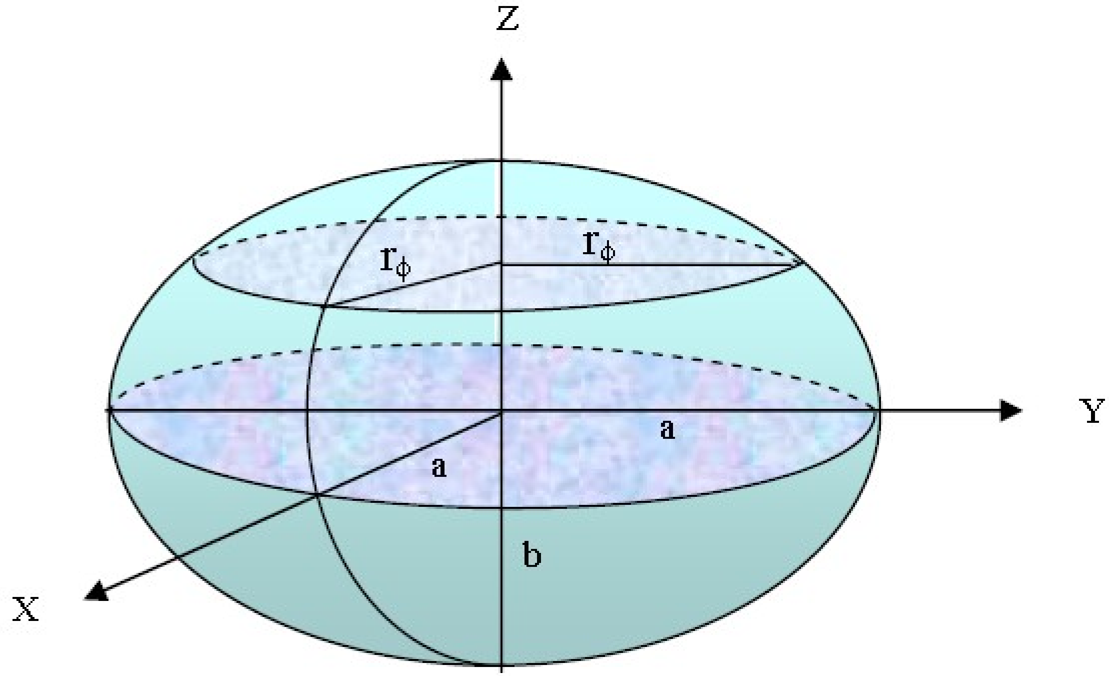
Geometria do Elipsoide

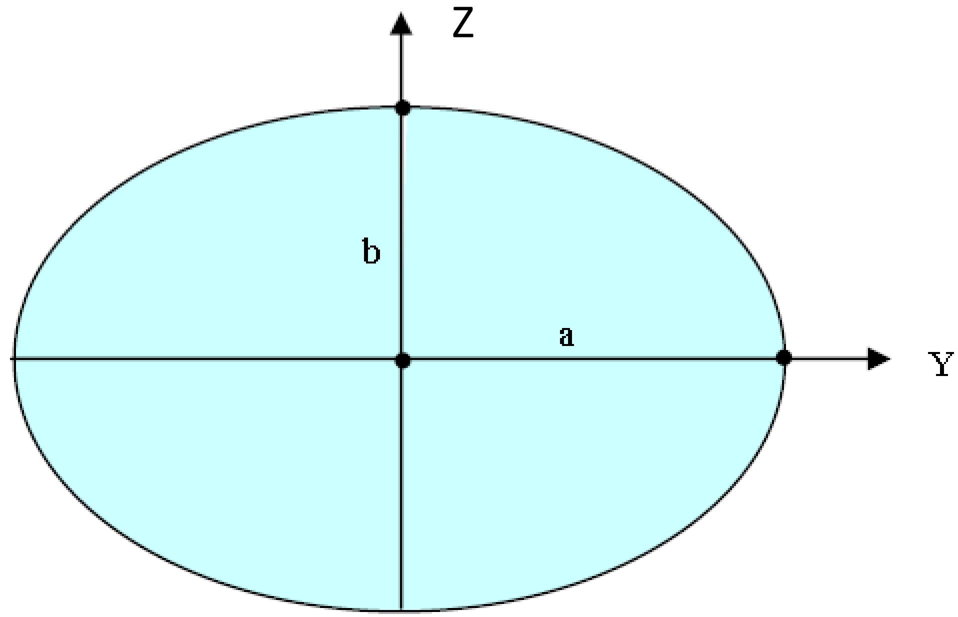
FGL
João F Galera Monico – PPGCC
Abril 2015

