N	645.946	0.043
471	2062M	592.630	0.043
472	2062E	461.758	0.043
473	2062D	470.813	0.043
474	2062C	546.663	0.043
475	2062A	769.898	0.043
476	2061Z	833.880	0.043
477	2061X	884.117	0.043
478	2061V	899.424	0.043
479	2061U	888.750	0.043
480	2061T	891.641	0.043
481	2061S	889.875	0.044
482	2061R	890.933	0.044
483	2061P	880.050	0.044
484	2061N	868.696	0.044
485	2061M	885.329	0.045
486	2061L	862.174	0.045
487	2061J	865.863	0.045
488	2061H	856.349	0.046
489	2061G	877.196	0.046
490	2039Z	855.132	0.046

\* ALTITUDES AJUSTADAS \*  
\* MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS \*

NO. ORD.	ESTAÇÃO	ALTITUDE(m)	DPAL
492	2039V	898.640	0.047
493	2039U	841.701	0.046
494	2039T	867.742	0.046
495	2039S	879.158	0.046
496	2039R	901.707	0.046
497	2039P	850.279	0.046
498	2039N	887.053	0.046
499	2039M	866.833	0.045
500	2039L	848.360	0.045
501	2039J	888.508	0.045
502	2039H	852.166	0.045
503	2039G	859.106	0.045
504	2039F	868.368	0.045
505	2039E	858.742	0.045
506	2039D	864.592	0.045
507	2039C	867.508	0.045
508	2039B	860.578	0.045
509	2039A	851.096	0.045
510	2038Z	878.235	0.045
511	2038X	872.679	0.045
512	2038V	854.640	0.045
513	2038U	854.746	0.046
514	2038T	868.613	0.046
515	2038S	917.911	0.046
516	2038R	880.094	0.046
517	2038P	883.841	0.046
518	2038N	878.875	0.046
519	2038M	956.322	0.047
520	2038L	938.135	0.047
521	N 2038J	912.809	0.047
522	2059X	888.170	0.046
523	2060A	907.566	0.046
524	2060B	890.260	0.045
525	2060C	895.787	0.045
526	2060D	969.434	0.045
527	2060E	1059.081	0.045
528	2060F	1117.920	0.044
529	2060G	1114.344	0.044
530	2060H	1123.267	0.044
531	2060J	1177.178	0.044
532	2060L	1270.588	0.044
533	2060P	1230.234	0.043
534	2060R	1133.884	0.043
535	2060T	1078.518	0.043
536	2060U	1119.059	0.043
537	1417D	1240.486	0.044
538	1417A	1208.324	0.044
539	1418B	684.391	0.047



\* ALTITUDES AJUSTADAS \*  
\* MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS \*

NO. ORD.	ESTAÇÃO	ALTITUDE (m)	DPAL
540	1418D	914.736	0.047
541	1418N	1042.926	0.048
542	1418P	1055.338	0.048
543	1418R	1076.248	0.048
544	1418S	1099.101	0.048
545	1418T	1066.678	0.047
546	1418U	1015.046	0.047
547	1418V	908.253	0.047
548	1418X	941.206	0.047
549	1418Z	924.940	0.046
550	1419A	973.133	0.046
551	1419B	997.795	0.046
552	1419C	1008.272	0.046
553	1419E	953.819	0.046
554	1419F	1016.630	0.045
555	1419H	1019.689	0.045
556	1419J	1048.335	0.045
557	1419L	1094.134	0.045
558	1419M	1069.385	0.045
559	1419N	1107.131	0.045
560	1419P	1089.134	0.044
561	1419R	1082.476	0.044
562	1419S	1048.680	0.044
563	1416B	1101.509	0.044
564	1416A	1063.398	0.044
565	1415Z	1099.080	0.044
566	1415V	957.989	0.044
567	1415U	1005.943	0.044
568	1415T	961.735	0.044
569	1416G	1124.680	0.044
570	1416H	1123.529	0.044
571	1416J	1121.735	0.044
572	1416M	1230.418	0.043
573	1416N	1203.920	0.043
574	1416P	1143.092	0.043
575	N 1418M	1009.293	0.049
576	1415N	701.182	0.047
577	1415M	803.557	0.047
578	1415L	832.525	0.047
579	1415J	852.113	0.047
580	1415G	980.179	0.047
581	1415F	989.163	0.047
582	1415E	1012.571	0.047
583	1415D	978.192	0.047
584	1415C	989.416	0.047
585	1415B	996.036	0.047
586	1415A	982.129	0.048
587	1414Z	974.712	0.048
588	1414X	936.941	0.048

