

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM SENSORIAMENTO REMOTO

IVANDRO KLEIN

**CONTROLE DE QUALIDADE NO AJUSTAMENTO  
DE OBSERVAÇÕES GEODÉSICAS**

**Dissertação de Mestrado**

PORTE ALEGRE

2011

IVANDRO KLEIN

**CONTROLE DE QUALIDADE NO AJUSTAMENTO  
DE OBSERVAÇÕES GEODÉSICAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Sensoriamento Remoto da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Sensoriamento Remoto.

Área de Concentração: Sensoriamento Remoto e Geoprocessamento

Linha de Pesquisa: Ciências Geodésicas

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Tomio Matsuoka

Co-orientador: Prof. Dr. Sérgio Florêncio de Souza

PORTE ALEGRE

2011

## **BANCA EXAMINADORA**

Dr. João Francisco Galera Monico

Departamento de Cartografia – UNESP

Dr. Francisco Humberto Magro

Departamento de Geodésia – UFRGS

Dr. Roosevelt de Lara Santos Júnior

Departamento de Geodésia – UFRGS

Dedico este trabalho a minha mãe, meu irmão, meu pai, minha vó e meus dindos, e também ao Laboratório de Pesquisas em Geodésia (LAGEO) da UFRGS, aonde o mesmo nasceu e foi gerado em um ambiente de muito trabalho, e ao mesmo tempo, muito familiar.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Centro Estadual de Pesquisas em Sensoriamento Remoto da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pela oportunidade de cursar um ensino de pós-graduação de qualidade e gratuito.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo fornecimento da bolsa de mestrado.

Aos meus orientadores Prof. Dr. Marcelo Tomio Matsuoka e Prof. Dr. Sergio Florêncio de Souza, pelas infindáveis discussões e debates sobre o tema da minha pesquisa no Laboratório, além dos almoços e cafés com conversas e lições sobre os mais diversos assuntos, aprendi muito nestes dois anos não só no lado profissional, como no lado pessoal também.

Aos meus colegas que passaram pelo LAGEO – Tiago, Carol, Aleksei, Johny, Felipe, Mábila e Matheus, pela ótima convivência diária no Laboratório e pela amizade e momentos de lazer fora dele também, tornando estes dois anos de Mestrado muito produtivos e ao mesmo tempo, muito divertidos.

Aos membros da Banca examinadora, prof. Monico, prof. Magro e prof. Roosevelt, pela disposição em ler o meu trabalho e pelas pertinentes contribuições dadas ao mesmo.

A minha mãe Fernanda e ao meu irmão Fernando, por todo o convívio familiar e suporte emocional nestes dois anos de muito trabalho.

Aos meus amigos, que não deixaram de ser meus amigos mesmo nos momentos em que mais estive ausente, me dedicando a esta pesquisa.

*“... the stupid are cocksure while the intelligent are full of doubt.”*

Bertrand Russell

## RESUMO

Após o ajustamento de observações pelo método dos mínimos quadrados (MMQ) ter sido realizado, é possível a detecção e a identificação de erros não aleatórios nas observações, por meio de testes estatísticos. A teoria da confiabilidade faz uso de medidas adequadas para quantificar o menor erro detectável em uma observação, e a sua influência sobre os parâmetros ajustados, quando não detectado. A teoria de confiabilidade convencional foi desenvolvida para os procedimentos de teste convencionais, como o *data snooping*, que pressupõem que apenas uma observação está contaminada por erros grosseiros por vez. Recentemente foram desenvolvidas medidas de confiabilidade generalizadas, relativas a testes estatísticos que pressupõem a existência, simultânea, de múltiplas observações com erros (*outliers*). Outras abordagens para o controle de qualidade do ajustamento, alternativas a estes testes estatísticos, também foram propostas recentemente, como por exemplo, o método QUAD (*Quasi-Accurate Detection of outliers method*). Esta pesquisa tem por objetivo fazer um estudo sobre o controle de qualidade do ajustamento de observações geodésicas, por meio de experimentos em uma rede GPS (*Global Positioning System*), utilizando tanto os métodos convencionais quanto o atual estado da arte. Desta forma, foram feitos estudos comparativos entre medidas de confiabilidade convencionais e medidas de confiabilidade generalizadas para dois *outliers* simultâneos, bem como estudos comparativos entre o procedimento *data snooping* e testes estatísticos para a identificação de múltiplos *outliers*. Também se investigou como a questão das variâncias e covariâncias das observações, bem como a geometria/configuração da rede GPS em estudo, podem influenciar nas medidas de confiabilidade, tanto na abordagem convencional, quanto na abordagem generalizada. Por fim, foi feito um estudo comparativo entre o método QUAD e os testes estatísticos para a identificação de erros.

**Palavras-chave:** MMQ; redes geodésicas; testes para identificação de erros; medidas de confiabilidade; múltiplos *outliers*, método QUAD.

## ABSTRACT

After the adjustment of observations has been carried out by Least Squares Method (LSM), it is possible to detect and identify non-random errors in the observations using statistical tests. The reliability theory makes use of appropriate measures to quantify the minimal detectable bias (error) in an observation, and its influence on the adjusted parameters, if not detected. The conventional reliability theory has been developed for conventional testing procedures such as data snooping, which assumes that only one observation is contaminated by errors at a time. Recently, generalized measures of reliability has been developed, relating to statistical tests that assumes the existence, simultaneous, of multiple observations with errors (outliers). Other approaches to the quality control of the adjustment, alternatives to these statistical tests, were also proposed recently, such as the QUAD method (Quasi-Accurate Detection of outliers method). The goal of this research is to make a study about the quality control of the adjustment of geodetic observations, by means of experiments in a GPS (Global Positioning System) network, using both conventional methods and the current state of the art. In this way, comparisons were made between conventional reliability measures and generalized measures of reliability for two outliers, as well as comparisons between the data snooping procedure and statistical tests to identify multiple outliers. It was also investigated how the variances and covariances of the observations, as well as the geometry/configuration of the GPS network in study, can influence the measures of reliability, both in the conventional approach and in the generalized approach. Finally, a comparison was made between the QUAD method and the statistical tests to identify outliers (errors).

**Keywords:** LSM; geodetic networks; statistical tests to identify errors; measures of reliability; multiple outliers, QUAD method.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Diferentes estimativas para o parâmetro $x$ e o vetor $e$ , dados o vetor $a$ e as observações $y_1$ e $y_2$ .....	24
Figura 2.2 – Ponto $\hat{x}$ no qual a função $F(x)$ apresenta valor mínimo $F(\hat{x})$ .....	27
Figura 2.3 – Algumas orientações possíveis para uma elipse no plano. ....	29
Figura 2.4 – Elipse $F(z) = C$ e o vetor gradiente desta função em um ponto (vetor) $z_0$ . ....	30
Figura 2.5 – Interpretação geométrica da estimação por mínimos quadrados ponderados no plano. ....	31
Figura 2.6 – Interpretação geométrica da estimação por mínimos quadrados não ponderados no plano. ....	31
Figura 2.7 – Projetores oblíquos $P_a, (Wa)^\perp$ e $P_a^\perp, (Wa)^\perp$ do vetor das observações $y$ .....	32
Figura 2.8 – Representação alternativa das projeções oblíquas $\hat{e}$ e $\hat{y}$ do vetor das observações $y$ .....	34
Figura 2.9 – Diferentes elipses associadas a diferentes valores para a constante $C$ .....	36
Figura 2.10 – Interpretação geométrica para a estimativa do vetor dos erros aleatórios $\hat{e}$ por mínimos quadrados ponderados.....	36
Figura 2.11 – Linearização de uma função $y = F(x)$ em torno de um ponto $x_0$ por Série de Taylor....	44
Figura 2.12– Diferentes fdp $p(y x_i)$ para uma variável aleatória $y$ unidimensional. ....	54
Figura 2.13 – Alguns contornos (elipses), nos quais $p(y x) = \text{constante}$ . ....	57
Figura 2.14 – Diferentes famílias de elipses com $p(y x) = C$ , para diferentes valores do parâmetro $x$ .	57
Figura 2.15 – Elipses de tangência para o vetor $y$ centradas em diferentes pontos $p_i = a x_i$ . ....	58
Figura 2.16 – Estimador $\hat{x}$ de máxima verossimilhança para o parâmetro $x$ . ....	59
Figura 2.17 – Estimador $\hat{x}$ de máxima verossimilhança e a linha $\Sigma_y^{-1}(y - a\hat{x})$ normal a elipse. ....	59
Figura 3.1 – Erros e decisões associados ao teste de uma hipótese nula $H_0$ . ....	64
Figura 3.2 – Interpretação gráfica do erro tipo I e do erro tipo II. ....	65
Figura 3.3 – Etapas de um teste de hipóteses segundo a razão de verossimilhança.....	68
Figura 3.4 – Relação matemática entre as constantes $c$ e $K_\alpha$ do teste da razão de verossimilhança. ....	74
Figura 3.5 – Ilustração gráfica da estatística $\underline{T}_q$ para $q = 4$ , $\alpha = 0,05$ e $\lambda = 9$ . ....	77
Figura 3.6 – Resumo da estatística $\underline{T}_q$ e do teste da razão de verossimilhança em modelos lineares. ..	78
Figura 3.7 – As hipóteses $H_0: E\{\underline{y}_{nx1}   H_0\}$ e $H_A: E\{\underline{y}_{nx1}   H_A\}$ em $R(A : C_y) \subset R^n$ . ....	80
Figura 3.8 – Os vetores $\underline{y}, \hat{\underline{y}}_0, \hat{\underline{y}}_A, \hat{\underline{e}}_0$ e $\hat{\underline{e}}_A$ no espaço $R^n$ .....	81
Figura 3.9 – O triângulo-retângulo $\underline{y}, \hat{\underline{y}}_0$ e $\hat{\underline{y}}_A$ e as relações de ortogonalidade $\perp$ .....	82
Figura 3.10 – Interpretação geométrica da estatística $\underline{T}_q$ . ....	83
Figura 3.11 – A estatística $\underline{w}$ e o critério de teste para $\alpha = 0,05$ . ....	85
Figura 3.12 – A estatística $\underline{T}_{(q=1)}$ e o critério de teste para $\alpha = 0,05$ . ....	86
Figura 3.13 – Resumo da estatística $\underline{w}_i$ e do procedimento de teste <i>Data Snooping</i> . ....	89
Figura 3.14 – Interpretação geométrica do caso especial $q = n - u$ .....	90
Figura 3.15 – Ilustração gráfica da estatística $\hat{\sigma}^2 / \sigma_0^2$ para o teste global do ajustamento. ....	96
Figura 3.16 – Resumo da estatística $\hat{\sigma}^2 / \sigma_0^2$ e do teste global do ajustamento.....	96
Figura 4.1 – Componentes do erro verdadeiro (componente aleatória e não aleatória) e as parcelas refletidas nos resíduos e absorvidas na estimação dos parâmetros incógnitos do modelo.....	108
Figura 4.2 – Exemplos de observações ( $d = \text{distância}$ e $\alpha = \text{ângulo}$ ) com $r_i = 1$ e $r_i = 0$ . ....	109
Figura 6.1 – Rede GPS utilizada nos experimentos, com os vértices A e B como pontos de controle. ....	153
Figura 6.2 – MDB resultante (para $q = 1$ ) modificando a MVC das observações. ....	186

Figura 6.3 – Rede GPS em estudo, sem a linha-base DC.	211
Figura 6.4 – Rede GPS em estudo, sem as linhas-base DC, FC e FE.	221
Figura 6.5 – Rede GPS em estudo, sem as linhas-base DC, FC, FE, DE, FD.	233
Figura 6.6 – Rede GPS com o vértice F como ponto de controle e os vértices A e B livres.	241
Figura 6.7 – Configuração da rede GPS removendo o vértice F.	255
Figura 6.8 – Configuração “praticamente radial” da rede GPS.	263
Figura 6.9 – Indicador de sensibilidade local $\tau_i$ de cada uma das $n = 33$ observações.	283
Figura 6.10 – Indicadores de sensibilidade local das observações e o valor crítico $\tau_i = 1,41$ .	283
Figura 6.11 – Erros estimados para as observações aplicando o método QUAD.	284
Figura 6.12 – Indicador de sensibilidade local $\tau_i$ de cada uma das $n = 33$ observações.	285
Figura 6.13 – Indicadores de sensibilidade local das observações e o valor crítico $\tau_i = 2,75$ .	285
Figura 6.14 – Erros estimados para as observações aplicando o método QUAD.	286
Figura 6.15 – Indicador de sensibilidade local $\tau_i$ de cada uma das $n = 33$ observações.	287
Figura 6.16 – Indicadores de sensibilidade local das observações e o valor crítico $\tau_i = 3,17$ .	288
Figura 6.17 – Erros estimados para as observações aplicando o método QUAD.	289
Figura 6.18 – Indicador de sensibilidade local $\tau_i$ de cada uma das $n = 33$ observações.	290
Figura 6.19 – Indicadores de sensibilidade local das observações e o valor crítico $\tau_i = 1,65$ .	290
Figura 6.20 – Erros estimados para as observações aplicando o método QUAD.	291
Figura 6.21 – Indicador de sensibilidade local $\tau_i$ de cada uma das $n = 33$ observações.	292
Figura 6.22 – Indicadores de sensibilidade local das observações e o valor crítico $\tau_i = 1,02$ .	293
Figura 6.23 – Erros estimados para as observações aplicando o método QUAD.	294

## LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Intervalos para a classificação da controlabilidade das observações.....	104
Tabela 6.1 – Vetor das observações da rede GPS e suas respectivas variâncias e covariâncias.....	155
Tabela 6.2 – Valores da estatística de teste $T_{(q=1)}$ para todas as $n = 39$ observações.....	162
Tabela 6.3 – Desvios padrões, resíduos e medidas de confiabilidade das observações.....	164
Tabela 6.4 – Confiabilidade externa das observações de AC, DE, BC e BD sobre os parâmetros (em mm).....	167
Tabela 6.5 – Confiabilidade externa das observações de DC, DE, FA e FC sobre os parâmetros (em mm).....	167
Tabela 6.6 – Confiabilidade externa das observações FE, FD, FB, BF e AF sobre os parâmetros (em mm).....	167
Tabela 6.7 – Número de redundância, MDB e MDB “ <i>a priori</i> ” de cada observação $y_i$ (em metros). ....	170
Tabela 6.8 – Coeficientes de correlação múltipla para observações das linhas-base AC, AE e BC... ....	172
Tabela 6.9 – Alguns valores para o $\bar{M}DB - \bar{V}y_i^q$ das linhas-base DE, FA e FC (para $q = 2$ ).....	173
Tabela 6.10 – Alguns valores para o $r_{iq}$ das linhas-base DE, FA e FC (para $q = 2$ ).....	173
Tabela 6.11 – Alguns valores para o $r_i^q$ das linhas-base DE, FA e FC (para $q = 2$ ).....	174
Tabela 6.12 – Confiabilidade externa máxima de alguns pares de observações ( $q = 2$ <i>outliers</i> simultâneos), sobre os parâmetros $X_C, X_E, X_D, X_F$ (em mm).....	176
Tabela 6.13 – Confiabilidade externa máxima de alguns pares de observações ( $q = 2$ <i>outliers</i> simultâneos), sobre os parâmetros $X_C, X_E, X_D, X_F$ (em mm).....	176
Tabela 6.14 – Confiabilidade externa máxima sobre $X_E, Y_E$ e $Z_E$ em alguns cenários com $q = 2$ ....	177
Tabela 6.15 – Confiabilidade externa máxima sobre $X_E, Y_E$ e $Z_E$ em alguns cenários com $q = 2$ ....	177
Tabela 6.16 – Medidas de confiabilidade das observações, degradando em 10 vezes a MVC original. ....	180
Tabela 6.17 – Confiabilidade externa das observações de AC, AE, BC e BD sobre os parâmetros, degradando em 10 vezes a MVC original (em mm) .....	181
Tabela 6.18 – Confiabilidade externa das observações de DC, DE, FA e FC sobre os parâmetros, degradando em 10 vezes a MVC original (em mm) .....	182
Tabela 6.19 – Confiabilidade externa das observações de FE, FD, FB, BF e AF sobre os parâmetros, degradando em 10 vezes a MVC original (em mm) .....	182
Tabela 6.20 – Coeficientes de correlação múltipla para as observações das linhas-base AC, AE e BC, degradando em 10 vezes a MVC original .....	183
Tabela 6.21 – Alguns valores para o $\bar{M}DB - \bar{V}y_i^q$ das linhas-base DE, FA e FC (para $q = 2$ ), degradando em 10 vezes a MVC original .....	183
Tabela 6.22 – Alguns valores para o $\bar{r}_i^q$ das linhas-base DE, FA e FC (para $q = 2$ ), degradando em 10 vezes a MVC original.....	183
Tabela 6.23 – Alguns valores para o $r_i^q$ das linhas-base DE, FA e FC (para $q = 2$ ), degradando em 10 vezes a MVC original.....	184
Tabela 6.24 – Confiabilidade externa máxima de alguns pares de observações ( $q = 2$ <i>outliers</i> simultâneos, degradando em 10 vezes a MVC original), sobre os parâmetros $X_C, X_E, X_D, X_F$ (em mm).....	184
Tabela 6.25 – Confiabilidade externa máxima de alguns pares de observações ( $q = 2$ <i>outliers</i> simultâneos, degradando em 10 vezes a MVC original), sobre os parâmetros $X_C, X_E, X_D, X_F$ (em mm).....	185

Tabela 6.26 – Medidas de confiabilidade das observações com a MVC das observações diagonal...	187
Tabela 6.27 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, com a MVC diagonal (em mm).....	188
Tabela 6.28 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, com a MVC diagonal (em mm).....	188
Tabela 6.29 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, com a MVC diagonal (em mm).....	189
Tabela 6.30 – Coeficientes de correlação múltipla para as linhas-base AC, AE e BC, com a MVC diagonal.....	190
Tabela 6.31 – Alguns valores para o $\bar{M}y_i^q$ das linhas-base DE, FA e FC (para $q = 2$ ), com MVC diagonal.....	190
Tabela 6.32 – Alguns valores para o $\bar{r}_i^q$ das linhas-base DE, FA e FC (para $q = 2$ ), com a MVC diagonal.....	190
Tabela 6.33 – Alguns valores para o $r_i^q$ das linhas-base DE, FA e FC (para $q = 2$ ), com a MVC diagonal.....	190
Tabela 6.34 – Confiabilidade externa máxima de alguns pares de observações ( $q = 2$ outliers simultâneos, com a MVC diagonal), sobre os parâmetros $X_C$ , $X_E$ , $X_D$ , $X_F$ (em mm).....	192
Tabela 6.35 – Confiabilidade externa máxima de alguns pares de observações ( $q = 2$ outliers simultâneos, com a MVC diagonal), sobre os parâmetros $X_C$ , $X_E$ , $X_D$ , $X_F$ (em mm).....	192
Tabela 6.36 – Medidas de confiabilidade das observações, aumentando em 10 vezes as covariâncias.....	193
Tabela 6.37 – Confiabilidade externa das observações de AC, AE, BC e BD sobre os parâmetros, aumentando em 10 vezes as covariâncias (em mm).....	194
Tabela 6.38 – Confiabilidade externa das observações de DC, DE, FA e FC sobre os parâmetros, aumentando em 10 vezes as covariâncias (em mm).....	195
Tabela 6.39 – Confiabilidade externa das observações de FE, FD, FE, BF e AF sobre os parâmetros, aumentando em 10 vezes as covariâncias (em mm).....	195
Tabela 6.40 – Coeficientes de correlação múltipla para as observações das linhas-base AC, AE e BC, aumentando em 10 vezes as covariâncias.....	196
Tabela 6.41 – Alguns valores para o $\bar{M}y_i^q$ das linhas-base DE, FA e FC (para $q = 2$ ), aumentando em 10 vezes as covariâncias.....	196
Tabela 6.42 – Alguns valores para o $\bar{r}_i^q$ das linhas-base DE, FA e FC (para $q = 2$ ), aumentando em 10 vezes as covariâncias.....	196
Tabela 6.43 – Alguns valores para o $r_i^q$ das linhas-base DE, FA e FC (para $q = 2$ ), aumentando em 10 vezes as covariâncias.....	197
Tabela 6.44 – Confiabilidade externa máxima de alguns pares de observações ( $q = 2$ outliers simultâneos, aumentando em 10 vezes as covariâncias), sobre os parâmetros $X_C$ , $X_E$ , $X_D$ , $X_F$ (em mm).....	198
Tabela 6.45 – Confiabilidade externa máxima de alguns pares de observações ( $q = 2$ outliers simultâneos, aumentando em 10 vezes as covariâncias), sobre os parâmetros $X_C$ , $X_E$ , $X_D$ , $X_F$ (em mm).....	198
Tabela 6.46 – Medidas de confiabilidade das observações, sem as linhas-base AF e BF.....	202
Tabela 6.47 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, sem AF e BF (em mm).....	203
Tabela 6.48 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, sem AF e BF (em mm).....	204

Tabela 6.49 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, sem AF e BF (em mm). ....	204
Tabela 6.50 – Coeficientes de correlação múltipla para algumas observações (com AF e BF). ....	206
Tabela 6.51 – Coeficientes de correlação múltipla para algumas observações (sem AF e BF). ....	206
Tabela 6.52 – Alguns valores para o MDB das linhas-base DE, FA e FC (com AF e BF). ....	206
Tabela 6.53 – Alguns valores para o MDB das linhas-base DE, FA e FC (sem AF e BF). ....	207
Tabela 6.54 – Alguns valores para o $r_i^q$ das linhas-base DE, FA e FC (com AF e BF). ....	207
Tabela 6.55 – Alguns valores para o $r_i^q$ das linhas-base DE, FA e FC (sem AF e BF). ....	207
Tabela 6.56 – Confiabilidade externa máxima de alguns pares de observações ( $q = 2$ outliers simultâneos, sem AF e BF), sobre os parâmetros $X_C, X_E, X_D, X_F$ (em mm).....	209
Tabela 6.57 – Confiabilidade externa máxima de alguns pares de observações ( $q = 2$ outliers simultâneos, sem AF e BF), sobre os parâmetros $X_C, X_E, X_D, X_F$ (em mm).....	209
Tabela 6.58 – Medidas de confiabilidade das observações, sem as linhas-base AF, BF e DC. ....	211
Tabela 6.59 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, sem AF, BF e DC (em mm). ....	213
Tabela 6.60 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, sem AF, BF e DC (em mm). ....	213
Tabela 6.61 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, sem AF, BF e DC (em mm). ....	213
Tabela 6.62 – Coeficientes de correlação múltipla para algumas observações (com DC).....	215
Tabela 6.63 – Coeficientes de correlação múltipla para algumas observações (sem DC). ....	215
Tabela 6.64 – Alguns valores para o MDB das linhas-base BC, FC e FD (com DC).....	216
Tabela 6.65 – Alguns valores para o MDB das linhas-base BC, FC e FD (sem DC). ....	216
Tabela 6.66 – Alguns valores para o $r_i^q$ das linhas-base BC, FC e FD (com DC). ....	216
Tabela 6.67 – Alguns valores para o $r_i^q$ das linhas-base BC, FC e FD (sem DC). ....	216
Tabela 6.68 – Pares de linhas-base com os maiores aumentos e reduções em $\rho_{ij}^q$ (sem DC). ....	217
Tabela 6.69 – Confiabilidade externa máxima de alguns pares de observações ( $q = 2$ outliers simultâneos, sem DC), sobre os parâmetros $X_C, X_E, X_D, X_F$ (em mm).....	219
Tabela 6.70 – Confiabilidade externa máxima de alguns pares de observações ( $q = 2$ outliers simultâneos, sem DC), sobre os parâmetros $X_C, X_E, X_D, X_F$ (em mm).....	220
Tabela 6.71 – Medidas de confiabilidade das observações, sem AF, BF, DC, FC, FE. ....	222
Tabela 6.72 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, sem AF, BF, DC, FC, FE (em mm). ....	224
Tabela 6.73 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, sem AF, BF, DC, FC, FE (em mm). ....	224
Tabela 6.74 – Alguns coeficientes de correlação múltipla das observações (com DC, FC, FE). ....	226
Tabela 6.75 – Alguns coeficientes de correlação múltipla das observações (sem DC, FC, FE). ....	227
Tabela 6.76 – Alguns valores para o MDB das linhas-base BC, DE e FD (com DC, FC, FE).....	227
Tabela 6.77 – Alguns valores para o MDB das linhas-base BC, DE e FD (sem DC, FC, FE). ....	227
Tabela 6.78 – Alguns valores para o $r_i^q$ das linhas-base BC, DE e FD (com DC, FC, FE). ....	227
Tabela 6.79 – Alguns valores para o $r_i^q$ das linhas-base BC, DE e FD (sem DC, FC, FE). ....	228
Tabela 6.80 – Confiabilidade externa máxima de alguns pares de observações ( $q = 2$ outliers simultâneos, sem DC, FC, FE), sobre os parâmetros $X_C, X_E, X_D, X_F$ (em mm). ....	231
Tabela 6.81 – Medidas de confiabilidade das observações, sem DC, FC, FE, DE e FD. ....	233
Tabela 6.82 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, sem DC, FC, FE, DE e FD (em mm). ....	235

Tabela 6.83 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, sem DC, FC, FE, DE e FD (em mm).....	236
Tabela 6.84 – Alguns coeficientes de correlação múltipla das observações (sem DC, FC, FE, DE e FD). .....	237
Tabela 6.85 – Alguns valores para o MDB das linhas-base BC, BD e FA (sem DC, FC, FE, DE e FD). ....	237
Tabela 6.86 – Alguns valores para o $r_i^q$ das linhas-base BC, BD e FA (sem DC, FC, FE, DE e FD). ....	237
Tabela 6.87 – Confiabilidade externa máxima de alguns pares de observações ( $q = 2$ outliers simultâneos, sem DC, FC, FE, DE e FD) sobre os parâmetros $X_C, X_E, X_D, X_F$ (em mm). ....	239
Tabela 6.88 – Medidas de confiabilidade das observações, com F como ponto de controle e A e B livres.....	242
Tabela 6.89 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, com F como ponto de controle e A e B livres (em mm). ....	245
Tabela 6.90 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, com F como ponto de controle e A e B livres (em mm). ....	245
Tabela 6.91 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, com F como ponto de controle e A e B livres (em mm). ....	246
Tabela 6.92 – Coeficientes de correlação múltipla para algumas observações (A e B como pontos de controle e F como ponto desconhecido).....	249
Tabela 6.93 – Coeficiente de correlação múltipla para algumas observações (A e B como pontos desconhecidos e F como ponto de controle). ....	249
Tabela 6.94 – Valores para o MDB de algumas observações com $q = 2$ (A e B como pontos de controle e F como ponto desconhecido).....	249
Tabela 6.95 – Valores para o MDB de algumas observações com $q = 2$ (A e B como pontos desconhecidos e F como ponto de controle). ....	250
Tabela 6.96 – Valores para o $r_i^q$ de algumas observações com $q = 2$ (A e B como pontos de controle e F como ponto desconhecido).....	250
Tabela 6.97 – Valores para o $r_i^q$ de algumas observações com $q = 2$ (A e B como pontos desconhecidos e F como ponto de controle). ....	250
Tabela 6.98 – Pares de linhas-base com maiores aumentos e reduções em $\rho_{ij}^q$ (com F como ponto de controle). ....	251
Tabela 6.99 – Pares de linhas-base com os maiores aumentos em $\nabla y_i^q$ (com ponto F como ponto de controle). ....	252
Tabela 6.100 – Confiabilidade externa máxima de alguns pares de observações ( $q = 2$ outliers, F como ponto de controle e A e B livres), sobre os parâmetros $X_C, X_E, X_D, X_A$ e $X_B$ (em mm). ....	254
Tabela 6.101 – Confiabilidade externa máxima de alguns pares de observações ( $q = 2$ outliers, F como ponto de controle e A e B livres), sobre os parâmetros $X_C, X_E, X_D, X_A$ e $X_B$ (em mm). ....	254
Tabela 6.102 – Medidas de confiabilidade das observações da rede sem o vértice F.....	256
Tabela 6.103 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros sem o vértice F (em mm). ....	258
Tabela 6.104 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros sem o vértice F (em mm). ....	258
Tabela 6.105 – Alguns coeficientes de correlação múltipla das observações (com o vértice F). ....	259
Tabela 6.106 – Alguns coeficientes de correlação múltipla das observações (sem o vértice F).....	260
Tabela 6.107 – Alguns valores para o MDB das linhas-base BD, DC e DE (com o vértice F).....	260
Tabela 6.108 – Alguns valores para o MDB das linhas-base BD, DC e DE (sem o vértice F). ....	260

Tabela 6.109 – Alguns valores para o $r_i^q$ das linhas-base BD, DC e DE (com o vértice F).....	260
Tabela 6.110 – Alguns valores para o $r_i^q$ das linhas-base BD, DC e DE (sem o vértice F).....	261
Tabela 6.111 – Confiabilidade externa máxima de alguns pares de observações ( $q = 2$ outliers, sem o vértice F), sobre os parâmetros $X_C$ , $X_E$ e $X_D$ (em mm). .....	262
Tabela 6.112 – Medidas de confiabilidade das observações com a configuração da rede praticamente radial.....	264
Tabela 6.113 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, com a configuração da rede “praticamente radial” (em mm). .....	266
Tabela 6.114 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, com a configuração da rede “praticamente radial” (em mm). .....	266
Tabela 6.115 – Alguns coeficientes de correlação múltipla das observações (configuração “praticamente radial”). .....	267
Tabela 6.116 – Alguns valores para o MDB das linhas-base DC, FA e FC (configuração “praticamente radial”).....	268
Tabela 6.117 – Alguns valores para o $r_i^q$ das linhas-base DC, FA e FC (configuração “praticamente radial”). .....	268
Tabela 6.118 – Confiabilidade externa máxima de alguns pares de observações ( $q = 2$ outliers, configuração da rede “praticamente radial”), sobre os parâmetros $X_C$ , $X_E$ , $X_D$ e $X_F$ (em mm). .....	269
Tabela 6.119 – Erros propositais em duas observações e as estatísticas calculadas dos testes ( $q = 1$ e $q = 2$ ). .....	273
Tabela 6.120 – Erros propositais em três observações e as estatísticas calculadas dos testes ( $q = 1$ e $q = 2$ ). .....	274
Tabela 6.121 – Erros inseridos e erros estimados nas observações $\Delta X_{FE}$ , $\Delta X_{AC}$ e $\Delta X_{BC}$ . .....	278
Tabela 6.122 – Erros propositais inseridos nas observações $\Delta X_{AC}$ , $\Delta X_{BC}$ e $\Delta X_{FB}$ nos três experimentos realizados sobre o método QUAD.....	282

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO .....	12
1.1	Objetivos .....	15
1.2	Justificativa .....	16
1.3	Estrutura do Trabalho.....	18
2	AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES GEODÉSICAS .....	19
2.1	O Método dos Mínimos Quadrados em Sistemas Lineares.....	23
2.2	Interpretação Geométrica do MMQ .....	28
2.3	Média e Matriz de Covariância dos Estimadores por Mínimos Quadrados .....	38
2.4	Ajustamento pelo Método Paramétrico e Linearização do Modelo Funcional .....	42
2.5	Números de Condições Mínimas e Injunções no Método Paramétrico.....	47
2.6	O Método dos Mínimos Quadrados e o Melhor Estimador Linear Imparcial.....	51
2.7	O Método dos Mínimos Quadrados e a Solução de Máxima Verossimilhança .....	54
3	TESTES ESTATÍSTICOS PARA DETECÇÃO E IDENTIFICAÇÃO DE ERROS .....	61
3.1	Conceitos Básicos em Testes de Hipóteses.....	61
3.2	Testes de Hipóteses em Modelos Lineares: Caso Geral.....	68
3.2.1	<i>Interpretação Geométrica da Estatística <math>T_q</math></i> .....	78
3.2.2	<i>O Caso <math>q = 1</math> e o Procedimento de Teste Data Snooping</i> .....	83
3.2.3	<i>O Caso <math>q = n - u</math> e o Teste Global do Ajustamento</i> .....	89
3.3	Algumas Considerações sobre os Testes de Hipóteses no Ajustamento .....	97
4	TEORIA CONVENCIONAL DE CONFIABILIDADE DO AJUSTAMENTO .....	100
4.1	Números de Redundância e de Absorção.....	100
4.2	Confiabilidade Interna.....	110
4.3	Confiabilidade Externa.....	119
4.4	Razão Tendência-Ruído .....	121
5	ESTADO DA ARTE NO CONTROLE DE QUALIDADE DO AJUSTAMENTO .....	127
5.1	Controle de Qualidade no Ajustamento de Observações .....	127
5.2	Medidas generalizadas de confiabilidade para múltiplos <i>outliers</i> .....	138
5.3	Detecção quase-acurada de <i>outliers</i> para observações correlacionadas .....	147
6	EXPERIMENTOS, RESULTADOS OBTIDOS E ANÁLISES.....	153
6.1	Ajustamento por Mínimos Quadrados da Rede GPS .....	158
6.2	Controle de Qualidade e Medidas de Confiabilidade Convencionais .....	160

6.3	Medidas de Confiabilidade para dois <i>outliers</i> simultâneos na rede GPS .....	172
6.4	Influência das Variâncias e Covariâncias Sobre as Medidas de Confiabilidade.....	179
6.5	Influência da Geometria/Configuração da Rede sobre as Medidas de Confiabilidade .....	200
6.6	Inserção de Erros e Testes Estatísticos para Identificação de Erros.....	272
6.7	Aplicação do Método QUAD.....	282
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS, CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES .....	296
7.1	Considerações Finais.....	296
7.2	Conclusões .....	297
7.3	Recomendações .....	308
	REFERÊNCIAS .....	310

## 1 INTRODUÇÃO

A Geodésia, tal como outras ciências, necessita da coleta de dados (observações), por meio de processos experimentais de medidas. Desta forma, os parâmetros incógnitos que se deseja estimar, se relacionam com as observações realizadas (medidas), por meio de um modelo matemático conhecido e previamente estipulado (TEUNISSEN, 2003). Por exemplo, as coordenadas cartesianas dos vértices que formam uma rede geodésica (parâmetros incógnitos do modelo), podem ser determinadas por meio da medida de distâncias (observações) entre os diferentes vértices que formam esta rede (contanto que o sistema de referência adotado esteja devidamente materializado por meio de injunções, como as coordenadas de pontos de controle).

Entretanto, devido a natureza experimental do processo de medições, as observações são contaminadas por erros de diferentes tipos. Tradicionalmente, os erros que contaminam as observações são classificados em aleatórios, sistemáticos e grosseiros (GEMAEL, 1994).

Os erros aleatórios (ou accidentais) são inevitáveis, sendo uma característica intrínseca da observação, resultando da incerteza associada a natureza experimental do processo de medidas (ou seja, da própria precisão da observação). Erros sistemáticos são erros que apresentam tendência, e, portanto, causa (por exemplo, alguma lei física conhecida), podendo ser evitados por meio de técnicas especiais de observação ou devidamente parametrizados no modelo matemático. Por fim, os erros grosseiros são falhas (de natureza humana ou instrumental), que devem ser evitados ou devidamente identificados (localizados) nas observações, para que a sua influência nos resultados finais (parâmetros estimados) possa ser removida ou minimizada.

Devido a esta inevitável existência de erros aleatórios nas observações, e a possível existência de erros não aleatórios (sistemáticos e/ou grosseiros), geralmente, o geodesista trabalha com observações redundantes, sendo duas as principais razões para isto: A primeira visa melhorar a acurácia dos resultados estimados, e a segunda visa detectar a possível presença de erros (não aleatórios) nos modelos e/ou nas observações (TEUNISSEN, 2006).

Porém, o uso de observações redundantes no modelo matemático resulta na inconsistência do mesmo (ou seja, não existência de solução única e exata). Adicionando um vetor de resíduos ao sistema de equações, ou seja, admitindo que as observações possuem erros, este passa a ser matematicamente consistente, porém, com infinitas soluções (DALMOLIN, 2002).

Para a solução única destes sistemas de equações redundantes e inconsistentes, o critério mais adotado nas ciências geodésicas é o método dos mínimos quadrados (MMQ), ou seja, aquela solução para os parâmetros incógnitos que minimiza a soma do quadrado dos resíduos, ponderados pelos respectivos pesos das observações (GHILANI; WOLF, 2006).

Quando apenas erros de natureza aleatória contaminam as observações, o método dos mínimos quadrados é dito ser um estimador imparcial (GEMAEL, 1994). Além disso, quando a ponderação das observações é tomada em função de suas variâncias e covariâncias, corretamente determinadas, o MMQ é dito o melhor estimador linear imparcial, e ainda, quando os erros aleatórios seguem distribuição normal multivariada, a solução pelo MMQ coincide com a solução de máxima verossimilhança (TEUNISSEN, 2003).

Entretanto, quando as observações também estão contaminadas por erros não aleatórios, estes podem exercer influência na solução do ajustamento (ou seja, nos parâmetros estimados), e assim estas propriedades do MMQ não são satisfeitas (GUI et al., 2005).

Desta forma, diversas técnicas para a detecção e a identificação (localização) de erros (não aleatórios) nas observações foram desenvolvidas, estratégias estas aplicadas tanto antes quanto após o ajustamento pelo MMQ ter sido realizado (KAVOURAS, 1982).

Uma das técnicas para a detecção e a identificação de erros nas observações, após o ajustamento pelo MMQ, é o chamado  $\beta$ -Method, proposto por Baarda (1968). Neste trabalho, Baarda propõe o uso do chamado Teste Global do Ajustamento para a detecção de erros nas observações e/ou no modelo, e o procedimento de teste *data snooping* para a localização destes erros, ou seja, para a identificação das observações suspeitas de estarem contaminadas.

Entretanto, por ser uma estratégia que se utiliza de testes estatísticos, ou seja, que possui níveis de probabilidade associados, erros não aleatórios, porém de pequena magnitude, podem não ser identificados pelo procedimento *data snooping* (KAVOURAS, 1982).

Isto levou ao desenvolvimento da teoria de confiabilidade, que se utiliza de medidas adequadas para quantificar o “menor erro detectável” em uma observação, com certo nível de probabilidade, bem como a sua influência nos resultados do ajustamento (ou seja, nos parâmetros estimados), quando não detectado. Uma série de trabalhos foram publicados sobre a teoria de confiabilidade, como por exemplo, Baarda (1968, 1977), Pelzer (1979), Kavouras (1982), Förstner (1987), Wang e Chen (1994), Chen e Wang (1996), Ding e Coleman (1996a, 1996b), Schaffrin (1997), Teunissen (2006) e Proszynksi (2010), dentre outros.

Um inconveniente do procedimento de teste *data snooping* é que este pressupõe que apenas uma observação está contaminada por erros por vez, e necessita, portanto, realizar repetições do teste para a localização de todas as observações suspeitas. Desta forma, as

medidas de confiabilidade desenvolvidas também se baseiam no pressuposto de apenas uma observação contaminada por erros por vez. Entretanto, mais de uma observação pode estar contaminada por erros (simultaneamente), principalmente quando o número de observações é elevado (ALMAGBILE et al., 2011).

Além disso, segundo Gui et al. (2010), quando duas ou mais observações estão contaminadas por erros, pode ocorrer o fenômeno *masking* (quando uma observação contaminada por erros é não detectada em virtude de outras observações também estarem contaminadas por erros), e também o fenômeno *swamping* (quando uma observação não contaminada por erros é identificada erroneamente devido a influência de observações contaminadas por erros).

Desta forma, trabalhos apresentando medidas de confiabilidade considerando a existência, simultânea, de mais de uma observação contaminadas por erros (*outliers*) também foram publicados, como por exemplo, Ober (1996), Angus (2006), Knight et al. (2010) e Almagbile et al. (2011). Uma discussão detalhada sobre as diversas medidas de confiabilidade que foram propostas para múltiplos *outliers* é obtida Knight et al. (2010).

O pressuposto da existência, simultânea, de mais de uma observação contaminada por erros (não aleatórios), também requer o uso de testes estatísticos generalizados para estes casos (ver, por exemplo, TEUNISSEN, 2006), que, conforme dito, são mais passíveis de ocorrerem na prática, principalmente quando o número de observações é elevado.

Abordagens alternativas aos procedimentos de testes para a detecção e a identificação de erros (não aleatórios) no MMQ também foram propostas, como por exemplo, os métodos de estimação robusta (HUBER, 1964; HEKIMOGLU; BERBER, 2002; YANG et al. 2002; XU, 2005; KNIGHT; WANG, 2009; GUO et al., 2010), a análise de robustez (VANÍCEK et al., 2001; BERBER, 2006; BERBER et al., 2006; GAMBIN et al., 2008; VANÍCEK et al., 2008), e o método QUAD (OU, 1999; CHAI et al., 2002; GUI et al., 2005; GUO et al., 2007), dentre outras.

No âmbito nacional, alguns trabalhos referentes ao controle de qualidade do ajustamento pelo MMQ (detecção e identificação de erros) também foram publicados, sendo a maior parte relativa ao procedimento de teste *data snooping* e também as medidas de confiabilidade convencionais (ou seja, propostas para o caso do *data snooping*). Dentre estes trabalhos, pode-se citar os estudos de Tommaselli (1985), Mitishita (1986), Silva (1987), Firkowski (1988), Magro (1990), Camargo (1992), Marques (1994), Moraes (2001), Oliveira e Dalmolin (2003), Teixeira e Ferreira (2003), Machado e Monico (2004), Santos Junior et al. (2005), Monico et al. (2006), Santos (2006), Oliveira (2007), Oliveira e Dalmolin (2008) e

Carvalho (2009). Entretanto, no cenário nacional, nenhum trabalho havia sido publicado abordando o estado da arte no controle de qualidade do ajustamento.

## 1.1 Objetivos

O objetivo geral desta pesquisa de mestrado é estudar, apresentar, aplicar e analisar os temas referentes ao controle de qualidade no ajustamento de observações geodésicas, contemplando a teoria convencional sobre o tema e o seu estado da arte.

Dentro deste contexto, para atingir o objetivo geral desta pesquisa, os objetivos específicos são:

- Apresentar uma revisão teórica do ajustamento pelo método dos mínimos quadrados, com uma ênfase especial a interpretação geométrica do mesmo;
- Apresentar uma ampla revisão teórica dos testes estatísticos para a detecção e a identificação de erros (não aleatórios) nas observações;
- Apresentar a Teoria de Confiabilidade Convencional (considerando apenas um *outlier* por vez), bem como o seu atual estado da arte, ou seja, a sua recente extensão para múltiplos *outliers* simultâneos;
- Apresentar uma abordagem alternativa aos procedimentos de testes para a detecção e a identificação de erros nas observações, no caso, a técnica escolhida foi o método QUAD (*Quasi-Accurate Detection of outliers – Detecção Quase-Acurada de outliers*);
- Realizar o ajustamento pelo MMQ de uma rede geodésica, no caso, uma rede GPS (*Global Positioning System – Sistema de Posicionamento Global*), bem como aplicar o Teste Global do Ajustamento para a detecção de possíveis erros nas observações e/ou nos modelos, e o procedimento *data snooping* para a identificação (localização) de possíveis erros nas observações;

- Calcular e analisar as medidas de confiabilidade convencionais das observações (considerando apenas um *outlier* por vez), e comparar com as medidas de confiabilidade generalizadas para múltiplos *outliers* (no caso, para dois *outliers* simultâneos nas observações);
- Verificar a influência da precisão das observações sobre as medidas de confiabilidade (tanto no caso convencional quanto no caso generalizado), alterando os valores das variâncias e covariâncias das observações;
- Verificar a influência da geometria/configuração da rede geodésica em estudo sobre as medidas de confiabilidade (tanto no caso convencional quanto no caso generalizado), alterando a geometria/configuração da rede (como por exemplo, número de observações e/ou parâmetros, além da localização dos pontos de controle);
- Verificar o desempenho do procedimento *data snooping* e dos testes estatísticos para a identificação de múltiplos *outliers* simultâneos nas observações, por meio da inserção de erros propósitos nestas, bem como comparar os resultados obtidos utilizando estas duas abordagens;
- Aplicar um método alternativo (método QUAD) aos procedimentos de testes estatísticos supracitados para a identificação de erros nas observações, e comparar os resultados obtidos com os obtidos pelo procedimento *data snooping* e pelos testes para múltiplos *outliers* simultâneos;

## 1.2 Justificativa

Embora a formulação teórica do MMQ seja largamente difundida no âmbito nacional, por meio de trabalhos como Gemael (1994) e Dalmolin (2002), não havia nenhum trabalho em língua portuguesa tratando da interpretação geométrica do mesmo, obtida em Teunissen (2003). Desta forma, como se fazia necessário apresentar uma revisão teórica do MMQ neste

estudo, optou-se por também apresentar a interpretação geométrica do mesmo, visando contribuir, no âmbito nacional, com um melhor entendimento teórico deste método de estimação.

Da mesma maneira, embora alguns trabalhos apresentem o Teste Global do Ajustamento e o procedimento *data snooping*, no cenário nacional, ainda não se tinha uma revisão teórica das raízes destes, que são pertencentes a uma única família de testes geral, formulada com base na razão de verossimilhança. Desta forma, optou-se por apresentar uma revisão teórica detalhada dos testes para a detecção e a identificação de erros nas observações, visando contribuir, no âmbito nacional, com um melhor entendimento teórico destes.

Além disso, como as medidas de confiabilidade generalizadas para múltiplos *outliers* propostas na Literatura são relativamente recentes, existem poucos estudos sobre as mesmas, bem como poucas comparações com as medidas de confiabilidade convencionais. Dentro deste contexto, este trabalho pretende contribuir com o melhor entendimento destas medidas, bem como realizar comparações com as medidas de confiabilidade convencionais.

De maneira análoga, também foi feito um estudo comparativo entre o procedimento de teste *data snooping* (que considera apenas uma observação com erro por vez), com os testes estatísticos que consideram a existência, simultânea, de duas ou mais observações contaminadas por erros, por meio de diversos experimentos.

Como será visto posteriormente, as medidas de confiabilidade consideradas dependem, dentre outros fatores, da precisão das observações, além da geometria (configuração) do problema. Portanto, visando contribuir ainda mais com o entendimento das mesmas, foi verificado em como a questão da precisão das observações, bem como da geometria/configuração da rede em estudo, podem influenciar nas medidas de confiabilidade, tanto no caso convencional (ou seja, apenas um *outlier* por vez) quanto no caso generalizado (ou seja, dois ou mais *outliers* simultâneos). Ressalva-se que este tipo de estudo, para o caso generalizado para múltiplos *outliers*, ainda não havia sido encontrado na Literatura, devido ao fato desta extensão proposta para a Teoria de Confiabilidade ser relativamente recente.

Por fim, o método QUAD também é uma técnica de detecção e identificação de erros relativamente recente, alternativa aos procedimentos de teste supracitados. Portanto, visando comparar estratégias relativamente recentes no controle de qualidade do ajustamento de observações, também foi feito um estudo comparativo entre o método QUAD e os testes estatísticos para detecção e identificação de erros (utilizando tanto a abordagem para múltiplos *outliers* simultâneos quanto o procedimento convencional *data snooping*).

### 1.3 Estrutura do Trabalho

Este trabalho está dividido em sete capítulos. No primeiro capítulo consta a introdução do mesmo. No segundo capítulo, é apresentada uma revisão teórica do ajustamento de observações pelo MMQ, bem como a interpretação geométrica deste método de estimação, além de algumas de suas propriedades. O terceiro capítulo apresenta uma revisão teórica dos testes estatísticos para a detecção e a identificação de erros (não aleatórios) nas observações, em particular do Teste Global do Ajustamento e do procedimento *data snooping*, e se encerra com algumas considerações encontradas na Literatura sobre os mesmos.

O quarto capítulo trata da Teoria de Confiabilidade Convencional, apresentando as principais medidas de confiabilidade utilizadas nos experimentos desta dissertação. Encerrando a revisão teórica, o quinto capítulo contém uma breve revisão sobre os trabalhos publicados sobre o controle de qualidade do ajustamento, bem como apresenta dois métodos recentes para a detecção e a identificação de erros nas observações, no caso, a Teoria de Confiabilidade generalizada para múltiplos *outliers* simultâneos, e também o método QUAD.

O sexto capítulo contém todos os experimentos realizados na dissertação, bem como os resultados obtidos e as diversas análises realizadas neste estudo. Por fim, no sétimo capítulo constam as considerações finais, as conclusões e as recomendações obtidas com a realização desta pesquisa.

## 2 AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES GEODÉSICAS

Antes de tratar do ajustamento de observações geodésicas propriamente dito, se faz necessário apresentar a definição de Geodésia.

Segundo o *Associate Committee on Geodesy and Geophysics* (1973), a Geodésia é a disciplina que trata da medição e representação da Terra, incluindo o seu campo gravitacional, em um espaço tridimensional temporalmente variável.

Uma definição mais moderna, dada pela *International Association of Geodesy* (IAG) (2011), estabelece que:

Atualmente, Geodésia é a ciência da determinação da geometria, campo de gravidade, e rotação da Terra, bem como suas variações temporais. Esta compreensão da Geodésia moderna levou à definição dos três pilares da Geodésia, a saber: (1) Geodinâmica, (2) Rotação da Terra e (3) o Campo Gravitacional. Estes três pilares estão intrinsecamente ligados uns aos outros, e suas variações conjuntas são uma consequência dos processos dinâmicos no sistema Terra como um todo (IAG, 2011).

Desta forma, para a estimativa dos parâmetros incógnitos que representam a forma e as dimensões da Terra, bem como as suas variações, a Geodésia, tal como outras ciências, necessita da coleta de dados (observações) por processos experimentais.

Devido à natureza experimental do processo de medidas, as observações coletadas são contaminadas por erros dos mais diversos tipos, necessitando de redundância e resultando na inconsistência do sistema de equações que descreve a realidade que se pretende estudar (GEMAEL, 1994).

Para resolver estes sistemas redundantes e matematicamente inconsistentes, necessita-se de um ajustamento dos dados originais. Segundo Dalmolin (2002):

O ajustamento é um ramo da matemática aplicada. Tem por objetivo a solução única para problemas onde o número de observações é superabundante e o sistema de equações lineares é inconsistente. Objetiva ainda a estimativa da qualidade da solução. Consiste em uma expansão do método dos mínimos quadrados desenvolvido independentemente por Gauss (1795) e Legendre (1805). Não faz sentido falar em ajustamento para problemas onde os dados (observações ou medidas) não excedem o mínimo requerido para solução (DALMOLIN, 2002, p.1).

Dentro deste contexto, a realidade física do problema que se deseja estudar deve ser expressa em um sistema de equações linear(izado) com observações redundantes, situação esta freqüentemente encontrada na Geodésia. Neste capítulo, será abordado o ajustamento de

observações segundo o princípio dos mínimos quadrados. Nos capítulos posteriores, será abordado o controle de qualidade do mesmo.

Segundo Ghilani e Wolf (2006), um sistema de equações lineares pode ser expresso como:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1u}x_u \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2u}x_u \\ &\vdots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nu}x_u \end{aligned} \quad (2.1)$$

Onde:

- $y_1, y_2, \dots, y_n$  são as  $n$  observações ou medidas realizadas;
- $x_1, x_2, \dots, x_u$  são os  $u$  parâmetros incógnitos do modelo a serem estimados;
- $a_{ij}$  para  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $j = 1, 2, \dots, u$  são os coeficientes da função linear adotada, que relaciona as grandezas observadas ( $y_1, y_2, \dots, y_n$ ) com as grandezas desconhecidas que se deseja estimar ( $x_1, x_2, \dots, x_u$ ).

Matematicamente, para solucionar o sistema de equações em (2.1), deve ter um número de observações  $n$  igual ao número de parâmetros  $u$  que se deseja estimar, ou seja,  $n = u$ , caso contrário, o sistema não admite solução única e exata.

Entretanto, as observações possuem uma propriedade inerente a elas, conhecida como flutuações probabilísticas, pois, quando se repete “ $n$ ” vezes a medida de uma grandeza, os  $n$  valores não são idênticos, mas estão dispersos numa certa região ou intervalo. Essas flutuações, tradicionalmente, são classificadas como erros aleatórios e são inevitáveis no processo de medição, sendo uma propriedade intrínseca da observação (GEMAEL, 1994). Isto faz com que o sistema de equações em (2.1) se torne matematicamente inconsistente.

No contexto do ajustamento, o número de observações deve ser maior do que o número de parâmetros incógnitos, ou seja,  $n > u$ , tornando o sistema em (2.1) abundante. Se as observações fossem valores exatos, isentos de erros e perfeitamente concordantes com o

modelo matemático adotado, ter-se-ia um sistema abundante (pois  $n > u$ ), porém, matematicamente, com solução única e exata.

Admitindo a inevitável presença de erros aleatórios nas observações, como uma característica intrínseca do processo experimental de medições, pode-se adicionar em cada equação do sistema linear em (2.1), um erro aleatório  $e_i$  referente à respectiva observação  $y_i$ , resultando em:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1u}x_u + e_1 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2u}x_u + e_2 \\ &\vdots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nu}x_u + e_n \end{aligned} \quad (2.2)$$

Desta forma, adicionando  $n$  erros aleatórios ao sistema (tal como os valores dos parâmetros, desconhecidos *a priori*), este será sempre consistente, porém com infinitas soluções, pois quaisquer valores que forem arbitrados para os parâmetros terão um respectivo conjunto de valores arbitrados para os erros aleatórios, e vice-versa. Resta então, decidir qual a “melhor solução” entre as infinitas possibilidades.

Portanto, um critério de ajustamento das observações originais, para obtenção de solução única do sistema em (2.2), deve ser utilizado.

Antes de tratar do ajustamento por mínimos quadrados, que será discutido na próxima seção, mais algumas considerações sobre os erros que contaminam as observações e o sistema de equações se fazem necessárias.

Por exemplo, na implantação de uma rede geodésica, o problema consiste basicamente em: Dado um conjunto de observações realizadas (por exemplo, medidas de desníveis entre dois pontos), estimar o conjunto de parâmetros de interesse (por exemplo, as cotas ou altitudes dos pontos de uma rede de nivelamento geométrico), bem como sua precisão, por meio de um modelo matemático conhecido que estabeleça a relação entre as observações e os parâmetros.

O modelo matemático envolve tanto o modelo funcional quanto o modelo estocástico. O modelo funcional é o conjunto de equações que definem as condições do ajustamento, devendo estas ser conhecidas ou estipuladas. O modelo estocástico consiste na determinação das variâncias e covariâncias, e subsequentemente dos pesos das observações (GHILANI; WOLF, 2006).

O modelo estocástico é de fundamental importância para a análise da qualidade e confiabilidade do ajustamento (TEUNISSEN, 2006).

Para Teunissen (2003), a determinação de um modelo matemático apropriado pode ser considerada a “arte” da disciplina. Segundo o mesmo autor, o modelo funcional descreve de maneira teórica (ou abstrata) a realidade física do problema, sendo o grau de aproximação entre a realidade física do problema e do modelo funcional adotado, intimamente ligado ao nível de incerteza considerado aceitável (definido pelo modelo estocástico), evitando custos extras desnecessários aos propósitos do ajustamento.

Quanto às observações, o modelo matemático pode envolver observações diretas, observações diretas condicionadas ou observações indiretas (GEMAEL, 1994).

Observações diretas ocorrem quando as incógnitas do problema são as próprias grandezas mensuradas, como por exemplo, quando se deseja determinar a distância entre dois pontos por meio de sucessivas medições de distâncias entre eles.

Observações diretas condicionadas são observações diretas que se relacionam por meio de equações de condição, como por exemplo, a relação geométrica de que a soma dos ângulos internos de um triângulo plano é igual a  $\pi$  radianos.

Observações indiretas ocorrem quando os parâmetros do problema não são diretamente as grandezas mensuradas, mas se relacionam com estas por meio de um modelo matemático, como por exemplo, uma poligonal em um plano topográfico, onde são medidos ângulos e distâncias entre os vértices da poligonal para se determinar as suas coordenadas por meio de relações trigonométricas conhecidas.

Como corolário, toda medição contém erro, sendo o verdadeiro valor da grandeza observada e a magnitude dos erros presentes sempre desconhecidos (GHILANI; WOLF, 2006).

É esta inevitável existência de erros nas observações que resulta na inconsistência do sistema de equações, sendo duas as razões principais para o uso de observações redundantes no ajustamento (TEUNISSEN, 2006). A primeira visa melhorar a acurácia dos resultados estimados. A segunda visa detectar a possível presença de erros (não aleatórios) nos modelos e/ou nas observações. Tais erros presentes nas observações são tradicionalmente classificados como erros grosseiros, erros sistemáticos e erros aleatórios (GEMAEL, 1994).

Erros grosseiros são falhas (de natureza humana ou instrumental), que devem ser evitados ou devidamente identificados (localizados), para que sua influência no processo de ajustamento possa ser devidamente removida ou minimizada.

Erros sistemáticos são erros que apresentam tendência, e, portanto, causa (por exemplo, alguma lei física conhecida), podendo ser evitados por meio de técnicas especiais de observação ou devidamente parametrizados no modelo matemático. Por possuírem tendência, não são aleatórios, entretanto, quando sua magnitude for pequena ou sua causa desconhecida, são tratados como erros aleatórios.

Erros aleatórios, conforme já visto, não são erros, mas flutuações probabilísticas das observações, não possuindo causa conhecida e, portanto, tendendo a se compensarem quando o número de observações cresce. Erros aleatórios, ao contrário dos erros sistemáticos, obedecem a leis probabilísticas e não determinísticas, sendo características intrínsecas das observações e, portanto, inevitáveis nas medições.

Ressalva-se que somente os erros aleatórios devem fazer parte do processo de ajustamento, uma vez que, em uma abordagem moderna, as flutuações probabilísticas não são erros, mas sim, características intrínsecas das observações.

Dentre os diversos critérios possíveis para o ajustamento das observações, o mais difundido e aceito em Geodésia é aquele que segue o princípio dos mínimos quadrados, ou seja, aquele que minimiza a soma do quadrado dos erros aleatórios, ponderados pelos respectivos pesos das observações (GHILANI; WOLF, 2006), e que será apresentado a seguir.

## 2.1 O Método dos Mínimos Quadrados em Sistemas Lineares

Nesta seção será abordado o método dos mínimos quadrados (MMQ) em sistemas de equações lineares. Posteriormente, será apresentada uma interpretação geométrica do mesmo, bem como a linearização do modelo, quando este for não linear. Para uma formulação teórica mais rigorosa do método, sugere-se Gemael (1994), Lay (1997), Strang e Borre (1997), Koch (1999), Dalmolin (2002), Teunissen (2003), Leick (2004) e Ghilani e Wolf (2006).

Inicialmente, considera-se novamente um sistema de equações lineares, mas desta vez, expresso na forma matricial:

$$y_{nx1} = A_{nxu}x_{ux1} + e_{nx1} \quad (2.3)$$

Onde:

- $y_{nx1}$  é o vetor das  $n$  observações ou medidas realizadas (dados originais);
- $A_{nxu}$  é a matriz dos coeficientes das equações lineares (matriz *design*);
- $x_{ux1}$  é o vetor dos  $u$  parâmetros incógnitos do modelo a serem estimados;
- $e_{nx1}$  é o vetor dos  $n$  erros aleatórios, admitindo a inconsistência do sistema.

Desta forma, o problema que se deseja solucionar é: Dado o vetor das observações  $y_{nx1}$  e o funcional  $A_{nxu}$  que relaciona linearmente as observações com os parâmetros, admitindo a inconsistência deste sistema de  $n$  equações, qual é a melhor estimativa para o vetor dos parâmetros  $x_{ux1}$  e para o vetor dos erros aleatórios  $e_{nx1}$ ?

Para o caso em que se têm apenas duas observações ( $y_1, y_2$ ) e uma incógnita ( $x$ ), a matriz *design*  $A_{nxu}$  se torna um vetor  $a_{2x1}$  (pois  $n = 2$  e  $u = 1$ ), e uma visualização do problema é obtida por meio da Figura 2.1:

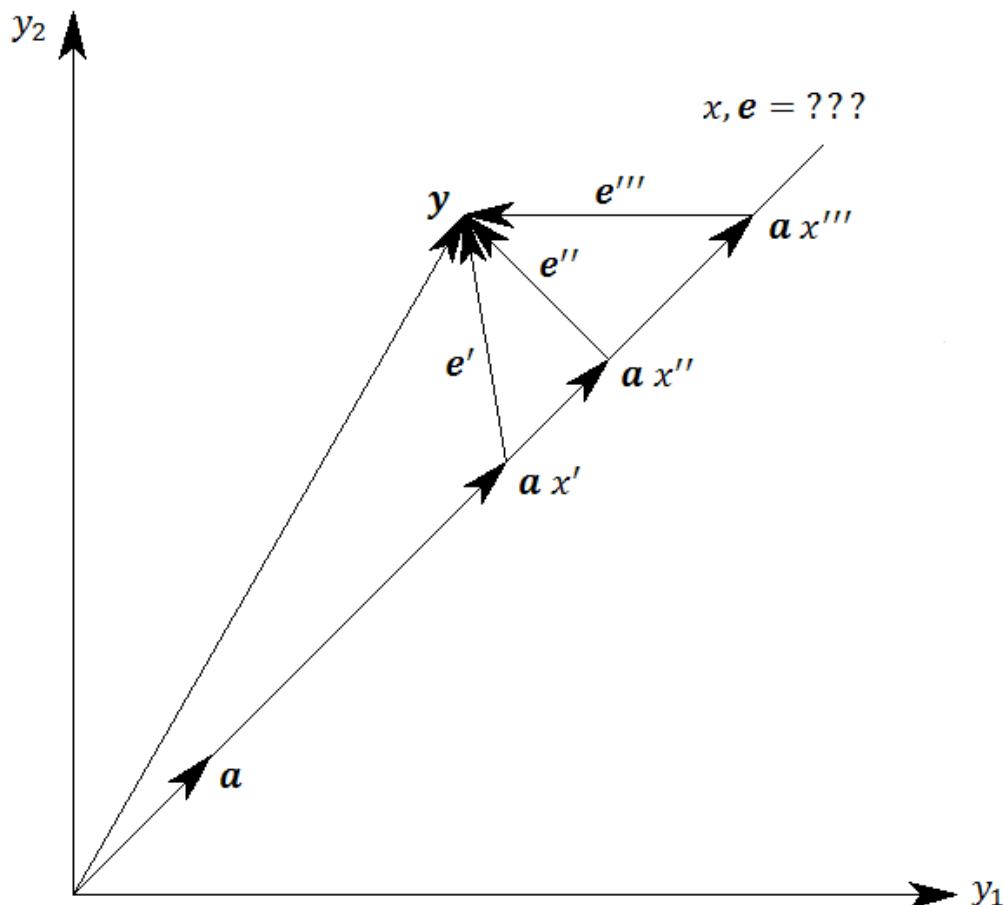


Figura 2.1 – Diferentes estimativas para o parâmetro  $x$  e o vetor  $e$ , dados o vetor  $a$  e as observações  $y_1$  e  $y_2$ .

Analizando a Figura 2.1 e a expressão (2.3), nota-se que para cada escolha distinta do parâmetro  $x$ , têm-se um correspondente vetor dos erros aleatórios  $e_{2x1}$  associado, sendo o sistema de equações original em (2.1), redundante e inconsistente, transformado em um sistema de equações consistente, porém com infinitas soluções, com o acréscimo do vetor dos erros aleatórios ao sistema.

O vetor dos erros aleatórios  $e_{nx1}$ , por meio de uma simples operação algébrica em (2.3), pode ser expresso como:

$$e_{nx1} = y_{nx1} - A_{nxu}x_{ux1} \quad (2.4)$$

No método dos mínimos quadrados, cujo princípio já foi definido, busca-se como estimativa para o vetor dos parâmetros  $x_{ux1}$  aquela cuja soma do quadrado dos erros aleatórios apresentar valor mínimo, ou seja:

$$(y_{nx1} - A_{nxu}x_{ux1})_{1xn}^T (y_{nx1} - A_{nxu}x_{ux1})_{nx1} = \text{Mínimo} \quad (2.5)$$

onde o sobrescrito  $T$  denota a operação de transposição matricial, e o produto interno entre um vetor e o seu transposto expressa o quadrado de sua norma (ou módulo), ou seja, a soma do quadrado das componentes deste vetor (LAY, 1997).

Considerando agora uma matriz peso para as observações, simétrica e positiva-definida, designada por  $W_{nxn}$ , o critério expresso em (2.5) se torna:

$$(y_{nx1} - A_{nxu}x_{ux1})_{1xn}^T W_{nxn} (y_{nx1} - A_{nxu}x_{ux1})_{nx1} = \text{Mínimo} \quad (2.6)$$

onde os elementos da matriz  $W_{nxn}$  podem ser escolhidos para ponderar a influência de observações específicas sobre a estimativa do vetor dos parâmetros  $x_{ux1}$ .

Observações com peso maior terão maior importância no processo de ajustamento, ou seja, maior influência na estimativa dos parâmetros (GEMAEL, 1994). O critério de escolha para uma matriz peso adequada para as observações será abordado em seções posteriores.

Para um caso bidimensional, por exemplo (com  $n = 2$  e  $u = 1$ ), onde  $y_{2x1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}_{2x1}$ ,  $a_{2x1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}_{2x1}$ ,  $W_{2x2} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}_{2x2}$  e  $x_{1x1} = x$ , a equação em (2.6) torna-se:

$$w_{11}(y_1 - a_1x)^2 + 2w_{12}(y_1 - a_1x)(y_2 - a_2x) + w_{22}(y_2 - a_2x)^2 = \text{Mínimo} \quad (2.7)$$

Na expressão (2.7) é utilizada a propriedade de simetria da matriz  $W_{2x2}$ , de forma que  $w_{12} = w_{21}$  (ver, por exemplo, LAY, 1997).

Voltando agora ao caso geral da matriz  $W$  com dimensão  $n \times n$ , realizando as operações matriciais em (2.6) e denotando esta soma ponderada do quadrado dos erros aleatórios por  $F(x)$ , ou seja, como função do vetor dos parâmetros  $x_{ux1}$  estimado, tem-se:

$$F(x) = y_{1xn}^T W_{nxn} y_{nx1} - 2y_{1xn}^T W_{nxn} A_{nxu} x_{ux1} + x_{1xu}^T A_{uxn}^T W_{nxn} A_{nxu} x_{ux1} \quad (2.8)$$

Pela teoria do Cálculo vetorial, sabe-se que esta função apresentará um valor  $F(x) = \text{Mínimo}$  quando o vetor dos parâmetros  $x_{ux1}$  for um vetor estimado  $\hat{x}_{ux1}$  tal que (KOCH, 1999):

$$\begin{cases} \frac{dF}{dx} \Big|_{x=\hat{x}} = 0 \\ \frac{d^2F}{dx^2} \Big|_{x=\hat{x}} > 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Aplicando as condições de (2.9) em (2.8), resulta em:

$$\begin{cases} \frac{dF}{dx}(\hat{x}) = -2A_{uxn}^T W_{nxn} y_{nx1} + 2A_{uxn}^T W_{nxn} A_{nxu} \hat{x}_{ux1} = 0_{ux1} \\ \frac{d^2F}{dx^2}(\hat{x}) = 2A_{uxn}^T W_{nxn} A_{nxu} > 0_{ux1} \end{cases} \quad (2.10)$$

A Figura 2.2 ilustra esta condição de  $F(x) = \text{Mínimo}$  para uma função de apenas uma variável (ou seja,  $u = 1$ ).

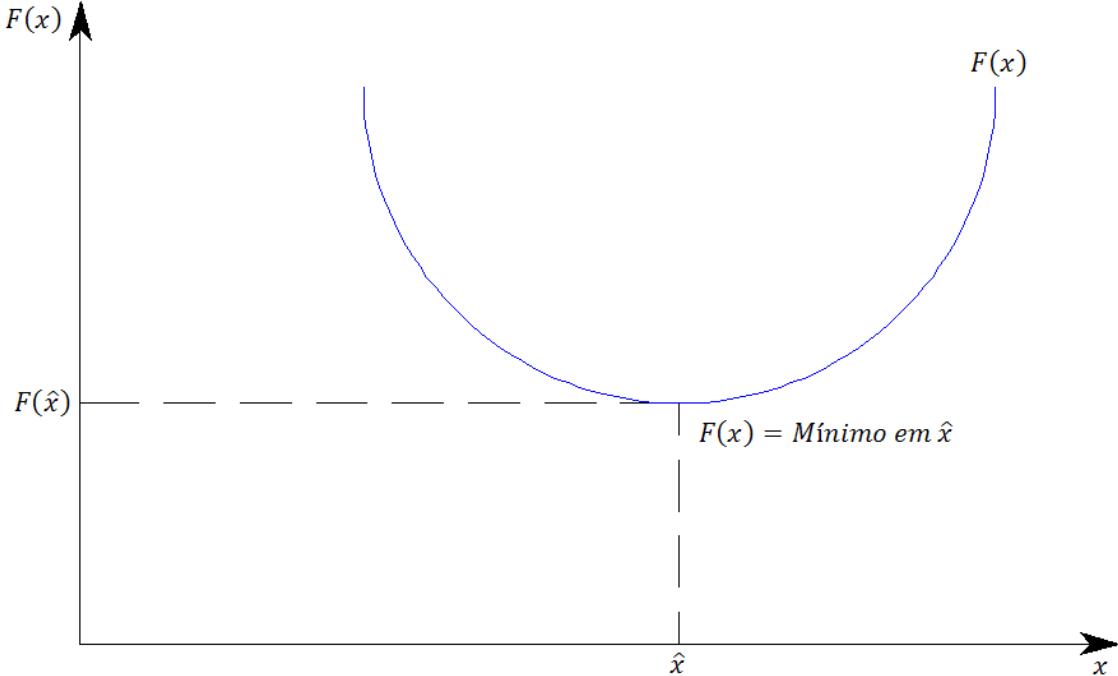


Figura 2.2 – Ponto  $\hat{x}$  no qual a função  $F(x)$  apresenta valor mínimo  $F(\hat{x})$ .

Como a matriz peso  $W_{nxn}$  é assumida ser positiva-definida e simétrica, a segunda condição de (2.10), ou seja, a garantia de ser um ponto de mínimo, é sempre satisfeita (TEUNISSEN, 2003).

Para a primeira condição de (2.10), realizando as operações matriciais, e isolando  $\hat{x}_{ux1}$ , resulta em (STRANG; BORRE, 1997):

$$\hat{x}_{ux1} = (A_{uxn}^T W_{nxn} A_{nxu})^{-1} A_{uxn}^T W_{nxn} y_{nx1} \quad (2.11)$$

sendo  $\hat{x}_{ux1}$  a estimativa por mínimos quadrados do vetor dos parâmetros (ou seja, o vetor dos parâmetros ajustados). O vetor das observações ajustadas  $\hat{y}_{nx1}$  é obtido aplicando o vetor dos parâmetros ajustados ao modelo linear de (2.3), resultando em:

$$\hat{y}_{nx1} = A_{nxu} \hat{x}_{ux1} = [A_{nxu} (A_{uxn}^T W_{nxn} A_{nxu})^{-1} A_{uxn}^T W_{nxn}] y_{nx1} \quad (2.12)$$

Finalmente, o vetor dos erros aleatórios ajustados  $\hat{e}_{nx1}$  pode ser obtido combinando as expressões (2.4) com (2.12), resultando em:

$$\hat{e}_{nx1} = y_{nx1} - \hat{y}_{nx1} = [I_{nxn} - A_{nxu} (A_{uxn}^T W_{nxn} A_{nxu})^{-1} A_{uxn}^T W_{nxn}] y_{nx1} \quad (2.13)$$

sendo  $\hat{e}_{nx1}$  é a estimativa por mínimos quadrados do vetor dos erros aleatórios (ou simplesmente vetor dos erros aleatórios), e  $I_{nxn}$  é a matriz identidade  $nxn$  (ver LAY, 1997; STRANG; BORRE, 1997). Os sobrescritos “ $\wedge$ ” em (2.11), (2.12) e (2.13) ilustram o fato dos vetores  $\hat{x}_{ux1}$ ,  $\hat{y}_{nx1}$  e  $\hat{e}_{nx1}$  (ou seja, as soluções pelo MMQ para  $x_{ux1}$ ,  $y_{nx1}$  e  $e_{nx1}$ ) se tratarem de estimativas (PAPOULIS, 1991).

## 2.2 Interpretação Geométrica do MMQ

Em Teunissen (2003) é demonstrada uma interpretação geométrica para o método dos mínimos quadrados em sistemas lineares, que foi abordado na seção anterior. Esta interpretação geométrica será aqui apresentada para o caso bidimensional já definido anteriormente (onde  $n = 2$  e  $u = 1$ ).

Inicialmente, considera-se a seguinte equação geral, envolvendo um vetor genérico  $z$ , de dimensão  $nx1$ , e uma matriz simétrica  $W$ , de dimensão  $nxn$ :

$$z_{1xn}^T W_{nxn} z_{nx1} = \text{Constante} = C \quad (2.14)$$

No caso bidimensional (ou seja, com  $n = 2$ ), a expressão (2.14) se torna:

$$w_{11}z_1^2 + 2w_{12}(z_1 z_2) + w_{22}z_2^2 = C \quad (2.15)$$

Da geometria analítica, sabe-se que a equação (2.15) descreve uma elipse no plano (LAY, 1997). Se  $w_{11} = w_{22}$  e  $w_{12} = 0$ , a elipse é um círculo. Se  $w_{11} \neq w_{22}$  e  $w_{12} = 0$  a elipse possui seus semi-eixos paralelos aos eixos  $z_1$  e  $z_2$ . E se  $w_{12} \neq 0$ , a elipse pode ter uma orientação arbitrária (Figura 2.3).

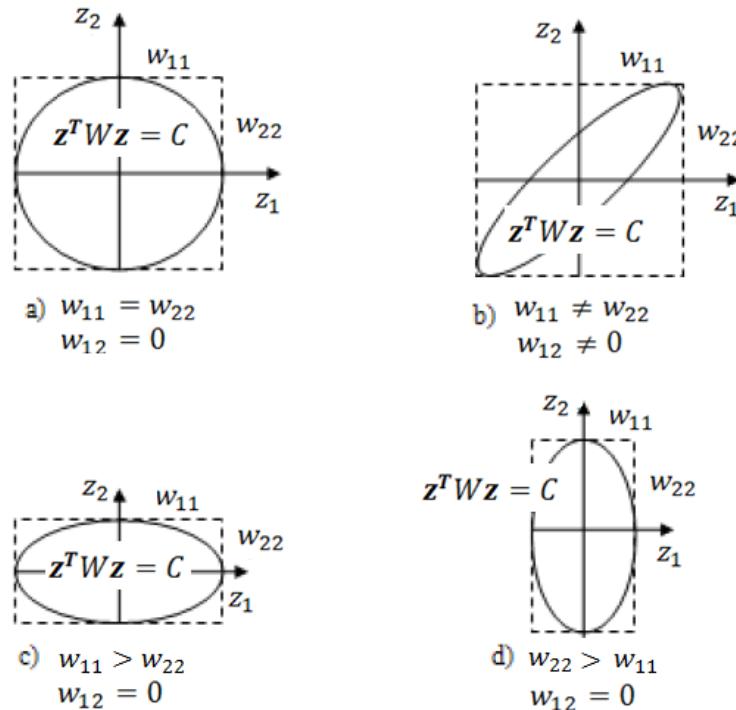


Figura 2.3 – Algumas orientações possíveis para uma elipse no plano.  
Fonte: Adaptado de Mikhail e Gracie (1981)

Definindo uma função  $F(z)$  para o vetor  $z_{2x1}$  como  $F(z) = z^T W z = C$  (ver novamente as expressões 2.14 e 2.15), sabe-se do Cálculo que o gradiente de  $F(z)$ , calculado em um ponto (vetor)  $z_0$ , é um vetor que é normal à elipse  $F(z) = C$  no ponto (vetor)  $z_0$ .

Em outras palavras, o vetor gradiente  $\nabla F(z)$  em  $z_0$  é perpendicular à linha tangente da função que descreve a elipse neste ponto  $z_0$ . O vetor gradiente da função  $F(z)$ , calculado em um ponto (vetor)  $z_0 = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}_{2x1}$ , é dado por:

$$\nabla F(z_0) = \left( \frac{\partial F}{\partial z_1}, \frac{\partial F}{\partial z_2} \right) \Big|_{z_0} = \left( \frac{\partial(w_{11}z_1^2 + 2w_{12}z_1z_2 + w_{22}z_2^2)}{\partial z_1}, \frac{\partial(w_{11}z_1^2 + 2w_{12}z_1z_2 + w_{22}z_2^2)}{\partial z_2} \right) \Big|_{z_0} \quad (2.16)$$

Aplicando as derivadas parciais de (2.16) em  $z_0$ , resulta em (TEUNISSEN, 2003):

$$\left( \frac{\partial F}{\partial z_1}, \frac{\partial F}{\partial z_2} \right) \Big|_{z_0} = \left( \begin{array}{l} 2w_{11}z_1 + 2w_{12}z_2 \\ 2w_{12}z_1 + 2w_{22}z_2 \end{array} \right) \Big|_{z_0} = 2W_{2x2} z_0_{2x1} \quad (2.17)$$

Este gradiente é normal (ortogonal) à elipse  $F(z) = C$  no ponto  $z_0$  (Figura 2.4).

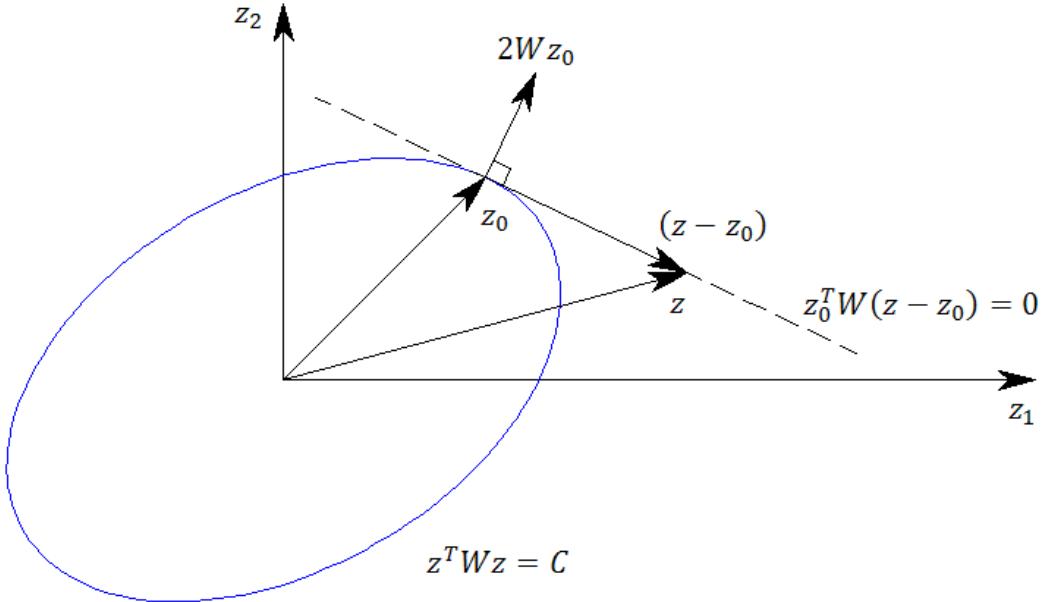


Figura 2.4 – Elipse  $F(z) = C$  e o vetor gradiente desta função em um ponto (vetor)  $z_0$ .  
Fonte: Adaptado de Teunissen (2003)

Analizando a Figura 2.4, nota-se que para um dado vetor  $z$ , que se estende da origem até um ponto qualquer sobre a linha tangente a elipse em  $z_0$ , têm-se a seguinte relação de ortogonalidade:

$$z_{01x2}^T W_{2x2} (z_{2x1} - z_{01x2}) = 0 \quad (2.18)$$

Ou seja, o vetor  $W_{2x2} z_{01x2}$  é perpendicular ao vetor  $(z_{2x1} - z_{01x2})$ , pois o produto interno entre estes dois vetores é nulo (STRANG; BORRE, 1997). Nota-se também que o escalar 2 que multiplica o vetor  $Wz_0$  não interfere nesta condição de ortogonalidade, pois não altera a direção e o sentido, mas somente o módulo do vetor  $Wz_0$ .