Elipsoide de Revolução

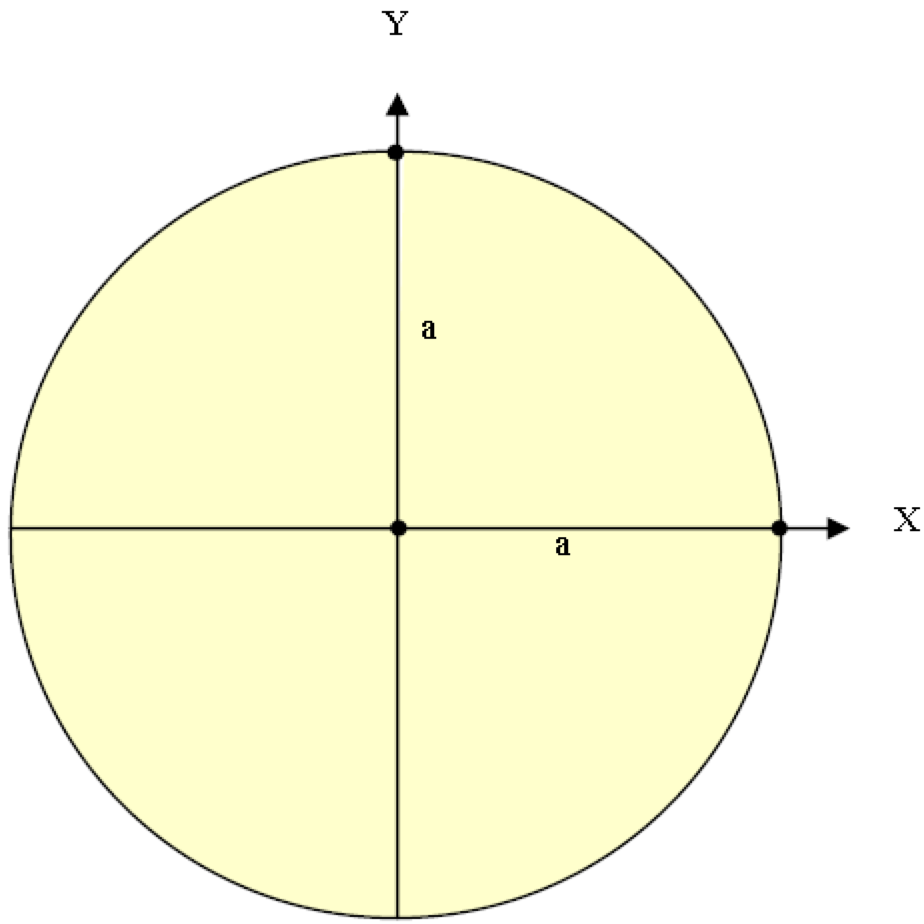


Rotação de uma elipse sobre um de seus eixos!
Neste caso: eixo Z

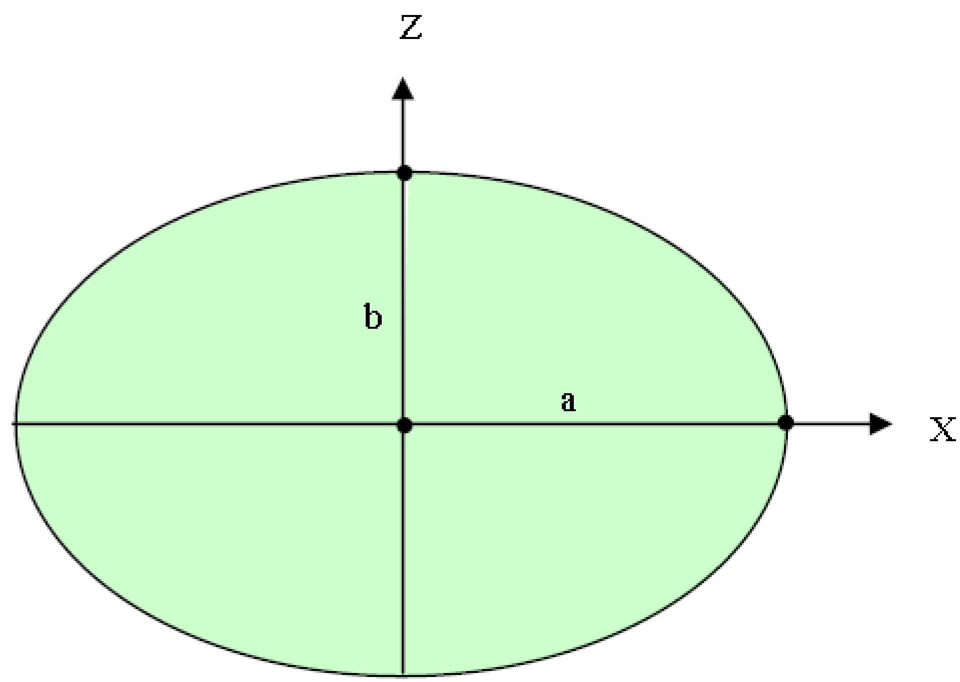
Elipse no plano YZ com X = 0



Elipse no plano XY com Z = 0



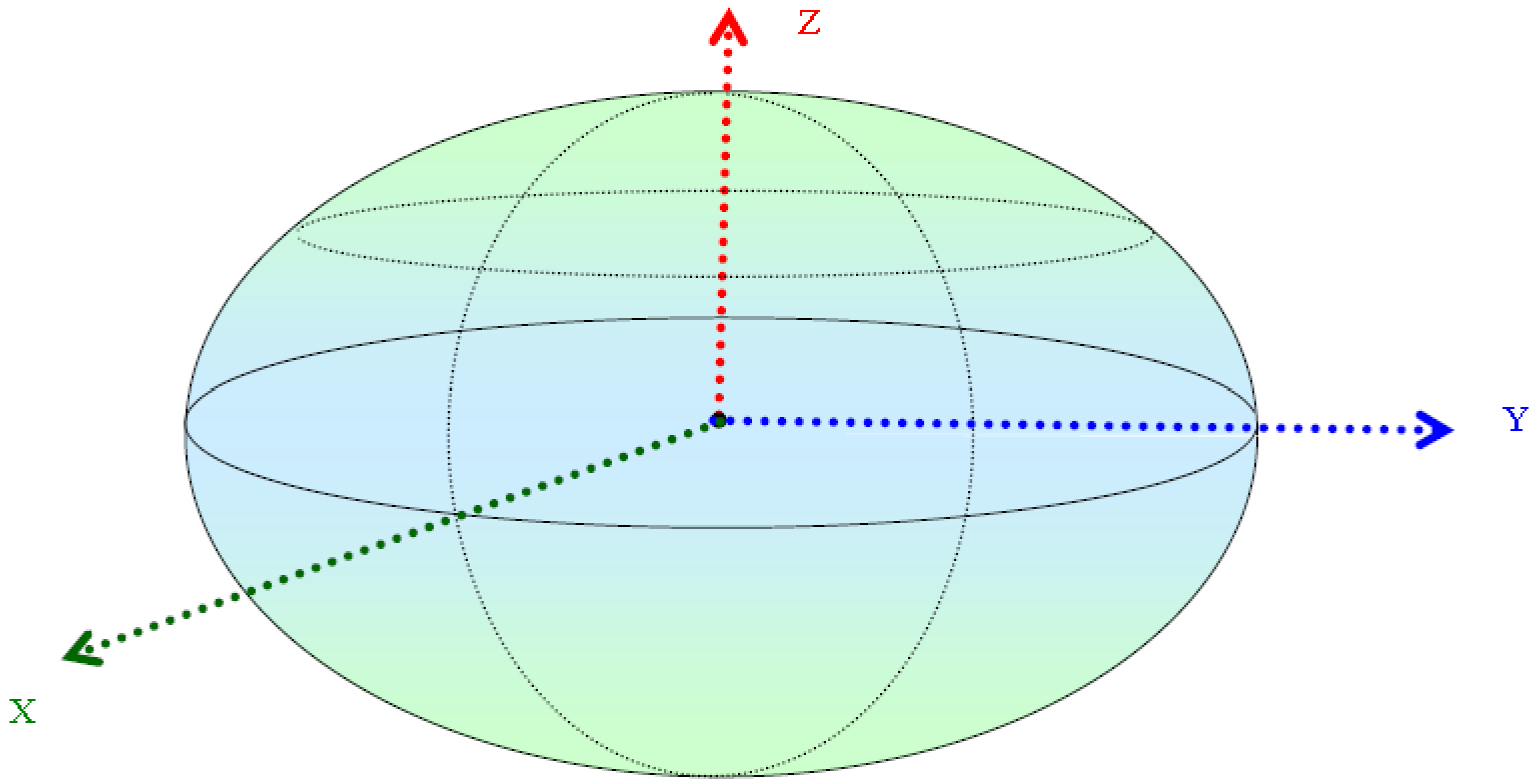
Elipse no plano XZ com Y = 0



Equação, Curvatura Principal e Teorema de Euler

$$+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

Elipsoide Triaxial



Equação, Curvatura Principal e Teorema de Euler

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

Elipsoide de Revolução: biaxial

Se a> b elipsoide achatado nos polos

Um elipsoide de revolução fica perfeitamente definido por meio de 2 parâmetros: **a** e **b**