\* ALTITUDES AJUSTADAS \*  
\* MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS \*

NO. ORD.	ESTAÇÃO	ALTITUDE (m)	DPAL
589	1414S	930.539	0.048
590	1414R	898.582	0.048
591	1414P	921.746	0.048
592	N 1414N	962.854	0.049
593	1414M	961.245	0.048
594	1414L	965.824	0.048
595	1414J	983.318	0.048
596	1414H	964.162	0.047
597	1414G	979.758	0.047
598	1414F	945.149	0.047
599	1414E	909.805	0.047
600	1414V	935.902	0.048
601	1414D	907.841	0.047
602	1413F	951.357	0.046
603	1413H	951.591	0.046
604	1413J	957.142	0.046
605	1413L	914.124	0.046
606	1413M	923.157	0.046
607	1413N	944.438	0.046
608	1413P	944.689	0.046
609	1413R	921.154	0.046
610	1413S	880.493	0.046
611	1413T	859.131	0.046
612	1413U	922.411	0.046
613	1413V	961.720	0.046
614	1413X	877.748	0.046
615	1414T	941.014	0.046
616	1414A	889.662	0.046
617	1414B	843.241	0.046
618	1414C	837.803	0.047
619	1413D	934.459	0.047
620	N 1410B	946.029	0.047
621	1410C	949.274	0.047
622	1410D	933.842	0.047
623	1410F	957.233	0.047
624	1410G	945.950	0.047
625	1410H	944.618	0.047
626	1410J	923.921	0.046
627	1410L	920.287	0.046
628	1410N	936.981	0.046
629	1410P	939.124	0.046
630	1411L	885.882	0.046
631	1411J	919.157	0.046
632	1411H	985.521	0.046
633	1411G	931.201	0.046
634	1411F	945.600	0.046
635	1411D	899.396	0.046
636	1411B	658.447	0.046
637	1410Z	484.867	0.046

\* ALTITUDES AJUSTADAS \*  
\* MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS \*

NO. ORD.	ESTAÇÃO	ALTITUDE(m)	DPAL
638	1410V	602.195	0.046
639	1410T	817.231	0.046
640	1410R	899.288	0.046
641	1412A	744.454	0.047
642	1412M	716.660	0.046
643	1427P	964.099	0.047
644	1427N	956.257	0.046
645	1427M	931.145	0.046
646	1427L	908.520	0.046
647	1427J	911.190	0.046
648	1427H	889.190	0.046
649	1427G	900.862	0.046
650	1427F	875.699	0.046
651	1427E	870.059	0.045
652	1427D	827.948	0.045
653	1427C	762.028	0.045
654	1427B	771.470	0.045
655	1427A	818.797	0.045
656	1426S	766.660	0.045
657	1426R	760.093	0.045
658	1426P	743.885	0.045
659	1426M	699.525	0.045
660	1426L	767.516	0.045
661	1426J	783.690	0.045
662	1426H	757.653	0.046
663	1426G	752.976	0.046
664	1426E	795.085	0.046
665	1426A	722.076	0.046
666	1425Z	703.089	0.047
667	1425X	601.525	0.047
668	1425V	513.838	0.047
669	N 1425S	617.870	0.048
670	1425R	589.827	0.047
671	1425P	624.516	0.047
672	1425M	412.663	0.047
673	1425J	605.181	0.047
674	1425H	497.973	0.047
675	1425G	436.125	0.047
676	1425F	400.240	0.047
677	1425E	385.347	0.047
678	1425D	396.296	0.047
679	1425C	406.000	0.047
680	1424X	409.195	0.048
681	1424V	395.711	0.048
682	1424U	475.894	0.048
683	1424T	562.516	0.048
684	1424S	386.154	0.049
685	1424R	552.936	0.049
686	N 5L	4.127	0.035

\* ALTITUDES AJUSTADAS \*  
\* MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS \*