Ainda considerando o caso bidimensional ( $n = 2$  e  $u = 1$ ), o estimador por mínimos quadrados ponderados do parâmetro  $x$  é dado por um escalar  $\hat{x}$  tal que o vetor dos erros aleatórios  $\hat{e} = y - a\hat{x}$  é paralelo a linha tangente da elipse  $z^T W z = a^T W a$  em  $a$ , pois, realizando operações algébricas em (2.11), pode-se escrever:

$$\hat{x} = (a^T W a)^{-1} a^T W y \Leftrightarrow a^T W (y - a\hat{x}) = 0 \quad (2.19)$$

Ou seja, o vetor dos erros aleatórios  $\hat{e} = y - a \hat{x}$  deve ser perpendicular ao vetor  $Wa$  e, portanto, paralelo a linha tangente da elipse  $a^T Wa = C$  no vetor  $a$  (Figura 2.5).

Nota-se ainda que quando  $W_{2x2} = I_{2x2}$ , resulta em  $a_{1x2}^T(y_{2x1} - a_{2x1}\hat{x}_{1x1}) = 0$ , ou seja, a elipse se torna um círculo (pois  $w_{11} = w_{22} = 1$  e  $w_{12} = w_{21} = 0$ ), e a estimativa por mínimos quadrados não ponderados  $\hat{x}$  para o parâmetro  $x$  é obtida a partir da relação de ortogonalidade entre os vetores  $\hat{e}$  e  $\hat{y} = a\hat{x}$  (Figura 2.6).

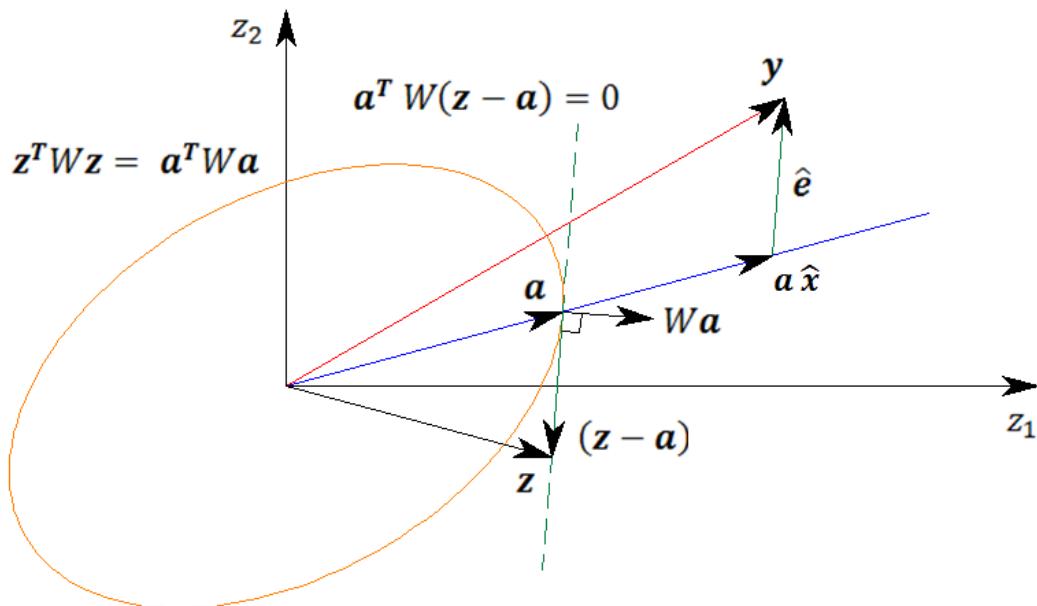


Figura 2.5 – Interpretação geométrica da estimação por mínimos quadrados ponderados no plano.  
Fonte: Adaptado de Teunissen (2003)

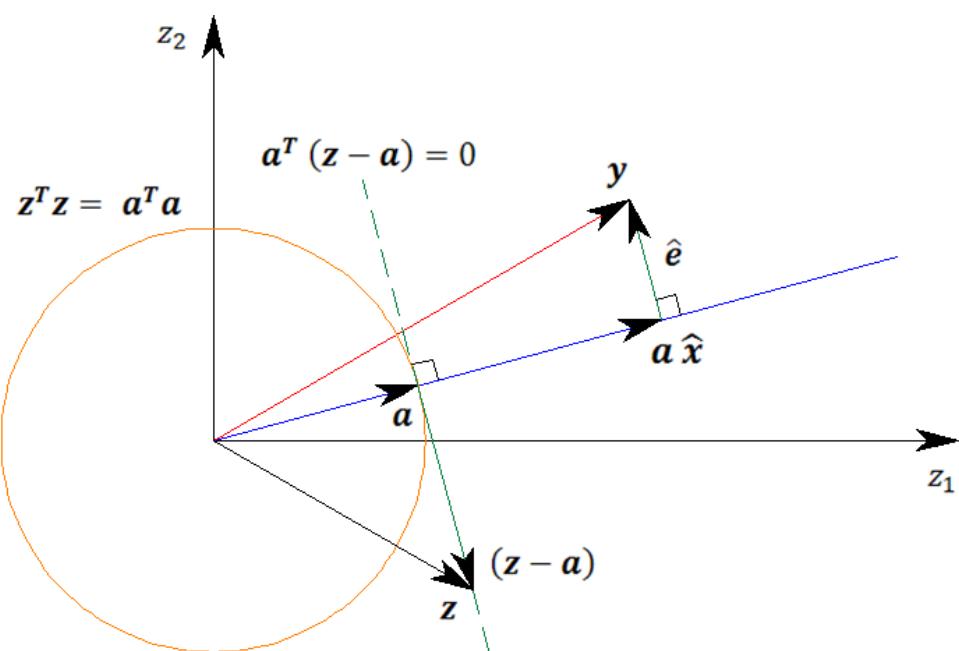


Figura 2.6 – Interpretação geométrica da estimação por mínimos quadrados não ponderados no plano.  
Fonte: Adaptado de Teunissen (2003)

De acordo com a expressão (2.12),  $\hat{y}_{nx1} = A\hat{x} = [A(A^TWA)^{-1}A^TW]y$ , e, segundo a expressão (2.13),  $\hat{e} = y - \hat{y} = [I - A(A^TWA)^{-1}A^TW]y$ .

Analizando estas expressões e a Figura 2.5, nota-se que as matrizes  $[A_{nxu}(A_{uxn}^T W_{nxn} A_{nxu})^{-1} A_{uxn}^T W_{nxn}]$  e  $[I_{nxn} - A_{nxu}(A_{uxn}^T W_{nxn} A_{nxu})^{-1} A_{uxn}^T W_{nxn}]$  são projetores oblíquos, denotados por (TEUNISSEN, 2003):

$$\begin{cases} P_{A, (WA)^\perp} = A_{nxu}(A_{uxn}^T W_{nxn} A_{nxu})^{-1} A_{uxn}^T W_{nxn} \\ P_{A, (WA)^\perp}^\perp = I_{nxn} - A_{nxu}(A_{uxn}^T W_{nxn} A_{nxu})^{-1} A_{uxn}^T W_{nxn} \end{cases} \quad (2.20)$$

Em outras palavras, o vetor das observações ajustadas  $\hat{y}$  e o vetor dos erros aleatórios ajustados  $\hat{e}$  são projeções oblíquas do vetor das observações  $y$ , sendo estas duas projeções definidas pelos projetores oblíquos  $P_{A, (WA)^\perp}$  e  $P_{A, (WA)^\perp}^\perp$  em (2.20), respectivamente.

Estas matrizes (projetores oblíquos), expressas em (2.20), também serão importantes nos próximos capítulos, referentes ao controle de qualidade do ajustamento.

Para o caso bidimensional em questão (onde  $n = 2$  e  $u = 1$ ), o vetor  $P_{a, (Wa)^\perp}$  projeta sobre uma linha gerada pelo vetor  $a$ , e ao longo de uma linha gerada pelo vetor  $(Wa)^\perp$ , que é ortogonal ao vetor  $Wa$  (Figura 2.7), e o vetor  $P_{a, (Wa)^\perp}^\perp$  projeta sobre uma linha ortogonal ao vetor  $Wa$ , e paralelamente à direção do vetor  $a_{2x1}$  (Figura 2.7).

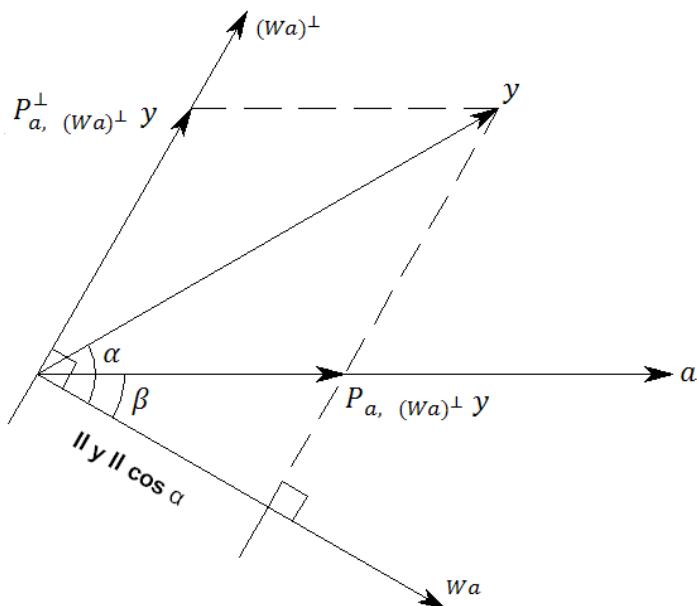


Figura 2.7 – Projetores oblíquos  $P_{a, (Wa)^\perp}$  e  $P_{a, (Wa)^\perp}^\perp$  do vetor das observações  $y$ .

Fonte: Adaptado de Teunissen (2003)

Como  $Wa$  e  $(Wa)^\perp$  são ortogonais entre si, o produto interno destes dois vetores resulta em  $[(Wa)^\perp]^T(Wa) = 0$ .

Com o auxilio de um vetor  $b_{2x1}$ , definido de forma que seja ortogonal ao vetor  $a_{2x1}$ , ou seja,  $(b_{1x2})^T a_{2x1} = 0$ , pode-se escrever  $(Wa)^\perp$  como  $W^{-1}b$ .

Portanto,  $(W^{-1}b)^T(Wa) = 0$ , pois a inversa  $W^{-1}$  de  $W$  existe, desde que  $W$  seja positiva-definida (ver, por exemplo, LAY, 1997 e TEUNISSE, 2003).

Desta forma, com o auxilio do vetor  $W^{-1}b$ , pode-se representar os dois projetores definidos em (2.20) alternativamente como (TEUNISSEN, 2003):

$$\begin{cases} P_{a, (Wa)^\perp} = P_{a, W^{-1}b} = I_{2x2} - W_{2x2}^{-1} b_{2x1} (b_{1x2}^T W_{2x2}^{-1} b_{2x1})^{-1} b_{1x2}^T \\ P_{a, (Wa)^\perp}^\perp = P_{W^{-1}b, a} = W_{2x2}^{-1} b_{2x1} (b_{1x2}^T W_{2x2}^{-1} b_{2x1})^{-1} b_{1x2}^T \end{cases} \quad (2.21)$$

A expressão (2.21) é melhor compreendida com o auxilio da Figura 2.8, que se utiliza de relações trigonométricas elementares, e das expressões (2.21) e (2.14), podendo-se escrever, para o vetor dos erros aleatórios  $\hat{e}_{nx1}$  (TEUNISSEN, 2003):

$$\hat{e} = P_{a, (Wa)^\perp}^\perp y = P_{W^{-1}b, a} y = \|y\| \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \frac{W^{-1}b}{\|W^{-1}b\|} \quad (2.22)$$

Onde o escalar  $\|y\| \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$  define o módulo do vetor resultante  $\hat{e} = P_{W^{-1}b, a} y$ , e o vetor normalizado (unitário)  $\frac{W^{-1}b}{\|W^{-1}b\|}$  define a direção deste vetor resultante  $\hat{e} = P_{W^{-1}b, a} y$ , lembrando que o vetor dos erros aleatórios ajustados  $\hat{e}$  é uma projeção oblíqua do vetor das observações  $y$ , e a matriz  $P_{W^{-1}b, a}$  é o seu projetor.

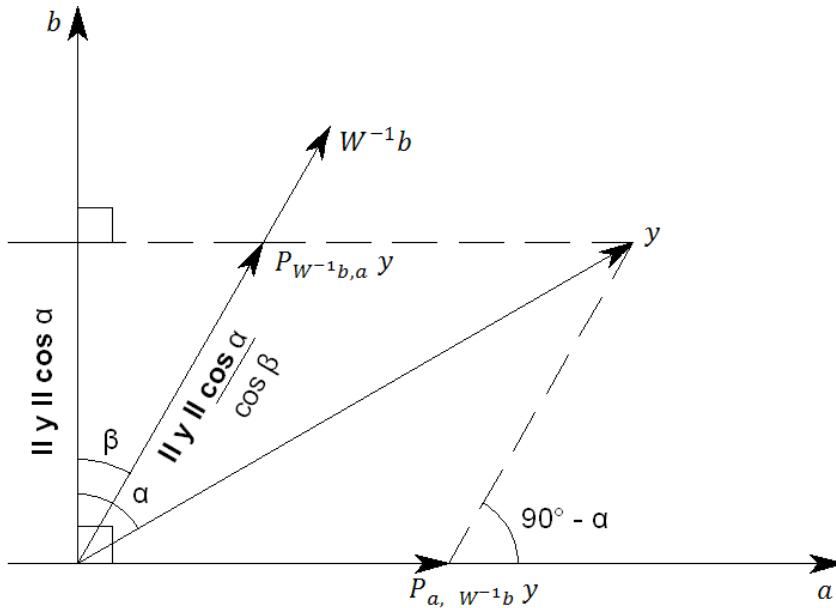


Figura 2.8 – Representação alternativa das projeções oblíquas  $\hat{e}$  e  $\hat{y}$  do vetor das observações  $y$ .

Fonte: Adaptado de Teunissen (2003)

Rearranjando a expressão (2.22), de forma a agrupar os termos escalares (unidimensionais) à direita, pode-se escrever:

$$P_{W^{-1}b,a} y = W^{-1}_{2x2} b_{2x1} \left[ \frac{\|y\| \cos \alpha}{\|W^{-1}b\| \cos \beta} \right]_{1x1} \quad (2.23)$$

Analizando a Figura (2.8), o escalar  $\|y\| \cos \alpha$  é igual ao produto interno entre os vetores  $b_{2x1}$  e  $y_{2x1}$  (ver LAY, 1997 e também STRANG; BORRE, 1997), ou seja,  $\|y\| \cos \alpha = b^T y$ , e de maneira análoga,  $\|W^{-1}b\| \cos \beta = (W^{-1}b)^T b$ .

Desta forma, pode-se finalmente escrever (TEUNISSEN, 2003):

$$P_{W^{-1}b,a} y = W^{-1}b \frac{b^T y}{(W^{-1}b)^T b} = W^{-1}b (b^T W^{-1}b)^{-1} b^T y \quad (2.24)$$

Ou seja, a segunda expressão de (2.21) é demonstrada geometricamente. A primeira expressão de (2.21), relativa ao projetor oblíquo do vetor das observações  $y$  em  $a$  (sendo o vetor  $\hat{y}$  a sua projeção resultante), pode ser demonstrada de maneira similar.

Dando continuidade a interpretação geométrica do MMQ, relembrando o critério dos mínimos quadrados ponderados, que busca o vetor dos parâmetros  $x$  que minimiza a seguinte expressão:

$$\min_x (y_{nx1} - A_{nxu}x_{ux1})_{1xn}^T W_{nxn} (y_{nx1} - A_{nxu}x_{ux1})_{nx1} \quad (2.25)$$

Definindo um vetor  $z$  por  $z = Ax$ , a expressão (2.25) é equivalente à:

$$\min_z (y_{nx1} - z_{nx1})_{1xn}^T W_{nxn} (y_{nx1} - z_{nx1})_{nx1} \quad (2.26)$$

Como  $e = y - Ax$ , logo  $z = y - e$ . Para o caso bidimensional considerado, o vetor  $b$  é ortogonal ao vetor  $a$ , ou seja,  $b^T a = 0$ . Com este pressuposto, resulta em:

$$b^T z = b^T (ax) = 0 \Leftrightarrow b^T (y - e) = 0 \quad (2.27)$$

A expressão (2.27) é satisfeita quando  $b^T y = b^T e$ . Mas se  $e = y - Ax$ , a expressão (2.25) é equivalente a:

$$\min_e e_{1xn}^T W_{nxn} e_{nx1} \quad (2.28)$$

ou seja, no caso bidimensional considerado, o método dos mínimos quadrados ponderados consiste em estimar um vetor dos erros aleatórios  $\hat{e}$  que minimiza a expressão  $e_{1xn}^T W_{nxn} e_{nx1}$ , e também, que obedece à relação  $b^T y = b^T e$ .

Fazendo  $e_{1x2}^T W_{2x2} e_{2x1} = Constante = C$ , têm-se a equação de uma elipse, conforme já fora visto. Para diferentes valores da constante  $C$ , têm-se diferentes elipses, e quanto maior o valor da constante  $C$ , maior é o tamanho da elipse (Figura 2.9).

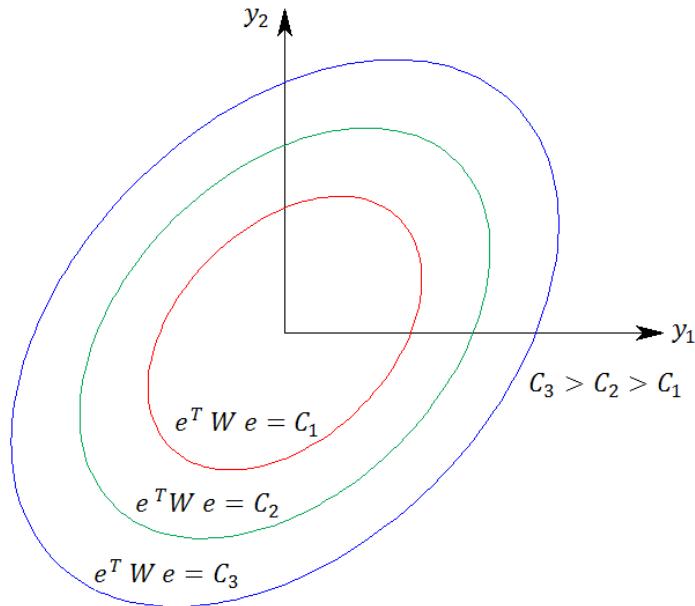


Figura 2.9 – Diferentes elipses associadas a diferentes valores para a constante C.  
Fonte: Adaptado de Teunissen (2003)

A estimativa ( $\hat{e}$ ) por mínimos quadrados para o vetor dos erros aleatórios é dada pelo ponto de tangência da linha  $b^T y = b^T e$  com a elipse  $e^T W e = Mínimo = F(\hat{x})$  (Figura 2.10):

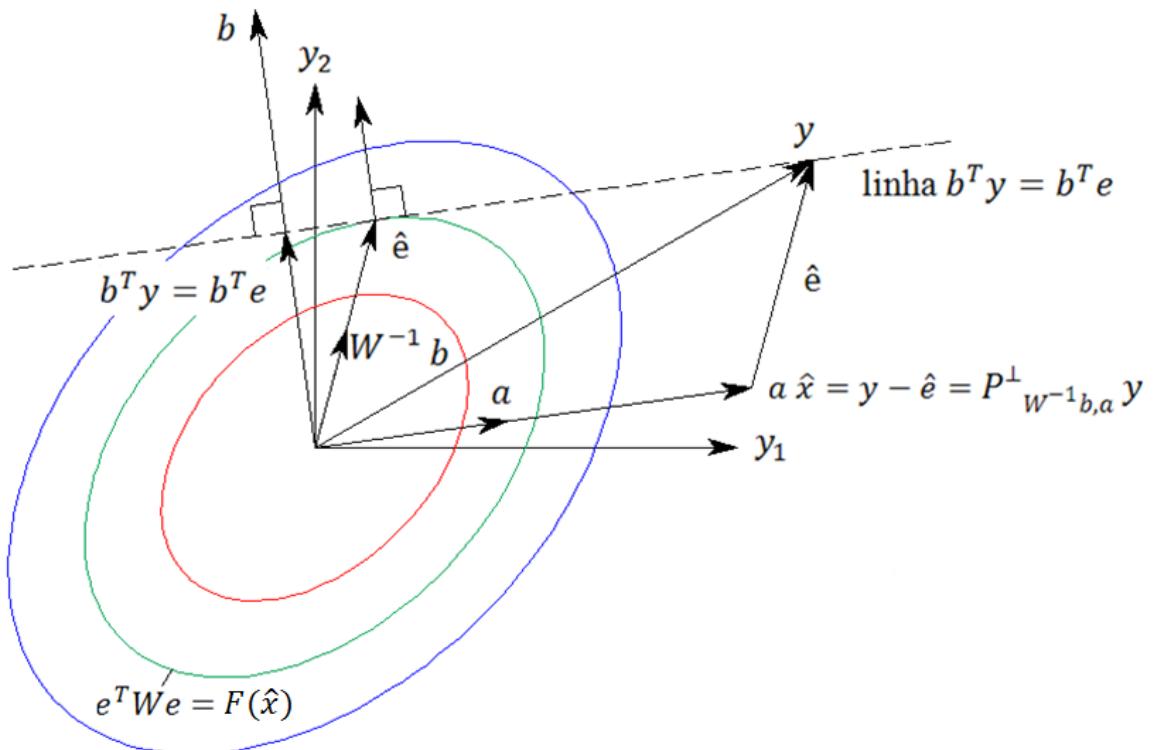


Figura 2.10 – Interpretação geométrica para a estimativa do vetor dos erros aleatórios  $\hat{e}$  por mínimos quadrados ponderados.  
Fonte: Adaptado de Teunissen (2003)

Neste ponto de tangência ( $\hat{e}$ ), a normal da elipse é paralela a normal da linha  $b^T y = b^T e$ . Mas como a normal da linha  $b^T y = b^T e$  é dada por  $b$ , a normal da elipse em  $\hat{e}$  também é dada por  $b$  (para maiores detalhes, ver produto interno de vetores em LAY, 1997). Portanto, o vetor  $\hat{e}$  é paralelo ao vetor  $W^{-1}b$ , diferindo apenas em módulo. Assim sendo, pode-se expressar o vetor  $\hat{e}$  por um produto entre  $W^{-1}b$  e um escalar  $\alpha$  (TEUNISSEN, 2003):

$$\hat{e} = W^{-1}b \alpha \quad (2.29)$$

O escalar desconhecido  $\alpha$  pode ser determinado pelo fato de que o vetor  $\hat{e}$  tem que se estender até a linha  $b^T y = b^T e$ . Desta forma, pré-multiplicando (2.29) por  $b^T$  e realizando operações algébricas, resulta em:

$$\alpha = (b^T W^{-1}b)^{-1} b^T \hat{e} = (b^T W^{-1}b)^{-1} b^T y \quad (2.30)$$

Substituindo (2.30) em (2.29), os estimadores  $\hat{e}$  e  $\hat{y}$  por mínimos quadrados ponderados tornam-se (TEUNISSEN, 2003):

$$\begin{cases} \hat{e} = P_{W^{-1}b, a} y = [W^{-1} b (b^T W^{-1}b)^{-1} b^T] y \\ \hat{y} = y - \hat{e} = P_{W^{-1}b, a}^\perp = [I - W^{-1} b (b^T W^{-1}b)^{-1} b^T] y \end{cases} \quad (2.31)$$

Quando  $W_{2x2} = I_{2x2}$ , as expressões em (2.31) se simplificam para:

$$\begin{cases} \hat{e} = [b(b^T b)^{-1} b^T] y \\ \hat{y} = y - \hat{e} = [I - b(b^T b)^{-1} b^T] y \end{cases} \quad (2.32)$$

Para problemas envolvendo um maior número de parâmetros (ou seja,  $u > 1$ ), estas soluções alternativas às expressões (2.12) e (2.13), obtidas por meio da interpretação geométrica do MMQ, se tornam mais complexas, pois se deve definir uma matriz  $B_{nxu}$  cujos vetores (colunas) sejam ortogonais a todos os vetores (colunas) da matriz *design*  $A_{nxu}$ , sendo as matrizes  $A$  e  $B$  dois subespaços ortogonais entre si de  $u$  vetores cada e dimensão  $n$  (KOCK, 1999). Maiores detalhes sobre a interpretação geométrica do MMQ e uma formulação mais rigorosa dos conceitos de álgebra linear envolvidos podem ser obtidos em Lay (1997), Strang e Borre (1997), Kock (1999) e Teunissen (2003). Para exemplos numéricos da interpretação geométrica do MMQ, ver Teunissen (2003) e Klein et al. (2011).

## 2.3 Média e Matriz de Covariância dos Estimadores por Mínimos Quadrados

Nas duas seções anteriores, o método dos mínimos quadrados em sistemas lineares foi apresentado desconsiderando a natureza probabilística dos erros que contaminam o vetor das observações, sendo derivado a partir dos princípios determinísticos da ortogonalidade e da distância mínima. Ou seja, apenas foi demonstrada a solução algébrica, bem como uma interpretação geométrica para o método.

Quando o vetor das observações  $y_{nx1}$  é assumido ser um vetor aleatório (vetor cujas componentes são variáveis aleatórias), as estimativas por mínimos quadrados do vetor dos parâmetros ajustados  $\hat{x}_{ux1}$ , do vetor das observações ajustadas  $\hat{y}_{nx1}$  e do vetor dos erros aleatórios  $\hat{e}_{nx1}$  também se tornam vetores aleatórios, por serem funções lineares do vetor das observações  $y_{nx1}$  (STRANG; BORRE, 1997). Portanto, pode-se propagar a distribuição de probabilidade, a esperança matemática e a matriz de covariância do vetor aleatório  $y_{nx1}$  para os vetores  $\hat{x}_{ux1}$ ,  $\hat{y}_{nx1}$  e  $\hat{e}_{nx1}$ .

Esta seção trata apenas da propagação de médias e covariâncias do vetor das observações  $y_{nx1}$  ao vetor das observações ajustadas  $\hat{y}_{nx1}$ , ao vetor dos parâmetros ajustados  $\hat{x}_{ux1}$ , e ao vetor dos erros aleatórios ajustados  $\hat{e}_{nx1}$ . Somente a distribuição de probabilidade resultante destes estimadores não será considerada nesta seção, sendo que um enfoque maior às propriedades estatísticas das observações será dado no próximo capítulo, Testes Estatísticos para Detecção e Identificação de Erros.

Inicialmente, a média (vetor de médias), ou ainda a esperança matemática, de um vetor aleatório  $n$  dimensional qualquer, da forma:  $x_{nx1} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]_{nx1}^T$ , é formalmente definida por (LEICK, 2004):

$$E \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} f(x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n, \quad (2.33)$$

onde  $f(x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)$  é a função densidade de probabilidade multivariada para o vetor aleatório  $x_{nx1}$  (ou seja, a distribuição de probabilidade conjunta para as variáveis aleatórias que formam este vetor). Considerando agora dois vetores aleatórios  $y$  e  $x$ , relacionados por meio de um modelo linear da forma:

$$y = Ax + b, \quad (2.34)$$

onde  $A$  é uma matriz de coeficientes e  $b$  é um vetor formado por termos constantes (independentes de  $x$  e  $y$ ), a propagação de médias se torna (DALMOLIN, 2002):

$$E\{y\} = E\{Ax + b\} = E\{Ax\} + E\{b\} = AE\{x\} + b \quad (2.35)$$

Pois o valor esperado para uma constante (em  $A$  e/ou  $b$ ) é igual à própria constante. Aplicando a lei de propagação de médias do vetor das observações  $y$  para o vetor dos parâmetros ajustados  $\hat{x}_{ux1} = (A_{uxn}^T W_{nxn} A_{nxu})^{-1} A_{uxn}^T W_{nxn} y_{nx1}$  em (2.11), têm-se (TEUNISSEN, 2003):

$$E\{\hat{x}\} = [(A^T W A)^{-1} A^T W] E\{y\} \quad (2.36)$$

Pois as matrizes  $A$  e  $W$  são tratadas como formadas por termos constantes no processo de ajustamento, ou seja,  $E\{(A^T W A)^{-1} A^T W\} = [(A^T W A)^{-1} A^T W]$ .

Para o vetor das observações ajustadas  $\hat{y} = A\hat{x}$ , aplicando a lei de propagação de médias, obtém-se (TEUNISSEN, 2003):

$$E\{\hat{y}\} = AE\{\hat{x}\} = P_{a, (Wa)^\perp} E\{y\}, \quad (2.37)$$

onde, de acordo com a expressão (2.21),  $P_{a, (Wa)^\perp} = A_{nxu}(A_{uxn}^T W_{nxn} A_{nxu})^{-1} A_{uxn}^T W_{nxn}$ .

Finalmente, para o vetor dos erros aleatórios ajustados  $\hat{e}_{nx1} = y_{nx1} - \hat{y}_{nx1}$ , a propagação de médias resulta em (TEUNISSEN, 2003):

$$E\{\hat{e}\} = E\{y\} - AE\{\hat{x}\} = (I - P_{a, (Wa)^\perp}) E\{y\} = P_{a, (Wa)^\perp}^\perp E\{y\}, \quad (2.38)$$

onde, na expressão (2.20),  $P_{a, (Wa)^\perp}^\perp = I_{nxn} - A_{nxu}(A_{uxn}^T W_{nxn} A_{nxu})^{-1} A_{uxn}^T W_{nxn}$ . É importante destacar que o verdadeiro vetor de médias  $E\{y\}$  das observações  $y_{nx1}$ , é sempre desconhecido na prática, porém, este princípio da propagação de médias será utilizado posteriormente para determinar algumas propriedades do MMQ, bem como formular hipóteses estatísticas para o controle de qualidade do ajustamento das observações.

Segundo Leick (2004), o propósito da propagação de variâncias e covariâncias é estimar as variâncias e covariâncias de funções lineares de variáveis aleatórias. Funções não lineares primeiro devem ser linearizadas. A propagação de variâncias e covariâncias é aplicável a variáveis aleatórias unidimensionais, bem como a vetores aleatórios.

A matriz de variâncias e covariâncias  $\Sigma_y$  (ou simplesmente matriz de covariância) de um vetor aleatório  $y$  de  $n$  componentes, é uma matriz quadrada  $n \times n$ , cujo  $i$ -ésimo elemento da diagonal principal corresponde à variância  $\sigma_i^2$  de sua  $i$ -ésima componente, e cujo elemento localizado na  $i$ -ésima linha e na  $j$ -ésima coluna corresponde à covariância  $\sigma_{i,j}$  entre as componentes  $i$  e  $j$  deste vetor. Para uma definição formal do conceito de variância e do conceito de covariância, sugere-se Papoulis (1991), Strang e Borre (1997) e Koch (1999).

Em notação matricial, a matriz de covariância  $\Sigma_y$  de um vetor aleatório  $y$  de  $n$  componentes, é dada por (GEMAEL, 1994):

$$\Sigma_y = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \dots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}_{nxn} \quad (2.39)$$

Naturalmente, a matriz de covariância é simétrica, ou seja,  $\sigma_{i,j} = \sigma_{j,i}$  (a covariância entre as componentes  $i$  e  $j$  de  $y_{nx1}$  é igual a covariância entre as mesmas componentes  $j$  e  $i$ ).

De uma maneira mais formal, a matriz de covariância de um vetor aleatório  $y_{nx1}$  pode ainda ser definida por (STRANG; BORRE, 1997):

$$\Sigma_y_{nxn} = E\{[y - E\{y\}]_{nx1}[y - E\{y\}]_{1xn}^T\} \quad (2.40)$$

Por meio da expressão (2.40), será desenvolvida agora a lei de propagação de covariâncias em modelos lineares. Desta forma, considerando novamente um modelo linear do tipo  $y = Ax + b$ , relacionando dois vetores aleatórios  $y$  e  $x$ , a expressão (2.40) por ser substituída por (DALMOLIN, 2002):

$$\Sigma_y = E\{[Ax + b - E\{y\}][Ax + b - E\{y\}]^T\} \quad (2.41)$$

Substituindo a lei de propagação de médias (expressão 2.35), em (2.41), tem-se (DALMOLIN, 2002):

$$\Sigma_y = E\{[Ax + b - AE\{x\} - b][Ax + b - AE\{x\} - b]^T\} \quad (2.42)$$

Efetuando as subtrações em (2.42), obtém-se:

$$\Sigma_y = E\{[Ax - AE\{x\}][Ax - AE\{x\}]^T\} = E\{[A(x - E\{x\})][A(x - E\{x\})]^T\} \quad (2.43)$$

Usando algumas propriedades da álgebra matricial em (2.43):

$$\Sigma_y = E\{A[x - E\{x\}][x - E\{x\}]A^T\} = AE\{[x - E\{x\}][x - E\{x\}]\}A^T \quad (2.44)$$

Como por definição,  $\Sigma_x = E\{[x - E\{x\}][x - E\{x\}]^T\}$  (ver a expressão (2.39)), a lei de propagação de covariâncias em modelos lineares finalmente resulta em (DALMOLIN, 2002):

$$\Sigma_{y_{nxn}} = A_{nxu} \Sigma_{x_{uxu}} A_{uxn}^T \quad (2.45)$$

Segundo Gemael (1994), para modelos não lineares, primeiramente é feita a linearização por série de Taylor e a matriz  $A$  se torna a matriz jacobiana  $A = \frac{\partial F}{\partial \hat{x}}|_{\hat{x}=x_0}$ , sendo que a linearização do modelo para estes casos será vista na próxima seção deste capítulo.

Aplicando a lei de propagação de covariâncias no vetor dos parâmetros ajustados  $\hat{x}_{ux1} = (A_{uxn}^T W_{nxn} A_{nxu})^{-1} A_{uxn}^T W_{nxn} y_{nx1}$  em (2.11), obtém-se (DALMOLIN, 2002):

$$\Sigma_{\hat{x}_{uxu}} = [(A^T W A)^{-1} A^T W]_{uxn} \Sigma_{y_{nxn}} [(A^T W A)^{-1} A^T W]_{nxu}^T \quad (2.46)$$

Realizando operações matriciais e considerando que  $N_{uxu} = A_{uxn}^T W_{nxn} A_{nxu}$  e, que, conforme será visto posteriormente, usualmente a matriz peso das observações é tomada como sendo igual à  $W_{nxn} = \sigma_0^2 \Sigma_{y_{nxn}}^{-1}$ , a matriz de covariância do vetor dos parâmetros ajustados  $\hat{x}$  resulta em (DALMOLIN, 2002):

$$\Sigma_{\hat{x}_{uxu}} = \sigma_0^2 N_{uxu}^{-1} \quad (2.47)$$

Para o vetor dos parâmetros ajustados  $\hat{y}_{nx1} = A_{nxu} \hat{x}_{ux1}$ , tem-se (GEMAEL, 1994):

$$\Sigma_{\hat{y}_{nxn}} = A_{nxu} \Sigma_{\hat{x}_{uxu}} A_{uxn}^T = \sigma_0^2 [A N^{-1} A^T]_{nxn} \quad (2.48)$$

E finalmente para o vetor dos erros aleatórios  $\hat{e}_{nx1} = y_{nx1} - \hat{y}_{nx1}$  (LEICK, 2004):

$$\Sigma_{\hat{e}_{nxn}} = \Sigma_{y_{nxn}} - \Sigma_{\hat{y}_{nxn}} = \sigma_0^2 W_{nxn}^{-1} - \sigma_0^2 [A N^{-1} A^T]_{nxn} \quad (2.49)$$

Como as variâncias são sempre positivas, analisando a expressão (2.49), nota-se que a variância de um erro aleatório ajustado é sempre menor que a variância da respectiva observação original ( $\sigma_{\hat{e}_i}^2 < \sigma_{y_i}^2$ ), ou que a variância desta observação ajustada ( $\sigma_{\hat{e}_i}^2 < \sigma_{\hat{y}_i}^2$ ), pois  $\sigma_{\hat{e}_i}^2 = \sigma_{y_i}^2 - \sigma_{\hat{y}_i}^2$ . Da mesma forma, a variância de uma observação ajustada é sempre menor do que a variância de sua observação original ( $\sigma_{\hat{y}_i}^2 < \sigma_{y_i}^2$ ), pois  $\sigma_{\hat{y}_i}^2 = \sigma_{y_i}^2 - \sigma_{\hat{e}_i}^2$ .

As expressões (2.47), (2.48) e (2.49), são estimativas para a matriz de covariância do vetor dos parâmetros ajustados  $\hat{x}$ , do vetor das observações ajustadas  $\hat{y}$ , e do vetor dos erros aleatórios ajustados  $\hat{e}$ , respectivamente. Desta forma, elas expressam a precisão destas estimativas pelo MMQ, pois, quanto menor é a variância de uma grandeza estimada, mais preciso é o valor desta grandeza (ver, por exemplo, GHILANI e WOLF, 2006).

## 2.4 Ajustamento pelo Método Paramétrico e Linearização do Modelo Funcional

Nas seções anteriores foi apresentado o ajustamento de observações em sistemas de equações lineares, segundo o princípio dos mínimos quadrados, bem como a propagação de médias e covariâncias do vetor das observações  $y_{nx1}$  para os estimadores por mínimos quadrados das observações ( $\hat{y}_{nx1}$ ), dos parâmetros ( $\hat{x}_{ux1}$ ), e dos erros aleatórios ( $\hat{e}_{nx1}$ ).

Nesta seção, será abordado o caso geral de ajustamento de observações indiretas (quando os parâmetros a serem estimados se vinculam com as observações por meio de um modelo matemático), bem como a linearização do modelo funcional (ou seja, do sistema de equações), quando este for não linear em relação aos parâmetros.

Nesta seção também será mostrada a correspondência entre a notação matemática adotada neste trabalho com a notação matemática adotada em Gemael (1994), que é a mais difundida na área de Geodésia e Ajustamento no cenário nacional. Porém, salienta-se que o restante do texto continuará usando a notação adotada nas seções anteriores, uma vez que em

um trabalho científico, não se deve estar limitado a usar uma determinada notação, apenas por esta ser a mais difundida.

Inicialmente, o método paramétrico de ajustamento pode ser expresso pelas chamadas equações de observação (DALMOLIN, 2002):

$$\hat{y}_{nx1} = F(\hat{x}) = A_{nxu} \hat{x}_{ux1} \quad (2.50)$$

Onde a formulação  $\hat{y}_{nx1} = F(\hat{x})$  expressa o fato de que os parâmetros a serem estimados (ajustados) se relacionam, explicitamente, com as observações ajustadas por meio das equações de observação (ajustamento de observações indiretas).

No caso do modelo funcional ser não linear, a matriz *design*  $A_{nxu}$  se torna a matriz das derivadas parciais das equações de observação em relação aos parâmetros (matriz jacobiana), e no caso do modelo funcional ser linear, esta se torna a matriz dos coeficientes da função linear adotada.

Ressalva-se que quando o modelo funcional é linear, conforme já visto nas seções anteriores, as derivadas parciais das equações de observação em relação aos parâmetros são de fato os coeficientes da função adotada, ou seja, o modelo funcional, dado pela matriz *design*  $A_{nxu}$ , já é linear em relação aos parâmetros, pois contém apenas escalares conhecidos.

Segundo Ghilani e Wolf (2006), para os casos em que o modelo funcional é não linear, deve ser feita uma linearização do mesmo e também iterações para que as soluções deduzidas nas seções anteriores sejam igualmente válidas para estes casos. Esta linearização é feita via série de Taylor em torno de um vetor dos parâmetros aproximados  $x_{0_{ux1}}$ , tomando apenas os dois primeiros termos da série, conforme ilustra a Figura 2.11.

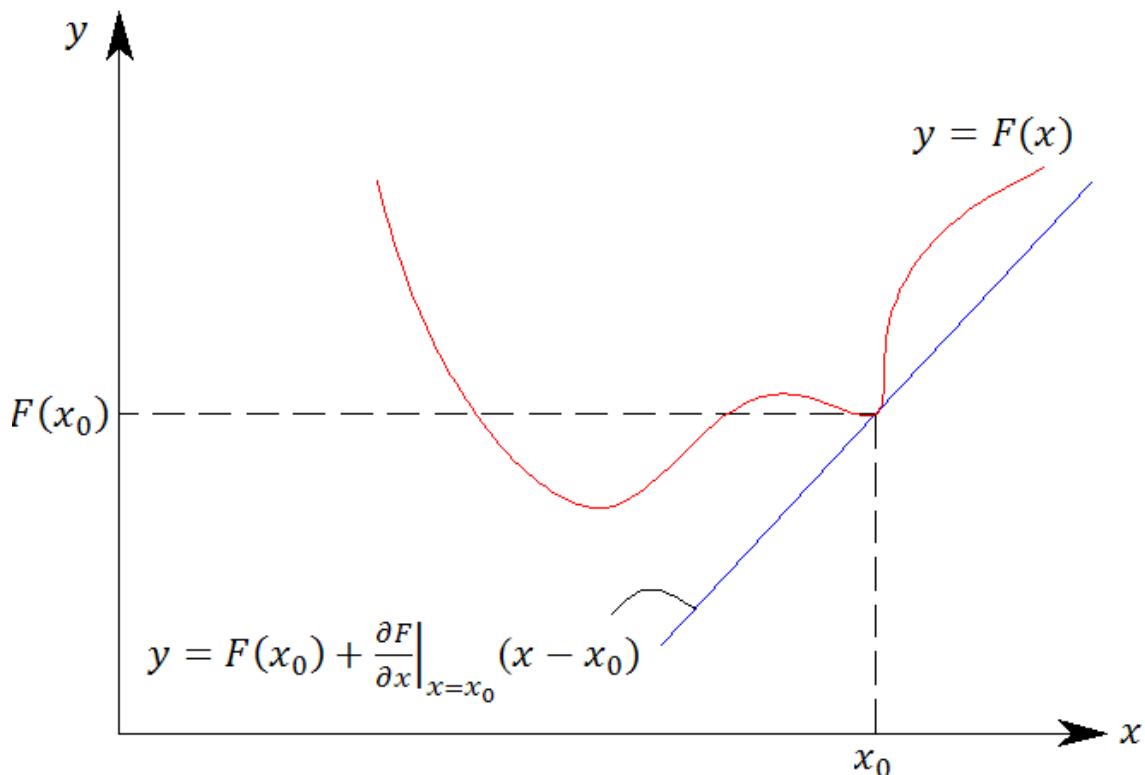


Figura 2.11 – Linearização de uma função  $y = F(x)$  em torno de um ponto  $x_0$  por Série de Taylor.

Esta linearização introduz um erro de aproximação, erro este tanto menor quanto melhor forem os valores aproximados do vetor  $x_{0ux1}$  (DALMOLIN, 2002). A expansão linear de  $F(\hat{x})$  em torno de  $x_0$ , por série de Taylor, é dada por (STRANG; BORRE, 1997):

$$F(\hat{x}) = F(x_0) + \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x=x_0} (\hat{x} - x_0) = y_0 + Ax \quad (2.51)$$

Onde:

- $y_0 = F(x_0)$  é a aplicação do vetor dos parâmetros aproximados  $x_0$  às equações de observação (ao sistema de equações não lineares);
- $A = \frac{\partial F}{\partial \hat{x}}\Big|_{\hat{x}=x_0}$  é a aplicação do vetor dos parâmetros aproximados à matriz das derivadas parciais  $A_{nxu}$ , tornando sua forma algébrica em numérica;
- $x = \hat{x} - x_0$  é a diferença entre os parâmetros ajustados e os parâmetros aproximados; ou seja, o vetor de correção aos parâmetros aproximados.

Combinando as expressões (2.13) e (2.50), obtém-se:

$$\hat{y}_{nx1} = F(\hat{x}) = y_{nx1} - e_{nx1} \quad (2.52)$$

Substituindo  $\hat{y}_{nx1} = F(\hat{x}) = y_0 + Ax$  na expressão (2.52), resulta em:

$$y_{0_{nx1}} + A_{nxu}x_{ux1} = y_{nx1} - e_{nx1} \quad (2.53)$$

Definindo o vetor  $l_{nx1}$  por  $l_{nx1} = y_{nx1} - y_{0_{nx1}}$  em (2.53), finalmente resulta em:

$$e_{nx1} = l_{nx1} - A_{nxu}x_{ux1} \quad (2.54)$$

Na equação (2.54), nota-se que o modelo obtido se torna linear em relação aos parâmetros  $x_{ux1}$  ( $l_{nx1} = A_{nxu}x_{ux1} + e_{nx1}$ ), sendo resolvido pelo procedimento visto na seção 2.1 e também por meio de processos iterativos de convergência.

Segundo Dalmolin (2002), o vetor  $x$  é o vetor de correção aos parâmetros aproximados  $x_0$  para a obtenção dos parâmetros ajustados  $\hat{x}$ , que serão melhores estimativas para os parâmetros desde que exista convergência no processo iterativo.

Ainda segundo Dalmolin (2002), o vetor  $\hat{x}$  assim obtido é utilizado como o novo vetor dos parâmetros aproximados  $x_0$  e o ajustamento é realizado novamente. O processo iterativo é encerrado quando não converge e ultrapassa certo número de iterações, ou quando os elementos do vetor de correção  $x$  são menores que um escalar  $\delta$  arbitrariamente escolhido como constante para o teste de convergência.

O processo iterativo de ajustamento no método paramétrico, considerando a linearização do modelo, pode então ser resumido nas seguintes etapas:

- 1) Estabelecer o modelo das equações de observação:  $\hat{y} = F(\hat{x})$ ;
- 2) Atribuir um vetor dos parâmetros aproximados  $x_{0_{ux1}}$ ;
- 3) Calcular o vetor  $y_{0_{nx1}} = F(x_0)$  e a matriz Jacobiana  $A_{nxu} = \frac{\partial F}{\partial \hat{x}} \Big|_{\hat{x}=x_0}$ ;
- 4) Calcular o vetor  $l_{nx1} = y_{nx1} - y_{0_{nx1}}$ ;
- 5) Calcular o vetor de correção aos parâmetros aproximados:  

$$x_{ux1} = (A_{uxn}^T W_{nxn} A_{nxu})^{-1} A_{uxn}^T W_{nxn} l_{nx1};$$

- 6) Calcular o vetor dos parâmetros ajustados  $\hat{x} = x_0 + x$ ;
- 7) Na primeira iteração ( $i = 1$ ), fazer  $x_0^{i=1} = \hat{x}$  e repetir o processo a partir de 3);
- 8) Realizar  $i$  iterações até que os elementos do vetor de correção  $x^i$  converjam para um determinado valor estipulado  $\delta$  (por exemplo,  $\delta = 1$  mm).

Uma questão que também merece atenção nesta seção é em relação à definição do erro de uma observação e a definição do resíduo desta observação.

Segundo Gemael (1994), o erro aparente é a diferença entre o valor observado de uma grandeza e o valor estimado para esta grandeza, e o erro verdadeiro, desconhecido na prática, é a diferença entre o valor observado de uma grandeza e o valor “verdadeiro” desta grandeza.

Ainda segundo Gemael (1994), o resíduo é a diferença entre o valor estimado de uma grandeza e o valor observado para esta grandeza, ou seja, na prática, corresponde ao erro aparente com o sinal trocado (mantendo a sua magnitude). Desta forma, para o caso do ajustamento de observações por mínimos quadrados, o vetor dos  $n$  resíduos ajustados  $\hat{v}_{nx1}$  se relaciona com o vetor dos  $n$  erros aparentes ajustados  $\hat{e}_{nx1}$  (assumidos serem de natureza aleatória), por meio da seguinte expressão:

$$\hat{v}_{nx1} = -\hat{e}_{nx1} = \hat{y}_{nx1} - y_{nx1} \quad (2.55)$$

Portanto, o princípio do método dos mínimos quadrados, que consiste em minimizar a soma ponderada do quadrado dos erros aleatórios, é equivalente ao critério de minimizar a soma ponderada do quadrado dos resíduos (pois as magnitudes dos termos são as mesmas).

Encerrando esta seção, têm-se a correspondência entre a notação usada neste trabalho para a notação adotada em Gemael (1994):

- $y_{nx1} = L_{b_{nx1}}$  = Vetor das observações;
- $\hat{y}_{nx1} = L_{a_{nx1}}$  = Vetor das observações ajustadas;
- $x_{0_{ux1}} = X_{0_{ux1}}$  = Vetor dos parâmetros aproximados;
- $x_{ux1} = X_{ux1}$  = Vetor de correção aos parâmetros aproximados;
- $\hat{x}_{ux1} = X_{a_{ux1}}$  = Vetor dos parâmetros ajustados;
- $A_{nxu} = A_{nxu}$  = Matriz *design* ou matriz das derivadas parciais (jacobiana);
- $\hat{v}_{nx1} = V_{nx1} = -\hat{e}_{nx1}$  = Vetor dos resíduos ajustados;
- $y_{0_{nx1}} = L_{0_{nx1}}$  = Aplicação do vetor  $x_{0_{ux1}}$  nas equações de observação;

- $l_{nx1} = -L_{nx1}$  = Diferença entre os vetores  $y_{nx1}$  e  $y_{0_{nx1}}$ ;
- $W_{nxn} = P_{nxn}$  = Matriz peso das observações.

A única ressalva feita é que, em Gemael (1994),  $L_{nx1} = L_{0_{nx1}} - L_{b_{nx1}}$ , ao invés de  $L_{nx1} = L_{b_{nx1}} - L_{0_{nx1}}$ , e, portanto, o vetor de correções aos parâmetros aproximados se torna:

$$X_{ux1} = -(A_{uxn}^T P_{nxn} A_{nxu})^{-1} A_{uxn}^T P_{nxn} L_{nx1} \quad (2.56)$$

Estas são as principais considerações envolvidas no ajustamento de observações por mínimos quadrados pelo método paramétrico:  $\hat{y}_{nx1} = F(\hat{x})$  ou, analogamente,  $L_a = F(X_a)$ , bem como na linearização do modelo funcional por série de Taylor.

Maiores detalhes podem ser obtidos em Gemael (1994), Strang e Borre (1997), Dalmolin (2002), Teunissen (2003), Leick (2004), e Ghilani e Wolf (2006).

## 2.5 Números de Condições Mínimas e Injunções no Método Paramétrico

Segundo Gemael (1994), sistemas de equações lineares do tipo  $y = Ax$  são ditos sistemas “bem condicionados” quando uma pequena alteração em algum(s) valor(es) do vetor dos termos independentes  $y$  ou nos coeficientes da matriz  $A$  não resultam em grandes variações numéricas no vetor dos parâmetros  $x$ . Por outro lado, quando pequenas mudanças nos termos independentes ou na matriz dos coeficientes resultam em grandes variações no vetor dos parâmetros  $x$ , o sistema de equações é dito mau condicionado.

Ainda segundo Gemael (1994), o risco existe mesmo no caso de coeficientes exatos, pois a conversão, nos computadores, do sistema decimal para o binário e vice-versa, pode gerar erros em si, insignificantes, mas cuja dilatação, por meio do mau condicionamento, poderá comprometer seriamente a solução de certos problemas. Tais considerações se tornam mais graves se for considerado o fato de que nas ciências geodésicas, em geral os valores provém de observações, bem como da linearização do modelo em torno de um vetor dos parâmetros aproximados, quando este for não linear.

Geralmente, matrizes com determinantes pequenos (próximos de zero) e inversas com elementos de grande valor numérico podem representar sintomas de mau condicionamento,

embora a relação inversa não seja necessariamente verdadeira. Por exemplo, multiplicando as equações de um sistema bem condicionado por um determinado escalar, pode ser possível que este sistema passe a apresentar a matriz dos coeficientes  $A$  com determinante elevado e pequenos elementos na matriz inversa  $A^{-1}$ .

Uma forte correlação entre as observações (expressa pelas covariâncias na matriz de variâncias e covariâncias) pode ser um sintoma de mau condicionamento do sistema.

*A priori*, não é possível saber o condicionamento de um sistema do tipo  $y = Ax$ , mas os números de condição podem servir de indicadores, como por exemplo, o número de condição  $H$ , dado por (GEMAEL, 1994):

$$H = \sqrt{\frac{\max u}{\min u}} \quad (2.57)$$

onde  $\max u$  e  $\min u$  são os autovalores máximo e mínimo, respectivamente, da matriz  $A^T A$ .

Outros números de condição, como por exemplo, os de Turing e Todd podem ser utilizados para avaliar o condicionamento de uma matriz (maiores detalhes em GEMAEL, 1994; e em STRANG; BORRE, 1997). No caso do ajustamento de observações por mínimos quadrados, pode haver problema de mau condicionamento no denominado sistema de equações normais (STRANG; BORRE, 1997):

$$u_{ux1} = N_{uxu} \hat{x}_{ux1} \quad (2.58)$$

Com  $N_{uxu} = A_{uxn}^T W_{nxn} A_{nxu}$  e  $u_{ux1} = A_{uxn}^T W_{nxn} l_{nx1}$  (ver a expressão (2.56)). As  $u$  equações normais, a  $u$  incógnitas  $\hat{x}_{ux1}$ , ilustram o fato de que, embora o sistema de equações em (2.3) seja redundante e com infinitas soluções com a incorporação dos erros aleatórios, a solução  $\hat{x}$  para o vetor dos parâmetros  $x$  que obedece ao critério dos mínimos quadrados em (2.10) é única.

Segundo Leick (2004), uma das maneiras de evitar a singularidade das equações normais (não existência de inversa da matriz  $N_{uxu}$ , devido ao mau condicionamento do sistema) é com a incorporação de informações externas sobre os parâmetros, por meio de injunções. Ainda segundo Leick (2004), o *rank* da matriz *design*  $A_{nxu}$  é igual ao *rank* da matriz  $N_{uxu} = A_{uxn}^T W_{nxn} A_{nxu}$ , e é menor ou igual ao número de parâmetros  $u$ , ou seja:

$$\text{Rank}(A_{nxu}) = \text{Rank}(A_{uxn}^T W_{nxn} A_{nxu}) = R \leq u \quad (2.59)$$

sendo o *rank* de uma matriz o número de colunas linearmente independentes desta matriz (LAY, 1997). A deficiência de *rank* (ou posto), dada por  $u - R$ , geralmente é causada pela falta de definição do sistema de referência. A deficiência de posto de uma matriz é tratada especificando  $u - R$  condições aos parâmetros (ou seja, injunções).

Por exemplo, para uma rede de nivelamento geométrico, esta deficiência de posto pode ser removida com a injunção da altitude de um ponto (STRANG; BORRE, 1997).

Em ajustamento de observações pelo MMQ, é usual subdividir as injunções em três categorias (DALMOLIN, 2002):

- Injunções absolutas;
- Injunções relativas;
- Injunções funcionais.

As injunções absolutas consistem em impor invariabilidade a certos parâmetros, como por exemplo, fixar as coordenadas de um ponto (denominado ponto de controle), durante o ajustamento de uma rede geodésica. Portanto, no modelo matemático, as coordenadas deste ponto, tal como os coeficientes da matriz *design*  $A_{nxu}$ , não são tratadas nem como observações, e nem como parâmetros, mas sim como constantes.

Uma injunção absoluta reduz, portanto, em uma coluna a dimensão da matriz *design*  $A_{nxu}$ , e em uma linha a dimensão do vetor dos parâmetros incógnitos  $x_{ux1}$ , sendo o respectivo parâmetro injuncionado e tratado como constante no modelo matemático.

Ghilani e Wolf (2006) fazem algumas considerações quanto às injunções absolutas. Neste tipo de injunção, as observações são “forçadas” a se ajustar aos pontos de controle, e, portanto, as coordenadas injuncionadas devem ser altamente confiáveis, pois serão tratadas como constantes no processo de estimação. Além disso, pressupõe-se que a variância destas injunções é nula, o que na prática não ocorre. Outra ressalva feita é que as injunções devem ter precisão superior (ou seja, uma variância menor) do que as componentes do vetor das observações  $y_{nx1}$ .

É importante salientar que, com a injunção de alguns parâmetros ao sistema de equações, a estimativa por mínimos quadrados dos demais parâmetros, para o caso geral de modelo funcional linearizado, ainda é obtida por:

$$\begin{cases} x = (A^T W A)^{-1} A^T W l \\ \hat{x} = x_0 + x \end{cases} \quad (2.60)$$

Uma outra forma de injuncionar parâmetros ao modelo é por meio das injunções relativas, que são introduzidas por meio da atribuição de pesos aos parâmetros. Variáveis consideradas totalmente livres terão peso nulo (livres para variar no processo de ajustamento), e as constantes terão peso praticamente infinito (para não variarem no ajustamento), sendo que as demais terão um peso intermediário, definido, por exemplo, pela ponderação usual em função das variâncias e covariâncias (DALMOLIN, 2002).

Na prática, um dos métodos de implementação das injunções relativas é feito por meio das “pseudo-observações”, que aumentam a dimensão do vetor das observações e também do vetor dos parâmetros (GEMAEL, 1994).

No caso do método paramétrico, para cada injunção  $x_{inj}$ , é inserida uma equação do tipo  $x_{inj} = x_{inj}$  ao sistema de equações, e, portanto, as injunções aparecem tanto no vetor das observações quanto no vetor dos parâmetros, bem como na matriz peso das observações.

Finalmente, as injunções funcionais consistem em impor condições aos parâmetros, ou a um subconjunto dos parâmetros, geralmente sob a forma  $G(\hat{x}) = 0$ , sendo  $G$  um operador funcional.

Quando injunções são inseridas no ajustamento pelo método paramétrico, o número de graus de liberdade do sistema torna-se (GHILANI; WOLF, 2006):

$$r = n - u + c \quad (2.61)$$

sendo “ $n$ ” o número de observações, “ $u$ ” o número de parâmetros incógnitos originais e “ $c$ ” o numero de injunções. Independentemente do número de parâmetros iniciais do modelo e o número de parâmetros do mesmo após as injunções, neste trabalho, a dimensão do vetor das observações  $y$  será sempre designada por  $n$ , e a dimensão do vetor dos parâmetros a serem estimados  $x$  será sempre designada por  $u$ .

Além disso, daqui para frente, todas as injunções consideradas serão da forma de injunções absolutas (pois nos experimentos desta dissertação, apenas injunções absolutas serão utilizadas) e o ajustamento das observações, no caso geral linearizado, será expresso pelo denominado modelo de Gauss-Markov (BERBER; HEKIMOGLU, 2003; GUI et al., 2005; GUO et al., 2007; KNIGHT; WANG, 2009; KNIGHT et al., 2010):

$$\hat{v}_{nx1} = A_{nxu}x_{ux1} - l_{nx1} \quad (2.62)$$

Sendo que as injunções aparecem implicitamente no vetor  $l_{nx1}$ , pois  $l = y - y_0$ , e  $y_0 = F(x_0)$ , ou seja, elas surgem na aplicação do vetor dos parâmetros aproximados ao modelo matemático (ao sistema de equações, com as devidas constantes injuncionadas).

Nos casos especiais em que não houverem termos independentes (constantes) no sistema de equações, resulta em  $l = y$  e em  $\hat{y} = F(\hat{x}) = A\hat{x}$ , sendo o vetor dos resíduos ajustados dado diretamente por:  $\hat{v} = \hat{y} - y$ , conforme a sua expressão original em (2.55).

Salienta-se ainda que para os casos em que o modelo funcional já é linear em relação aos parâmetros, o vetor dos parâmetros aproximados pode ser arbitrado como sendo igual ao vetor nulo  $x_0 = [0]_{ux1}$ , e o vetor dos parâmetros ajustados  $\hat{x}$  se torna igual ao vetor de correção aos parâmetros aproximados:  $\hat{x}_{ux1} = x_{0_{ux1}} + x_{ux1} = x_{ux1}$ , não sendo necessárias as iterações requeridas para o caso de modelos originalmente não lineares. De qualquer forma, para estes casos, o vetor dos parâmetros ajustados  $\hat{x}$  pode ser obtido diretamente por meio da expressão (2.11), sem a necessidade de se definir um vetor  $x_0$  e calcular um vetor  $l = y - y_0$ .

Também é importante mencionar que a utilização de injunções absolutas, por serem constantes (assumindo, portanto, variância nula), não altera a propagação de variâncias e covariâncias das observações, já apresentada na seção anterior deste capítulo.

Uma fundamentação mais detalhada sobre o número de condições mínimas e as injunções no ajustamento, bem como alguns exemplos numéricos, podem ser obtidos em Gemael (1994), Dalmolin (2002), Teunissen (2003), Leick (2004), e Ghilani e Wolf (2006).

## 2.6 O Método dos Mínimos Quadrados e o Melhor Estimador Linear Imparcial

A propagação de médias, apresentada anteriormente, independe da função densidade de probabilidade (fdp) assumida para o vetor das observações  $y_{nx1}$ . Entretanto, considerando que a aleatoriedade do vetor  $y_{nx1}$  é causada pelos erros de observação, o mesmo pode ser expresso como a soma de uma componente determinística (isto é, não aleatória)  $Ax$ , e uma componente aleatória  $e$  (TEUNISSEN, 2003):

$$\underline{y} = Ax + \underline{e} \quad (2.63)$$

onde o sublinhado indica que se trata de uma variável ou de um vetor aleatório. Assumindo ainda que a média (ou esperança matemática) da componente aleatória é zero, se aceita que os erros de observação são iguais a zero “na média” (ressalva-se que ainda não foi definida nenhuma função densidade de probabilidade para o vetor das observações  $\underline{y}$ ).

Com este pressuposto de que  $E\{\underline{e}\} = 0$ , a propagação de médias, dada por (2.35), implica em (GEMAEL, 1994):

$$E\{\underline{y}\} = Ax \quad (2.64)$$

Substituindo (2.64) em (2.36), (2.37) e (2.38), resulta em (GEMAEL, 1994):

$$\begin{cases} E\{\hat{x}\} = [(A^T W A)^{-1} A^T W A] x = x \\ E\{\hat{y}\} = Ax = E\{\underline{y}\} \\ E\{\hat{e}\} = E\{\underline{y}\} - Ax = 0 \end{cases} \quad (2.65)$$

Nota-se que agora, os estimadores por mínimos quadrados  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{e}$  também são representados com o sublinhado, indicando serem vetores aleatórios. A expressão (2.65) demonstra que estes estimadores por mínimos quadrados são estimadores imparciais, e que esta propriedade independe da escolha da matriz  $W_{n \times n}$  (TEUNISSEN, 2003).

Os estimadores por mínimos quadrados são ditos imparciais, pois  $E\{\hat{x}\} = x$ , o que ocorre quando  $E\{\underline{e}\} = 0$  (GEMAEL, 1994).

Juntamente com a propriedade de estimador imparcial, uma matriz de variâncias e covariâncias  $\Sigma_{\hat{x}}$  de traço mínimo implica que existe uma alta probabilidade de que o vetor dos parâmetros ajustados  $\hat{x}$  esteja próximo do verdadeiro, mas desconhecido, vetor dos parâmetros  $x$  (TEUNISSEN, 2003).

Segundo Strang e Borre (1997), o traço de uma matriz é igual à soma dos elementos de sua diagonal principal, o que neste caso corresponde à soma das variâncias dos parâmetros ajustados.

Usando a decomposição  $\Sigma_y = D^T D$  (propriedade de simetria da matriz  $\Sigma_y$ ), considerando novamente o caso bidimensional (onde  $n = 2$  e  $u = 1$ ), e usando a lei de propagação de covariâncias das observações, expressa em (2.45), para a obtenção da variância  $\sigma_{\hat{x}}^2$  do parâmetro estimado  $\hat{x}$  ( $u = 1$ ), pode-se escrever (TEUNISSEN, 2003):

$$\sigma_{\hat{x}}^2 = \frac{(a^T W D^T D a) W a}{(a^T D^{-1} D W a)^2} \quad (2.66)$$

Usando as propriedades de produto interno e norma de vetores, resulta em:

$$\sigma_{\hat{x}}^2 = \frac{\|D W a\|^2}{\|D W a\|^2 \| (D^T)^{-1} a \|^2 \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\| (D^T)^{-1} a \|^2 \cos^2 \alpha} \quad (2.67)$$

Sendo  $\alpha$  o ângulo entre os vetores  $D_{2x2} W_{2x2} a_{2x1}$  e  $(D_{2x2}^T)^{-1} a_{2x1}$ . Para um valor mínimo de variância  $\sigma_{\hat{x}}^2$  do parâmetro ajustado  $\hat{x}$ , o ângulo  $\alpha$  deve ser zero ( $\cos^2 0 = 1$ ).

Isto ocorre quando estes dois vetores são paralelos. Logo, a variância  $\sigma_{\hat{x}}^2$  é mínima quando, partindo da origem,  $D_{2x2} W_{2x2} a_{2x1} = (D_{2x2}^T)^{-1} a_{2x1}$ , ou seja,  $\Sigma_y W_{2x2} a_{2x1} = a_{2x1}$  (TEUNISSEN, 2003). Portanto, a variância do parâmetro ajustado é mínima quando se escolhe uma matriz peso  $W_{2x2}$  para as observações tal que:

$$W_{2x2} = \Sigma_{y_{2x2}}^{-1} \quad (2.68)$$

Gemael (1994), e Strang e Borre (1997) também demonstram que o método dos mínimos quadrados é uma solução de variância mínima para o caso geral ( $u < n$ ), quando a matriz peso das observações é escolhida como sendo igual à  $W_{nxn} = \Sigma_{y_{nxn}}^{-1}$ , ou seja, igual ao inverso da matriz de covariância das observações.

O método dos mínimos quadrados é um estimador linear (isto é, função linear das observações), um estimador imparcial que independe da escolha de  $W_{nxn}$ , e uma solução de variância mínima, quando  $W = \Sigma_y^{-1}$ . Portanto, ele é classificado como um BLUE (*Best Linear Unbiased Estimator* – Melhor Estimador Linear Imparcial). O termo “melhor” é no sentido de ser uma solução de variância mínima. Teunissen (2003) também demonstra que esta solução BLUE é única.

Além disso, pelo fato dos estimadores por mínimos quadrados  $\hat{y}_{nx1}$  e  $\hat{e}_{nx1}$  também serem funções lineares do vetor das observações  $y_{nx1}$  (e do vetor dos parâmetros ajustados  $\hat{x}_{ux1}$ ), pela lei de propagação de covariâncias, estes também são soluções de variância mínima para o vetor das observações ajustadas e para o vetor dos erros aleatórios, respectivamente.

Estas propriedades também são válidas para o caso geral de modelos linearizados e com injunções (pelo modelo de Gauss-Markov), apesar de demonstradas apenas para o caso

mais simples da seção 2.1. Salienta-se também que, quando se assume  $E\{\underline{e}\} = 0$ , tem-se que  $E\{\nu\} = 0$ ; pois, de acordo com as definições apresentadas de erro e de resíduo,  $\nu = -e$ .

## 2.7 O Método dos Mínimos Quadrados e a Solução de Máxima Verossimilhança

Conforme já visto, o princípio do método dos mínimos quadrados consiste em minimizar a forma quadrática  $(y_{nx1} - A_{nxu}x_{ux1})_{1xn}^T W_{nxn} (y_{nx1} - A_{nxu}x_{ux1})_{nx1}$ , sem necessariamente considerar a natureza aleatória dos erros que contaminam o vetor das observações.

Já para o melhor estimador linear imparcial (BLUE), apenas a média e a matriz de covariância do vetor das observações  $y_{nx1}$  necessitam ser especificados, e não a sua função densidade de probabilidade completa.

Denotando por  $p(y|x)$  a função densidade de probabilidade (multivariada) do vetor das observações  $y$ , onde  $x$  são os parâmetros que definem esta fdp, para um valor fixo para os parâmetros  $x$ , a fdp  $p(y|x)$  é função apenas de  $y$ , e para diferentes valores dos parâmetros  $x$  (como por exemplo, média e variância), a função  $p(y|x)$  pode assumir diferentes formas (Figura 2.12).

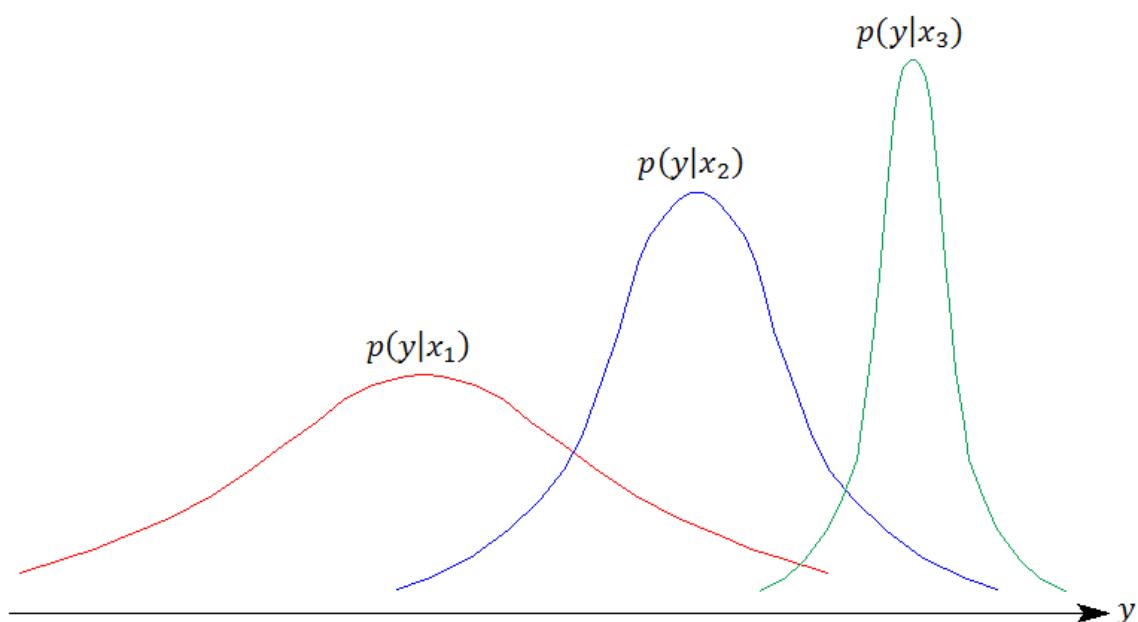


Figura 2.12– Diferentes fdp  $p(y|x_i)$  para uma variável aleatória  $y$  unidimensional.  
Fonte: Adaptado de Papoulis (1991)

Segundo Papoulis (1991), dado o resultado de um experimento (como por exemplo, o vetor das observações  $y$ ), o objetivo do método de máxima verossimilhança é estimar o vetor dos parâmetros  $x$  com base no vetor das observações  $y$ , ou seja, estimar o valor mais provável de  $x$  que resultou no observado  $y$ .

Isto consiste em considerar, para cada vetor possível dos parâmetros  $x$ , o quanto provável o vetor das observações  $y$  poderia ocorrer se o vetor dos parâmetros  $x$  fosse de fato verdadeiro. Quanto maior esta probabilidade, maior é a evidência de que o vetor dos parâmetros  $x$  em questão produziu o vetor das observações  $y$ , e mais provável é a ocorrência deste vetor  $x$  (TEUNISSEN, 2003).

Portanto, a expressão  $p(y|x)$ , considerando o vetor  $y$  fixo (dado ou observado), é função apenas de  $x$  e é chamada de função de verossimilhança de  $x$  (BREIMAN, 1973).

Denotando esta função de verossimilhança do vetor dos parâmetros por  $L(x) = p(y|x)$ , o princípio da estimação por máxima verossimilhança é maximizá-la, ou seja (LARSON, 1974):

$$\max_x L(x) \quad (2.69)$$

Portanto, no método de máxima verossimilhança, é escolhido como estimativa para o vetor dos parâmetros  $x$ , aquele que maximiza a probabilidade  $L(x) = p(y|x)$ , para um dado vetor das observações  $y$ . Desta forma, deve-se conhecer ou estipular a função densidade de probabilidade  $p(y|x)$  de  $y$  (LARSON, 1974).

Considerando o caso em que a fdp  $p(y|x)$  segue distribuição normal multivariada, e que o vetor das observações  $y$  é normalmente distribuído com média  $E\{y\} = Ax$  e com matriz de covariância  $\Sigma_y$ , a fdp  $p(y|x)$  torna-se (TEUNISSEN, 2003):

$$p(y|x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Sigma_y|^{-\frac{1}{2}} e^{\left\{ -\frac{1}{2} (y - Ax)^T \Sigma_y^{-1} (y - Ax) \right\}} \quad (2.70)$$

Onde  $n$  é a dimensão do vetor das observações  $y$  e  $|\Sigma_y|$  é o determinante de sua matriz de covariância. Aplicando o logaritmo natural na expressão (2.70), resulta em:

$$\ln p(y|x) = -\frac{n}{2} \ln |2\pi| - \frac{1}{2} \ln |\Sigma_y| - \frac{1}{2} (y - Ax)^T \Sigma_y^{-1} (y - Ax) \quad (2.71)$$

Isto pode ser realizado pelo fato das funções  $\ln p(y|x)$  e  $p(y|x)$  possuírem seus máximos para os mesmos valores de  $x$ , pois o logaritmo natural é uma função monotonicamente crescente (BREIMAN, 1973).

Como o vetor das observações  $y$  é fixo (isto é, dado), os termos  $-\frac{n}{2} \ln|2\pi|$  e  $-\frac{1}{2} \ln|\Sigma_y|$  são constantes para qualquer vetor dos parâmetros  $x$  e podem ser negligenciados.

Portanto, maximizar a função  $\ln p(y|x)$  consiste em maximizar o termo  $-\frac{1}{2} (y - Ax)^T \Sigma_y^{-1} (y - Ax)$ , o que é equivalente a minimizar apenas o termo quadrático  $(y - Ax)^T \Sigma_y^{-1} (y - Ax)$ , desconsiderando o sinal negativo e o escalar  $\frac{1}{2}$ .

Este termo corresponde a norma quadrática que se busca minimizar no MMQ (ver a expressão 2.6). Logo, nos casos em que o vetor das observações  $y$  segue distribuição normal multivariada, com média  $E\{y\} = Ax$  e matriz de covariância  $\Sigma_y$ , e a matriz peso é escolhida como  $W = \Sigma_y^{-1}$ , o estimador de máxima verossimilhança para o vetor dos parâmetros é o mesmo estimador  $\hat{x}$  do método dos mínimos quadrados.

Em Teunissen (2003) é demonstrada uma interpretação geométrica para a relação entre o MMQ e o critério de máxima verossimilhança, que também será aqui apresentada. Para o caso bidimensional (onde  $n = 2$  e  $u = 1$ ), sabe-se que o termo quadrático que se deseja minimizar em (2.71) corresponde à equação de uma elipse no plano (ver a expressão 2.14).

Portanto, pontos situados numa mesma elipse possuem um mesmo valor, constante, para a função densidade de probabilidade  $p(y|x)$  (TEUNISSEN, 2003):

$$p(y|x) = \text{constante} \Leftrightarrow (y - ax)^T \Sigma_y^{-1} (y - ax) = \text{constante} = C \quad (2.72)$$

Para diferentes valores da constante  $C$  têm-se diferentes elipses associadas (Figura 2.13). Quanto menor o valor da função densidade de probabilidade, maior é o valor da constante  $C$  e maior é a elipse associada, pois, conforme visto, maximizar a fdp  $p(y|x)$  consiste em minimizar a forma quadrática  $(y - ax)^T \Sigma_y^{-1} (y - ax)$ .

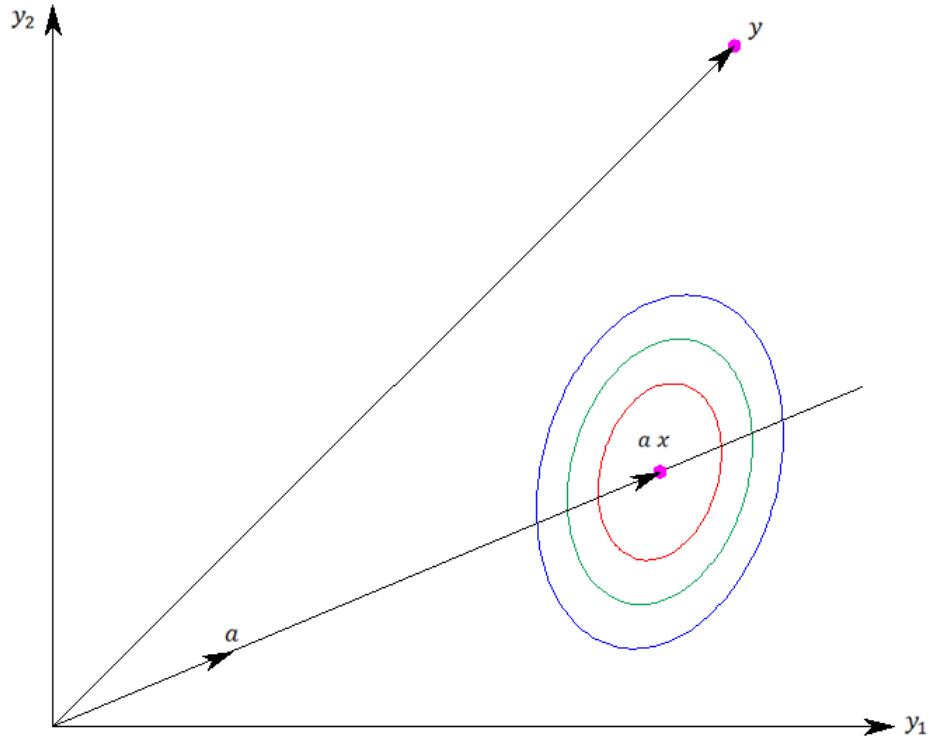


Figura 2.13 – Alguns contornos (elipses), nos quais  $p(y|x) = \text{constante}$ .  
Fonte: Adaptado de Teunissen (2003)

Variando os valores do parâmetro  $x$ , a família de elipses centradas no ponto  $p_i = ax_i$  transladam ao longo da linha com direção dada pelo vetor  $a$  (Figura 2.14).

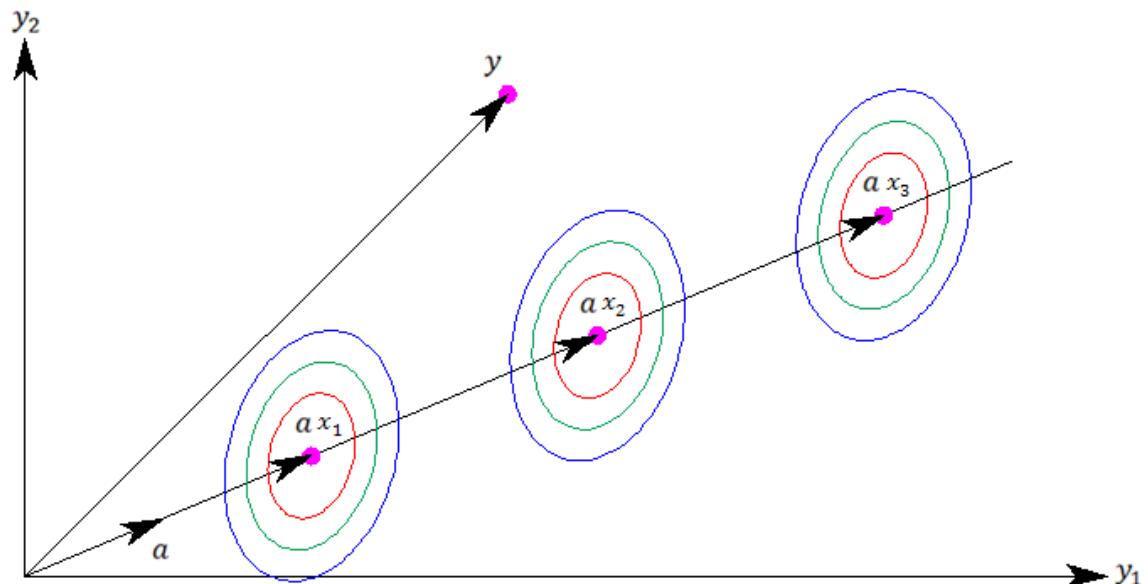


Figura 2.14 – Diferentes famílias de elipses com  $p(y|x) = C$ , para diferentes valores do parâmetro  $x$ .  
Fonte: Adaptado de Teunissen (2003)

Conforme foi visto, para cada valor do parâmetro  $x$ , tem-se uma família de elipses que obedecem à relação  $(y - ax)^T \Sigma_y^{-1} (y - ax) = C$ . Para o ponto dado pelo vetor das observações  $y$ , cada valor do parâmetro  $x$  terá uma das elipses de sua família que irá conter em seu contorno este ponto  $y$  (Figura 2.15).