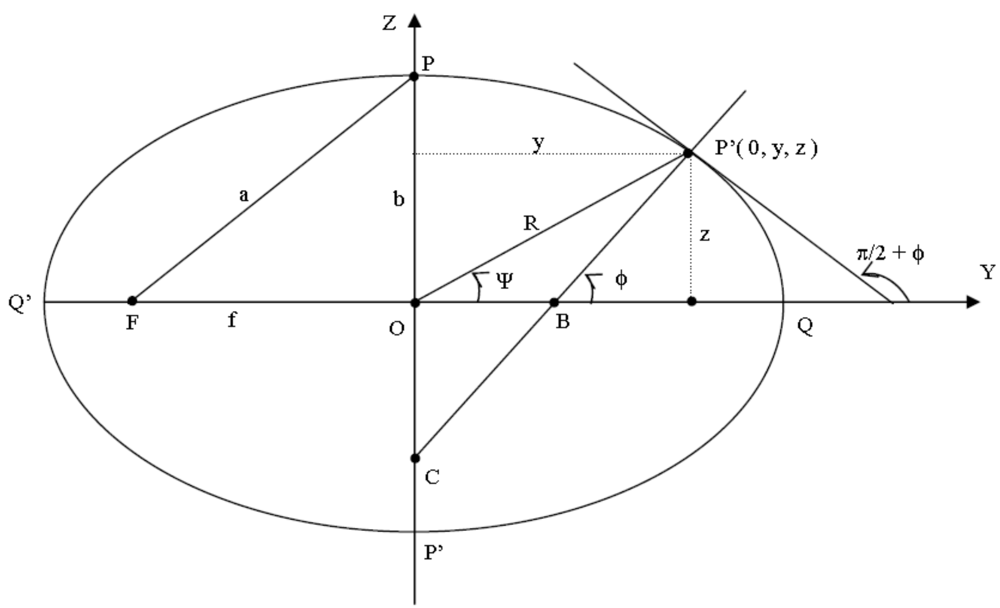
Em Geodésia é comum definir pelo semi-eixo maior **a** e o achatamento ***f***.

Toda seção produzida por um plano passando pelo eixo Z será uma elipse de semi-eixo maior **a** e semi-eixo menor **b**. Logo, qualquer relação válida para uma seção – vale para as demais.

Equação, Curvatura Principal e Teorema de Euler

A seção produzida pelo plano X = 0 da equação $$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

será uma elipse dada pela equação $$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$



F = foco

f = distância focal

a = semi-eixo maior da elipse

b = semi-eixo menor da elipse

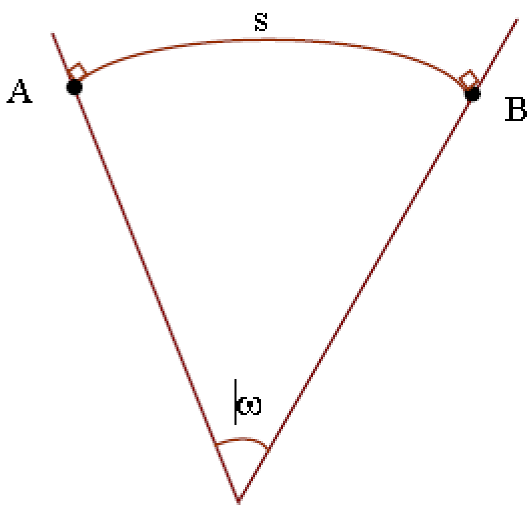
ϕ = latitude elipsóidica

Ψ = latitude geocêntrica

f = ae

$$f = \frac{a-b}{a} \qquad e^2 = 2f - f^2 \qquad e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

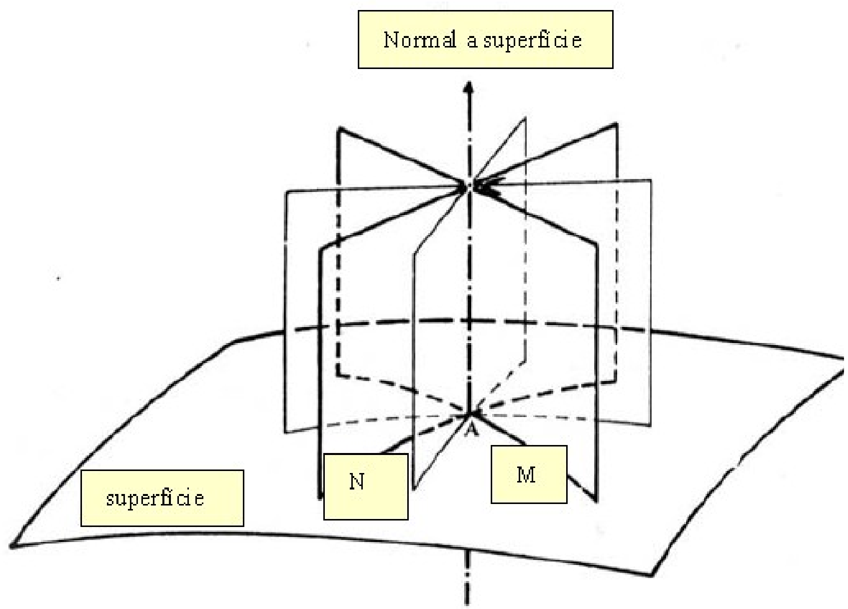
Seja **s** a distância entre dois pontos **A** e **B** sobre uma curva plana e **ω** o ângulo formado pelas normais que passam por **A** e **B** (figura 4.7). Define-se a curvatura (**ρ**) da linha pelo quociente:



Curvatura ρ = w/s

Raio de curvatura da curva = 1/ρ=s/w

Considerando o elipsoide, tem-se duas seções principais: a da elipse meridiana (XZ), com curvatura máxima, e a produzida por um plano que contém a normal no ponto A e é perpendicular ao plano do meridiano (YZ), cuja curvatura é mínima.
Os raios de curvatura dessas seções principais são N e M. Tratam-se das curvaturas das seções principais. As demais seções passantes por esse ponto terão raio de curvatura entre M e N.