NO. ORD.	ESTAÇÃO	ALTITUDE(m)	DPAL
687	S5N	7.131	0.035
688	5M	4.916	0.035
689	5N	7.632	0.035
690	5K	16.056	0.036
691	5B	10.085	0.035
692	C 4X	8.631	0.034
693	N 4P	19.653	0.034
694	1446X	119.308	0.040
695	1446V	147.977	0.040
696	1446T	188.391	0.040
697	1446S	245.366	0.040
698	1446R	327.309	0.041
699	1446N	296.359	0.041
700	1446H	220.268	0.042
701	1446G	290.420	0.042
702	1446F	348.580	0.042
703	1446D	349.565	0.042
704	1446B	431.984	0.043
705	1445Z	582.315	0.043
706	1445X	672.075	0.043
707	N 1445V	769.122	0.044
708	1445M	1356.699	0.043
709	1445J	1245.487	0.043
710	1445G	1203.982	0.043
711	1445E	1312.794	0.043
712	1445D	1202.053	0.043
713	1445B	1415.815	0.043
714	1417N	1354.040	0.044
715	1417P	1386.017	0.044
716	1417U	1480.942	0.043
717	1417X	1467.700	0.043
718	1417Z	1485.855	0.043
719	1444X	1320.674	0.043
720	1444Z	1323.414	0.043
721	1445A	1473.736	0.043
722	1445H	1218.907	0.043
723	1445L	1277.428	0.043
724	1445N	1370.920	0.043
725	1445P	1419.689	0.043
726	1445R	1346.674	0.043
727	C 12X	18.030	0.040
728	4O	7.540	0.034
729	4M	6.270	0.035
730	4L	6.452	0.035
731	4I	9.931	0.036
732	4G	120.671	0.037
733	4D	31.472	0.038
734	4A	15.259	0.039
735	N 1K	13.234	0.040

\* ALTITUDES AJUSTADAS \*  
\* MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS \*

NO. ORD.	ESTAÇÃO	ALTITUDE(m)	DPAL
736	1M	94.249	0.039
737	1O	58.718	0.039
738	1Q	120.639	0.039
739	1S	140.031	0.039
740	1U	199.729	0.039
741	N 2	61.917	0.040
742	3C	29.257	0.038
743	3F	21.420	0.038
744	3J	4.893	0.039
745	3L	10.842	0.039
746	N 12E	43.901	0.041
747	12H	143.664	0.040
748	12K	18.911	0.039
749	12P	42.795	0.038
750	12R	13.216	0.038
751	12U	12.489	0.039
752	2000A	16.248	0.035
753	2000B	15.001	0.035
754	2000C	8.937	0.035
755	2000D	8.522	0.035
756	2000E	5.978	0.035
757	2000F	8.686	0.036
758	2000G	10.802	0.036
759	2000J	18.614	0.037
760	2000L	5.162	0.037
761	2000M	28.682	0.037
762	2000R	16.273	0.038
763	2000T	18.372	0.039
764	2000V	8.342	0.039
765	2000Z	8.483	0.040
766	2002B	16.353	0.043
767	2001E	24.619	0.041
768	2001G	7.052	0.041
769	N 2001J	7.451	0.042
770	2001L	12.159	0.042
771	2001M	9.812	0.042
772	2001N	28.531	0.042
773	2001P	39.272	0.042
774	2001R	15.484	0.042
775	2001S	20.095	0.042
776	2001T	46.762	0.042
777	2001X	10.110	0.043
778	2001Z	9.701	0.043
779	2002A	14.367	0.043
780	1778P	21.472	0.043
781	1778N	29.842	0.043
782	1778M	13.615	0.044
783	1778L	19.658	0.044
784	1778J	16.777	0.044

\* ALTITUDES AJUSTADAS \*  
\* MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS \*

NO. ORD.	ESTAÇÃO	ALTITUDE(m)	DPAL
785	1778H	13.268	0.045
786	1778F	4.216	0.045
787	1778D	12.250	0.046
788	N 1777X	22.457	0.048
789	1777Z	26.538	0.047
790	1778A	26.664	0.047
791	1778B	19.038	0.046
792	1778C	13.651	0.046
793	1777U	11.179	0.047
794	1777T	18.673	0.047
795	1777S	28.117	0.047
796	1777P	34.878	0.047
797	1777N	45.473	0.047
798	1777M	60.678	0.047
799	1777L	73.981	0.047
800	1777J	96.284	0.047
801	1777H	124.006	0.047
802	1777G	164.819	0.048
803	1777F	222.237	0.048
804	1777E	462.599	0.048
805	1777D	693.909	0.048
806	1777C	907.020	0.048
807	1777B	1157.098	0.048
808	1777A	1184.641	0.048
809	1766Z	1143.853	0.049
810	1766X	1181.039	0.049
811	1766V	1230.810	0.049
812	1766U	1186.802	0.049
813	1766T	1189.415	0.050
814	1766S	1191.364	0.050
815	1766R	1166.412	0.050
816	1766P	1127.019	0.051
817	1766N	1070.053	0.051
818	1766B	1054.096	0.051
819	1766D	1080.296	0.052
820	1766E	1063.566	0.052
821	1766F	1055.661	0.052
822	1766G	1044.928	0.052
823	1766H	1030.772	0.052
824	N 1766J	1071.682	0.052
825	1766L	1038.410	0.052
826	1766M	1069.690	0.051
827	1766A	1041.993	0.051
828	1765Z	1030.802	0.051
829	1765X	1011.097	0.051
830	1765V	1036.965	0.051
831	1765U	1001.415	0.051
832	1765T	1024.679	0.051
833	1765S	1030.769	0.051