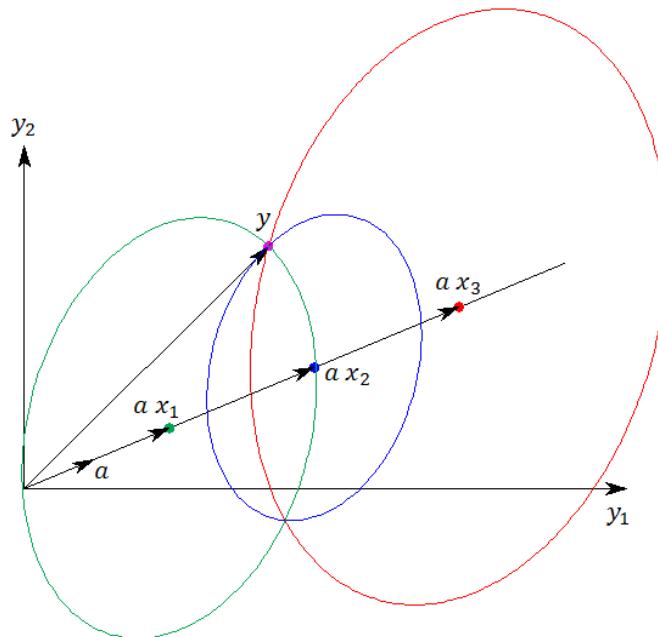


Figura 2.15 – Elipses de tangência para o vetor  $y$  centradas em diferentes pontos  $p_i = a x_i$ .

A melhor estimativa para o parâmetro  $x$ , segundo o critério de máxima verossimilhança, será aquele valor  $\hat{x}$  no qual a elipse passante pelo vetor das observações  $y$  tenha um valor mínimo para a constante  $(y - ax)^T \Sigma_y^{-1} (y - ax) = C$ , maximizando, desta forma, o critério de máxima verossimilhança:  $L(x) = p(y|x)$ .

Logo, após transladar a família de elipses ao longo da linha com direção dada pelo vetor  $a$ , até que o vetor das observações  $y$  se torne um ponto de tangência, cuja linha tangente é paralela ao vetor  $a$ , o correspondente centro  $a\hat{x}$  das elipses fornece o estimador de máxima verossimilhança para o parâmetro  $x$  (Figura 2.16).

Ressalva-se que se a família de elipses fosse transladada em outra direção, dada por um vetor  $b$  qualquer, o vetor das observações  $y$  se tornaria um ponto de tangência de uma destas elipses, cuja linha tangente seria paralela a direção deste outro vetor  $b$ .

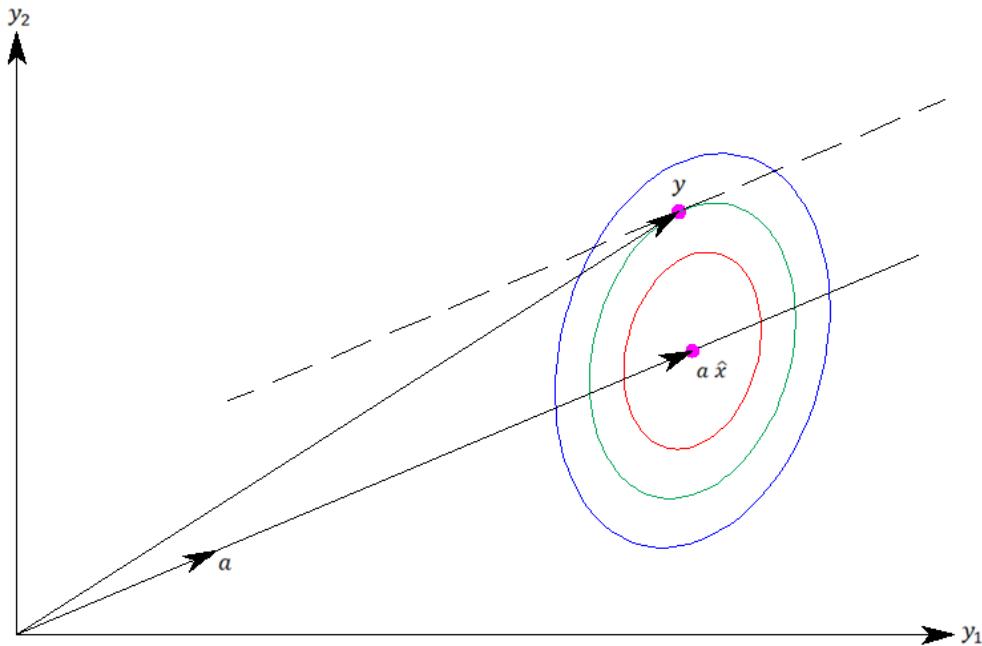


Figura 2.16 – Estimador  $\hat{x}$  de máxima verossimilhança para o parâmetro  $x$ .  
Fonte: Adaptado de Teunissen (2003)

Neste ponto de tangência, dado pelo vetor das observações  $y$ , a linha normal (perpendicular) a elipse é dada por  $\Sigma_y^{-1}(y - a\hat{x})$ , pois esta linha, normal a elipse, é paralela ao gradiente da elipse neste ponto, dado por  $2\Sigma_y^{-1}(y - a\hat{x})$  (Figura 2.17), ver também a expressão (2.15).

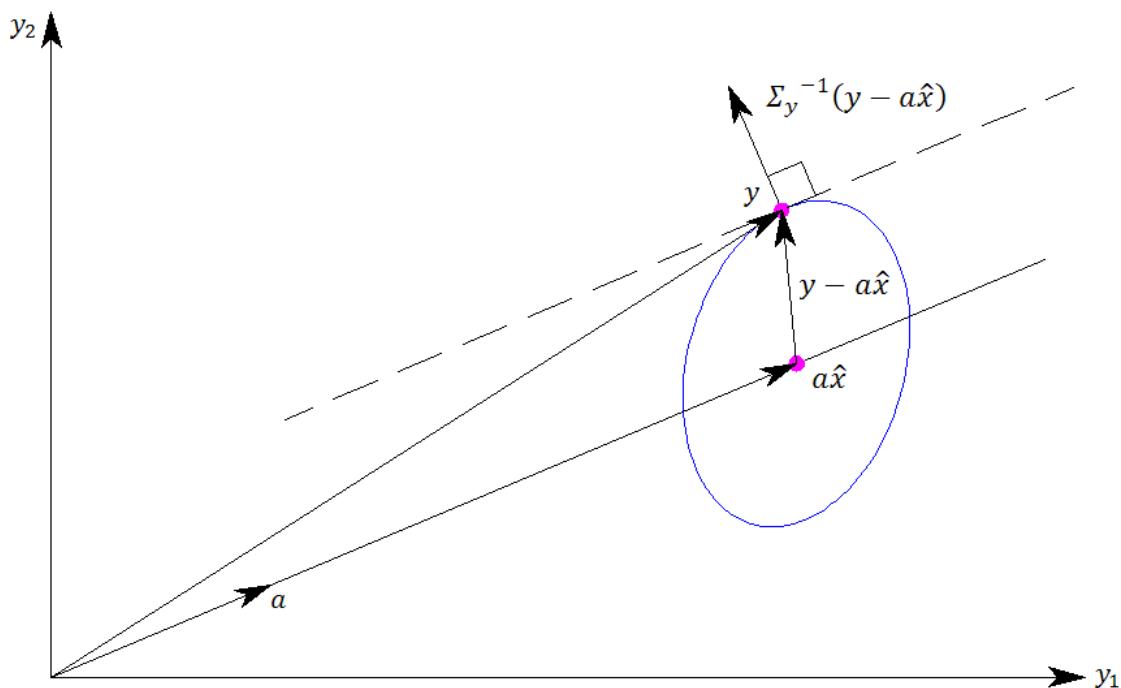


Figura 2.17 – Estimador  $\hat{x}$  de máxima verossimilhança e a linha  $\Sigma_y^{-1}(y - a\hat{x})$  normal a elipse.  
Fonte: Adaptado de Teunissen (2003)

A linha dada por  $\Sigma_y^{-1}(y - a\hat{x})$ , normal a elipse, é, portanto, ortogonal a linha tangente a elipse no ponto dado pelo vetor das observações  $y$ . Mas a linha tangente a elipse neste ponto é paralela a linha com direção dada pelo vetor  $a$  (TEUNISSEN, 2003).

Logo, pela condição de ortogonalidade entre os vetores  $a$  e  $\Sigma_y^{-1}(y - a\hat{x})$ , resulta em  $a^T \Sigma_y^{-1}(y - a\hat{x}) = 0$ , o que demonstra mais uma vez que, para o caso em que o vetor das observações  $y$  segue distribuição normal, o estimador  $\hat{x}$  de máxima verossimilhança e o estimador por mínimos quadrados com  $W = \Sigma_y^{-1}$  são idênticos, pois no MMQ, a mesma condição  $A_{uxn}^T W_{nxn} (y_{nx1} - A_{nxu} \hat{x}_{ux1}) = 0$ , já apresentada anteriormente em (2.18), deve ser satisfeita.

Estas são as principais características e propriedades do método de estimação por mínimos quadrados, que assume que os únicos erros que contaminam as observações são de natureza aleatória, e desta forma, adota como solução para os parâmetros incógnitos do modelo aquela que minimiza a soma ponderada destes erros.

Neste capítulo, assumiu-se que o vetor das observações segue distribuição normal multivariada, e que apenas erros de natureza aleatória contaminam as observações, ou seja, não existem erros grosseiros e/ou sistemáticos não parametrizados no modelo matemático.

Quando estas condições são satisfeitas, conforme apresentado, o estimador por mínimos quadrados para os parâmetros incógnitos do modelo coincide com o seu estimador por máxima verossimilhança, além de ser dito o melhor estimador linear imparcial (BLUE).

No próximo capítulo, serão abordados os testes de hipóteses para a detecção e a identificação (localização) de erros (não aleatórios) nas observações, ou seja, para quando estes pressupostos que foram estabelecidos, na prática, não são de fato obedecidos.

### 3 TESTES ESTATÍSTICOS PARA DETECÇÃO E IDENTIFICAÇÃO DE ERROS

No capítulo anterior, foi abordado o ajustamento de observações pelo método dos mínimos quadrados, utilizando os princípios determinísticos da ortogonalidade e da distância mínima. Posteriormente, foi assumido que o vetor das observações  $\underline{y}_{nx1}$  é um vetor aleatório, ou seja, cujas  $n$  componentes são variáveis aleatórias, seguindo, portanto, uma distribuição de probabilidade conjunta (ou seja, uma função densidade de probabilidade multivariada), completamente especificada pelos parâmetros vetor de médias (ou esperança matemática)  $E\{\underline{y}\}$ , e matriz de covariância  $\Sigma_y$ .

Entretanto, apenas foi assumido que a função densidade de probabilidade (fdp) do vetor das observações  $\underline{y}$  é a distribuição normal multivariada, e que, quando apenas erros aleatórios estão presentes no conjunto de observações, o estimador por mínimos quadrados dos parâmetros é dito ser o melhor estimador linear imparcial, além de coincidir com o estimador por máxima verossimilhança, quando a matriz peso é escolhida como  $W = \Sigma_y^{-1}$ .

Na prática, entretanto, as observações podem estar contaminadas não apenas pelos inevitáveis erros aleatórios, inerentes ao processo experimental de medições, mas também por erros sistemáticos e/ou grosseiros. A etapa de detecção e identificação de erros (não aleatórios) nas observações pode ser realizada antes ou depois do ajustamento por mínimos quadrados ser realizado (KAVOURAS, 1982).

Neste capítulo, será abordada a detecção e também a identificação (localização) de erros nas observações, após o ajustamento por mínimos quadrados ter sido realizado, por meio de testes de hipóteses estatísticos, sendo esta a metodologia empregada nos denominados procedimentos de testes convencionais para detecção de *outliers* - *conventional outliers detection test procedures* (BERBER; HEKIMOGLU, 2003).

#### 3.1 Conceitos Básicos em Testes de Hipóteses

Antes de apresentar os testes de hipóteses para a detecção e a identificação de erros no ajustamento, algumas definições de conceitos básicos se fazem necessárias.

Inicialmente, de acordo com Leick (2004):

- Observação: Uma observação (medida), ou um evento estatístico, é o resultado de um experimento estatístico, como por exemplo, a medição de uma distância;
- Variável aleatória: Uma variável aleatória é o resultado de um evento estatístico (ou seja, de uma observação). Uma variável aleatória pode ser de natureza discreta ou contínua (observação: neste trabalho, assume-se que todas as variáveis aleatórias tratadas são de natureza contínua). Um vetor aleatório é um vetor cujas componentes são variáveis aleatórias;
- População: Uma população é a totalidade de todos os eventos. Ela inclui todos os possíveis valores que uma variável aleatória pode assumir. A população é descrita por um conjunto finito de parâmetros, denominados parâmetros populacionais. A distribuição normal multivariada, por exemplo, descreve uma população de eventos e é completamente especificada pelos parâmetros vetor de médias e matriz de covariância;
- Amostra: Uma amostra é um subconjunto da população. Por exemplo, se uma mesma distância é medida (observada) dez vezes, então estas dez observações formam uma amostra (subconjunto) de todas as medidas possíveis deste experimento (ou seja, da população deste evento estatístico);
- Estatística: Uma estatística representa uma estimativa de parâmetros populacionais, ou uma função destes parâmetros. Ela é obtida a partir de uma amostra da população. Por exemplo, se uma mesma distância é medida dez vezes, então a média amostral destas dez observações pode ser utilizada para estimar a média populacional deste experimento. O estimador é a média amostral, e a estimativa é valor numérico da média amostral, obtido em função da amostra observada;
- Probabilidade: A probabilidade está relacionada com a freqüência de ocorrência de um evento (observação) em específico. No caso de variáveis aleatórias contínuas, cada intervalo numérico  $[a, b]$  no qual a variável aleatória

$\underline{x}$  pode estar contida tem uma probabilidade de ocorrência associada, definida por  $P(a \leq \underline{x} \leq b)$ , e esta sempre está contida entre  $0 \leq P(a \leq \underline{x} \leq b) \leq 1$ ;

- Função densidade de probabilidade: A função densidade de probabilidade (fdp) relaciona a probabilidade dos possíveis valores de uma variável aleatória contínua  $\underline{x}$ . Se  $f(\underline{x})$  denota a função densidade de probabilidade de  $\underline{x}$ , então:

$$P(a \leq \underline{x} \leq b) = \int_a^b f(\underline{x})dx \quad (3.1)$$

é a probabilidade desta variável aleatória  $\underline{x}$  assumir um valor dentro do intervalo contínuo  $[a, b]$  (para maiores detalhes sobre fdp, ver LEICK, 2004).

Um vetor aleatório também segue uma função densidade de probabilidade, porém multivariada, sendo uma distribuição de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias que o compõem. Para maiores detalhes sobre funções densidade de probabilidade, bem como as distribuições de probabilidade que serão abordadas neste capítulo (distribuição normal, distribuição normal multivariada, distribuição qui-quadrado, distribuição F) sugere-se Baarda (1968), Breiman (1973), Gosh (1973), Koch (1999) e Ghilani e Wolf (2006).

Segundo Larson (1974), uma hipótese é simplesmente uma suposição sobre a lei de probabilidade da população de uma variável aleatória que pode ser amostrada, ou seja, observada. A hipótese pode ser formulada sobre os parâmetros da função densidade de probabilidade da população, ou sobre a própria forma de distribuição de probabilidade da população em questão. O teste de uma hipótese, então, consiste em amostrar uma população (ou seja, coletar observações), e, com base nesta amostra (tomada aleatoriamente, de maneira não tendenciosa), decidir entre rejeitar ou não a hipótese estabelecida sobre a fdp da população em estudo.

Em outras palavras, um teste de hipótese consiste em dividir o espaço amostral (conjunto de todos os resultados possíveis para o experimento) em duas partes, denominadas região de rejeição (região crítica) e região de aceitação (ou de não rejeição) da hipótese de teste. Se a estatística calculada, em função da amostra, se situar dentro da região crítica, rejeita-se a hipótese em questão. Caso contrário, não há evidências, na amostra observada, para rejeitar a hipótese formulada (LARSON, 1974).

Portanto, quando o teste de uma hipótese estatística é realizado e uma decisão é tomada, podem-se cometer dois tipos de erro na decisão (MAGALHÃES; LIMA, 2005):

- Erro tipo I: Rejeitar a hipótese de teste quando esta é de fato verdadeira;
- Erro tipo II: Não rejeitar a hipótese de teste quando esta de fato é falsa;

A probabilidade de se cometer o erro tipo I é dada por  $\alpha$  (nível de significância do teste), e a probabilidade de se cometer o erro tipo II é dada por  $\beta$ . Designando a hipótese que se deseja testar por  $H_0$  (hipótese nula), estas definições são formalmente definidas por (MAGALHÃES; LIMA, 2005):

$$\begin{cases} \alpha = P(\text{erro tipo I}) = P(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ verdadeira}) \\ \beta = P(\text{erro tipo II}) = P(\text{não rejeitar } H_0 | H_0 \text{ falsa}) \end{cases} \quad (3.2)$$

Desta forma, a Figura 3.1 apresenta as quatro possíveis situações e as decisões envolvidas em um teste de hipótese.

		Situação	
		$H_0$ Verdadeira	$H_0$ Falsa
Decisão	Rejeitar $H_0$	<b>Erro Tipo I</b>	<b>Sem Erro</b>
	Não Rejeitar $H_0$	<b>Sem Erro</b>	<b>Erro Tipo II</b>

Figura 3.1 – Erros e decisões associados ao teste de uma hipótese nula  $H_0$ .

Fonte: Adaptado de Magalhães e Lima (2005)

Pela definição do erro tipo II (não rejeitar a hipótese nula quando de fato ela é falsa), para se calcular a probabilidade  $\beta$  de cometer o erro tipo II, é necessário ainda definir uma segunda hipótese  $H_A$ , que contradiz as suposições formuladas na hipótese nula, sendo esta última denominada de hipótese alternativa (LARSON, 1974).

Desta forma, o espaço amostral é dividido em uma região de aceitação (ou não rejeição) de  $H_0$ , e em uma região de rejeição de  $H_0$  (ou de aceitação de  $H_A$ ).

Por exemplo, em um experimento, deseja-se determinar a distância entre dois pontos, com base em uma amostra de  $n$  observações. Na hipótese nula  $H_0$ , assume-se que a distância entre os dois pontos segue distribuição normal com média  $\mu = \mu_0$  e variância conhecida  $\sigma^2$ , e

na hipótese alternativa  $H_A$ , assume-se que a distância entre os dois pontos segue distribuição normal com média  $\mu = \mu_A$  e (a mesma) variância conhecida  $\sigma^2$ .

Definindo uma região de aceitação e uma região de rejeição para a hipótese nula, as probabilidades do erro tipo I e do erro tipo II são visualizadas por meio da Figura 3.2.

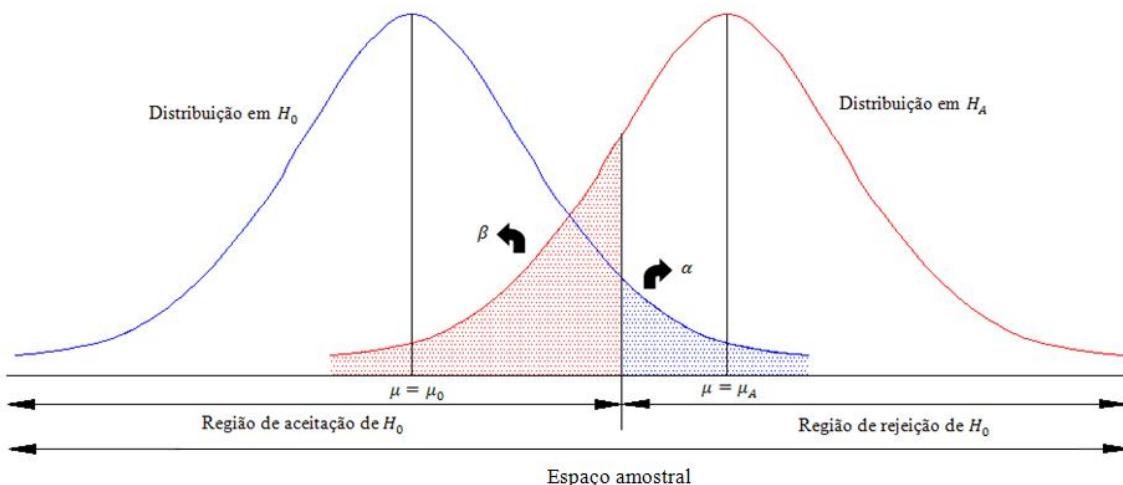


Figura 3.2 – Interpretação gráfica do erro tipo I e do erro tipo II.  
Fonte: Adaptado de Ghilani e Wolf (2006)

Analizando a Figura 3.2, nota-se que, aumentando a região de aceitação de  $H_0$ , diminui-se  $\alpha$  (probabilidade do erro tipo I), entretanto, aumenta-se  $\beta$  (probabilidade do erro tipo II). De maneira análoga, aumentando a região de rejeição de  $H_0$ , diminui-se  $\beta$ , mas, em contrapartida, aumenta-se  $\alpha$ .

Isto ilustra o fato de que, geralmente, não é possível definir uma estratégia de teste que minimize, simultaneamente,  $\alpha$  e  $\beta$  (MAGALHÃES; LIMA, 2005).

Neste sentido, o problema de se definir uma estratégia de teste ótima se torna mais crítico, considerando ainda o poder do teste, definido por (GHILANI; WOLF, 2006):

$$\gamma = 1 - \beta \quad (3.3)$$

O poder de um teste é o complemento de  $\beta$ , ou em outras palavras, é a probabilidade de rejeitar a hipótese nula, quando de fato a hipótese nula é falsa.

Como aumentando o poder do teste  $\gamma$ , diminui-se  $\beta$ , e como diminuindo  $\beta$ , aumenta-se  $\alpha$ , aumentando o poder do teste, aumenta-se também o nível de significância  $\alpha$  do teste, ou seja, a probabilidade do erro tipo I (GHILANI; WOLF, 2006).

Frente a estas considerações sobre  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , a estratégia de teste pode então ser formulada de acordo com o princípio de Neyman-Pearson (BREIMAN, 1973).

O princípio de Neyman-Pearson afirma que, dentre todos os testes de hipóteses possíveis, com um mesmo nível de significância  $\alpha$  (probabilidade do erro tipo I), o teste mais poderoso é aquele que minimiza  $\beta$ , ou seja, maximiza o poder do teste  $\gamma$ , mantendo o nível de significância  $\alpha$  constante (BREIMAN, 1973).

Segundo Larson (1974), usualmente, as hipóteses  $H_0$  e  $H_A$  são então formuladas de forma que o erro mais importante, ou mais crítico, seja o erro tipo I, pois, fixando o nível de significância  $\alpha$  (ou seja, adotando o princípio de Neyman-Pearson), pode-se controlar a probabilidade do erro tipo I e torná-la tão pequena quanto for desejado.

Ainda segundo Larson (1974), o princípio de Neyman-Pearson, entretanto, só é válido para testes de hipóteses simples, ou seja, para hipóteses que especifiquem completamente a fdp da variável aleatória. Quando uma hipótese não especifica completamente a fdp da variável aleatória em questão (ou do vetor aleatório), trata-se de uma hipótese composta.

Por exemplo, assumindo que uma variável aleatória segue distribuição normal com variância conhecida, se forem formuladas hipóteses sobre sua média populacional da forma:  $H_0: \mu = \mu_0$  contra  $H_A: \mu = \mu_A$ , trata-se de um teste de hipóteses simples. Caso sejam formuladas hipóteses sobre a média populacional da forma:  $H_0: \mu = \mu_0$  contra  $H_A: \mu > \mu_0$ , testa-se uma hipótese nula, simples, contra uma hipótese alternativa composta, pois a fdp da variável aleatória não está completamente especificada em  $H_A$  (qualquer valor para a média populacional, da forma  $\mu > \mu_0$ , é permitido nesta hipótese alternativa).

Frente a estas considerações, quando a hipótese nula e/ou a hipótese alternativa forem hipóteses compostas, o critério de teste da razão de verossimilhança geralmente conduz ao teste cuja probabilidade do erro tipo II é mínima (ou seja, ao teste mais poderoso), para um dado valor fixo de  $\alpha$  (LARSON, 1974).

Portanto, como será visto nas próximas seções, para os testes de detecção e identificação de erros nas observações, onde se estabelecem hipóteses compostas, o critério de teste utilizado será a razão de verossimilhança, definido a seguir.

Considerando agora uma hipótese nula  $H_0$  para os parâmetros da distribuição de probabilidade populacional de um vetor de observações  $\underline{y}$ , e uma hipótese alternativa  $H_A$  para estes parâmetros, de forma que a hipótese nula esteja contida dentro da hipótese alternativa (ou seja, o espaço amostral de  $H_0$  é um subconjunto do espaço amostral de  $H_A$ ), a razão de verossimilhança entre  $H_0$  e  $H_A$  é definida por (BREIMAN, 1973):

$$\lambda(\underline{y}) = \frac{\max p(\underline{y}|H_0)}{\max p(\underline{y}|H_A)} \quad (3.4)$$

Onde o numerador corresponde ao máximo da fdp do vetor das observações  $\underline{y}$  sobre a hipótese nula  $H_0$ , e o denominador corresponde ao máximo da fdp do vetor das observações  $\underline{y}$  sobre a hipótese alternativa  $H_A$ .

Como a hipótese nula deve ser formulada de forma que o seu espaço amostral esteja contido no espaço amostral da hipótese alternativa, a razão de verossimilhança nunca apresentará valor superior a 1, ou seja,  $0 \leq \lambda(\underline{y}) \leq 1$  (BREIMAN, 1973).

Além disso, como a razão de verossimilhança tende a apresentar valores relativamente grandes quando a probabilidade de  $H_0$  ser verdadeira é alta, e valores relativamente pequenos quando a probabilidade de  $H_0$  ser verdadeira é baixa, o critério de teste para a razão de verossimilhança torna-se (BREIMAN, 1973):

$$\text{Não rejeitar } H_0 \text{ se } \lambda(\underline{y}) \geq c \quad (3.5)$$

Onde  $c$  é uma constante positiva ( $c > 0$ ), fixada como um valor crítico para o teste, e, portanto, definindo a região de rejeição e a região de não rejeição de  $H_0$ , de acordo com o nível de significância  $\alpha$  que foi estipulado (BREIMAN, 1973).

Desta forma, conhecendo a distribuição de probabilidade resultante da razão de verossimilhança  $\lambda(\underline{y})$ , e fixando o nível de significância  $\alpha$  do teste, pode-se encontrar o valor crítico para a constante  $c$  com o uso de alguma tabela estatística.

Encerrando esta seção, a Figura 3.3 apresenta um resumo das etapas envolvidas na realização de um teste de hipóteses, segundo o critério da razão de verossimilhança.

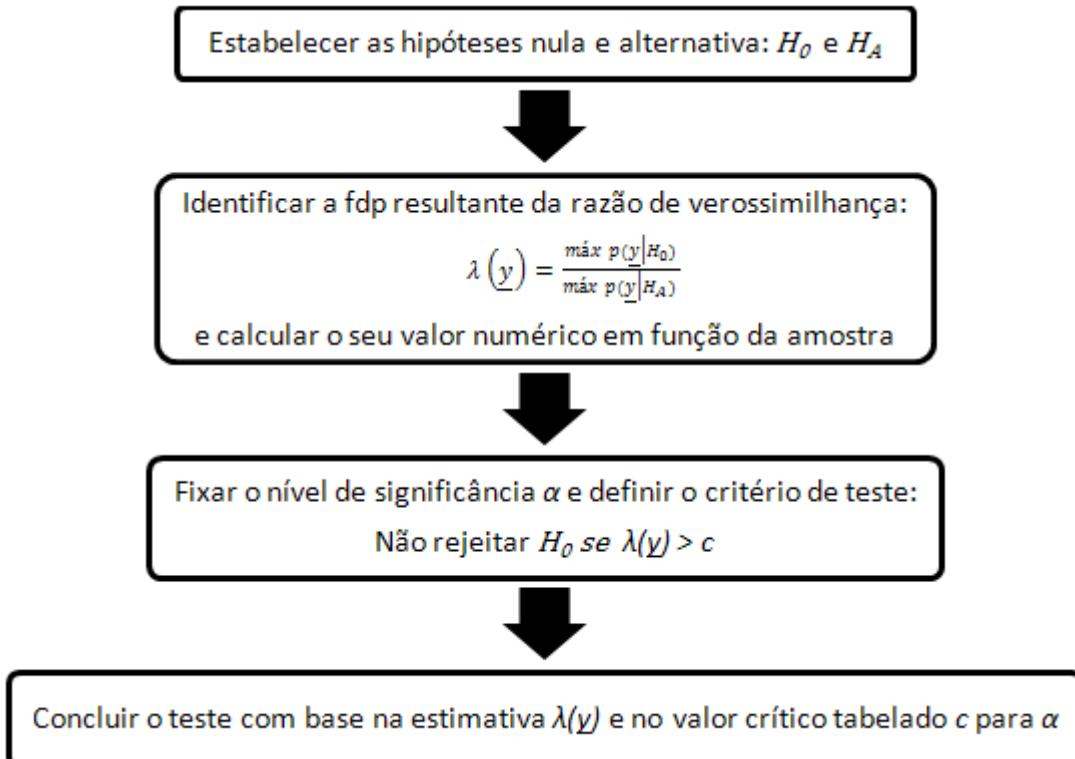


Figura 3.3 – Etapas de um teste de hipóteses segundo a razão de verossimilhança.

É importante ressaltar que, o teste é apenas um indicativo se a hipótese nula é verdadeira ou não, com base na estatística calculada (em função da amostra), e do nível de significância  $\alpha$  que foi arbitrado (probabilidade do erro tipo I). Um teste de hipóteses estatístico nunca prova em definitivo se a hipótese nula é verdadeira ou falsa.

É importante ressaltar também que, ao invés de adotar o princípio de Neyman-Pearson, e utilizar o critério da razão de verossimilhança, pode-se empregar outro critério de teste, como por exemplo, minimizar a soma de  $\beta$  e  $\alpha$ , ou então, utilizar métodos baseados na inferência bayesiana (ver, por exemplo, BREIMAN, 1973, e também, ARNOLD, 1981).

Para maiores detalhes sobre testes de hipóteses, bem como a razão de verossimilhança, sugere-se Breiman (1973), Larson (1974), Magalhães e Lima (2005) e Teunissen (2006).

### 3.2 Testes de Hipóteses em Modelos Lineares: Caso Geral

Na seção anterior foram apresentados os principais aspectos envolvidos em um teste de hipóteses estatísticas, e, em particular, quando se adota o princípio de Neyman-Pearson e se utiliza o critério da razão de verossimilhança. Nesta seção, será abordado o caso geral de

teste de hipóteses em modelos lineares, no ajustamento de observações pelo método paramétrico. Uma abordagem mais ampla, considerando também o método dos correlatos, é obtida em Teunissen (2006).

Deste caso geral de testes de hipóteses em modelos lineares (ver a expressão (2.3)), será derivado o teste para a detecção de erros nas observações (teste global do ajustamento), bem como o procedimento de teste para a identificação de observações suspeitas de estarem contaminadas por erros (procedimento de teste *data snooping*).

Para o caso de modelos inicialmente não lineares em relação aos parâmetros, deve ser utilizada a sua forma linearizada de ajustamento, por meio do denominado modelo de Gauss-Markov, conforme visto no capítulo anterior (ver a expressão (2.62)).

Inicialmente, assumindo que o vetor das observações  $\underline{y}_{nx1}$  segue distribuição normal multivariada, com esperança matemática dada por  $E\{\underline{y}_{nx1}\} = A_{nxu}\underline{x}_{ux1}$  e matriz de covariância conhecida e dada por  $\Sigma_{y_{nxn}}$ , supondo que as observações estão isentas de erros grosseiros e/ou sistemáticos (ou seja, apenas erros aleatórios estão presentes no conjunto de observações), a seguinte hipótese nula pode ser formulada (TEUNISSEN, 2006):

$$H_0: E\{\underline{y}_{nx1}\} = A_{nxu}\underline{x}_{ux1} \quad (3.6)$$

Pois, do capítulo anterior, quando somente erros aleatórios contaminam o vetor das observações, tem-se que  $E\{\underline{e}\} = 0$ , o que resulta em  $E\{\hat{\underline{x}}\} = \underline{x}$  e em  $E\{\hat{\underline{y}}\} = E\{\underline{y}\} = A\underline{x}$ , e, desta forma, os estimadores  $\hat{\underline{x}}$  e  $\hat{\underline{y}}$  são ditos imparciais.

Importante salientar que na hipótese nula formulada em (3.6), não se faz nenhuma suposição sobre a matriz de covariância  $\Sigma_{y_{nxn}}$  do vetor das observações  $\underline{y}_{nx1}$ , pois se assume que esta é conhecida e bem determinada, o que na prática nem sempre ocorre.

Diversas hipóteses alternativas podem ser formuladas sobre a hipótese nula definida em (3.6). Num caso geral, pode-se adicionar  $q$  parâmetros ao sistema de equações lineares, dados pelo vetor  $\nabla_{qx1}$ . Estes parâmetros adicionais devem contradizer as suposições formuladas na hipótese nula, podendo indicar, portanto, a presença de erros grosseiros e/ou sistemáticos no conjunto de observações.

O objetivo de se introduzir mais parâmetros ao modelo é verificar se estes parâmetros são significativos ou não. Desta forma, um teste de hipóteses entre a hipótese nula e a hipótese alternativa será um indicador de que apenas erros aleatórios estão presentes no

conjunto de observações, ou, que de forma contrária, existem parâmetros adicionais (erros não aleatórios) estatisticamente significativos. Portanto, um teste de hipóteses para modelos lineares testa (TEUNISSEN, 2006):

$$\begin{aligned} H_0: E \left\{ \underline{y}_{nx1} \right\} &= A_{nxu} x_{ux1} \text{ contra} \\ H_A: E \left\{ \underline{y}_{nx1} \right\} &= A_{nxu} x_{ux1} + C_{y_{nxq}} \nabla_{qx1}; \quad \nabla_{qx1} \neq 0_{qx1} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Onde a matriz  $C_{y_{nxq}}$  define o modelo de erro adotado e deve ser estipulada, tal como a matriz *design*  $A_{nxu}$ . A dimensão do vetor  $\nabla_{qx1}$  deve estar compreendida entre  $1 \leq q \leq n - u$ , pois, se  $q = 0$ , a matriz  $C_{y_{nxq}}$  não existe e as hipóteses  $H_0$  e  $H_A$  se tornam idênticas, e se  $q > n - u$ , o número de incógnitas resultante ( $q + u$ ) do sistema em  $H_A$ , passa a ser maior do que o número de equações ( $n$ ).

Em outras palavras, não se pode detectar um número de erros (não aleatórios)  $q$  maior do que o número de graus de liberdade, ou seja, do que o número de observações redundantes do ajustamento ( $r = n - u$ ).

Ressalva-se que na hipótese alternativa, o vetor das observações ainda segue distribuição normal multivariada, pois as hipóteses apresentadas em (3.7) não são formuladas sobre a forma da distribuição de probabilidade, ou então sobre a matriz de covariância do vetor das observações, e sim, unicamente sobre a sua esperança matemática  $E \left\{ \underline{y} \right\}$ .

As hipóteses  $H_0$  e  $H_A$  formuladas em (3.7), são hipóteses compostas, pois, no ajustamento de observações pelo método paramétrico:  $u < n$  e  $u + q \leq n$ , ou seja,  $H_0$  não admite solução única e  $H_A$  só admite solução única quando  $u + q = n$ . Em outras palavras, a esperança matemática de  $\underline{y}$  não é completamente especificada em  $H_0$  e  $H_A$ , pois o verdadeiro vetor dos parâmetros  $x$ , bem como o verdadeiro vetor  $\nabla$ , são desconhecidos na prática.

Desta forma, o teste estatístico para estas duas hipóteses compostas em (3.7), formulado a seguir, será baseado na razão de verossimilhança.

Na hipótese nula, o vetor das observações  $\underline{y}_{nx1}$  segue distribuição normal multivariada, com a sua função densidade de probabilidade em  $H_0$  sendo dada por:

$$p(y|x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Sigma_y|^{-\frac{1}{2}} e^{\left\{ \frac{-1}{2} (y - Ax)^T \Sigma_y^{-1} (y - Ax) \right\}} \tag{3.8}$$

Na hipótese alternativa, a função densidade de probabilidade de  $\underline{y}_{nx1}$  torna-se:

$$p(y|x, \nabla) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Sigma_y|^{-\frac{1}{2}} e^{\left\{ -\frac{1}{2} (y - Ax - C_y \nabla)^T \Sigma_y^{-1} (y - Ax - C_y \nabla) \right\}} \quad (3.9)$$

Para  $H_0$  e  $H_A$ , o teste da razão de verossimilhança é dado por (TEUNISSEN, 2006):

$$\begin{cases} \text{rejeitar } H_0 \text{ se } \frac{\max p(y|x)}{\max p(y|x, \nabla)} \leq c \\ \text{não rejeitar } H_0 \text{ se } \frac{\max p(y|x)}{\max p(y|x, \nabla)} > c \end{cases} \quad (3.10)$$

Onde  $c$  é uma constante não negativa. O princípio do teste da razão de verossimilhança é intuitivo: A razão de verossimilhança, definida em (3.10), tende a ser pequena quando a hipótese nula não é verdadeira, pois o denominador  $\max p(y|x, \nabla)$  tende a ser maior que o numerador  $\max p(y|x)$ , e desta forma, é provável que a rejeição de  $H_0$  em favor de  $H_A$  seja uma decisão correta.

Nota-se que o espaço amostral da hipótese nula está contido dentro do espaço amostral da hipótese alternativa, pois as duas hipóteses se tornam idênticas quando  $q = 0$ , ou seja, o critério de teste está formulado corretamente, de acordo com a seção anterior (pois a constante  $c$  está definida entre  $0 \leq c \leq 1$ ).

Teunissen (2006) afirma que, geralmente, o teste da razão de verossimilhança é um teste ótimo, ressaltando, porém, suas desvantagens: Nem sempre é fácil achar o máximo de uma função densidade de probabilidade, ou a fdp resultante de uma razão de verossimilhança, para poder estipular o nível de significância  $\alpha$  e o poder do teste  $\gamma$ .

Em particular, para os casos aqui considerados (hipóteses compostas na detecção e identificação de erros no ajustamento de observações), o teste da razão de verossimilhança é o teste uniformemente mais poderoso, para um dado nível de significância  $\alpha$ , ou seja, é o critério de teste adotado de acordo com o princípio de Neyman-Pearson.

Um teste uniformemente mais poderoso é um teste cuja probabilidade máxima de rejeitar  $H_0$ , quando ela é verdadeira, seja  $\alpha$ , e, que, ao mesmo tempo, maximize a probabilidade de rejeitar  $H_0$  quando ela é falsa (ou seja, maximize o poder do teste  $\gamma$ ), e não existe para todos os problemas (TEUNISSEN, 2006). Uma definição mais rigorosa de testes uniformemente mais poderosos e uma prova matemática são obtidas em Arnold (1981).

Retornando a função densidade de probabilidade do vetor das observações na hipótese nula, e denotando por  $\hat{x}_0$  o vetor dos parâmetros que maximiza a fdp  $p(y|x)$  em  $H_0$ , ou seja, a estimativa de máxima verossimilhança para  $x$ , lembrando que o vetor dos parâmetros tem dimensão  $u$ , tem-se:

$$\max_{x \in R^u} p(y|x) = p(y|\hat{x}_0) \quad (3.11)$$

Conforme visto no capítulo anterior, para o caso em que o vetor das observações  $\underline{y}$  segue distribuição normal multivariada, e a matriz peso no ajustamento é escolhida como  $W = \Sigma_y^{-1}$ , a estimativa de máxima verossimilhança  $\hat{x}_0$  para o vetor dos parâmetros  $x_{ux1}$  é idêntica a estimativa por mínimos quadrados deste. Desta forma, a estimativa de máxima verossimilhança para o vetor dos erros aleatórios em  $H_0$  é dada por:

$$\hat{e}_0 = y - A\hat{x}_0 \quad (3.12)$$

Segue de (3.8) e (3.12) que, para este caso, o numerador do teste da razão de verossimilhança torna-se (TEUNISSEN, 2006):

$$\max p(y|x) = (2\pi)^{-n/2} |\Sigma_y|^{-1/2} e^{\left\{ -\frac{1}{2} \hat{e}_0^T \Sigma_y^{-1} \hat{e}_0 \right\}} \quad (3.13)$$

De maneira análoga, denotando por  $\hat{x}_A$  e  $\hat{\nabla}$  os vetores que maximizam a fdp  $p(y|x, \nabla)$  em  $H_A$  (estimativas de máxima verossimilhança de  $x$  e  $\nabla$ , respectivamente), e lembrando que o vetor  $x$  tem dimensão  $u$  e o vetor  $\nabla$  tem dimensão  $q$ , tem-se:

$$\max_{x \in R^u, \nabla \in R^q} p(y|x, \nabla) = p(y|\hat{x}_A, \hat{\nabla}) \quad (3.14)$$

Como o vetor das observações  $\underline{y}$  também segue distribuição normal multivariada, com matriz de covariância  $\Sigma_y$  em  $H_A$ , as estimativas de máxima verossimilhança  $\hat{x}_A$  e  $\hat{\nabla}$  para os vetores  $x$  e  $\nabla$  também são idênticas as estimativas por mínimos quadrados destes, quando a escolha da matriz peso é  $W = \Sigma_y^{-1}$ . Portanto, a estimativa de máxima verossimilhança para o vetor dos erros aleatórios em  $H_A$  é dada por (TEUNISSEN, 2006):

$$\hat{e}_A = y - (A : C_y) \begin{pmatrix} \hat{x}_A \\ \hat{\nabla} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Onde a matriz resultante do sistema é dada por  $(A : C_y) = [A_{nxu} \quad C_{y_{nxq}}]_{nxu+q}$ , e o vetor resultante dos parâmetros ajustados é dado por  $\begin{pmatrix} \hat{x}_A \\ \hat{\nabla} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{A_{ux1}} \\ \hat{\nabla}_{qx1} \end{bmatrix}_{u+qx1}$ .

Neste caso, o denominador do teste da razão de verossimilhança torna-se (TEUNISSEN, 2006):

$$\max p(y|x, \nabla) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Sigma_y|^{-\frac{1}{2}} e^{\left\{ \frac{-1}{2} \hat{e}_A^T \Sigma_y^{-1} \hat{e}_A \right\}} \quad (3.16)$$

De (3.16) e (3.13), segue que (TEUNISSEN, 2006):

$$\frac{\max p(y|x)}{\max p(y|x, \nabla)} = \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Sigma_y|^{-\frac{1}{2}} e^{\left\{ \frac{-1}{2} \hat{e}_0^T \Sigma_y^{-1} \hat{e}_0 \right\}}}{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Sigma_y|^{-\frac{1}{2}} e^{\left\{ \frac{-1}{2} \hat{e}_A^T \Sigma_y^{-1} \hat{e}_A \right\}}} = e^{\left\{ \frac{-1}{2} (\hat{e}_0^T \Sigma_y^{-1} \hat{e}_0 - \hat{e}_A^T \Sigma_y^{-1} \hat{e}_A) \right\}} \quad (3.17)$$

Como esta razão é menor do que uma constante positiva ( $c$ ) se, e somente se, o termo dentro do expoente do lado direito da equação (3.17) é maior do que uma constante positiva  $K$  (Figura 3.4), decorre que o teste da razão de verossimilhança de  $H_0$  contra  $H_A$  finalmente torna-se (TEUNISSEN, 2006):

$$\text{Rejeitar } H_0 \text{ se: } \hat{e}_0^T \Sigma_y^{-1} \hat{e}_0 - \hat{e}_A^T \Sigma_y^{-1} \hat{e}_A > K_\alpha \quad (3.18)$$

Onde, adotando o princípio de Neyman-Pearson,  $K_\alpha$  é o valor tabelado para o nível de significância  $\alpha$  estipulado e a distribuição de probabilidade resultante.

Nota-se que a estatística de teste em (3.18) não é mais a razão entre as funções densidade de probabilidade originais em  $H_0$  e  $H_A$ , e sim uma simplificação desta, sendo a diferença entre a soma ponderada do quadrado dos erros ajustados na hipótese nula e na hipótese alternativa. Trata-se, portanto, de uma variável aleatória unidimensional. Além disso, a constante  $K_\alpha$  não necessariamente se restringe mais ao intervalo  $0 \leq K \leq 1$ .

Nota-se também que a estatística calculada é sempre não-negativa, pois o vetor dos erros aleatórios ajustados em  $H_0$  ( $\hat{e}_0$ ) será sempre maior ou igual ao vetor dos erros aleatórios

ajustados em  $H_A$  ( $\hat{e}_A$ ), pois, se houverem erros não aleatórios nas observações, estes afetarão mais os erros estimados da hipótese nula, sendo devidamente parametrizados (ou seja, ajustados) pelo modelo linear da hipótese alternativa:  $\hat{y}_A = A\hat{x}_0 + C_y \hat{V}$ .

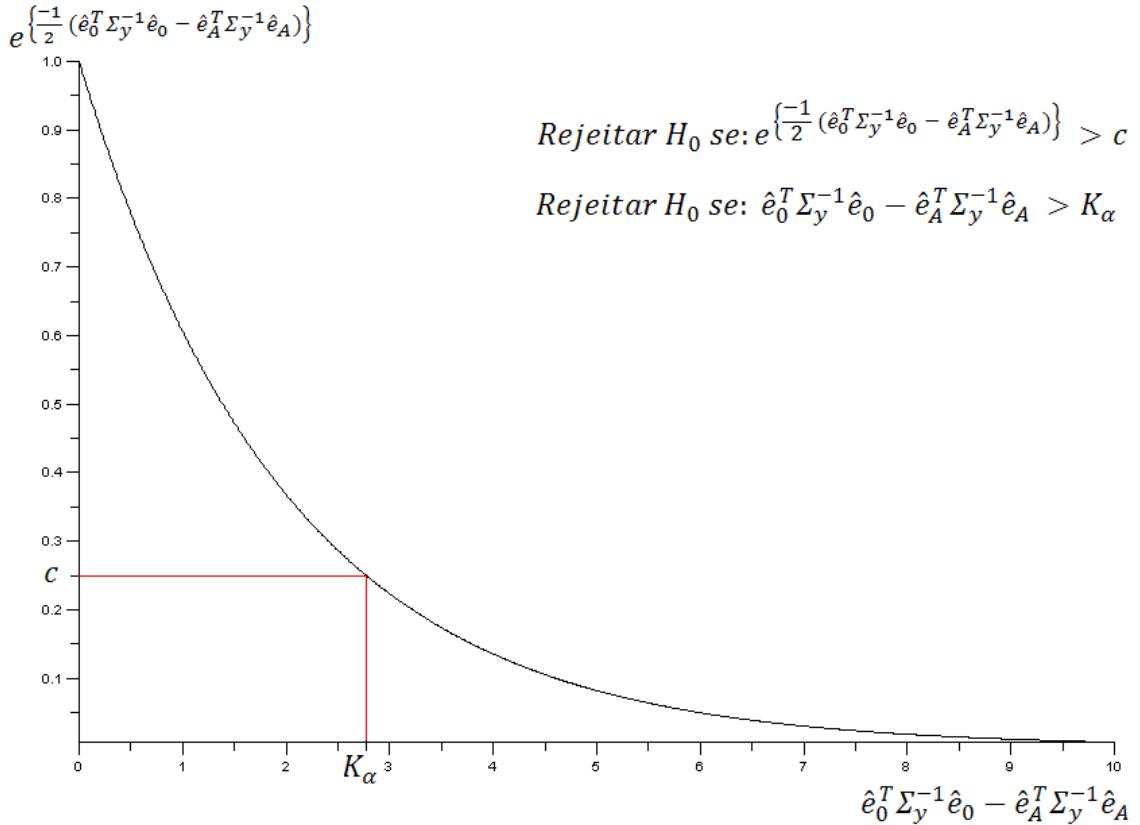


Figura 3.4 – Relação matemática entre as constantes  $c$  e  $K_\alpha$  do teste da razão de verossimilhança.

A estatística de teste em (3.18) está expressa em termos dos vetores dos erros ajustados  $\hat{e}_0$  e  $\hat{e}_A$  em  $H_0$  e  $H_A$ , respectivamente. Também é possível expressá-la em termos dos vetores das observações ajustadas na hipótese nula e na hipótese alternativa ( $\hat{y}_0$  e  $\hat{y}_A$ , respectivamente), pois, conforme visto, na estimação por mínimos quadrados:

$$\hat{y}_0 = A\hat{x}_0 = y - \hat{e}_0; \text{ e } \hat{y}_A = A\hat{x}_0 + C_y \hat{V} = y - \hat{e}_A \quad (3.19)$$

Combinando as expressões (3.18) e (3.19), e utilizando a propriedade do método dos mínimos quadrados, que afirma que  $A^T W(y - A\hat{x}) = A^T W\hat{e} = 0$ , ou seja, o vetor dos erros ajustados  $\hat{e} = y - A\hat{x}$  é ortogonal as colunas (vetores) de  $WA$  (detalhes em TEUNISSEN, 2006; e também no capítulo anterior de ajustamento de observações), é possível reescrever (3.18) como (TEUNISSEN, 2006):

$$\text{Rejeitar } H_0 \text{ se: } (\hat{y}_0 - \hat{y}_A)^T \Sigma_y^{-1} (\hat{y}_0 - \hat{y}_A) > K_\alpha \quad (3.20)$$

Analizando a expressão (3.20), nota-se que o teste da razão de verossimilhança faz sentido, pois, espera-se rejeitar  $H_0$  se o vetor das observações ajustadas  $\hat{y}_A$  em  $H_A$ , diferir consideravelmente do vetor das observações ajustadas  $\hat{y}_0$  em  $H_0$ , ou seja, se a estatística calculada  $(\hat{y}_0 - \hat{y}_A)^T \Sigma_y^{-1} (\hat{y}_0 - \hat{y}_A)$  for significativamente grande.

As expressões (3.18) e (3.20), do ponto de vista prático, não são muito atraentes, pois, para realizar o teste estatístico formulado nestas, deve-se realizar o ajustamento por mínimos quadrados tanto da hipótese nula quanto da hipótese alternativa da expressão (3.7).

Entretanto, o vetor das observações ajustadas  $\hat{y}_A$  em  $H_A$  pode ser expresso em função de  $\hat{y}_0$  e  $\hat{V}$ , usando os sistemas de equações normais em  $H_0$  e  $H_A$  e a propriedade do vetor dos erros ajustados  $\hat{e}_0$  de ser uma projeção oblíqua do vetor das observações  $y$  (detalhes em TEUNISSEN, 2006; e também no capítulo de ajustamento de observações), resultando em:

$$\hat{y}_A = \hat{y}_0 + \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} C_y \hat{V} \quad (3.21)$$

Onde  $\Sigma_{\hat{e}_0}$  é a matriz de covariância do vetor dos erros ajustados em  $H_0$ , dada pela expressão (2.49). Substituindo (3.21) em (3.20), resulta em (TEUNISSEN, 2006):

$$(\hat{y}_0 - \hat{y}_A)^T \Sigma_y^{-1} (\hat{y}_0 - \hat{y}_A) = \hat{V}^T C_y^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} C_y \hat{V} \quad (3.22)$$

Segundo Teunissen (2006),  $\Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} = \Sigma_{\hat{e}_0}$ , usando esta propriedade em (3.22), e substituindo (3.22) em (3.20), o teste se torna:

$$\text{Rejeitar } H_0 \text{ se: } \hat{V}^T C_y^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} C_y \hat{V} > K_\alpha \quad (3.23)$$

Analizando a expressão (3.23), novamente nota-se que o teste da razão de verossimilhança faz sentido, pois, espera-se rejeitar a hipótese nula se a norma do vetor dos erros não aleatórios  $\hat{V}$ , suposto ser nulo em  $H_0$ , for significativamente grande.

Teunissen (2006) também demonstra que  $\Sigma_{\hat{V}}^{-1} = C_y^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} C_y$ , de forma que  $\hat{e}_0^T \Sigma_y^{-1} \hat{e}_0 - \hat{e}_A^T \Sigma_y^{-1} \hat{e}_A = (\hat{y}_0 - \hat{y}_A)^T \Sigma_y^{-1} (\hat{y}_0 - \hat{y}_A) = \hat{V}^T C_y^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} C_y \hat{V} = \hat{V}^T \Sigma_{\hat{V}}^{-1} \hat{V}$ .

A expressão (3.23), para a estatística de teste da razão de verossimilhança, ainda requer o ajustamento por mínimos quadrados de  $H_A$ , também não sendo muito atraente do ponto de vista prático. Entretanto, é possível expressar o vetor  $\hat{V}$  em função do vetor dos erros ajustados  $\hat{e}_0$  em  $H_0$ , através da seguinte equação (TEUNISSEN, 2006):

$$\hat{V} = (C_y^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} C_y)^{-1} C_y^T \Sigma_y^{-1} \hat{e}_0 \quad (3.24)$$

Substituindo (3.24) em (3.23), o teste finalmente se torna:

$$Rejeitar H_0 \text{ se: } \hat{e}_0^T \Sigma_y^{-1} C_y (C_y^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} C_y)^{-1} C_y^T \Sigma_y^{-1} \hat{e}_0 > K_\alpha \quad (3.25)$$

A expressão (3.25) demonstra que o teste da razão de verossimilhança pode ser realizado apenas em função de  $\hat{e}_0$  e  $C_y$ , sem o conhecimento prévio das estimativas  $\hat{y}_A$ ,  $\hat{e}_A$  e  $\hat{V}$ , que deveriam ser obtidas por meio do cálculo da hipótese alternativa. Portanto, para aplicar o teste, basta realizar o cálculo da hipótese nula (ajustamento por mínimos quadrados convencional), e definir a matriz  $C_y$ , ou seja, o modelo de erro considerado.

O teste também pode ser expresso, no método dos correlatos, em função do vetor erro de fechamento (detalhes em TEUNISSEN, 2006).

Definindo a variável aleatória (estatística calculada em (3.25)) do teste da razão de verossimilhança por  $\underline{T}_q$ , para aplicar o teste, é necessário ainda conhecer a sua função densidade de probabilidade resultante.

Teunissen (2006), utilizando o vetor erro de fechamento do método dos correlatos, prova que, na hipótese nula, a variável aleatória  $\underline{T}_q$  segue distribuição qui-quadrado central com  $q$ -graus de liberdade (lembrando que  $1 \leq q \leq n - u$ ), e na hipótese alternativa, a variável aleatória  $\underline{T}_q$  segue distribuição qui-quadrado com  $q$ -graus de liberdade e um parâmetro de não centralidade  $\lambda = V^T C_y^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} C_y V$ , ou seja (TEUNISSEN, 2006; ver também a Figura 3.5):

$$H_0: \underline{T}_q \sim \chi^2_{(q,0)}; \quad H_A: \underline{T}_q \sim \chi^2_{(q,\lambda)}, \quad \lambda = V^T C_y^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} C_y V \quad (3.26)$$

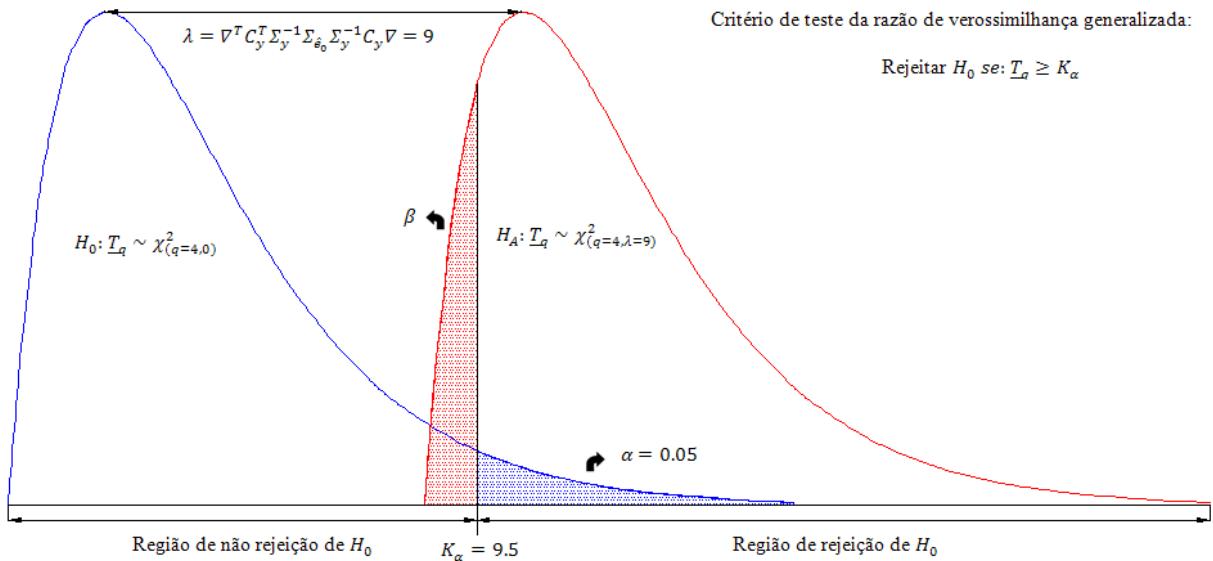


Figura 3.5 – Ilustração gráfica da estatística  $\underline{T}_q$  para  $q = 4$ ,  $\alpha = 0,05$  e  $\lambda = 9$ .

Para maiores detalhes sobre a distribuição de probabilidade qui-quadrado, sugere-se Gosh (1973) e Koch (1999). Desta estatística  $\underline{T}_q$  para o caso geral de testes de hipóteses em modelos lineares ( $1 \leq q \leq n - u$ ), serão derivados posteriormente os testes convencionais para a detecção ( $q = n - u$ , Teste Global do Ajustamento) e também a identificação ( $q = 1$ , procedimento *data snooping*) de erros não aleatórios nas observações.

É importante ressaltar que o vetor  $\nabla$  dos parâmetros adicionais ao modelo de  $H_0$  pode não necessariamente representar erros não aleatórios, mas também, parâmetros adicionais no modelo, os quais pode-se testar se são estatisticamente significativos.

Portanto, esta seção, conforme exposto, apresentou o caso geral de testes de hipóteses em modelos lineares, em especial na estimativa por mínimos quadrados, assumindo que esta coincide com a estimativa por máxima verossimilhança, quando a matriz peso é  $W = \Sigma_y^{-1}$ .

A seguir, será apresentada uma interpretação geométrica da estatística  $\underline{T}_q$  formulada nesta seção. Encerrando a definição deste caso geral, a Figura 3.6 apresenta um resumo do teste da razão de verossimilhança em modelos lineares, no ajustamento de observações pelo método paramétrico.

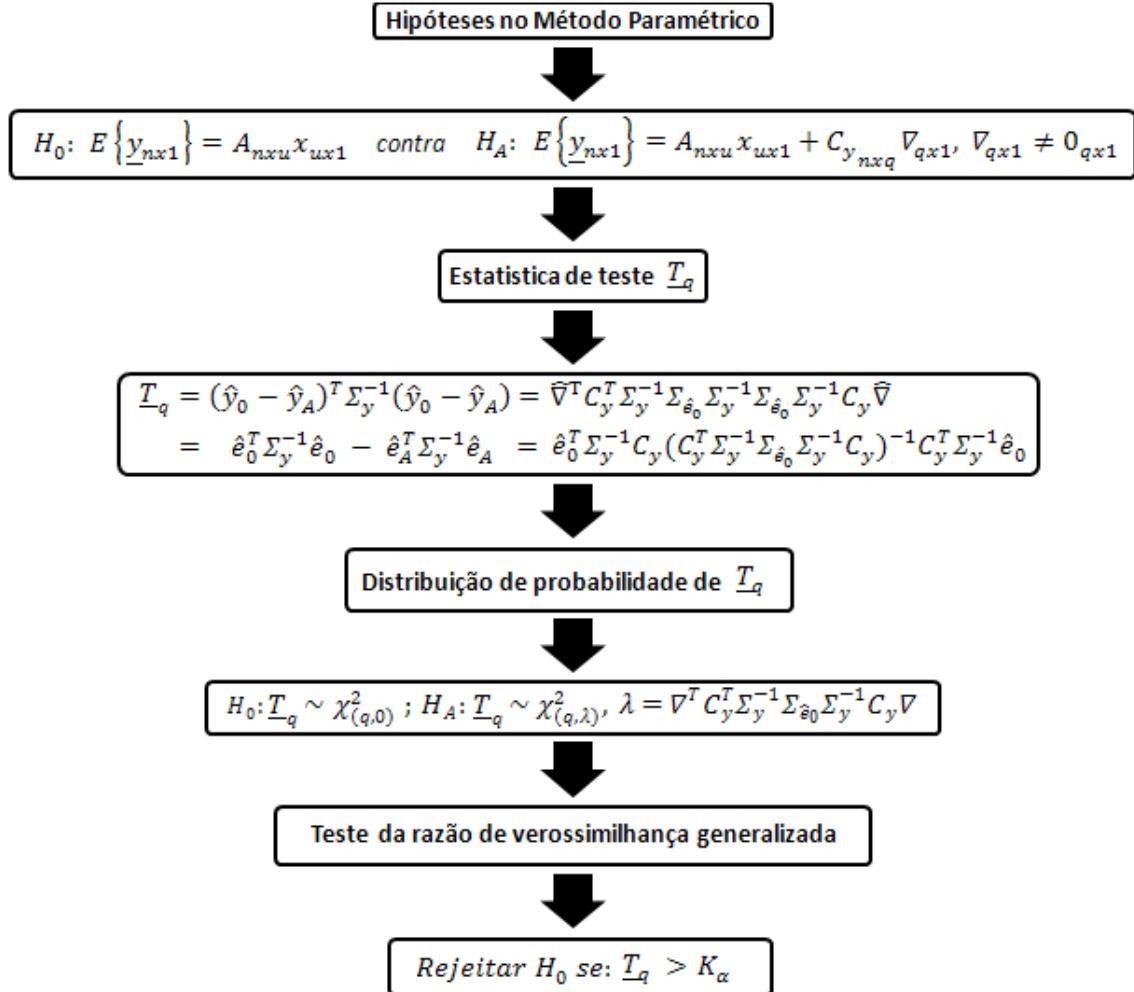


Figura 3.6 – Resumo da estatística  $\underline{T}_q$  e do teste da razão de verossimilhança em modelos lineares.

### 3.2.1 Interpretação Geométrica da Estatística $\underline{T}_q$

Na seção anterior, foi demonstrado algebricamente que a estatística  $\underline{T}_q$  do teste da razão de verossimilhança, em modelos lineares, pode ser expressa das seguintes formas:

$$\begin{aligned}
 \underline{T}_q &= \hat{e}_0^T \Sigma_y^{-1} \hat{e}_0 - \hat{e}_A^T \Sigma_y^{-1} \hat{e}_A \\
 &= (\hat{y}_0 - \hat{y}_A)^T \Sigma_y^{-1} (\hat{y}_0 - \hat{y}_A) \\
 &= \hat{v}^T C_y^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} C_y \hat{v} \\
 &= \hat{e}_0^T \Sigma_y^{-1} C_y (C_y^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} C_y)^{-1} C_y^T \Sigma_y^{-1} \hat{e}_0
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

O objetivo desta seção é apresentar uma interpretação geométrica das duas primeiras equações de (3.27), adaptada de Teunissen (2006). Para isto, primeiramente, recapitula-se as hipóteses estatísticas formuladas na seção anterior:

$$H_0: E\{\underline{y}_{nx1}\} = A_{nxu}x_{ux1} \text{ vs.} \quad (3.28)$$

$$H_A: E\{\underline{y}_{nx1}\} = A_{nxu}x_{ux1} + C_{y_{nxq}}\nabla_{qx1}, \nabla_{qx1} \neq 0_{qx1}$$

Assumindo que  $\text{rank } A = u$  e que  $\text{rank } (A : C_y) = u + q$ , as dimensões do espaço das colunas das matrizes  $A$  e  $(A : C_y)$  são, respectivamente:  $\text{dimR}(A) = u$  e  $\text{dimR}(A : C_y) = u + q$  (a definição de  $\text{rank}$  de uma matriz é apresentada na seção Número de Condições Mínimas e Injunções no Método Paramétrico, do capítulo anterior). Como as matrizes  $A$  e  $(A : C_y)$  possuem  $n$  linhas, os vetores (colunas) destas matrizes possuem  $n$  dimensões, ou seja, são elementos do espaço  $R^n$ .

Logo,  $R(A) \subset R^n$  e  $R(A : C_y) \subset R^n$ , pois  $u \leq u + q \leq n$ . Além disso, as colunas da matriz  $A$  podem ser expressas como combinações lineares das colunas da matriz  $(A : C_y)$ , o que decorre em  $R(A) \subset (A : C_y)$ , lembrando novamente que, quando  $q = 0$ ,  $H_0 = H_A$ .

Portanto, o espaço  $R(A)$  das colunas da matriz  $A$  é um subespaço linear do espaço  $R(A : C_y)$  das colunas da matriz  $(A : C_y)$  (TEUNISSEN, 2006).

Importante ressaltar que  $u = \text{dimensão do vetor } x$ , ou seja, número de parâmetros do modelo linear em  $H_0$ ,  $q = \text{dimensão do vetor } \nabla$ , ou seja, número de parâmetros adicionais ao modelo em  $H_A$  (no caso considerado, erros não aleatórios), e  $n = \text{dimensão do vetor } y$ , ou seja, o número de observações (medidas) realizadas.

Na expressão (3.28), a hipótese nula  $H_0: E\{\underline{y}\} = Ax$  afirma que a esperança do vetor das observações  $E\{\underline{y}\}$  pode ser escrita como uma combinação linear dos vetores (colunas) da matriz  $A$ . Isto implica que  $E\{\underline{y} | H_0\} \in R(A)$ . De maneira análoga, para a hipótese alternativa  $H_A$ , tem-se que  $E\{\underline{y} | H_A\} \in R(A : C_y)$ .

Todas estas conclusões podem ser resumidas em (TEUNISSEN, 2006):

$$\begin{cases} E\{\underline{y}_{nx1} | H_0\} \in R(A) \subset R(A : C_y) \subset \mathbb{R}^n ; E\{\underline{y}_{nx1} | H_A\} \in R(A : C_y) \subset \mathbb{R}^n \\ \dim R(A) = u ; \dim R(A : C_y) = u + q \end{cases} \quad (3.29)$$

Um esboço de (3.29) é apresentado na Figura 3.7 (para o caso:  $u = q = 1$ ).

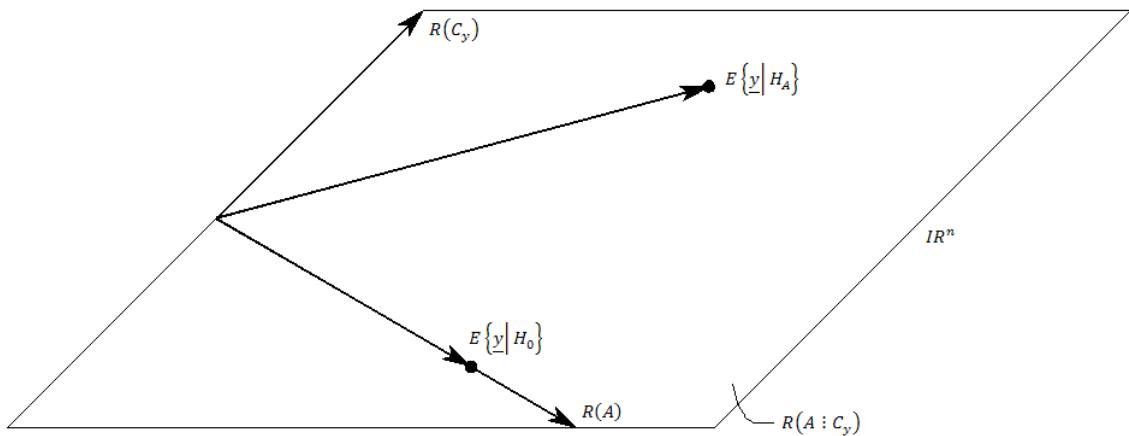


Figura 3.7 – As hipóteses  $H_0: E\{\underline{y}_{nx1} | H_0\}$  e  $H_A: E\{\underline{y}_{nx1} | H_A\}$  em  $R(A : C_y) \subset \mathbb{R}^n$ .  
Fonte: Adaptado de Teunissen (2006)

Do capítulo anterior sobre ajustamento de observações, foi demonstrado que o vetor das observações ajustadas  $\hat{y}$  é uma projeção oblíqua do vetor das observações  $y$ , no espaço das colunas da matriz *design*  $A$ , sendo esta projeção oblíqua decorrente do fato de se utilizar uma matriz peso  $W$  para as observações, pois, quando a matriz peso é tomada como sendo uma matriz identidade  $I$ , o vetor das observações ajustadas se torna, então, uma projeção ortogonal do vetor das observações, no espaço das colunas da matriz *design*  $A$ .

Teunissen (2003, 2006) afirma que o método dos mínimos quadrados ponderados (ou seja, com  $W \neq I$ ), também pode ser interpretado geometricamente como um método de projeção ortogonal, onde a ortogonalidade é medida em relação à métrica  $W$ . Ou seja, adotando a matriz peso ( $W$ ) como métrica (ponderando as observações, em função de suas variâncias e covariâncias, por exemplo),  $\hat{y}_0$  é a projeção ortogonal do vetor das observações  $\underline{y}$  no espaço das colunas da matriz  $A$  (com  $\hat{e}_0 = \underline{y} - \hat{y}_0$ ), e  $\hat{y}_A$  é a projeção ortogonal do vetor das observações  $\underline{y}$  no espaço das colunas da matriz  $[A : C_y]$  (com  $\hat{e}_A = \underline{y} - \hat{y}_A$ ), conforme ilustra a Figura 3.8:

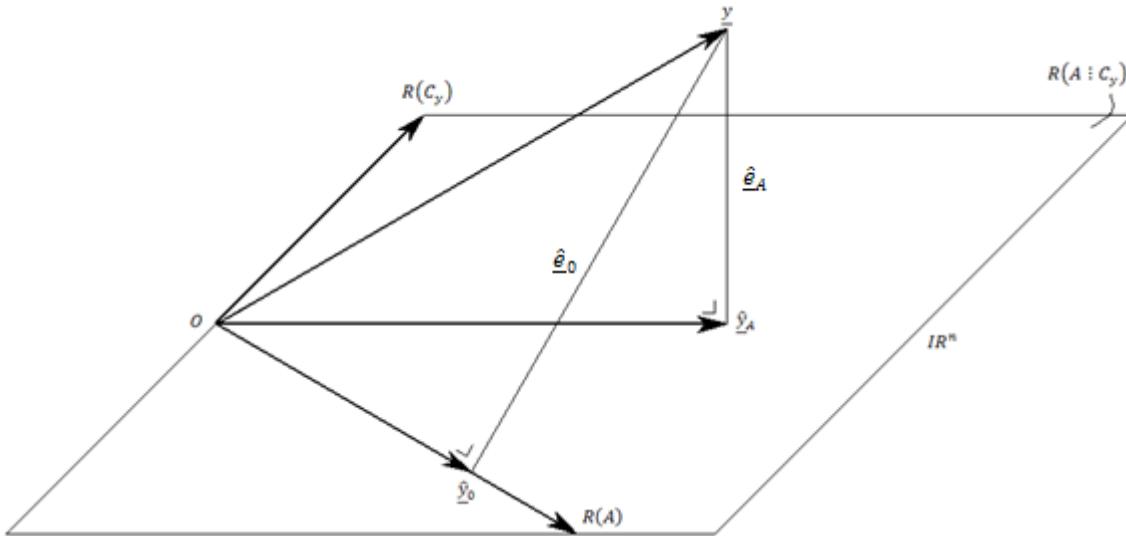


Figura 3.8 – Os vetores  $\underline{y}$ ,  $\hat{\underline{y}}_0$ ,  $\hat{\underline{y}}_A$ ,  $\hat{\underline{e}}_0$  e  $\hat{\underline{e}}_A$  no espaço  $R^n$ .  
Fonte: Adaptado de Teunissen (2006)

Na Figura 3.8,  $R(A) = u = 1$ , definindo uma reta;  $R(C_y) = q = 1$ , definindo outra reta;  $R(A : C_y) = u + q = 2$ , definindo um plano; e  $n = 3 > u + q$ , ou seja, o vetor das observações  $\underline{y}$  pertence a um espaço tridimensional  $IR^3$ , e suas projeções  $\hat{\underline{y}}_0$  e  $\hat{\underline{y}}_A$  estão contidas em um mesmo plano. Para fins de clareza, os vetores dos erros ajustados  $\hat{\underline{e}}_0$  e  $\hat{\underline{e}}_A$  (em  $H_0$  e  $H_A$ , respectivamente), estão representados em escala exagerada.

Como  $\hat{\underline{y}}_0$  é a projeção ortogonal do vetor das observações  $\underline{y}$  no espaço das colunas da matriz  $A$ , o vetor  $\hat{\underline{e}}_0 = \underline{y} - \hat{\underline{y}}_0$  também é ortogonal ao vetor  $\hat{\underline{y}}_0$  (relação semelhante ao método dos mínimos quadrados não ponderados do capítulo anterior, onde os vetores  $\hat{\underline{y}}$  e  $\hat{\underline{e}} = \underline{y} - \hat{\underline{y}}$  são projeções ortogonais de  $\underline{y}$  e, portanto, perpendiculares entre si). De maneira análoga, os vetores  $\hat{\underline{y}}_A$  e  $\hat{\underline{e}}_A = \underline{y} - \hat{\underline{y}}_A$  também são perpendiculares entre si.

Como  $\hat{\underline{e}}_A = \underline{y} - \hat{\underline{y}}_A$  é ortogonal ao vetor  $\hat{\underline{y}}_A$ , que está contido em  $R(A : C_y)$ ,  $\hat{\underline{e}}_A$  também é ortogonal ao vetor  $\hat{\underline{y}}_0$ , que está contido em  $R(A) \subset R(A : C_y)$ . A Figura 3.9 apresenta de maneira gráfica estas relações de ortogonalidade.

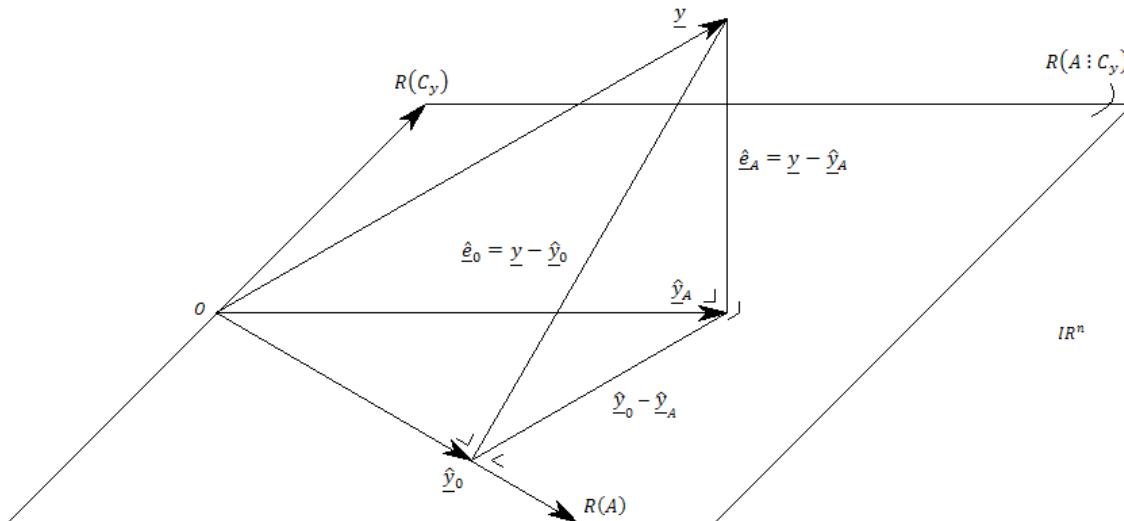


Figura 3.9 – O triângulo-retângulo  $\underline{y}$ ,  $\hat{\underline{y}}_0$  e  $\hat{\underline{y}}_A$  e as relações de ortogonalidade  $\perp$ .  
Fonte: Adaptado de Teunissen (2006)

Do triângulo retângulo formado pelos vértices  $\underline{y}$ ,  $\hat{\underline{y}}_0$  e  $\hat{\underline{y}}_A$  na Figura 3.9, e do teorema de Pitágoras, tem-se (lembrando que  $\hat{\underline{e}}_0 \geq \hat{\underline{e}}_A$ ):

$$\|\hat{\underline{e}}_0\|^2 - \|\hat{\underline{e}}_A\|^2 = \|\hat{\underline{y}}_0 - \hat{\underline{y}}_A\|^2 \quad (3.30)$$

Utilizando uma matriz peso para as observações como métrica, da forma  $W = \Sigma_y^{-1}$ , a expressão (3.30) torna-se (TEUNISSEN, 2006):

$$\hat{\underline{e}}_0^T \Sigma_y^{-1} \hat{\underline{e}}_0 - \hat{\underline{e}}_A^T \Sigma_y^{-1} \hat{\underline{e}}_A = (\hat{\underline{y}}_0 - \hat{\underline{y}}_A)^T \Sigma_y^{-1} (\hat{\underline{y}}_0 - \hat{\underline{y}}_A) \quad (3.31)$$

Nota-se então que a expressão (3.31) é igual às duas primeiras expressões para a estatística  $T_q$  em (3.27), como se queria demonstrar. Portanto, a Figura 3.10 ilustra como a estatística  $T_q = \|\hat{\underline{e}}_0\|^2 - \|\hat{\underline{e}}_A\|^2 = \|\hat{\underline{y}}_0 - \hat{\underline{y}}_A\|^2$  pode ser interpretada geometricamente, tendo em vista que a expressão (3.31) é um termo quadrático.

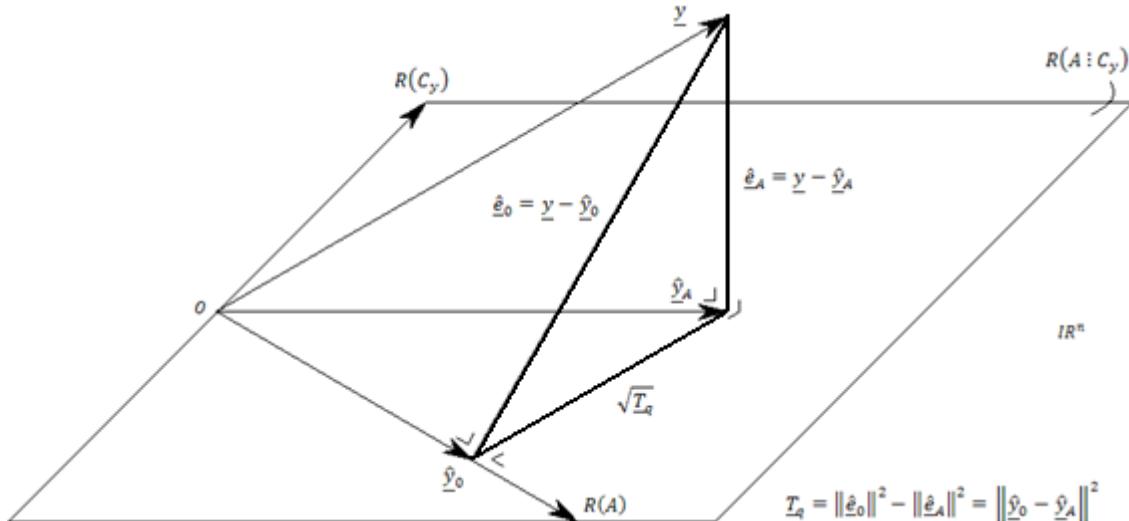


Figura 3.10 – Interpretação geométrica da estatística  $T_q$ .