$$N = \frac{a}{\left(1 - e^2 sen^2 \phi\right)^{1/2}}$$

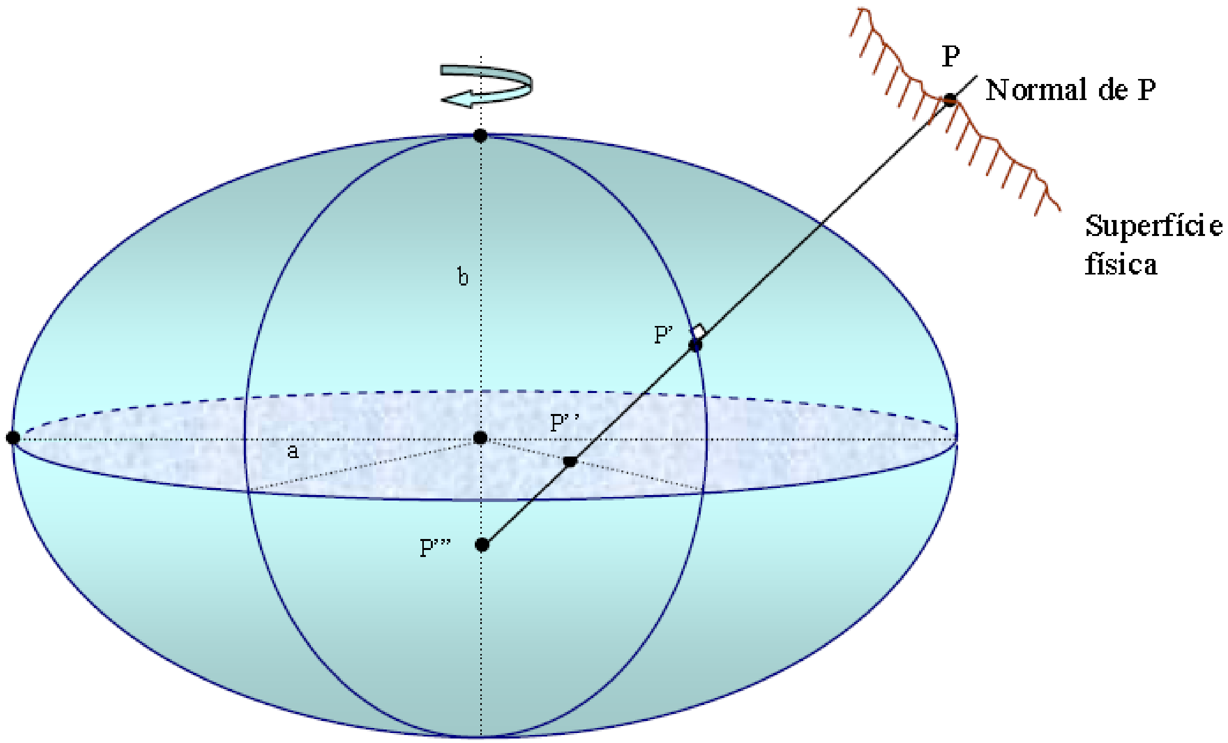
Grande Normal
Seção Primeiro Vertical

$$N' = N(1 - e^2)$$

Pequena Normal

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 sen^2 \phi)^{3/2}}$$

Seção Meridiana
Mínima



Conhecidos os raios de curvatura principais em um ponto, define-se como curvatura média a expressão: $$\frac{1}{R_m} = \frac{1}{\sqrt{NM}}$$

P'P''' = N = Grande Normal

P'P'' = N' = pequena Normal

E o raio de curvatura médio por:

$$R_M = \sqrt{NM}$$

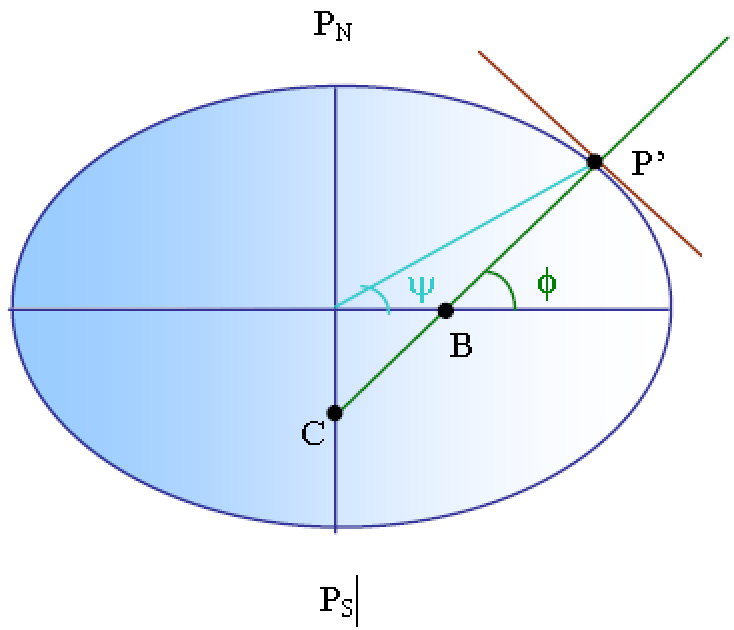
Quando se conhece o Azimute A de uma seção normal em um ponto do elipsoide, o raio de curvatura dessa seção é proporcionado pelo Teorema de Euler, que proporciona o raio de curvatura R em uma seção genérica com Azimute A:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 A}{M} + \frac{sen^2 A}{N}$$

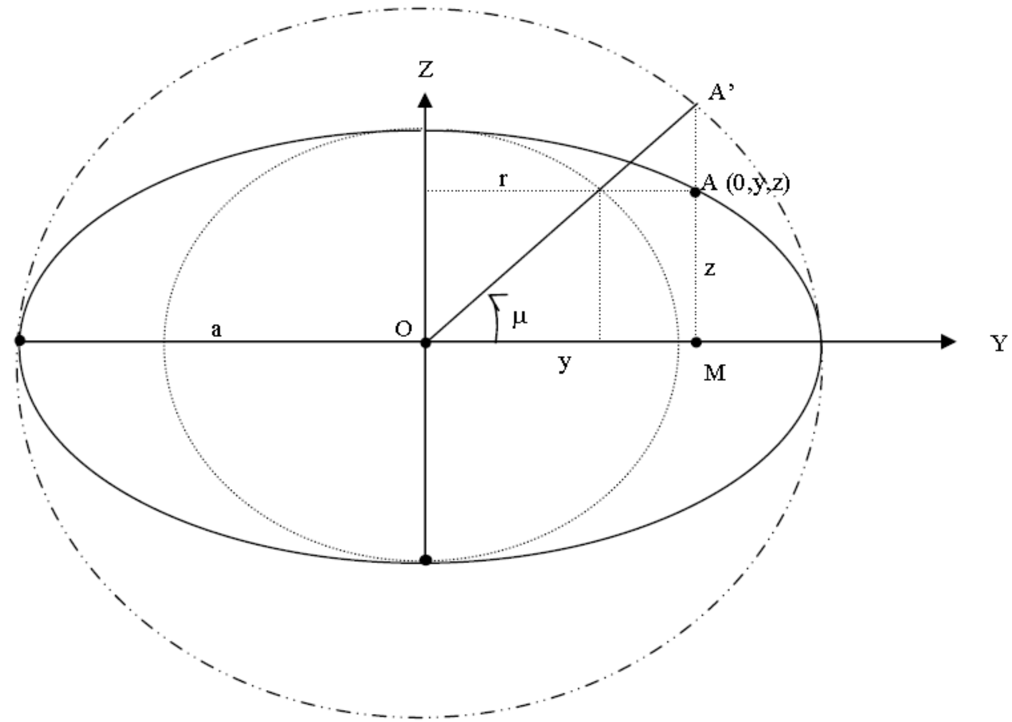
Raio de um paralelo:

$$r_\phi = N \cos \phi$$

Latitude Geocentrica e Reduzida



$$tg\Psi = (1 - e^2)tg\phi$$

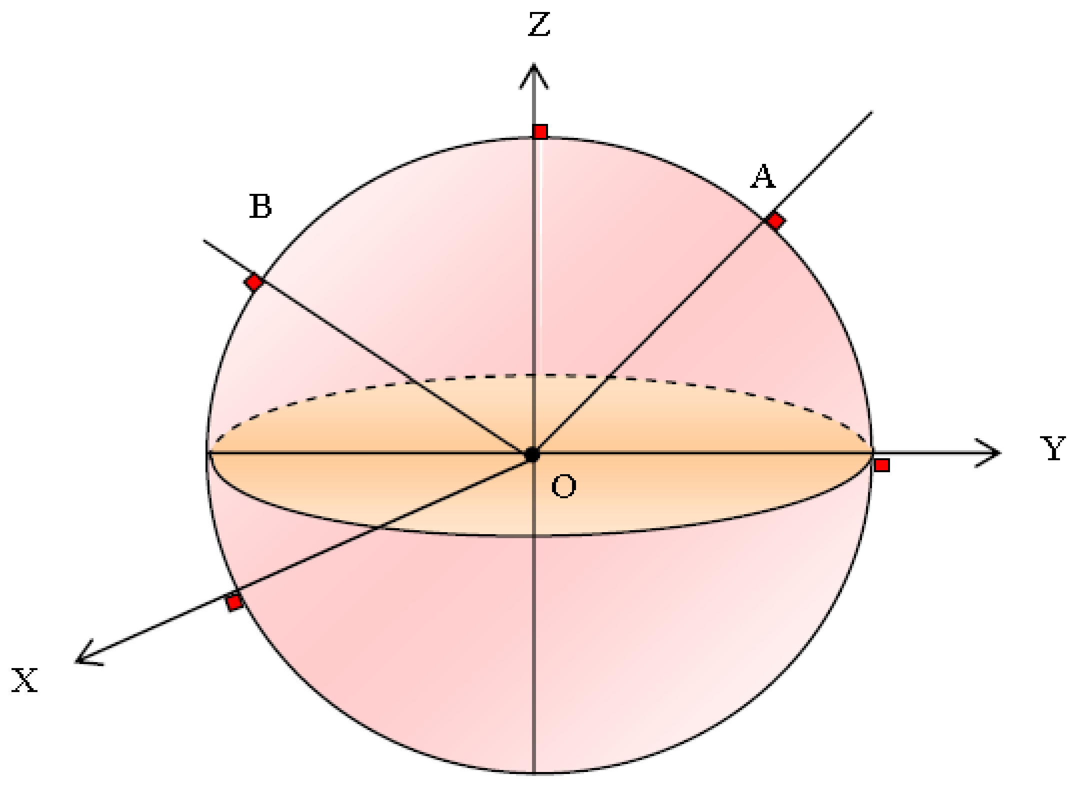


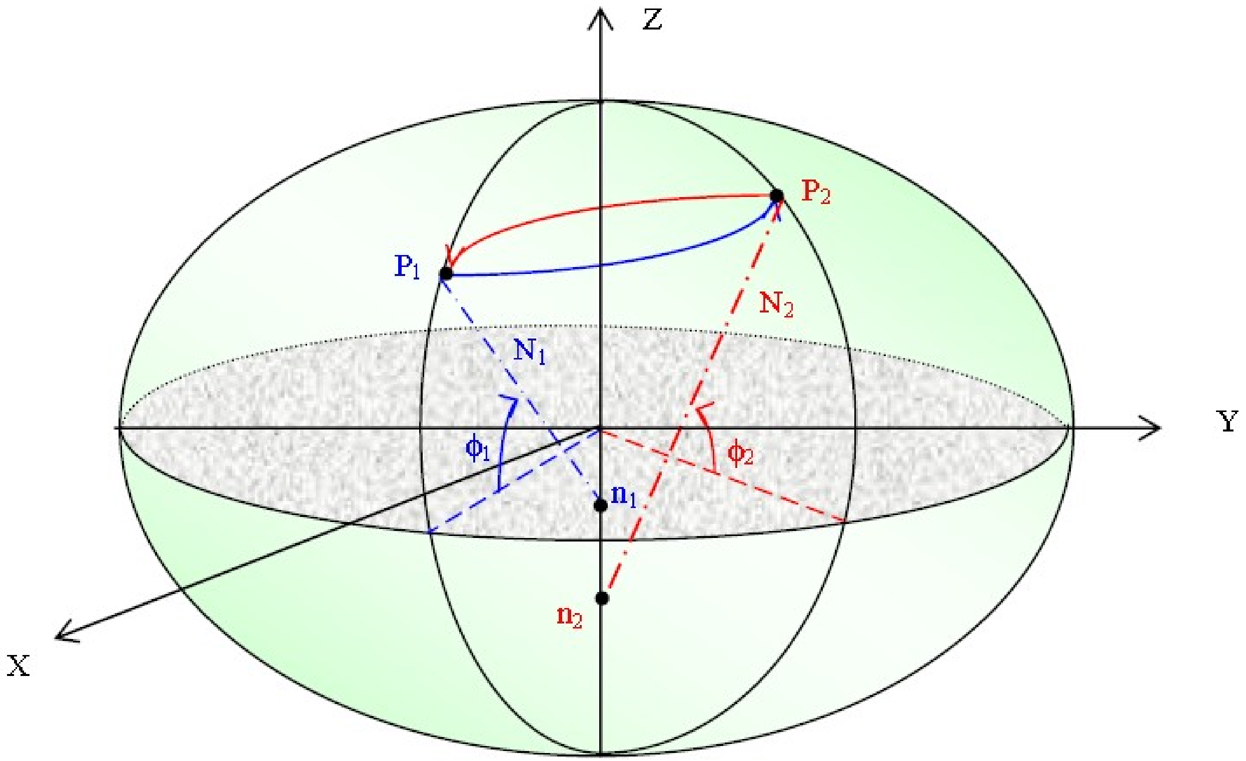
$$tg\mu = (1 - e^2)^{1/2}tg\phi$$

As três latitudes se confundem no Equador e nos polos. Diferença máxima em Lat = 45