\* ALTITUDES AJUSTADAS \*  
\* MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS \*

NO. ORD.	ESTAÇÃO	ALTITUDE(m)	DPAL
834	1765R	1032.061	0.051
835	1765P	1004.504	0.051
836	1765N	1017.190	0.051
837	1765M	998.183	0.051
838	1765L	944.574	0.051
839	1765J	959.754	0.051
840	1765H	969.442	0.051
841	1765G	966.732	0.051
842	1765F	968.555	0.051
843	1765E	963.208	0.051
844	1765C	968.066	0.051
845	1765D	955.361	0.051
846	1765B	967.917	0.052
847	N 1764G	962.419	0.052
848	1764E	960.750	0.052
849	1764D	931.993	0.051
850	1764C	900.005	0.051
851	1764B	915.885	0.051
852	1764A	902.477	0.051
853	1762Z	877.359	0.051
854	1762X	903.126	0.051
855	1762A	810.415	0.052
856	N 1762B	834.578	0.052
857	1762C	850.165	0.052
858	1762D	845.170	0.052
859	1762E	834.577	0.052
860	1762F	780.548	0.051
861	1762G	856.971	0.051
862	1762H	791.364	0.051
863	1762J	754.626	0.051
864	1762L	788.645	0.051
865	1762M	840.603	0.051
866	1762N	859.105	0.051
867	1762P	895.856	0.051
868	1762R	955.322	0.051
869	1762S	875.090	0.051
870	1762T	831.910	0.051
871	1762U	911.283	0.051
872	1762V	858.191	0.051
873	1761S	726.306	0.051
874	1761R	762.047	0.051
875	1761P	790.989	0.051
876	1761D	645.771	0.049
877	1761C	662.102	0.049
878	1761B	676.599	0.049
879	1761A	696.433	0.049
880	1755A	711.837	0.048
881	1755B	718.185	0.047
882	1755C	741.650	0.047

\* ALTITUDES AJUSTADAS \*  
\* MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS \*

NO. ORD.	ESTAÇÃO	ALTITUDE(m)	DPAL
883	1755E	724.230	0.047
884	1755F	747.605	0.047
885	1755G	752.405	0.048
886	1755H	755.617	0.048
887	1755J	755.562	0.048
888	1755L	743.432	0.048
889	1755M	764.068	0.048
890	1755N	774.091	0.048
891	1755R	615.463	0.049
892	1755V	646.716	0.049
893	N 1755X	630.033	0.049
894	1763J	674.918	0.050
895	1763L	651.342	0.050
896	1763M	632.895	0.051
897	1763N	654.981	0.051
898	1763S	667.106	0.052
899	1763T	679.831	0.052
900	1763U	672.385	0.052
901	1763V	707.512	0.053
902	1763Z	691.811	0.053
903	N 1768B	694.666	0.054
904	1769A	705.906	0.054
905	1769B	732.158	0.054
906	1769C	644.594	0.054
907	1769D	703.210	0.054
908	1769E	640.546	0.054
909	1769F	611.286	0.054
910	1769L	549.571	0.055
911	1769G	645.574	0.054
912	1769H	643.844	0.054
913	1769J	615.269	0.055
914	1769M	515.383	0.055
915	1769N	525.955	0.055
916	1769R	449.726	0.055
917	1769S	450.977	0.055
918	1769T	463.962	0.055
919	1769U	482.689	0.056
920	1769V	523.568	0.056
921	1769X	646.139	0.056
922	1769Z	607.013	0.056
923	1770A	596.851	0.056
924	1770B	609.231	0.057
925	1770D	510.125	0.057
926	1770E	490.120	0.057
927	N 1770F	481.513	0.058
928	1770G	548.828	0.058
929	1770H	511.470	0.057
930	1770J	539.404	0.057
931	1770L	582.578	0.057



\* ALTITUDES AJUSTADAS \*  
\* MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS \*