Fonte: Adaptado de Teunissen (2006)

Analizando a Figura 3.10, nota-se que de fato a estatística  $T_q$  é uma medida de separabilidade entre a hipótese nula e a hipótese alternativa, que pode ser obtida tanto em função dos vetores das observações ajustadas  $\hat{y}_0$  e  $\hat{y}_A$ , quanto em função dos vetores dos erros ajustados  $\hat{e}_0$  e  $\hat{e}_A$ , em  $H_0$  e  $H_A$ , respectivamente.

Para o leitor interessado, em Teunissen (2006), encontra-se uma interpretação geométrica completa da estatística  $T_q$  em (3.27), considerando também outra expressão para  $T_q$ , utilizando o vetor erro de fechamento no método dos correlatos.

### 3.2.2 O Caso $q = 1$ e o Procedimento de Teste Data Snooping

Nas duas seções anteriores, foi apresentado o caso geral ( $1 \leq q \leq n - u$ ) para o teste da razão de verossimilhança em modelos lineares, bem como uma interpretação geométrica para a estatística  $T_q$ , obtida por meio deste teste.

Nesta seção, será abordado o caso particular  $q = 1$  e o procedimento de teste *data snooping* para a identificação (localização) de erros nas observações.

Desta forma, na expressão (3.28), quando  $q = 1$  (ou seja, apenas um parâmetro é adicionado ao modelo), a matriz  $C_{y_{nxq}}$  se reduz ao vetor  $c_{y_{nx1}}$ , e o vetor  $V_{qx1}$  se reduz ao escalar  $V_{1x1}$ . Portanto, as hipóteses formuladas neste teste se tornam:

$$H_0: E\{\underline{y}_{nx1}\} = A_{nxu}x_{ux1} \text{ vs. } \\ (3.32)$$

$$H_A: E\{\underline{y}_{nx1}\} = A_{nxu}x_{ux1} + c_{y_{nx1}}\nabla, \quad \nabla \neq 0$$

O vetor  $c_{y_{nx1}}$  pode ser estipulado de várias formas. Por exemplo, se o vetor  $c_{y_{nx1}}$  for definido como sendo  $c_y = [1 \ 1 \ \dots \ 1]_{nx1}^T$ , supõe-se na hipótese alternativa  $H_A$  que todas as  $n$  observações estão contaminadas pelo mesmo erro sistemático  $\nabla$  (com  $\nabla \neq 0$ ).

Quando  $q = 1$ , as expressões para a estatística de teste em (3.27) tornam-se:

$$\begin{aligned} \underline{T}_{q=1} &= \hat{e}_0^T \Sigma_y^{-1} \hat{e}_0 - \hat{e}_A^T \Sigma_y^{-1} \hat{e}_A \\ &= (\hat{y}_0 - \hat{y}_A)^T \Sigma_y^{-1} (\hat{y}_0 - \hat{y}_A) \\ &= \hat{\nabla} c_y^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} c_y \hat{\nabla} \\ &= \hat{e}_0^T \Sigma_y^{-1} c_y (c_y^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} c_y)^{-1} c_y^T \Sigma_y^{-1} \hat{e}_0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

E desta forma, o teste da razão de verossimilhança se torna:

$$\begin{cases} \text{Rejeitar } H_0 \text{ se: } \underline{T}_{q=1} > K_\alpha \\ H_0: \underline{T}_{q=1} \sim \chi^2_{(1,0)}; H_A: \underline{T}_{q=1} \sim \chi^2_{(1,\lambda)}, \text{ com } \lambda = c_y^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} c_y \nabla^2 \end{cases} \quad (3.34)$$

Um caso especial de  $q = 1$  é quando na hipótese alternativa, assume-se que apenas uma observação está contaminada pelo erro (não aleatório) de magnitude  $\nabla$ .

Neste caso, o vetor  $c_{y_{nx1}}$  se simplifica ainda mais para  $c_{y_{nx1}} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \underset{i}{\frac{1}{\nabla}} \ 0 \ \dots \ 0]_{nx1}^T$ , onde  $i$  corresponde a linha da  $i$ -ésima observação suspeita de estar contaminada por erro no vetor das observações  $y_{nx1}$ .

Estes dois exemplos (um erro comum a todas as observações e um erro em apenas uma observação) mostram como é possível modelar diferentes situações de erros nas observações, por meio de uma escolha apropriada do vetor  $c_{y_{nx1}}$ .

Teunissen (2006) demonstra que, quando  $q = 1$ , a estatística  $\underline{T}_{q=1}$  é igual a  $\underline{T}_{q=1} = \underline{w}^2$ , sendo  $\underline{w}$  a estatística definida por (BAARDA, 1968):

$$\underline{w} = \frac{c_y^T \Sigma_y^{-1} \hat{e}_0}{\sqrt{c_y^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} c_y}} \quad (3.35)$$

Sendo que na hipótese nula, a estatística  $\underline{w}$  segue distribuição normal padrão, ou seja,

$$H_0: \underline{w} \sim N(0,1); \text{ e na hipótese alternativa, } H_A: \underline{w} \sim N(\sqrt{\lambda}, 1), \text{ com } \sqrt{\lambda} = \sqrt{c_y^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} c_y}$$

(BAARDA, 1968), ver também a expressão (3.34). Apenas para recapitular, o vetor dos erros ajustados  $\hat{e}_0$  é obtido por meio da expressão (2.54), e a sua matriz de covariância  $\Sigma_{\hat{e}_0}$ , é obtida por meio da expressão (2.49).

Teunissen (2006) ainda demonstra que o critério de teste: *Rejeitar  $H_0$  se:  $T_{q=1} > K_\alpha$* , é equivalente ao critério de teste: *Rejeitar  $H_0$  se:  $\underline{w} < -\sqrt{K_\alpha}$  ou  $\underline{w} > \sqrt{K_\alpha}$* , pois  $T_{q=1} = \underline{w}^2$  (ou seja,  $\underline{w} = \sqrt{T_{q=1}}$ ).

Desta forma, como a estatística  $\underline{w}$  segue distribuição normal padrão em  $H_0$ , fixando o nível de significância do teste ( $\alpha$ ), pode-se escolher entre empregar o teste unilateral para a distribuição qui-quadrado, com  $q = 1$  graus de liberdade e estatística de teste  $T_{q=1}$ , ou então, empregar o teste bilateral para a distribuição normal padrão, com estatística de teste  $\underline{w}$ , que possui uma expressão de cálculo mais simples, comparando (3.35) com (3.33). As Figuras 3.11 e 3.12 ilustram os dois testes graficamente.

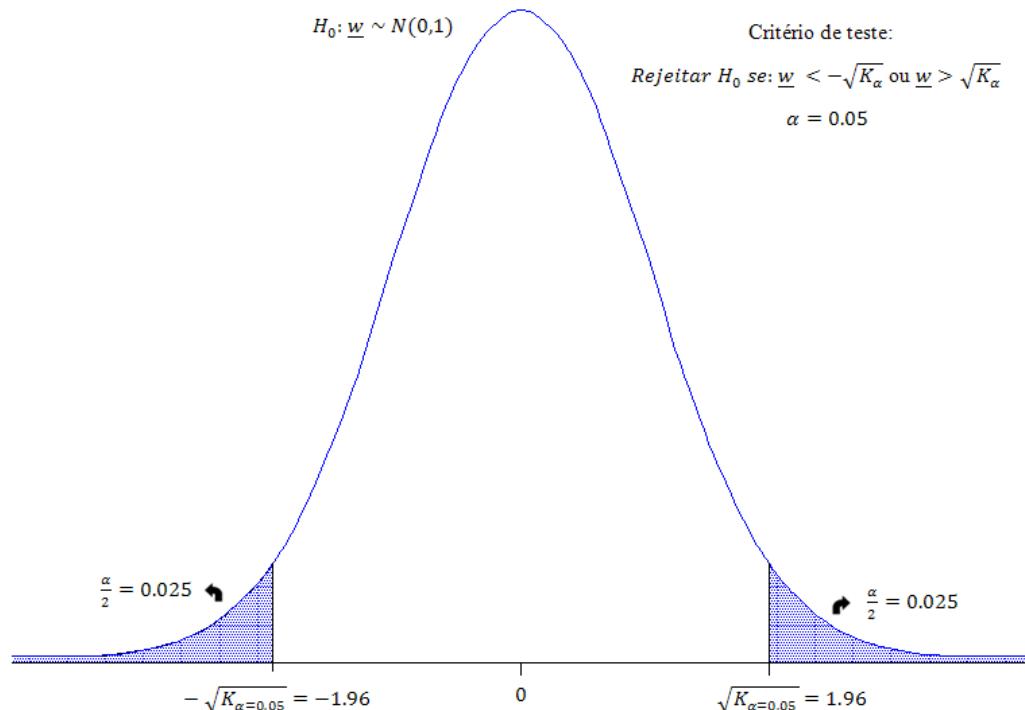


Figura 3.11 – A estatística  $\underline{w}$  e o critério de teste para  $\alpha = 0.05$ .

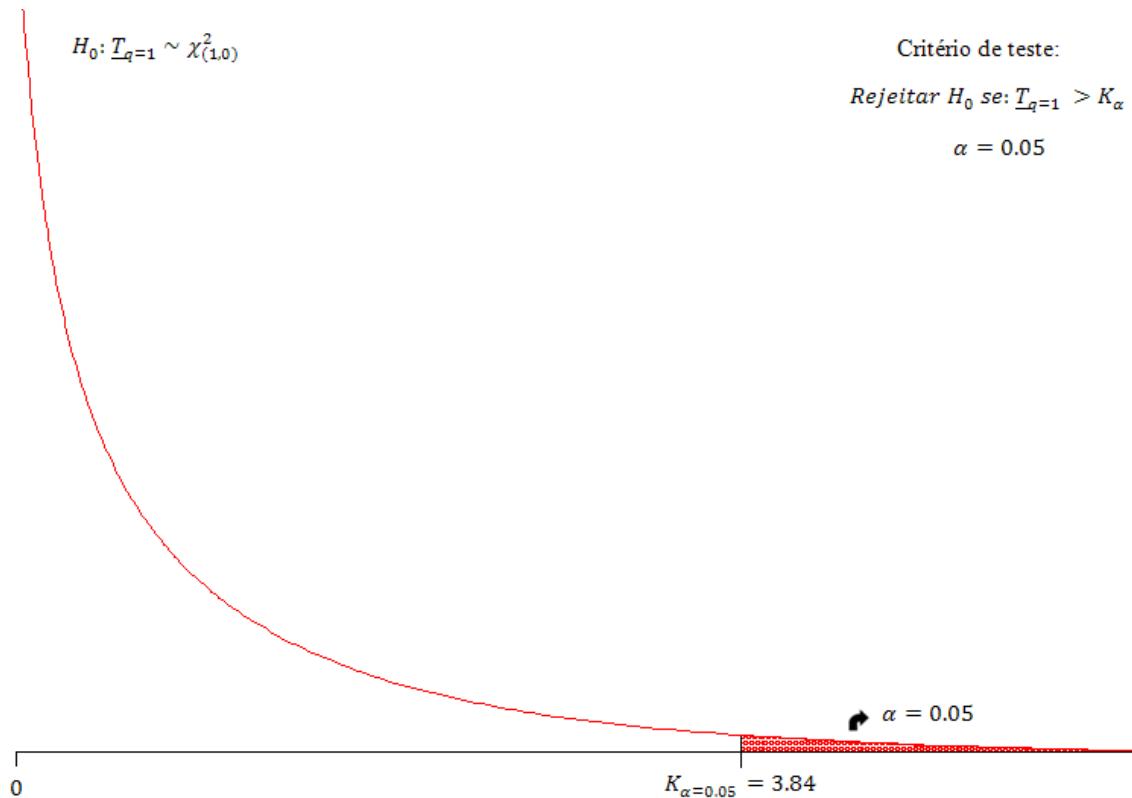


Figura 3.12 – A estatística  $\underline{T}_{(q=1)}$  e o critério de teste para  $\alpha = 0,05$ .

Outras simplificações na expressão geral (3.27) podem ser efetuadas para o caso  $q = 1$ . Por exemplo, considerando que  $\underline{T}_{q=1} = \underline{w}^2$ , e combinando a expressão (3.35) com a terceira expressão de (3.27), pode-se escrever (TEUNISSEN, 2006):

$$\underline{T}_{q=1} = \frac{\hat{V}^2}{(c_y^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} c_y)^{-1}} \quad (3.36)$$

Mas quando  $q = 1$ , o denominador de (3.36) é igual à variância de  $\hat{V}^2$ , pois, conforme já visto,  $\Sigma_{\hat{V}}^{-1} = C_y^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} C_y$ , e, portanto, a estatística de teste então se torna:

$$\underline{T}_{q=1} = \frac{\hat{V}^2}{\sigma_{\hat{V}}^2} \quad (3.37)$$

A expressão acima, embora se mostre relativamente simples, não é muito utilizada na prática, por exigir o cálculo da hipótese alternativa, ou seja, deve-se estimar  $V$  e a sua variância  $\sigma_V^2$ . Logo, ainda é mais simples utilizar a expressão (3.35) para o teste com  $q = 1$ .

A suposição de que apenas uma observação está contaminada por erros grosseiros (etapa de identificação de erros) é uma das principais aplicações práticas deste caso especial quando  $q = 1$ .

Quando se assume que apenas uma observação é suspeita de estar contaminada por um erro (não aleatório) por vez, o teste deve ser calculado para todas as  $n$  observações, resultando no procedimento denominado *data snooping* (BAARDA, 1968).

Desta forma, para cada  $i$ -ésima observação, testa-se:

$$H_0: E \{ \underline{y}_{nx1} \} = A_{nxu} x_{ux1} \text{ vs.} \quad (3.39)$$

$$H_A: E \{ \underline{y}_{nx1} \} = (A : c_{y_i})_{nxu+1} \begin{pmatrix} x \\ \nabla_i \end{pmatrix}_{u+1x1}, \nabla_i \neq 0$$

com  $c_{y_i} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \begin{matrix} 1 \\ i \end{matrix} \ 0 \ \dots \ 0]^T_{nx1}$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . O critério de teste do procedimento *data snooping* é dado por:

$$\text{Rejeitar } H_0 \text{ se: } \underline{w}_i < -Z_{\alpha/2} \text{ ou } \underline{w}_i > Z_{\alpha/2} \quad (3.40)$$

Onde para cada observação  $y_i$ , a estatística de teste é dada por (BAARDA, 1968):

$$\underline{w}_i = \frac{c_{y_i}^T \Sigma_y^{-1} \hat{\epsilon}_0}{\sqrt{c_{y_i}^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{\epsilon}_0} \Sigma_y^{-1} c_{y_i}}} \quad (3.41)$$

e  $Z_{\alpha/2}$  é o valor tabelado para a distribuição normal padrão, com nível de significância  $\alpha$  (teste bi-lateral). Como todas as observações são testadas, a observação suspeita de estar contaminada por um erro grossoiro será aquela que (BAARDA, 1968):

$$\begin{cases} \underline{w}_i < -Z_{\alpha/2} \text{ ou } \underline{w}_i > Z_{\alpha/2} \\ e |\underline{w}_i| > |\underline{w}_j|, \forall i \neq j \end{cases} \quad (3.42)$$

Ressalva-se que a magnitude ( $\nabla$ ) do erro, tal como o verdadeiro valor do vetor dos parâmetros  $x$ , é desconhecida, podendo ser estimada por  $\hat{V}$  no cálculo da hipótese alternativa,

se desejado. O teste é apenas um indicador se o valor (desconhecido) de  $V$  é significativamente diferente de zero, ou não.

Quando a matriz de covariância das observações  $\Sigma_y$  é diagonal (ou seja, não existe ou desconsidera-se a correlação entre as observações), a expressão (3.41) se simplifica para (BAARDA, 1968):

$$\underline{w}_i = \frac{\hat{e}_i}{\sigma_{\hat{e}_i}} \quad (3.43)$$

Onde  $\hat{e}_i$  é o erro estimado da  $i$ -ésima observação ajustada (na hipótese nula), e  $\sigma_{\hat{e}_i}$  é o respectivo desvio-padrão deste erro (obtido na matriz de covariância dos erros ajustados). Em outras palavras, nestes casos, a estatística  $\underline{w}_i$ , para cada observação  $y_i$ , é um erro padronizado que segue distribuição normal padrão em  $H_0: \underline{w}_i \sim N(0,1)$ .

Por exemplo, caso o nível de significância do teste *data snooping* seja arbitrado em  $\alpha = 0,05$ , uma observação será considerada suspeita de estar contaminada por um erro grosso se o valor de seu erro estimado  $\hat{e}_i$  exceder em  $K_\alpha = 1,96$  vezes o valor estimado para o desvio-padrão ( $\sigma_{\hat{e}_i}$ ) de  $\hat{e}_i$ , além de apresentar a maior estatística de teste ( $\underline{w}_i$ ) dentre todas as observações (relembrando que o teste, nestes casos, é da forma bi-lateral).

Identificada a observação suspeita de estar contaminada por um erro grosso, retira-se a mesma do modelo e repete-se o ajustamento e os testes até que todas as observações suspeitas sejam identificadas e devidamente retiradas, em um processo iterativo de identificação (localização) e remoção de erros (BAARDA, 1968).

A Figura 3.13 apresenta um resumo do procedimento de teste *data snooping* para a identificação de observações  $y_i$  (em  $\underline{y}_{nx1}$ ) suspeitas de estarem contaminadas por erros não aleatórios  $V_i$ .

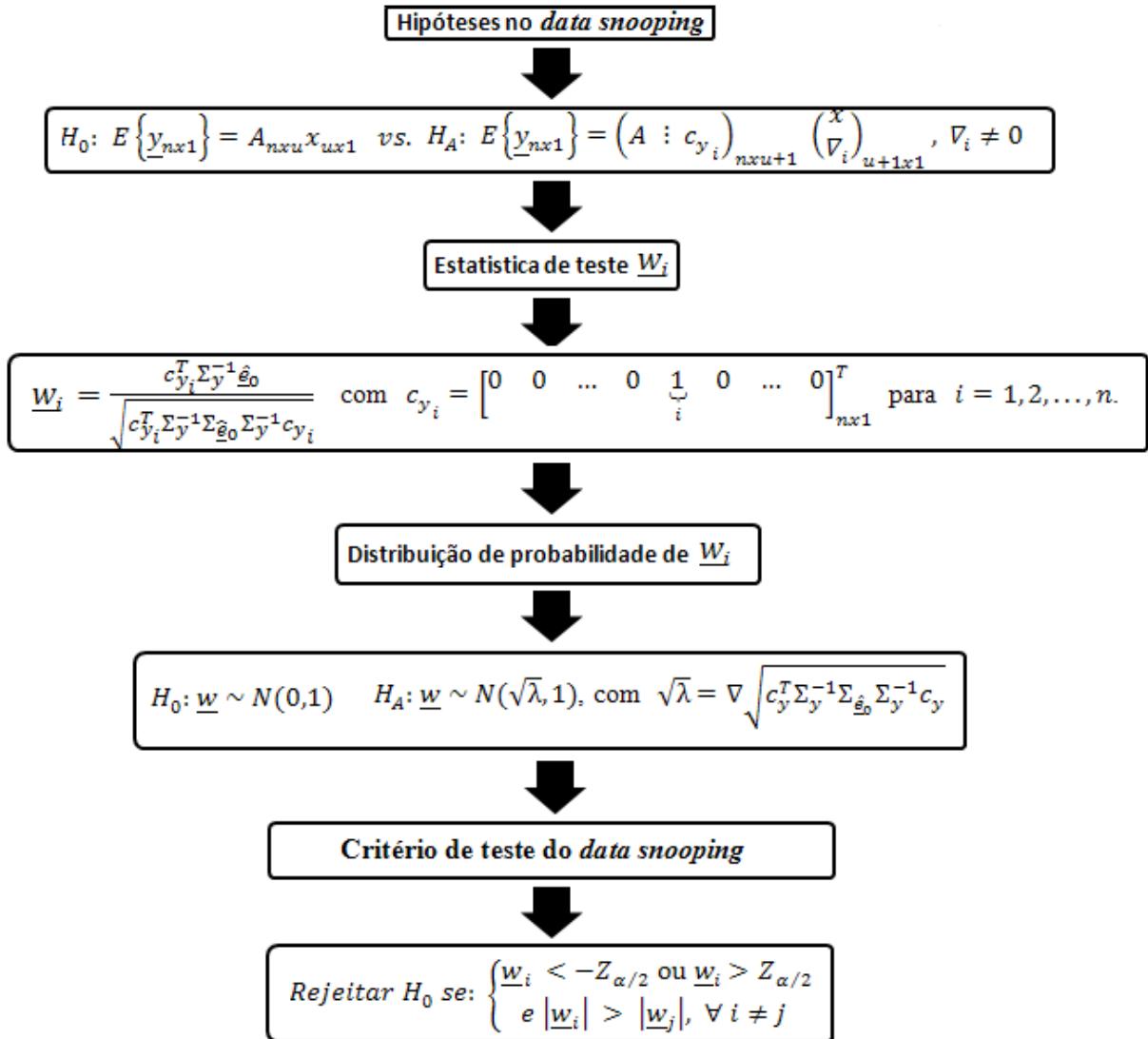


Figura 3.13 – Resumo da estatística  $\underline{w}_i$  e do procedimento de teste *Data Snooping*.

### 3.2.3 O Caso $q = n - u$ e o Teste Global do Ajustamento

Na seção anterior foi apresentado o caso especial  $q = 1$  para a estatística de teste  $T_q$ , bem como o procedimento de teste *data snooping* para a identificação de observações suspeitas de estarem contaminadas por erros (não aleatórios), derivado deste caso.

Nesta seção, será apresentado outro caso especial, quando  $q = n - u$ , para a detecção de erros (não aleatórios) nas observações, lembrando que  $n$  é o número de observações e  $u$  é o número de parâmetros incógnitos do ajustamento.

Importante destacar que um teste de hipóteses para a “detecção” de erros nas observações apenas indica se existem ou não erros (não aleatórios) no vetor das observações

$\underline{y}$ , segundo o nível de significância  $\alpha$  estipulado, enquanto um teste para a “identificação” de erros explicitamente (em qual(is) observação(ões)) estão localizados tais erros, também segundo o nível de significância  $\alpha$  que foi estipulado.

Logo, quando  $q = n - u$ , o *rank* da matriz  $(A : C_y)$  na hipótese alternativa  $H_A$  se torna  $\text{rank}(A : C_y) = u + q = u + (n - u) = n$ . Neste caso extremo, a matriz  $(A : C_y)$  é quadrada e de “*full rank*”. Isto significa que nenhuma restrição é colocada sobre  $E\{\underline{y}_{nx1}\}$  na hipótese alternativa, pois  $R(A : C_y) = R^n$  e  $E\{\underline{y}_{nx1} | H_A\} \in R^n$ . Em outras palavras, quando  $q = n - u$ , o número de parâmetros adicionados à hipótese nula para formular a hipótese alternativa é tal que a redundância (graus de liberdade) do modelo linear em  $H_A$  é igual a zero. Isto implica que (TEUNISSEN, 2006):

$$\hat{y}_A \equiv \underline{y} \text{ e } \hat{e}_A \equiv 0 \quad (3.44)$$

pois o sistema de equações resultante em  $H_A$  possui “ $n$ ” equações à “ $u + q = n$ ” incógnitas, ou seja, admite somente solução única e exata. A Figura 3.14 ilustra um esboço deste caso extremo quando  $q = n - u$  (para  $u = q = 1$  e  $n = u + q = 2$ ).

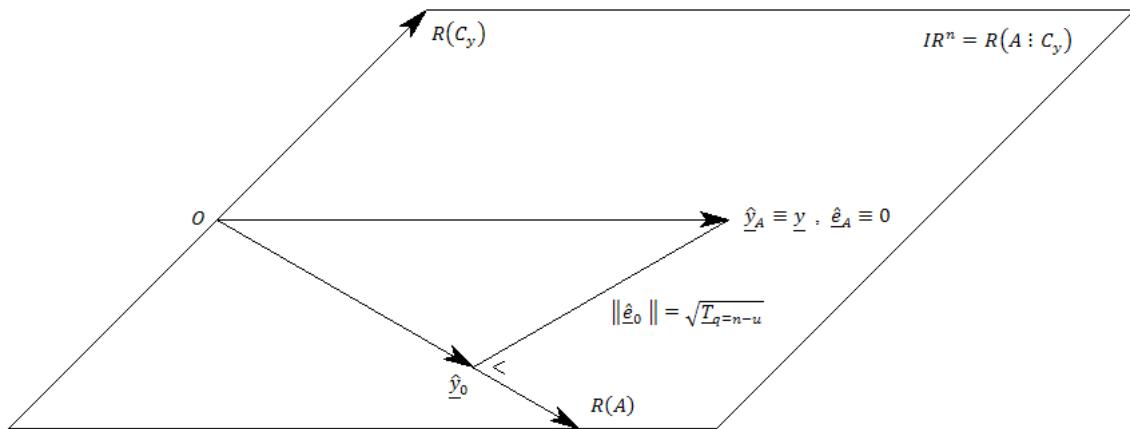


Figura 3.14 – Interpretação geométrica do caso especial  $q = n - u$ .  
(Fonte: Fonte: Adaptado de Teunissen, 2006)

Visando obter uma expressão para a estatística  $T_q$  resultante neste caso, de (3.44) e da primeira expressão de (3.27), tem-se:

$$T_{q=n-u} = \hat{e}_0^T \Sigma_y^{-1} \hat{e}_0 \quad (3.45)$$

E o teste então se torna (TEUNISSEN, 2006):

$$\begin{cases} \text{Rejeitar } H_0 \text{ se: } \underline{T}_{q=n-u} > K_\alpha \\ H_0: \underline{T}_{q=n-u} \sim \chi^2_{(n-u,0)}; \quad H_A: \underline{T}_{q=n-u} \sim \chi^2_{(n-u,\lambda)}, \quad \lambda = V^T C_y^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} C_y V \end{cases} \quad (3.46)$$

Analizando as expressões (3.45) e (3.46), nota-se que neste caso, o critério de rejeição do teste baseia-se somente na magnitude das componentes do vetor dos erros ajustados em  $H_0$ .

Além disso, devido ao fato de  $R(A : C_y) = R^n$  e nenhuma restrição ser imposta sobre  $E\{\underline{y}_{nx1}\}$  em  $H_A$ , quando  $q = n - u$ , ao contrário dos demais casos, a matriz  $C_y$  não precisa ser especificada para calcular a estatística  $\underline{T}_q$  (ver (3.45)), e desta forma, não se pode afirmar o que levou a rejeição da hipótese nula no teste, caso esta seja rejeitada (TEUNISSEN, 2006).

Portanto, o teste  $\underline{T}_q$  para  $q = n - u$  apenas detecta a presença (ou não) de erros (não aleatórios) no vetor das observações  $\underline{y}$ , mas não identifica a localização (ou seja, em quais observações  $y_i$ ) estes erros estão presentes, pois a matriz  $C_y$  não é definida em (3.45).

Em muitas publicações, ao invés do teste da razão de verossimilhança aqui apresentado (expressões 3.45 e 3.46), para o caso  $q = n - u$ , tem-se o denominado “teste global do ajustamento”, definido por (KAVOURAS, 1982):

$$H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \quad vs. \quad H_A: \sigma^2 > \sigma_0^2 \quad (3.47)$$

Ou seja, deseja-se saber se o fator de variância  $\sigma^2$  das observações (desconhecido) é estatisticamente igual ao fator de variância *a priori*  $\sigma_0^2$  que foi arbitrado, lembrando que, geralmente, a matriz peso das observações é escolhida como sendo  $W = \sigma_0^2 \Sigma_y^{-1}$ .

Em outras palavras, deseja-se saber se a soma ponderada do quadrado dos erros ajustados  $\hat{e}_0$  em (3.46) é estatisticamente concordante com a precisão que foi definida para as observações (dada pela matriz de covariância  $\Sigma_y$ ), ou, caso contrário, se algum fator de escala deve ser aplicado em  $\Sigma_y$  para que a hipótese nula formulada em (3.47) seja aceita.

É importante salientar que a escolha arbitrária para o fator de variância *a priori*  $\sigma_0^2$  não interfere na estimativa por mínimos quadrados de  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{e}$ , pois este escalar arbitrado é cancelado pelo produto matricial entre a inversa da matriz  $N$  e o vetor  $u$  no sistema de equações normais na expressão (2.58).

Uma estimativa para o fator de variância  $\sigma^2$  pode ser dada em função dos resíduos, denominada fator de variância *a posteriori*, e expressa por (KAVOURAS, 1982):

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{v}^T W \hat{v}}{n-u} \quad (3.48)$$

Onde  $\hat{v}$  é o vetor dos resíduos ajustados. Como, pela definição de resíduo e de erro (abordada no capítulo anterior):  $\hat{v} = -\hat{e}$ , logo,  $\hat{v}^T W \hat{v} = \hat{e}^T W \hat{e}$ . Nota-se, portanto, que a expressão (3.48) é igual à expressão (3.45) quando  $W = \Sigma_y^{-1}$ , dividida pelo número de graus de liberdade ( $n - u$ ) do modelo, ou seja, o fator de variância *a posteriori* é igual à estatística de teste  $T_{q=n-u}$  da razão de verossimilhança, dividida pelo escalar ( $n - u$ ).

A natureza do teste global do ajustamento consiste em analisar se o fator de variância *a priori*  $\sigma_0^2$ , que foi arbitrado para as observações, é significativamente diferente do verdadeiro fator de variância  $\sigma^2$ , desconhecido, mas estimado por  $\hat{\sigma}^2$ .

A estatística de teste é então dada em função da razão entre o fator de variância *a posteriori* e o fator de variância *a priori*, expressa por (KAVOURAS, 1982):

$$\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} \left( \frac{\hat{v}^T W \hat{v}}{n-u} \right) \quad (3.49)$$

Sob a hipótese nula, a razão  $\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}$ , por ser uma razão de duas variâncias (com o denominador arbitrado e multiplicado pelo escalar  $n - u$ ), segue distribuição  $F$  com graus de liberdade  $n - u$  no numerador e infinito no denominador, ou seja:  $\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} \sim F_{(n-u, \infty)}$ . Mas a distribuição  $F$  com graus de liberdade  $n - u$  no numerador e infinito no denominador é equivalente a distribuição qui-quadrado com  $n - u$  graus de liberdade, dividida pelo escalar  $n - u$ , ou seja:  $F_{(n-u, \infty)} = \frac{\chi^2_{(n-u)}}{n-u}$  (KAVOURAS, 1982).

Portanto, o critério de teste para as hipóteses formuladas em (3.47) é dado por:

$$\text{Rejeitar } H_0 \text{ se: } \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} \geq F_{(n-u, \infty; \alpha)} = \frac{\chi^2_{(n-u; \alpha)}}{n-u} \quad (3.50)$$

Onde  $F_{(n-u,\infty; \alpha)}$  é o valor tabelado para a distribuição  $F$  com  $n - u$  graus de liberdade no numerador, com  $\infty$  graus de liberdade no denominador e nível de significância  $\alpha$ , e de maneira análoga,  $\chi^2_{(n-u; \alpha)}$  é o valor tabelado para a distribuição qui-quadrado com  $n - u$  graus de liberdade e nível de significância  $\alpha$ .

Analizando a expressão (3.50), nota-se que o teste global do ajustamento faz sentido, pois, espera-se rejeitar a hipótese nula se  $\hat{\sigma}^2$  for significativamente maior do que  $\sigma_0^2$ . Nota-se ainda que o critério e a estratégia para o teste global do ajustamento são semelhantes ao critério e a estratégia do teste da razão de verossimilhança  $T_q$ , e que, quando  $\sigma_0^2 = 1$  (valor usualmente arbitrado na prática), tem-se que  $\hat{\sigma}^2 = \frac{T_{q=n-u}}{n-u}$ .

É importante salientar que, ao invés das hipóteses formuladas em (3.47) para o teste global do ajustamento, poderiam ser formuladas hipóteses da forma (GEMAEL, 1994; LEICK, 2004):

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \text{ vs. } H_A: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \quad (3.51)$$

E que neste caso, o critério de teste empregado deveria ser da forma bi-lateral:

$$\text{Rejeitar } H_0 \text{ se: } \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} \geq F_{(n-u,\infty; \frac{\alpha}{2})} \text{ ou } \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} \leq F_{(n-u,\infty; 1-\frac{\alpha}{2})} \quad (3.52)$$

Entretanto, diversos autores, como Kavouras (1982), Ghilani e Wolf (2006), Teunissen (2006), Oliveira e Dalmolin (2008), afirmam que, se o objetivo do teste de hipóteses é a detecção de possíveis erros (não aleatórios) no conjunto de observações, o teste mais adequado neste sentido é o teste unilateral, definido em (3.47), pois, caso existam erros nas observações, normalmente espera-se que  $\hat{\sigma}^2 > \sigma_0^2$ , e não o contrário.

O teste bi-lateral é mais recomendado quando se deseja definir um intervalo de confiança para o fator de variância, ou seja, para um possível fator de escala a ser aplicado na matriz de covariância  $\Sigma_y$  (maiores detalhes em KAVOURAS, 1982).

Portanto, neste trabalho, será adotado o critério de teste unilateral para a detecção de possíveis erros (não aleatórios) no ajustamento. Desta forma, combinando (3.49) com (3.50), o critério de teste para as hipóteses formuladas em (3.47) finalmente torna-se:

$$\text{Rejeitar } H_0 \text{ se: } \frac{\hat{v}^T W \hat{v}}{\sigma_0^2} \geq (n - u) F_{(n-u,\infty; \alpha)} = \chi^2_{(n-u; \alpha)} \quad (3.53)$$

Ou seja, para efetuar o teste global do ajustamento, fixando o nível de significância  $\alpha$ , basta calcular a estatística de teste e consultar em tabelas estatísticas da distribuição  $F$  ou da distribuição qui-quadrado o valor crítico  $K_\alpha$ , conforme desejado.

Embora não se tenha nenhuma razão em especial para usar o teste global do ajustamento ao invés do teste da razão de verossimilhança para  $q = n - u$ , existe uma razão para o fator de variância *a posteriori* ( $\hat{\sigma}^2$ ) ser considerado uma estimativa do verdadeiro (e desconhecido) fator de variância ( $\sigma^2$ ). Isto decorre de (TEUNISSEN, 2006):

$$E\{\hat{e}^T \Sigma_y^{-1} \hat{e}\} = E\{\hat{v}^T \Sigma_y^{-1} \hat{v}\} = n - u \quad (3.54)$$

Considerando uma matriz peso ideal, da forma  $W = \sigma^2 \Sigma_y^{-1}$ , resulta em:

$$E\{\hat{v}^T W \hat{v}\} = \sigma^2 E\{\hat{v}^T \Sigma_y^{-1} \hat{v}\} = \sigma^2(n - u) \quad (3.55)$$

Combinando as expressões (3.48) e (3.55), tem-se que:

$$\frac{E\{\hat{v}^T W \hat{v}\}}{n-u} = \sigma^2 \Leftrightarrow E\{\hat{\sigma}^2\} = \sigma^2 \quad (3.56)$$

Ou seja, o fator de variância *a posteriori*  $\hat{\sigma}^2$  pode ser considerado um estimador imparcial do verdadeiro fator de variância  $\sigma^2$ , desconhecido na prática (TEUNISSEN, 2006).

Segundo Monico (2008), caso a hipótese nula em (3.47) seja aceita, ou seja, não há evidência da existência de erros no modelo, o fator de variância *a posteriori*  $\hat{\sigma}^2$ , dado por (3.48), pode substituir o fator de variância *a priori*  $\sigma_0^2$ , nas expressões para as matrizes de covariâncias dos parâmetros ajustados  $\hat{x}$ , das observações ajustadas  $\hat{y}$ , e dos erros ajustados  $\hat{e}$ , dadas por (2.47), (2.48) e (2.49), respectivamente.

Em outras palavras, se aceita o fator de variância *a posteriori* como uma estimativa imparcial para o verdadeiro fator de variância, e, desta forma, aplica-se um fator de escala nas matrizes de covariâncias de  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{e}$ , lembrando que o fator de variância que foi arbitrado não interfere no valor numérico das estimativas de  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{e}$ .

No teste global do ajustamento, tal como no teste da razão de verossimilhança  $T_q$  para  $q = n - u$ , caso a estatística calculada seja maior que o valor de referência tabelado, rejeita-se a hipótese nula, entretanto, o teste não indica qual a causa que levou a rejeição da hipótese

nula. Para ambos os testes, dentre as razões ou circunstâncias que podem levar a falha do teste, pode-se citar (GEMAEL, 1994):

- O modelo funcional não é adequado à realidade física do problema (a precisão das observações é inferior ao grau de aproximação do modelo);
- A matriz de covariância das observações não está apropriadamente determinada, ou seja, o modelo estocástico não é apropriado;
- Existência de erros não aleatórios (erros grosseiros e/ou erros sistemáticos não parametrizados no conjunto de observações);
- O sistema de equações é mal condicionado (ausência de injunções mínimas, observações altamente correlacionadas e etc.);
- Ocorrência de erro numérico de cálculo no processo de ajustamento.

Segundo Kavouras (1982), na prática, para o teste global do ajustamento, é assumido que, caso a hipótese nula seja rejeitada, se assume que a causa que levou a falha do teste é a existência de erros grosseiros nas observações, embora uma investigação deva ser feita e as demais razões que podem ter levado a falha do teste não devam ser ignoradas.

Kavouras (1982) também demonstra que, sob a hipótese nula em (3.47), a estatística de teste  $\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}$  segue distribuição  $F$  com graus de liberdade  $n - u$  no numerador e  $\infty$  no denominador, e na hipótese alternativa,  $\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}$  segue uma distribuição  $F$  não central, com graus de liberdade  $n - u$  no numerador e  $\infty$  no denominador, e com parâmetro de não centralidade dado por  $\lambda = \frac{\nabla^T C_y^T W \Sigma_{\hat{e}_0} W C_y \nabla}{\sigma_0^2}$ , que é idêntico ao parâmetro de não centralidade da hipótese alternativa do teste da razão de verossimilhança  $T_q$ , quando  $W = \Sigma_y^{-1}$  e  $\sigma_0^2 = 1$ , conforme mostra a expressão (3.46).

Frente a estas considerações, a Figura 3.15 ilustra graficamente a estatística  $\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}$  e o teste global do ajustamento, e a Figura 3.16 apresenta um resumo do teste global (da forma unilateral) do ajustamento para a detecção de erros nas observações.

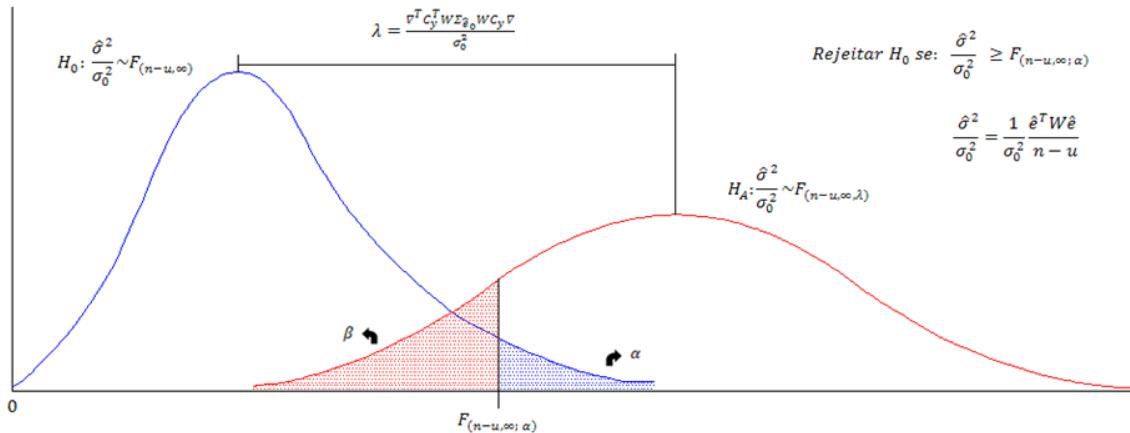


Figura 3.15 – Ilustração gráfica da estatística  $\hat{\sigma}^2/\sigma_0^2$  para o teste global do ajustamento.  
Fonte: Adaptado de Kavouras (1982)

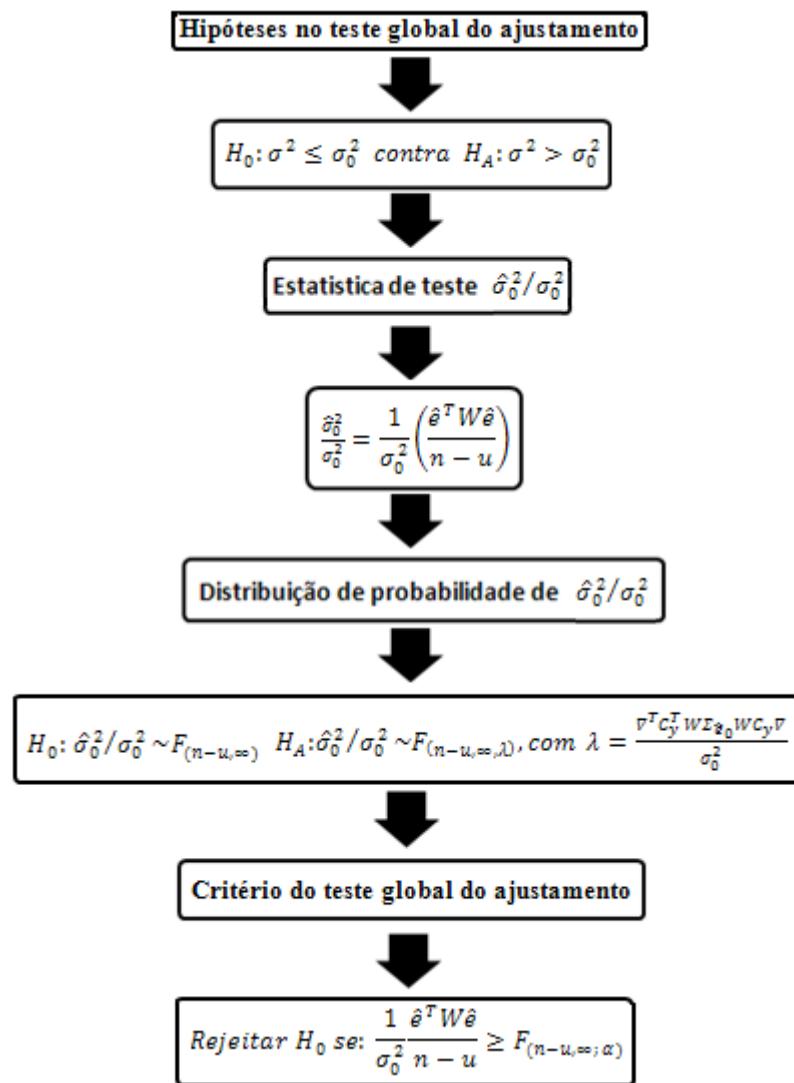


Figura 3.16 – Resumo da estatística  $\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}$  e do teste global do ajustamento.

### 3.3 Algumas Considerações sobre os Testes de Hipóteses no Ajustamento

Apresentados os testes convencionais para a detecção (Teste Global do Ajustamento) e a identificação (procedimento *data snooping*) de erros nas observações, encerrando este capítulo, algumas considerações se fazem necessárias.

Primeiramente, deve-se mencionar que existem outros testes para a identificação de observações suspeitas de estarem contaminadas por erros, como por exemplo, o teste Tau, proposto por Pope (1976). Esta estratégia de teste é recomendada para os casos em que as variâncias não estão propriamente escaladas, ou seja, o fator de variância *a priori*  $\sigma_0^2$  não é adequadamente conhecido para ser arbitrado, ou então não se deseja trabalhar com estimativas *a priori*. Desta forma, apenas o fator de variância *a posteriori*  $\hat{\sigma}^2$  deve ser considerado.

Segundo Kavouras (1982), neste caso, o teste global do ajustamento não é realizado e o procedimento *data snooping* deve ser modificado utilizando uma nova estatística de teste, que segue a distribuição Tau, raramente mencionada nos textos.

Ainda segundo Kavouras (1982), o procedimento de teste *data snooping* se mostra mais vantajoso para a identificação de erros, pois o fator de variância *a posteriori*  $\hat{\sigma}^2$ , estimado em função dos resíduos, pode ser afetado pela presença de erros grosseiros, tornando o teste Tau insensível à identificação de erros. Além disso, o teste Tau não considera um valor para  $\beta$ , e, consequentemente, não possui medidas de confiabilidade associadas (estas medidas serão abordadas no próximo capítulo). Maiores detalhes sobre o procedimento de teste Tau podem ser obtidos em Pope (1976), Kavouras (1982), e em Monico (2008).

Outros métodos também podem ser citados, como por exemplo, o teste sobre a forma quadrática dos resíduos, proposto por Stefanovic (1978), quando se deseja separar o vetor das observações em dois grupos, um destes contendo observações suspeitas de estarem contaminadas por erros, e o outro contendo observações assumidas estarem isentas de erros, sendo um teste alternativo ao teste global do ajustamento para detecção de erros, e que se torna idêntico ao procedimento de teste *data snooping*, quando apenas uma observação é suspeita de estar contaminada por erro grosseiro.

Devido às peculiaridades apresentadas nos dois casos extremos, quando  $q = 1$  e quando  $q = n - u$ , Baarda (1968) propõe o denominado Método  $\beta$  ( $\beta$ -Method), que faz uso do teste global do ajustamento para a detecção de erros grosseiros no vetor das observações  $\underline{y}$ ,

e do procedimento de teste *data snooping* para a localização destes erros, em um processo iterativo (onde apenas uma observação  $y_i$  é a suspeita de estar contaminada por erro por vez).

Neste método, o procedimento de teste *data snooping* só deve ser empregado quando a hipótese nula ( $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ ) do teste global do ajustamento for rejeitada, e, além disso, o poder do teste  $\gamma = 1 - \beta$  dos dois deve ser mantido o mesmo.

Entretanto, Kavouras (1982) salienta que, mantendo o poder do teste  $\gamma$  constante, é possível que um erro significativo em uma dada observação  $y_i$ , passível de ser identificado pelo procedimento *data snooping*, possa ser não detectado pelo teste global do ajustamento, que considera a soma ponderada do quadrado dos resíduos, quando os demais erros forem muito pequenos.

Além disso, quanto maior a redundância do sistema, ou seja, o número  $n - u$  de graus de liberdade, maior a tolerância do teste global do ajustamento a estes possíveis erros localizados, pois maior se torna o valor crítico  $K_\alpha$  para o teste. Portanto, é recomendado que o procedimento de teste *data snooping* sempre seja realizado, pois este não se torna insensível à presença de erros à medida que o número de graus de liberdade aumenta (pois, a estatística  $w_i$  independe do valor de  $n - u$ ).

Ainda segundo Kavouras (1982), este problema da insensibilidade do teste global do ajustamento se torna ainda mais crítico quando se trabalha com um grande número de dados, e a redundância do sistema de equações é elevada. Entretanto, o teste global do ajustamento retém sua importância, por ser computacionalmente simples de ser calculado, e também por dar uma informação geral sobre as outras causas que podem levar a falha do teste, pois, caso o teste global do ajustamento falhar, definitivamente há algo errado com a hipótese nula estabelecida, e o motivo deve ser investigado.

Retornando a questão do poder do teste  $\gamma$ , analisando as Figuras 3.4 e 3.15, nota-se que, mantendo o nível de significância  $\alpha$  constante, a probabilidade do erro tipo II ( $\beta$ ) depende da separação entre a hipótese nula e a hipótese alternativa, ou seja, do parâmetro de não centralidade  $\lambda$  do modelo (quanto maior  $\lambda$ , menor  $\beta$ ). Entretanto, o parâmetro de não centralidade do modelo depende de  $\nabla$ , desconhecido na prática, pois a magnitude dos erros que contaminam as observações é sempre desconhecida. Ou seja, na prática, é muito difícil calcular um valor para o poder do teste  $\gamma = 1 - \beta$ , pois  $\beta$ , tal como o verdadeiro valor de  $\nabla$ , é desconhecido *a priori*.

Além disso, os testes para detecção e identificação de erros aqui apresentados dependem essencialmente do vetor dos erros ajustados  $\hat{e}$  na hipótese nula (ou, analogamente, dos resíduos ajustados:  $\hat{v} = -\hat{e}$ ), conforme mostram as expressões (3.27), (3.41) e (3.53).

Entretanto, um erro não aleatório que contamina uma determinada observação  $y_i$ , pode ser parcialmente refletido no respectivo erro estimado  $\hat{e}_i$  (ou resíduo  $\hat{v}_i$ ) desta observação ajustada  $\hat{y}_i$ , e também parcialmente absorvido pelo vetor dos parâmetros ajustados  $\hat{x}$ , sendo que a sua fração absorvida no vetor dos parâmetros ajustados  $\hat{x}$  não é considerada nos testes de hipóteses formulados neste capítulo.

Kavouras (1982) também conclui que, o maior problema de todos os testes para identificação de erros, após o ajustamento por mínimos quadrados ter sido realizado, é a existência de múltiplos *outliers* (erros não aleatórios) nas observações, o que pode causar uma alta correlação dos resíduos ajustados (pela lei de propagação de covariâncias em (2.49)), sendo muito difícil, e em alguns casos até mesmo impossível, identificar (localizar) corretamente todas as observações contaminadas por erros.

Estas considerações, dentre outras, serão abordadas e discutidas no próximo capítulo, Teoria Convencional de Confiabilidade do Ajustamento. Mais detalhes sobre os testes para detecção e também identificação de erros nas observações podem ser encontrados em Baarda (1968), Pope (1976), Stefanovic (1978), Kavouras (1982), Gemael (1994), Koch (1999), Leick (2004), Ghilani e Wolf (2006), Teunissen (2006) e Monico (2008).

## 4 TEORIA CONVENCIONAL DE CONFIABILIDADE DO AJUSTAMENTO

No capítulo anterior, foram apresentados e discutidos os testes de hipóteses para a detecção e a identificação de erros (não aleatórios) nas observações, após o ajustamento por mínimos quadrados ter sido realizado, utilizando o teste da razão de verossimilhança para modelos lineares.

Em particular, foi apresentado o teste global do ajustamento, para a detecção de erros no conjunto de observações, e o procedimento de teste iterativo *data snooping*, para a identificação das observações suspeitas de estarem contaminadas por erros, assumindo que apenas uma observação  $y_i$  é suspeita de estar contaminada por vez.

Entretanto, segundo Kavouras (1982), por serem estratégias formuladas com base em hipóteses estatísticas, ou seja, com níveis de probabilidade associados, estes testes possuem uma capacidade finita para a detecção e identificação de erros grosseiros de pequena magnitude (ou seja, poderão ocorrer erros remanescentes não detectáveis).

Esta sensibilidade dos testes em detectar e identificar erros (em particular do procedimento *data snooping*), bem como a possível influência de erros não detectados sobre o vetor dos parâmetros estimados  $\hat{x}$ , será abordada neste capítulo, por meio da teoria convencional de confiabilidade do ajustamento, que faz uso de medidas adequadas para quantificar a sensibilidade dos testes a possíveis erros não detectados nas observações.

A teoria de confiabilidade avalia se um determinado erro (não aleatório) em uma observação é detectável pelo procedimento de teste utilizado, e avalia também a influência deste erro nos resultados do ajustamento, quando não detectado, segundo os níveis de probabilidade que foram estipulados (OLIVEIRA; DALMOLIN, 2008).

As medidas consideradas neste capítulo serão os números de redundância, os números de absorção, a confiabilidade interna, a confiabilidade externa, e a razão tendência-ruído (*bias-to-noise ratio*).

### 4.1 Números de Redundância e de Absorção

Nesta seção serão abordados os números de redundância e absorção, que são medidas de controlabilidade das observações, ou seja, indicam a fração de um possível erro (não

aleatório)  $\nabla_i$  em uma observação  $y_i$  que é refletida no respectivo resíduo  $\hat{v}_i$  desta observação (número de redundância local  $r_i$ ), bem como a fração restante deste erro que é absorvida no modelo para a estimativa dos parâmetros incógnitos  $x$  (número de absorção local  $u_i$ ).

Inicialmente, considerando que cada observação  $y_i$  é contaminada por um erro verdadeiro  $\varepsilon_i$ , porém desconhecido, e que cada erro verdadeiro  $\varepsilon_i$  consiste, necessariamente, de uma componente aleatória ( $e_i$ ), e também de um possível erro grosso ( $\nabla_i$ ), pode-se expressar o vetor dos  $n$  erros verdadeiros  $\varepsilon_{nx1}$  que contaminam o vetor das  $n$  observações  $y_{nx1}$  por:

$$\varepsilon_{nx1} = e_{nx1} + \nabla_{nx1} \quad (4.1)$$

No processo de estimativa por mínimos quadrados, a relação entre o vetor dos resíduos ajustados  $\hat{v}_{nx1}$ , e o vetor dos erros verdadeiros  $\varepsilon_{nx1}$ , é dada por (KAVOURAS, 1982):

$$\hat{v}_{nx1} = -\frac{1}{\sigma_0^2} \Sigma_{\hat{v}} W_{nxn} \varepsilon_{nx1} = -R_{nxn} \varepsilon_{nx1} \quad (4.2)$$

Onde  $R = \frac{1}{\sigma_0^2} \Sigma_{\hat{v}} W$  é o produto entre a matriz de covariância dos resíduos ajustados  $\Sigma_{\hat{v}}$  e a matriz peso  $W$  que foi escolhida para as observações, dividido pelo fator de variância *a priori*  $\sigma_0^2$ , também arbitrário. Uma prova da expressão (4.2) é encontrada em Kavouras (1982). Recapitulando, a matriz  $R$  também pode ser definida por  $R_{nxn} = [I_{nxn} - A_{nxu}(A_{uxn}^T W_{nxn} A_{nxu})^{-1} A_{uxn}^T W_{nxn}]$  (ver as expressões 2.13; 2.20; 2.48; e 2.49).

Pela lei de propagação de covariâncias, a matriz de covariância dos resíduos ajustados é idêntica a matriz de covariância dos erros aleatórios ajustados, dada pela expressão (2.49), ou seja:  $\Sigma_{\hat{v}} = \Sigma_{\hat{e}}$ , pois  $\hat{v} = -\hat{e}$  (ver as expressões 2.45; 2.49; e 2.55).

Embora o processo de estimativa por mínimos quadrados forneça o vetor dos resíduos  $\hat{v}_{nx1}$  e a sua matriz de covariância  $\Sigma_{\hat{v}}_{nxn}$ , o vetor dos erros verdadeiros  $\varepsilon_{nx1}$  não pode ser obtido diretamente da expressão (4.2), pelo fato da matriz  $\Sigma_{\hat{v}}$  (e, portanto, da matriz  $R$ ) ser singular, e, portanto, não admitindo inversa ordinária (KAVOURAS, 1982).

Matematicamente, utilizando inversas generalizadas, é possível encontrar uma solução para os erros verdadeiros por meio da expressão (4.2), mas esta solução precisa ter significado físico razoável, ou seja, deve ser coerente com a realidade do problema, como a precisão e a correlação das observações, e em aplicações geodésicas, com a geometria da rede (OU, 1999).

Logo, para detectar a presença de erros não aleatórios nas observações, deve-se testar quantidades que são funções dos verdadeiros (e desconhecidos) erros, ou seja, deve-se utilizar testes estatísticos que verificam a influência dos erros no modelo matemático, isto é, no vetor dos resíduos  $\hat{v}_{nx1}$  (KAVOURAS, 1982).

Desta forma, é possível decompor a influência dos erros verdadeiros no vetor dos resíduos em duas componentes, uma formada apenas pelos erros aleatórios, e a outra, de interesse neste capítulo, formada pelos erros não aleatórios (grosseiros e/ou sistemáticos). Portanto, combinando as expressões (4.1) e (4.2), resulta em:

$$\hat{v}_{nx1} = -\frac{1}{\sigma_0^2} (\Sigma_{\hat{v}_{nx1}} W_{nxn} e_{nx1} + \Sigma_{\hat{v}_{nx1}} W_{nxn} \nabla_{nx1}) = e_{\hat{v}_{nx1}} + \nabla_{\hat{v}_{nx1}} \quad (4.3)$$

Onde:

- $e_{\hat{v}_{nx1}} = -\frac{1}{\sigma_0^2} \Sigma_{\hat{v}_{nx1}} W_{nxn} e_{nx1}$  é a influência dos erros aleatórios  $e_{nx1}$  sobre o vetor dos resíduos  $\hat{v}_{nx1}$ ;
- $\nabla_{\hat{v}_{nx1}} = -\frac{1}{\sigma_0^2} \Sigma_{\hat{v}_{nx1}} W_{nxn} \nabla_{nx1}$  é a influência dos erros grosseiros (isto é, não aleatórios)  $\nabla_{nx1}$  sobre o vetor dos resíduos  $\hat{v}_{nx1}$ ;

Analizando a expressão (4.3), nota-se que o vetor dos resíduos  $\hat{v}_{nx1}$  é afetado tanto pelos inevitáveis erros aleatórios, bem como por possíveis erros grosseiros (neste capítulo, assume-se que os erros sistemáticos estão devidamente parametrizados pelo modelo matemático, e qualquer possível erro não aleatório de magnitude  $\nabla$  em uma observação específica  $y_i$ , será considerado como um erro grosso).

Como a estimativa por mínimos quadrados não faz distinção sobre os diferentes tipos de erros, a minimização da soma ponderada do quadrado dos resíduos diz respeito ao efeito conjunto, e não apenas à componente dos erros aleatórios  $e_{\hat{v}_{nx1}}$ , sendo difícil, após o ajustamento, detectar possíveis erros grosseiros  $\nabla_i$  por meio da magnitude dos resíduos  $\hat{v}_i$ , embora seja esta a estratégia adotada na prática (KAVOURAS, 1982).

Das propriedades da matriz idempotente  $R_{nxn} = \frac{1}{\sigma_0^2} \Sigma_{\hat{v}_{nx1}} W_{nxn}$  (uma matriz  $R$  é idempotente se, e somente se,  $R_{nxn} = R_{nxn}R_{nxn}$ ), sabe-se que (FÖRSTNER, 1987):

$$\text{traço}[\Sigma_{\hat{\nu}} W] = \text{rank}[\Sigma_{\hat{\nu}} W] = n - u \quad (4.4)$$

Ou seja, o traço da matriz  $R_{nxn}$  é igual ao número de graus de liberdade  $n - u$  do sistema linear(izado) de equações, sendo o traço de uma matriz a soma dos elementos de sua diagonal principal (LAY, 1997).

Designando os elementos da diagonal principal da matriz  $R_{nxn} = \frac{1}{\sigma_0^2} \Sigma_{\hat{\nu}_{nx1}} W_{nxn}$  por  $r_i$  (para  $i = 1, 2, \dots, n$ ), e o número de graus de liberdade do modelo por  $r = n - u$ , considerando a expressão (4.4), pode-se escrever:

$$\sum_{i=1}^n r_i = r \quad (4.5)$$

Segundo Kavouras (1982), em geral os resíduos  $\hat{\nu}_i$  são sempre correlacionados (as covariâncias, ou seja, os elementos fora da diagonal principal de  $\Sigma_{\hat{\nu}_{nxn}}$ , não são nulos), mesmo nos casos em que as observações  $y_i$  não são correlacionadas (ou seja, a matriz de covariância das observações  $\Sigma_{y_{nxn}}$  é diagonal), devido ao fato do próprio modelo matemático produzir estas correlações não nulas dos resíduos, por meio da propagação de variâncias e covariâncias.

Portanto, em geral, para obter os elementos  $r_i$  da diagonal principal da matriz  $R$ , primeiramente, é necessário calcular o produto matricial  $R = \frac{1}{\sigma_0^2} \Sigma_{\hat{\nu}} W$ .

Entretanto, quando a matriz peso das observações  $W$  for diagonal (ou seja, apenas os elementos da diagonal principal desta não são nulos), os elementos da diagonal principal de  $R$  são obtidos diretamente por (KAVOURAS, 1982):

$$r_i = \frac{1}{\sigma_0^2} (\sigma_{\hat{\nu}_i}^2 w_{y_i}) \quad (4.6)$$

onde  $\sigma_{\hat{\nu}_i}^2$  é a variância do resíduo  $\hat{\nu}_i$  da  $i$ -ésima observação  $y_i$  (obtido na matriz de covariância dos resíduos  $\Sigma_{\hat{\nu}_{nxn}}$ ), e  $w_{y_i}$  é o respectivo peso desta observação (obtido na matriz peso  $W_{nxn}$ ). A expressão (4.6) também é válida quando a matriz  $\Sigma_{\hat{\nu}}$  for diagonal, embora na prática, conforme já mencionado, isto raramente ocorra.

Ainda sobre os elementos  $r_i$  da diagonal principal de  $R = \frac{1}{\sigma_0^2} \Sigma_{\hat{\nu}} W$ , Pope (1976) e Stefonovic (1978) demonstram que, para os casos em a matriz peso  $W$  é diagonal:

$$0 \leq r_i \leq 1 \quad (4.7)$$

Portanto, considerando também a expressão (4.3), para cada observação  $y_i$ , pode-se escrever (KAVOURAS, 1982):

$$\nabla_{\hat{v}_i} = -r_i \nabla_i \quad (4.8)$$

onde os elementos  $r_i$  são então definidos como os números de redundância local, e expressam a contribuição de cada observação  $y_i$  para a redundância total ( $r$ ) do sistema de equações (lembrando que  $\sum_{i=1}^n r_i = r = n - u$ ).

Analizando a expressão (4.8), nota-se que a influência  $\nabla_{\hat{v}_i}$  de um possível erro grosseiro no resíduo  $\hat{v}_i$  de uma observação, em módulo, é igual ao produto entre o número de redundância  $r_i$  desta observação  $y_i$  e a magnitude deste possível erro grosseiro  $\nabla_i$ . Em outras palavras, os números de redundância  $r_i$  são também uma medida de controlabilidade local (KAVOURAS, 1982), ou seja, expressam a fração de um possível erro grosseiro em uma dada observação  $y_i$ , que é diretamente refletida no respectivo resíduo  $\hat{v}_i$  desta observação (lembrando que, quando  $W$  é diagonal,  $0 \leq r_i \leq 1$ ). Portanto, quanto maior o número de redundância local  $r_i$  de uma observação  $y_i$ , maior é a controlabilidade desta observação, pois maior é a sensibilidade do respectivo resíduo  $\hat{v}_i$  desta observação à ocorrência de um possível erro grosseiro  $\nabla_i$ .

A tabela a seguir apresenta algumas classificações para a controlabilidade das observações, em função de seus números de redundância local.

Tabela 4.1 – Intervalos para a classificação da controlabilidade das observações.

Número de redundância local	Controlabilidade da observação
$0 \leq r_i < 0,01$	Não há
$0,01 \leq r_i < 0,1$	Ruim
$0,1 \leq r_i < 0,3$	Suficiente
$0,3 \leq r_i \leq 1$	Boa

Fonte: Oliveira e Dalmolin (2008)

Em Teunissen (2006) é encontrada uma expressão alternativa para os números de redundância local  $r_i$  em (4.6), também considerando a matriz peso como  $W = \sigma_0^2 \Sigma_y^{-1}$ , e sendo dada por:

$$r_i = 1 - \frac{\sigma_{\hat{y}_i}^2}{\sigma_{y_i}^2} \quad (4.9)$$

onde  $\sigma_{\hat{y}_i}^2$  é a variância da  $i$ -ésima observação ajustada  $\hat{y}_i$  e  $\sigma_{y_i}^2$  é a variância da  $i$ -ésima observação  $y_i$ .

A expressão (4.9) pode ser derivada da expressão (4.6), quando a matriz peso das observações é tomada como sendo igual à  $W = \sigma_0^2 \Sigma_y^{-1}$  e, além disso, for uma matriz diagonal, como será demonstrado a seguir.

No capítulo de ajustamento de observações, foi visto que as matrizes de covariância do vetor dos erros aleatórios ajustados  $\hat{e}_{nx1}$ , do vetor das observações  $y_{nx1}$  e do vetor das observações ajustadas  $\hat{y}_{nx1}$ , se relacionam por:  $\Sigma_{\hat{e}} = \Sigma_y - \Sigma_{\hat{y}}$ .

Logo,  $\sigma_{\hat{e}_i}^2 = \sigma_{\hat{v}_i}^2 = \sigma_{y_i}^2 - \sigma_{\hat{y}_i}^2$ , ou seja, a variância do  $i$ -ésimo resíduo  $\hat{v}_i$  é igual à diferença entre a variância da  $i$ -ésima observação  $y_i$  e da  $i$ -ésima observação ajustada  $\hat{y}_i$  (lembrando novamente que pela propagação de covariâncias:  $\Sigma_{\hat{v}} = \Sigma_{\hat{e}}$ , pois  $\hat{v} = -\hat{e}$ ).

Além disso, quando  $W = \sigma_0^2 \Sigma_y^{-1}$ , resulta em  $w_{y_i} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{y_i}^2}$ , ou seja, o peso da  $i$ -ésima observação  $y_i$  é igual ao inverso de sua variância  $\sigma_{y_i}^2$ , multiplicado pelo escalar arbitrário  $\sigma_0^2$  (ou seja, pelo fator de variância *a priori*).

Substituindo as relações apresentadas na expressão (4.6), finalmente resulta em:

$$r_i = \frac{1}{\sigma_0^2} (\sigma_{y_i}^2 - \sigma_{\hat{y}_i}^2) \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{y_i}^2} = 1 - \frac{\sigma_{\hat{y}_i}^2}{\sigma_{y_i}^2} \quad (4.10)$$

Portanto, de fato a expressão alternativa (4.9) para a expressão (4.6) é comprovada quando  $W = \sigma_0^2 \Sigma_y^{-1}$ , e, além disso, quando  $W$  for uma matriz diagonal.

Como a variância  $\sigma_{\hat{y}_i}^2$  de uma observação ajustada  $\hat{y}_i$  é sempre menor do que a variância  $\sigma_{y_i}^2$  da respectiva observação original  $y_i$  (pois  $\Sigma_{\hat{y}} = \Sigma_y - \Sigma_{\hat{e}}$ ), a expressão (4.10) também demonstra que, para os casos em que a matriz  $W$  for diagonal, os números de redundância local  $r_i$  situam-se dentro do intervalo fechado entre zero e um, conforme estabelecido pela expressão (4.7).

Considerando que  $\sum_{i=1}^n r_i = r = n - u$ , uma redundância média, pode ser definida como a média ( $\bar{r}$ ) dos elementos da diagonal principal de  $R = \frac{1}{\sigma_0^2} \Sigma_{\hat{v}} W$ , ou seja, (TEUNISSEN, 2006):

$$\bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^n r_i}{n} = \frac{n-u}{n} \quad (4.11)$$

Esta redundância média é uma medida única e global de todo o modelo, ao contrário dos números de redundância local  $r_i$  específicos de cada observação  $y_i$ .

Na prática, para a maioria das redes geodésicas obtidas por técnicas de levantamento clássicas, o número de redundância média é aproximadamente igual a  $\bar{r} \cong 0,5$ , e não pode ser aumentado facilmente (POPE, 1976). Entretanto, ressalva-se que atualmente, em Fotogrametria e Posicionamento por GNSS (*Global Navigation Satellite System*), por exemplo, o número de observações, em geral, é muito superior ao número de parâmetros, e nestes casos, o número de redundância média das observações será necessariamente maior do que  $\bar{r} > 0,5$ .

Apresentados os números de redundância, serão agora abordados os números de absorção. Do capítulo de ajustamento de observações, foi demonstrado que a matriz de covariância dos erros aleatórios ajustados é igual à  $\Sigma_{\hat{e}} = \Sigma_y - \Sigma_{\hat{y}}$ , sendo que  $\Sigma_y$  é a matriz de covariância do vetor das observações  $y_{nx1}$ , e  $\Sigma_{\hat{y}}$  é a matriz de covariância do vetor das observações ajustadas  $\hat{y}_{nx1}$ .

Considerando que  $\Sigma_{\hat{v}} = \Sigma_{\hat{e}}$ , a matriz  $R = \frac{1}{\sigma_0^2} \Sigma_{\hat{v}} W$  pode ser expressa por:

$$R_{nxn} = \frac{1}{\sigma_0^2} \Sigma_{\hat{v}} W = \frac{1}{\sigma_0^2} [\Sigma_y - \Sigma_{\hat{y}}]_{nxn} W_{nxn} \quad (4.12)$$

Como na prática, usualmente  $W = \sigma_0^2 \Sigma_y^{-1}$ , resulta em (FÖRSTNER, 1987):

$$R_{nxn} = I_{nxn} - \Sigma_{\hat{y}}_{nxn} \Sigma_y^{-1} \quad (4.13)$$

Sendo  $U_{nxn} = \Sigma_{\hat{y}}_{nxn} \Sigma_y^{-1}$  e  $I_{nxn}$  a matriz identidade  $nxn$ . De acordo com a expressão (2.48),  $\Sigma_{\hat{y}}_{nxn} = A_{nxu} \Sigma_{\hat{x}uxu} A_{uxn}^T$ , sendo  $A_{nxu}$  a matriz *design*, e  $\Sigma_{\hat{x}uxu}$  a matriz de covariância dos parâmetros estimados  $\hat{x}$ .

Desta forma,  $U = A \Sigma_{\hat{x}} A^T \Sigma_y^{-1}$ , e, como a matriz  $U$  também é uma matriz idempotente (ou seja,  $U_{nxn} = U_{nxn}U_{nxn}$ ), decorre que (FÖRSTNER, 1987):

$$\text{traço}[U] = \text{rank}[U] = \text{rank}[\Sigma_{\hat{x}uxu}] = u \quad (4.14)$$

Ou seja, o traço da matriz  $U$  é igual ao número de parâmetros incógnitos ( $u$ ) do sistema. De maneira similar as expressões (4.5) e (4.6), quando a matriz peso ( $W$ ) das observações for diagonal, designando os elementos da diagonal principal da matriz  $U = \Sigma_{\hat{y}} \Sigma_y^{-1}$  por  $u_i$  (nímeros de absorção local), pode-se escrever:

$$\sum_{i=1}^n u_i = u \quad \text{e} \quad u_i = \sigma_{\hat{y}_i}^2 \sigma_{y_i}^{-2} \quad (4.15)$$

onde  $\sigma_{\hat{y}_i}^2$  é a variância da  $i$ -ésima observação ajustada  $\hat{y}_i$  (obtida na matriz de covariância  $\Sigma_{\hat{y}}$  de  $\hat{y}_{nx1}$ ), e  $\sigma_{y_i}^{-2}$  é o inverso da variância da respectiva observação original  $y_i$  (obtida na matriz de covariância das observações  $\Sigma_{y_{nxn}}$ ).

É importante ressaltar que a matriz de covariância  $\Sigma_{\hat{y}}$  das observações ajustadas  $\hat{y}$ , tal como a matriz de covariância  $\Sigma_{\hat{v}}$  do vetor dos resíduos  $\hat{v}$ , dificilmente será diagonal, por também ser obtida pela lei de propagação de covariâncias das observações em modelos lineares. Desta forma, nos casos em que a matriz peso  $W$  não for uma matriz diagonal, o cálculo do produto matricial  $U = \Sigma_{\hat{y}} \Sigma_y^{-1}$  deve ser realizado para a determinação dos elementos  $u_i$  da diagonal principal de  $U$ , e a relação simplificada  $u_i = \sigma_{\hat{y}_i}^2 \sigma_{y_i}^{-2}$  não é válida para estes casos.

Ainda sobre os elementos  $u_i$  da diagonal principal de  $U = \Sigma_{\hat{y}} \Sigma_y^{-1}$ , no caso especial de  $W$  diagonal, das expressões (4.5), (4.12) e (4.15), para cada observação  $y_i$ , tem-se:

$$u_i + r_i = 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq u_i \leq 1 \quad (4.16)$$

Logo, de maneira análoga aos números de redundância local  $r_i$ , cada observação  $y_i$  tem o seu número de absorção local  $u_i$  (FÖRSTNER, 1987). De (4.5) e (4.15), tem-se:

$$\sum_{i=1}^n r_i = n - \sum_{i=1}^n u_i \quad \text{ou} \quad r = n - u \quad (4.17)$$

Considerando agora que um erro grossoiro  $\nabla_i$  contamina uma determinada observação  $y_i$ , multiplicando a equação (4.16) por  $\nabla_i$ , finalmente resulta em:

$$\nabla_i = (u_i + r_i) \nabla_i = u_i \nabla_i + \nabla_{\hat{v}_i} \quad (4.18)$$

A expressão (4.18) mostra que, se um erro grossoiro de magnitude  $\nabla_i$  ocorrer em apenas uma observação  $y_i$ , este erro será parcialmente refletido no respectivo resíduo  $\hat{v}_i$  desta observação, dado pela parcela  $\nabla_{\hat{v}_i}$  (ver as expressões 4.3 e 4.8), e o restante da magnitude do erro, dado pela parcela  $u_i \nabla_i$ , será absorvido na determinação dos parâmetros incógnitos do modelo, ou seja, no vetor dos parâmetros ajustados  $\hat{x}$  (KAVOURAS, 1982).

Desta forma, testes de hipóteses para a detecção e a identificação de erros, baseados na magnitude dos resíduos ajustados  $\hat{v}$ , ou dos erros aleatórios ajustados  $\hat{e} = -\hat{v}$  (como o teste global do ajustamento e o procedimento *data snooping*, por exemplo), serão eficientes para observações com valores altos para os seus números de redundância locais  $r_i$  (Figura 4.1).

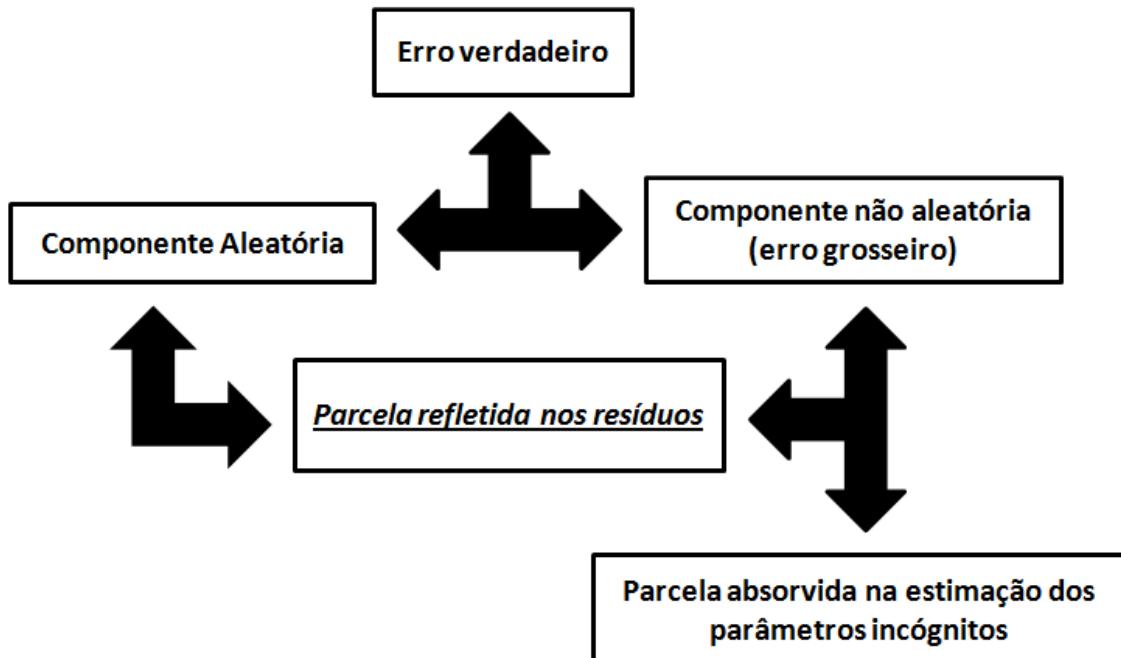


Figura 4.1 – Componentes do erro verdadeiro (componente aleatória e não aleatória) e as parcelas refletidas nos resíduos e absorvidas na estimação dos parâmetros incógnitos do modelo.

Portanto, Kavouras (1982) afirma que  $r_i = 1$  significa que 100% de um possível erro grossoiro  $\nabla_i$  em uma dada observação  $y_i$  será diretamente refletido no respectivo resíduo  $\hat{v}_i$  desta observação (observação com controle total), e, além disso, este erro não terá qualquer efeito na estimação dos parâmetros incógnitos  $\hat{x}$  do modelo.

Por exemplo, uma medida de distância entre dois pontos de controle (com coordenadas fixas, formando uma base conhecida) terá  $r_i = 1$ . Ou seja, um erro grosso nessa medida será completamente refletido em seu respectivo resíduo ajustado  $\hat{v}_i$ .

De maneira análoga, se  $r_i = 0$  (ou seja,  $u_i = 1$ ), significa que não existe controle na observação  $y_i$  correspondente; logo, um possível erro grosso  $V_i$  nesta observação não será refletido nos resíduos, e, portanto, não será detectado pelos testes.

Além disso, este erro grosso, não detectado, afetará 100% a solução final, ou seja, será diretamente transferido na determinação dos parâmetros incógnitos  $\hat{x}$ . Como por exemplo, na medição de um ângulo e de uma distância para determinar unicamente a posição de um ponto em um plano, com base em um ponto de controle, a redundância local  $r_i$  para ambas as observações será igual a  $r_i = 0$  (KAVOURAS, 1982).

A Figura 4.2 ilustra estes dois exemplos (de  $r_i = 1$  e de  $r_i = 0$ ) graficamente.

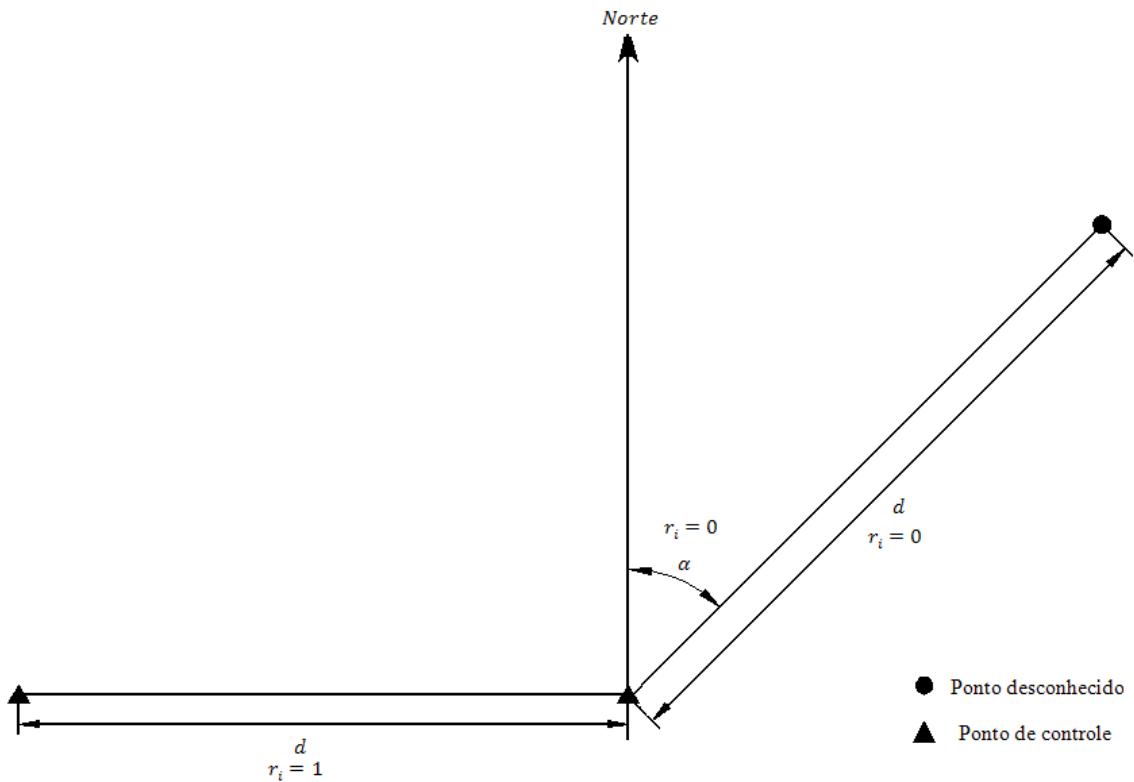


Figura 4.2 – Exemplos de observações ( $d$  = distância e  $\alpha$  = ângulo) com  $r_i = 1$  e  $r_i = 0$ .