Seções Normais Recíprocas

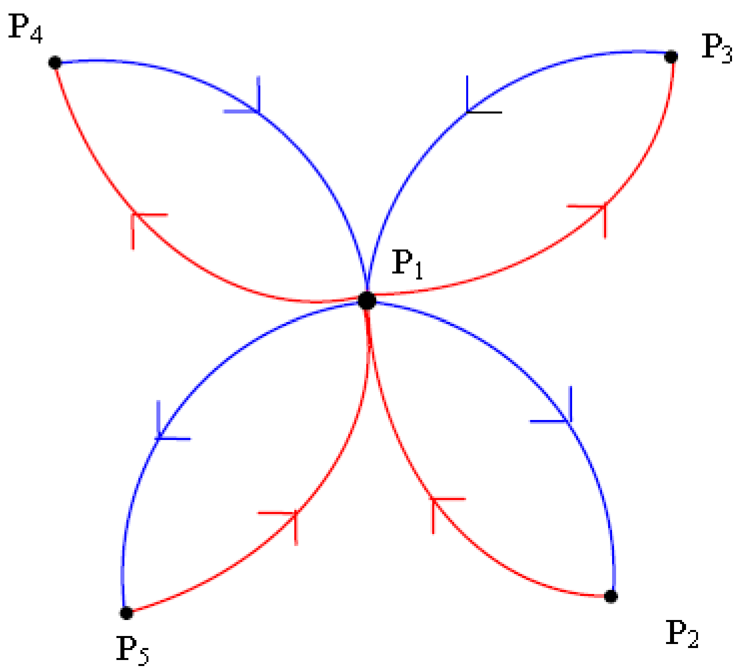
As normais relativas a dois pontos na esfera, convergem para o centro da esfera. Logo, são coplanares. No elipsoide isto não ocorre!



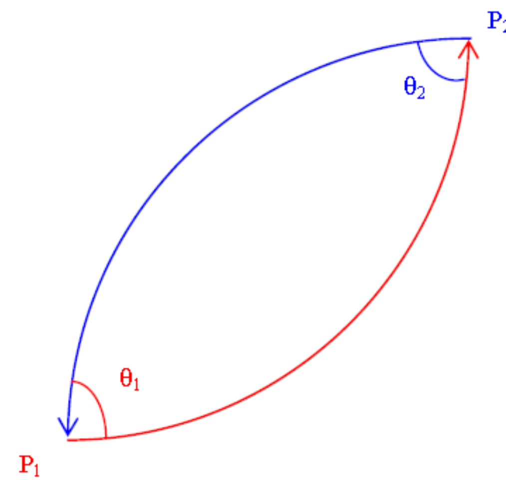


As normais de cada ponto interceptam o eixo Z em dois pontos diferentes: $n_{1\text{ e }}n_{2.}$
Observe que as grandes normais são diferentes. Quanto maior a Latitude, maior a grande normal.

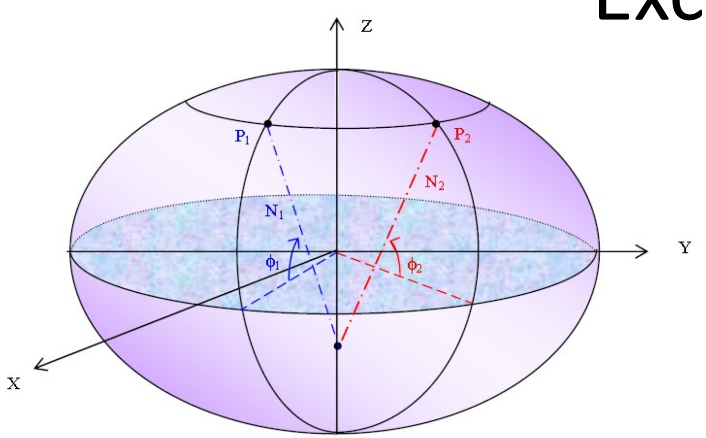
Seção normal Direta em relação a P1: seção normal resultante da intersecção do plano que contém a normal em P1 e o ponto P2. – Seta com origem em P1 – Ou **Seção normal Recíproca** em relação a P2.
As duas seções diretas e recíprocas, são chamadas “**seções normais recíprocas**”.



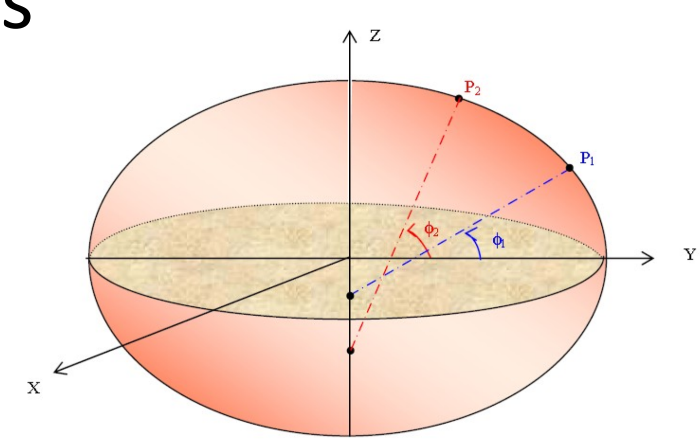
Os planos que definem as seções normais recíprocas não coincidem se as latitudes e longitudes forem diferentes!



Exceções



Mesma Latitude

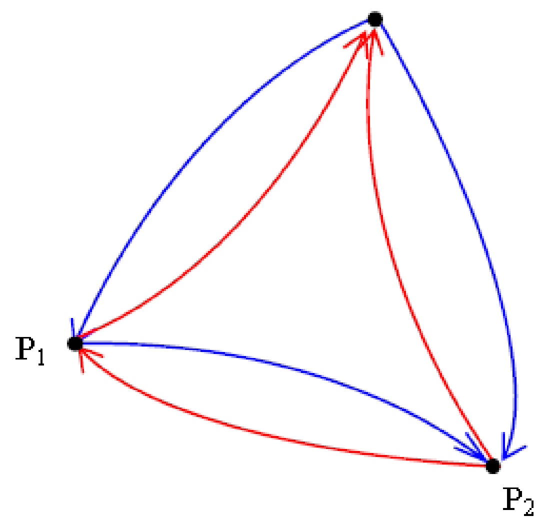


Mesma Longitude

A Linha Geodésica

- O triângulo abaixo não é determinado univocamente devido a duplicidade das seções normais:

A figura 4.23 ilustra três pontos P_1, P_2 e P_3 sobre a superfície do elipsóide de revolução. Se fosse possível instalar um teodolito no vértice P_1, fazendo o eixo vertical coincidir com a normal ao ponto P_1, ao apontá-lo para o ponto P_2 o plano de visada coincidiria com o plano da seção normal direta de P_1 para P_2. De P_2 para P_1 o plano de visada do teodolito interceptaria a superfície do elipsóide ao longo do plano da seção normal direta de P_2 para P_1. A mesma análise pode ser feita para os outros vértices. Conclui-se que o triângulo P_1-P_2-P_3 não é determinado de maneira unívoca devido à duplicidade de seções normais.