NO. ORD.	ESTAÇÃO	ALTITUDE(m)	DPAL
932	1767A	915.722	0.052
933	1767B	904.092	0.052
934	1767C	888.519	0.051
935	1767D	853.687	0.051
936	1767E	838.292	0.052
937	1767F	804.006	0.052
938	1767G	816.533	0.052
939	1767H	723.176	0.052
940	1767J	827.820	0.052
941	1767L	873.325	0.052
942	1767M	851.283	0.053
943	1767N	835.139	0.053
944	1767P	819.915	0.053
945	1767R	770.625	0.054
946	N 1767S	749.036	0.054
947	1767T	739.303	0.054
948	1767U	632.264	0.054
949	1767X	295.776	0.053
950	1767Z	399.874	0.053
951	1773Z	703.780	0.053
952	1774D	735.759	0.053
953	1774C	683.295	0.053
954	1774A	664.869	0.053
955	1774B	773.254	0.053
956	1774F	660.600	0.053
957	1774G	709.209	0.053
958	1774H	671.103	0.053
959	1774J	514.969	0.053
960	1774M	679.020	0.053
961	1774N	753.402	0.053
962	1774P	862.325	0.053
963	1774R	852.450	0.054
964	1774S	821.476	0.054
965	N 1774V	464.986	0.055
966	1775B	96.099	0.055
967	1775C	74.396	0.055
968	1775D	196.193	0.055
969	1775F	494.341	0.055
970	1775G	586.345	0.055
971	1775M	102.936	0.055
972	1775N	87.693	0.055
973	1776H	19.510	0.055
974	1776G	34.927	0.055
975	1776J	22.155	0.055
976	1776L	6.881	0.055
977	1776M	6.279	0.055
978	1776N	26.838	0.055
979	1776P	15.815	0.055
980	1776F	36.208	0.055

\* ALTITUDES AJUSTADAS \*  
\* MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS \*

NO. ORD.	ESTAÇÃO	ALTITUDE(m)	DPAL
981	1776D	135.881	0.055
982	1776C	147.069	0.055
983	1776A	162.548	0.055
984	1775Z	303.068	0.055
985	1775X	474.397	0.055
986	1775V	531.042	0.055
987	1775U	441.493	0.055
988	1775T	429.977	0.055
989	1775R	279.373	0.055
990	1775P	109.979	0.055
991	1773R	756.928	0.054
992	1773N	742.135	0.055
993	1773H	730.865	0.055
994	1773G	625.366	0.055
995	1773E	564.505	0.055
996	1773D	573.154	0.055
997	N 1771Z	671.132	0.056
998	1773C	535.279	0.055
999	1773B	584.430	0.055
1000	1773A	528.823	0.056
1001	1771U	614.045	0.056
1002	1771T	556.056	0.056
1003	1771S	600.993	0.056
1004	1771R	582.106	0.056
1005	1771P	486.313	0.056
1006	1771N	363.924	0.056
1007	1771M	206.594	0.056
1008	1771L	191.740	0.056
1009	1771J	347.880	0.056
1010	1771H	521.341	0.056
1011	1771G	587.904	0.056
1012	1771F	607.348	0.056
1013	1771E	654.628	0.056
1014	1771D	678.927	0.056
1015	1771C	664.685	0.056
1016	1771B	698.901	0.056
1017	1771A	720.191	0.056
1018	1770X	655.230	0.056
1019	1770V	688.339	0.056
1020	1770U	651.646	0.057
1021	1770S	598.574	0.057
1022	1770P	568.611	0.057
1023	1770N	633.310	0.057
1024	1755Z	605.779	0.049
1025	1756A	514.377	0.049
1026	1756B	481.961	0.049
1027	1756C	581.802	0.049
1028	1756D	604.529	0.049
1029	1756E	634.163	0.049

\* ALTITUDES AJUSTADAS \*  
\* MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS \*