Naturalmente, os casos extremos citados (com  $r_i = 1$  e  $r_i = 0$ ) raramente ocorrem na prática, sendo os dois exemplos apresentados sem redundância de observações (pois  $n - u = 0$ ), servindo apenas como caráter ilustrativo.

Segundo Kavouras (1982), no planejamento de redes geodésicas, é desejável que todas as observações possuam um número de redundância local  $r_i$  relativamente alto, e o mais uniforme possível para todas as observações. Na prática, infelizmente, os números de redundância local variam significativamente, o que significa que a controlabilidade não se mantém constante para todas as observações. Desta forma, os números de redundância local refletem o quanto alta ou baixa é a controlabilidade das observações em diferentes partes da rede, revelando sua rigidez geométrica.

Ainda segundo Kavouras (1982), os números de redundância local  $r_i$  são, portanto, uma característica da geometria da rede (da matriz *design A*), além da precisão das observações, e não dependem do valor numérico das observações  $y_i$  propriamente ditas.

Logo, eles devem ser considerados durante a etapa de planejamento e otimização da rede, antes das observações serem coletadas (dependem essencialmente da matriz *design A* e da matriz peso  $W$  escolhida para as observações).

Desta forma, os números de redundância e de absorção independem do fato de se estar considerando o vetor  $y$  das observações originais em um sistema linear, como em (2.3), ou o vetor  $l = y - y_0$  para o caso geral de sistemas de equações linearizados, por meio do denominado modelo de Gauss-Markov, como em (2.62).

Por fim, também é possível decompor a matriz *design A* em duas partes, uma considerando os parâmetros “de interesse” do modelo (como as coordenadas dos pontos da rede, por exemplo), e a outra considerando os parâmetros “não desejados” (como por exemplo, escala, orientação e etc.), de forma a decompor a influência de possíveis erros grosseiros  $\nabla_i$  apenas na estimativa dos parâmetros de interesse.

Mais detalhes sobre os números de redundância e de absorção podem ser obtidos em Baarda (1968), Kavouras (1982), Förstner (1987), e em Oliveira e Dalmolin (2008).

## 4.2 Confiabilidade Interna

No capítulo anterior, foi demonstrado que os testes para a detecção e a identificação de erros (não aleatórios) nas observações são formulados com base na razão de verossimilhança para modelos lineares.

Em um caso geral, as hipóteses formuladas nestes testes são da forma:

$$\begin{aligned}
H_0: E \left\{ \underline{y}_{nx1} \right\} &= A_{nxu} x_{ux1} \text{ contra} \\
H_A: E \left\{ \underline{y}_{nx1} \right\} &= A_{nxu} x_{ux1} + C_{y_{nxq}} \nabla_{qx1}, \nabla_{qx1} \neq 0_{qx1}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

onde na hipótese nula  $H_0$ , assume-se que apenas erros aleatórios estão presentes no conjunto de observações (ou seja,  $\nabla_{qx1} = 0_{qx1}$  e, portanto,  $E \left\{ \underline{y}_{nx1} \right\} = A_{nxu} x_{ux1}$ ), e na hipótese alternativa  $H_A$ , assume-se o contrário (ou seja,  $\nabla_{qx1} \neq 0_{qx1}$ ).

O critério de teste adotado é: *Rejeitar  $H_0$  se:  $\underline{T}_q > K_\alpha$* , onde  $\underline{T}_q$  é a estatística calculada,  $q$  é a dimensão do modelo de erro adotado (ou seja, o número de graus de liberdade do teste), e  $K_\alpha$  é o valor crítico para a estatística calculada  $\underline{T}_q$ , dado em função de  $q$  e do nível de significância  $\alpha$  que foi estipulado.

Sob a hipótese nula, a estatística  $\underline{T}_q$  segue distribuição qui-quadrado central com  $q$ -graus de liberdade (ou seja,  $H_0: \underline{T}_q \sim \chi^2_{(q,0)}$ ), e na hipótese alternativa, a estatística  $\underline{T}_q$  segue distribuição qui-quadrado não central, com  $q$ -graus de liberdade e um parâmetro de não centralidade  $\lambda$ , que expressa a separação entre  $H_0$  e  $H_A$  (ou seja,  $H_A: \underline{T}_q \sim \chi^2_{(q, \lambda)}$ ).

Também foi apresentando o poder do teste  $\gamma$ , definido como a probabilidade de rejeitar a hipótese nula quando de fato esta é falsa, sendo o complemento de  $\beta$  (probabilidade do erro tipo II), ou seja:  $\gamma = 1 - \beta$ . Em particular, foi demonstrado que, aumentando o poder do teste, diminui-se  $\beta$  (probabilidade do erro tipo II), porém, aumenta-se  $\alpha$  (probabilidade do erro tipo I).

Portanto, embora sempre se busque o teste que maximize  $\gamma$  (ou seja, o teste mais poderoso), deve-se ter cautela na estratégia adotada, pois, em geral, não é possível minimizar  $\alpha$  e  $\beta$  simultaneamente.

Desta forma, foi argumentado que, fixando o nível de significância  $\alpha$ , os testes para a detecção e a identificação de erros nas observações, utilizando o critério da razão de verossimilhança, são os testes uniformemente mais poderosos, ou seja, os testes que maximizam  $\gamma$  (e, portanto, minimizam  $\beta$ ), sendo, portanto, os testes usualmente utilizados na prática. Ainda sobre o poder do teste  $\gamma$  da razão de verossimilhança em (3.18), segundo Ghosh (1973):

- $\gamma$  é monotonicamente crescente com  $\alpha$ , para  $q$  e  $\lambda$  fixos;
- $\gamma$  é monotonicamente decrescente com  $q$ , para  $\alpha$  e  $\lambda$  fixos;

- $\gamma$  é monotonicamente crescente com  $\lambda$ , para  $\alpha$  e  $q$  fixos.

Estas considerações fazem sentido, pois, conforme visto, aumentando-se  $\alpha$  (probabilidade de rejeitar a hipótese nula quando esta de fato é verdadeira), aumenta-se  $\gamma$  (probabilidade de rejeitar a hipótese nula quando esta de fato é falsa).

Também conforme já visto, aumentando-se  $q$ , ou seja, o número de graus de liberdade do teste (ou ainda, número de possíveis *outliers* considerado), aumenta-se a tolerância a possíveis erros não aleatórios no modelo, aumentando-se o valor crítico tabelado para o teste, e, portanto, diminuindo  $\gamma$ .

Finalmente, quanto maior a separação entre a hipótese nula e a hipótese alternativa, ou seja, quanto maior o parâmetro de não centralidade do modelo  $\lambda$ , menor é a incerteza sobre a decisão de se rejeitar corretamente a hipótese nula, ou seja, maior é o poder do teste  $\gamma$ .

Na prática,  $\alpha$  e  $q$  são fixos, pois a estratégia de teste adotada, segundo o princípio de Neyman-Pearson, arbitra (fixa) o nível de significância  $\alpha$  do teste, e o valor de  $q$  depende da hipótese alternativa em particular considerada (por exemplo, no Teste Global do Ajustamento,  $q = n - u$ , e no procedimento *data snooping*,  $q = 1$ ). Portanto, na prática, só resta aumentar o poder do teste por meio do parâmetro de não centralidade  $\lambda$  (TEUNISSEN, 2006).

Conforme já visto nos capítulos anteriores, o parâmetro de não centralidade do modelo é dado por  $\lambda = \nabla^T C_y^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} C_y \nabla$ , e, quando,  $W = \Sigma_y^{-1}$  ( $\sigma_0^2 = 1$ ), a matriz de covariância dos resíduos é dada por:  $\Sigma_{\hat{e}} = \Sigma_y - [A(A^T \Sigma_y^{-1} A)^{-1} A^T]$ . Desta forma, o parâmetro de não centralidade do modelo pode ser expresso como:

$$\lambda = \nabla^T C_y^T [\Sigma_y^{-1} - \Sigma_y^{-1} A (A^T \Sigma_y^{-1} A)^{-1} A^T \Sigma_y^{-1}] C_y \nabla \quad (4.20)$$

A expressão (4.20) demonstra que o parâmetro  $\lambda$  depende de (TEUNISSEN, 2006):

- $\Sigma_y^{-1}$ , a matriz de covariância inversa das observações, ou seja, da precisão das observações (quanto mais precisas forem as observações, menor são as suas variâncias, e portanto, maior é o parâmetro  $\lambda$ , ou seja, o poder do teste  $\gamma$ );
- Da matriz *design*  $A$ , ou seja, em aplicações geodésicas, da geometria (configuração) da rede (quanto maior a dimensão do espaço das linhas da matriz  $A$ , ou seja, o número de observações, maior o parâmetro  $\lambda$ );

- Do modelo de erro  $C_y \nabla$  adotado, ou seja, da diferença entre  $E\{\underline{y} | H_A\}$  e  $E\{\underline{y} | H_0\}$  (quanto maior a magnitude  $\nabla$  dos erros não aleatórios, maior é a separação entre as hipóteses nula e alternativa, e maior é o parâmetro  $\lambda$ ).

Teunissen (2006) também salienta que, na prática, o modelo de erro  $C_y \nabla$  é desconhecido (a magnitude dos erros verdadeiros que contaminam as observações é sempre desconhecida), e desta forma, nunca será possível calcular o verdadeiro poder do teste  $\gamma$ .

Logo, o que se pode fazer é atribuir um valor para o modelo de erro  $C_y \nabla = E\{\underline{y} | H_A\} - E\{\underline{y} | H_0\}$ , e calcular o poder do teste  $\gamma$  correspondente, caso esta separação entre a hipótese nula e a hipótese alternativa fosse de fato verdadeira.

Entretanto, em aplicações geodésicas, o interesse maior consiste no modelo de erro  $C_y \nabla$  que contamina o vetor das observações, e não no poder do teste propriamente dito. Desta forma, na prática, a estratégia adotada é fixar um valor de referência ( $\gamma_0$ ) para o poder do teste (usualmente, atribui-se  $\gamma_0 = 0,8$ ), e, junto com o nível de significância  $\alpha$  estipulado e o número de graus de liberdade  $q$ , encontrar um valor de referência  $\lambda_0$  para o parâmetro de não centralidade:  $\lambda_0 = \lambda(\alpha, q, \gamma = \gamma_0)$ .

Por exemplo, para o procedimento de teste *data snooping*, estipulando  $\alpha_0 = 0,001$ ,  $q = 1$  e  $\gamma_0 = 0,8$ , o parâmetro de não centralidade é dado por  $\lambda_0 = 17,075$ .

Valores tabelados para o parâmetro de não centralidade  $\lambda$  do modelo para diferentes valores de  $\alpha$ ,  $q$ , e  $\gamma$  podem ser obtidos em Baarda (1968).

Conforme já comentado, Baarda (1968), por meio do Método  $\beta$ , propõe o uso do teste global do ajustamento para a detecção de erros nas observações, e o procedimento de teste *data snooping* para a identificação dos erros (quais são as observações suspeitas de estarem contaminadas). Como as decisões de ambos os testes devem ser coerentes, o poder do teste  $\gamma$  deve ser o mesmo para os dois.

Entretanto, para o caso do procedimento *data snooping*,  $q = 1$ , e para o teste global do ajustamento,  $q = n - u$ . Logo, para manter o mesmo poder de teste  $\gamma$  para ambos, os níveis de significância dos dois testes não podem ser os mesmos, pois:  $\lambda = f(\alpha, q, \gamma)$ .

Frente a estas considerações, Baarda (1968) propõe o seguinte procedimento:

- Escolher o nível de significância  $\alpha_0$  do procedimento *data snooping*;

- Escolher o poder  $\gamma = \gamma_0$  de ambos os testes;
- Obter o parâmetro de não centralidade  $\lambda_0 = \lambda(\alpha_0, q = 1, \gamma = \gamma_0)$ ;
- Obter o nível de significância  $\alpha$  do teste global do ajustamento (em tabelas ou monogramas para  $\lambda$ ), considerando  $\lambda_0 = \lambda(\alpha, q = n - u, \gamma = \gamma_0)$ ;

Baarda (1968) também recomenda os valores de  $\alpha_0 = 0,001$  para o nível de significância do procedimento *data snooping*, e  $\gamma_0 = 0,8$  para o poder de ambos os testes, afirmando que a escolha de  $\gamma_0$  não é tão crítica quanto à escolha de  $\alpha_0$  para os resultados dos testes. A dependência entre o nível de significância  $\alpha$  do teste global do ajustamento (para diferentes valores de  $q = n - u$ ) e do procedimento *data snooping* ( $q = 1$ ) pode ser encontrada em monogramas em Baarda (1968).

Uma outra forma de se obter  $\alpha$  por meio de  $\alpha_0$ , é dada por:  $\alpha = 1 - (1 - \alpha_0)^n$  (POPE, 1976), pressupondo que as ocorrências de possíveis erros não aleatórios em cada observação  $y_i$  são eventos independentes (sem correlações entre si).

Outra expressão aproximada para se obter  $\alpha$  em função de  $\alpha_0$ , muito utilizada em análise multivariada, é dada pela desigualdade de Bonferroni:  $\alpha = n \alpha_0$  (CHEN et al., 1987).

A desigualdade de Bonferroni estabelece que (KAVOURAS, 1982):

- Se os eventos (ocorrência de erros não aleatórios) não são correlacionados, o nível de significância para o teste global é  $\alpha$ ;
- Se os eventos são correlacionados, o nível de significância para o teste global do ajustamento é menor do que  $\alpha$ ;

Em outras palavras:  $\alpha_0 \geq \alpha/n$ , e então, escolhendo  $\alpha_0 = \alpha/n$ , a desigualdade de Bonferroni é a escolha mais conservativa, isto é, mais relutante para rejeitar a hipótese nula do procedimento *data snooping* (KAVOURAS, 1982).

Desta forma, considerando um valor de referência  $\lambda_0$  para o parâmetro de não centralidade do modelo (tabelado em função de  $\alpha_0$ ,  $q$  e  $\gamma_0$ ), a expressão (4.20) se torna:

$$\lambda_0 = \nabla^T C_y^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{\theta}_0} \Sigma_y^{-1} C_y \nabla \quad (4.21)$$

Denotando por  $\nabla y$  o modelo de erro associado à  $\lambda_0$ , tem-se (TEUNISSEN, 2006):

$$\nabla y_{nx1} = C_{y_{nxq}} \nabla_{qx1} = E\{y_{nx1}|H_A\} - E\{y_{nx1}|H_0\} \quad (4.22)$$

O vetor  $n$  dimensional  $\nabla y_{nx1}$  é dito descrever a confiabilidade interna de  $H_0$  com respeito à  $H_A$ . Em outras palavras, a confiabilidade interna  $\nabla y$  é descrita como uma medida do modelo de erro  $C_y \nabla$ , que pode ser detectada com uma probabilidade  $\gamma = \gamma_0$ , pelo teste definido em (4.19) (TEUNISSEN, 2006).

Infelizmente, a expressão (4.20) não tem solução única para  $\nabla$  (por exemplo, se  $q = 2$ , tem-se apenas uma equação a duas incógnitas). Entretanto, neste capítulo será considerado apenas o caso  $q = 1$ , em particular para o procedimento de teste *data snooping*, abordado no capítulo anterior e que assume que apenas uma observação é suspeita de estar contaminada por erro por vez.

Desta forma, quando  $q = 1$ , a matriz  $C_{y_{nxq}}$  se reduz ao vetor  $c_y_{nx1}$ , e o vetor  $\nabla_{qx1}$  se reduz ao escalar  $\nabla$ . Logo, a expressão (4.20) pode ser expressa por:

$$\lambda_0 = c_y^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} c_y \nabla^2 \quad (4.23)$$

Neste caso, o termo  $c_y^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} c_y$  se torna um escalar  $(c_y^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} c_y)_{1x1}$ , e a solução desta forma quadrática, em termos de  $\nabla$ , é dada por (TEUNISSEN, 2006):

$$|\nabla| = \sqrt{\frac{\lambda_0}{c_y^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} c_y}} \quad (4.24)$$

O módulo do escalar  $|\nabla|$  é chamado de menor erro detectável pelo teste  $T_{q=1}$ , com uma probabilidade  $\gamma = \gamma_0$ , e devido à forma quadrática de (4.23), apenas pode-se determinar o módulo  $|\nabla|$  deste menor erro detectável, mas não o seu sinal (TEUNISSEN, 2006).

Por exemplo, caso  $c_y = [1 \ 1 \ \dots \ 1]_{nx1}^T$ , o escalar  $|\nabla|$  é o menor erro sistemático detectável pelo teste (comum a todas as observações do vetor  $y_{nx1}$ ).

No caso do procedimento *data snooping*, onde  $c_y_{nx1} = c_y_i = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \underset{i}{1} \ 0 \ \dots \ 0]_{nx1}^T$ , sendo  $i$  correspondente a linha da  $i$ -ésima (e única) observação  $y_i$  suspeita de estar contaminada por erros não aleatórios, a expressão (4.24) torna-se (BAARDA, 1968):

$$|\nabla_{y_i}| = \sqrt{\frac{\lambda_0}{c_{y_i}^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} c_{y_i}}} \quad (4.25)$$

Onde  $|\nabla_{y_i}|$  descreve o menor erro detectável (em módulo) na  $i$ -ésima observação  $y_i$ , assumindo que esta é a única observação suspeita de estar contaminada por um erro não aleatório, pois  $c_{y_{nx1}} = c_{y_i} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \underset{i}{1} \ 0 \ \dots \ 0]^T_{nx1}$  (BAARDA, 1968).

Ainda, para o caso do procedimento *data snooping*, quando a matriz de covariância das observações  $\Sigma_y$  é diagonal, o escalar  $c_{y_i}^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} c_{y_i}$  se torna:

$$c_{y_i}^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} c_{y_i} = c_{y_i}^T \sigma_{y_i}^{-2} \Sigma_{\hat{e}_0} \sigma_{y_i}^{-2} c_{y_i} = \sigma_{y_i}^{-4} c_{y_i}^T \Sigma_{\hat{e}_0} c_{y_i} \quad (4.26)$$

Sendo  $\sigma_{y_i}^{-2}$  o inverso da variância  $\sigma_{y_i}^2$  da  $i$ -ésima observação  $y_i$ . Conforme já visto,  $\Sigma_{\hat{e}} = \Sigma_y - \Sigma_{\hat{y}}$ , e, como  $c_{y_i} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \underset{i}{1} \ 0 \ \dots \ 0]^T_{nx1}$ , o produto  $\sigma_{y_i}^{-4} c_{y_i}^T \Sigma_{\hat{e}_0} c_{y_i}$  resulta em:

$$\sigma_{y_i}^{-4} c_{y_i}^T \Sigma_{\hat{e}_0} c_{y_i} = \sigma_{y_i}^{-4} (\sigma_{y_i}^2 - \sigma_{\hat{y}_i}^2) = \sigma_{y_i}^{-2} \left(1 - \frac{\sigma_{\hat{y}_i}^2}{\sigma_{y_i}^2}\right) \quad (4.27)$$

Substituindo (4.27) em (4.25), o menor erro detectável para a  $i$ -ésima observação  $y_i$ , quando a matriz de covariância  $\Sigma_y$  das observações é diagonal, se torna (TEUNISSEN, 2006):

$$|\nabla_{y_i}| = \sqrt{\frac{\lambda_0}{\sigma_{y_i}^{-2} \left(1 - \frac{\sigma_{\hat{y}_i}^2}{\sigma_{y_i}^2}\right)}} = \sigma_{y_i} \sqrt{\frac{\lambda_0}{\left(1 - \frac{\sigma_{\hat{y}_i}^2}{\sigma_{y_i}^2}\right)}} \quad (4.28)$$

Ou seja, quanto menor for a razão  $\frac{\sigma_{\hat{y}_i}^2}{\sigma_{y_i}^2}$  (lembrando que  $\sigma_{\hat{y}_i}^2 \leq \sigma_{y_i}^2$ ), menor é  $\nabla_{y_i}$ , o que faz sentido, pois, quanto menor a variância de  $\hat{y}_i$  em relação a variância de  $y_i$ , menor é o “erro mínimo detectável” nesta observação (TEUNISSEN, 2006).

Lembrando ainda que, nos casos em que a matriz peso  $W$  das observações é diagonal e igual à  $W = \sigma_0^2 \Sigma_y^{-1}$ , o número de redundância local ( $r_i$ ) da  $i$ -ésima observação  $y_i$  é dado por

$$r_i = 1 - \frac{\sigma_{\hat{y}_i}^2}{\sigma_{y_i}^2},$$

e, portanto, a expressão (4.28) pode ser escrita como:

$$|\nabla_{y_i}| = \sigma_{y_i} \sqrt{\frac{\lambda_0}{r_i}} \quad (4.29)$$

Segundo Kavouras (1982), os coeficientes  $\sqrt{\frac{\lambda_0}{r_i}}$  (para cada observação  $y_i$ ) em (4.29) revelam a sensibilidade do teste. São desejáveis valores baixos para estes coeficientes, pois, quanto menor  $\sqrt{\frac{\lambda_0}{r_i}}$ , maior é  $r_i$ , ou seja, maior é o número de redundância local da  $i$ -ésima observação (a fração de um possível erro grosseiro em  $y_i$  que será refletida no respectivo resíduo  $\hat{v}_i$  desta observação) e, portanto, maior é a sensibilidade do procedimento de teste *data snooping* em identificar este possível erro.

Em resumo, para o cálculo da confiabilidade interna do *data snooping*, em um caso geral, utiliza-se a expressão (4.25), e se caso não houver covariâncias entre as observações (ou seja, a matriz  $\Sigma_y$  for diagonal), pode-se utilizar a expressão (4.28) ou ainda a expressão (4.29).

Uma outra simplificação também pode ser feita para o menor erro detectável em uma observação  $y_i$ . Considerando que  $r_i$  é a redundância local de  $y_i$ , e que a redundância média das observações é dada por  $\bar{r} = (n - u)/n$ , substituindo a redundância local  $r_i$  pela redundância média  $\bar{r}$  em (4.29), tem-se a seguinte aproximação (TEUNISSEN, 2006):

$$|\nabla_{y_i}| \cong \sigma_{y_i} \sqrt{\frac{\lambda_0}{(n-u)/n}} \quad (4.30)$$

A expressão (4.30) para  $|\nabla_{y_i}|$ , ao contrário das expressões (4.25), (4.28) e (4.29), não requer que o ajustamento por mínimos quadrados tenha sido realizado (pois independe de  $\Sigma_{\hat{e}_0}$ , de  $\sigma_{\hat{y}_i}^2$ , e até mesmo do vetor das observações  $y_{nx1}$ ), necessitando apenas de um conhecimento da possível precisão (desvio padrão  $\sigma_{y_i}$ ) da observação  $y_i$ , do parâmetro de não centralidade (tabelado) do modelo  $\lambda_0 = \lambda(\alpha, q, \gamma = \gamma_0)$ , e do número de observações ( $n$ ) e de parâmetros ( $u$ ) do sistema de equações.

Desta forma, a expressão (4.30) pode ser utilizada como uma estimativa *a priori* da confiabilidade interna (menor erro detectável) de cada observação  $y_i$ , com uma probabilidade  $\gamma = \gamma_0$ , podendo, em aplicações geodésicas, ser utilizada na etapa de planejamento da rede.

Nota-se também que o termo  $\sqrt{\frac{\lambda_0}{(n-u)/n}}$  é uma constante para todas as observações testadas.

Kavouras (1982) salienta que, como a experiência mostra que em muitas redes geodésicas:  $\frac{n-u}{n} \cong 0,5$ , usando a expressão (4.30) para  $\lambda_0 = 17,075$  ( $\alpha_0 = 0,001$ ,  $q = 1$  e  $\gamma_0 = 0,8$ ), resulta em:

$$|\nabla_{y_i}| \cong \sigma_{y_i} \sqrt{\frac{17,075}{0,5}} \cong 5,8 \sigma_{y_i} \quad (4.31)$$

Ou seja, nestes casos, um erro grosseiro de magnitude menor que  $5,8 \sigma_{y_i}$  em uma observação  $y_i$ , em geral não será detectado pelo procedimento de teste *data snooping* (que considera a magnitude dos erros aleatórios ajustados, ou, analogamente, dos resíduos), segundo os níveis de probabilidade de  $\alpha_0 = 0,001$  e  $\gamma_0 = 0,8$ . Ressalva-se que, modernamente, o número de observações pode ser muito maior que o número de parâmetros, e consequentemente, nestes casos, a redundância média das observações será:  $\bar{r} > 0,5$ .

Por fim, Stefanovic (1980) afirma que a escolha do nível de significância ( $\alpha$ ) do teste é subjetiva, pois reflete apenas um grau de relutância, descrença ou conservadorismo. Em geral, critérios objetivos não são disponíveis.

Entretanto, em aplicações geodésicas, o mesmo autor afirma que os níveis de probabilidade  $\alpha$  e  $\gamma$  podem ser arbitrados, se as tolerâncias são estabelecidas *a priori*, considerando o efeito máximo dos possíveis erros (não detectados) nos resultados, pressupondo que as observações tenham sido coletadas com cuidado.

Esta influência de possíveis erros não detectados pelos testes, nos resultados finais do ajustamento (ou seja, nos parâmetros estimados), será abordada na próxima seção, a confiabilidade externa.

### 4.3 Confiabilidade Externa

Na seção anterior, foi apresentado o conceito de confiabilidade interna, referente ao menor modelo de erro  $\nabla y_{nx1} = C_{y_{nxq}} \nabla_{qx1}$  que pode ser detectado por um teste da razão de verossimilhança, com uma probabilidade  $\gamma = \gamma_0$ .

Em particular, foi apresentado o caso do procedimento *data snooping*, onde para cada  $i$ -ésima observação  $y_i$ ,  $C_{y_{nxq}} = c_{y_i} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \underset{i}{\overset{1}{\omega}} \ 0 \ \dots \ 0]_{nx1}^T$  e  $\nabla_{qx1} = \nabla_{y_i}$ , e desta forma, a confiabilidade interna se torna o menor erro  $\nabla$  (em módulo) detectável em  $y_i$  (cada observação  $y_i$  do vetor das observações  $y_{nx1}$  tem sua confiabilidade interna, ou seja, seu menor erro detectável  $\nabla_{y_i}$ , com uma probabilidade  $\gamma = \gamma_0$ ).

Nesta seção, será abordada a confiabilidade externa das observações. A confiabilidade externa é definida como a influência do modelo de erro  $\nabla y$  sobre os resultados finais (ou seja, o vetor dos parâmetros estimados  $\hat{x}$ ) de um ajustamento de observações (TEUNISSEN, 2006).

Em outras palavras, a confiabilidade externa revela a influência de possíveis erros não detectados (com uma probabilidade  $\gamma = \gamma_0$ ) sobre os parâmetros de interesse de um modelo, como por exemplo, as coordenadas dos pontos de uma rede geodésica.

Desta forma, denotando por  $\hat{x}_{ux1}$  o estimador por mínimos quadrados do vetor dos  $u$  parâmetros incógnitos de um modelo linear do tipo:  $y_{nx1} = A_{nxu}x_{ux1}$ , e considerando na hipótese nula que apenas erros aleatórios contaminam as observações  $y_{nx1}$  (enquanto na hipótese alternativa, presume-se a existência de erros grosseiros em  $y_{nx1}$ ), para a confiabilidade externa, podem ser considerados os seguintes casos (TEUNISSEN, 2006):

- A influência de  $\nabla y_{nx1}$  sobre  $\hat{x}_{ux1}$ ;
- A influência de  $\nabla y_{nx1}$  sobre uma parte  $\hat{x}_{lx1}$  de  $\hat{x}_{ux1}$  (com  $l < u$ );
- A influência de  $\nabla y_{nx1}$  sobre uma função linear  $\hat{\theta}_{1x1}$  de  $\hat{x}_{ux1}$ , da forma  

$$\hat{\theta}_{1x1} = a_{1xu}\hat{x}_{ux1};$$

Neste capítulo, apenas o primeiro caso será abordado. O estimador por mínimos quadrados  $\hat{x}_{ux1}$  de  $x_{ux1}$ , de acordo com a expressão (2.11), é dado por:

$$\hat{x}_{ux1} = (A_{uxn}^T W_{nxn} A_{nxu})^{-1} A_{uxn}^T W_{nxn} y_{nx1} \quad (4.32)$$

Onde  $A_{nxu}$  é a matriz *design* do modelo linear(izado), e  $W_{nxn}$  é a matriz peso escolhida para o vetor das observações  $y_{nx1}$ . Da expressão (4.32), segue que:

$$E\{\hat{x}_{ux1}|H_A\} = (A_{uxn}^T W_{nxn} A_{nxu})^{-1} A_{uxn}^T W_{nxn} E\{y_{nx1}|H_A\} \quad (4.33)$$

Pois nenhuma hipótese sobre  $A_{nxu}$  ou  $W_{nxn}$  é formulada em  $H_A$  (para maiores detalhes sobre os testes de hipóteses no ajustamento de observações, recomenda-se o capítulo anterior). De acordo com (3.7),  $E\{y_{nx1}|H_A\} = A_{nxu}x_{ux1} + C_{y_{nxq}}\nabla_{qx1}$ , e de acordo com (2.65),  $E\{\hat{x}_{ux1}|H_0\} = x_{ux1}$ . Substituindo (3.7) e (2.65) em (4.33), tem-se:

$$E\{\hat{x}_{ux1}|H_A\} = E\{\hat{x}_{ux1}|H_0\} + (A_{uxn}^T W_{nxn} A_{nxu})^{-1} A_{uxn}^T W_{nxn} C_{y_{nxq}}\nabla_{qx1} \quad (4.34)$$

Como  $\nabla_{y_{nx1}} = C_{y_{nxq}}\nabla_{qx1} = E\{y_{nx1}|H_A\} - E\{y_{nx1}|H_0\}$ , e, denotando  $E\{\hat{x}_{ux1}|H_A\} - E\{\hat{x}_{ux1}|H_0\}$  por  $\nabla\hat{x}_{ux1}$ , a expressão (4.34) resulta em (TEUNISSEN, 2006):

$$\nabla\hat{x}_{ux1} = E\{\hat{x}|H_A\} - E\{\hat{x}|H_0\} = (A_{uxn}^T W_{nxn} A_{nxu})^{-1} A_{uxn}^T W_{nxn} \nabla y_{nx1} \quad (4.35)$$

Este vetor  $\nabla\hat{x}_{ux1}$  descreve a influência do modelo de erro  $\nabla y_{nx1}$  sobre  $\hat{x}_{ux1}$ , ou seja, é a confiabilidade externa do vetor das observações  $y_{nx1}$  sobre o vetor dos parâmetros ajustados  $\hat{x}_{ux1}$ , com uma probabilidade  $\gamma = \gamma_0$ .

No caso do procedimento de teste *data snooping*, onde a confiabilidade interna (MDB) de cada observação  $y_i$  é dada, em módulo, por  $|\nabla_{y_i}|$ , e, mais formalmente,  $\nabla_{y_{nx1}} = c_{y_{i,nx1}} |\nabla_{y_i}|_{1x1}$ , a confiabilidade externa finalmente resulta em:

$$\nabla\hat{x}_{i,ux1} = (A_{uxn}^T W_{nxn} A_{nxu})^{-1} A_{uxn}^T W_{nxn} c_{y_{i,nx1}} |\nabla_{y_i}|_{1x1} \quad (4.36)$$

O vetor  $\nabla\hat{x}_{i,ux1}$  expressa a influência do menor erro não detectável na observação  $y_i$  (com uma probabilidade de  $\gamma = \gamma_0$ ) sobre as estimativas dos  $u$  parâmetros incógnitos do modelo linear.

Nota-se que, apesar da confiabilidade interna  $|\nabla_{y_i}|$  (menor erro detectável) de uma observação  $y_i$  ser dada em módulo a partir da equação (4.25), o vetor da confiabilidade externa  $\nabla \hat{x}_{ux1}$  pode conter elementos negativos e/ou positivos, por ser derivado da expressão (2.11) para o estimador por mínimos quadrados de  $x_{ux1}$ .

Segundo Kavouras (1982), a expressão (4.36) não é uma estimativa usual da confiabilidade externa  $\nabla \hat{x}_{ux1}$  das observações  $y_{nx1}$ , pois requer um largo número de cálculos, pois, para cada parâmetro estimado  $\hat{x}_j$  de  $\hat{x}_{ux1}$  (para  $j = 1, 2, \dots, u$ ), tem-se  $n$  diferentes componentes de  $\nabla \hat{x}_j$ , uma para cada observação  $y_i$  em específico (pois no procedimento *data snooping*, assume-se que apenas uma observação é suspeita de estar contaminada por erros por vez). Estas considerações, dentre outras, serão abordadas na próxima seção, razão tendência-ruído (*bias-to-noise ratio*).

#### 4.4 Razão Tendência-Ruído

Nas duas seções anteriores, foram apresentadas a confiabilidade interna e a confiabilidade externa das observações, na estimação por mínimos quadrados em modelos lineares. A confiabilidade interna é definida como o menor modelo de erro  $\nabla y_{nx1} = C_{y_{nxq}} \nabla_{qx1}$  que pode ser detectado por um teste da razão de verossimilhança  $T_q$ , com uma probabilidade  $\gamma = \gamma_0$ . A confiabilidade externa expressa a influência deste possível modelo de erro não detectado no vetor dos parâmetros estimados  $\hat{x}_{ux1}$ .

Em particular, foi apresentado o caso do procedimento *data snooping*, onde a confiabilidade interna se reduz ao menor erro detectável na  $i$ -ésima observação  $y_i$ , e a confiabilidade externa se reduz a influência deste possível menor erro detectável em  $y_i$ , no vetor dos parâmetros estimados  $\hat{x}_{ux1}$ .

Um problema que surge adotando esta estratégia de teste para detecção e identificação de erros, é que, para cada observação  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), tem-se uma confiabilidade interna diferente, e para cada confiabilidade interna, tem-se uma confiabilidade externa associada, levando, na prática, a um largo número de cálculos.

Uma maneira de se reduzir este número de cálculos é substituir os vetores confiabilidade interna  $\nabla y_{nx1}$  e confiabilidade externa  $\nabla x_{ux1}$  por medidas escalares.

Desta forma, primeiramente, para o vetor confiabilidade interna, considerando  $\nabla y_{nx1}$  um possível vetor de erros (*bias*) não detectados no vetor das observações  $y_{nx1}$ , e  $\Sigma_{y_{nxn}}$  a matriz de covariância de  $y_{nx1}$ , ou seja, uma descrição do ruído (*noise*) em  $y_{nx1}$ , pode-se definir o escalar quadrático *bias-to-noise ratio* (razão tendência-ruído) de  $y_{nx1}$  por (PAPOULIS, 1991):

$$\lambda_y = \nabla y_{1xn}^T \Sigma_{y_{nxn}}^{-1} \nabla y_{nx1} \quad (4.37)$$

Analizando a expressão (4.37), nota-se que esta se trata da soma do quadrado dos elementos de  $\nabla y$ , ponderada pela matriz de covariância das observações  $y_{nx1}$ , semelhante à forma quadrática  $e_{1xn}^T W_{nxn} e_{nx1}$  que se deseja minimizar no ajustamento por mínimos quadrados ponderados.

Um alto valor para  $\lambda_y$  indica que o modelo de erro  $\nabla y_{nx1}$  é estatisticamente significante, e um valor pequeno para  $\lambda_y$  indica que o modelo de erro  $\nabla y_{nx1}$  não é estatisticamente significante (com uma probabilidade  $\gamma = \gamma_0$ ). Nota-se ainda que  $\lambda_y = \|C_{y_{nxq}} \nabla_{qx1}\|^2$ , ou seja,  $\lambda_y$  corresponde ao quadrado da separação entre  $E\{y_{nx1}|H_A\}$  e  $E\{y_{nx1}|H_0\}$ , com respeito à métrica  $\Sigma_{y_{nxn}}^{-1}$  (TEUNISSEN, 2006).

No caso do procedimento *data snooping* (4.25), a expressão (4.37) se torna:

$$\lambda_{y_i} = \frac{c_{y_i}^T \Sigma_y^{-1} c_{y_i}}{c_{y_i}^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}} \Sigma_y^{-1} c_{y_i}} \lambda_0 \quad (4.38)$$

Ainda neste caso, quando  $\Sigma_y$  é diagonal (ou seja, as observações não são correlacionadas), a expressão (4.38) se reduz para (TEUNISSEN, 2006):

$$\lambda_{y_i} = \frac{\lambda_0}{\left(1 - \frac{\sigma_{\hat{y}_i}^2}{\sigma_{y_i}^2}\right)} = \frac{\lambda_0}{r_i} \quad (4.39)$$

Analizando a expressão (4.39), nota-se que  $\lambda_{y_i} \geq \lambda_0$ , pois  $0 \leq r_i \leq 1$ . Denotando o valor máximo para a razão de (4.38) por  $\lambda_{máx}$ , tem-se:

$$\lambda_{\max} = \max \left( \frac{c_{y_i}^T \Sigma_y^{-1} c_{y_i}}{c_{y_i}^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}} \Sigma_y^{-1} c_{y_i}} \right) \quad (4.40)$$

Com  $\lambda_{\max}$ , pode-se definir um limite superior para  $\lambda_y$  (TEUNISSEN, 2006):

$$\lambda_y \leq \lambda_{\max} \lambda_0 \quad (4.41)$$

Onde  $\lambda_{\max}$  é igual ao maior autovalor do problema de autovalores generalizado:

$$|c_{y_i}^T \Sigma_y^{-1} c_{y_i} - \lambda c_{y_i}^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} c_{y_i}| = 0 \quad (4.42)$$

Detalhes sobre os problemas de autovalores podem ser encontrados em Lay (1997), Strang e Borre (1997), e Teunissen (2006). No caso do procedimento *data snooping*, a utilização da razão tendência-ruído para a confiabilidade interna não é muito vantajosa, pois o vetor  $\nabla_{q_{x1}}$  já se reduz ao escalar  $\nabla_{y_i}$  (menor erro detectável em  $y_i$ ), sendo esta razão mais utilizada nos demais casos, quando  $1 < q < n - u$  (TEUNISSEN, 2006).

De maneira análoga, para o vetor confiabilidade externa, considerando  $\nabla \hat{x}_{ux1}$  um possível vetor de erros (*bias*) não detectados no vetor dos parâmetros estimados  $\hat{x}_{ux1}$ , e  $\Sigma_{\hat{x}_{ux1}}$  a matriz de covariância de  $\hat{x}_{ux1}$ , ou seja, uma descrição do ruído (*noise*) em  $\hat{x}_{ux1}$ , pode-se definir o escalar quadrático *bias-to-noise ratio* (razão tendência ruído) de  $\hat{x}_{ux1}$  por (PAPOULIS, 1991):

$$\lambda_{\hat{x}} = \nabla \hat{x}_{1xu}^T \Sigma_{\hat{x}_{uxu}}^{-1} \nabla \hat{x}_{ux1} \quad (4.43)$$

Segundo Teunissen (2006), um alto valor para  $\lambda_{\hat{x}}$  indica que a influência do modelo de erro  $\nabla y_{nx1}$  sobre  $\hat{x}_{ux1}$  é estatisticamente significante, e um valor pequeno para  $\lambda_{\hat{x}}$  indica que a influência do modelo de erro  $\nabla y_{nx1}$  sobre  $\hat{x}_{ux1}$  não é estatisticamente significante (com uma probabilidade  $\gamma = \gamma_0$ ). O mesmo autor demonstra uma expressão de cálculo alternativa para  $\lambda_{\hat{x}}$ , dada por:

$$\lambda_{\hat{x}} = \lambda_y - \lambda_0 \quad (4.44)$$

Onde  $\lambda_y$ , no caso geral, é dado por (4.37), ou seja, depende do modelo de erro  $\nabla y_{nx1}$  considerado. Analisando a expressão (4.44), nota-se novamente que  $\lambda_y \geq \lambda_0$ . Além disso, quando  $\lambda_y = \lambda_0$ , tem-se  $\lambda_{\hat{x}} = 0$ , ou seja, os erros (não aleatórios) não exercem nenhuma influência sobre a estimativa  $\hat{x}$  dos parâmetros  $x$ , sendo completamente refletidos no vetor dos resíduos, o que ocorre quando  $r_i = 1$  e está de acordo com a expressão (4.39).

Segundo Kavouras (1982), uma das vantagens desta nova variável padronizada (razão tendência-ruído), é que, ao contrário do vetor confiabilidade externa  $\nabla \hat{x}_{ux1}$ , ela é invariante com respeito ao sistema de referência adotado, e também pode ser considerada como uma medida da confiabilidade dos resultados, sendo desejáveis valores baixos para  $\lambda_{\hat{x}}$ , para qualquer modelo de erro  $\nabla y_{nx1}$  considerado.

Considerando agora o procedimento *data snooping*, onde para cada  $i$ -ésima observação  $y_i$ , tem-se uma confiabilidade interna associada, a razão tendência-ruído da confiabilidade externa de cada observação  $y_i$  é dada por (KAVOURAS, 1982):

$$\lambda_{\hat{x}_i} = \frac{c_{y_i}^T \Sigma_y^{-1} A \Sigma_{\hat{x}} A^T \Sigma_y^{-1} c_{y_i}}{c_{y_i}^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}} \Sigma_y^{-1} c_{y_i}} \lambda_0 \quad (4.45)$$

Ainda no caso do *data snooping*, quando  $\Sigma_y$  é diagonal (ou seja, as observações são “independentes” entre si), a expressão (4.45) se reduz para (KAVOURAS, 1982):

$$\lambda_{\hat{x}_i} = \lambda_0 \frac{u_i}{r_i} \quad (4.46)$$

Como as expressões (4.45) e (4.46) independem do valor numérico do vetor das observações  $y_{nx1}$ , apenas da precisão das observações e da geometria da rede, estas podem ser usadas durante a etapa de planejamento da rede geodésica, como um limite superior para a confiabilidade externa (KAVOURAS, 1982).

Desta forma, caso esteja-se interessado apenas no  $j$ -ésimo elemento  $\nabla \hat{x}_j$  de  $\nabla \hat{x}_{ux1}$  (ou seja, apenas na influência de  $\nabla y_{nx1}$  sobre um único parâmetro estimado  $\hat{x}_j$ ), este terá como limite superior o seguinte escalar (TEUNISSEN, 2006):

$$|\nabla \hat{x}_j| \leq \sigma_{\hat{x}_j} \sqrt{\lambda_{\hat{x}_i}} \quad (4.46)$$

Onde  $\sigma_{\hat{x}_j}$  é o respectivo desvio-padrão deste parâmetro estimado  $\hat{x}_j$  (obtido por meio da matriz de covariância dos parâmetros estimados  $\Sigma_{\hat{x}}$ ). Por exemplo, no caso do procedimento *data snooping*, a expressão (4.46) define um limite superior para a influência de um possível erro não aleatório na observação  $y_i$  sobre o parâmetro de interesse estimado  $\hat{x}_j$ , pois o modelo de erro neste caso é dado por  $\nabla y = c_{y_i} |\nabla_{y_i}|$ .

Ainda sobre o planejamento de redes geodésicas, na prática, um critério freqüentemente utilizado, baseado na experiência, é dado por (KAVOURAS, 1982):

Se  $\lambda_{\hat{x}_i} \leq 10$  para todas as observações  $y_i$ , então o intervalo máximo para cada parâmetro  $\hat{x}_j$ , após o ajustamento (com uma probabilidade  $\gamma_0 = 0,8$ ), será:

$$\hat{x}_j - \sqrt{\lambda_{\hat{x}_i}} \sigma_{\hat{x}_j} \leq \hat{x}_j \leq \hat{x}_j + \sqrt{\lambda_{\hat{x}_i}} \sigma_{\hat{x}_j} \quad (4.47)$$

Analizando a expressão (4.47), nota-se que, quanto menor a razão tendência-ruído  $\lambda_{\hat{x}_i}$ , menor o intervalo de confiança para os parâmetros  $\hat{x}_j$ , e melhor é a confiabilidade da rede.

Desta forma, pode-se definir um intervalo de confiança para um determinado parâmetro  $\hat{x}_j$ , utilizando a razão tendência-ruído, cuja expressão se torna bastante simples, quando é adotado o procedimento *data snooping* e a matriz  $\Sigma_{y_{nxn}}$  é diagonal.

Entretanto, o inconveniente de que apenas uma observação  $y_i$  é suspeita de estar contaminada por erros por vez permanece, e desta forma, estes intervalos de confiança para os parâmetros  $\hat{x}_j$  só são válidos quando apenas a observação  $y_i$ , utilizada para calcular  $\lambda_{\hat{x}_i}$ , é passível de estar contaminadas por erros não aleatórios, sendo as demais observações isentas destes.

Uma maneira de solucionar este problema é adotar um modelo de erro generalizado, da forma  $\nabla y_{nx1} = C_{y_{nxq}} \nabla_{qx1}$ , e uma confiabilidade externa generalizada  $\nabla \hat{x}_{ux1} = (A_{uxn}^T W_{nxn} A_{nxu})^{-1} A_{uxn}^T W_{nxn} \nabla y_{nx1}$ , derivada deste modelo de erro.

Esta estratégia se torna muito difícil na prática, pelo fato de que  $1 \leq q \leq n - u$ , e, além disso, não se conhecer *a priori* a localização e a magnitude dos erros que contaminam o vetor das observações  $y_{nx1}$ . Maiores detalhes sobre a razão tendência-ruído de  $y_{nx1}$  e  $x_{ux1}$  podem ser obtidos em Kavouras (1982), Papoulis (1991) e Teunissen (2006).

Encerrando este capítulo, algumas considerações sobre as medidas apresentadas se fazem necessárias. Por exemplo, para os casos em que a matriz peso  $W$  das observações não é diagonal, como quando as observações são correlacionadas (ou seja,  $\Sigma_y$  não é diagonal), os

números de redundância local podem apresentar valores negativos ou maiores do que um, não estando mais contidos dentro do intervalo fechado entre zero e um.

Além disso, apenas medidas de confiabilidade interna e externa para o procedimento *data snooping* foram apresentadas (onde  $q = 1$ ), desconsiderando o fato de poder haver múltiplos *outliers* no vetor das observações (ou seja, quando  $1 < q < n - u$ ).

Estas considerações, dentre outras, serão discutidas no próximo capítulo, Estado da Arte no Controle de Qualidade do Ajustamento.

## 5 ESTADO DA ARTE NO CONTROLE DE QUALIDADE DO AJUSTAMENTO

Nos capítulos anteriores, foi apresentado o ajustamento de observações pelo método dos mínimos quadrados, bem como a lei de propagação de covariâncias para a estimativa da precisão dos parâmetros ajustados. Também foram apresentados os testes de hipóteses para a detecção e a identificação de erros nas observações, formulados com base na razão de verossimilhança.

Em particular, foi apresentado o teste global do ajustamento para a detecção de erros (não aleatórios) nas observações e/ou no modelo, bem como o procedimento de teste *data snooping*, para a identificação (localização) de tais erros (nas observações), presumindo que apenas uma observação está contaminada por erro por vez, resultando em um processo iterativo de ajustamento e testes, até que todas as observações suspeitas sejam identificadas.

Por fim, foram apresentadas as medidas de confiabilidade, relacionadas a sensibilidade dos testes utilizados em detectar e localizar possíveis erros (não aleatórios) nas observações, segundo os níveis de probabilidade que foram estipulados.

Os testes estatísticos e as medidas de confiabilidade abordadas nos capítulos anteriores fazem uso da teoria convencional de detecção e identificação de erros no ajustamento, inicialmente proposta por Baarda (1968, 1977).

Neste capítulo, será feita uma revisão da literatura sobre o controle de qualidade no ajustamento de observações geodésicas, bem como apresentados alguns trabalhos relativos ao atual estado da arte na localização de erros e na teoria de confiabilidade do ajustamento.

### 5.1 Controle de Qualidade no Ajustamento de Observações

O trabalho pioneiro na área de controle de qualidade do ajustamento de observações geodésicas é referido a Baarda (1968), onde o referido autor propõe o chamado  $\beta$ -Method, que faz uso do teste global do ajustamento para a detecção de erros no ajustamento, e o procedimento de teste *data snooping* para a identificação (localização) de erros nas observações, presumindo que apenas uma observação está contaminada por erros por vez, o que resulta em um processo iterativo de ajustamento e testes, até que todas as observações suspeitas de estarem contaminadas por erros sejam devidamente identificadas.

Neste trabalho, também são apresentadas as medidas de confiabilidade interna e externa para estes casos, bem como exemplos de aplicação em redes geodésicas.

Seguindo este princípio de que apenas uma observação está contaminada por erro por vez, outros testes para a identificação de erros nas observações foram desenvolvidos, como por exemplo, o teste Tau, proposto por Pope (1976).

Estes procedimentos de testes são usualmente referidos como *conventional outliers detection test procedures* – procedimentos de teste convencionais para detecção de *outliers*, e além do *data snooping* e do teste Tau, pode-se citar também o teste t de Student (BERBER; HEKIMOGLU, 2003).

Em Kavouras (1982), encontra-se uma ampla discussão sobre alguns dos diferentes procedimentos de teste convencionais para a detecção e identificação de *outliers*. Outro estudo relevante dentro desta corrente é encontrado em Chen et al. (1987).

Simultaneamente, uma série de trabalhos foram publicados sobre a teoria convencional de confiabilidade, bem como as suas aplicações em redes geodésicas, como, por exemplo, Pelzer (1979), Förstner (1987), Wang e Chen (1994), Chen e Wang (1996), Ding e Coleman (1996b), Schaffrin (1997), Prószynski (1997), Kern et al. (2005), Prószynski (2010).

Embora testes estatísticos para a detecção de múltiplos *outliers* nas observações também tenham sido propostos, como por exemplo, Kok (1984), Gao et al. (1992), Ding e Coleman (1996a), e Gui et al. (2010), a teoria convencional de confiabilidade ainda presumia a existência de apenas um erro grosso contaminando o vetor das observações. Alguns trabalhos buscando generalizar a teoria convencional de confiabilidade para o caso de múltiplos *outliers* simultâneos também foram publicados.

Em Ober (1996) e Angus (2006), por exemplo, utilizando o teorema de Rayleigh-Ritz, são obtidas medidas de confiabilidade externa generalizadas para múltiplos *outliers*.

Knight et al. (2010), baseado nestas contribuições, apresenta uma extensão da teoria de confiabilidade, com medidas generalizadas de confiabilidade considerando a existência de múltiplos *outliers*. Este trabalho será abordado na próxima seção deste capítulo.

Utilizando a teoria de confiabilidade generalizada para múltiplos *outliers* em Knight et al. (2010), Almagbile et al. (2011) aplicaram testes estatísticos e medidas de confiabilidade em sistemas de integração GPS/INS (*Global Navigation Satellite System/Inertial Navigation System*). Os autores concluem que os testes estatísticos podem localizar corretamente múltiplos *outliers* nas observações, e as medidas de confiabilidade apresentam valores realísticos para a capacidade do modelo em identificar erros. Entretanto, os mesmos ressalvam que existem alguns fatores que podem influenciar nos resultados dos testes e nas

medidas de confiabilidade em sistemas de integração GPS/INS, como o número de satélites visíveis, a geometria do problema e também os coeficientes de correlação entre os testes.

Considerando que o peso de uma observação está intimamente relacionado com a sua precisão, Ding e Coleman (1996b) apresentam as chamadas medidas de sensibilidade, que descrevem a sensibilidade da matriz de covariância dos parâmetros ajustados em relação à variação do peso de uma observação em específico, bem como a sensibilidade do número de redundância local de uma observação em relação à variação do peso de outra observação.

Os referidos autores definem estas medidas de sensibilidade como eficácia das observações, e concluem que uma observação com alta precisão (ou alta acurácia) não necessariamente apresenta uma alta contribuição para a qualidade final dos parâmetros ajustados, pois a sua contribuição para a redundância do sistema (eficácia) pode ser baixa. Dois exemplos para o planejamento de redes geodésicas também são demonstrados.

Em relação aos números de redundância local  $r_i$ , inicialmente propostos por Baarda (1968, 1977), Wang e Chen (1994) demonstram que, para o caso de observações correlacionadas, estes podem ser negativos ou maiores do que um, saindo do intervalo fechado entre zero e um para o caso de observações estatisticamente independentes.

Desta forma, os mesmos autores apresentam os chamados números de confiabilidade ( $\bar{r}_i$ ) para as observações, e propõem o seu uso ao invés dos números de redundância local ( $r_i$ ), para o caso em que as observações são correlacionadas (isto é, estatisticamente dependentes).

Quando as observações são não correlacionadas, os números de confiabilidade  $\bar{r}_i$  se equivalem aos números de redundância  $r_i$ . Embora não possam ser menores do que zero, os números de confiabilidade possuem a desvantagem de não possuírem limite superior definido, dificultando, assim, possíveis comparações com os números de redundância local.

Motivado por estes estudos, Schaffrin (1997) apresenta os números de confiabilidade normalizados ( $\tilde{r}_i$ ), que tal como os números de redundância local  $r_i$ , situam-se dentro do intervalo fechado entre zero e um, melhorando a sua interpretação e facilitando comparações com os números de redundância local originais ( $r_i$ ) das observações.

Entretanto, o mesmo autor conclui que os números de redundância local, os números de confiabilidade e os números de confiabilidade normalizados, podem ranquear as observações, em termos de confiabilidade, de maneiras distintas.

Por exemplo, uma observação pode apresentar um valor relativamente alto para o seu número de confiabilidade  $\bar{r}_i$ , um valor intermediário para o seu número de redundância local  $r_i$ , e um valor relativamente baixo para o seu número de confiabilidade normalizado  $\tilde{r}_i$ , fazendo com que a hierarquia das observações se altere conforme o critério utilizado.

Proszynski (1997), por sua vez, estudou as relações entre as observações padronizadas e os resíduos padronizados, por meio de um projetor ortogonal. O autor propôs critérios de confiabilidade, bem como critérios para o planejamento de redes geodésicas, associados com um número estipulado (esperado) de *outliers*, e com estes possuindo ainda as localizações mais críticas possíveis, buscando estabelecer na etapa de planejamento da rede, umas configuração robusta para a mesma (ou seja, resistente ao número de *outliers* esperado).

Kern et al. (2005) salientam que testes estatísticos como o procedimento *data snooping* e o Teste Tau possuem grande aceitação em aplicações geodésicas, porém, são computacionalmente custosos para problemas de larga escala, como por exemplo, na modelagem do campo gravitacional terrestre utilizando dados de missões espaciais.

Nestes tipos de problemas, que envolvem uma enorme quantidade de dados, são utilizados algoritmos que não requerem um tempo de processamento tão elevado, adotando, por exemplo, a distância de Mahalanobis ou *wavelets* para a localização de *outliers*.

Por fim, em Proszynski (2010) são apresentados números de confiabilidade alternativos, bem como medidas de confiabilidade interna alternativas, oferecendo critérios de confiabilidade que são interpretados em termos da resposta do sistema a erros não aleatórios.

Porém, o mesmo autor salienta que estas medidas alternativas também apresentam algumas desvantagens, não permitindo, por exemplo, o ranqueamento das observações em termos de confiabilidade, devendo ser utilizadas de maneira complementar aos números de redundância e as medidas de confiabilidade interna já desenvolvidos.

É importante salientar que em Teunissen (2006), a expressão para a confiabilidade interna de uma observação é genérica e válida tanto para o caso de observações correlacionadas quanto para o caso de observações não correlacionadas.

Uma outra corrente de trabalhos para a detecção e a identificação de *outliers* nas observações, alternativa aos procedimentos de testes convencionais, utiliza-se dos chamados métodos estatísticos de estimação robusta, no qual o termo “robusta” é no sentido que os parâmetros estimados por esses métodos são resistentes à influência de possíveis *outliers* no vetor das observações (HEKIMOGLU; BERBER, 2003).

Os métodos de estimação robusta buscam minimizar a influência de *outliers* nas observações, por meio de um processo iterativo de ajustamento, no qual a matriz peso das observações é seqüencialmente atualizada, por meio da escolha de uma função de peso robusta, e as observações suspeitas de estarem contaminadas por erros têm o seu peso reduzido ou até mesmo se tornando nulo no processo (BERBER; HEKIMOGLU, 2003).

Os métodos de estimação robusta são utilizados, principalmente, quando se assume a existência de múltiplos *outliers* nas observações. Os métodos de estimação robusta mais comumente encontrados na literatura são os métodos de Estimação-M (*robustified maximum likelihood estimates*), Estimação-R (*rank-based estimates*), Estimação-L (*order-based estimates*) e Norma L1 (*least absolute deviation*) (XU, 2005).

Os métodos de Estimação-M se destacam como os estimadores mais “flexíveis” e são considerados por muitos como o grupo de estimadores mais confiáveis, sendo, portanto, a técnica mais conveniente para a depuração de observações contaminadas por erros grosseiros (GÖKALP et al., 2008). A estimativa pelo MMQ é um caso especial da Estimação-M, quando a função que se deseja minimizar é a soma ponderada do quadrado dos resíduos.

Em Knight e Wang (2009) são apresentados alguns dos vários métodos de estimação robusta, sendo que todos estes apresentam em comum o fato de buscar a minimização de uma função específica dos resíduos, para a atualização seqüencial da matriz peso no ajustamento. Para cada função específica dos resíduos, tem-se um método de estimação robusta diferente.

O trabalho pioneiro na área de estimação robusta é atribuído a Huber (1964), sendo que uma revisão sobre tais métodos estatísticos de estimação pode ser obtida em Xu (2005).

A seguir, serão brevemente apresentados alguns dos trabalhos publicados sobre os métodos de estimação robusta, bem como as suas aplicações nas ciências geodésicas.

Gao et al. (1992) propõem um “procedimento de teste robusto” (*robust testing procedure*), que combina os procedimentos de teste convencionais com o estimador robusto Norma-L1, para a detecção e identificação de múltiplos *outliers* nas observações. Após os *outliers* serem devidamente identificados e removidos pelo procedimento proposto, os autores recomendam o uso da solução por mínimos quadrados convencional, visando, por fim, obter uma solução imparcial e de variância mínima para os parâmetros.

Entretanto, Schwars e Kok (1993) concluem que o procedimento de teste *data snooping*, utilizado da maneira convencional no ajustamento por mínimos quadrados, é tão eficiente quanto o procedimento de teste robusto proposto por Gao et al. (1992).

Hekimoglu e Berber (2003) estudaram a eficácia dos métodos de Estimação-M de Huber e de Andrews em modelos lineares heterogêneos, ou seja, cujos erros aleatórios possuem uma mescla de várias características.

Os autores concluíram que quando o modelo estocástico é verdadeiro (adequado), a eficácia dos métodos de estimação robusta analisados dependem do número de *outliers*, da magnitude dos *outliers*, da natureza dos erros aleatórios, e do número de parâmetros do

modelo, dentre outros fatores; e que quando o modelo estocástico é incorreto (mal determinado), a eficácia destes métodos diminui significativamente.

Devido ao fato de que a maioria dos métodos de estimação robusta encontrados na literatura são aplicáveis somente para o caso de observações não correlacionadas, Yang et al. (2002) propõem um estimador robusto para o caso de observações correlacionadas, baseado na redução bifator dos pesos das observações, resultando em uma nova matriz de pesos que mantém a simetria e a correlação das observações na matriz peso original.

Berber e Hekimoglu (2003) analisaram a eficácia na detecção/localização de *outliers* em redes geodésicas de trilateração, utilizando o procedimento *data snooping*, o teste Tau, e o método de estimação robusta denominado Estimação-M de Andrews.

Os referidos autores chegaram à conclusão que no caso da existência de um único *outlier*, o procedimento *data snooping* apresentou a maior taxa de acerto e o teste Tau se mostrou o menos confiável, enquanto nos experimentos envolvendo dois *outliers*, os três métodos diminuíram a sua eficácia na detecção/localização de erros.

Chang e Guo (2005), por sua vez, mostram os aspectos computacionais envolvidos no método de Estimação-M de Andrews, aplicado ao posicionamento GPS relativo, apresentando um método de Newton recursivo modificado para estimar as coordenadas dos pontos.

Junhuan (2005) propõe um método modificado de estimação robusta pela Norma-L1, bem como adapta o procedimento de teste estatístico *data snooping* para os métodos de estimação robusta Norma-L1 e Norma-L1 modificado.

O referido autor também conclui que o método de estimação robusta Norma-L1 é mais eficiente para localizar *outliers* de baixa magnitude do que a estimação convencional por mínimos quadrados, e que no caso da existência de observações de baixa redundância (baixo valor numérico para o seu número de redundância local), o método Norma-L1 modificado é mais eficiente para localização de *outliers* do que os demais supracitados.

Xu (2005) propõe um novo método de estimação robusta, denominado *sign-constrained robust least squares estimator*, que assume uma distribuição *a priori* para o sinal dos *outliers*. O referido autor também demonstra que este método é pioneiro no sentido de ser ótimo em robustez e eficiência, sendo capaz de resistir até mais de 50% de observações contaminadas por *outliers*, além de poder ser aplicado para o caso de observações correlacionadas.

Hekimoglu e Erenoglu (2007) estudaram a influência do modelo estocástico das observações na identificação de *outliers* em redes geodésicas, alterando os pesos das observações e utilizando alguns métodos de estimação robusta e o procedimento de teste *data*

*snooping*. Os autores concluem que, em geral, os métodos de estimação robusta localizam *outliers* com mais eficácia do que o *data snooping*, especialmente em redes de nívelamento geométrico. Os autores também concluem que em redes de triangulação geodésica, o efeito dominante é a heterocedasticidade do modelo estocástico (pesos das observações), já nas redes de trilateração e nívelamento geométrico, o efeito dominante é a magnitude dos *outliers*, enquanto nas redes de controle horizontal (que combinam medidas angulares e lineares), o efeito dominante é a heterogeneidade das observações.

Duchnowski (2008), por sua vez, apresenta aplicações geodésicas para o método de Estimação-R, em especial para redes de nívelamento geométrico. O autor propõe uma solução particular, baseada na Estimação-R, para o monitoramento da estabilidade dos marcos de referência da rede (ou seja, para a detecção de deslocamentos do *datum*).

Gökalp et al. (2008) empregaram procedimentos de testes convencionais, métodos de estimação robusta e lógica *fuzzy* para detecção e identificação de *outliers* em redes GPS. Os referidos autores concluem que o *data snooping* é o mais recomendado dos procedimentos de testes convencionais, a lógica *fuzzy* é eficiente, porém, a abundância de parâmetros necessários dificulta sua aplicação, e os métodos de estimação robusta se mostraram os mais adequados para a detecção e identificação de múltiplos *outliers* nos experimentos simulados.

Também estudando a detecção e identificação de *outliers* no posicionamento por GPS, Knight e Wang (2009) compararam o procedimento de teste *data snooping* com métodos de estimação robusta para detecção e identificação de *outliers* em observáveis GPS. Os referidos autores chegaram a uma série de conclusões, como por exemplo, que nenhum dos métodos detectou e identificou corretamente todos os *outliers* presentes em todos os experimentos, porém o procedimento *data snooping* se mostrou o mais satisfatório na existência de um único *outlier*, enquanto os métodos de Estimação-MM e Norma-L1 se mostraram os mais satisfatórios na existência de múltiplos *outliers* nas observações.

Rangelova et al. (2009) concluem que, para a determinação de um modelo empírico de taxas de deslocamento verticais, utilizando dados de diversas fontes (GPS, Altimetria por Satélites, missão GRACE – *Gravity Recovery And Climate Experiment*), devido a heterogeneidade dos dados e suas diferentes propriedades estocásticas, a detecção e identificação de *outliers* por meio de um estimador robusto mediano é mais eficiente do que pelo procedimento de teste convencional *data snooping*.

Novamente considerando o fato de que a maioria dos métodos de estimação robusta encontrados na literatura só são aplicáveis para o caso de observações não correlacionadas, Guo et al. (2010) propõem um procedimento iterativo de estimação robusta para o caso de

observações correlacionadas, por meio de duas estratégias distintas, uma baseada nos testes estatísticos uniformemente mais poderosos, e a outra baseada nos resíduos por mínimos quadrados padronizados.

Por fim, Guo et al. (2011) também estendem a teoria de confiabilidade para os métodos de estimação robusta, apresentando medidas de confiabilidade interna e externa para um método particular de Estimação-M, considerando observações não correlacionadas.

Os autores demonstram, por meio de um exemplo numérico, que durante as iterações, a confiabilidade interna das observações aumenta, e para as observações contaminadas por *outliers*, suas confiabilidades externas se tornam cada vez menores, conforme esperado.

Uma outra corrente, alternativa a estas duas, e utilizando o conceito de “ajustamento quase-estável” (ZHOU, 1980 apud OU, 1999), faz uso do chamado método QUAD (*Quasi-Accurate Detection of outliers – Detecção quase-acurada de outliers*).

O método QUAD (OU, 1999; CHAI et al., 2002; GUI et al., 2005; GUO et. al, 2007) se baseia na relação matemática existente entre as observações e os verdadeiros (e desconhecidos) erros que contaminam as observações, compostos necessariamente por uma componente aleatória, e em alguns casos, que se deseja identificar, por um erro grosseiro.

O método QUAD foi inicialmente apresentado para o caso de observações não correlacionadas (OU, 1999). Em Gui et al. (2005) o método QUAD, para observações não correlacionadas, é utilizado para combater tanto a influência de múltiplos *outliers* quanto o fenômeno da multicolinearidade.

Em Chai et al. (2002), o método QUAD é utilizado em estudos geodinâmicos (modelos de movimentos crustais), que dividem os pontos de uma rede geodésica em diferentes blocos, cuja tendência de movimento é a mesma. Os pontos que não estão de acordo com esta tendência de movimento do bloco são tidos como pontos de deformação anormal, podendo ser tratados como *outliers* no modelo, e passíveis de serem identificados por métodos de detecção e localização de erros. O procedimento de teste *data snooping* e o método de Estimação-M de Huber também são utilizados, e os autores concluem que nestes experimentos, o único método que se mostrou completamente eficiente para identificação de *outliers* foi o método QUAD.

Em Guo et al. (2007), é apresentada uma proposta de aplicação do método QUAD para o caso em que as observações são correlacionadas. Este trabalho também será abordado em uma seção específica deste capítulo, bem como em alguns dos experimentos desta dissertação.

Trabalhos utilizando ainda outras abordagens para a detecção e a identificação de *outliers*, que não as descritas, também foram publicados.

Na Universidade de News Brunswick, por exemplo, um novo método foi desenvolvido, denominado Análise de Robustez (*Robustness Analysis*), que amplia a teoria convencional de confiabilidade, introduzida por Baarda (1968), com os chamados “métodos de análise de robustez geométrica” (*geometrical strength analysis*), utilizando “técnicas de tensão” (*strain techniques*).

Este método oferece uma descrição mais detalhada e completa do potencial de deformação da rede, em termos de três medidas independentes que representam robustez em escala (dilatação), orientação (torção ou rotação diferencial) e configuração local (cislamento), sendo estas medidas invariantes com translações do *datum* e mudanças de orientações, e praticamente invariantes com mudanças de escala.

Como exemplos de trabalhos utilizando esta abordagem e suas aplicações geodésicas, pode-se citar Vanicek et al. (2001, 2008), Berber (2006) e Berber et al. (2003, 2006). Em Gambin et al. (2008) é feita uma contribuição teórica a Análise de Robustez, por meio de analogias com a análise de tensões locais utilizadas na mecânica contínua.

Cen et al. (2003) propõem diagnósticos sobre os erros grosseiros antes do ajustamento por mínimos quadrados das observações ser realizado, por meio das denominadas *gross errors judgment equations*, definindo a chamada *judgment matrix*, que é uma matriz de coeficientes que descreve a relação linear entre as observações, contendo informações sobre as propriedades conjuntas das observações e sendo útil na detecção e identificação de *outliers*.

A principal vantagem desta abordagem, segundo seus autores, é que a mesma considera a propriedade conjunta das observações, e independe da correlação estatística dos resíduos ajustados, por ser realizada antes da estimativa por mínimos quadrados, ao contrário dos procedimentos de testes convencionais e os métodos de estimativa robusta.

Neuman et al. (2006) apresentam testes estatísticos unidimensionais e multidimensionais para a detecção e identificação de *outliers* nas observações, considerando possíveis erros sistemáticos remanescentes (imprecisão das medidas), sendo uma extensão independente da abordagem clássica proposta por Baarda (1968), utilizando intervalos de confiança e lógica *fuzzy* (números *fuzzy* para as observações).

Ao invés de se utilizar de testes estatísticos, Gullu e Yilmaz (2010) fizeram uso de redes neurais, com o algoritmo de aprendizado ADALINE (*ADaptive Linear NEuron*), para a detecção e identificação de *outliers* em redes geodésicas, obtendo resultados superiores aos

procedimentos de teste convencionais (*data snooping*, Teste Tau) nos diferentes experimentos simulados.

Por fim, podem-se citar ainda os estudos para a detecção de erros grosseiros baseados na inferência estatística bayesiana, como por exemplo, Gui et al. (2007) e Gui et al. (2010).

Em Gui et al. (2007), é apresentado um método para detecção de múltiplos *outliers*, baseado na probabilidade *a posteriori* de uma determinada hipótese alternativa considerada (evento auto-definido), que assume que certas observações, previamente selecionadas, estão contaminadas por erros grosseiros.

Em Gui et al. (2010), um novo método bayesiano para detecção de múltiplos *outliers* é proposto, desenvolvido de forma a ser resistente ao fenômeno *masking* (quando uma observação contaminada por erros é não detectada em virtude de outras observações também estarem contaminadas por erros) e ao *swamping* (quando uma observação não contaminada por erros é identificada erroneamente devido a influência de observações contaminadas por erros).

No âmbito nacional, alguns trabalhos sobre o controle de qualidade no ajustamento de observações também foram publicados. Dentre estes, pode-se citar os estudos de Tommaselli (1985), Mitishita (1986), Silva (1987), Firkowski (1988), Magro (1990), Camargo (1992), Marques (1994), Moraes (2001), Oliveira e Dalmolin (2003), Teixeira e Ferreira (2003), Machado e Monico (2004), Santos Junior et al. (2005), Monico et al. (2006), Santos (2006), Oliveira (2007), Oliveira e Dalmolin (2008) e Carvalho (2009).

Os primeiros trabalhos (TOMMASELLI, 1985; MITISHITA, 1986; SILVA, 1987; FIRKOWSKI, 1988; MAGRO, 1990), desenvolvidos no curso de pós-graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná, são referentes a detecção e a identificação de erros em fototriangulações.

Camargo (1992) apresenta procedimentos de testes estatísticos para detecção, identificação e adaptação de observações contaminadas por erros, aplicados ao ajustamento seqüencial por filtro da Kalman.

Em Marques (1994) é utilizada a análise por componentes principais para detecção e identificação de múltiplos *outliers* no método de fototriangulação por feixes de raios, em conjunto com testes estatísticos como o teste *t de student*.

Em Moraes (2001), testes estatísticos para detecção e identificação de erros (teste global do ajustamento e procedimento de teste *data snooping*), bem como medidas de confiabilidade interna e externa, são aplicados na caracterização de extremas no espaço geométrico, para fins de registro de matrícula imobiliária.

Oliveira e Dalmolin (2003) apresentam critérios para a análise da geometria de redes geodésicas por meio das componentes principais da matriz de covariância das observações.

Em Teixeira e Ferreira (2003), são apresentadas as medidas de confiabilidade interna e externa e os números de redundância local, bem como um exemplo de aplicação prática em uma rede GPS.

Em Machado e Monico (2004), é apresentado o controle de qualidade do ajustamento recursivo de observações GPS em linhas de base curtas, onde são utilizados os testes para detecção e identificação de erros nas observações, bem como o cálculo da confiabilidade interna destas.

Em Santos Junior et al. (2005) são aplicadas medidas de confiabilidade interna e externa e os números de redundância local, para verificar a confiabilidade e a precisão de uma rede gravimétrica ajustada por meio de observações médias ou independentes.

Monico et al. (2006), por sua vez, aplicam a confiabilidade interna e externa em uma rede de nivelamento geométrico, e demonstram como estas medidas podem ser calculadas na fase de planejamento do levantamento de campo.

Santos (2006) propõe estratégias de ajustamento para melhoria da confiabilidade e precisão dos pontos de redes geodésicas, para fins topográficos locais, por meio da teoria convencional de confiabilidade, proposta por Baarda (1968).

Em Oliveira (2007) é proposta uma estratégia de otimização dos pesos das observações no ajustamento pelo problema de valor próprio inverso, aplicada ao planejamento de redes geodésicas e utilizando critérios de precisão e confiabilidade.

Em Oliveira e Dalmolin (2008) é discutida a influência da redundância das observações sobre a precisão dos parâmetros no ajustamento, por meio de medidas de confiabilidade, controlabilidade e sensibilidade, bem como são apresentados exemplos de aplicação no planejamento e otimização de redes geodésicas.

Em Carvalho (2009) é avaliado o desempenho de diferentes técnicas de ajustamento para análise de deslocamentos em redes GPS, e são utilizados os testes para detecção e identificação de erros (teste global do ajustamento e procedimento *data snooping*), bem como medidas de confiabilidade interna e externa.

Após este relato dos diferentes trabalhos publicados ao longo dos anos dentro do tema controle de qualidade, que demonstram os vários métodos existentes, na próxima seção será detalhado o estado da arte dentro do contexto da teoria de confiabilidade, que foi apresentada no capítulo anterior. Posteriormente, uma abordagem alternativa à teoria de confiabilidade para o controle de qualidade do ajustamento será apresentada, o método QUAD.

## 5.2 Medidas generalizadas de confiabilidade para múltiplos *outliers*

Inicialmente, quando se assume que apenas um erro grosso  $\nabla$  está contaminado o vetor das observações  $y_{nx1}$ , ou seja,  $q = 1$ , a matriz  $C_{y_{nxq}}$  se reduz ao vetor  $c_{y_{nx1}}$ , e o vetor  $\nabla_{qx1}$  se reduz ao escalar  $\nabla_{1x1}$  no modelo de erro  $\nabla y_{nx1} = C_{y_{nxq}} \nabla_{qx1}$  considerado.

Desta forma, adotando um valor de referência ( $\lambda_0$ ) para o parâmetro de não centralidade do modelo  $\lambda$ , uma solução única para a expressão (4.21) pode ser obtida em termos de  $\nabla$ . Esta solução única para  $\nabla$ , em módulo, é dada por:

$$|\nabla| = \sqrt{\frac{\lambda_0}{c_y^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} c_y}} \quad (5.1)$$

sendo  $\nabla$  o menor erro detectável (*minimal detectable bias* – MDB) no modelo, segundo o teste da razão de verossimilhança adotado e o poder do teste ( $\gamma_0$ ) estipulado.

Quando se considera ainda que, somente uma observação  $y_i$  no vetor das observações  $y_{nx1}$  está contaminada por este erro grosso (procedimento *data snooping*), a solução de  $\nabla$  em (5.1) é dada por (BAARDA, 1968):

$$|\nabla_{y_i}| = \sqrt{\frac{\lambda_0}{c_{y_i}^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} c_{y_i}}} \quad (5.2)$$

onde  $|\nabla_{y_i}|$  é o módulo do menor erro detectável em  $y_i$ , e o vetor  $c_{y_i}$  é igual a  $c_{y_i} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \underset{i}{\check{1}} \ 0 \ \dots \ 0]_{nx1}^T$ , sendo  $i$  correspondente a linha da  $i$ -ésima (e única) observação  $y_i$  suspeita de estar contaminada por este erro grosso.

Como existem  $\binom{n}{q=1} = n$  vetores  $c_{y_i}$  possíveis, um para cada observação  $y_i$  diferente, existem  $n$  diferentes MDB para o procedimento *data snooping*, cada um referente a uma observação  $y_i$  de  $y_{nx1}$  (para  $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Entretanto, quando  $q > 1$ , ou seja, supõe-se a existência de mais de um erro grosso no vetor das observações  $y_{nx1}$  (existência de múltiplos *outliers*), uma solução única para  $\nabla$

em (4.21) não é possível, pois se tem apenas uma equação a ( $q > 1$ ) incógnitas, ou seja, um número infinito de diferentes vetores  $\nabla_{qx1}$  podem satisfazer a condição de (4.20).

Entretanto, se o vetor  $\nabla_{qx1}$  for decomposto em duas componentes, isto é, um vetor unitário  $\nabla_{u_{qx1}}$ , e um escalar  $\nabla$ , assumindo que o vetor unitário é uma “razão de *outliers*”, a componente escalar  $\nabla$  pode ser obtida por (KNIGHT et al., 2010):

$$\nabla_{1x1} = \sqrt{\frac{\lambda_0}{\nabla_u^T C_y^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} C_y \nabla_u}} \quad (5.3)$$

E, portanto, o correspondente vetor dos  $q$ -MDB é dado por:

$$\nabla_{qx1} = \nabla_{u_{qx1}} \nabla = \nabla_{u_{qx1}} \sqrt{\frac{\lambda_0}{\nabla_u^T C_y^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} C_y \nabla_u}} \quad (5.4)$$

onde  $\nabla_{qx1}$  deve ser calculado para todas as  $\binom{n}{q}$  combinações possíveis da matriz  $C_y$  (ou seja, para todos os modelos de erro possíveis para  $q$  *outliers*). Este procedimento irá resultar em um vetor  $\nabla_{qx1}$  para uma razão particular  $\nabla_{u_{qx1}}$  de *outliers*, previamente estipulada.

Porém, como os *outliers* apresentam uma natureza aleatória, esta razão de *outliers* é desconhecida *a priori*. Desta forma, deve-se escolher uma razão de *outliers* que resulte no MDB máximo na  $i$ -ésima observação  $y_i$ , mesmo quando todas as  $\binom{n}{q}$  combinações possíveis da matriz  $C_y$  são consideradas KNIGHT et al., 2010).

Uma das maneiras de se obter o MDB máximo na  $i$ -ésima observação  $y_i$ , quando se assume que existem  $q$  *outliers* contaminando o vetor das observações  $y_{nx1}$ , (com  $1 < q < n - u$ ), é por meio do teorema de Rayleigh-Ritz.

O teorema de Rayleigh-Ritz estabelece que, para uma matriz simétrica  $C$ , e uma matriz simétrica positiva-definida  $B$ , de ordens equivalentes (ou seja, de mesma dimensão), estando um vetor aleatório  $x$  restrito a seguinte condição (OBER, 1996):

$$\lambda_{\min} \leq \frac{x^T C x}{x^T B x} \leq \lambda_{\max} \quad (5.5)$$

onde  $\lambda_{\min}$  e  $\lambda_{\max}$  são os autovalores mínimo e máximo, respectivamente, do problema generalizado de autovalores:

$$(C - \lambda B) u = 0 \quad (5.6)$$

O vetor aleatório  $x_{máx}$  que maximiza a expressão (5.5) pode ser obtido pelo autovetor  $u$  correspondente ao autovalor máximo  $\lambda_{máx}$  de (5.6), ou seja:

$$x_{máx} = u_{máx} \quad (5.7)$$

Da expressão (4.21) para o parâmetro de não centralidade do modelo  $\lambda_0$ , a matriz  $B$  pode ser formulada como  $B_{qxq} = \frac{c_y^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} c_y}{\lambda_0}$ , de forma que:

$$\nabla^T \frac{c_y^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} c_y}{\lambda_0} \nabla = x^T B x = 1 \quad (5.8)$$

onde  $B$  satisfaz a condição de matriz simétrica positiva-definida, desde que  $1 \leq q \leq n - u$ .

Como neste caso,  $x = \nabla$ , deseja-se encontrar o vetor  $\nabla$  que maximiza a expressão (5.5), ou seja, o vetor dos MDB máximo para  $1 \leq q \leq n - u$ .