Para definir o triângulo elipsoidico P1-P2-P3 de maneira unívoca, os vértices P1, P2 e P3 devem ser unidos pelo menor caminho. Não é nenhuma das seções normais recíprocas, mas uma curva, em geral reversa, situadas entre duas seções normais recíprocas, denominada Geodésica.

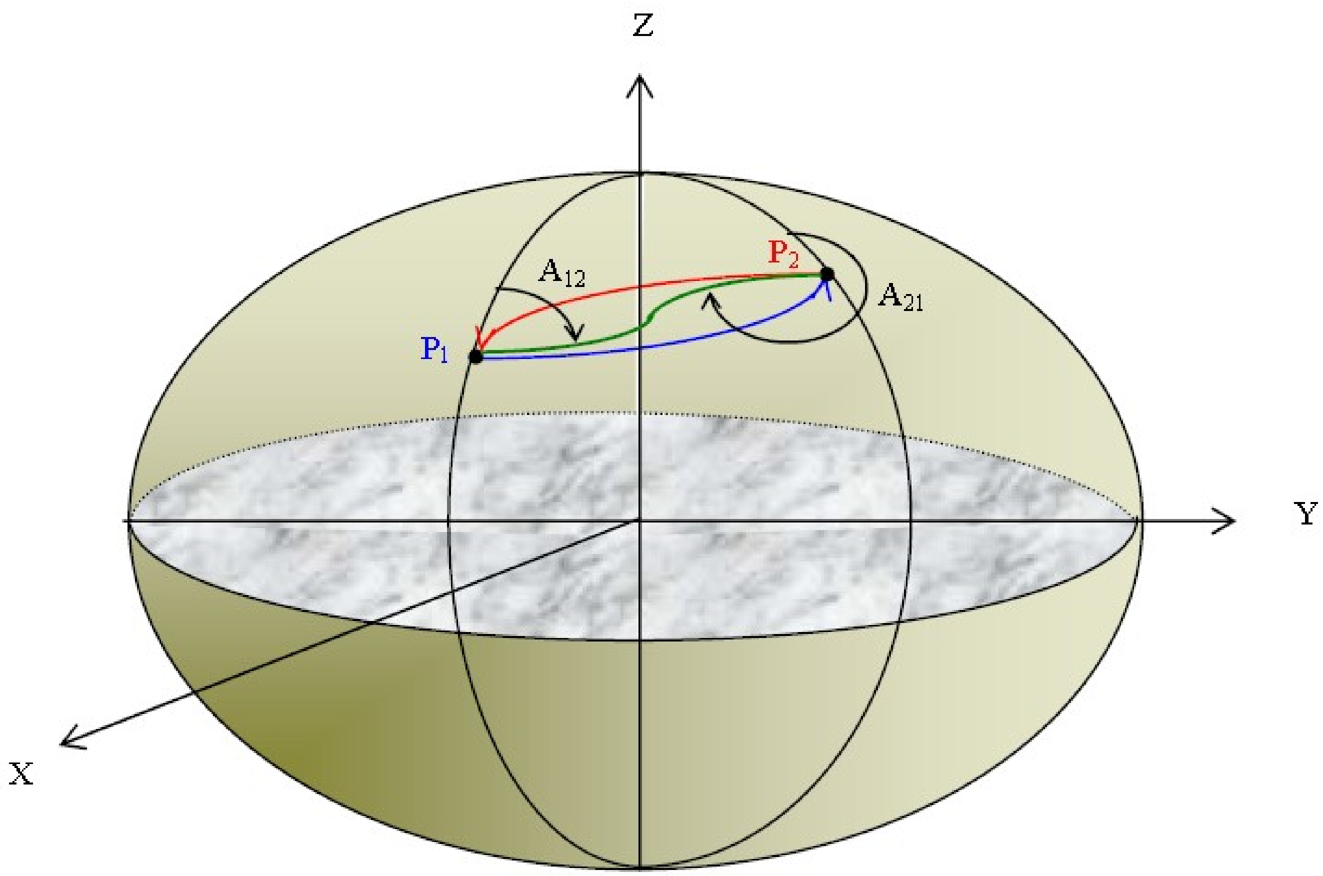
Curva Reversa: não está contida num plano.

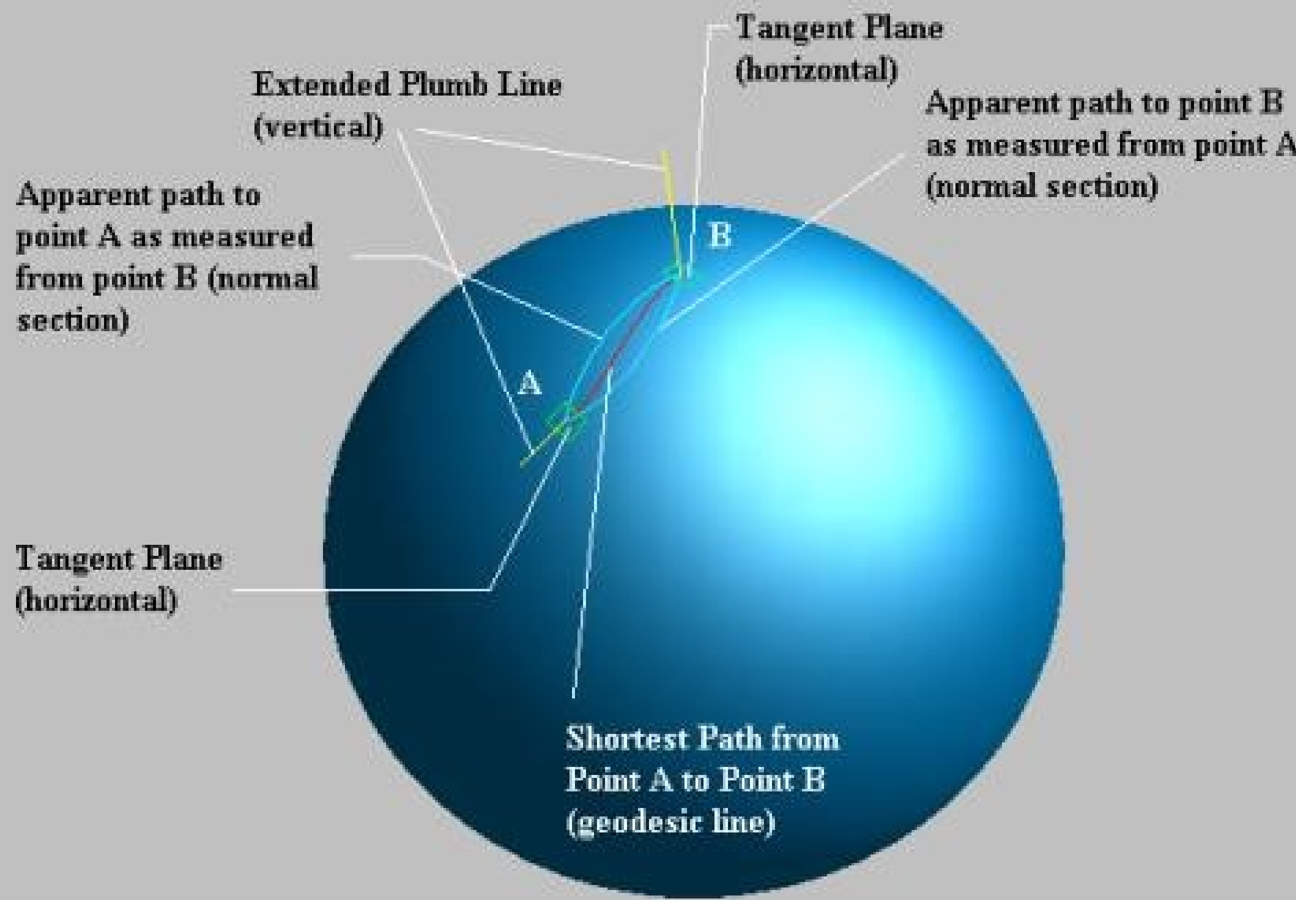
O menor caminho entre dois pontos:

No plano: um segmento de reta
Na esfera: um arco de circunferência máxima
No elipsoide de revolução: a geodésica

Geodésica: á a linha jacente numa superfície, tal que em todos os seus pontos o plano osculador é normal à superfície ... Em todos os seus pontos a normal principal coincide com a normal à superfície.

Linha Geodésica



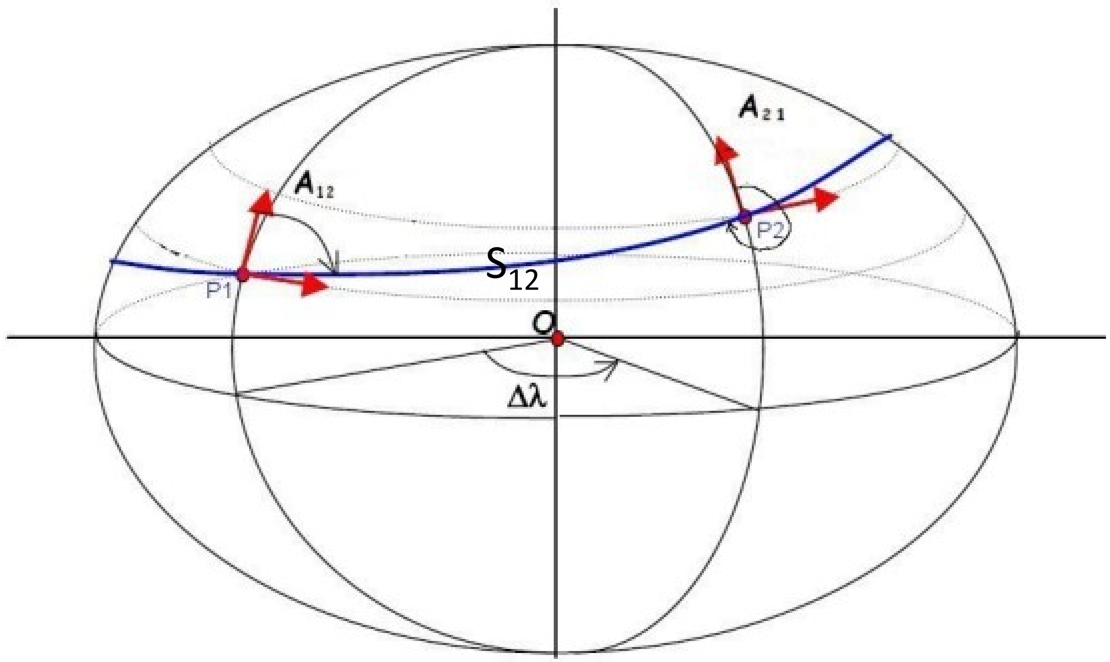


Geodesic Lines on an Ellipsoid

Métodos de Levantamento em Geodésia

- Triangulação
- Trilateração
- Poligonação
- Nivelamento de precisão
- GNSS

Problema Direto e Inverso na Geodésia



DIRETO

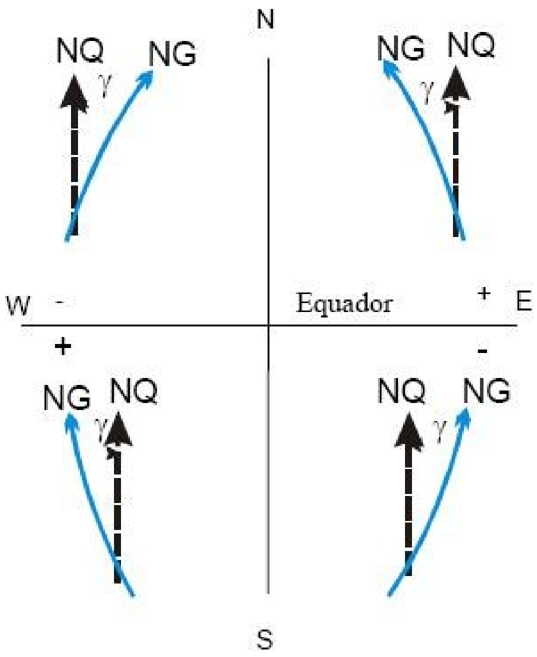
Dados conhecidos: φ_1, λ_1, A_{12}, S_{12}
Incógnitas: φ_2, λ_2, A_{21}, γ

INVERSO

Dados conhecidos: φ_1, φ_2, λ_1, λ_2
Incógnitas: γ, A_{12}, A_{21}, S_{12}

γ = Convergência Meridiana

Convergência Meridiana



A convergência meridiana plana num ponto é definida pelo ângulo formado entre o norte verdadeiro e o norte de quadrícula. É função de suas coordenadas e seu valor é nulo no meridiano central do fuso.

Representação da linha geodésica.

- Utilizar duas estações da RBMC/SIRGAS bem distantes uma da outra– +/- 1000 km....

- Calcular o azimute e distância geodésica.

- Fazer o transporte a partir de uma das estações, bem como dividindo em 6 segmentos
  - Usando a estação origem e a mesma distância, repetir o processo variando o azimute em 30 graus, até voltar a linha original.

- Representar em aplicativo de sua escolha (Google Earth) as linhas compostas pelos segmentos e as que ligam diretamente as estações.
  - software disponíveis para cálculos:
    - Forward and inverse from NGS – ou outro qualquer!
    - http://www.ngs.noaa.gov/TOOLS/Inv_Fwd/Inv_Fwd.html
- Analisar as discrepâncias entre elas e discutir sobre os resultados!