NO. ORD.	ESTAÇÃO	ALTITUDE(m)	DPAL
1030	1756F	645.560	0.049
1031	1756H	508.738	0.049
1032	1756J	500.020	0.049
1033	1756L	512.469	0.049
1034	1756M	529.151	0.049
1035	1756N	569.657	0.050
1036	1756P	654.778	0.050
1037	1756S	614.890	0.050
1038	N 1785S	7.649	0.055
1039	1779A	19.938	0.047
1040	1779B	15.054	0.047
1041	1779C	11.108	0.047
1042	1779D	8.824	0.047
1043	1779E	13.430	0.047
1044	1779F	18.614	0.047
1045	1779G	7.564	0.048
1046	1779H	8.687	0.048
1047	1779J	5.881	0.048
1048	1779L	1.872	0.048
1049	1779M	2.079	0.048
1050	1779P	20.003	0.048
1051	1779R	20.750	0.049
1052	1779S	15.546	0.049
1053	1779T	7.838	0.049
1054	1779U	9.411	0.049
1055	1779V	16.307	0.050
1056	1779X	8.436	0.050
1057	1779Z	11.669	0.051
1058	1780A	14.146	0.051
1059	1780B	4.213	0.051
1060	1780C	10.064	0.052
1061	1780D	5.909	0.052
1062	1780E	3.228	0.053
1063	1780F	11.098	0.053
1064	N 1780G	14.213	0.053
1065	1780H	13.760	0.053
1066	1780J	6.695	0.053
1067	1780L	13.222	0.053
1068	1780M	5.407	0.053
1069	1780N	17.350	0.053
1070	1780P	10.869	0.053
1071	1780R	8.809	0.053
1072	1780S	8.859	0.053
1073	1780T	7.564	0.053
1074	1780U	16.370	0.053
1075	1780V	8.025	0.053
1076	1780X	7.366	0.053
1077	1780Z	8.136	0.053
1078	1781A	10.775	0.053

\* ALTITUDES AJUSTADAS \*  
\* MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS \*

NO. ORD.	ESTAÇÃO	ALTITUDE(m)	DPAL
1079	1781B	6.481	0.053
1080	1781C	8.717	0.053
1081	1781D	16.754	0.053
1082	1781E	15.987	0.053
1083	1781F	16.611	0.053
1084	1781G	14.292	0.054
1085	1781H	14.309	0.054
1086	1781J	12.888	0.054
1087	1781L	13.065	0.054
1088	1781M	13.802	0.054
1089	1781N	13.562	0.055
1090	1781P	14.944	0.055
1091	1781R	50.185	0.055
1092	N 1781S	26.367	0.056
1093	1781T	26.533	0.055
1094	1781U	23.302	0.055
1095	1781V	21.967	0.055
1096	1781X	21.530	0.055
1097	1781Z	22.945	0.055
1098	1782A	28.287	0.054
1099	1782B	21.495	0.054
1100	1782C	41.043	0.054
1101	1782D	55.528	0.054
1102	1782E	57.231	0.054
1103	1782F	41.906	0.054
1104	1782G	84.537	0.054
1105	1782H	68.456	0.054
1106	1782J	39.558	0.054
1107	1782L	9.580	0.054
1108	1782M	8.598	0.054
1109	1782N	9.867	0.054
1110	1782P	5.755	0.054
1111	1782R	6.263	0.054
1112	1782S	5.256	0.054
1113	1782T	5.619	0.055
1114	1782U	5.048	0.055
1115	1776Z	2.665	0.055
1116	1776X	4.512	0.055
1117	1776V	5.112	0.055
1118	1776U	13.961	0.055
1119	1776T	20.794	0.055
1120	1768C	655.076	0.054
1121	1768D	633.038	0.054
1122	1768F	636.240	0.054
1123	1768G	624.014	0.054
1124	1768H	577.734	0.054
1125	1768R	559.969	0.056
1126	1768P	579.065	0.056
1127	1768N	571.710	0.055

\* ALTITUDES AJUSTADAS \*  
\* MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS \*

NO. ORD.	ESTAÇÃO	ALTITUDE (m)	DPAL
1128	1768M	595.859	0.055
1129	1768L	605.798	0.055
1130	1772A	494.013	0.056
1131	1772B	582.191	0.056
1132	1772C	535.079	0.055
1133	1772D	572.015	0.055
1134	1772E	473.861	0.055
1135	1772F	431.176	0.055
1136	1772G	451.102	0.055
1137	1772H	303.643	0.055
1138	1772L	83.850	0.055
1139	1772M	70.320	0.055
1140	1772N	65.011	0.055
1141	1772P	92.120	0.055
1142	1772R	122.499	0.055
1143	1772S	75.499	0.055
1144	1772T	56.858	0.055
1145	1772U	58.117	0.055
1146	1772V	58.197	0.055
1147	1772Z	103.232	0.055
1148	1783B	69.863	0.055
1149	1783C	66.303	0.055
1150	1783D	83.257	0.055
1151	1783E	46.969	0.055
1152	1783F	42.016	0.056
1153	1783G	51.069	0.056
1154	1783H	72.858	0.056
1155	1783J	64.560	0.056
1156	1783L	45.586	0.056
1157	1783M	34.212	0.056
1158	1783N	83.515	0.057
1159	1785R	3.711	0.055
1160	1785P	3.339	0.055
1161	1785N	10.703	0.055
1162	1785M	41.540	0.055
1163	1785L	26.440	0.055
1164	1785J	6.699	0.055
1165	1785H	4.062	0.055
1166	1785G	23.220	0.055
1167	1785F	50.728	0.055
1168	1785E	42.893	0.055
1169	1785D	71.995	0.055
1170	1785C	90.687	0.055
1171	1785B	60.958	0.055
1172	1785A	91.456	0.055
1173	1784Z	95.618	0.055
1174	1784X	49.357	0.055
1175	1784V	56.130	0.055
1176	1784U	82.798	0.055