A matriz  $C$  pode ser formulada então como  $C_{qxq} = c_{q_i}^T c_{q_i}$ , onde o vetor  $c_{q_i}^T$  é dado por  $c_{q_i}^T = [0 \ 0 \ ... \ 0 \ \underset{i}{\tilde{1}} \ 0 \ ... \ 0]_{qx1}^T$ , sendo  $i$  correspondente a linha do  $i$ -ésimo elemento  $\nabla_i$  de  $\nabla_{qx1}$  (ou seja, do *outlier*  $\nabla_i$  suspeito de estar contaminando a observação  $y_i$ , de acordo com o modelo de erro  $\nabla y_{nx1} = C_{y_{nxq}} \nabla_{qx1}$  adotado).

Desta forma, como  $\nabla_{qx1}$  trata-se de um vetor aleatório, o vetor dos MDB máximo  $\nabla_{qx1}^{máx}$  pode ser obtido pelo teorema de Rayleigh-Ritz (KNIGHT et al., 2010):

$$\lambda_{mín} \leq \frac{\nabla^T c_{q_i}^T c_{q_i} \nabla}{\nabla^T \frac{c_y^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} c_y}{\lambda_0} \nabla} \leq \lambda_{máx} \quad (5.9)$$

onde os autovalores  $\lambda$  e os respectivos autovetores  $u$  são obtidos por meio do problema generalizado de autovalores:

$$[\lambda_0 (C_y^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} C_y)^{-1} c_{q_i}^T c_{q_i}] u = \lambda u \quad (5.10)$$

Portanto, o MDB  $\nabla_i$  máximo que contamina uma dada observação  $y_i$  (para um dado parâmetro de não centralidade do modelo  $\lambda_0$  e um modelo de erro adotado  $\nabla_{y_{nx1}} = C_{y_{nxq}} \nabla_{qx1}$ ) é dado por:

$$\nabla_i^{\max} = \sqrt{\lambda_{\max}} \quad (5.11)$$

E o correspondente vetor dos MDB  $\nabla_{qx1}$  para este caso é dado por:

$$\nabla_{qx1}^{\max} = u_{\max} \quad (5.12)$$

onde  $u_{\max}$  é o autovetor correspondente ao autovalor máximo  $\lambda_{\max}$ . Logo, o valor do  $i$ -ésimo elemento  $\nabla_i$  de  $\nabla_{qx1}^{\max}$ , relacionado à observação  $y_i$  suspeita de estar contaminada pelo erro grosso  $\nabla_i$ , será  $\nabla_i = \sqrt{\lambda_{\max}}$ .

Alternativamente, pode-se utilizar a decomposição de Cholesky em (5.10) e particionar a matriz  $C_{y_{nxq}}$  em  $[C_{j_{nxq-1}} c_{y_i}]_{nxq}$ , onde  $c_{y_i} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \underset{i}{\frac{1}{\omega}} \ 0 \ \dots \ 0]^T_{nx1}$ , sendo  $i$  correspondente a linha da  $i$ -ésima observação  $y_i$  suspeita de estar contaminada pelo outlier  $\nabla_i$  correspondente.

Por exemplo, quando o vetor  $y_{nx1}$  possui  $n = 6$  observações, e suspeita-se que  $q = 2$  observações estão suspeitas de estarem contaminadas por erros grosseiros, no caso em que se deseja determinar o maior MDB na segunda observação  $y_2$  de  $y_{6x1}$ , assumindo que a outra observação também contaminada por um erro grosso é a quinta observação  $y_5$ , o vetor  $c_{y_i}$

se torna  $c_{y_i} = c_{y_2} = [0 \ \underset{i=2}{\frac{1}{\omega}} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T_{6x1}$ , e a matriz  $C_{j_{nxq-1}}$  se torna o vetor  $C_{j_{nxq-1}} = c_{j_{6x1}} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \underset{i=5}{\frac{1}{\omega}} \ 0]^T_{6x1}$ .

Utilizando a decomposição de Cholesky em (5.10) e o particionamento da matriz  $C_{y_{nxq}}$  em  $[C_{j_{nxq-1}} c_{y_i}]_{nxq}$ , o MDB  $\nabla_{y_i}^q$  em  $y_i$  (considerando  $q$ -outliers) é dado por (KNIGHT et al., 2010):

$$\nabla_{y_i}^q = \frac{\nabla_{y_i}}{\sqrt{1 - (\rho_{i,j}^q)^2}} \quad (5.13)$$

sendo que  $\nabla_{y_i}$  é o MDB em  $y_i$  no procedimento *data snooping* (onde  $q = 1$ ), dado por (4.25), e  $\rho_{i,j}^q$  é o  $i$ -ésimo coeficiente de correlação múltipla, dado por (ALMAGBILE et al., 2011):

$$\rho_{i,j}^q = \sqrt{\frac{c_{y_i}^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} C_j (C_j^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} C_j)^{-1} C_j^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} c_{y_i}}{c_{y_i}^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} c_{y_i}}} \quad (5.14)$$

Como o  $i$ -ésimo coeficiente de correlação múltipla esta contido entre:

$$0 \leq \rho_{i,j}^q \leq 1 \quad (5.15)$$

O MDB na  $i$ -ésima observação  $y_i$ , para  $q$ -outliers em  $y_{nx1}$ , é sempre maior ou igual ao correspondente MDB para um outlier ( $q = 1$  no procedimento *data snooping*).

Como para cada valor de  $q$ , tem-se  $\binom{n-1}{q-1}$  combinações da matriz  $C_j$ , para cada observação  $y_i$ , tem-se  $\binom{n-1}{q-1}$  MDB associados, considerando a existência de  $q$ -outliers.

Por exemplo, para  $q = 2$  (existência de dois outliers em  $y_{nx1}$ ), tem-se  $\binom{n-1}{2-1} = n - 1$  possíveis vetores  $c_j$ , e, portanto,  $n - 1$  diferentes MDB para cada observação  $y_i$  (um MDB para cada uma das  $n - 1$  observações restantes, pois  $q = 2$ ).

A controlabilidade de uma observação  $y_i$  é uma medida de confiabilidade derivada do MDB desta observação  $y_i$ . A controlabilidade  $C_{y_i}$  de  $y_i$  é dada por (KNIGHT et al., 2010):

$$C_{y_i} = \frac{\nabla_{y_i}}{\sigma_{y_i}} \quad (5.16)$$

Ou seja, é a razão entre o MDB ( $\nabla_{y_i}$ ) de  $y_i$ , e o respectivo desvio padrão ( $\sigma_{y_i}$ ) desta observação. Considerando a existência de apenas um outlier em  $y_{nx1}$  (ou seja,  $q = 1$ ), multiplicando a equação (5.2) por  $\frac{\sigma_{y_i}}{\sigma_{y_i}}$ , a controlabilidade de  $y_i$  resulta em:

$$C_{y_i} = \sqrt{\frac{\lambda_0}{c_{y_i}^T \Sigma_y c_{y_i} c_{y_i}^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} c_{y_i}}} \quad (5.17)$$

Considerando agora a existência de múltiplos *outliers* em  $y_{nx1}$  (ou seja,  $q > 1$ ), combinando as expressões (5.13), (5.16) e (5.17), a controlabilidade de uma observação  $y_i$ , para  $q$  *outliers* em  $y_{nx1}$ , é dada por (KNIGHT et, 2010):

$$C_{y_i}^q = \frac{c_{y_i}}{\sqrt{1 - (\rho_{i,j}^q)^2}} \quad (5.18)$$

Analizando a expressão (5.18), nota-se que a controlabilidade  $C_{y_i}^q$  de uma observação  $y_i$  para ( $q > 1$ ) *outliers*, tal como o seu MDB, é sempre maior ou igual a sua controlabilidade  $C_{y_i}$  quando se assume que apenas esta observação  $y_i$  está contaminada por erros (onde  $q = 1$ ). Além disso, para cada observação  $y_i$ , tem-se  $\binom{n-1}{q-1}$  medidas de confiabilidade associadas, uma para cada modelo de erro  $C_y = [C_j c_{y_i}]$  considerado.

Outras medidas que podem ser consideradas são os números de confiabilidade, derivados da controlabilidade, e que removem o efeito do parâmetro de não centralidade do modelo  $\lambda_0$ .

Para o procedimento de teste *data snooping* (onde  $q = 1$ ), o número de confiabilidade de uma observação  $y_i$  é dado por (SCHAFFRIN, 1997):

$$\bar{r}_i = c_{y_i}^T \Sigma_y c_{y_i} c_{y_i}^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} c_{y_i} \quad (5.19)$$

sendo que o número de confiabilidade  $\bar{r}_i$  de  $y_i$  está restrito ao seguinte intervalo:

$$0 \leq \bar{r}_i \leq c_{y_i}^T \Sigma_y c_{y_i} c_{y_i}^T \Sigma_y^{-1} c_{y_i} \quad (5.20)$$

Quando as observações são não correlacionadas (ou seja, a matriz de covariância  $\Sigma_y$  do vetor das observações  $y_{nx1}$  é diagonal), os números de confiabilidade ( $\bar{r}_i$ ) são equivalentes aos números de redundância ( $r_i$ ).

Nestes casos, para uma observação  $y_i$ , o seu número de confiabilidade torna-se:

$$\bar{r}_i = r_i = c_{y_i}^T \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} c_{y_i} \quad (5.21)$$

sendo que os números de redundância estão restritos ao seguinte intervalo:

$$0 \leq r_i \leq 1 \quad (5.22)$$

E a sua soma resulta em  $\sum_{i=1}^n r_i = n - u$ . A generalização do número de confiabilidade  $\bar{r}_i$  de  $y_i$ , para  $q$  outliers em  $y_{nx1}$  ( $q > 1$ ), é dada por (ALMAGBILE et al., 2011):

$$\bar{r}_i^q = \bar{r}_i [1 - (\rho_{i,j}^q)^2] \quad (5.23)$$

E o número de confiabilidade  $\bar{r}_i^q$  de  $y_i$ , para  $q$  outliers, está restrito ao seguinte intervalo (KNIGHT et al., 2010):

$$0 \leq \bar{r}_i^q \leq c_{y_i}^T \Sigma_y c_{y_i} c_{y_i}^T \Sigma_y^{-1} c_{y_i} [1 - (\rho_{i,j}^q)^2] \quad (5.24)$$

Analizando as expressões (5.23) e (5.24), nota-se que o número de confiabilidade  $\bar{r}_i^q$  de uma observação  $y_i$ , para  $q > 1$  outliers, é sempre menor ou igual ao seu número de confiabilidade  $\bar{r}_i$ , quando se assume que apenas esta observação  $y_i$  está contaminada por erros (ou seja, quando  $q = 1$ ).

Se as observações são consideradas não correlacionadas, os números de confiabilidade  $\bar{r}_i^q$  para  $q$  outliers são equivalentes aos números de redundância  $r_i$  para  $q$  outliers. Neste caso, para uma observação  $y_i$ , o número de confiabilidade torna-se (KNIGHT et al., 2010):

$$\bar{r}_i^q = r_i^q = c_{y_i}^T \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} c_{y_i} - c_{y_i}^T \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} C_j (C_j^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} C_j)^{-1} C_j^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} c_{y_i} \quad (5.25)$$

sendo que os números de redundância  $r_i^q$  para  $q$  outliers estão restritos ao seguinte intervalo:

$$0 \leq r_i^q \leq 1 \quad (5.26)$$

E a sua soma resulta em  $\sum_{i=1}^n r_i^q = (n - u) - q + 1$ . Analisando as expressões (5.21) e (5.25), nota-se que os números de redundância  $r_i^q$  para  $q$  outliers são sempre menores ou iguais aos números de redundância  $r_i$  para  $q = 1$ . Além disso, para cada observação  $y_i$ , tem-

se  $\binom{n-1}{q-1}$  números de confiabilidade  $r_i^q$ , um para cada modelo de erro  $C_y = [C_j \ c_{y_i}]$  considerado.

Como os números de confiabilidade e de redundância dependem do produto matricial  $\Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1}$ , nota-se que o ideal é que as matrizes de covariância  $\Sigma_y$  e  $\Sigma_{\hat{e}_0}$ , respectivamente do vetor das observações  $y_{nx1}$  e do vetor dos erros aleatórios ajustados  $\hat{e}_{nx1}$ , apresentem os seus elementos fora da diagonal principal o mais próximo de zero possível, ou seja, que as observações e também os erros aleatórios apresentem uma baixa correlação.

Por fim, outra medida de confiabilidade é a confiabilidade externa, que reflete o efeito de possíveis MDB sobre o vetor dos parâmetros estimados  $\hat{x}_{ux1}$ . No caso do procedimento *data snooping*, onde  $q = 1$ , o vetor confiabilidade externa  $\nabla \hat{x}_{i_{ux1}}$  de uma observação  $y_i$  é obtido substituindo o MDB de  $y_i$  na solução por mínimos quadrados, resultando em (BAARDA, 1968):

$$\nabla \hat{x}_{i_{ux1}} = (A_{uxn}^T W_{hxu} A_{nxu})^{-1} A_{uxn}^T W_{hxu} C_{y_{i_{nx1}}} |\nabla_{y_i}|_{1x1} \quad (5.27)$$

Para o caso de múltiplos *outliers* (ou seja,  $q > 1$ ), o vetor confiabilidade externa pode ser obtido de maneira similar, substituindo os  $q$ -MDB  $\nabla_{y_i}^q$  das  $q$ -observações suspeitas consideradas  $y_i$  (para  $i = 1, 2, \dots, q$ ) na solução por mínimos quadrados de  $x$ , resultando em (KNIGHT et al., 2010):

$$\nabla x_{i_{ux1}}^q = (A^T W A)_{uxn}^{-1} (A^T W C_y \nabla_{y_i}^q)_{nx1} \quad (5.28)$$

Quando se assume uma razão de *outliers*, utilizando a expressão (5.4) para o vetor dos MDB, o vetor confiabilidade externa torna-se:

$$\nabla x_{ux1}^q = (A^T W A)_{uxn}^{-1} \left( A^T W C_y \nabla_{u_{qx1}} \sqrt{\frac{\lambda_0}{V_u^T C_y^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} C_y V_u}} \right)_{nx1} \quad (5.29)$$

Alternativamente, o vetor dos MDB dado por (5.12) também pode ser usado. Entretanto, quando se suspeita da existência de múltiplos *outliers* no vetor das observações  $y_{nx1}$  (ou seja,  $q > 1$ ), os vetores dos MDB  $\nabla_{qx1}$  obtidos pela confiabilidade interna não são os

únicos vetores que satisfazem a condição de (5.5), mesmo quando todas as  $\binom{n}{q}$  combinações possíveis para a matriz  $C_y$  são consideradas.

Conseqüentemente, os vetores  $\nabla_{qx1}$  que maximizam a confiabilidade interna (ou seja, o MDB das observações de  $y_{nx1}$ ), podem não ser os mesmos vetores  $\nabla_{qx1}$  que maximizam a confiabilidade externa (ou seja, a influência destes sobre os parâmetros estimados em  $\hat{x}_{ux1}$ ).

Portanto, quando se deseja obter o efeito máximo de possíveis  $q$  outliers em  $y_{nx1}$ , sobre um parâmetro específico ( $\hat{x}_k$ ) de  $\hat{x}_{ux1}$  (onde  $1 \leq k \leq u$ ), pode ser utilizado o teorema de Rayleigh-Ritz, de maneira similar ao MDB máximo de uma observação específica  $y_i$  de  $y_{nx1}$ , considerando  $q$  outliers simultâneos em  $y_{nx1}$  (ver a expressão 5.9).

Modificando as condições do teorema de Rayleigh-Ritz para maximizar o efeito de possíveis  $q$  outliers em  $y_{nx1}$  sobre um parâmetro específico  $\hat{x}_k$  de  $\hat{x}_{ux1}$ , a confiabilidade externa  $\nabla \hat{x}_k^q$  deste parâmetro estimado  $\hat{x}_k$  torna-se:

$$\nabla \hat{x}_k^q = \sqrt{\lambda_{\max}} \quad (5.30)$$

onde  $\lambda_{\max}$  corresponde ao autovalor máximo do problema generalizado de autovalores (KNIGHT et al., 2010):

$$(\lambda_0(C_y^T \Sigma_y^{-1} \Sigma_{\hat{e}_0} \Sigma_y^{-1} C_y)^{-1} C_y^T \Sigma_y^{-1} A (A^T W A)^{-1} c_{\hat{x}_k}^T c_{\hat{x}_k} (A^T W A)^{-1} A^T W C_y) u = \lambda u \quad (5.31)$$

Onde  $c_{\hat{x}_k}^T$ , semelhante ao vetor  $c_{y_i}$ , é um vetor unitário dado por  $c_{\hat{x}_k}^T = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \underbrace{1}_k \ 0 \ \dots \ 0]_{ux1}^T$ , onde  $k$  corresponde a linha do  $k$ -ésimo parâmetro  $\hat{x}_k$  cuja confiabilidade externa deseja-se ser maximizada.

Como os vetores  $\nabla_{qx1}$  que maximizam a confiabilidade interna  $\nabla_{y_i}^q$  de uma observação  $y_i$  (para  $q$  outliers) são, em geral, diferentes dos vetores  $\nabla_{qx1}$  que maximizam a confiabilidade externa  $\nabla \hat{x}_k^q$  de um parâmetro estimado  $\hat{x}_k$  (também para  $q$  outliers), geralmente a confiabilidade interna e a confiabilidade externa são tratadas separadamente quando  $q > 1$ .

Além disso, para cada parâmetro  $\hat{x}_k$  (com  $k = 1, 2, \dots, u$ ), tem-se  $\binom{n}{q}$  confiabilidades externas associadas, um para cada modelo de erro  $C_y = [C_j \ c_{y_i}]$  considerado.

Nota-se ainda que, nenhuma das medidas de confiabilidade apresentadas dependem do valor numérico do vetor das observações  $y_{nx1}$ , estando estas medidas relacionadas com a

geometria/configuração do problema, a precisão das observações, bem como o modelo de erro e o número de *outliers*  $q$  considerado, além do poder do teste estipulado.

Desta forma, as relações apresentadas independem do fato de se estar considerando o vetor  $y$  das observações originais em um sistema linear, como em (2.3), ou o vetor  $l = y - y_0$  para o caso geral de sistemas de equações linearizados, por meio do denominado modelo de Gauss-Markov, como em (2.62).

### **5.3 Detecção quase-acurada de *outliers* para observações correlacionadas**

Conforme já mencionado, o controle da influência de possíveis *outliers* no processo de estimação por mínimos quadrados recai em duas vastas categorias: os procedimentos de teste convencionais para detecção de *outliers*, e os métodos de estimativa robusta.

Entretanto, ambas correntes fazem uso da magnitude do vetor dos resíduos ajustados  $\hat{v}_{nx1}$  (ou analogamente, do vetor dos erros aleatórios ajustados  $\hat{e}_{nx1}$ ), sendo que a influência de possíveis *outliers* no vetor das observações  $y_{nx1}$  (ou no vetor  $l_{nx1}$ , para o caso geral de modelos linearizados), pode ser parcialmente (ou completamente) absorvida na estimativa dos parâmetros incógnitos  $\hat{x}_{ux1}$ , não sendo, necessariamente, refletida nas componentes do vetor dos resíduos ajustados  $\hat{v}_{nx1}$ .

Considerando estas questões, um novo método, denominado QUAD (“*Quasi-Accurate Detection of gross errors*” – Detecção quase-acurada de erros grosseiros), baseado no princípio do “Ajustamento Quase-Estável” (“*Quasi-Stable Adjustment*”), foi desenvolvido para a detecção e identificação simultânea de múltiplos *outliers* nas observações.

O método QUAD resolve a deficiência de posto do sistema de equações que relaciona os erros verdadeiros com as observações, adicionando restrições sobre a norma mínima dos erros verdadeiros das observações selecionadas como “quase-acuradas”. Ou seja, ao contrário dos demais métodos, o método QUAD se baseia na relação funcional existente entre as observações e os erros verdadeiros, e não no vetor dos resíduos ajustados  $\hat{v}_{nx1}$ , obtido após o processo de estimativa pelo MMQ (OU, 1999).

O sistema de equações que relaciona o vetor dos erros verdadeiros  $\varepsilon_{nx1}$  (ver o capítulo anterior, Teoria Convencional de Confiabilidade do Ajustamento) com o vetor das

observações  $l_{nx1}$ , para o caso geral de modelos linearizados, por meio do modelo de Gauss-Markov (ver a expressão 2.62), é dado por (GUI et al., 2005):

$$R_{nxn}\varepsilon_{nx1} = R_{nxn}l_{nx1} \quad (5.32)$$

onde a matriz  $R_{nxn}$  é idempotente e possui  $\text{rank}(R) = n - u$ , sendo dada por:

$$R_{nxn} = I_{nxn} - U_{nxn} = I_{nxn} - A_{nxu}(A_{uxn}^T W_{nxn} A_{nxu})^{-1} A_{uxn}^T W_{nxn} \quad (5.33)$$

onde  $U_{nxn} = A_{nxu}(A_{uxn}^T W_{nxn} A_{nxu})^{-1} A_{uxn}^T W_{nxn}$  também é uma matriz idempotente e denominada matriz dos fatores ajustados, ou ainda, “hat matrix” (ver a expressão (4.13)).

O fato do sistema de equações em (5.32), que determina a relação analítica entre os erros verdadeiros e as observações, apresentar deficiência de posto (a matriz  $R$  possui dimensão  $nxn$  e  $\text{rank} = n - u$ ), não impede que este sistema possa ser resolvido matematicamente. Entretanto, a solução matemática obtida deve apresentar significado físico razoável, ou seja, deve ser compatível com a realidade do problema em questão (como a precisão e correlação das observações, configuração/geometria do problema e etc.).

Frente a estas questões, utilizando a idéia do “Ajustamento Quase Estável”, o princípio do método QUAD consiste em selecionar  $r$  observações apropriadas (sendo  $u < r \leq n$ ), denominadas “observações quase-acuradas” (QAO – *Quasi-Accurate Observations*), para solucionar o sistema em (5.32), sob a restrição de a solução apresentar norma mínima dos erros verdadeiros das observações quase-acuradas selecionadas (OU, 1999).

Em outras palavras, as  $r$  observações selecionadas como quase acuradas devem ter os seus erros verdadeiros estimados segundo o método dos mínimos quadrados (o que é possível, pois  $r > u$ ).

Esta solução pode ser obtida utilizando as equações de condição estendidas (OU, 1999):

$$\begin{cases} R_{nxn}\varepsilon_{nx1} = R_{nxn}l_{nx1} \\ A_{uxr}^T W_{rxr} \varepsilon_{rx1} = 0 \end{cases} \quad (5.34)$$

onde  $A_{rxu}$  é uma sub-matriz da matriz *design*  $A_{nxu}$ , correspondente apenas as  $r$  observações quase-acuradas (QAO),  $W_{rxr}$  é uma sub-matriz da matriz peso  $W_{nxn}$  de  $l_{nx1}$ , relativa apenas

as  $r$  QAO selecionadas, e  $\varepsilon_{rx1}$  é o vetor dos erros verdadeiros, também relativo somente às  $r$  observações selecionadas como quase-acuradas.

Quando todas as observações são selecionadas como QAO, isto é,  $r = n$ , então o vetor dos erros verdadeiros  $\varepsilon_{nx1}$  coincide com o vetor dos erros aleatórios estimados por mínimos quadrados  $\hat{\varepsilon}_{nx1}$  (ver a expressão (4.1), onde  $\varepsilon_{nx1} = e_{nx1} + \nabla_{nx1}$ ), isto é, todas as observações apresentam norma mínima para os erros verdadeiros (pois apenas erros aleatórios contaminam as observações, e a solução pelo MMQ, conforme já visto, é a solução que apresenta norma mínima para estes erros).

Desta forma, a chave do método QUAD é como selecionar corretamente as observações quase-acuradas (observações de baixa precisão e/ou contaminadas por erros não aleatórios não devem ser selecionadas).

Geralmente, as QAO apropriadas são escolhidas por meio de duas etapas, incluindo escolhas preliminares e finais. Entretanto, para o caso de observações correlacionadas, um critério possível é utilizar diretamente os indicadores de sensibilidade local.

No caso geral de modelos linearizados (ver a expressão 2.62), o indicador de sensibilidade local de uma observação  $l_i$  representa a sensibilidade da norma quadrática dos resíduos  $\hat{v}_{1xn}^T W_{nxn} \hat{v}_{1xn}$  (a qual se deseja minimizar na estimativa por mínimos quadrados), em relação a uma dada perturbação (erro) nesta observação. Para uma observação  $l_i$ , o seu indicador de sensibilidade local  $\tau_i$  é dado por (GUO et al., 2007):

$$\tau_i = \frac{|c_{l_{1xn}}^T W_{nxn} R_{nxn} l_{nx1}|}{\sqrt{c_{l_{1xn}}^T W_{nxn} R_{nxn} c_{l_{nx1}}}} \quad (5.35)$$

Quanto maior o indicador de sensibilidade local de uma observação  $l_i$ , maior é a probabilidade desta observação estar contaminada por *outliers*. Desta forma, uma observação  $l_i$  será selecionada como uma observação quase-acurada se a seguinte condição for satisfeita:

$$\tau_i < k \sqrt{\sigma^2} \quad (5.36)$$

onde  $\sigma^2$  é o fator de variância das observações, e  $k$  é uma constante, usualmente tomada entre  $1,5 \leq k \leq 2,5$ . Como o fator de variância das observações é, em muitos casos, desconhecido, pode-se substituir o parâmetro  $\sqrt{\sigma^2}$  na equação (5.36) pelo seu “*robust least median of squares estimator*” (GUO et al., 2007):

$$\tilde{\sigma} = 1,4826 \sqrt{\text{mediana}_i (\tau_i^2)} \quad (5.37)$$

Selecionadas as  $r$  observações quase-acuradas (QAO) por meio deste procedimento (com  $u < r \leq n$ ), o vetor dos erros verdadeiros ( $\varepsilon_{nx1}$ ) tem a sua estimativa por mínimos quadrados ( $\hat{\varepsilon}_{nx1}$ ) obtida solucionando as equações de condição estendidas em (5.34).

Se as  $r$  observações quase-acuradas forem selecionadas adequadamente, um fenômeno distinto e interessante, denominado “*hive-off*” irá ocorrer: Algumas observações (das  $n - r$  restantes, não selecionadas como QAO) irão apresentar valores estimados para os seus erros ( $\hat{\varepsilon}_i$ ) muito elevados, significativamente maiores do que as demais observações, e, desta forma, todos os possíveis *outliers* no vetor  $l_{nx1}$  podem ser localizados e identificados simultaneamente, em um único procedimento (ou seja, sem iterações).

Uma solução mais prática para o sistema de equações em (5.34), utilizado para se obter o fenômeno “*hive-off*”, é atribuir pesos praticamente nulos para as  $(n - r)$  observações não selecionadas como quase-acuradas.

Por exemplo, na matriz peso original ( $W_{nxn}$ ) das observações, mantém-se o peso original das  $r$  observações selecionadas como QAO, e para as demais, atribui-se um peso muito baixo, como por exemplo,  $w_j = 1$  (para  $j = 1, 2, \dots, n - r$ ).

Além disso, os elementos fora da diagonal principal de  $W_{nxn}$ , em geral relativos às correlações entre as observações e muito pequenos, são zerados. O vetor dos erros ajustados de todas as  $n$  observações ( $\hat{\varepsilon}_{nx1}$ ) pode então, ser obtido por:

$$\hat{\varepsilon}_{nx1} = [I_{nxn} - A_{nxu}(A_{uxn}^T W_{nxn}^Q A_{nxu})^{-1} A_{uxn}^T W_{nxn}^Q] l_{nx1} \quad (5.38)$$

Onde  $W_{nxn}^Q$  é a matriz peso das observações modificada, que mantém o peso original das  $r$  observações selecionadas como QAO, e atribui um peso muito baixo (como por exemplo,  $w_j = 1$ ) para as  $(n - r)$  observações restantes, não selecionadas como quase-acuradas.

Importante salientar que esta solução mais prática para se obter o fenômeno “*hive-off*”, por meio da expressão (5.38), foi descoberta nesta presente dissertação, pois, o sistema de equações estendidas em (5.34) não é de fácil solução.

A próxima etapa do procedimento, após identificar as observações possivelmente contaminadas por *outliers*, é buscar minimizar ou remover a influência destes sobre os resultados do ajustamento (ou seja, sobre o vetor dos parâmetros estimados).

Desta forma, assumindo que  $q$  observações do vetor  $l_{nx1}$ , das  $(n - r)$  restantes (onde  $q \leq n - r$ ), foram identificadas como possíveis *outliers* pelo fenômeno “*hive-off*”, estas podem ter as magnitudes de seus erros não aleatórios (distúrbios) estimadas por mínimos quadrados, resultando em (GUO et al., 2007):

$$\hat{V}_{qx1} = (C_l^T W_{nxn} R_{nxn} C_l)_{qxq}^{-1} C_l^T W_{nxn} R_{nxn} l_{nx1} \quad (5.39)$$

onde  $\hat{V}_{qx1}$  é o vetor dos  $q$  *outliers*, estimado por mínimos quadrados, e  $C_{l_{nxq}}$  é a matriz referente ao modelo de erro adotado, no caso,  $C_{l_{nxq}} = [c_{l_{i_1 nx1}} c_{l_{i_2 nx1}} \dots c_{l_{i_q nx1}}]_{nxq}$ , sendo  $l_{i_1}, l_{i_2}, \dots, l_{i_q}$  as  $q$  observações identificadas como suspeitas de estarem contaminadas por erros grosseiros (*outliers*), por meio do fenômeno “*hive-off*”.

A matriz de covariância de  $\hat{V}_{qx1}$ , pela lei de propagação de covariâncias, é dada por:

$$\Sigma_{\hat{V}_{qxq}} = (C_l^T W_{nxn} R_{nxn} C_l)_{qxq}^{-1} \quad (5.40)$$

Por fim, a estimação por mínimos quadrados para o vetor dos parâmetros incógnitos do modelo, considerando (e minimizando) a influência dos possíveis  $q$  *outliers* identificados, é dada por (GUO et al., 2007):

$$\hat{x}_{ux1} = (A_{uxn}^T W_{nxn} A_{nxu})^{-1} A_{uxn}^T W_{nxn} (l_{nx1} - C_{l_{nxq}} \hat{V}_{qx1}) \quad (5.41)$$

E a sua matriz de covariância resulta em (GUO et al., 2007):

$$\Sigma_{\hat{x}_{uxu}} = (A^T W A)_{uxu}^{-1} + [(A^T W A)^{-1} A^T C_l \Sigma_{\hat{V}} C_l^T W A (A^T W A)^{-1}]_{uxu} \quad (5.42)$$

Comparando a expressão (5.42) com a expressão (2.46), nota-se um aumento aparente da precisão dos parâmetros estimados quando os *outliers* no vetor  $l_{nx1}$  deveriam ter sido levados em conta, porém, foram ignorados no processo de estimação. Em outras palavras, a lei de propagação de covariâncias superestima a precisão dos parâmetros estimados, quando existem erros não aleatórios que foram negligenciados nas observações.

Ressalva-se que este procedimento para remover a influência dos *outliers* identificados é necessário, pois, embora os erros verdadeiros das observações possam ser estimados

diretamente por meio da expressão (5.34), ou então da expressão (5.38), as observações contaminadas por *outliers* possuem duas componentes em seus erros verdadeiros: os (inevitáveis) erros aleatórios, e os erros não aleatórios (que são os quais se busca identificar e minimizar a influência no modelo, ver também a expressão 4.1 e a Figura 4.1).

O método QUAD para detecção e identificação de *outliers* é significativamente diferente dos procedimentos de testes convencionais, uma vez que não requer testes estatísticos, e não possui medidas de confiabilidade associadas, fazendo uso unicamente do fenômeno “*hive-off*” para detecção e identificação simultânea de (múltiplos) *outliers* no vetor das observações  $l_{nx1}$ , sem processos iterativos, contanto que as observações ditas “quase-acuradas” (QAO) tenham sido selecionadas adequadamente.

Com este capítulo, encerram-se os principais fundamentos teóricos necessários para a realização dos experimentos desta dissertação. Maiores detalhes sobre os temas abordados podem ser obtidos em Ober (1996), Angus (2006), Knight et al. (2010), Almagbile et al. (2011), Ou (1999), Chai et al. (2002), Gui et al. (2005) e Guo et al. (2007).

## 6 EXPERIMENTOS, RESULTADOS OBTIDOS E ANÁLISES

Exposta a fundamentação teórica necessária nos capítulos anteriores, este capítulo trata dos experimentos realizados nesta dissertação.

Conforme já mencionado, o objetivo deste trabalho é realizar uma pesquisa na área do controle de qualidade do ajustamento de observações geodésicas, utilizando tanto a teoria convencional de confiabilidade quanto a sua extensão para múltiplos *outliers*, bem como verificar como o modelo estocástico (precisão das observações) e o modelo funcional (relacionado com a geometria/configuração do problema) podem influenciar nestas medidas de confiabilidade.

Portanto, neste capítulo, serão feitos experimentos simulando diferentes cenários em uma rede GPS (*Global Positioning System*), bem como analisados e discutidos os resultados obtidos.

Desta forma, a rede geodésica utilizada neste estudo é uma rede tridimensional GPS, retirada de Ghilani e Wolf (2006, página 313), conforme ilustra a Figura 6.1. Ela é composta por dados reais, coletados em campo.

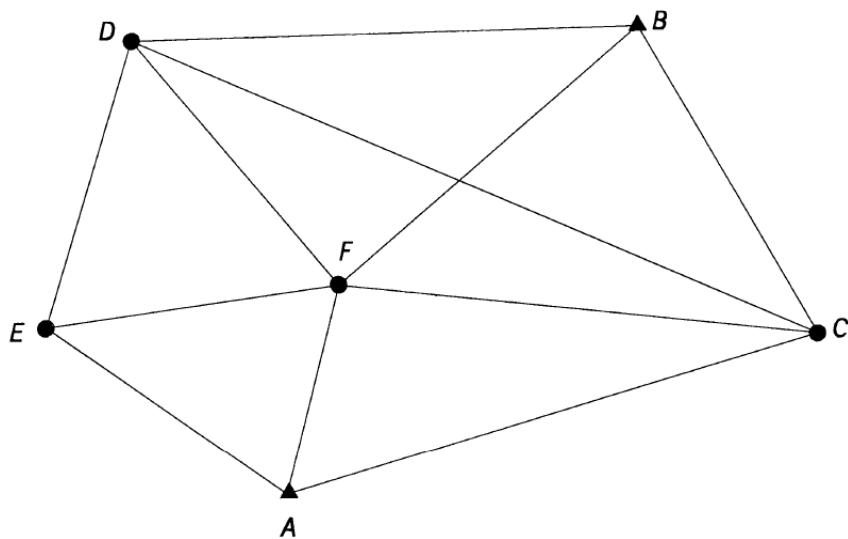


Figura 6.1 – Rede GPS utilizada nos experimentos, com os vértices A e B como pontos de controle.  
Fonte: Ghilani e Wolf (2006)

Analizando a Figura 6.1, nota-se que a rede constitui-se de seis vértices (pontos com coordenadas cartesianas geocêntricas – X Y Z), e, a princípio, de onze linhas-base (distâncias relativas entre os vértices –  $\Delta X \Delta Y \Delta Z$ ), sendo os vértices A e B pontos de controle (com coordenadas injuncionadas de maneira absoluta, materializando o referencial). Entretanto, o

par de vértices  $F$  e  $A$  e também o par de vértices  $F$  e  $B$  possuem duas linhas-base distintas cada (denominadas  $FA$  e  $AF$  e também  $FB$  e  $BF$ , respectivamente), e, desta forma, na realidade a rede GPS em estudo se constitui de treze linhas-base independentes.

Portanto, o número de observações é  $n = 13 \times 3 = 39$  (componentes  $\Delta X \Delta Y \Delta Z$  das treze linhas-base), o número de incógnitas é  $u = 4 \times 3 = 12$  (coordenadas  $X Y Z$  dos vértices desconhecidos  $C, D, E, F$ ) e o número de injunções é  $2 \times 3 = 6$  (coordenadas  $X Y Z$  dos pontos de controle  $A$  e  $B$ ).

As covariâncias entre componentes de diferentes linhas-base, por serem muito difíceis de serem estimadas com confiança (ver, por exemplo, MONICO, 2008), foram consideradas nulas, e as variâncias e covariâncias das componentes de cada linha-base foram obtidas por meio do posicionamento GPS relativo que foi realizado para estimar o valor numérico de suas componentes  $\Delta X \Delta Y \Delta Z$  (GHILANI; WOLF, 2006).

Desta forma, a MVC das observações tem a seguinte estrutura bloco-diagonal ( $3 \times 3$ ):

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\Delta X_1}^2 & \sigma_{\Delta X_1, \Delta Y_1} & \sigma_{\Delta X_1, \Delta Z_1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{\Delta Y_1, \Delta X_1} & \sigma_{\Delta Y_1}^2 & \sigma_{\Delta Y_1, \Delta Z_1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{\Delta Z_1, \Delta X_1} & \sigma_{\Delta Z_1, \Delta Y_1} & \sigma_{\Delta Z_1}^2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\Delta X_2}^2 & \sigma_{\Delta X_2, \Delta Y_2} & \sigma_{\Delta X_2, \Delta Z_2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\Delta Y_2, \Delta X_2} & \sigma_{\Delta Y_2}^2 & \sigma_{\Delta Y_2, \Delta Z_2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\Delta Z_2, \Delta X_2} & \sigma_{\Delta Z_2, \Delta Y_2} & \sigma_{\Delta Z_2}^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_{\Delta X_k}^2 & \sigma_{\Delta X_k, \Delta Y_k} & \sigma_{\Delta X_k, \Delta Z_k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_{\Delta Y_k, \Delta X_k} & \sigma_{\Delta Y_k}^2 & \sigma_{\Delta Y_k, \Delta Z_{nk}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_{\Delta Z_k, \Delta X_k} & \sigma_{\Delta Z_k, \Delta Y_k} & \sigma_{\Delta Z_k}^2 \end{bmatrix}$$

Ou seja, cada uma das  $k$ -linhas-base possui uma matriz  $3 \times 3$  relativa as variâncias e covariâncias de suas componentes ( $\Delta X \Delta Y \Delta Z$ ). A MVC completa das observações será uma matriz de dimensão  $n \times n$  (onde  $n = 3 \times k$ ), de estrutura bloco-diagonal  $3 \times 3$ , sendo que as covariâncias entre as componentes de diferentes linhas-base (ou seja, os elementos da MVC fora desta estrutura bloco-diagonal  $3 \times 3$ ), são assumidas serem nulas.

Detalhes sobre o posicionamento GPS relativo entre dois vértices, bem como o ajustamento de redes GPS, podem ser obtidos em Leick (2004), Ghilani e Wolf (2006) e também em Monico (2008).

Desta forma, as variâncias e covariâncias das componentes de cada uma das  $k = 13$  linhas-base foram obtidas em Ghilani e Wolf (2006, página 323), e a Tabela 6.1 apresenta o

vetor das observações  $y_{39x1}$  (componentes  $\Delta X \Delta Y \Delta Z$  de cada uma das treze linhas-base), bem como a matriz de variâncias e covariâncias (MVC) destas, além dos respectivos desvios padrões de cada uma das  $n = 39$  observações.

Tabela 6.1 – Vetor das observações da rede GPS e suas respectivas variâncias e covariâncias.

Observações	Vetor $y_{39x1}$ (m)	MVC de cada linha-base $\Delta X_{IJ} \Delta Y_{IJ} \Delta Z_{IJ}$	Desvio padrão (m)
$\Delta X_{AC}$	11644,2232	<b>0,00098840</b>	-0,00000958 0,00000952 0,031
$\Delta Y_{AC}$	3601,2165	-0,00000958 <b>0,00093770</b>	-0,00000952 0,031
$\Delta Z_{AC}$	3399,2550	0,00000952 -0,00000952 <b>0,00098270</b>	0,031
$\Delta X_{AE}$	-5321,7164	<b>0,00021580</b> -0,00000210	0,00000216 0,015
$\Delta Y_{AE}$	3634,0754	-0,00000210 <b>0,00019190</b>	-0,00000210 0,014
$\Delta Z_{AE}$	3173,6652	<b>0,00000216</b> -0,00000210	<b>0,00020050</b> 0,014
$\Delta X_{BC}$	3960,5442	<b>0,00023050</b>	-0,00000223 0,00000207 0,015
$\Delta Y_{BC}$	-6681,2467	-0,00000223 <b>0,00025460</b>	-0,00000223 0,016
$\Delta Z_{BC}$	-7279,0148	0,00000207 -0,00000223	<b>0,00022520</b> 0,015
$\Delta X_{BD}$	-11167,6076	<b>0,00027000</b> -0,00000275	0,00000285 0,016
$\Delta Y_{BD}$	-394,5204	-0,00000275 <b>0,00027210</b>	-0,00000272 0,016
$\Delta Z_{BD}$	-907,9593	<b>0,00000285</b> -0,00000272	<b>0,00026700</b> 0,016
$\Delta X_{DC}$	15128,1647	<b>0,00014610</b>	-0,00000143 0,00000134 0,012
$\Delta Y_{DC}$	-6286,7054	-0,00000143 <b>0,00016140</b>	-0,00000144 0,013
$\Delta Z_{DC}$	-6371,0583	0,00000134 -0,00000144	<b>0,00013080</b> 0,011
$\Delta X_{DE}$	-1837,7459	<b>0,00012310</b> -0,00000119	0,00000122 0,011
$\Delta Y_{DE}$	-6253,8534	-0,00000119 <b>0,00012770</b>	-0,00000121 0,011
$\Delta Z_{DE}$	-6596,6697	<b>0,00000122</b> -0,00000121	<b>0,00012830</b> 0,011
$\Delta X_{FA}$	-1116,4523	<b>0,00007475</b>	-0,00000079 0,00000088 0,009
$\Delta Y_{FA}$	-4596,1610	-0,00000079 <b>0,00006593</b>	-0,00000081 0,008
$\Delta Z_{FA}$	-4355,9062	0,00000088 -0,00000081	<b>0,00007616</b> 0,009
$\Delta X_{FC}$	10527,7852	<b>0,00025670</b> -0,00000225	0,00000240 0,016
$\Delta Y_{FC}$	-994,9377	-0,00000225 <b>0,00021630</b>	-0,00000227 0,015
$\Delta Z_{FC}$	-956,6246	<b>0,00000240</b> -0,00000227	<b>0,00023970</b> 0,015
$\Delta X_{FE}$	-6438,1364	<b>0,00009442</b>	-0,00000092 0,00000104 0,010
$\Delta Y_{FE}$	-962,0694	-0,00000092 <b>0,00009959</b>	-0,00000089 0,010
$\Delta Z_{FE}$	-1182,2305	0,00000104 -0,00000089	<b>0,00008826</b> 0,009
$\Delta X_{FD}$	-4600,3787	<b>0,00009330</b> -0,00000099	0,00000090 0,010
$\Delta Y_{FD}$	5291,7785	-0,00000099 <b>0,00009875</b>	-0,00000099 0,010
$\Delta Z_{FD}$	5414,4311	<b>0,00000090</b> -0,00000099	<b>0,00012040</b> 0,011
$\Delta X_{FB}$	6567,2311	<b>0,00006643</b>	-0,00000065 0,00000069 0,008
$\Delta Y_{FB}$	5686,2926	-0,00000065 <b>0,00007465</b>	-0,00000064 0,009
$\Delta Z_{FB}$	6322,3917	0,00000069 -0,00000064	<b>0,00006048</b> 0,008
$\Delta X_{BF}$	-6567,2310	<b>0,00005512</b> -0,00000063	0,00000061 0,007
$\Delta Y_{BF}$	-5686,3033	-0,00000063 <b>0,00007472</b>	-0,00000063 0,009
$\Delta Z_{BF}$	-6322,3807	<b>0,00000061</b> -0,00000063	<b>0,00006629</b> 0,008
$\Delta X_{AF}$	1116,4577	<b>0,00006619</b>	-0,00000080 0,00000090 0,008
$\Delta Y_{AF}$	4596,1553	-0,00000080 <b>0,00008108</b>	-0,00000082 0,009
$\Delta Z_{AF}$	4355,9141	0,00000090 -0,00000082	<b>0,00009376</b> 0,010

Fonte: Ghilani e Wolf (2006)

Analizando a Tabela 6.1, nota-se que as componentes das diferentes linhas-base possuem precisão (desvio padrão) semelhante (entre 7 mm e 16 mm), a exceção das componentes da linha-base  $AC$ , que possuem uma precisão ligeiramente inferior às demais (cerca de 31 mm).

Analizando ainda a Tabela 6.1, nota-se que as covariâncias entre as componentes de uma mesma linha-base são cerca de cem vezes menores que as variâncias das componentes desta linha-base, ou seja, em termos relativos, as variâncias são significativamente maiores do que as covariâncias das componentes (observações) de cada linha-base.

As coordenadas cartesianas geocêntricas dos pontos de controle  $A$  e  $C$  são dadas por  $X_A = -2413963,823\text{ m}$ ,  $Y_A = -4395420,994\text{ m}$ ,  $Z_A = 3930059,456\text{ m}$  e  $X_C = -2413073,302\text{ m}$ ,  $Y_C = -4393796,994\text{ m}$ ,  $Z_C = 3932699,132\text{ m}$  (GHILANI; WOLF, 2006, página 330). O sistema de equações, para cada linha-base  $IJ$ , é dado por:

$$\Delta X_{IJ} = X_J - X_I$$

$$\Delta Y_{IJ} = Y_J - Y_I$$

$$\Delta Z_{IJ} = Z_J - Z_I$$

Desta forma, a matriz *design A*, que relaciona as observações com os parâmetros, é formada por coeficientes 0, 1 e  $-1$ , e, portanto, o sistema de equações já é linear em relação aos parâmetros. Definidas as observações, os parâmetros, e a estrutura da matriz *design A*, o sistema de equações que se deseja ajustar:

$$y_{39x1} = A_{39x12}x_{12x1} + e_{39x1}$$

tem a seguinte forma matricial:

Conforme já mencionado, a MVC (matriz de variâncias e covariâncias) das observações é uma matriz de dimensão 39 por 39, de estrutura bloco diagonal, onde os elementos da diagonal principal correspondem às variâncias das observações, e os elementos fora da diagonal principal correspondem às covariâncias entre as observações.

Também conforme já mencionado, para componentes de uma mesma linha-base, as covariâncias são cerca de cem vezes menores que as variâncias das observações, e para componentes de diferentes linhas-base, as covariâncias foram assumidas serem nulas, formando uma estrutura bloco diagonal  $3 \times 3$  (para maiores detalhes, ver GHILANI; WOLF, 2006 e também MONICO, 2008).

## 6.1 Ajustamento por Mínimos Quadrados da Rede GPS

Como o sistema de equações para o ajustamento da rede GPS já é linear em relação aos parâmetros, não é necessário um vetor de parâmetros aproximados e também iterações até que o ajustamento apresente solução convergente, podendo a solução do mesmo ser obtida diretamente por meio da expressão 2.11.

Entretanto, visando demonstrar a aplicação da teoria de confiabilidade para o caso geral de modelos linearizados, foi estipulado um vetor dos parâmetros aproximados como sendo igual ao vetor nulo, ou seja:  $x_0 = [0]_{12x1}$ .

Desta forma, como o sistema de equações já é inicialmente linear em relação aos parâmetros, as derivadas parciais das equações de observação, em relação aos parâmetros, e aplicadas ao vetor  $x_0$ , resultam na matriz *design A* original. Entretanto, a aplicação do vetor dos parâmetros aproximados  $x_0$ :

$$x_0 = \begin{bmatrix} X_C^0 \\ Y_C^0 \\ Z_C^0 \\ X_E^0 \\ Y_E^0 \\ Z_E^0 \\ X_D^0 \\ Y_D^0 \\ Z_D^0 \\ X_F^0 \\ Y_F^0 \\ Z_F^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{12x1}$$

ao sistema de  $n = 3 \times 13 = 39$  equações:

$$\begin{aligned} \Delta X_{IJ} &= X_J - X_I \\ \Delta Y_{IJ} &= Y_J - Y_I \\ \Delta Z_{IJ} &= Z_J - Z_I \end{aligned}$$

resulta no seguinte vetor  $y_0$  (em metros):

Os elementos do vetor  $y_0$ , em módulo, resultam em zero (para linhas-base com dois pontos desconhecidos), ou na respectiva coordenada do ponto de controle (para linhas-base com um ponto desconhecido e um ponto de controle). O vetor  $l$ , de dimensão 39 por 1, é então obtido por:  $l = y - y_0$ .

A matriz peso, seguindo o procedimento usualmente encontrado na literatura, é igual ao inverso da MVC das observações, ou seja:  $W = \sigma_0^2 \Sigma_y^{-1}$ , sendo o fator de variância *a priori* arbitrado em  $\sigma_0^2 = 1$  (em outras palavras, assume-se que as variâncias e covariâncias das observações estão bem determinadas).

Definidas as matrizes  $A$  e  $W$ , bem como o vetor  $l$ , o vetor de correção aos parâmetros aproximados é obtido por (expressão 2.60):

$$x_{12x1} = (A_{12x39}^T W_{39x39} A_{39x12})^{-1} A_{12x39}^T W_{39x39} l_{39x1}$$

Como o vetor dos parâmetros aproximados é igual ao vetor nulo, o vetor dos parâmetros estimados (coordenadas dos pontos desconhecidos) torna-se (em metros):

$$\hat{x}_{12x1} = x_{12x1} = \begin{bmatrix} 12046,581 \\ -4649394,083 \\ 4353160,064 \\ -4919,339 \\ -4649361,220 \\ 4352934,455 \\ -3081,583 \\ -4643107,369 \\ 4359531,123 \\ 1518,801 \\ -4648399,145 \\ 4354116,691 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_C \\ \hat{Y}_C \\ \hat{Z}_C \\ \hat{X}_E \\ \hat{Y}_E \\ \hat{Z}_E \\ \hat{X}_D \\ \hat{Y}_D \\ \hat{Z}_D \\ \hat{X}_F \\ \hat{Y}_F \\ \hat{Z}_F \end{bmatrix}$$

Este é o vetor solução (coordenadas estimadas) do ajustamento por mínimos quadrados da rede GPS. A matriz de covariância  $\Sigma_{\hat{x}}$  destes parâmetros estimados pode ser obtida por meio da lei de propagação de covariâncias (expressão 2.46), mas não será aqui considerada por não fazer parte dos objetivos desta dissertação. Além disso, como o modelo já é linear em relação aos parâmetros, não é necessário o processo iterativo visto na seção 2.4.

## 6.2 Controle de Qualidade e Medidas de Confiabilidade Convencionais

Realizado o ajustamento da rede GPS, o próximo passo é o seu controle de qualidade. Primeiramente, para a detecção de erros grosseiros (bem como de erros no modelo), foi realizado o teste global do ajustamento, por meio do vetor dos resíduos  $\hat{\nu}$ , obtido utilizando a expressão 2.62. Desta forma, o fator de variância *a posteriori*, por meio de (3.48), é dado por:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\nu}^T W \hat{\nu}}{n - u} = \frac{13,51}{39 - 12} = 0,50$$

Conforme já dito, o fator de variância *a priori* foi arbitrado em  $\sigma_0^2 = 1$ , ou seja, utilizou-se como matriz peso para o ajustamento o inverso da matriz de covariância original

das observações, obtida em Ghilani e Wolf (2006). Portanto, a estatística do teste global, utilizando a expressão (3.49), resulta em:

$$\frac{\hat{v}^T W \hat{v}}{\sigma_0^2} = 13,51$$

E o valor tabelado para a distribuição qui-quadrado, com  $q = n - u = 27$  graus de liberdade e nível de significância  $\alpha = 0,039$ , é dado por  $K_\alpha = 41,25$ .

Desta forma, como a estatística calculada é menor que o valor crítico tabelado (ou seja:  $13,51 < 41,25$ ), a hipótese nula do teste global do ajustamento não é rejeitada ao nível de significância de  $\alpha = 0,039$ .

Em outras palavras, pode-se afirmar que o verdadeiro fator de variância das observações, desconhecido, é estatisticamente igual ao fator de variância *a priori* que foi arbitrado, e, portanto, a magnitude dos resíduos ajustados é compatível com a precisão assumida para as observações (não existem erros no modelo, sejam estes presentes nas observações, no modelo funcional, no modelo estocástico e etc.), ao nível de significância  $\alpha = 0,039$ .

Este nível de significância ( $\alpha = 0,039$ ) para o teste global do ajustamento foi obtido por meio da desigualdade de Bonferroni:  $\alpha = n \alpha_0$ , sendo  $\alpha_0 = 0,001$  o nível de significância utilizado para o procedimento de teste *data snooping* (identificação de erros – considera apenas uma observação suspeita por vez).

Embora o ajustamento tenha sido “não rejeitado” pelo teste global do ajustamento, ou seja, não há evidências da existência de erros nas observações, por meio dos resíduos, seguindo a recomendação de Kavouras (1982), que foi comentada na seção 3.3, mesmo assim o procedimento de teste *data snooping* foi realizado, pois a existência de um resíduo grande no conjunto de observações pode ser negligenciada pelo teste global do ajustamento, quando o número de graus de liberdade é elevado.

Desta forma, para o procedimento de teste *data snooping* (onde  $q = 1$ ), o valor crítico tabelado na distribuição qui quadrado, para  $q = 1$  grau de liberdade e um nível de significância de  $\alpha_0 = 0,001$ , é dado por  $K_\alpha = 10,83$ .

Calculando a estatística de teste ( $T_{q=1}$ ) para todas as  $n = 39$  observações, por meio da expressão 3.33, resulta nos valores apresentados na Tabela 6.2.

Tabela 6.2 – Valores da estatística de teste  $T_{(q=1)}$  para todas as  $n = 39$  observações.

Observação	Estatística $T_{q=1}$
$\Delta X_{AC}$	0,04
$\Delta Y_{AC}$	0,01
$\Delta Z_{AC}$	1,11
$\Delta X_{AE}$	4,32
$\Delta Y_{AE}$	0,28
$\Delta Z_{AE}$	0,96
$\Delta X_{BC}$	0,15
$\Delta Y_{BC}$	0,74
$\Delta Z_{BC}$	0,10
$\Delta X_{BD}$	0,24
$\Delta Y_{BD}$	0,01
$\Delta Z_{BD}$	0,00
$\Delta X_{DC}$	0,01
$\Delta Y_{DC}$	0,79
$\Delta Z_{DC}$	0,01
$\Delta X_{DE}$	1,62
$\Delta Y_{DE}$	0,10
$\Delta Z_{DE}$	0,03
$\Delta X_{FA}$	0,08
$\Delta Y_{FA}$	0,54
$\Delta Z_{FA}$	0,96
$\Delta X_{FC}$	0,17
$\Delta Y_{FC}$	0,00
$\Delta Z_{FC}$	0,03
$\Delta X_{FE}$	0,33
$\Delta Y_{FE}$	0,56
$\Delta Z_{FE}$	0,93
$\Delta X_{FD}$	0,64
$\Delta Y_{FD}$	0,11
$\Delta Z_{FD}$	0,01
$\Delta X_{FB}$	0,00
$\Delta Y_{FB}$	0,48
$\Delta Z_{FB}$	0,00
$\Delta X_{BF}$	0,01
$\Delta Y_{BF}$	0,47
$\Delta Z_{BF}$	2,44
$\Delta X_{AF}$	1,05
$\Delta Y_{AF}$	0,00
$\Delta Z_{AF}$	0,00

Analizando a Tabela 6.2, nota-se que, embora algumas observações tenham apresentado valores significativamente maiores em suas estatísticas de teste do que as demais, todas as observações são consideradas não contaminadas por erros (não aleatórios), segundo o

nível de significância  $\alpha_0 = 0,001$ , pois todas as observações apresentaram estatísticas de teste ( $T_{q=1}$ ) numericamente inferiores ao valor crítico tabelado ( $K_\alpha = 10,83$ ).

Embora nenhum erro em alguma observação tenha sido detectado pelos testes estatísticos utilizados, o controle de qualidade do ajustamento também contempla as medidas de confiabilidade, que são medidas que quantificam o menor erro detectável (confiabilidade interna – MBD) em uma observação pelo teste utilizado (no caso, o *data snooping*), segundo o nível de significância estipulado, e a sua influência nos resultados do ajustamento (parâmetros estimados), quando não detectado (confiabilidade externa), bem como a sensibilidade dos testes em detectar e identificar erros nas observações, por meio do vetor dos resíduos  $\hat{v}$  (números de redundância, de confiabilidade, de absorção e etc.).

Como o nível de significância do procedimento de teste *data snooping* (onde  $q = 1$ ) foi estipulado em  $\alpha_0 = 0,001$ , e o poder de teste, desconhecido na prática, mas arbitrado em  $\gamma_0 = 0,80$  (valores estes, recomendados por BAARDA, 1968), o valor de referência para o parâmetro de não centralidade do modelo em 3.26 é dado por  $\lambda_0 = 17,075$ .

Com este valor para o parâmetro de não centralidade do modelo, e a matriz de covariância dos resíduos ajustados  $\hat{v}$ , obtida por meio da expressão 2.49, foram calculadas as medidas de confiabilidade para o procedimento de teste *data snooping*, onde, ressaltando, apenas uma observação é suspeita de estar contaminada por erros por vez (ou seja,  $q = 1$  na expressão 3.7).

Desta forma, a Tabela 6.3 apresenta o desvio padrão  $\sigma_i$  de cada observação  $y_i$  (obtido pela matriz de covariância das observações), o resíduo ajustado  $v_i$  de cada observação, obtido por meio da expressão 2.49, bem como as seguintes medidas de confiabilidade convencional: número de redundância  $r_i$  (por meio da expressão 4.12), número de absorção  $u_i$  (por meio da expressão 4.13), número de confiabilidade  $\bar{r}_i$  (por meio da expressão 5.19) e confiabilidade interna – menor erro detectável (*minimal detectable bias* – MDB, obtido por meio da expressão 4.25).

Tabela 6.3 – Desvios padrões, resíduos e medidas de confiabilidade das observações.

Observação	$\sigma_i$ (m)	$\hat{v}_i$ (m)	$r_i$	$u_i$	$\bar{r}_i$	$MDB - \nabla y_i$ (m)
$\Delta X_{AC}$	0,031	0,007	0,9253	0,0747	0,9255	0,135
$\Delta Y_{AC}$	0,031	0,002	0,9201	0,0799	0,9203	0,132
$\Delta Z_{AC}$	0,031	0,032	0,9275	0,0725	0,9277	0,134
$\Delta X_{AE}$	0,015	0,026	0,7464	0,2536	0,7466	0,070
$\Delta Y_{AE}$	0,014	0,006	0,7114	0,2886	0,7116	0,068
$\Delta Z_{AE}$	0,014	0,012	0,7333	0,2667	0,7335	0,068
$\Delta X_{BC}$	0,015	0,005	0,6798	0,3202	0,6799	0,076
$\Delta Y_{BC}$	0,016	0,012	0,7058	0,2942	0,7059	0,078
$\Delta Z_{BC}$	0,015	-0,004	0,6836	0,3164	0,6837	0,075
$\Delta X_{BD}$	0,016	-0,007	0,8191	0,1809	0,8193	0,075
$\Delta Y_{BD}$	0,016	-0,001	0,8119	0,1881	0,8120	0,076
$\Delta Z_{BD}$	0,016	-0,001	0,8026	0,1974	0,8027	0,075
$\Delta X_{DC}$	0,012	-0,001	0,4769	0,5231	0,4770	0,072
$\Delta Y_{DC}$	0,013	-0,008	0,5061	0,4939	0,5061	0,074
$\Delta Z_{DC}$	0,011	-0,001	0,4458	0,5542	0,4459	0,071
$\Delta X_{DE}$	0,011	-0,010	0,5060	0,4940	0,5061	0,064
$\Delta Y_{DE}$	0,011	0,003	0,5104	0,4896	0,5105	0,065
$\Delta Z_{DE}$	0,011	0,001	0,5112	0,4888	0,5113	0,065
$\Delta X_{FA}$	0,009	0,002	0,8095	0,1905	0,8097	0,040
$\Delta Y_{FA}$	0,008	0,005	0,7592	0,2408	0,7594	0,039
$\Delta Z_{FA}$	0,009	-0,008	0,795	0,205	0,7952	0,040
$\Delta X_{FC}$	0,016	-0,006	0,7159	0,2841	0,7160	0,078
$\Delta Y_{FC}$	0,015	0,000	0,662	0,338	0,6621	0,075
$\Delta Z_{FC}$	0,015	-0,002	0,7059	0,2941	0,7061	0,076
$\Delta X_{FE}$	0,010	-0,004	0,4777	0,5223	0,4778	0,058
$\Delta Y_{FE}$	0,010	-0,005	0,4962	0,5038	0,4963	0,059
$\Delta Z_{FE}$	0,009	-0,006	0,4568	0,5432	0,4569	0,057
$\Delta X_{FD}$	0,010	-0,006	0,5311	0,4689	0,5312	0,055
$\Delta Y_{FD}$	0,010	-0,002	0,5377	0,4623	0,5378	0,056
$\Delta Z_{FD}$	0,011	0,001	0,5985	0,4015	0,5985	0,059
$\Delta X_{FB}$	0,008	-0,001	0,7857	0,2143	0,7858	0,038
$\Delta Y_{FB}$	0,009	0,005	0,7874	0,2126	0,7875	0,040
$\Delta Z_{FB}$	0,008	0,000	0,7419	0,2581	0,7420	0,037
$\Delta X_{BF}$	0,007	0,000	0,7417	0,2583	0,7418	0,036
$\Delta Y_{BF}$	0,009	0,005	0,7876	0,2124	0,7877	0,040
$\Delta Z_{BF}$	0,008	-0,011	0,7645	0,2355	0,7646	0,038
$\Delta X_{AF}$	0,008	-0,007	0,7849	0,2151	0,7851	0,038
$\Delta Y_{AF}$	0,009	0,000	0,8042	0,1958	0,8044	0,041
$\Delta Z_{AF}$	0,010	0,000	0,8335	0,1665	0,8337	0,044

Analizando a Tabela 6.3, era esperado que o ajustamento fosse “não rejeitado” pelo teste global, pois a magnitude dos resíduos é compatível com a precisão das observações (os resíduos  $v_i$  possuem uma ordem de grandeza coerente com os respectivos desvios padrões  $\sigma_i$  das observações originais), sendo que na maior parte dos casos:  $|v_i| < |\sigma_i|$ .

Quanto aos números de redundância local e de absorção, de fato o somatório  $\sum_{i=1}^n r_i$  resulta em  $r = n - u = 27$  (ou seja, ao número de graus de liberdade do ajustamento), e o somatório  $\sum_{i=1}^n u_i$  resulta em  $u = 12$  (ou seja, ao número de parâmetros incógnitos do sistema).

Além disso, a igualdade:  $r_i + u_i = 1$  é sempre satisfeita. Este fato, bem como o fato que os números de confiabilidade  $\bar{r}_i$  são praticamente idênticos aos números de redundância  $r_i$  para todas as observações (ver a Tabela 6.3), é devido as covariâncias entre componentes de diferentes linhas-base serem assumidas nulas, e, além disso, as covariâncias entre componentes de uma mesma linha-base serem cerca de cem vezes menores que as variâncias das componentes desta mesma linha-base (ver os elementos da matriz de covariância em GHILANI; WOLF, 2006, página 323, ou também na Tabela 6.1).

Analizando as Tabelas 6.3 e 4.1, nota-se também que todas as observações possuem uma controlabilidade “boa”, pois todas elas apresentam um número de redundância local  $r_i \geq 0,3$ , devido à alta redundância da rede GPS em estudo (onde  $n = 39$  e  $u = 12$ , resultando em  $r = n - u = 27$ ).

Ainda sobre os números de redundância local, pode-se notar que linhas-base compostas por dois pontos desconhecidos (*DC, DE, FC, FE, FD*), possuindo, portanto, mais incógnitas, em geral apresentam menores valores para os seus números de redundância local do que as linhas-base compostas por um ponto de controle e um ponto desconhecido (*AC, AE, BC, BD, FA, FB, BF, AF*), possuindo, portanto, menos incógnitas em suas componentes.

A linha-base *AC* apresentou os maiores números de redundância local, provavelmente devido à menor precisão de suas observações, resultando em menor peso no ajustamento e, portanto, deixando suas observações “mais livres” para variar no processo de estimação.

Por fim, outra comprovação da alta redundância desta rede pode ser obtida por meio do seu número de redundância média (expressão 4.11):

$$\bar{r} = \frac{n - u}{n} = \frac{39 - 12}{39} = 0,6923$$

Nota-se que a redundância média  $\bar{r}$  das observações é maior que o dobro do valor de redundância mínimo considerado “bom” ( $r = 0,3$ ) na Tabela 4.1.

Sobre o menor erro detectável (MDB - confiabilidade interna), todas as observações apresentam um MDB pelo procedimento de teste *data snooping* de ordem centimétrica, relativamente maior do que a precisão ( $\sigma_i$ ) destas (a exceção das componentes da linha-base

$AC$ , onde a precisão é de ordem centimétrica e o MDB também é maior, mas de ordem decimétrica).

Em geral, quanto menor a precisão de uma observação, maior o seu MDB, e, além disso, linhas-base compostas por um ponto desconhecido e um ponto de controle (portanto, com menos incógnitas) apresentaram valores relativamente menores para o MDB de suas componentes em relação a linhas-base compostas por dois pontos desconhecidos (e, portanto, com mais incógnitas).

As linhas-base envolvendo o vértice  $F$ , de alta redundância na rede (ver a Figura 6.1), em geral também apresentaram valores menores para o MDB de suas componentes. A linha-base  $AC$ , que apresentou os maiores valores para os números de redundância local, também apresentou a menor confiabilidade interna (maiores valores para o MDB), ou seja, embora um erro grosso em alguma componente desta linha-base seja altamente refletido no respectivo resíduo, devido a sua precisão inferior, o menor erro detectável pelo procedimento *data snooping* (que faz uso dos resíduos ajustados), também é relativamente maior do que para as componentes de outras linhas-base, e, portanto, é importante que estas medidas de confiabilidade sejam analisadas de maneira conjunta.

A confiabilidade externa reflete a influência do MDB de uma observação  $y_i$  nos resultados do ajustamento (ou seja, no vetor dos parâmetros ajustados  $\hat{x}_{ux1}$ ).

Portanto, em termos gerais, quanto maior o valor para o MDB de  $y_i$ , maior a influência deste erro não detectável na observação  $y_i$  sobre os parâmetros. Como a rede geodésica em estudo possui  $n = 39$  observações, pela teoria de confiabilidade convencional, tem-se 39 confiabilidades externas associadas (um vetor diferente para cada observação  $y_i$ ).

Desta forma, as Tabelas 6.4, 6.5 e 6.6 apresentam os valores de confiabilidade externa das observações (componentes  $\Delta X \Delta Y \Delta Z$  das linhas-base) em relação aos parâmetros (coordenadas cartesianas geocêntricas  $X, Y, Z$  dos pontos desconhecidos  $C, E, D, F$ ), cada um destes obtido por meio da expressão 4.36.

Tabela 6.4 – Confiabilidade externa das observações de AC, DE, BC e BD sobre os parâmetros (em mm).

	$\Delta X_{AC}$	$\Delta Y_{AC}$	$\Delta Z_{AC}$	$\Delta X_{AE}$	$\Delta Y_{AE}$	$\Delta Z_{AE}$	$\Delta X_{BC}$	$\Delta Y_{BC}$	$\Delta Z_{BC}$	$\Delta X_{BD}$	$\Delta Y_{BD}$	$\Delta Z_{BD}$
<b>X<sub>C</sub></b>	<b>10</b>	0	0	<b>4</b>	0	0	<b>24</b>	0	0	<b>6</b>	0	0
<b>Y<sub>C</sub></b>	0	<b>11</b>	0	0	<b>4</b>	0	0	<b>23</b>	0	0	<b>6</b>	0
<b>Z<sub>C</sub></b>	0	0	<b>10</b>	0	0	<b>4</b>	0	0	<b>24</b>	0	0	<b>7</b>
<b>X<sub>E</sub></b>	<b>2</b>	0	0	<b>18</b>	0	0	<b>4</b>	0	0	<b>6</b>	0	0
<b>Y<sub>E</sub></b>	0	<b>2</b>	0	0	<b>20</b>	0	0	<b>4</b>	0	0	<b>6</b>	0
<b>Z<sub>E</sub></b>	0	0	<b>2</b>	0	0	<b>18</b>	0	0	<b>4</b>	0	0	<b>6</b>
<b>X<sub>D</sub></b>	<b>3</b>	0	0	<b>7</b>	0	0	<b>8</b>	0	0	<b>14</b>	0	0
<b>Y<sub>D</sub></b>	0	<b>3</b>	0	0	<b>8</b>	0	0	<b>7</b>	0	0	<b>14</b>	0
<b>Z<sub>D</sub></b>	0	0	<b>4</b>	0	0	<b>7</b>	0	0	<b>9</b>	0	0	<b>15</b>
<b>X<sub>F</sub></b>	<b>1</b>	0	0	<b>3</b>	0	0	<b>2</b>	0	0	<b>3</b>	0	0
<b>Y<sub>F</sub></b>	0	<b>1</b>	0	0	<b>4</b>	0	0	<b>3</b>	0	0	<b>3</b>	0
<b>Z<sub>F</sub></b>	0	0	<b>1</b>	0	0	<b>4</b>	0	0	<b>3</b>	0	0	<b>3</b>

Tabela 6.5 – Confiabilidade externa das observações de DC, DE, FA e FC sobre os parâmetros (em mm).

	$\Delta X_{DC}$	$\Delta Y_{DC}$	$\Delta Z_{DC}$	$\Delta X_{DE}$	$\Delta Y_{DE}$	$\Delta Z_{DE}$	$\Delta X_{FA}$	$\Delta Y_{FA}$	$\Delta Z_{FA}$	$\Delta X_{FC}$	$\Delta Y_{FC}$	$\Delta Z_{FC}$
<b>X<sub>C</sub></b>	<b>25</b>	0	0	<b>-6</b>	0	0	<b>-4</b>	0	0	<b>20</b>	0	0
<b>Y<sub>C</sub></b>	0	<b>24</b>	0	0	<b>-6</b>	0	0	<b>-5</b>	0	0	<b>23</b>	0
<b>Z<sub>C</sub></b>	0	0	<b>25</b>	0	0	<b>-7</b>	0	0	<b>-4</b>	0	0	<b>20</b>
<b>X<sub>E</sub></b>	<b>-5</b>	0	0	<b>17</b>	0	0	<b>-5</b>	0	0	<b>1</b>	0	0
<b>Y<sub>E</sub></b>	0	<b>-5</b>	0	0	<b>17</b>	0	0	<b>-6</b>	0	0	<b>0</b>	0
<b>Z<sub>E</sub></b>	0	0	<b>-5</b>	0	0	<b>16</b>	0	0	<b>-6</b>	0	0	<b>1</b>
<b>X<sub>D</sub></b>	<b>-13</b>	0	0	<b>-14</b>	0	0	<b>-5</b>	0	0	<b>4</b>	0	0
<b>Y<sub>D</sub></b>	0	<b>-13</b>	0	0	<b>-15</b>	0	0	<b>-6</b>	0	0	<b>4</b>	0
<b>Z<sub>D</sub></b>	0	0	<b>-15</b>	0	0	<b>-16</b>	0	0	<b>-5</b>	0	0	<b>5</b>
<b>X<sub>F</sub></b>	<b>-1</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>-8</b>	0	0	<b>-2</b>	0	0
<b>Y<sub>F</sub></b>	0	<b>-1</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>-9</b>	0	0	<b>-2</b>	0
<b>Z<sub>F</sub></b>	0	0	<b>-1</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>-8</b>	0	0	<b>-2</b>

Tabela 6.6 – Confiabilidade externa das observações FE, FD, FB, BF e AF sobre os parâmetros (em mm).

	$\Delta X_{FE}$	$\Delta Y_{FE}$	$\Delta Z_{FE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta Y_{FD}$	$\Delta Z_{FD}$	$\Delta X_{FB}$	$\Delta Y_{FB}$	$\Delta Z_{FB}$	$\Delta X_{BF}$	$\Delta Y_{BF}$	$\Delta Z_{BF}$	$\Delta X_{AF}$	$\Delta Y_{AF}$	$\Delta Z_{AF}$
<b>X<sub>C</sub></b>	<b>2</b>	0	0	<b>9</b>	0	0	<b>-4</b>	0	0	<b>5</b>	0	0	<b>4</b>	0	0
<b>Y<sub>C</sub></b>	0	<b>2</b>	0	0	<b>8</b>	0	0	<b>-5</b>	0	0	<b>5</b>	0	0	<b>5</b>	0
<b>Z<sub>C</sub></b>	0	0	<b>3</b>	0	0	<b>9</b>	0	0	<b>-5</b>	0	0	<b>5</b>	0	0	<b>4</b>
<b>X<sub>E</sub></b>	<b>28</b>	0	0	<b>7</b>	0	0	<b>-6</b>	0	0	<b>6</b>	0	0	<b>6</b>	0	0
<b>Y<sub>E</sub></b>	0	<b>26</b>	0	0	<b>7</b>	0	0	<b>-6</b>	0	0	<b>6</b>	0	0	<b>5</b>	0
<b>Z<sub>E</sub></b>	0	0	<b>28</b>	0	0	<b>5</b>	0	0	<b>-7</b>	0	0	<b>6</b>	0	0	<b>5</b>
<b>X<sub>D</sub></b>	<b>7</b>	0	0	<b>23</b>	0	0	<b>-6</b>	0	0	<b>6</b>	0	0	<b>6</b>	0	0
<b>Y<sub>D</sub></b>	0	<b>7</b>	0	0	<b>23</b>	0	0	<b>-6</b>	0	0	<b>6</b>	0	0	<b>5</b>	0
<b>Z<sub>D</sub></b>	0	0	<b>8</b>	0	0	<b>21</b>	0	0	<b>-6</b>	0	0	<b>6</b>	0	0	<b>5</b>
<b>X<sub>F</sub></b>	<b>-3</b>	0	0	<b>-3</b>	0	0	<b>-8</b>	0	0	<b>9</b>	0	0	<b>8</b>	0	0
<b>Y<sub>F</sub></b>	0	<b>-3</b>	0	0	<b>-3</b>	0	0	<b>-9</b>	0	0	<b>9</b>	0	0	<b>8</b>	0
<b>Z<sub>F</sub></b>	0	0	<b>-3</b>	0	0	<b>-3</b>	0	0	<b>-10</b>	0	0	<b>9</b>	0	0	<b>7</b>

Analizando as Tabelas 6.4, 6.5 e 6.6, nota-se que a influência do menor erro detectável em uma observação afeta apenas as coordenadas referentes ao eixo cartesiano sobre o qual foi tomada aquela observação (por exemplo, o menor erro detectável da observação  $\Delta X_{AC}$  afeta apenas as coordenadas  $X_J$  da rede, e o mesmo para as observações  $\Delta Y_{AC}$  e  $\Delta Z_{AC}$ ).

Também nota-se que a influência do MDB de uma observação é maior para os parâmetros diretamente ligados aquela observação (como por exemplo, a coordenada  $Z_E$  para a observação  $\Delta Z_{FE}$ ).

Um fato interessante é que o menor erro detectável em  $\Delta X_{AC}$ , por exemplo, de acordo com a Tabela 6.3, é estimado em  $\nabla y_i = 13,5$  cm, mas a sua influência nas coordenadas  $X_C$  e  $X_D$ , quando não detectado, é de apenas 1,0 cm e 0,3 cm, respectivamente, o que faz sentido, considerando também o número de redundância local desta observação:  $r_i = 0,9253$  (ou seja, cerca de 90% do erro é refletido no resíduo desta observação, e cerca de 10% é absorvido na estimação dos parâmetros incógnitos).

Outro exemplo interessante é sobre a observação  $\Delta X_{DC}$ , que possui um menor erro detectável de  $\nabla y_i = 7,2$  cm (relativamente menor do que de  $\Delta X_{AC}$ ), mas a sua influência nas coordenadas  $X_C$  e  $X_D$ , quando não detectado, é de 2,5 cm e 1,3 cm, respectivamente (relativamente maior do que  $\Delta X_{AC}$ ), o que também faz sentido, considerando o seu número de redundância local:  $r_i = 0,4769$  (ou seja, cerca de 50% do erro é refletido no resíduo desta observação, e cerca de 50% é absorvido na estimação dos parâmetros incógnitos).

Desta forma, novamente, verifica-se a importância de analisar as medidas de confiabilidade de uma maneira conjunta.

Além disso, a componente  $\Delta X_{FD}$  da linha-base  $FD$ , por exemplo, possui um menor erro detectável de  $\nabla y_i = 5,5$  cm, e a componente  $\Delta X_{BD}$  da linha-base  $BD$ , possui um menor erro detectável de  $\nabla y_i = 7,5$  cm (ou seja, maior do que  $\Delta X_{FD}$ ), entretanto, a influência do MDB de  $\Delta X_{FD}$  ( $\nabla y_i = 5,5$  cm) é maior ou igual do que a influência do MDB de  $\Delta X_{BD}$  ( $\nabla y_i = 7,5$  cm) sobre todas as coordenadas de todos os pontos, estando este fato provavelmente relacionado com a geometria/configuração da rede (o vértice  $F$  é um ponto desconhecido que esta contido em sete linhas-base distintas, enquanto o vértice  $B$  é um ponto de controle que esta contido em quatro linhas-base distintas, três a menos do que o vértice  $F$ ).

Desta forma, também se verifica a influência da geometria da rede (definida pela matriz *design A*) na confiabilidade das observações sobre os parâmetros (ver a expressão 4.36). Este fato também pode ser notado pelos sinais ora positivos e ora negativos na influência dos MDBs das observações sobre os parâmetros nos valores de confiabilidade

externa, embora o MDB de uma observação seja sempre calculado em módulo (pois o seu sinal é desconhecido).

Por fim, a última medida de confiabilidade calculada para o caso convencional (apenas um *outlier* por vez) foi a confiabilidade interna “*a priori*”.

Desta forma, a Tabela 6.7 apresenta o número de redundância de cada observação, a confiabilidade interna das observações (MDB), obtida por meio da expressão 4.25 e já apresentada na Tabela 6.1, e a confiabilidade interna *a priori* (MDB), uma aproximação da confiabilidade interna, obtida por meio da expressão 4.30.

Tabela 6.7 – Número de redundância, MDB e MDB “*a priori*” de cada observação  $y_i$  (em metros).

Observação	$r_i$	MDB $\nabla y_i$ (m)	MDB “ <i>a priori</i> ” $\nabla y_i$ (m)
$\Delta X_{AC}$	0,9253	0,135	0,156
$\Delta Y_{AC}$	0,9201	0,132	0,152
$\Delta Z_{AC}$	0,9275	0,134	0,156
$\Delta X_{AE}$	0,7464	0,070	0,073
$\Delta Y_{AE}$	0,7114	0,068	0,069
$\Delta Z_{AE}$	0,7333	0,068	0,070
$\Delta X_{BC}$	0,6798	0,076	0,075
$\Delta Y_{BC}$	0,7058	0,078	0,079
$\Delta Z_{BC}$	0,6836	0,075	0,075
$\Delta X_{BD}$	0,8191	0,075	0,082
$\Delta Y_{BD}$	0,8119	0,076	0,082
$\Delta Z_{BD}$	0,8026	0,075	0,081
$\Delta X_{DC}$	0,4769	0,072	0,060
$\Delta Y_{DC}$	0,5061	0,074	0,063
$\Delta Z_{DC}$	0,4458	0,071	0,057
$\Delta X_{DE}$	0,5060	0,064	0,055
$\Delta Y_{DE}$	0,5104	0,065	0,056
$\Delta Z_{DE}$	0,5112	0,065	0,056
$\Delta X_{FA}$	0,8095	0,040	0,043
$\Delta Y_{FA}$	0,7592	0,039	0,040
$\Delta Z_{FA}$	0,795	0,040	0,043
$\Delta X_{FC}$	0,7159	0,078	0,080
$\Delta Y_{FC}$	0,662	0,075	0,073
$\Delta Z_{FC}$	0,7059	0,076	0,077
$\Delta X_{FE}$	0,4777	0,058	0,048
$\Delta Y_{FE}$	0,4962	0,059	0,050
$\Delta Z_{FE}$	0,4568	0,057	0,047
$\Delta X_{FD}$	0,5311	0,055	0,048
$\Delta Y_{FD}$	0,5377	0,056	0,049
$\Delta Z_{FD}$	0,5985	0,059	0,054
$\Delta X_{FB}$	0,7857	0,038	0,040
$\Delta Y_{FB}$	0,7874	0,040	0,043
$\Delta Z_{FB}$	0,7419	0,037	0,039
$\Delta X_{BF}$	0,7417	0,036	0,037
$\Delta Y_{BF}$	0,7876	0,040	0,043
$\Delta Z_{BF}$	0,7645	0,038	0,040
$\Delta X_{AF}$	0,7849	0,038	0,040
$\Delta Y_{AF}$	0,8042	0,041	0,045
$\Delta Z_{AF}$	0,8335	0,044	0,048

Analizando a Tabela 6.7, nota-se que a confiabilidade interna *a priori* das observações (que pode ser calculado na fase de planejamento), e a confiabilidade interna das observações (calculado após o ajustamento por MMQ) são muito semelhantes, com diferença máxima de 2,1 cm, para as componentes da linha-base *AC* (de precisão inferior as demais). Dependendo

da observação  $y_i$ , a confiabilidade interna *a priori* é ligeiramente maior ou ligeiramente menor que a confiabilidade interna calculada com os resultados do ajustamento.