\* ALTITUDES AJUSTADAS \*  
\* MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS \*

NO. ORD.	ESTAÇÃO	ALTITUDE(m)	DPAL
1177	1784T	77.523	0.055
1178	1784S	26.896	0.055
1179	1784R	62.916	0.055
1180	1784P	84.833	0.055
1181	1784N	68.690	0.055
1182	1784M	82.656	0.055
1183	1784L	72.125	0.055
1184	1784J	134.366	0.056
1185	1784H	102.763	0.056
1186	1784G	68.271	0.056
1187	1784F	70.021	0.056
1188	1784E	55.945	0.056
1189	1784D	26.277	0.056
1190	1784B	53.222	0.056
1191	1784A	33.286	0.056
1192	N 1908F	53.534	0.057
1193	1908H	31.847	0.057
1194	1908E	76.278	0.057
1195	1908D	72.817	0.056
1196	1908C	40.445	0.056
1197	1908B	119.213	0.056
1198	1908A	50.890	0.056
1199	1907Z	78.105	0.056
1200	1907X	53.746	0.056
1201	1907V	99.191	0.056
1202	1907U	93.616	0.056
1203	1907T	75.130	0.056
1204	1907S	73.621	0.056
1205	1907R	98.631	0.056
1206	1907P	129.995	0.056
1207	1907M	394.717	0.056
1208	1907L	499.099	0.056
1209	1907J	545.316	0.056
1210	1907H	552.503	0.056
1211	1907B	639.166	0.056
1212	1907G	643.822	0.056
1213	1907F	649.698	0.056
1214	1907E	647.313	0.056
1215	1907D	626.378	0.056
1216	1907C	693.350	0.056
1217	1907A	589.103	0.057
1218	1906Z	689.694	0.057
1219	1906V	773.831	0.057
1220	1906U	763.490	0.057
1221	1906T	709.543	0.057
1222	1906S	743.447	0.057
1223	1906R	690.524	0.058
1224	1906P	657.977	0.058
1225	1906N	675.530	0.058

\* ALTITUDES AJUSTADAS \*  
\* MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS \*

NO. ORD.	ESTAÇÃO	ALTITUDE(m)	DPAL
1226	1906M	663.467	0.058
1227	1906L	712.426	0.058
1228	1906F	724.788	0.058
1229	N 1906H	720.123	0.059
1230	1906E	692.267	0.058
1231	1906C	567.457	0.058
1232	1906B	493.682	0.057
1233	1905Z	583.795	0.057
1234	1905X	458.872	0.057
1235	1905V	477.451	0.057
1236	1905U	423.626	0.056
1237	1905T	518.159	0.056
1238	1905S	452.478	0.056
1239	1905R	415.545	0.056
1240	1905P	472.808	0.056
1241	1905N	500.836	0.056
1242	1905M	442.967	0.056
1243	1905J	554.256	0.056
1244	1905H	503.716	0.056
1245	1905G	521.211	0.056
1246	1905F	541.710	0.057
1247	N 1905E	563.828	0.057
1248	1784C	43.901	0.056