Entretanto, nota-se que boa parte dos casos em que o MDB *a priori* é maior do que o MDB após o ajustamento, é referente a observações de linhas-base que envolvem o vértice  $F$ , notadamente o vértice de maior redundância na rede (presente em sete linhas-base distintas).

Além disso, todos os casos em que o MDB *a priori* é menor do que o MDB após o ajustamento são referentes à observações de linhas-base que envolvem os vértices  $E$ ,  $C$  e  $D$ , vértices de menor redundância na rede (principalmente o vértice  $E$ , que está presente somente em três linhas-base).

Em termos gerais, pode-se dizer que para observações que apresentam um número de redundância maior do que o número de redundância médio (no caso desta rede GPS,  $\bar{r} \approx 0,70$ ), a confiabilidade interna tende a ser subestimada (o menor erro detectável *a priori* é maior do que o calculado após o ajustamento), enquanto para observações que apresentam um número de redundância menor do que o número de redundância médio, a confiabilidade interna tende a ser superestimada (o menor erro detectável *a priori* é menor do que o calculado após o ajustamento).

Estes resultados fazem sentido, considerando que o termo  $(n - u)/n$  na expressão (4.30) de fato é igual ao número de redundância médio ( $\bar{r}$ ) das observações, e que quando estas possuem covariâncias nulas, o MDB de uma observação é inversamente proporcional ao seu número de redundância, conforme mostra a expressão 4.29.

Desta forma, novamente a questão da geometria (configuração da rede, número de linhas-base em cada vértice) se faz presente nos resultados deste estudo.

É importante destacar que a confiabilidade interna por meio da expressão 4.25, embora necessite da matriz de covariância dos resíduos ajustados, ou seja, da realização do ajustamento pelo MMQ, também pode ser calculada na etapa de planejamento da rede, pois, a matriz de covariância dos resíduos depende, essencialmente, da matriz *design A* e da matriz peso  $W$  das observações (ver a expressão 2.49).

Em outras palavras, estipulada uma geometria *a priori* para a rede e a precisão esperada para as observações, pode-se definir a matriz *design A* e uma aproximação da matriz peso  $W$ , e utilizar a expressão 4.25 para um cálculo aproximado da confiabilidade interna das observações (aproximado, pois o levantamento de campo ainda não foi realizado, e desta forma, as “verdadeiras” variâncias e covariâncias das observações ainda não foram determinadas).

### 6.3 Medidas de Confiabilidade para dois *outliers* simultâneos na rede GPS

Realizado o ajustamento por mínimos quadrados da rede GPS, e calculadas as suas medidas de confiabilidade convencionais (considerando apenas um *outlier* por vez), também foram calculadas as medidas de confiabilidade generalizadas para múltiplos *outliers* (no caso, para  $q = 2$  *outliers* simultâneos). Para isto, primeiramente foram calculados os coeficientes de correlação múltipla ( $\rho_{ij}^q$ ) para  $q = 2$  *outliers* simultâneos (por meio da expressão 5.14), e alguns destes são mostrados na Tabela 6.8.

Tabela 6.8 – Coeficientes de correlação múltipla para observações das linhas-base AC, AE e BC.

$\rho_{ij}^q$	$\Delta X_{AC}$	$\Delta Y_{AC}$	$\Delta Z_{AC}$	$\Delta X_{AE}$	$\Delta Y_{AE}$	$\Delta Z_{AE}$	$\Delta X_{BC}$	$\Delta Y_{BC}$	$\Delta Z_{BC}$
$\Delta X_{AC}$	<b>1</b>	0,0098	0,0096	<b>0,0299</b>	0,0003	0,0003	<b>0,1950</b>	0,0019	0,0017
$\Delta Y_{AC}$	0,0098	<b>1</b>	0,0098	0,0003	<b>0,0341</b>	0,0004	0,0018	<b>0,1902</b>	0,0017
$\Delta Z_{AC}$	0,0096	0,0098	<b>1</b>	0,0003	0,0004	<b>0,0332</b>	0,0018	0,0019	<b>0,1902</b>
$\Delta X_{AE}$	<b>0,0299</b>	0,0003	0,0003	<b>1</b>	0,0100	0,0104	<b>0,0722</b>	0,0007	0,0007
$\Delta Y_{AE}$	0,0003	<b>0,0341</b>	0,0004	0,0100	<b>1</b>	0,0103	0,0006	<b>0,0748</b>	0,0008
$\Delta Z_{AE}$	0,0003	0,0004	<b>0,0332</b>	0,0104	0,0103	<b>1</b>	0,0007	0,0008	<b>0,0809</b>
$\Delta X_{BC}$	<b>0,1950</b>	0,0018	0,0018	<b>0,0722</b>	0,0006	0,0007	<b>1</b>	0,0092	0,0092
$\Delta Y_{BC}$	0,0019	<b>0,1902</b>	0,0019	0,0007	<b>0,0748</b>	0,0008	0,0092	<b>1</b>	0,0094
$\Delta Z_{BC}$	0,0017	0,0017	<b>0,1902</b>	0,0007	0,0008	<b>0,0809</b>	0,0092	0,0094	<b>1</b>

Analizando a Tabela 6.8, nota-se que os coeficientes de correlação múltipla são maiores para componentes de linhas base diferentes, referentes ao mesmo eixo cartesiano (como por exemplo, o par de observações  $\Delta X_{AC}$  e  $\Delta X_{BC}$ ), do que para componentes de uma mesma linha base, e, portanto, de eixos cartesianos distintos (como por exemplo, o par de observações  $\Delta X_{AC}$  e  $\Delta Y_{AC}$ ).

Este fato é interessante, pois as covariâncias entre componentes de linhas-base distintas são consideradas nulas (como  $\Delta X_{AC}$  e  $\Delta X_{BC}$ , por exemplo), e entre componentes de uma mesma linha-base são baixas, porém não nulas (como  $\Delta X_{AC}$  e  $\Delta Y_{AC}$ , por exemplo), estando este fato relacionado com a geometria/configuração do problema.

Além disso, o coeficiente de correlação múltipla entre uma observação e ela mesma é igual a  $\rho_{ij}^q = 1$  (elementos da diagonal principal da Tabela 6.8), e entre componentes de uma mesma linha-base, é cerca de cem vezes menor do que a unidade ( $\rho_{ij}^q \cong 0,01$ ), coerente com a relação de grandeza entre as variâncias e covariâncias das componentes de cada linha-base.

Nota-se também a simetria da Tabela 6.8, ou seja, conforme esperado, o coeficiente de correlação múltipla  $\rho_{ij}^q$  entre duas observações  $i$  e  $j$  é igual ao coeficiente de correlação múltipla entre as mesmas observações  $j$  e  $i$ .

Com as medidas de confiabilidade calculadas para o caso convencional (apenas um *outlier* por vez, Tabela 6.3), e os coeficientes de correlação múltipla para  $q = 2$  *outliers*, foram calculadas a confiabilidade interna ( $MDB - \nabla y_i^q$ , por meio da expressão 5.13), o número de confiabilidade  $\bar{r}_i^q$  (por meio da expressão 5.23) e o número de redundância  $r_i^q$  das observações (por meio da expressão 5.25), para  $q = 2$  *outliers* simultâneos, e alguns destes são mostrados nas Tabelas 6.9, 6.10 e 6.11, respectivamente.

Tabela 6.9 – Alguns valores para o  $MDB - \nabla y_i^q$  das linhas-base DE, FA e FC (para  $q = 2$ ).

$\nabla y_i^q$ (cm)	$\Delta X_{FC}$	$\Delta Y_{FC}$	$\Delta Z_{FC}$	$\Delta X_{FE}$	$\Delta Y_{FE}$	$\Delta Z_{FE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta Y_{FD}$	$\Delta Z_{FD}$
$\Delta X_{DE}$	<b>6,5</b>	6,4	6,4	<b>8,3</b>	6,4	6,4	<b>7,4</b>	6,4	6,4
$\Delta Y_{DE}$	6,5	<b>6,6</b>	6,5	6,5	<b>8,1</b>	6,5	6,5	<b>7,5</b>	6,5
$\Delta Z_{DE}$	6,5	6,5	<b>6,6</b>	6,5	6,5	<b>8,2</b>	6,5	6,5	<b>7,4</b>
$\Delta X_{FA}$	<b>4,0</b>	4,0	4,0	<b>4,0</b>	4,0	4,0	<b>4,0</b>	4,0	4,0
$\Delta Y_{FA}$	3,9	<b>3,9</b>	3,9	3,9	<b>3,9</b>	3,9	3,9	<b>3,9</b>	3,9
$\Delta Z_{FA}$	4,0	4,0	<b>4,1</b>	4,0	4,0	<b>4,1</b>	4,0	4,0	<b>4,1</b>
$\Delta X_{FC}$	<b>7,8</b>	7,8	7,8	<b>7,9</b>	7,8	7,8	<b>8,0</b>	7,8	7,8
$\Delta Y_{FC}$	7,5	<b>7,5</b>	7,5	7,5	<b>7,5</b>	7,5	7,5	<b>7,7</b>	7,5
$\Delta Z_{FC}$	7,6	7,6	<b>7,6</b>	7,6	7,6	<b>7,7</b>	7,6	7,6	<b>7,8</b>

Tabela 6.10 – Alguns valores para o  $\bar{r}_i^q$  das linhas-base DE, FA e FC (para  $q = 2$ ).

$\bar{r}_i^q$	$\Delta X_{FC}$	$\Delta Y_{FC}$	$\Delta Z_{FC}$	$\Delta X_{FE}$	$\Delta Y_{FE}$	$\Delta Z_{FE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta Y_{FD}$	$\Delta Z_{FD}$
$\Delta X_{DE}$	<b>0,5000</b>	0,5061	0,5061	<b>0,3077</b>	0,5061	0,5061	<b>0,3810</b>	0,5061	0,5061
$\Delta Y_{DE}$	0,5105	<b>0,5035</b>	0,5105	0,5105	<b>0,3324</b>	0,5105	0,5105	<b>0,3865</b>	0,5105
$\Delta Z_{DE}$	0,5113	0,5113	<b>0,5021</b>	0,5113	0,5113	<b>0,3236</b>	0,5113	0,5113	<b>0,4036</b>
$\Delta X_{FA}$	<b>0,8065</b>	0,8097	0,8097	<b>0,8039</b>	0,8097	0,8097	<b>0,8041</b>	0,8097	0,8097
$\Delta Y_{FA}$	0,7594	<b>0,7542</b>	0,7594	0,7594	<b>0,7507</b>	0,7594	0,7594	<b>0,7518</b>	0,7594
$\Delta Z_{FA}$	0,7952	0,7952	<b>0,7909</b>	0,7952	0,7952	<b>0,7869</b>	0,7952	0,7952	<b>0,7894</b>
$\Delta X_{FC}$	<b>0,7160</b>	0,7160	0,7160	<b>0,7100</b>	0,7160	0,7160	<b>0,6842</b>	0,7160	0,7160
$\Delta Y_{FC}$	0,6621	<b>0,6621</b>	0,6621	0,6621	<b>0,6558</b>	0,6621	0,6621	<b>0,6290</b>	0,6621
$\Delta Z_{FC}$	0,7060	0,7060	<b>0,7061</b>	0,7061	0,7061	<b>0,6976</b>	0,7061	0,7061	<b>0,6750</b>

Tabela 6.11 – Alguns valores para o  $r_i^q$  das linhas-base DE, FA e FC (para  $q = 2$ ).

$r_i^q$	$\Delta X_{FC}$	$\Delta Y_{FC}$	$\Delta Z_{FC}$	$\Delta X_{FE}$	$\Delta Y_{FE}$	$\Delta Z_{FE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta Y_{FD}$	$\Delta Z_{FD}$
$\Delta X_{DE}$	<b>0,4999</b>	0,5060	0,5060	<b>0,3076</b>	0,5060	0,5060	<b>0,3810</b>	0,5060	0,5060
$\Delta Y_{DE}$	0,5104	<b>0,5034</b>	0,5104	0,5104	<b>0,3323</b>	0,5104	0,5104	<b>0,3864</b>	0,5104
$\Delta Z_{DE}$	0,5112	0,5112	<b>0,5020</b>	0,5112	0,5112	<b>0,3236</b>	0,5112	0,5112	<b>0,4035</b>
$\Delta X_{FA}$	<b>0,8063</b>	0,8095	0,8095	<b>0,8037</b>	0,8095	0,8095	<b>0,8039</b>	0,8095	0,8095
$\Delta Y_{FA}$	0,7592	<b>0,7540</b>	0,7592	0,7592	<b>0,7505</b>	0,7592	0,7592	<b>0,7516</b>	0,7592
$\Delta Z_{FA}$	0,7950	0,7950	<b>0,7907</b>	0,7950	0,7950	<b>0,7867</b>	0,7950	0,7950	<b>0,7892</b>
$\Delta X_{FC}$	<b>0,7159</b>	0,7159	0,7159	<b>0,7099</b>	0,7159	0,7159	<b>0,6840</b>	0,7159	0,7159
$\Delta Y_{FC}$	0,6620	<b>0,6620</b>	0,6620	0,6620	<b>0,6557</b>	0,6620	0,6620	<b>0,6288</b>	0,6620
$\Delta Z_{FC}$	0,7059	0,7059	<b>0,7059</b>	0,7059	0,7059	<b>0,6975</b>	0,7059	0,7059	<b>0,6749</b>

Nas Tabelas 6.9, 6.10, e 6.11, as linhas correspondem as  $i$ -ésimas observações, e as colunas correspondem as  $j$ -ésimas observações (para  $q = 2$ ).

Por exemplo, o elemento da linha 4 e coluna 7 da Tabela 6.9 corresponde ao MDB da observação  $\Delta Z_{DE}$ , considerando que, além dela, a outra observação contendo *outlier* é a observação  $\Delta Z_{FE}$ .

Além disso, para o caso em que o par de observações considerado é uma observação e esta mesma (como por exemplo,  $\Delta X_{FC}$  e  $\Delta X_{FC}$ , elementos da oitava linha e segunda coluna das Tabelas 6.9, 6.10 e 6.11), os valores apresentados referem-se ao caso convencional ( $q = 1$ , apenas um *outlier* por vez).

Desta forma, o elemento da oitava linha e segunda coluna da Tabela 6.9, por exemplo, refere-se ao MDB da observação  $\Delta X_{FC}$ , considerando que apenas esta observação está contaminada por erros (ou seja,  $q = 1$ , MDB este já calculado e apresentado na Tabela 6.3).

Analizando e comparando as Tabelas 6.3 e 6.9, nota-se que, conforme previsto pela teoria, o MDB para  $q = 2$  é sempre maior ou igual ao MDB com  $q = 1$  (referente ao *data snooping*). Na maior parte dos casos, os MDB para  $q = 2$  e  $q = 1$  são praticamente iguais, com diferença máxima de 1,9 cm no MDB de  $\Delta X_{DE}$ , considerando que a outra observação com erro é a observação  $\Delta X_{FE}$ .

Naturalmente, as maiores diferenças nos MDB para  $q = 1$  e  $q = 2$  ocorrem para os pares de observações que apresentam valores mais altos para os coeficientes de correlação múltipla  $\rho_{ij}^q$  (ver as expressões 5.13 e 5.15).

Além disso, as Tabelas 6.9, 6.10 e 6.11 não apresentam simetria, pois, por exemplo, o menor erro detectável em uma observação  $i$ , considerando outra observação contaminada  $j$ , será diferente do menor erro detectável da observação  $j$ , considerando a observação  $i$  também contaminada (com  $q = 2$  em ambos os casos).

Analizando e comparando as Tabelas 6.3, 6.10 e 6.11, nota-se que, conforme previsto

pela teoria, os números de confiabilidade e de redundância para  $q = 2$ , são sempre menores ou iguais aos números de confiabilidade e redundância para  $q = 1$ , respectivamente.

Novamente, na maior parte dos casos, os números de confiabilidade e de redundância para  $q = 2$  e  $q = 1$  (*data snooping*) são praticamente iguais, além de também não diferirem muito entre si para  $q = 2$  (ver as Tabelas 6.10 e 6.11), tal como para  $q = 1$  (ver a Tabela 6.3).

Este fato está relacionado com a estrutura bloco diagonal da matriz de variâncias e covariâncias da rede GPS em estudo (pouca influência das covariâncias nas medidas de confiabilidade, pois estas são cerca de cem vezes menores que as variâncias das observações, ou ainda, na maior parte dos casos, assumidas serem nulas).

É importante destacar que, embora na maior parte dos casos as medidas de confiabilidade do caso convencional para o caso generalizado com  $q = 2$  *outliers* não tenham seus valores numéricos muito modificados, a maior diferença diz respeito no modelo de erro adotado: No caso clássico, apenas uma observação é suspeita de conter *outlier* por vez, e no caso generalizado, considera-se a existência simultânea de múltiplos *outliers* nas observações (neste estudo, dois *outliers* simultâneos por vez).

Além disso, salienta-se que esta rede GPS possui alta redundância e precisão, com valores relativamente altos para as medidas de confiabilidade de praticamente todas as observações (são treze linhas-base para apenas quatro pontos desconhecidos, resultando em um ajustamento com  $n = 39$  observações,  $u = 12$  parâmetros e  $r = n - u = 27$  graus de liberdade). Para redes geodésicas com uma geometria mais pobre, estes valores podem se modificar bastante, conforme será visto posteriormente.

Por fim, a última medida de confiabilidade para  $q = 2$  *outliers* simultâneos foi a confiabilidade externa máxima das observações sobre os parâmetros, obtida resolvendo o problema de autovalores em (5.31), e que, ao contrário das demais, independe dos coeficientes de correlação múltipla ou das medidas de confiabilidade do caso convencional (ver as expressões 5.30 e 5.31).

Desta forma, a Tabela 6.12 apresenta a influência máxima de possíveis *outliers* (simultâneos) nos pares de observações  $\Delta X_{AC}$  e  $\Delta X_{AE}$ ,  $\Delta X_{AC}$  e  $\Delta X_{BC}$ ,  $\Delta X_{AC}$  e  $\Delta X_{BD}$ ,  $\Delta X_{AC}$  e  $\Delta X_{DC}$ ,  $\Delta X_{AC}$  e  $\Delta X_{DE}$ , sobre os parâmetros  $X_C$ ,  $X_E$ ,  $X_D$  e  $X_F$ , e a Tabela 6.13 apresenta a influência máxima de possíveis *outliers* (simultâneos) nos pares de observações  $\Delta X_{FA}$  e  $\Delta X_{FC}$ ,  $\Delta X_{FA}$  e  $\Delta X_{FE}$ ,  $\Delta X_{FA}$  e  $\Delta X_{FD}$ ,  $\Delta X_{FA}$  e  $\Delta X_{FB}$ , sobre os parâmetros  $X_C$ ,  $X_E$ ,  $X_D$  e  $X_F$ .

Para observações e parâmetros referentes aos eixos cartesianos  $Y$  e  $Z$ , as conclusões obtidas são similares.

Tabela 6.12 – Confiabilidade externa máxima de alguns pares de observações ( $q = 2$  *outliers* simultâneos), sobre os parâmetros  $X_C$ ,  $X_E$ ,  $X_D$ ,  $X_F$  (em mm).

	$\Delta X_{AC}$ e $\Delta X_{AE}$	$\Delta X_{AC}$ e $\Delta X_{BC}$	$\Delta X_{AC}$ e $\Delta X_{BD}$	$\Delta X_{AC}$ e $\Delta X_{DC}$	$\Delta X_{AC}$ e $\Delta X_{DE}$
$X_C$	11	29	12	29	12
$X_E$	18	4	6	5	17
$X_D$	8	9	14	13	15
$X_F$	3	3	3	1	1

Tabela 6.13 – Confiabilidade externa máxima de alguns pares de observações ( $q = 2$  *outliers* simultâneos), sobre os parâmetros  $X_C$ ,  $X_E$ ,  $X_D$ ,  $X_F$  (em mm).

	$\Delta X_{FA}$ e $\Delta X_{FC}$	$\Delta X_{FA}$ e $\Delta X_{FE}$	$\Delta X_{FA}$ e $\Delta X_{FD}$	$\Delta X_{FA}$ e $\Delta X_{FB}$
$X_C$	20	5	10	7
$X_E$	5	28	8	9
$X_D$	6	9	23	9
$X_F$	8	8	8	13

Analizando e comparando as Tabelas 6.4, 6.5 e 6.6, e as Tabelas 6.12 e 6.13, nota-se que a influência máxima de possíveis *outliers* simultâneos (não detectados) em  $q = 2$  observações é sempre maior ou igual à influência de um possível *outlier* (não detectado) em apenas  $q = 1$  observação.

Entretanto, para os pares de observações considerados na Tabela 6.12, a influência máxima para  $q = 2$  *outliers* só é razoavelmente maior do que para  $q = 1$  *outlier* sobre o parâmetro  $X_C$  (com uma diferença de até 5 mm, considerando erros não detectados em  $\Delta X_{AC}$  e  $\Delta X_{DC}$ , simultaneamente). Para os demais parâmetros, a influência máxima para  $q = 2$  é igual à de  $q = 1$ , ou, no máximo, 1 mm maior apenas.

Da mesma forma, para os pares de observações considerados na Tabela 6.13, a influência máxima para  $q = 2$  *outliers* só é razoavelmente maior do que para  $q = 1$  *outlier* sobre o parâmetro  $X_F$  (com uma diferença de até 5 mm considerando erros não detectados em  $\Delta X_{FA}$  e  $\Delta X_{FB}$ , simultaneamente). Para os demais parâmetros, a influência máxima para  $q = 2$  é igual à de  $q = 1$  ou, em poucos casos, até 3 mm maior.

Embora em boa parte dos casos, a confiabilidade externa máxima para  $q = 2$  *outliers* não tenha diferido muito da confiabilidade externa do caso convencional ( $q = 1$  *outlier* por vez, *data snooping*), em alguns cenários, estes valores podem diferir bastante, conforme mostram as Tabelas 6.14 e 6.15.

Tabela 6.14 – Confiabilidade externa máxima sobre  $X_E$ ,  $Y_E$  e  $Z_E$  em alguns cenários com  $q = 2$ .

Influência Máxima (em mm)	$X_E$	$Y_E$	$Z_E$
$\Delta X_{AE}$ e $\Delta X_{FC}$	18	-	-
$\Delta X_{AE}$ e $\Delta X_{DE}$	31	-	-
$\Delta X_{AE}$ e $\Delta X_{FE}$	47	-	-
$\Delta Y_{AE}$ e $\Delta Z_{FC}$	-	20	-
$\Delta Y_{AE}$ e $\Delta Z_{DE}$	-	32	-
$\Delta Y_{AE}$ e $\Delta Z_{FE}$	-	48	-
$\Delta Z_{AE}$ e $\Delta Z_{FC}$	-	-	18
$\Delta Z_{AE}$ e $\Delta Z_{DE}$	-	-	30
$\Delta Z_{AE}$ e $\Delta Z_{FE}$	-	-	49

Tabela 6.15 – Confiabilidade externa máxima sobre  $X_E$ ,  $Y_E$  e  $Z_E$  em alguns cenários com  $q = 2$ .

Influência Máxima (em mm)	$X_E$	$Y_E$	$Z_E$
$\Delta X_{DE}$ e $\Delta X_{FA}$	18	-	-
$\Delta X_{DE}$ e $\Delta X_{FD}$	18	-	-
$\Delta X_{DE}$ e $\Delta X_{FE}$	52	-	-
$\Delta Y_{DE}$ e $\Delta Z_{FA}$	-	18	-
$\Delta Y_{DE}$ e $\Delta Z_{FD}$	-	17	-
$\Delta Y_{DE}$ e $\Delta Z_{FE}$	-	48	-
$\Delta Z_{DE}$ e $\Delta Z_{FA}$	-	-	17
$\Delta Z_{DE}$ e $\Delta Z_{FD}$	-	-	16
$\Delta Z_{DE}$ e $\Delta Z_{FE}$	-	-	50

Nas Tabelas 6.14 e 6.15, a segunda coluna corresponde à confiabilidade externa máxima sobre o parâmetro  $X_E$ , a terceira coluna corresponde à confiabilidade externa máxima sobre o parâmetro  $Y_E$ , e a quarta coluna corresponde à confiabilidade externa máxima sobre o parâmetro  $Z_E$ . Desta forma, as linhas correspondem aos pares de observações consideradas como contendo *outliers*, para o modelo de erro com  $q = 2$ .

Por exemplo, o elemento da linha 6 e coluna 3 da Tabela 6.14 refere-se à confiabilidade externa máxima sobre o parâmetro (coordenada)  $Y_E$ , considerando que as observações  $\Delta Y_{AE}$  e  $\Delta Y_{DE}$  das linhas-base  $AE$  e  $DE$  contêm, simultaneamente, *outliers*.

Analizando as Tabelas 6.14 e 6.15, nota-se que os valores para a confiabilidade externa de um parâmetro específico podem variar bastante, de acordo com o modelo de erro considerado (quais são as observações suspeitas), e, além disso, são maiores que os valores para a confiabilidade externa do caso convencional, apresentados nas Tabelas 6.4, 6.5 e 6.6.

Em alguns casos, estas diferenças se mostram significativas, como por exemplo, a influência do MDB da observação  $\Delta X_{DE}$  e do MDB da observação  $\Delta X_{FE}$  sobre o parâmetro  $X_E$ , é, respectivamente, de 17 mm e 28 mm no caso convencional ( $q = 1$  outlier por vez apenas, Tabelas 6.5 e 6.6). Entretanto, no caso generalizado para  $q = 2$  outliers simultâneos em  $\Delta X_{DE}$  e  $\Delta X_{FE}$  (Tabela 6.15), a influência máxima sobre o parâmetro  $X_E$  é de 52 mm (ou

seja, maior inclusive do que a soma das influências individuais destas observações no caso convencional).

Portanto, um exemplo de aplicação da teoria de confiabilidade generalizada para múltiplos *outliers* é o planejamento de uma rede geodésica para que esta seja resistente a  $q$  *outliers*, pois, como visto, em geral a confiabilidade das observações diminui aumentando a dimensão ( $q$ ) do modelo de erro considerado.

Por exemplo, a confiabilidade externa máxima sobre um parâmetro, obtida resolvendo o problema de autovalores em (5.31), depende da matriz *design A* (ou seja, da geometria/configuração da rede), da matriz peso e da matriz de covariância das observações (ou seja, da precisão das observações), do parâmetro de não centralidade do modelo (ou seja, da dimensão do modelo de erro e dos níveis de probabilidade assumidos para os testes), além, é claro, do próprio modelo de erro estipulado (ou seja, quais são as  $q$  observações suspeitas consideradas).

Desta forma, pode-se estipular *a priori* uma geometria para a rede, a precisão esperada para as observações, os níveis de probabilidade assumidos e o número  $q$  de *outliers* simultâneos considerado, e então calcular a confiabilidade externa máxima sobre os parâmetros de interesse, por meio da expressão (5.31).

Caso os valores obtidos sejam muito elevados, segundo algum critério de tolerância estipulado pelo geodesista, pode-se melhorar a geometria da rede (como o número de observações e de parâmetros), e a precisão das observações (por meio da seleção de equipamentos e técnicas de posicionamento mais adequadas).

Como as medidas de confiabilidade consideradas, tanto no caso convencional, quanto no caso generalizado para múltiplos *outliers*, dependem da precisão das observações, o próximo estudo realizado nesta dissertação busca analisar como a questão da precisão das observações (ou seja, do modelo estocástico) pode influenciar nas medidas de confiabilidade, tanto no caso convencional (apenas um *outlier* por vez, procedimento *data snooping*), quanto no caso generalizado (dois ou mais *outliers* simultâneos).

## 6.4 Influência das Variâncias e Covariâncias Sobre as Medidas de Confiabilidade

Visando verificar como a questão das variâncias e covariâncias das observações podem influenciar nas medidas de confiabilidade apresentadas, quatro experimentos foram realizados:

- 1) Multiplicação dos valores das variâncias e covariâncias das observações pelo escalar 10 (piorando, desta forma, a precisão assumida para as observações);
- 2) Redução dos valores das variâncias e covariâncias das observações por um escalar 10 (melhorando, desta forma, a precisão assumida para as observações);
- 3) Negligênci a das covariâncias das observações, transformando a matriz de covariância em diagonal (considerando somente as variâncias das mesmas);
- 4) Multiplicação somente das covariâncias das observações pelo escalar 10 (reduzindo, desta forma, a razão entre as variâncias e covariâncias);

Para o primeiro experimento (multiplicação das variâncias e covariâncias das observações pelo escalar 10), a Tabela 6.16 apresenta os números de redundância  $r_i$ , os números de absorção  $u_i$ , os números de confiabilidade  $\bar{r}_i$  e a confiabilidade interna – MDB das observações (calculados para o caso convencional, com  $q = 1$ , *data snooping*).

Tabela 6.16 – Medidas de confiabilidade das observações, degradando em 10 vezes a MVC original.

Observação	$r_i$	$u_i$	$\bar{r}_i$	MDB $\nabla y_i$ (m)
$\Delta X_{AC}$	0,9253	0,0747	0,9255	0,427
$\Delta Y_{AC}$	0,9201	0,0799	0,9203	0,417
$\Delta Z_{AC}$	0,9275	0,0725	0,9277	0,425
$\Delta X_{AE}$	0,7464	0,2536	0,7466	0,222
$\Delta Y_{AE}$	0,7114	0,2886	0,7116	0,215
$\Delta Z_{AE}$	0,7333	0,2667	0,7335	0,216
$\Delta X_{BC}$	0,6798	0,3202	0,6799	0,241
$\Delta Y_{BC}$	0,7058	0,2942	0,7059	0,248
$\Delta Z_{BC}$	0,6836	0,3164	0,6837	0,237
$\Delta X_{BD}$	0,8191	0,1809	0,8193	0,237
$\Delta Y_{BD}$	0,8119	0,1881	0,8120	0,239
$\Delta Z_{BD}$	0,8026	0,1974	0,8027	0,238
$\Delta X_{DC}$	0,4769	0,5231	0,4770	0,229
$\Delta Y_{DC}$	0,5061	0,4939	0,5061	0,233
$\Delta Z_{DC}$	0,4458	0,5542	0,4459	0,224
$\Delta X_{DE}$	0,5060	0,4940	0,5061	0,204
$\Delta Y_{DE}$	0,5104	0,4896	0,5105	0,207
$\Delta Z_{DE}$	0,5112	0,4888	0,5113	0,207
$\Delta X_{FA}$	0,8095	0,1905	0,8097	0,126
$\Delta Y_{FA}$	0,7592	0,2408	0,7594	0,122
$\Delta Z_{FA}$	0,7950	0,2050	0,7952	0,128
$\Delta X_{FC}$	0,7159	0,2841	0,7160	0,247
$\Delta Y_{FC}$	0,6620	0,3380	0,6621	0,236
$\Delta Z_{FC}$	0,7059	0,2941	0,7061	0,241
$\Delta X_{FE}$	0,4777	0,5223	0,4778	0,184
$\Delta Y_{FE}$	0,4962	0,5038	0,4963	0,185
$\Delta Z_{FE}$	0,4568	0,5432	0,4569	0,182
$\Delta X_{FD}$	0,5311	0,4689	0,5312	0,173
$\Delta Y_{FD}$	0,5377	0,4623	0,5378	0,177
$\Delta Z_{FD}$	0,5985	0,4015	0,5985	0,185
$\Delta X_{FB}$	0,7857	0,2143	0,7858	0,120
$\Delta Y_{FB}$	0,7874	0,2126	0,7875	0,127
$\Delta Z_{FB}$	0,7419	0,2581	0,7420	0,118
$\Delta X_{BF}$	0,7417	0,2583	0,7418	0,113
$\Delta Y_{BF}$	0,7876	0,2124	0,7877	0,127
$\Delta Z_{BF}$	0,7645	0,2355	0,7646	0,122
$\Delta X_{AF}$	0,7849	0,2151	0,7851	0,120
$\Delta Y_{AF}$	0,8042	0,1958	0,8044	0,131
$\Delta Z_{AF}$	0,8335	0,1665	0,8337	0,139

Analizando e comparando as Tabela 6.3 e 6.16, nota-se que os números de redundância, de absorção e de confiabilidade não se modificam ao multiplicar a matriz de variâncias e covariâncias (MVC) das observações pelo escalar 10.

Este resultado já era esperado, pois, embora todos os elementos da MVC das observações tenham sido multiplicados por um mesmo escalar, estas medidas de confiabilidade dependem tanto da MVC quanto de sua inversa (ver, por exemplo, as expressões 2.49, 4.13, 5.19 e 5.21), e qualquer escalar que tenha sido aplicado na MVC, acaba sendo cancelado no cálculo destas medidas (de maneira semelhante à questão do fator de variância *a priori* sobre a solução por mínimos quadrados dos parâmetros).

Entretanto, analisando as Tabelas 6.3 e 6.16, nota-se que o MDB de todas as observações, degradando em 10 vezes a MVC, aumenta em cerca de  $\sqrt{10} \cong 3,3$  vezes, o que também se era esperado, analisando a expressão 4.25 para o MDB de uma observação. Em outras palavras, aumentando 10 vezes os valores das variâncias e covariâncias das observações (ou seja, piorando cerca de 3,3 vezes a precisão das observações), aumenta-se, em módulo, 3,3 vezes o menor erro detectável de cada uma das observações.

Além disso, esta razão entre o MDB das observações, aumentando em 10 vezes as suas variâncias e covariâncias (Tabela 6.16), e o MDB original destas (Tabela 6.3), não é exatamente constante e igual à  $\sqrt{10}$  para todas as observações devido ao fato da MVC não ser uma matriz diagonal (ou seja, as covariâncias entre algumas observações não serem nulas).

Estimado o menor erro detectável de cada observação, degradando em 10 vezes a MVC das observações, também foi calculado a influência de cada um destes sobre os parâmetros ajustados (ou seja, a confiabilidade externa das observações), conforme mostram as Tabelas 6.17, 6.18 e 6.19.

Tabela 6.17 – Confiabilidade externa das observações de AC, AE, BC e BD sobre os parâmetros, degradando em 10 vezes a MVC original (em mm).

	$\Delta X_{AC}$	$\Delta Y_{AC}$	$\Delta Z_{AC}$	$\Delta X_{AE}$	$\Delta Y_{AE}$	$\Delta Z_{AE}$	$\Delta X_{BC}$	$\Delta Y_{BC}$	$\Delta Z_{BC}$	$\Delta X_{BD}$	$\Delta Y_{BD}$	$\Delta Z_{BD}$
<b>X<sub>C</sub></b>	<b>32</b>	0	0	<b>12</b>	0	0	<b>77</b>	0	0	<b>20</b>	0	0
<b>Y<sub>C</sub></b>	0	<b>33</b>	0	0	<b>13</b>	0	0	<b>73</b>	0	0	<b>20</b>	0
<b>Z<sub>C</sub></b>	0	0	<b>31</b>	0	0	<b>13</b>	0	0	<b>75</b>	0	0	<b>23</b>
<b>X<sub>E</sub></b>	<b>5</b>	0	0	<b>56</b>	0	0	<b>12</b>	0	0	<b>19</b>	0	0
<b>Y<sub>E</sub></b>	0	<b>5</b>	0	0	<b>62</b>	0	0	<b>11</b>	0	0	<b>19</b>	0
<b>Z<sub>E</sub></b>	0	0	<b>5</b>	0	0	<b>58</b>	0	0	<b>13</b>	0	0	<b>19</b>
<b>X<sub>D</sub></b>	<b>10</b>	0	0	<b>22</b>	0	0	<b>24</b>	0	0	<b>43</b>	0	0
<b>Y<sub>D</sub></b>	0	<b>10</b>	0	0	<b>25</b>	0	0	<b>23</b>	0	0	<b>45</b>	0
<b>Z<sub>D</sub></b>	0	0	<b>11</b>	0	0	<b>23</b>	0	0	<b>27</b>	0	0	<b>47</b>
<b>X<sub>F</sub></b>	<b>3</b>	0	0	<b>10</b>	0	0	<b>8</b>	0	0	<b>8</b>	0	0
<b>Y<sub>F</sub></b>	0	<b>4</b>	0	0	<b>12</b>	0	0	<b>9</b>	0	0	<b>9</b>	0
<b>Z<sub>F</sub></b>	0	0	<b>4</b>	0	0	<b>11</b>	0	0	<b>9</b>	0	0	<b>9</b>

Tabela 6.18 – Confiabilidade externa das observações de DC, DE, FA e FC sobre os parâmetros, degradando em 10 vezes a MVC original (em mm).

	$\Delta X_{DC}$	$\Delta Y_{DC}$	$\Delta Z_{DC}$	$\Delta X_{DE}$	$\Delta Y_{DE}$	$\Delta Z_{DE}$	$\Delta X_{FA}$	$\Delta Y_{FA}$	$\Delta Z_{FA}$	$\Delta X_{FC}$	$\Delta Y_{FC}$	$\Delta Z_{FC}$
$X_C$	<b>79</b>	0	0	<b>-19</b>	0	0	<b>-13</b>	0	0	<b>64</b>	0	0
$Y_C$	0	<b>75</b>	0	0	<b>-19</b>	0	0	<b>-16</b>	0	0	<b>72</b>	0
$Z_C$	0	0	<b>78</b>	0	0	<b>-22</b>	0	0	<b>-14</b>	0	0	<b>63</b>
$X_E$	<b>-16</b>	0	0	<b>55</b>	0	0	<b>-16</b>	0	0	<b>2</b>	0	0
$Y_E$	0	<b>-15</b>	0	0	<b>54</b>	0	0	<b>-19</b>	0	0	<b>1</b>	0
$Z_E$	0	0	<b>-16</b>	0	0	<b>51</b>	0	0	<b>-18</b>	0	0	<b>2</b>
$X_D$	<b>-40</b>	0	0	<b>-45</b>	0	0	<b>-16</b>	0	0	<b>13</b>	0	0
$Y_D$	0	<b>-40</b>	0	0	<b>-47</b>	0	0	<b>-20</b>	0	0	<b>14</b>	0
$Z_D$	0	0	<b>-46</b>	0	0	<b>-50</b>	0	0	<b>-17</b>	0	0	<b>16</b>
$X_F$	<b>-3</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>-24</b>	0	0	<b>-6</b>	0	0
$Y_F$	0	<b>-3</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>-29</b>	0	0	<b>-8</b>	0
$Z_F$	0	0	<b>-3</b>	0	0	<b>1</b>	0	0	<b>-26</b>	0	0	<b>-7</b>

Tabela 6.19 – Confiabilidade externa das observações de FE, FD, FB, BF e AF sobre os parâmetros, degradando em 10 vezes a MVC original (em mm).

	$\Delta X_{FE}$	$\Delta Y_{FE}$	$\Delta Z_{FE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta Y_{FD}$	$\Delta Z_{FD}$	$\Delta X_{FB}$	$\Delta Y_{FB}$	$\Delta Z_{FB}$	$\Delta X_{BF}$	$\Delta Y_{BF}$	$\Delta Z_{BF}$	$\Delta X_{AF}$	$\Delta Y_{AF}$	$\Delta Z_{AF}$
$X_C$	<b>8</b>	0	0	<b>29</b>	0	0	<b>-14</b>	0	0	<b>15</b>	0	0	<b>14</b>	0	0
$Y_C$	0	<b>5</b>	0	0	<b>26</b>	0	0	<b>-15</b>	0	0	<b>15</b>	0	0	<b>14</b>	0
$Z_C$	0	0	<b>8</b>	0	0	<b>27</b>	0	0	<b>-16</b>	0	0	<b>15</b>	0	0	<b>12</b>
$X_E$	<b>87</b>	0	0	<b>21</b>	0	0	<b>-18</b>	0	0	<b>20</b>	0	0	<b>18</b>	0	0
$Y_E$	0	<b>83</b>	0	0	<b>21</b>	0	0	<b>-18</b>	0	0	<b>18</b>	0	0	<b>17</b>	0
$Z_E$	0	0	<b>88</b>	0	0	<b>17</b>	0	0	<b>-21</b>	0	0	<b>19</b>	0	0	<b>16</b>
$X_D$	<b>23</b>	0	0	<b>73</b>	0	0	<b>-17</b>	0	0	<b>20</b>	0	0	<b>18</b>	0	0
$Y_D$	0	<b>21</b>	0	0	<b>73</b>	0	0	<b>-18</b>	0	0	<b>18</b>	0	0	<b>17</b>	0
$Z_D$	0	0	<b>24</b>	0	0	<b>66</b>	0	0	<b>-19</b>	0	0	<b>18</b>	0	0	<b>15</b>
$X_F$	<b>-9</b>	0	0	<b>-8</b>	0	0	<b>-26</b>	0	0	<b>29</b>	0	0	<b>26</b>	0	0
$Y_F$	0	<b>-10</b>	0	0	<b>-9</b>	0	0	<b>-27</b>	0	0	<b>27</b>	0	0	<b>26</b>	0
$Z_F$	0	0	<b>-10</b>	0	0	<b>-9</b>	0	0	<b>-30</b>	0	0	<b>29</b>	0	0	<b>23</b>

Analizando e comparando as Tabelas 6.4, 6.5, 6.6, e as Tabelas 6.17, 6.18 e 6.19, nota-se que a influência do MDB de cada observação sobre cada parâmetro aumenta cerca de 3,3 vezes, multiplicando a MVC das observações pelo escalar 10.

Como apenas o MDB das observações se modificou, mas a geometria do problema permaneceu a mesma, analisando a expressão 4.36, se era esperado que a confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros também tivesse este aumento de cerca de 3,3 vezes.

Verificada a influência em multiplicar a MVC das observações pelo escalar 10 sobre as medidas de confiabilidade convencionais (considerando apenas um *outlier* por vez), também foi verificada esta influência sobre as medidas de confiabilidade generalizadas para múltiplos *outliers* (no caso, para dois *outliers* simultâneos).

Desta forma, após degradar a MVC original das observações em 10 vezes, foram recalcados os coeficientes de correlação múltipla ( $\rho_{ij}^q$ ), a confiabilidade interna (MDB –  $\nabla y_i^q$ ), o número de confiabilidade ( $\bar{r}_i^q$ ) e o número de redundância ( $r_i^q$ ) das observações (para  $q = 2$  outliers simultâneos), e alguns destes são mostrados nas Tabelas 6.20, 6.21, 6.22 e 6.23, respectivamente.

Tabela 6.20 – Coeficientes de correlação múltipla para as observações das linhas-base AC, AE e BC, degradando em 10 vezes a MVC original.

$\rho_{ij}^q$	$\Delta X_{AC}$	$\Delta Y_{AC}$	$\Delta Z_{AC}$	$\Delta X_{AE}$	$\Delta Y_{AE}$	$\Delta Z_{AE}$	$\Delta X_{BC}$	$\Delta Y_{BC}$	$\Delta Z_{BC}$
$\Delta X_{AC}$	<b>1</b>	0,0098	0,0096	<b>0,0299</b>	0,0003	0,0003	<b>0,1950</b>	0,0019	0,0017
$\Delta Y_{AC}$	0,0098	<b>1</b>	0,0098	0,0003	<b>0,0341</b>	0,0004	0,0018	<b>0,1902</b>	0,0017
$\Delta Z_{AC}$	0,0096	0,0098	<b>1</b>	0,0003	0,0004	<b>0,0332</b>	0,0018	0,0019	<b>0,1902</b>
$\Delta X_{AE}$	<b>0,0299</b>	0,0003	0,0003	<b>1</b>	0,0100	0,0104	<b>0,0722</b>	0,0007	0,0007
$\Delta Y_{AE}$	0,0003	<b>0,0341</b>	0,0004	0,0100	<b>1</b>	0,0103	0,0006	<b>0,0748</b>	0,0008
$\Delta Z_{AE}$	0,0003	0,0004	<b>0,0332</b>	0,0104	0,0103	<b>1</b>	0,0007	0,0008	<b>0,0809</b>
$\Delta X_{BC}$	<b>0,1950</b>	0,0018	0,0018	<b>0,0722</b>	0,0006	0,0007	<b>1</b>	0,0092	0,0092
$\Delta Y_{BC}$	0,0019	<b>0,1902</b>	0,0019	0,0007	<b>0,0748</b>	0,0008	0,0092	<b>1</b>	0,0094
$\Delta Z_{BC}$	0,0017	0,0017	<b>0,1902</b>	0,0007	0,0008	<b>0,0809</b>	0,0092	0,0094	<b>1</b>

Tabela 6.21 – Alguns valores para o MDB –  $\nabla y_i^q$  das linhas-base DE, FA e FC (para  $q = 2$ ), degradando em 10 vezes a MVC original.

$\nabla y_i^q$ (cm)	$\Delta X_{FC}$	$\Delta Y_{FC}$	$\Delta Z_{FC}$	$\Delta X_{FE}$	$\Delta Y_{FE}$	$\Delta Z_{FE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta Y_{FD}$	$\Delta Z_{FD}$
$\Delta X_{DE}$	<b>20,5</b>	20,4	20,4	<b>26,1</b>	20,4	20,4	<b>23,5</b>	20,4	20,4
$\Delta Y_{DE}$	20,7	<b>20,8</b>	20,7	20,7	<b>25,6</b>	20,7	20,7	<b>23,8</b>	20,7
$\Delta Z_{DE}$	20,7	20,7	<b>20,9</b>	20,7	20,7	<b>26,0</b>	20,7	20,7	<b>23,3</b>
$\Delta X_{FA}$	<b>12,6</b>	12,6	12,6	<b>12,6</b>	12,6	12,6	<b>12,6</b>	12,6	12,6
$\Delta Y_{FA}$	12,2	<b>12,2</b>	12,2	12,2	<b>12,2</b>	12,2	12,2	<b>12,2</b>	12,2
$\Delta Z_{FA}$	12,8	12,8	<b>12,8</b>	12,8	12,8	<b>12,9</b>	12,8	12,8	<b>12,8</b>
$\Delta X_{FC}$	<b>24,7</b>	24,7	24,7	<b>24,8</b>	24,7	24,7	<b>25,3</b>	24,7	24,7
$\Delta Y_{FC}$	23,6	<b>23,6</b>	23,6	23,6	<b>23,7</b>	23,6	23,6	<b>24,2</b>	23,6
$\Delta Z_{FC}$	24,1	24,1	<b>24,1</b>	24,1	24,1	<b>24,2</b>	24,1	24,1	<b>24,6</b>

Tabela 6.22 – Alguns valores para o  $\bar{r}_i^q$  das linhas-base DE, FA e FC (para  $q = 2$ ), degradando em 10 vezes a MVC original.

$\bar{r}_i^q$	$\Delta X_{FC}$	$\Delta Y_{FC}$	$\Delta Z_{FC}$	$\Delta X_{FE}$	$\Delta Y_{FE}$	$\Delta Z_{FE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta Y_{FD}$	$\Delta Z_{FD}$
$\Delta X_{DE}$	<b>0,5000</b>	0,5061	0,5061	<b>0,3077</b>	0,5061	0,5061	<b>0,3810</b>	0,5061	0,5061
$\Delta Y_{DE}$	0,5105	<b>0,5035</b>	0,5105	0,5105	<b>0,3324</b>	0,5105	0,5105	<b>0,3865</b>	0,5105
$\Delta Z_{DE}$	0,5113	0,5113	<b>0,5021</b>	0,5113	0,5113	<b>0,3236</b>	0,5113	0,5113	<b>0,4036</b>
$\Delta X_{FA}$	<b>0,8065</b>	0,8097	0,8097	<b>0,8039</b>	0,8097	0,8097	<b>0,8041</b>	0,8097	0,8097
$\Delta Y_{FA}$	0,7594	<b>0,7542</b>	0,7594	0,7594	<b>0,7507</b>	0,7594	0,7594	<b>0,7518</b>	0,7594
$\Delta Z_{FA}$	0,7952	0,7952	<b>0,7909</b>	0,7952	0,7952	<b>0,7869</b>	0,7952	0,7952	<b>0,7894</b>
$\Delta X_{FC}$	<b>0,7160</b>	0,7160	0,7160	<b>0,7100</b>	0,7160	0,7160	<b>0,6842</b>	0,7160	0,7160
$\Delta Y_{FC}$	0,6621	<b>0,6621</b>	0,6621	0,6621	<b>0,6558</b>	0,6621	0,6621	<b>0,6290</b>	0,6621
$\Delta Z_{FC}$	0,7060	0,7060	<b>0,7061</b>	0,7061	0,7061	<b>0,6976</b>	0,7061	0,7061	<b>0,6750</b>

Tabela 6.23 – Alguns valores para o  $r_i^q$  das linhas-base DE, FA e FC (para  $q = 2$ ), degradando em 10 vezes a MVC original.

$r_i^q$	$\Delta X_{FC}$	$\Delta Y_{FC}$	$\Delta Z_{FC}$	$\Delta X_{FE}$	$\Delta Y_{FE}$	$\Delta Z_{FE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta Y_{FD}$	$\Delta Z_{FD}$
$\Delta X_{DE}$	<b>0,4999</b>	0,5060	0,5060	<b>0,3076</b>	0,5060	0,5060	<b>0,3810</b>	0,5060	0,5060
$\Delta Y_{DE}$	0,5104	<b>0,5034</b>	0,5104	0,5104	<b>0,3323</b>	0,5104	0,5104	<b>0,3864</b>	0,5104
$\Delta Z_{DE}$	0,5112	0,5112	<b>0,5020</b>	0,5112	0,5112	<b>0,3236</b>	0,5112	0,5112	<b>0,4035</b>
$\Delta X_{FA}$	<b>0,8063</b>	0,8095	0,8095	<b>0,8037</b>	0,8095	0,8095	<b>0,8039</b>	0,8095	0,8095
$\Delta Y_{FA}$	0,7592	<b>0,7540</b>	0,7592	0,7592	<b>0,7505</b>	0,7592	0,7592	<b>0,7516</b>	0,7592
$\Delta Z_{FA}$	0,7950	0,7950	<b>0,7907</b>	0,7950	0,7950	<b>0,7867</b>	0,7950	0,7950	<b>0,7892</b>
$\Delta X_{FC}$	<b>0,7159</b>	0,7159	0,7159	<b>0,7099</b>	0,7159	0,7159	<b>0,6840</b>	0,7159	0,7159
$\Delta Y_{FC}$	0,6620	<b>0,6620</b>	0,6620	0,6620	<b>0,6557</b>	0,6620	0,6620	<b>0,6288</b>	0,6620
$\Delta Z_{FC}$	0,7059	0,7059	<b>0,7059</b>	0,7059	0,7059	<b>0,6975</b>	0,7059	0,7059	<b>0,6749</b>

Analizando e comparando as Tabelas 6.8 e 6.20, 6.10 e 6.22, 6.11 e 6.23, nota-se que os coeficientes de correlação múltipla, os números de confiabilidade e os números de redundância das observações, respectivamente, também não se modificam ao multiplicar as variâncias e covariâncias das observações pelo escalar 10, novamente devido ao fato de tais medidas serem dependentes tanto da MVC quanto de sua inversa, cancelando qualquer escalar que tenha sido aplicado no cálculo destas (ver as expressões 5.14, 5.23 e 5.25).

Entretanto, analisando as Tabelas 6.9 e 6.21, nota-se que o MDB das observações (para  $q = 2$  outliers simultâneos), aumentou em cerca de 3,3 vezes, piorando a MVC destas em 10 vezes. Analisando a expressão 5.13, isto é explicado pelo fato de que os coeficientes de correlação múltipla não se alteraram, porém, o MDB das observações no caso convencional aumentou em cerca de 3,3 vezes.

Por fim, a última medida de confiabilidade para  $q = 2$  outliers simultâneos em que foi verificada a influência de multiplicar a MVC por um escalar 10 foi a confiabilidade externa máxima das observações sobre os parâmetros. As Tabelas 6.24 e 6.25 mostram alguns dos resultados obtidos.

Tabela 6.24 – Confiabilidade externa máxima de alguns pares de observações ( $q = 2$  outliers simultâneos, degradando em 10 vezes a MVC original), sobre os parâmetros  $X_C$ ,  $X_E$ ,  $X_D$ ,  $X_F$  (em mm).

	$\Delta X_{AC}$ e $\Delta X_{AE}$	$\Delta X_{AC}$ e $\Delta X_{BC}$	$\Delta X_{AC}$ e $\Delta X_{BD}$	$\Delta X_{AC}$ e $\Delta X_{DC}$	$\Delta X_{AC}$ e $\Delta X_{DE}$
$X_C$	34	91	39	93	38
$X_E$	57	14	20	16	55
$X_D$	24	28	45	40	47
$X_F$	11	9	9	4	3

Tabela 6.25 – Confiabilidade externa máxima de alguns pares de observações ( $q = 2$  outliers simultâneos, degradando em 10 vezes a MVC original), sobre os parâmetros  $X_C$ ,  $X_E$ ,  $X_D$ ,  $X_F$  (em mm).

	$\Delta X_{FA} \text{ e } \Delta X_{FC}$	$\Delta X_{FA} \text{ e } \Delta X_{FE}$	$\Delta X_{FA} \text{ e } \Delta X_{FD}$	$\Delta X_{FA} \text{ e } \Delta X_{FB}$
$X_C$	64	14	31	22
$X_E$	16	88	26	28
$X_D$	20	27	73	28
$X_F$	25	26	26	41

Analizando e comparando as Tabelas 6.12 e 6.24, e as Tabelas 6.13 e 6.25, nota-se que a confiabilidade externa máxima das observações (para  $q = 2$  outliers simultâneos), aumentou em cerca de  $\sqrt{10} \cong 3,3$  vezes, piorando a MVC destas em 10 vezes, o que pode ser compreendido analisando as expressões 5.30 e 5.31.

Desta forma, resumidamente, multiplicando a MVC das observações por um escalar  $K$  (ou seja, piorando em  $\sqrt{K}$  a precisão das observações), não se altera o número de redundância, de absorção e de confiabilidade das observações (tanto no caso convencional quanto no caso generalizado), entretanto, aumenta-se em  $\sqrt{K}$  o valor do MDB das observações, bem como a influência destes sobre os parâmetros (tanto no caso convencional quanto no caso generalizado).

Estes resultados, já previstos pela teoria, são coerentes, pois, aumentando a variância das observações, admite-se que as mesmas possuem uma precisão inferior, e consequentemente, aumenta-se o módulo do menor erro detectável destas, bem como a influência de possíveis erros não detectáveis nas observações (então maiores em módulo), sobre os parâmetros estimados.

Entretanto, os números de redundância, de absorção e de confiabilidade não se alteram, pois as variâncias e covariâncias de todas as observações são multiplicadas pelo mesmo escalar, além da geometria do problema não se alterar, e, desta forma, a hierarquia das observações, em termos relativos de confiabilidade, é mantida a mesma, embora em termos absolutos, a magnitude de possíveis erros (máximos) não detectáveis tenha sido aumentada.

Frente a estas conclusões, os resultados do segundo experimento (redução das variâncias e covariâncias das observações por um escalar 10) serão omitidos, pois os números de redundância, absorção e confiabilidade também não se alteram, e o MDB das observações (confiabilidade interna) e sua influência sobre os parâmetros (confiabilidade externa) diminuem cerca de 3,3 vezes, tanto no caso convencional, quanto no caso generalizado.

Apenas para uma melhor visualização dos resultados obtidos com estes dois primeiros experimentos, a Figura 6.2 ilustra o MDB das observações utilizando a MVC original, o MDB das observações aumentando as variâncias e covariâncias em 10 vezes, e o MDB das

observações reduzindo as variâncias e covariâncias em 10 vezes (todos estes relativos ao caso convencional, considerando apenas um *outlier* por vez).

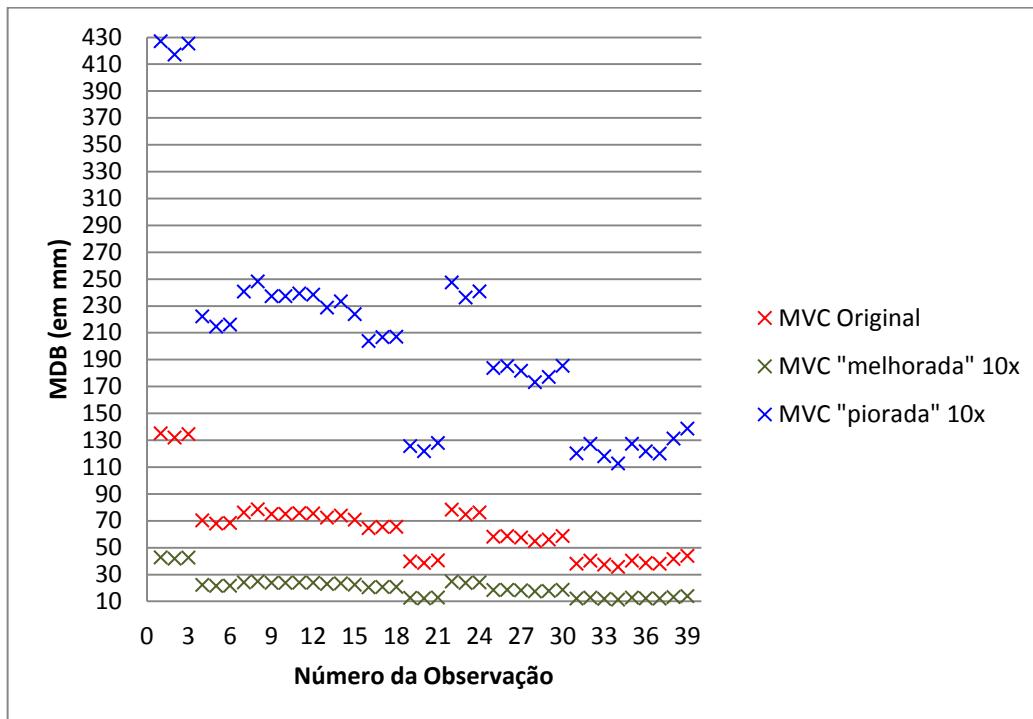


Figura 6.2 – MDB resultante (para  $q = 1$ ) modificando a MVC das observações.

Analisando a Figura 6.2, nota-se que, multiplicando a MVC das observações por um escalar qualquer  $K$ , o MDB destas (para o caso convencional) aumenta (ou diminui) numa proporção aproximadamente igual à  $\sqrt{K}$ , mas o ordenamento (hierarquia) destas, em termos de confiabilidade interna, permanece o mesmo. Para o MDB das observações no caso generalizado (ou seja,  $q > 1$ ), bem como a confiabilidade externa destas, tanto no caso convencional quanto no caso generalizado, as conclusões são análogas.

A Figura 6.2 também ilustra a importância da seleção de equipamentos e técnicas de posicionamento adequadas na etapa de planejamento de uma rede geodésica, pois estas questões estão diretamente relacionadas com a precisão das observações, e, consequentemente, com a confiabilidade da rede a ser levantada.

Ainda visando estudar a influência das variâncias e covariâncias das observações nas medidas de confiabilidade, em um terceiro experimento, foram negligenciadas (desconsideradas) as covariâncias das observações, transformando a MVC destas em diagonal (ou seja, considerando apenas as variâncias das observações). A Tabela 6.26 apresenta os números de redundância  $r_i$ , os números de absorção  $u_i$ , os números de confiabilidade  $\bar{r}_i$  e a confiabilidade interna – MDB das observações, obtidos com este experimento.

Tabela 6.26 – Medidas de confiabilidade das observações com a MVC das observações diagonal.

Observação	$r_i$	$u_i$	$\bar{r}_i$	MDB $\nabla y_i$ (m)
$\Delta X_{AC}$	0,9253	0,0747	0,9253	0,135
$\Delta Y_{AC}$	0,9201	0,0799	0,9201	0,132
$\Delta Z_{AC}$	0,9275	0,0725	0,9275	0,135
$\Delta X_{AE}$	0,7464	0,2536	0,7464	0,070
$\Delta Y_{AE}$	0,7114	0,2886	0,7114	0,068
$\Delta Z_{AE}$	0,7333	0,2667	0,7333	0,068
$\Delta X_{BC}$	0,6798	0,3202	0,6798	0,076
$\Delta Y_{BC}$	0,7058	0,2942	0,7058	0,078
$\Delta Z_{BC}$	0,6836	0,3164	0,6836	0,075
$\Delta X_{BD}$	0,8191	0,1809	0,8191	0,075
$\Delta Y_{BD}$	0,8119	0,1881	0,8119	0,076
$\Delta Z_{BD}$	0,8026	0,1974	0,8026	0,075
$\Delta X_{DC}$	0,4769	0,5231	0,4769	0,072
$\Delta Y_{DC}$	0,5061	0,4939	0,5061	0,074
$\Delta Z_{DC}$	0,4458	0,5542	0,4458	0,071
$\Delta X_{DE}$	0,5060	0,4940	0,5060	0,064
$\Delta Y_{DE}$	0,5104	0,4896	0,5104	0,065
$\Delta Z_{DE}$	0,5112	0,4888	0,5112	0,065
$\Delta X_{FA}$	0,8095	0,1905	0,8095	0,040
$\Delta Y_{FA}$	0,7592	0,2408	0,7592	0,039
$\Delta Z_{FA}$	0,7950	0,2050	0,7950	0,040
$\Delta X_{FC}$	0,7159	0,2841	0,7159	0,078
$\Delta Y_{FC}$	0,6620	0,3380	0,6620	0,075
$\Delta Z_{FC}$	0,7059	0,2941	0,7059	0,076
$\Delta X_{FE}$	0,4777	0,5223	0,4777	0,058
$\Delta Y_{FE}$	0,4962	0,5038	0,4962	0,059
$\Delta Z_{FE}$	0,4568	0,5432	0,4568	0,057
$\Delta X_{FD}$	0,5311	0,4689	0,5311	0,055
$\Delta Y_{FD}$	0,5377	0,4623	0,5377	0,056
$\Delta Z_{FD}$	0,5984	0,4016	0,5984	0,059
$\Delta X_{FB}$	0,7857	0,2143	0,7857	0,038
$\Delta Y_{FB}$	0,7874	0,2126	0,7874	0,040
$\Delta Z_{FB}$	0,7419	0,2581	0,7419	0,037
$\Delta X_{BF}$	0,7417	0,2583	0,7417	0,036
$\Delta Y_{BF}$	0,7876	0,2124	0,7876	0,040
$\Delta Z_{BF}$	0,7645	0,2355	0,7645	0,038
$\Delta X_{AF}$	0,7849	0,2151	0,7849	0,038
$\Delta Y_{AF}$	0,8042	0,1958	0,8042	0,041
$\Delta Z_{AF}$	0,8335	0,1665	0,8335	0,044

Analizando e comparando as Tabela 6.3 e 6.26, nota-se que os números de redundância e de absorção não se modificaram ao negligenciar as covariâncias das observações. Entretanto, os números de confiabilidade se tornaram iguais aos números de redundância (conforme previsto pela teoria), e desta forma, apresentaram pequenas diferenças

em relação aos números de confiabilidade considerando a MVC original das observações (Tabela 6.3), com uma diferença máxima de apenas 0,2% (ou seja, podendo ser considerada nula, em termos práticos).

Quanto à confiabilidade interna, desconsiderando as covariâncias das observações, somente na observação  $\Delta Z_{AC}$  o MDB aumentou em (apenas) 1 mm, em todos os demais casos, curiosamente, o MDB permaneceu o mesmo.

Embora o MDB tenha aumentado apenas 1 mm em uma observação, e permanecido o mesmo para as demais, a confiabilidade externa das observações pode se alterar, pois esta medida também depende da matriz peso  $W$  (ver a expressão 4.36), e que neste experimento, se tornou uma matriz diagonal, pois  $W = \Sigma_y^{-1}$ .

Desta forma, as Tabelas 6.27, 6.28 e 6.29 apresentam a confiabilidade externa resultante das observações sobre os parâmetros, considerando uma MVC diagonal para estas.

Tabela 6.27 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, com a MVC diagonal (em mm).

	$\Delta X_{AC}$	$\Delta Y_{AC}$	$\Delta Z_{AC}$	$\Delta X_{AE}$	$\Delta Y_{AE}$	$\Delta Z_{AE}$	$\Delta X_{BC}$	$\Delta Y_{BC}$	$\Delta Z_{BC}$	$\Delta X_{BD}$	$\Delta Y_{BD}$	$\Delta Z_{BD}$
$X_C$	<b>10</b>	0	0	<b>4</b>	0	0	<b>24</b>	0	0	<b>6</b>	0	0
$Y_C$	0	<b>11</b>	0	0	<b>4</b>	0	0	<b>23</b>	0	0	<b>6</b>	0
$Z_C$	0	0	<b>10</b>	0	0	<b>4</b>	0	0	<b>24</b>	0	0	<b>7</b>
$X_E$	<b>2</b>	0	0	<b>18</b>	0	0	<b>4</b>	0	0	<b>6</b>	0	0
$Y_E$	0	<b>2</b>	0	0	<b>20</b>	0	0	<b>4</b>	0	0	<b>6</b>	0
$Z_E$	0	0	<b>2</b>	0	0	<b>18</b>	0	0	<b>4</b>	0	0	<b>6</b>
$X_D$	<b>3</b>	0	0	<b>7</b>	0	0	<b>8</b>	0	0	<b>14</b>	0	0
$Y_D$	0	<b>3</b>	0	0	<b>8</b>	0	0	<b>7</b>	0	0	<b>14</b>	0
$Z_D$	0	0	<b>4</b>	0	0	<b>7</b>	0	0	<b>9</b>	0	0	<b>15</b>
$X_F$	<b>1</b>	0	0	<b>3</b>	0	0	<b>2</b>	0	0	<b>3</b>	0	0
$Y_F$	0	<b>1</b>	0	0	<b>4</b>	0	0	<b>3</b>	0	0	<b>3</b>	0
$Z_F$	0	0	<b>1</b>	0	0	<b>4</b>	0	0	<b>3</b>	0	0	<b>3</b>

Tabela 6.28 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, com a MVC diagonal (em mm).

	$\Delta X_{DC}$	$\Delta Y_{DC}$	$\Delta Z_{DC}$	$\Delta X_{DE}$	$\Delta Y_{DE}$	$\Delta Z_{DE}$	$\Delta X_{FA}$	$\Delta Y_{FA}$	$\Delta Z_{FA}$	$\Delta X_{FC}$	$\Delta Y_{FC}$	$\Delta Z_{FC}$
$X_C$	<b>25</b>	0	0	<b>-6</b>	0	0	<b>-4</b>	0	0	<b>20</b>	0	0
$Y_C$	0	<b>24</b>	0	0	<b>-6</b>	0	0	<b>-5</b>	0	0	<b>23</b>	0
$Z_C$	0	0	<b>25</b>	0	0	<b>-7</b>	0	0	<b>-4</b>	0	0	<b>20</b>
$X_E$	<b>-5</b>	0	0	<b>17</b>	0	0	<b>-5</b>	0	0	<b>1</b>	0	0
$Y_E$	0	<b>-5</b>	0	0	<b>17</b>	0	0	<b>-6</b>	0	0	<b>0</b>	0
$Z_E$	0	0	<b>-5</b>	0	0	<b>16</b>	0	0	<b>-6</b>	0	0	<b>1</b>
$X_D$	<b>-13</b>	0	0	<b>-14</b>	0	0	<b>-5</b>	0	0	<b>4</b>	0	0
$Y_D$	0	<b>-13</b>	0	0	<b>-15</b>	0	0	<b>-6</b>	0	0	<b>4</b>	0
$Z_D$	0	0	<b>-15</b>	0	0	<b>-16</b>	0	0	<b>-5</b>	0	0	<b>5</b>
$X_F$	<b>-1</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>-8</b>	0	0	<b>-2</b>	0	0
$Y_F$	0	<b>-1</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>-9</b>	0	0	<b>-2</b>	0
$Z_F$	0	0	<b>-1</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>-8</b>	0	0	<b>-2</b>

Tabela 6.29 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, com a MVC diagonal (em mm).

	$\Delta X_{FE}$	$\Delta Y_{FE}$	$\Delta Z_{FE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta Y_{FD}$	$\Delta Z_{FD}$	$\Delta X_{FB}$	$\Delta Y_{FB}$	$\Delta Z_{FB}$	$\Delta X_{BF}$	$\Delta Y_{BF}$	$\Delta Z_{BF}$	$\Delta X_{AF}$	$\Delta Y_{AF}$	$\Delta Z_{AF}$
$X_C$	<b>2</b>	0	0	<b>9</b>	0	0	<b>-4</b>	0	0	<b>5</b>	0	0	<b>4</b>	0	0
$Y_C$	0	<b>2</b>	0	0	<b>8</b>	0	0	<b>-5</b>	0	0	<b>5</b>	0	0	<b>5</b>	0
$Z_C$	0	0	<b>3</b>	0	0	<b>9</b>	0	0	<b>-5</b>	0	0	<b>5</b>	0	0	<b>4</b>
$X_E$	<b>28</b>	0	0	<b>7</b>	0	0	<b>-6</b>	0	0	<b>6</b>	0	0	<b>6</b>	0	0
$Y_E$	0	<b>26</b>	0	0	<b>7</b>	0	0	<b>-6</b>	0	0	<b>6</b>	0	0	<b>5</b>	0
$Z_E$	0	0	<b>28</b>	0	0	<b>5</b>	0	0	<b>-7</b>	0	0	<b>6</b>	0	0	<b>5</b>
$X_D$	<b>7</b>	0	0	<b>23</b>	0	0	<b>-6</b>	0	0	<b>6</b>	0	0	<b>6</b>	0	0
$Y_D$	0	<b>7</b>	0	0	<b>23</b>	0	0	<b>-6</b>	0	0	<b>6</b>	0	0	<b>5</b>	0
$Z_D$	0	0	<b>8</b>	0	0	<b>21</b>	0	0	<b>-6</b>	0	0	<b>6</b>	0	0	<b>5</b>
$X_F$	<b>-3</b>	0	0	<b>-3</b>	0	0	<b>-8</b>	0	0	<b>9</b>	0	0	<b>8</b>	0	0
$Y_F$	0	<b>-3</b>	0	0	<b>-3</b>	0	0	<b>-9</b>	0	0	<b>9</b>	0	0	<b>8</b>	0
$Z_F$	0	0	<b>-3</b>	0	0	<b>-3</b>	0	0	<b>-10</b>	0	0	<b>9</b>	0	0	<b>7</b>

Analizando e comparando as Tabelas 6.4, 6.5 e 6.6 e as Tabelas 6.27, 6.28 e 6.29, nota-se que a confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros não se modificou, desconsiderando as covariâncias das observações.

Portanto, para esta rede GPS (cuja MVC tem estrutura bloco diagonal  $3 \times 3$  e as covariâncias são cerca de cem vezes menores que as variâncias), a negligência das covariâncias, em termos práticos, não alterou nenhuma das medidas de confiabilidade convencionais consideradas.

Verificada a influência em negligenciar as covariâncias das observações sobre as medidas de confiabilidade convencionais (considerando apenas um *outlier* por vez), também foi verificada esta influência sobre as medidas de confiabilidade generalizadas para múltiplos *outliers* (no caso, para dois *outliers* simultâneos).

Desta forma, após negligenciar as covariâncias das observações (transformando a MVC em uma matriz diagonal), foram recalculados os coeficientes de correlação múltipla ( $\rho_{ij}^q$ ), a confiabilidade interna ( $MDB - \nabla y_i^q$ ), o número de confiabilidade ( $\bar{r}_i^q$ ) e o número de redundância ( $r_i^q$ ) das observações (para  $q = 2$  *outliers* simultâneos), e alguns destes são mostrados nas Tabelas 6.30, 6.31 e 6.32 e 6.33, respectivamente.

Tabela 6.30 – Coeficientes de correlação múltipla para as linhas-base AC, AE e BC, com a MVC diagonal.

$\rho_{ij}^q$	$\Delta X_{AC}$	$\Delta Y_{AC}$	$\Delta Z_{AC}$	$\Delta X_{AE}$	$\Delta Y_{AE}$	$\Delta Z_{AE}$	$\Delta X_{BC}$	$\Delta Y_{BC}$	$\Delta Z_{BC}$
$\Delta X_{AC}$	<b>1</b>	0,0000	0,0000	<b>0,0299</b>	0,0000	0,0000	<b>0,1950</b>	0,0000	0,0000
$\Delta Y_{AC}$	0,0000	<b>1</b>	0,0000	0,0000	<b>0,0341</b>	0,0000	0,0000	<b>0,1902</b>	0,0000
$\Delta Z_{AC}$	0,0000	0,0000	<b>1</b>	0,0000	0,0000	<b>0,0332</b>	0,0000	0,0000	<b>0,1902</b>
$\Delta X_{AE}$	<b>0,0299</b>	0,0000	0,0000	<b>1</b>	0,0000	0,0000	<b>0,0722</b>	0,0000	0,0000
$\Delta Y_{AE}$	0,0000	<b>0,0341</b>	0,0000	0,0000	<b>1</b>	0,0000	0,0000	<b>0,0748</b>	0,0000
$\Delta Z_{AE}$	0,0000	0,0000	<b>0,0332</b>	0,0000	0,0000	<b>1</b>	0,0000	0,0000	<b>0,0809</b>
$\Delta X_{BC}$	<b>0,1950</b>	0,0000	0,0000	<b>0,0722</b>	0,0000	0,0000	<b>1</b>	0,0000	0,0000
$\Delta Y_{BC}$	0,0000	<b>0,1902</b>	0,0000	0,0000	<b>0,0748</b>	0,0000	0,0000	<b>1</b>	0,0000
$\Delta Z_{BC}$	0,0000	0,0000	<b>0,1902</b>	0,0000	0,0000	<b>0,0809</b>	0,0000	0,0000	<b>1</b>

Tabela 6.31 – Alguns valores para o  $MDB - \nabla y_i^q$  das linhas-base DE, FA e FC (para  $q = 2$ ), com MVC diagonal.

$\nabla y_i^q$ (cm)	$\Delta X_{FC}$	$\Delta Y_{FC}$	$\Delta Z_{FC}$	$\Delta X_{FE}$	$\Delta Y_{FE}$	$\Delta Z_{FE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta Y_{FD}$	$\Delta Z_{FD}$
$\Delta X_{DE}$	<b>6,5</b>	6,4	6,4	<b>8,3</b>	6,4	6,4	<b>7,4</b>	6,4	6,4
$\Delta Y_{DE}$	6,5	<b>6,6</b>	6,5	6,5	<b>8,1</b>	6,5	6,5	<b>7,5</b>	6,5
$\Delta Z_{DE}$	6,5	6,5	<b>6,6</b>	6,5	6,5	<b>8,2</b>	6,5	6,5	<b>7,4</b>
$\Delta X_{FA}$	<b>4,0</b>	4,0	4,0	<b>4,0</b>	4,0	4,0	<b>4,0</b>	4,0	4,0
$\Delta Y_{FA}$	3,9	<b>3,9</b>	3,9	3,9	<b>3,9</b>	3,9	3,9	<b>3,9</b>	3,9
$\Delta Z_{FA}$	4,0	4,0	<b>4,1</b>	4,0	4,0	<b>4,1</b>	4,0	4,0	<b>4,1</b>
$\Delta X_{FC}$	<b>7,8</b>	7,8	7,8	<b>7,9</b>	7,8	7,8	<b>8,0</b>	7,8	7,8
$\Delta Y_{FC}$	7,5	<b>7,5</b>	7,5	7,5	<b>7,5</b>	7,5	7,5	<b>7,7</b>	7,5
$\Delta Z_{FC}$	7,6	7,6	<b>7,6</b>	7,6	7,6	<b>7,7</b>	7,6	7,6	<b>7,8</b>

Tabela 6.32 – Alguns valores para o  $\bar{r}_i^q$  das linhas-base DE, FA e FC (para  $q = 2$ ), com a MVC diagonal.

$\bar{r}_i^q$	$\Delta X_{FC}$	$\Delta Y_{FC}$	$\Delta Z_{FC}$	$\Delta X_{FE}$	$\Delta Y_{FE}$	$\Delta Z_{FE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta Y_{FD}$	$\Delta Z_{FD}$
$\Delta X_{DE}$	<b>0,4999</b>	0,5060	0,5060	<b>0,3076</b>	0,5060	0,5060	<b>0,3810</b>	0,5060	0,5060
$\Delta Y_{DE}$	0,5104	<b>0,5034</b>	0,5104	0,5104	<b>0,3323</b>	0,5104	0,5104	<b>0,3864</b>	0,5104
$\Delta Z_{DE}$	0,5112	0,5112	<b>0,5020</b>	0,5112	0,5112	<b>0,3236</b>	0,5112	0,5112	<b>0,4035</b>
$\Delta X_{FA}$	<b>0,8063</b>	0,8095	0,8095	<b>0,8037</b>	0,8095	0,8095	<b>0,8039</b>	0,8095	0,8095
$\Delta Y_{FA}$	0,7592	<b>0,7540</b>	0,7592	0,7592	<b>0,7505</b>	0,7592	0,7592	<b>0,7516</b>	0,7592
$\Delta Z_{FA}$	0,7950	0,7950	<b>0,7907</b>	0,7950	0,7950	<b>0,7867</b>	0,7950	0,7950	<b>0,7892</b>
$\Delta X_{FC}$	<b>0,7159</b>	0,7159	0,7159	<b>0,7099</b>	0,7159	0,7159	<b>0,6840</b>	0,7159	0,7159
$\Delta Y_{FC}$	0,6620	<b>0,6620</b>	0,6620	0,6620	<b>0,6557</b>	0,6620	0,6620	<b>0,6288</b>	0,6620
$\Delta Z_{FC}$	0,7059	0,7059	<b>0,7059</b>	0,7059	0,7059	<b>0,6975</b>	0,7059	0,7059	<b>0,6749</b>

Tabela 6.33 – Alguns valores para o  $r_i^q$  das linhas-base DE, FA e FC (para  $q = 2$ ), com a MVC diagonal.

$r_i^q$	$\Delta X_{FC}$	$\Delta Y_{FC}$	$\Delta Z_{FC}$	$\Delta X_{FE}$	$\Delta Y_{FE}$	$\Delta Z_{FE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta Y_{FD}$	$\Delta Z_{FD}$
$\Delta X_{DE}$	<b>0,4999</b>	0,5060	0,5060	<b>0,3076</b>	0,5060	0,5060	<b>0,3810</b>	0,5060	0,5060
$\Delta Y_{DE}$	0,5104	<b>0,5034</b>	0,5104	0,5104	<b>0,3323</b>	0,5104	0,5104	<b>0,3864</b>	0,5104
$\Delta Z_{DE}$	0,5112	0,5112	<b>0,5020</b>	0,5112	0,5112	<b>0,3236</b>	0,5112	0,5112	<b>0,4035</b>
$\Delta X_{FA}$	<b>0,8063</b>	0,8095	0,8095	<b>0,8037</b>	0,8095	0,8095	<b>0,8039</b>	0,8095	0,8095
$\Delta Y_{FA}$	0,7592	<b>0,7540</b>	0,7592	0,7592	<b>0,7505</b>	0,7592	0,7592	<b>0,7516</b>	0,7592
$\Delta Z_{FA}$	0,7950	0,7950	<b>0,7907</b>	0,7950	0,7950	<b>0,7867</b>	0,7950	0,7950	<b>0,7892</b>
$\Delta X_{FC}$	<b>0,7159</b>	0,7159	0,7159	<b>0,7099</b>	0,7159	0,7159	<b>0,6840</b>	0,7159	0,7159
$\Delta Y_{FC}$	0,6620	<b>0,6620</b>	0,6620	0,6620	<b>0,6557</b>	0,6620	0,6620	<b>0,6288</b>	0,6620
$\Delta Z_{FC}$	0,7059	0,7059	<b>0,7059</b>	0,7059	0,7059	<b>0,6975</b>	0,7059	0,7059	<b>0,6749</b>

Analisando e comparando as Tabelas 6.8 e 6.30, nota-se que, negligenciando as covariâncias das observações, os coeficientes de correlação múltipla para observações tomadas em eixos cartesianos distintos se tornam nulos, mesmo para observações de uma mesma linha-base (embora estes já fossem muito pequenos, e os demais já fossem praticamente nulos).