VARIAÇÃO DA GRAVIDADE NA CROSTA= -0.0848000 mGal/m

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

01. BALAZS, E.I. & YOUNG, G.M. Corrections applied by the National Geodetic Survey to precise leveling observations. Rockville, NOAA, 1982. p.6-8. (NOAA Technical Memorandum NOS NGS 34).
02. BOMFORD, G. Geodesy. 3<sup>a</sup> ed. Oxford University Press, 1977. 228p.
03. DE ALENCAR, J.C.M. Datum altimétrico brasileiro. IBGE, Rio de Janeiro, Cadernos de Geociências, 5:69-73, 1990.
04. D'ALGE, J.C.L. Estabelecimento de um sistema de altitudes a partir do nivelamento geométrico. Curitiba, UFPR, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1986. 112p.
05. DE ANDRADE, J.B. Photogrametric refraction. The Ohio State University, 1977. 117p.
06. DEHLINGER, P. Marine gravity. Amsterdam, Elsevier, 1978, 322p.
07. DRAGOMIR, V. et alii, Theory of the earth's shape. Amsterdam, Elsevier, 1972. 694p.
08. EBONG, M.B. On the use of multiple comparisons tests for the analysis of levelling discrepancies. Bulletin Géodésique, 59:1-10, 1985.
09. EBONG, M.B. On the choice of random variable wich eliminates the bias cause by variable spacing in geodetic levelling. Bulletin Géodésique, 60:279-287, 1986.
10. ESCOBAR, I.P. Contribuição do Observatório Nacional no estabelecimento da Rede Gravimétrica Fundamental Brasileira. Anais do 10<sup>o</sup> Congresso Brasileiro de Cartografia, Sociedade Brasileira de Cartografia, Brasília, 2 (1):435-448, 1981.
11. ESCOBAR, I.P. Injunções relativas em ajustamento gravimétrico. UFPR, 1985. 122p.
12. ESTADOS UNIDOS. Defense Mapping Agency Topographic Center. General land gravity survey instructions. s.l., 1974. 50p.
13. FALLER, J.E. Results of an absolute determination of the acceleration of gravity. Journal of Geophysical Research, 70:4035-4038, 1965.
14. FISHER, I. Does mean sea level slope up or down towards north? Bulletin Géodésique, 115:17-26, 1975.



15. FORRESTER, W.D. Principles of oceanographic levelling. INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON PROGRAMS RELATED TO THE REDEFINITION OF NORTH AMERICAN VERTICAL GEODETIC NETWORKS, Ottawa, (2): 125-132, 1980.
16. GEMAEL, C. Geodésia física. Curitiba, UFPr, 1983. Apostila.
17. GROTEN, E. Geodesy and the earth's gravity field. Bonn, Dummlers Verlag, 1980. 724p.
18. HEISKANEN, W.A. & MORITZ, H. Physical geodesy. San Francisco, W.H. Freeman, 1967. 364p.
19. INTERNATIONAL ASSOCIATION OF GEODESY, The International Gravity Standardization Net 1971 (IGSN71), publicação especial n° 4, Paris, 1974, 194p.
20. KARL, J.H. The normal vertical gradient of gravity. Geophysics, 48 (7):1011-1013, 1983.
21. LARDEN, D.R. Some geophysical effects on geodetic levelling networks. INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON PROBLEMS RELATED TO THE REDEFINITION OF NORTH AMERICAN VERTICAL GEODETIC NETWORKS, Ottawa, (2):151-167, 1980.
22. LONGMAN, I.M. Formulas for computing the tidal accelerations due to the moon and the sun. Journal of Geophysical Research, 64 (12): 2351-2355, 1959.
23. MARSH, J.G. & MARTIN, V.T. The SEASAT altimeter mean sea surface model. Journal of Geophysical Research, 87(C5): 3269-3280, 1982.
24. MERRY, C.L. & VANICEK, P. Investigation of local variations of sea surface topography. Marine Geodesy, New York, 7:101-126, 1983
25. RAPP, R.H. Precise definition of the geoid and its realization for vertical datum applications. INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON PROBLEMS RELATED TO THE REDEFINITION OF THE NORTH AMERICAN VERTICAL GEODETIC NETWORKS, Ottawa, (2):553-566, 1980.
26. RUMMEL, R. & TEUNISSEN, P. Height datum definition, height datum connection and role of the geodetic boundary value problem. Bulletin Géodésique, 62:477-498, 1988.
27. SAZHINA, N. & GRUSHINSKY, N. Gravity prospecting. Moscou, Mir Publishers, 1971. 491p.
28. STRANGE, W.E. An evaluation of orthometric height accuracy using bore hole gravimetry. Bulletin Géodésique, 56:300-311, 1982.

29. TORGE, W. Geodesy. Berlin, Walter de Gruyter, 1980. p.111-112.
30. VANICEK, P. et alii. Geodetic leveling and its applications. Reviews of Geophysics and Space Physics, 18(2):505-524, 1980.
31. VANICEK, P. & GRAFAREND, E.W. On the weight estimation in leveling. Rockville, NOAA Technical Report NOS 86 NGS 17, 1980. 34p.
32. VANICEK, P. & KRAKIWSKY, E.J. Geodesy: the concepts. Amsterdam, North-Holland, 1986. 697p.
33. WHALEN, C.T. Results of levelling refraction tests by the National Geodetic Survey. Rockville, NOAA Technical Report NOS 92 NGS 22, 1981. 20p.
34. WOODWARD, D.J. The gravitational attraction of triangular prisms. Geophysical Prospecting, 23:526-532, 1975.