Isto significa que, quando as observações não possuem covariâncias, o menor erro detectável de uma observação, para múltiplos *outliers* (em um caso geral com  $q > 1$ ), é igual ao seu menor erro detectável no caso convencional ( $q = 1$ , *data snooping*), quando as demais observações suspeitas são referentes a eixos cartesianos distintos.

Entretanto, para observações referentes ao mesmo eixo cartesiano, os coeficientes de correlação múltipla não são necessariamente nulos, devido à configuração do problema, mesmo que todas as covariâncias sejam assumidas serem nulas, e, portanto, o MDB de uma observação, considerando múltiplos *outliers*, deverá ser maior do que o seu MDB no caso convencional.

De qualquer maneira, para observações referentes ao mesmo eixo cartesiano, os valores para os coeficientes de correlação múltipla permaneceram os mesmos que foram obtidos utilizando a MVC original (Tabela 6.8).

Como tanto o MDB do caso convencional (Tabela 6.26), quanto os coeficientes de correlação múltipla (Tabela 6.30), em termos práticos, permaneceram os mesmos desconsiderando as covariâncias das observações, o MDB das observações para  $q = 2$  *outliers* simultâneos também não se alterou com este experimento (ver a expressão 5.13 e as Tabelas 6.9 e 6.31).

De maneira análoga, como os números de redundância e de confiabilidade no caso convencional se tornam idênticos, desconsiderando as covariâncias das observações (ver a Tabela 6.25), os números de redundância e de confiabilidade generalizados para  $q = 2$  *outliers* simultâneos também se tornam idênticos (ver as expressões 5.23 e 5.25, e as Tabelas 6.32 e 6.33).

De qualquer maneira, as diferenças entre os números de redundância e de confiabilidade, utilizando a MVC original das observações, já era praticamente nula, de no máximo 0,2% (ver novamente as Tabelas 6.10 e 6.11).

Por fim, a última medida de confiabilidade para  $q = 2$  *outliers* simultâneos em que foi verificada a influência de desconsiderar as covariâncias das observações foi a confiabilidade externa máxima sobre os parâmetros. As Tabelas 6.34 e 6.35 mostram alguns dos resultados obtidos.

Tabela 6.34 – Confiabilidade externa máxima de alguns pares de observações ( $q = 2$  outliers simultâneos, com a MVC diagonal), sobre os parâmetros  $X_C, X_E, X_D, X_F$  (em mm).

	$\Delta X_{AC} \text{ e } \Delta X_{AE}$	$\Delta X_{AC} \text{ e } \Delta X_{BC}$	$\Delta X_{AC} \text{ e } \Delta X_{BD}$	$\Delta X_{AC} \text{ e } \Delta X_{DC}$	$\Delta X_{AC} \text{ e } \Delta X_{DE}$
$X_C$	11	29	12	29	12
$X_E$	18	4	6	5	17
$X_D$	8	9	14	13	15
$X_F$	3	3	3	1	1

Tabela 6.35 – Confiabilidade externa máxima de alguns pares de observações ( $q = 2$  outliers simultâneos, com a MVC diagonal), sobre os parâmetros  $X_C, X_E, X_D, X_F$  (em mm).

	$\Delta X_{FA} \text{ e } \Delta X_{FC}$	$\Delta X_{FA} \text{ e } \Delta X_{FE}$	$\Delta X_{FA} \text{ e } \Delta X_{FD}$	$\Delta X_{FA} \text{ e } \Delta X_{FB}$
$X_C$	20	5	10	7
$X_E$	5	28	8	9
$X_D$	6	9	23	9
$X_F$	8	8	8	13

Analizando e comparando as Tabelas 6.12 e 6.34 e as Tabelas 6.13 e 6.35, nota-se que a confiabilidade externa máxima das observações sobre os parâmetros (para  $q = 2$  outliers simultâneos), se mantém a mesma utilizando a MVC original das observações, ou então desconsiderando as covariâncias destas.

Portanto, para esta rede GPS (cuja MVC possui estrutura bloco diagonal  $3 \times 3$  e as covariâncias não nulas são cerca de cem vezes menores que as variâncias), a negligência das covariâncias praticamente não alterou nenhuma das medidas de confiabilidade, tanto no caso convencional, quanto no caso generalizado para  $q = 2$  outliers simultâneos.

Por fim, em um último experimento, apenas as covariâncias das observações foram aumentadas em 10 vezes, diminuindo a razão de grandeza entre as variâncias e covariâncias destas de (aproximadamente) 100 para (aproximadamente) 10, visando realçar o efeito das covariâncias das observações sobre as medidas de confiabilidade em estudo.

Desta forma, a Tabela 6.36 apresenta os números de redundância  $r_i$ , os números de absorção  $u_i$ , os números de confiabilidade  $\bar{r}_i$  e a confiabilidade interna – MDB das observações, obtidos com este experimento.

Tabela 6.36 – Medidas de confiabilidade das observações, aumentando em 10 vezes as covariâncias.

Observação	$r_i$	$u_i$	$\bar{r}_i$	MDB $\nabla y_i$ (m)
$\Delta X_{AC}$	0,9253	0,0747	0,9417	0,134
$\Delta Y_{AC}$	0,9200	0,0800	0,9369	0,131
$\Delta Z_{AC}$	0,9275	0,0725	0,9439	0,133
$\Delta X_{AE}$	0,7466	0,2534	0,7611	0,070
$\Delta Y_{AE}$	0,7108	0,2892	0,7253	0,067
$\Delta Z_{AE}$	0,7333	0,2667	0,7482	0,068
$\Delta X_{BC}$	0,6799	0,3201	0,6907	0,075
$\Delta Y_{BC}$	0,7062	0,2938	0,7174	0,078
$\Delta Z_{BC}$	0,6837	0,3163	0,6948	0,074
$\Delta X_{BD}$	0,8190	0,1810	0,8351	0,074
$\Delta Y_{BD}$	0,8118	0,1882	0,8270	0,075
$\Delta Z_{BD}$	0,8022	0,1978	0,8180	0,075
$\Delta X_{DC}$	0,4770	0,5230	0,4849	0,072
$\Delta Y_{DC}$	0,5065	0,4935	0,5147	0,073
$\Delta Z_{DC}$	0,4453	0,5547	0,4535	0,070
$\Delta X_{DE}$	0,5062	0,4938	0,5151	0,064
$\Delta Y_{DE}$	0,5106	0,4894	0,5192	0,065
$\Delta Z_{DE}$	0,5114	0,4886	0,5203	0,065
$\Delta X_{FA}$	0,8095	0,1905	0,8283	0,039
$\Delta Y_{FA}$	0,7582	0,2418	0,7760	0,038
$\Delta Z_{FA}$	0,7946	0,2054	0,8135	0,040
$\Delta X_{FC}$	0,7161	0,2839	0,7280	0,078
$\Delta Y_{FC}$	0,6615	0,3385	0,6735	0,074
$\Delta Z_{FC}$	0,7060	0,2940	0,7184	0,075
$\Delta X_{FE}$	0,4775	0,5225	0,4869	0,058
$\Delta Y_{FE}$	0,4967	0,5033	0,5049	0,058
$\Delta Z_{FE}$	0,4563	0,5437	0,4656	0,057
$\Delta X_{FD}$	0,5310	0,4690	0,5403	0,054
$\Delta Y_{FD}$	0,5375	0,4625	0,5472	0,056
$\Delta Z_{FD}$	0,5995	0,4005	0,6080	0,058
$\Delta X_{FB}$	0,7861	0,2139	0,8009	0,038
$\Delta Y_{FB}$	0,7879	0,2121	0,8006	0,040
$\Delta Z_{FB}$	0,7415	0,2585	0,7564	0,037
$\Delta X_{BF}$	0,7417	0,2583	0,7559	0,035
$\Delta Y_{BF}$	0,7882	0,2118	0,8009	0,040
$\Delta Z_{BF}$	0,7649	0,2351	0,7781	0,038
$\Delta X_{AF}$	0,7842	0,2158	0,8026	0,038
$\Delta Y_{AF}$	0,8042	0,1958	0,8194	0,041
$\Delta Z_{AF}$	0,8338	0,1662	0,8502	0,043

Analizando e comparando as Tabelas 6.3 e 6.36, nota-se que os números de redundância (e consequentemente, os números de absorção) aumentaram ou diminuíram, mas de uma maneira aparentemente aleatória, com uma diferença máxima de apenas 0,1% (ou seja, podendo ser considerada nula em termos práticos).

Entretanto, todos os números de confiabilidade aumentaram, e a diferença destes para os números de redundância aumentou de cerca de 0,01% (com a MVC original, Tabela 6.3), para cerca de 1% (com as covariâncias aumentadas em 10 vezes, Tabela 6.36). Ou seja, aumentando em 10 vezes as covariâncias das observações, a diferença entre os números de redundância e de confiabilidade destas aumenta em cerca de 100 vezes.

Como para esta rede GPS, a estrutura da MVC das observações é bloco diagonal, este aumento dos números de redundância, em termos absolutos, não foi significativo, mas para redes geodésicas com uma outra estrutura para a MVC, este resultado mostra que a determinação adequada das covariâncias é muito importante para a obtenção de um valor coerente para as medidas de confiabilidade de suas observações.

Quanto à confiabilidade interna, analisando e comparando as Tabelas 6.3 e 6.36, nota-se que o MDB das observações permaneceu o mesmo, ou, na maior parte dos casos, diminuiu em apenas 1 mm, aumentando as covariâncias destas em 10 vezes. Portanto, em termos práticos, esta medida de confiabilidade também não foi alterada com este experimento.

Entretanto, como a confiabilidade externa das observações não depende somente do MDB destas, mas também da matriz *design A* e da matriz peso  $W = \Sigma_y^{-1}$  (ver a expressão 4.36), como foi aplicado um operador não linear na MVC das observações  $\Sigma_y$  (aumento somente das covariâncias em 10 vezes), a confiabilidade externa destas também foi calculada neste experimento, e os resultados obtidos são mostrados nas Tabelas 6.37, 6.38 e 6.39.

Tabela 6.37 – Confiabilidade externa das observações de AC, AE, BC e BD sobre os parâmetros, aumentando em 10 vezes as covariâncias (em mm).

	$\Delta X_{AC}$	$\Delta Y_{AC}$	$\Delta Z_{AC}$	$\Delta X_{AE}$	$\Delta Y_{AE}$	$\Delta Z_{AE}$	$\Delta X_{BC}$	$\Delta Y_{BC}$	$\Delta Z_{BC}$	$\Delta X_{BD}$	$\Delta Y_{BD}$	$\Delta Z_{BD}$
$X_C$	<b>10</b>	0	0	<b>4</b>	0	0	<b>24</b>	0	0	<b>6</b>	0	0
$Y_C$	0	<b>10</b>	0	0	<b>4</b>	0	0	<b>23</b>	0	0	<b>6</b>	0
$Z_C$	0	0	<b>10</b>	0	0	<b>4</b>	0	0	<b>24</b>	0	0	<b>7</b>
$X_E$	<b>2</b>	0	0	<b>18</b>	0	0	<b>4</b>	0	0	<b>6</b>	0	0
$Y_E$	0	<b>2</b>	0	0	<b>19</b>	0	0	<b>4</b>	0	0	<b>6</b>	0
$Z_E$	0	0	<b>2</b>	0	0	<b>18</b>	0	0	<b>4</b>	0	0	<b>6</b>
$X_D$	<b>3</b>	0	0	<b>7</b>	0	0	<b>8</b>	0	0	<b>13</b>	0	0
$Y_D$	0	<b>3</b>	0	0	<b>8</b>	0	0	<b>7</b>	0	0	<b>14</b>	0
$Z_D$	0	0	<b>3</b>	0	0	<b>7</b>	0	0	<b>9</b>	0	0	<b>15</b>
$X_F$	<b>1</b>	0	0	<b>3</b>	0	0	<b>2</b>	0	0	<b>3</b>	0	0
$Y_F$	0	<b>1</b>	0	0	<b>4</b>	0	0	<b>3</b>	0	0	<b>3</b>	0
$Z_F$	0	0	<b>1</b>	0	0	<b>4</b>	0	0	<b>3</b>	0	0	<b>3</b>

Tabela 6.38 – Confiabilidade externa das observações de DC, DE, FA e FC sobre os parâmetros, aumentando em 10 vezes as covariâncias (em mm).

	$\Delta X_{DC}$	$\Delta Y_{DC}$	$\Delta Z_{DC}$	$\Delta X_{DE}$	$\Delta Y_{DE}$	$\Delta Z_{DE}$	$\Delta X_{FA}$	$\Delta Y_{FA}$	$\Delta Z_{FA}$	$\Delta X_{FC}$	$\Delta Y_{FC}$	$\Delta Z_{FC}$
$X_C$	<b>25</b>	0	0	<b>-6</b>	0	0	<b>-4</b>	0	0	<b>20</b>	0	0
$Y_C$	0	<b>23</b>	0	0	<b>-6</b>	0	0	<b>-5</b>	0	0	<b>23</b>	0
$Z_C$	0	0	<b>24</b>	0	0	<b>-7</b>	0	0	<b>-4</b>	0	0	<b>20</b>
$X_E$	<b>-5</b>	0	0	<b>17</b>	0	0	<b>-5</b>	0	0	<b>0</b>	0	0
$Y_E$	0	<b>-5</b>	0	0	<b>17</b>	0	0	<b>-6</b>	0	0	<b>0</b>	0
$Z_E$	0	0	<b>-5</b>	0	0	<b>16</b>	0	0	<b>-6</b>	0	0	<b>1</b>
$X_D$	<b>-13</b>	0	0	<b>-14</b>	0	0	<b>-5</b>	0	0	<b>4</b>	0	0
$Y_D$	0	<b>-13</b>	0	0	<b>-15</b>	0	0	<b>-6</b>	0	0	<b>4</b>	0
$Z_D$	0	0	<b>-14</b>	0	0	<b>-16</b>	0	0	<b>-5</b>	0	0	<b>5</b>
$X_F$	<b>-1</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>-7</b>	0	0	<b>-2</b>	0	0
$Y_F$	0	<b>-1</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>-9</b>	0	0	<b>-2</b>	0
$Z_F$	0	0	<b>-1</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>-8</b>	0	0	<b>-2</b>

Tabela 6.39 – Confiabilidade externa das observações de FE, FD, FE, BF e AF sobre os parâmetros, aumentando em 10 vezes as covariâncias (em mm).

	$\Delta X_{FE}$	$\Delta Y_{FE}$	$\Delta Z_{FE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta Y_{FD}$	$\Delta Z_{FD}$	$\Delta X_{FB}$	$\Delta Y_{FB}$	$\Delta Z_{FB}$	$\Delta X_{BF}$	$\Delta Y_{BF}$	$\Delta Z_{BF}$	$\Delta X_{AF}$	$\Delta Y_{AF}$	$\Delta Z_{AF}$
$X_C$	<b>2</b>	0	0	<b>9</b>	0	0	<b>-4</b>	0	0	<b>5</b>	0	0	<b>4</b>	0	0
$Y_C$	0	<b>2</b>	0	0	<b>8</b>	0	0	<b>-5</b>	0	0	<b>5</b>	0	0	<b>4</b>	0
$Z_C$	0	0	<b>3</b>	0	0	<b>8</b>	0	0	<b>-5</b>	0	0	<b>5</b>	0	0	<b>4</b>
$X_E$	<b>27</b>	0	0	<b>7</b>	0	0	<b>-6</b>	0	0	<b>6</b>	0	0	<b>6</b>	0	0
$Y_E$	0	<b>26</b>	0	0	<b>6</b>	0	0	<b>-6</b>	0	0	<b>6</b>	0	0	<b>5</b>	0
$Z_E$	0	0	<b>28</b>	0	0	<b>5</b>	0	0	<b>-6</b>	0	0	<b>6</b>	0	0	<b>5</b>
$X_D$	<b>7</b>	0	0	<b>23</b>	0	0	<b>-5</b>	0	0	<b>6</b>	0	0	<b>5</b>	0	0
$Y_D$	0	<b>7</b>	0	0	<b>23</b>	0	0	<b>-6</b>	0	0	<b>6</b>	0	0	<b>5</b>	0
$Z_D$	0	0	<b>8</b>	0	0	<b>21</b>	0	0	<b>-6</b>	0	0	<b>6</b>	0	0	<b>5</b>
$X_F$	<b>-3</b>	0	0	<b>-3</b>	0	0	<b>-8</b>	0	0	<b>9</b>	0	0	<b>8</b>	0	0
$Y_F$	0	<b>-3</b>	0	0	<b>-3</b>	0	0	<b>-8</b>	0	0	<b>8</b>	0	0	<b>8</b>	0
$Z_F$	0	0	<b>-3</b>	0	0	<b>-3</b>	0	0	<b>-10</b>	0	0	<b>9</b>	0	0	<b>7</b>

Analisando e comparando as Tabelas 6.4, 6.5 e 6.6 e as Tabelas 6.37, 6.38 e 6.39, nota-se que a influência do MDB das observações sobre os parâmetros não se modificou, ou, em poucos casos, diminuiu apenas 1 mm, realçando as covariâncias destas em 10 vezes.

Portanto, em termos práticos, tal como a confiabilidade interna, a confiabilidade externa das observações não foi alterada com este experimento.

Verificada a influência em aumentar as covariâncias das observações sobre as medidas de confiabilidade convencionais (considerando apenas um *outlier* por vez), também foi verificada esta influência sobre as medidas de confiabilidade generalizadas para múltiplos *outliers* (no caso, para dois *outliers* simultâneos).

Desta forma, após realçar somente as covariâncias das observações em 10 vezes, foram recalculados os coeficientes de correlação múltipla ( $\rho_{ij}^q$ ), a confiabilidade interna

(MDB –  $\nabla y_i^q$ ), o número de confiabilidade ( $\bar{r}_i^q$ ) e o número de redundância ( $r_i^q$ ) das observações (para  $q = 2$  outliers simultâneos), e alguns destes são mostrados nas Tabelas 6.40, 6.41 e 6.42 e 6.43, respectivamente.

Tabela 6.40 – Coeficientes de correlação múltipla para as observações das linhas-base AC, AE e BC, aumentando em 10 vezes as covariâncias.

$\rho_{ij}^q$	$\Delta X_{AC}$	$\Delta Y_{AC}$	$\Delta Z_{AC}$	$\Delta X_{AE}$	$\Delta Y_{AE}$	$\Delta Z_{AE}$	$\Delta X_{BC}$	$\Delta Y_{BC}$	$\Delta Z_{BC}$
$\Delta X_{AC}$	<b>1</b>	0,0904	0,0876	<b>0,0299</b>	0,0029	0,0027	<b>0,1949</b>	0,0175	0,0160
$\Delta Y_{AC}$	0,0904	<b>1</b>	0,0903	0,0029	<b>0,0342</b>	0,0033	0,0166	<b>0,1902</b>	0,0160
$\Delta Z_{AC}$	0,0876	0,0903	<b>1</b>	0,0028	0,0033	<b>0,0333</b>	0,0162	0,0171	<b>0,1901</b>
$\Delta X_{AE}$	<b>0,0299</b>	0,0029	0,0028	<b>1</b>	0,0914	0,0953	<b>0,0720</b>	0,0064	0,0064
$\Delta Y_{AE}$	0,0029	<b>0,0342</b>	0,0033	0,0914	<b>1</b>	0,0942	0,0059	<b>0,0747</b>	0,0071
$\Delta Z_{AE}$	0,0027	0,0033	<b>0,0333</b>	0,0953	0,0942	<b>1</b>	0,0062	0,0074	<b>0,0808</b>
$\Delta X_{BC}$	<b>0,1949</b>	0,0166	0,0162	<b>0,0720</b>	0,0059	0,0062	<b>1</b>	0,0852	0,0849
$\Delta Y_{BC}$	0,0175	<b>0,1902</b>	0,0171	0,0064	<b>0,0747</b>	0,0074	0,0852	<b>1</b>	0,0869
$\Delta Z_{BC}$	0,0160	0,0160	<b>0,1901</b>	0,0064	0,0071	<b>0,0808</b>	0,0849	0,0869	<b>1</b>

Tabela 6.41 – Alguns valores para o MDB –  $\nabla y_i^q$  das linhas-base DE, FA e FC (para  $q = 2$ ), aumentando em 10 vezes as covariâncias.

$\nabla y_i^q$ (cm)	$\Delta X_{FC}$	$\Delta Y_{FC}$	$\Delta Z_{FC}$	$\Delta X_{FE}$	$\Delta Y_{FE}$	$\Delta Z_{FE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta Y_{FD}$	$\Delta Z_{FD}$
$\Delta X_{DE}$	<b>6,4</b>	6,4	6,4	<b>8,2</b>	6,4	6,4	<b>7,4</b>	6,4	6,4
$\Delta Y_{DE}$	6,5	<b>6,5</b>	6,5	6,5	<b>8,0</b>	6,5	6,5	<b>7,4</b>	6,5
$\Delta Z_{DE}$	6,5	6,5	<b>6,5</b>	6,5	6,5	<b>8,2</b>	6,5	6,5	<b>7,3</b>
$\Delta X_{FA}$	<b>3,9</b>	3,9	3,9	<b>3,9</b>	3,9	3,9	<b>3,9</b>	3,9	3,9
$\Delta Y_{FA}$	3,8	<b>3,8</b>	3,8	3,8	<b>3,8</b>	3,8	3,8	<b>3,8</b>	3,8
$\Delta Z_{FA}$	4,0	4,0	<b>4,0</b>	4,0	4,0	<b>4,0</b>	4,0	4,0	<b>4,0</b>
$\Delta X_{FC}$	<b>7,8</b>	7,8	7,8	<b>7,8</b>	7,8	7,8	<b>7,9</b>	7,8	7,8
$\Delta Y_{FC}$	7,4	<b>7,4</b>	7,4	7,4	<b>7,4</b>	7,4	7,4	<b>7,6</b>	7,4
$\Delta Z_{FC}$	7,6	7,6	<b>7,5</b>	7,5	7,5	<b>7,6</b>	7,5	7,5	<b>7,7</b>

Tabela 6.42 – Alguns valores para o  $\bar{r}_i^q$  das linhas-base DE, FA e FC (para  $q = 2$ ), aumentando em 10 vezes as covariâncias.

$\bar{r}_i^q$	$\Delta X_{FC}$	$\Delta Y_{FC}$	$\Delta Z_{FC}$	$\Delta X_{FE}$	$\Delta Y_{FE}$	$\Delta Z_{FE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta Y_{FD}$	$\Delta Z_{FD}$
$\Delta X_{DE}$	<b>0,5088</b>	0,5150	0,5150	<b>0,3133</b>	0,5137	0,5134	<b>0,3879</b>	0,5140	0,5142
$\Delta Y_{DE}$	0,5191	<b>0,5121</b>	0,5191	0,5178	<b>0,3385</b>	0,5180	0,5181	<b>0,3932</b>	0,5183
$\Delta Z_{DE}$	0,5202	0,5202	<b>0,5109</b>	0,5185	0,5190	<b>0,3297</b>	0,5195	0,5195	<b>0,4109</b>
$\Delta X_{FA}$	<b>0,8250</b>	0,8283	0,8283	<b>0,8223</b>	0,8282	0,8282	<b>0,8225</b>	0,8282	0,8283
$\Delta Y_{FA}$	0,7759	<b>0,7706</b>	0,7759	0,7759	<b>0,7670</b>	0,7759	0,7759	<b>0,7681</b>	0,7759
$\Delta Z_{FA}$	0,8134	0,8134	<b>0,8091</b>	0,8134	0,8133	<b>0,8049</b>	0,8134	0,8134	<b>0,8076</b>
$\Delta X_{FC}$	<b>0,7280</b>	0,7226	0,7224	<b>0,7219</b>	0,7280	0,7279	<b>0,6957</b>	0,7277	0,7278
$\Delta Y_{FC}$	0,6685	<b>0,6735</b>	0,6681	0,6735	<b>0,6671</b>	0,6735	0,6733	<b>0,6398</b>	0,6733
$\Delta Z_{FC}$	0,7129	0,7125	<b>0,7184</b>	0,7183	0,7183	<b>0,7098</b>	0,7182	0,7181	<b>0,6868</b>

Tabela 6.43 – Alguns valores para o  $r_i^q$  das linhas-base DE, FA e FC (para  $q = 2$ ), aumentando em 10 vezes as covariâncias.

$r_i^q$	$\Delta X_{FC}$	$\Delta Y_{FC}$	$\Delta Z_{FC}$	$\Delta X_{FE}$	$\Delta Y_{FE}$	$\Delta Z_{FE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta Y_{FD}$	$\Delta Z_{FD}$
$\Delta X_{DE}$	<b>0,5000</b>	0,5062	0,5062	<b>0,3079</b>	0,5062	0,5061	<b>0,3811</b>	0,5061	0,5062
$\Delta Y_{DE}$	0,5106	<b>0,5036</b>	0,5106	0,5106	<b>0,3329</b>	0,5107	0,5106	<b>0,3866</b>	0,5106
$\Delta Z_{DE}$	0,5114	0,5114	<b>0,5022</b>	0,5113	0,5115	<b>0,3240</b>	0,5115	0,5115	<b>0,4039</b>
$\Delta X_{FA}$	<b>0,8063</b>	0,8095	0,8095	<b>0,8037</b>	0,8095	0,8095	<b>0,8039</b>	0,8095	0,8095
$\Delta Y_{FA}$	0,7582	<b>0,7529</b>	0,7582	0,7582	<b>0,7494</b>	0,7582	0,7582	<b>0,7505</b>	0,7582
$\Delta Z_{FA}$	0,7946	0,7946	<b>0,7903</b>	0,7946	0,7946	<b>0,7862</b>	0,7946	0,7946	<b>0,7888</b>
$\Delta X_{FC}$	<b>0,7161</b>	0,7159	0,7161	<b>0,7101</b>	0,7161	0,7161	<b>0,6843</b>	0,7161	0,7161
$\Delta Y_{FC}$	0,6617	<b>0,6615</b>	0,6618	0,6615	<b>0,6552</b>	0,6615	0,6615	<b>0,6284</b>	0,6615
$\Delta Z_{FC}$	0,7061	0,7059	<b>0,7060</b>	0,7060	0,7060	<b>0,6975</b>	0,7060	0,7060	<b>0,6750</b>

Analizando e comparando as Tabelas 6.8 e 6.40, nota-se que, aumentando somente as covariâncias das observações em 10 vezes, os coeficientes de correlação múltipla para observações tomadas em eixos cartesianos distintos aumentam cerca de 10 vezes (embora em termos absolutos, ainda permaneçam muito baixos), enquanto para observações de um mesmo eixo cartesiano, estes permanecem praticamente os mesmos.

Entretanto, para o MDB com  $q = 2$  *outliers* simultâneos, tal como para o MDB no caso convencional, analisando e comparando as Tabelas 6.9 e 6.41, nota-se que este diminuiu 1 mm em praticamente todos os casos, ou seja, novamente a pequena alteração nos coeficientes de correlação múltipla não foi significativa nesta medida de confiabilidade, predominando a alteração no MDB para o caso convencional ( $q = 1$  *outlier* por vez, Tabela 6.36).

Quanto aos números de redundância, analisando e comparando as Tabelas 6.11 e 6.43, nota-se que, tal como no caso convencional (Tabelas 6.3 e 6.36), estes aumentam ou diminuem de maneira aparentemente aleatória, mas as diferenças em termos absolutos são muito pequenas (em geral, menor do que 0,1%).

Já para os números de confiabilidade, analisando e comparando as Tabelas 6.10 e 6.42, nota-se que estes aumentaram, e, analisando e comparando as Tabelas 6.10 e 6.11 e as Tabelas 6.42 e 6.43, nota-se que a diferença destes para os números de redundância aumentou de cerca de 0,01% (com a MVC original, Tabela 6.10), para cerca de 1% (com as covariâncias aumentadas em 10 vezes, Tabela 6.42).

Ou seja, assim como no caso convencional, aumentando em 10 vezes somente as covariâncias das observações, a diferença entre os números de redundância e de confiabilidade destas aumenta cerca de 100 vezes no caso generalizado (pois os coeficientes de correlação múltipla, em termos absolutos, aumentaram muito pouco).

Por fim, a última medida de confiabilidade para  $q = 2$  *outliers* simultâneos em que foi verificada a influência de aumentar somente as covariâncias das observações em 10 vezes foi a confiabilidade externa máxima sobre os parâmetros. As Tabelas 6.44 e 6.45 mostram alguns dos resultados obtidos.

Tabela 6.44 – Confiabilidade externa máxima de alguns pares de observações ( $q = 2$  *outliers* simultâneos, aumentando em 10 vezes as covariâncias), sobre os parâmetros  $X_C, X_E, X_D, X_F$  (em mm).

	$\Delta X_{AC} \text{ e } \Delta X_{AE}$	$\Delta X_{AC} \text{ e } \Delta X_{BC}$	$\Delta X_{AC} \text{ e } \Delta X_{BD}$	$\Delta X_{AC} \text{ e } \Delta X_{DC}$	$\Delta X_{AC} \text{ e } \Delta X_{DE}$
$X_C$	11	28	12	29	12
$X_E$	18	4	6	5	17
$X_D$	8	9	14	13	15
$X_F$	3	3	3	1	1

Tabela 6.45 – Confiabilidade externa máxima de alguns pares de observações ( $q = 2$  *outliers* simultâneos, aumentando em 10 vezes as covariâncias), sobre os parâmetros  $X_C, X_E, X_D, X_F$  (em mm).

	$\Delta X_{FA} \text{ e } \Delta X_{FC}$	$\Delta X_{FA} \text{ e } \Delta X_{FE}$	$\Delta X_{FA} \text{ e } \Delta X_{FD}$	$\Delta X_{FA} \text{ e } \Delta X_{FB}$
$X_C$	20	4	10	7
$X_E$	5	28	8	9
$X_D$	6	8	23	9
$X_F$	8	8	8	13

Analizando e comparando as Tabelas 6.12 e 6.44, e as Tabelas 6.13 e 6.45, nota-se que a confiabilidade externa máxima das observações sobre os parâmetros (para  $q = 2$  *outliers* simultâneos) se mantém a mesma utilizando a MVC original das observações (Tabelas 6.12 e 6.13), ou aumentando somente as covariâncias destas em 10 vezes (Tabelas 6.44 e 6.45). Em poucos casos, a influência máxima de alguns pares de observações sobre um parâmetro específico diminuiu em apenas 1mm.

Ou seja, em termos práticos, a confiabilidade externa das observações, considerando múltiplos *outliers*, assim como a confiabilidade externa das observações no caso convencional, não foi alterada aumentando somente as covariâncias das observações em 10 vezes.

Desta forma, embora as medidas de confiabilidade consideradas, tanto no caso convencional (considerando apenas um *outlier* por vez), quanto no caso generalizado (considerando dois ou mais *outliers* simultâneos), dependam da precisão das observações (expressa pela matriz de covariância  $\Sigma_y$  e pela matriz peso  $W = \sigma_0^2 \Sigma_y$ ), os quatro experimentos realizados, alterando a MVC das observações, em geral, não apresentaram grandes mudanças nos valores numéricos destas medidas.

Como conclusões, pode-se afirmar que, multiplicando a MVC das observações por um escalar  $K$ , a confiabilidade interna e a confiabilidade externa destas aumenta (ou diminui) na proporção  $\sqrt{K}$ , embora os números de redundância e de confiabilidade permaneçam os mesmos (tanto no caso convencional quanto no caso generalizado).

Mesmo aplicando operadores não lineares na MVC, como por exemplo, negligenciando as covariâncias das observações, ou aumentando somente estas em 10 vezes, as medidas de confiabilidade não apresentaram grandes diferenças com as obtidas utilizando a MVC original das observações.

Entretanto, pode-se afirmar que, quanto maior a razão de grandeza entre as variâncias e covariâncias das observações, menor é a diferença entre os números de redundância e de confiabilidade, e que, quanto menor a razão de grandeza entre as variâncias e covariâncias, maior é a diferença entre os números de redundância e de confiabilidade, embora em termos relativos, ou seja, o ordenamento das observações em termos de confiabilidade, estas medidas apresentaram a mesma hierarquia.

Além disso, quanto maior o valor das covariâncias das observações, menor é o MDB destas e a sua influência sobre os parâmetros. Porém, é importante ressaltar que a determinação adequada das covariâncias das observações retém a sua importância, pois o valor numérico do vetor dos parâmetros estimados  $\hat{x}$  (ou seja, a solução do ajustamento), se modifica alterando somente as covariâncias das observações (por ser um operador não linear na MVC e, consequentemente na matriz peso  $W$ ).

Também não se deve esquecer que para que o estimador por mínimos quadrados ( $\hat{x}$ ) de  $x$  coincida com a solução de máxima verossimilhança, a matriz peso deve ser definida como o inverso da “verdadeira” MVC das observações, ou seja, não só as variâncias, como também as covariâncias devem estar bem determinadas, caso contrário, os resultados do ajustamento conterão erros cuja fonte não são as observações, mas sim, o modelo estocástico mal determinado.

Como recomendações para trabalhos futuros, sugerem-se estudos mais complexos, como por exemplo, considerar uma rede geodésica cuja MVC não seja apenas bloco diagonal, mas que apresente covariâncias não nulas para diversos pares de observações, ou ainda, uma rede geodésica que apresente observações oriundas de diversos tipos de equipamentos e técnicas de observação, resultando em um modelo estocástico heterogêneo, ou seja, de diferentes precisões (ver, por exemplo, HEKIMOGLU; ERENOGLU, 2007).

Outro estudo interessante a ser realizado é alterar a precisão de somente algumas observações específicas, para verificar como fica a nova hierarquia das observações, em termos de confiabilidade, mantendo a geometria original do problema (a redundância  $r = n - u$  do sistema e a configuração da rede).

Além disso, ressalva-se que, embora o valor numérico dos parâmetros estimados  $\hat{x}$  e algumas medidas de confiabilidade não se alterem multiplicando a MVC das observações por um escalar  $K$ , o resultado do teste global do ajustamento pode ser diferente ao se modificar a MVC (ou seja, a precisão das observações).

Por exemplo, superestimando a precisão das observações, reduzindo, por exemplo, suas variâncias e covariâncias em um fator  $1/K$ , a magnitude dos resíduos ajustados pode não ser mais compatível com esta nova precisão assumida para as observações, e, embora nenhum erro grosseiro possa ser localizado pelo procedimento *data snooping*, o teste global do ajustamento poderá ser um indicador de que o modelo estocástico assumido para as observações está inadequado com a realidade dos dados obtidos em campo.

Ou seja, reforçando Kavouras (1982), o teste global do ajustamento retém a sua importância, pois as medidas de confiabilidade consideradas são relativas a testes para a identificação (localização) de erros nas observações, mas não, por exemplo, no modelo estocástico, enquanto o teste global do ajustamento é um teste para a detecção de erros no modelo (sejam estes nas observações, no modelo estocástico, no modelo funcional e etc.).

Conforme também discutido nesta seção, as medidas de confiabilidade consideradas não dependem apenas da precisão das observações, mas também da geometria do problema (expressa pela matriz *design A*), e, desta forma, a próxima seção apresenta experimentos onde a precisão das observações é mantida a mesma (ou seja, é utilizada a MVC original em todos os casos), porém, a geometria/configuração da rede geodésica é modificada.

## **6.5 Influência da Geometria/Configuração da Rede sobre as Medidas de Confiabilidade**

Visando verificar como a questão da geometria/configuração da rede em estudo pode influenciar nas medidas de confiabilidade consideradas, sete experimentos foram realizados:

- 1) Exclusão das linhas-base “repetidas” *AF* e *BF*;

- 2) Exclusão de  $AF$ ,  $BF$  e mais uma linha-base ( $DC$ );
- 3) Exclusão de  $AF$ ,  $BF$  e mais três linhas-base ( $DC, FE, FC$ );
- 4) Exclusão de  $AF$ ,  $BF$  e mais cinco linhas-base ( $DC, FE, FC, DE, FD$ );
- 5) Exclusão somente das linhas-base  $AF$  e  $BF$ , mas injuncionando o vértice  $F$  e considerando os vértices  $A$  e  $B$  como pontos desconhecidos;
- 6) Exclusão de todas as linhas-base envolvendo o vértice  $F$ ;
- 7) Exclusão de  $AF$ ,  $BF$  e também das linhas-base  $AE$ ,  $DE$ ,  $BD$ ,  $BC$  e  $AC$ , tornando a configuração da rede “praticamente radial”;

Embora todos os experimentos apresentados acima envolvam alterações no número de observações e/ou parâmetros e/ou injunções, os quatro primeiros são relativos principalmente à influência do número de observações nas medidas de confiabilidade (ou seja, da redundância do sistema), o quinto é relativo principalmente a localização dos pontos de controle nas medidas de confiabilidade, e os dois últimos são relativos principalmente a configuração da rede sobre as medidas de confiabilidade.

Desta forma, para o primeiro experimento (exclusão apenas das linhas-base “repetidas”  $AF$  e  $BF$ , mantendo as linhas-base  $FA$  e  $FB$ ), a Tabela 6.46 apresenta os números de redundância ( $r_i$ ), os números de absorção ( $u_i$ ), os números de confiabilidade ( $\bar{r}_i$ ) e a confiabilidade interna – MDB das observações (para o caso convencional).

Tabela 6.46 – Medidas de confiabilidade das observações, sem as linhas-base AF e BF.

<b>Observação</b>	<b><math>r_i</math></b>	<b><math>u_i</math></b>	<b><math>\bar{r}_i</math></b>	<b><math>MDB - \nabla y_i (\text{m})</math></b>
$\Delta X_{AC}$	0,9217	0,0783	0,9218	0,135
$\Delta Y_{AC}$	0,9165	0,0835	0,9167	0,132
$\Delta Z_{AC}$	0,9245	0,0755	0,9247	0,135
$\Delta X_{AE}$	0,7182	0,2818	0,7183	0,072
$\Delta Y_{AE}$	0,6863	0,3137	0,6864	0,069
$\Delta Z_{AE}$	0,7094	0,2906	0,7095	0,069
$\Delta X_{BC}$	0,6641	0,3359	0,6642	0,077
$\Delta Y_{BC}$	0,6925	0,3075	0,6926	0,079
$\Delta Z_{BC}$	0,6708	0,3292	0,6709	0,076
$\Delta X_{BD}$	0,7972	0,2028	0,7974	0,076
$\Delta Y_{BD}$	0,7935	0,2065	0,7937	0,077
$\Delta Z_{BD}$	0,7865	0,2135	0,7866	0,076
$\Delta X_{DC}$	0,4750	0,5250	0,4751	0,072
$\Delta Y_{DC}$	0,5051	0,4949	0,5052	0,074
$\Delta Z_{DC}$	0,4447	0,5553	0,4448	0,071
$\Delta X_{DE}$	0,5060	0,4940	0,5061	0,064
$\Delta Y_{DE}$	0,5104	0,4896	0,5105	0,065
$\Delta Z_{DE}$	0,5111	0,4889	0,5112	0,065
$\Delta X_{FA}$	0,6383	0,3617	0,6384	0,045
$\Delta Y_{FA}$	0,5932	0,4068	0,5933	0,044
$\Delta Z_{FA}$	0,6572	0,3428	0,6573	0,044
$\Delta X_{FC}$	0,7049	0,2951	0,7050	0,079
$\Delta Y_{FC}$	0,6521	0,3479	0,6522	0,075
$\Delta Z_{FC}$	0,6960	0,3040	0,6962	0,077
$\Delta X_{FE}$	0,4646	0,5354	0,4647	0,059
$\Delta Y_{FE}$	0,4838	0,5162	0,4839	0,059
$\Delta Z_{FE}$	0,4443	0,5557	0,4444	0,058
$\Delta X_{FD}$	0,5170	0,4830	0,5171	0,056
$\Delta Y_{FD}$	0,5260	0,4740	0,5261	0,057
$\Delta Z_{FD}$	0,5872	0,4128	0,5872	0,059
$\Delta X_{FB}$	0,5930	0,4070	0,5931	0,044
$\Delta Y_{FB}$	0,6407	0,3593	0,6408	0,045
$\Delta Z_{FB}$	0,5683	0,4317	0,5684	0,043

Analizando e comparando as Tabelas 6.3 e 6.46, nota-se que excluindo as linhas-base *AF* e *BF*, os números de redundância das demais observações mudaram muito pouco na maior parte dos casos, sempre diminuindo (pois a redundância total do sistema diminuiu em  $2 \times 3 = 6$  graus de liberdade), e, consequentemente, os números de absorção das observações aumentaram (na mesma proporção). Conforme esperado, as diferenças mais significativas ocorreram para as observações das linhas-base *FA* e *FB* (com reduções nos números de redundância destas entre 15% e 20%).

De maneira análoga, os números de confiabilidade também diminuíram muito pouco na maior parte dos casos (a exceção das linhas-base *FA* e *FB*), e analisando a Tabela 6.46, nota-se que a diferença entre estes e os números de redundância das observações permaneceu praticamente nula (entre 0,1% e 0,2%), tal como para a rede original com as linhas-base *AF* e *BF* (ver a Tabela 6.3).

Ainda analisando e comparando as Tabelas 6.3 e 6.46, nota-se que o MDB das observações, retirando as linhas-base *AF* e *BF*, também permaneceu praticamente o mesmo (com aumento máximo de apenas 2 mm), a exceção das linhas-base *FA* e *FB* (onde os aumentos se situaram entre 4 mm e 7 mm).

Ou seja, para estas medidas de confiabilidade (caso convencional, apenas um *outlier* por vez), as diferenças em se retirar as observações das linhas-base *AF* e *BF* só foram de fato significativas para as observações das linhas-base *FA* e *FB*, praticamente não afetando as medidas de confiabilidade das demais.

Entretanto, para a confiabilidade externa das observações, algumas diferenças um pouco mais interessantes ocorrem, conforme ilustram as Tabelas 6.47, 6.48 e 6.49.

Tabela 6.47 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, sem AF e BF (em mm).

	$\Delta X_{AC}$	$\Delta Y_{AC}$	$\Delta Z_{AC}$	$\Delta X_{AE}$	$\Delta Y_{AE}$	$\Delta Z_{AE}$	$\Delta X_{BC}$	$\Delta Y_{BC}$	$\Delta Z_{BC}$	$\Delta X_{BD}$	$\Delta Y_{BD}$	$\Delta Z_{BD}$
$X_C$	<b>11</b>	0	0	<b>5</b>	0	0	<b>26</b>	0	0	<b>8</b>	0	0
$Y_C$	0	<b>11</b>	0	0	<b>6</b>	0	0	<b>24</b>	0	0	<b>8</b>	0
$Z_C$	0	0	<b>10</b>	0	0	<b>6</b>	0	0	<b>25</b>	0	0	<b>8</b>
$X_E$	<b>2</b>	0	0	<b>20</b>	0	0	<b>5</b>	0	0	<b>8</b>	0	0
$Y_E$	0	<b>2</b>	0	0	<b>22</b>	0	0	<b>5</b>	0	0	<b>8</b>	0
$Z_E$	0	0	<b>2</b>	0	0	<b>20</b>	0	0	<b>5</b>	0	0	<b>7</b>
$X_D$	<b>4</b>	0	0	<b>9</b>	0	0	<b>9</b>	0	0	<b>15</b>	0	0
$Y_D$	0	<b>4</b>	0	0	<b>10</b>	0	0	<b>8</b>	0	0	<b>16</b>	0
$Z_D$	0	0	<b>4</b>	0	0	<b>9</b>	0	0	<b>10</b>	0	0	<b>16</b>
$X_F$	<b>2</b>	0	0	<b>6</b>	0	0	<b>5</b>	0	0	<b>5</b>	0	0
$Y_F$	0	<b>2</b>	0	0	<b>6</b>	0	0	<b>5</b>	0	0	<b>5</b>	0
$Z_F$	0	0	<b>2</b>	0	0	<b>6</b>	0	0	<b>5</b>	0	0	<b>5</b>

Tabela 6.48 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, sem AF e BF (em mm).

	$\Delta X_{DC}$	$\Delta Y_{DC}$	$\Delta Z_{DC}$	$\Delta X_{DE}$	$\Delta Y_{DE}$	$\Delta Z_{DE}$	$\Delta X_{FA}$	$\Delta Y_{FA}$	$\Delta Z_{FA}$	$\Delta X_{FC}$	$\Delta Y_{FC}$	$\Delta Z_{FC}$
$X_C$	<b>25</b>	0	0	<b>-6</b>	0	0	<b>-9</b>	0	0	<b>19</b>	0	0
$Y_C$	0	<b>23</b>	0	0	<b>-6</b>	0	0	<b>-10</b>	0	0	<b>22</b>	0
$Z_C$	0	0	<b>24</b>	0	0	<b>-7</b>	0	0	<b>-8</b>	0	0	<b>19</b>
$X_E$	<b>-6</b>	0	0	<b>18</b>	0	0	<b>-11</b>	0	0	<b>-1</b>	0	0
$Y_E$	0	<b>-5</b>	0	0	<b>17</b>	0	0	<b>-12</b>	0	0	<b>-1</b>	0
$Z_E$	0	0	<b>-6</b>	0	0	<b>16</b>	0	0	<b>-10</b>	0	0	<b>-1</b>
$X_D$	<b>-13</b>	0	0	<b>-14</b>	0	0	<b>-11</b>	0	0	<b>3</b>	0	0
$Y_D$	0	<b>-13</b>	0	0	<b>-15</b>	0	0	<b>-12</b>	0	0	<b>3</b>	0
$Z_D$	0	0	<b>-15</b>	0	0	<b>-16</b>	0	0	<b>-10</b>	0	0	<b>4</b>
$X_F$	<b>-2</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>-16</b>	0	0	<b>-4</b>	0	0
$Y_F$	0	<b>-1</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>-18</b>	0	0	<b>-4</b>	0
$Z_F$	0	0	<b>-2</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>-15</b>	0	0	<b>-4</b>

Tabela 6.49 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, sem AF e BF (em mm).

	$\Delta X_{FE}$	$\Delta Y_{FE}$	$\Delta Z_{FE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta Y_{FD}$	$\Delta Z_{FD}$	$\Delta X_{FB}$	$\Delta Y_{FB}$	$\Delta Z_{FB}$
$X_C$	<b>1</b>	0	0	<b>8</b>	0	0	<b>-9</b>	0	0
$Y_C$	0	<b>0</b>	0	0	<b>7</b>	0	0	<b>-9</b>	0
$Z_C$	0	0	<b>1</b>	0	0	<b>8</b>	0	0	<b>-10</b>
$X_E$	<b>26</b>	0	0	<b>5</b>	0	0	<b>-12</b>	0	0
$Y_E$	0	<b>25</b>	0	0	<b>5</b>	0	0	<b>-11</b>	0
$Z_E$	0	0	<b>27</b>	0	0	<b>4</b>	0	0	<b>-12</b>
$X_D$	<b>6</b>	0	0	<b>22</b>	0	0	<b>-12</b>	0	0
$Y_D$	0	<b>5</b>	0	0	<b>22</b>	0	0	<b>-11</b>	0
$Z_D$	0	0	<b>6</b>	0	0	<b>20</b>	0	0	<b>-12</b>
$X_F$	<b>-5</b>	0	0	<b>-5</b>	0	0	<b>-18</b>	0	0
$Y_F$	0	<b>-5</b>	0	0	<b>-5</b>	0	0	<b>-16</b>	0
$Z_F$	0	0	<b>-6</b>	0	0	<b>-5</b>	0	0	<b>-18</b>

Analisando e comparando as Tabelas 6.4, 6.5 e 6.6, e as Tabelas 6.47, 6.48 e 6.49, nota-se que na maior parte dos casos, a influência do MDB das observações sobre os parâmetros não se modificou muito retirando as linhas-base *AF* e *BF*, permanecendo o mesmo ou aumentando em no máximo 3 mm (inclusive, em alguns casos, diminuindo em até 2 mm). Os aumentos só foram de fato significativos para as observações das linhas-base *FA* e *FB*, onde a influência sobre todos os parâmetros aumentou entre 4 mm e 10 mm (ou em termos práticos, duplicou sobre todos os parâmetros).

Entretanto, um fato curioso é que para as demais linhas-base envolvendo o vértice *F* (ou seja, *FC*, *FE* e *FD*), a confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros melhorou sensivelmente (diminuindo entre 1 mm e 2 mm), aumentando entre 1 e 3 mm apenas para as coordenadas relativas ao vértice *F*.

Provavelmente, isto se deve ao fato que, retirando observações envolvendo o vértice  $F$  (no caso, as linhas-base  $AF$  e  $BF$ ), diminui-se a propagação de possíveis erros nas observações das demais linhas-base que também envolvam este vértice (pois houve uma alteração na geometria da rede, alterando a configuração da matriz *design A*).

Ou seja, embora, em termos práticos, a confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros também só tenha apresentado diferenças significativas para as linhas-base  $FA$  e  $FB$ , para esta medida de confiabilidade convencional, ao contrário das demais, ocorreram casos em que a exclusão das linhas-base  $AF$  e  $BF$  melhorou a confiabilidade das observações restantes, devido a alteração na configuração da matriz *design A* (resultando em menor correlação entre algumas observações, diminuindo a propagação de possíveis erros não detectáveis).

Além disso, para as observações das linhas-base  $FA$  e  $FB$ , a confiabilidade externa piorou sobre todos os parâmetros (ao invés de melhorar em alguns), porque o MDB destas aumentou mais do que o MDB das demais observações (ver a Tabela 6.46), e a confiabilidade externa depende não apenas da matriz *design A*, como também da matriz peso (onde no caso, foram mantidas as variâncias e covariâncias originais), e do MDB da observação em questão (ver a expressão 4.36).

Outro fato interessante é que, para as observações das linhas-base  $FA$  e  $FB$ , retirando as linhas-base  $AF$  e  $BF$ , o aumento máximo da influência do MDB destas sobre os parâmetros (até 10 mm), foi maior do que o aumento máximo somente do MDB destas (até 7 mm), pois combinou este aumento no MDB das observações com a alteração na configuração da matriz *design A* (ou seja, a confiabilidade externa das observações se mostrou mais suscetível a alterações na geometria da rede do que a confiabilidade interna destas).

Verificada a influência em retirar as linhas-base  $AF$  e  $BF$  da rede sobre as medidas de confiabilidade convencionais (considerando apenas um *outlier* por vez), também foi verificada esta influência sobre as medidas de confiabilidade generalizadas para múltiplos *outliers* (no caso, para dois *outliers* simultâneos).

Desta forma, após retirar as linhas-base  $AF$  e  $BF$ , foram recalculados os coeficientes de correlação múltipla, a confiabilidade interna ( $\text{MDB} - \nabla y_i^q$ ), o número de confiabilidade  $\bar{r}_i^q$  e o número de redundância  $r_i^q$  das observações (para  $q = 2$  *outliers* simultâneos), e alguns destes são mostrados nas Tabelas a seguir (tanto os valores originais, obtidos mantendo as linhas-base  $AF$  e  $BF$ , quanto os valores obtidos com este experimento, retirando as linhas-base  $AF$  e  $BF$ ).

A única ressalva feita é que, como os experimentos desta seção tratam somente da alteração da geometria da rede (mantendo as variâncias e covariâncias originais), daqui para frente, os resultados para os números de confiabilidade serão omitidos, por estes serem, conforme já visto, praticamente iguais aos números de redundância (diferença máxima de 0,2%), quando se utilizam as variâncias e covariâncias originais das observações (ver as Tabelas 6.3, 6.10, 6.11 e 6.46).

Tabela 6.50 – Coeficientes de correlação múltipla para algumas observações (com AF e BF).

$\rho_{ij}^q$	$\Delta X_{FE}$	$\Delta Y_{FE}$	$\Delta Z_{FE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta Y_{FD}$	$\Delta Z_{FD}$	$\Delta X_{FB}$	$\Delta Y_{FB}$	$\Delta Z_{FB}$
$\Delta X_{DE}$	<b>0,6262</b>	0,0057	0,0062	<b>0,4971</b>	0,0049	0,0045	<b>0,0027</b>	0,0000	0,0001
$\Delta Y_{DE}$	0,0057	<b>0,5907</b>	0,0054	0,0048	<b>0,4929</b>	0,0044	0,0000	<b>0,0028</b>	0,0000
$\Delta Z_{DE}$	0,0063	0,0055	<b>0,6058</b>	0,0043	0,0042	<b>0,4590</b>	0,0001	0,0000	<b>0,0106</b>
$\Delta X_{FA}$	<b>0,0845</b>	0,0011	0,0011	<b>0,0835</b>	0,0011	0,0008	<b>0,2534</b>	0,0029	0,0032
$\Delta Y_{FA}$	0,0010	<b>0,1073</b>	0,0012	0,0010	<b>0,1002</b>	0,0010	0,0026	<b>0,2926</b>	0,0031
$\Delta Z_{FA}$	0,0011	0,0013	<b>0,1022</b>	0,0008	0,0010	<b>0,0851</b>	0,0033	0,0034	<b>0,2995</b>
$\Delta X_{FC}$	<b>0,0915</b>	0,0009	0,0011	<b>0,2109</b>	0,0022	0,0019	<b>0,0682</b>	0,0006	0,0007
$\Delta Y_{FC}$	0,0008	<b>0,0976</b>	0,0010	0,0020	<b>0,2238</b>	0,0021	0,0006	<b>0,0767</b>	0,0007
$\Delta Z_{FC}$	0,0011	0,0010	<b>0,1093</b>	0,0017	0,0020	<b>0,2099</b>	0,0008	0,0008	<b>0,0852</b>

Tabela 6.51 – Coeficientes de correlação múltipla para algumas observações (sem AF e BF).

$\rho_{ij}^q$	$\Delta X_{FE}$	$\Delta Y_{FE}$	$\Delta Z_{FE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta Y_{FD}$	$\Delta Z_{FD}$	$\Delta X_{FB}$	$\Delta Y_{FB}$	$\Delta Z_{FB}$
$\Delta X_{DE}$	<b>0,6341</b>	0,0058	0,0062	<b>0,5047</b>	0,0049	0,0046	<b>0,0059</b>	0,0001	0,0003
$\Delta Y_{DE}$	0,0058	<b>0,5989</b>	0,0054	0,0049	<b>0,4977</b>	0,0045	0,0001	<b>0,0052</b>	0,0000
$\Delta Z_{DE}$	0,0064	0,0056	<b>0,6118</b>	0,0044	0,0043	<b>0,4655</b>	0,0003	0,0000	<b>0,0203</b>
$\Delta X_{FA}$	<b>0,1833</b>	0,0021	0,0022	<b>0,1809</b>	0,0021	0,0017	<b>0,6237</b>	0,0065	0,0071
$\Delta Y_{FA}$	0,0021	<b>0,2077</b>	0,0022	0,0021	<b>0,1936</b>	0,0019	0,0062	<b>0,6202</b>	0,0063
$\Delta Z_{FA}$	0,0022	0,0023	<b>0,1905</b>	0,0016	0,0019	<b>0,1581</b>	0,0073	0,0067	<b>0,6295</b>
$\Delta X_{FC}$	<b>0,1144</b>	0,0011	0,0013	<b>0,2361</b>	0,0024	0,0021	<b>0,1502</b>	0,0013	0,0015
$\Delta Y_{FC}$	0,0010	<b>0,1194</b>	0,0012	0,0023	<b>0,2465</b>	0,0023	0,0012	<b>0,1448</b>	0,0013
$\Delta Z_{FC}$	0,0013	0,0012	<b>0,1315</b>	0,0019	0,0022	<b>0,2299</b>	0,0015	0,0014	<b>0,1639</b>

Tabela 6.52 – Alguns valores para o MDB das linhas-base DE, FA e FC (com AF e BF).

$\nabla y_i^q$ (cm)	$\Delta X_{FE}$	$\Delta Y_{FE}$	$\Delta Z_{FE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta Y_{FD}$	$\Delta Z_{FD}$	$\Delta X_{FB}$	$\Delta Y_{FB}$	$\Delta Z_{FB}$
$\Delta X_{DE}$	<b>8,3</b>	6,4	6,4	<b>7,4</b>	6,4	6,4	<b>6,4</b>	6,4	6,4
$\Delta Y_{DE}$	6,5	<b>8,1</b>	6,5	6,5	<b>7,5</b>	6,5	6,5	<b>6,5</b>	6,5
$\Delta Z_{DE}$	6,5	6,5	<b>8,2</b>	6,5	6,5	<b>7,4</b>	6,5	6,5	<b>6,5</b>
$\Delta X_{FA}$	<b>4,0</b>	4,0	4,0	<b>4,0</b>	4,0	4,0	<b>4,1</b>	4,0	4,0
$\Delta Y_{FA}$	3,9	<b>3,9</b>	3,9	3,9	<b>3,9</b>	3,9	3,9	<b>4,0</b>	3,9
$\Delta Z_{FA}$	4,0	4,0	<b>4,1</b>	4,0	4,0	<b>4,1</b>	4,0	4,0	<b>4,2</b>
$\Delta X_{FC}$	<b>7,9</b>	7,8	7,8	<b>8,0</b>	7,8	7,8	<b>7,8</b>	7,8	7,8
$\Delta Y_{FC}$	7,5	<b>7,5</b>	7,5	7,5	<b>7,7</b>	7,5	7,5	<b>7,5</b>	7,5
$\Delta Z_{FC}$	7,6	7,6	<b>7,7</b>	7,6	7,6	<b>7,8</b>	7,6	7,6	<b>7,6</b>

Tabela 6.53 – Alguns valores para o MDB das linhas-base DE, FA e FC (sem AF e BF).

$\nabla y_i^q$ (cm)	$\Delta X_{FE}$	$\Delta Y_{FE}$	$\Delta Z_{FE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta Y_{FD}$	$\Delta Z_{FD}$	$\Delta X_{FB}$	$\Delta Y_{FB}$	$\Delta Z_{FB}$
$\Delta X_{DE}$	<b>8,3</b>	6,4	6,4	<b>7,5</b>	6,4	6,4	<b>6,4</b>	6,4	6,4
$\Delta Y_{DE}$	6,5	<b>8,2</b>	6,5	6,5	<b>7,5</b>	6,5	6,5	<b>6,5</b>	6,5
$\Delta Z_{DE}$	6,5	6,5	<b>8,3</b>	6,5	6,5	<b>7,4</b>	6,5	6,5	<b>6,5</b>
$\Delta X_{FA}$	<b>4,5</b>	4,5	4,5	<b>4,5</b>	4,5	4,5	<b>5,7</b>	4,5	4,5
$\Delta Y_{FA}$	4,4	<b>4,5</b>	4,4	4,4	<b>4,4</b>	4,4	4,4	<b>5,6</b>	4,4
$\Delta Z_{FA}$	4,4	4,4	<b>4,5</b>	4,4	4,4	<b>4,5</b>	4,4	4,4	<b>5,7</b>
$\Delta X_{FC}$	<b>7,9</b>	7,9	7,9	<b>8,1</b>	7,9	7,9	<b>8,0</b>	7,9	7,9
$\Delta Y_{FC}$	7,5	<b>7,6</b>	7,5	7,5	<b>7,8</b>	7,5	7,5	<b>7,6</b>	7,5
$\Delta Z_{FC}$	7,7	7,7	<b>7,7</b>	7,7	7,7	<b>7,9</b>	7,7	7,7	<b>7,8</b>

Tabela 6.54 – Alguns valores para o  $r_i^q$  das linhas-base DE, FA e FC (com AF e BF).

$r_i^q$	$\Delta X_{FE}$	$\Delta Y_{FE}$	$\Delta Z_{FE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta Y_{FD}$	$\Delta Z_{FD}$	$\Delta X_{FB}$	$\Delta Y_{FB}$	$\Delta Z_{FB}$
$\Delta X_{DE}$	<b>0,3076</b>	0,5060	0,5060	<b>0,3810</b>	0,5060	0,5060	<b>0,5060</b>	0,5060	0,5060
$\Delta Y_{DE}$	0,5104	<b>0,3323</b>	0,5104	0,5104	<b>0,3864</b>	0,5104	0,5104	<b>0,5104</b>	0,5104
$\Delta Z_{DE}$	0,5112	0,5112	<b>0,3236</b>	0,5112	0,5112	<b>0,4035</b>	0,5112	0,5112	<b>0,5112</b>
$\Delta X_{FA}$	<b>0,8037</b>	0,8095	0,8095	<b>0,8039</b>	0,8095	0,8095	<b>0,7576</b>	0,8095	0,8095
$\Delta Y_{FA}$	0,7592	<b>0,7505</b>	0,7592	0,7592	<b>0,7516</b>	0,7592	0,7592	<b>0,6942</b>	0,7592
$\Delta Z_{FA}$	0,7950	0,7950	<b>0,7867</b>	0,7950	0,7950	<b>0,7892</b>	0,7950	0,7950	<b>0,7237</b>
$\Delta X_{FC}$	<b>0,7099</b>	0,7159	0,7159	<b>0,6840</b>	0,7159	0,7159	<b>0,7126</b>	0,7159	0,7159
$\Delta Y_{FC}$	0,6620	<b>0,6557</b>	0,6620	0,6620	<b>0,6288</b>	0,6620	0,6620	<b>0,6581</b>	0,6620
$\Delta Z_{FC}$	0,7059	0,7059	<b>0,6975</b>	0,7059	0,7059	<b>0,6749</b>	0,7059	0,7059	<b>0,7008</b>

Tabela 6.55 – Alguns valores para o  $r_i^q$  das linhas-base DE, FA e FC (sem AF e BF).

$r_i^q$	$\Delta X_{FE}$	$\Delta Y_{FE}$	$\Delta Z_{FE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta Y_{FD}$	$\Delta Z_{FD}$	$\Delta X_{FB}$	$\Delta Y_{FB}$	$\Delta Z_{FB}$
$\Delta X_{DE}$	<b>0,3026</b>	0,5060	0,5060	<b>0,3771</b>	0,5060	0,5060	<b>0,5060</b>	0,5060	0,5060
$\Delta Y_{DE}$	0,5104	<b>0,3273</b>	0,5104	0,5104	<b>0,3840</b>	0,5104	0,5104	<b>0,5104</b>	0,5104
$\Delta Z_{DE}$	0,5111	0,5111	<b>0,3198</b>	0,5111	0,5111	<b>0,4004</b>	0,5111	0,5111	<b>0,5109</b>
$\Delta X_{FA}$	<b>0,6168</b>	0,6383	0,6383	<b>0,6174</b>	0,6383	0,6383	<b>0,3900</b>	0,6383	0,6383
$\Delta Y_{FA}$	0,5932	<b>0,5676</b>	0,5932	0,5932	<b>0,5709</b>	0,5932	0,5932	<b>0,3650</b>	0,5932
$\Delta Z_{FA}$	0,6572	0,6572	<b>0,6333</b>	0,6572	0,6572	<b>0,6408</b>	0,6572	0,6572	<b>0,3967</b>
$\Delta X_{FC}$	<b>0,6957</b>	0,7049	0,7049	<b>0,6656</b>	0,7049	0,7049	<b>0,6890</b>	0,7049	0,7049
$\Delta Y_{FC}$	0,6521	<b>0,6428</b>	0,6521	0,6521	<b>0,6124</b>	0,6521	0,6521	<b>0,6384</b>	0,6521
$\Delta Z_{FC}$	0,6960	0,6960	<b>0,6840</b>	0,6960	0,6960	<b>0,6593</b>	0,6960	0,6960	<b>0,6774</b>

Analizando e comparando as Tabelas 6.50 e 6.51, nota-se que os coeficientes de correlação múltipla entre as observações, em geral, aumentaram, retirando as linhas-base *AF* e *BF* (porém, muito pouco, menos de 15% para a maior parte dos casos). Isto era esperado, pois, a redundância total do sistema diminuiu em seis graus de liberdade, e, além disso, naturalmente o maior aumento para os coeficientes de correlação múltipla (cerca de 33%) foi relativo aos pares de observações das linhas-base *FA* e *FB* relativos ao mesmo eixo cartesiano (como por exemplo,  $\Delta X_{FA}$  e  $\Delta X_{FB}$ ).

Quanto ao menor erro detectável (para  $q = 2$  *outliers* simultâneos), analisando e comparando as Tabelas 6.52 e 6.53, nota-se que a diferença é muito pequena ou até mesmo nula em praticamente todos os casos (no máximo 3 mm maior retirando as linhas-base *AF* e *BF*), a exceção das linhas-base *FA* e *FB*.

Para as componentes da linha-base *FA* (ver as Tabelas 6.53 e 6.53), o aumento no  $\nabla y_i^q$  foi de no mínimo 4 mm, e de no máximo 16 mm (considerando  $q = 2$  para a observação de mesmo eixo cartesiano da linha-base *FB*).

Para as componentes da linha-base *FB* (valores não apresentados nas Tabelas 6.52 e 6.53), os resultados obtidos são semelhantes, com um aumento no  $\nabla y_i^q$  de no mínimo 4 mm, e de no máximo 17 mm (considerando  $q = 2$  para a observação de mesmo eixo cartesiano da linha-base *FA*).

Ressalva-se que não é possível demonstrar todos os resultados em forma de tabelas por se tratar de um experimento com  $n = 33$  observações (ou seja, envolver uma tabela completa de resultados com  $33 \times 33 = 1089$  valores para qualquer medida de confiabilidade generalizada com  $q = 2$ ).

Por fim, analisando e comparando as Tabelas 6.54 e 6.55, nota-se que os números de redundância das observações, em geral, diminuíram retirando as linhas-base *AF* e *BF* (mas, muito pouco, menos de 5% para a maior parte dos casos), a exceção das linhas-base *FA* e *FB*.

Para as componentes da linha-base *FA* (ver as Tabelas 6.54 e 6.55), a redução no  $r_i^q$  foi de no mínimo 14%, e de no máximo 37% (considerando  $q = 2$  para a observação de mesmo eixo cartesiano da linha-base *FB*).

Para as componentes da linha-base *FB* (valores não apresentados nas Tabelas 6.54 e 6.55), os resultados obtidos são semelhantes, com uma redução no  $r_i^q$  de no mínimo 15%, e de no máximo 37% (considerando  $q = 2$  para a observação de mesmo eixo cartesiano da linha-base *FA*).

Embora tanto no caso convencional ( $q = 1$ ) quanto no caso generalizado ( $q = 2$ ), as diferenças nas medidas de confiabilidade, retirando as linhas-base *AF* e *BF*, só foram de fato significativas para as linhas-base *FA* e *FB*, no caso generalizado, estas diferenças foram mais expressivas (de até +17 mm no  $\nabla y_i^q$  e de até -37% no  $r_i^q$ ), enquanto no caso convencional, foram de no máximo +7 mm em  $\nabla y_i$  e de no máximo -20% em  $r_i$ .

Finalmente, a última medida de confiabilidade para  $q = 2$  *outliers* simultâneos em que foi verificada a influência de retirar as linhas-base *AF* e *BF* foi a confiabilidade externa máxima sobre os parâmetros. As Tabelas 6.56 e 6.57 mostram alguns dos resultados obtidos.

Tabela 6.56 – Confiabilidade externa máxima de alguns pares de observações ( $q = 2$  outliers simultâneos, sem AF e BF), sobre os parâmetros  $X_C$ ,  $X_E$ ,  $X_D$ ,  $X_F$  (em mm).

	$\Delta X_{AC} \text{ e } \Delta X_{AE}$	$\Delta X_{AC} \text{ e } \Delta X_{BC}$	$\Delta X_{AC} \text{ e } \Delta X_{BD}$	$\Delta X_{AC} \text{ e } \Delta X_{DC}$	$\Delta X_{AC} \text{ e } \Delta X_{DE}$
$X_C$	12	31	14	29	12
$X_E$	20	6	8	6	18
$X_D$	10	11	16	13	15
$X_F$	7	6	6	3	2

Tabela 6.57 – Confiabilidade externa máxima de alguns pares de observações ( $q = 2$  outliers simultâneos, sem AF e BF), sobre os parâmetros  $X_C$ ,  $X_E$ ,  $X_D$ ,  $X_F$  (em mm).

	$\Delta X_{FA} \text{ e } \Delta X_{FC}$	$\Delta X_{FA} \text{ e } \Delta X_{FE}$	$\Delta X_{FA} \text{ e } \Delta X_{FD}$	$\Delta X_{FA} \text{ e } \Delta X_{FB}$
$X_C$	20	9	11	21
$X_E$	11	27	11	27
$X_D$	11	12	23	27
$X_F$	17	18	18	39

Analizando e comparando as Tabelas 6.12 e 6.56, nota-se que, retirando as linhas-base  $AF$  e  $BF$ , a influência máxima dos pares de observações sobre os parâmetros aumenta em no máximo  $2\text{ mm}$ , a exceção sobre o vértice  $F$ , onde a influência máxima aumenta em até  $4\text{ mm}$  (ou seja, duplicando, no mínimo, para todos os cinco pares de observações considerados).

Este resultado é interessante, pois a influência máxima sobre o vértice  $F$  foi relativamente aumentada retirando as linhas-base  $AF$  e  $BF$ , mesmo que nenhuma das observações consideradas nas Tabelas 6.12 e 6.56 envolva o vértice  $F$ .

Já analisando e comparando as Tabelas 6.13 e 6.57, nota-se que, retirando as linhas-base  $AF$  e  $BF$ , a influência máxima dos pares de observações considerados aumenta em praticamente todos os casos, mas com dois resultantes muito interessantes: Primeiro, a influência máxima de todos os pares de observações considerados sobre o vértice  $F$ , no mínimo, duplica, e, segundo, a influência máxima do par de observações  $\Delta X_{FA}$  e  $\Delta X_{FB}$  sobre todos os parâmetros considerados, triplica. Ou seja, novamente, a influência máxima de possíveis erros nas observações sobre as coordenadas do vértice  $F$  foi relativamente aumentada retirando as linhas-base  $AF$  e  $BF$ .

Comparando estes resultados com os obtidos pela confiabilidade externa no caso convencional (Tabelas 6.47, 6.48 e 6.49), nota-se que a confiabilidade externa no caso generalizado foi bem mais afetada retirando as linhas-base  $AF$  e  $BF$ , pois, no caso convencional, a influência das observações sobre os parâmetros aumentou pouco em praticamente todos os casos (quando não diminuiu ou permaneceu a mesma), e apenas para as linhas-base  $FA$  e  $FB$  a influência sobre os parâmetros duplicou. Já no caso generalizado aqui apresentado (para  $q = 2$ ), a influência de todos os pares de observações sobre o vértice  $F$

duplicou, e para o par de observações  $\Delta X_{FA}$  e  $\Delta X_{FB}$ , a influência triplicou para todos os parâmetros considerados.

Desta forma, um estudo interessante a ser feito é verificar se esta relação de proporção entre a influência de possíveis erros nas observações sobre os parâmetros se mantém, adicionando mais linhas-base “repetidas” ao conjunto de observações (como por exemplo, verificar como fica a confiabilidade externa, tanto no caso convencional quanto no caso generalizado, adicionando mais uma, duas ou três linhas-base “repetidas” aos vértices  $A$  e  $F$  e também aos vértices  $B$  e  $F$ ).

De maneira resumida, pode-se dizer que, retirando as linhas-base  $AF$  e  $BF$ , somente as medidas de confiabilidade das observações  $FA$  e  $FB$  foram realmente afetadas, embora a confiabilidade externa, principalmente no caso generalizado, tenha sido relativamente mais afetada do que as demais medidas de confiabilidade consideradas.

Portanto, no planejamento de uma rede geodésica, recomenda-se, quando possível, “repetir” observações, embora o mais adequado seja utilizar o tempo e os equipamentos disponíveis para tomar observações em diferentes vértices, principalmente em regiões “menos redundantes” da rede (mais carentes de observações), pois, como visto, a tomada de múltiplas observações só aumenta de maneira efetiva a confiabilidade das demais observações que foram “repetidas”, praticamente não alterando as medidas de confiabilidade das observações restantes.

Além disso, como a influência sobre os parâmetros relativos a estas observações também se reduz significativamente aumentando o número de observações “repetidas” (no caso dos experimentos, coordenadas do vértice  $F$ ); para os parâmetros considerados de maior importância na rede (coordenadas de algum vértice em específico, por exemplo), a coleta de observações “repetidas” pode ser uma estratégia interessante para melhorar a confiabilidade dos resultados, quando a ocupação de novos vértices não seja disponível ou economicamente viável.

Dando continuidade aos experimentos, para o segundo caso, exclusão das linhas-base “repetidas”  $AF$  e  $BF$ , e também da linha-base  $DC$  (Figura 6.3), a Tabela 6.58 apresenta os números de redundância  $r_i$ , os números de absorção  $u_i$  e a confiabilidade interna – MDB das observações (para o caso convencional).

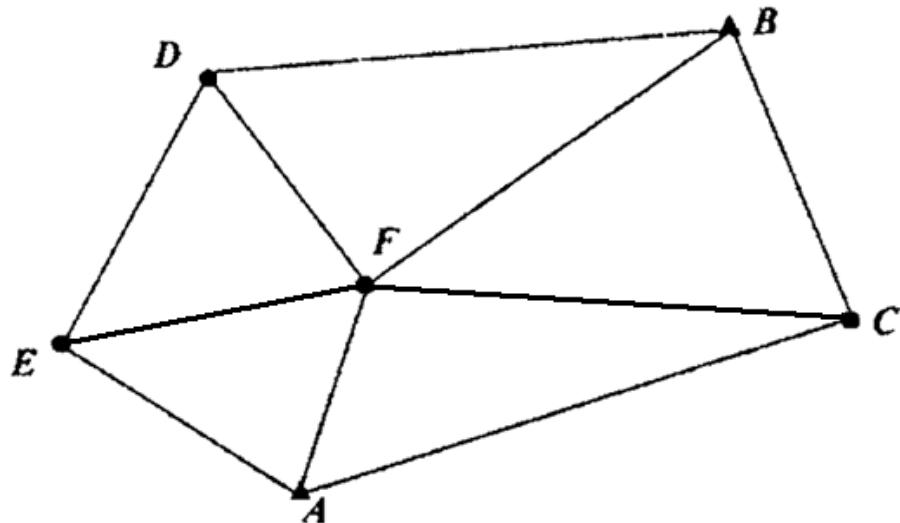


Figura 6.3 – Rede GPS em estudo, sem a linha-base DC.

Tabela 6.58 – Medidas de confiabilidade das observações, sem as linhas-base AF, BF e DC.

Observação	$r_i$	$u_i$	MDB $\nabla y_i$ (m)
$\Delta X_{AC}$	0,8857	0,1143	0,138
$\Delta Y_{AC}$	0,8825	0,1175	0,135
$\Delta Z_{AC}$	0,8893	0,1107	0,137
$\Delta X_{AE}$	0,7098	0,2902	0,072
$\Delta Y_{AE}$	0,6783	0,3217	0,069
$\Delta Z_{AE}$	0,7001	0,2999	0,070
$\Delta X_{BC}$	0,5098	0,4902	0,088
$\Delta Y_{BC}$	0,5672	0,4328	0,088
$\Delta Z_{BC}$	0,5170	0,4830	0,086
$\Delta X_{BD}$	0,7583	0,2417	0,078
$\Delta Y_{BD}$	0,7560	0,2440	0,078
$\Delta Z_{BD}$	0,7369	0,2631	0,079
$\Delta X_{DE}$	0,4768	0,5232	0,066
$\Delta Y_{DE}$	0,4803	0,5197	0,067
$\Delta Z_{DE}$	0,4707	0,5293	0,068
$\Delta X_{FA}$	0,6352	0,3648	0,045
$\Delta Y_{FA}$	0,5913	0,4087	0,044
$\Delta Z_{FA}$	0,6551	0,3449	0,045
$\Delta X_{FC}$	0,5431	0,4569	0,090
$\Delta Y_{FC}$	0,4857	0,5143	0,087
$\Delta Z_{FC}$	0,5316	0,4684	0,088
$\Delta X_{FE}$	0,4567	0,5433	0,059
$\Delta Y_{FE}$	0,4759	0,5241	0,060
$\Delta Z_{FE}$	0,4338	0,5662	0,059
$\Delta X_{FD}$	0,4352	0,5648	0,060
$\Delta Y_{FD}$	0,4439	0,5561	0,062
$\Delta Z_{FD}$	0,4998	0,5002	0,064
$\Delta X_{FB}$	0,5895	0,4105	0,044
$\Delta Y_{FB}$	0,6391	0,3609	0,045
$\Delta Z_{FB}$	0,5657	0,4343	0,043

Analizando e comparando as Tabelas 6.46 e 6.58, nota-se que excluindo a linha-base  $DC$ , os números de redundância mudaram muito pouco na maior parte dos casos, sempre diminuindo (pois a redundância total do sistema diminuiu em mais 3 graus de liberdade), e, consequentemente, os números de absorção das observações aumentaram (na mesma proporção). As diferenças mais significativas ocorreram para as linhas-base  $BC$  e  $FC$  (reduções nos números de redundância entre torno de 15%).

Quanto ao menor erro detectável das observações (MDB), analisando e comparando as Tabelas 6.46 e 6.58, nota-se que estes se tornam ligeiramente maiores sem a linha-base  $DC$  (com uma diferença máxima de apenas 5 mm), mas, novamente a exceção das linhas-base  $BC$  e  $FC$ , onde os aumentos no MDB se situaram entre 9 e 11 mm.

Estes resultados para os números de redundância e o MDB das observações são interessantes, pois, com a exclusão da linha-base  $DC$ , as linhas-base envolvendo o vértice  $C$  foram mais afetadas do que as linhas-base envolvendo o vértice  $D$  (a linha-base  $BC$  foi mais afeada do que a linha-base  $BD$ , e a linha-base  $FC$  foi mais afetada do que a linha-base  $FD$ ), embora neste cenário, ambos os vértices sejam constituídos por três linhas-base distintas (ver a Figura 6.3).

Provavelmente, isto se deve ao fato que a outra linha-base contendo o vértice  $C$  é a  $AC$ , notadamente a linha-base de menor precisão da rede (ver a Tabela 6.1), além do ponto  $A$  ser um ponto de controle (ou seja, a propagação de possíveis erros em  $AC$  é para os resíduos ou para o vértice  $C$ , e a exclusão de  $DC$  afeta muito a confiabilidade de  $BC$  e  $FC$ ), enquanto a outra linha-base contendo o vértice  $D$  é a  $DE$ , de alta precisão na rede (ver a Tabela 6.1), além do ponto  $E$  também ser um ponto desconhecido (ou seja, a propagação de possíveis erros em  $DE$  é para os resíduos e para ambos os vértices, e a exclusão de  $DC$  afeta menos a confiabilidade de  $BD$  e  $FD$  do que de  $BC$  e  $FC$ ).

Por fim, a última medida de confiabilidade (para o caso convencional) onde foi verificada a influência de se retirar as linhas-base  $AF$ ,  $BF$  e também  $DC$  foi a confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, e os resultados obtidos são apresentados nas Tabelas 6.59, 6.60 e 6.61.

Tabela 6.59 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, sem AF, BF e DC (em mm).

	$\Delta X_{AC}$	$\Delta Y_{AC}$	$\Delta Z_{AC}$	$\Delta X_{AE}$	$\Delta Y_{AE}$	$\Delta Z_{AE}$	$\Delta X_{BC}$	$\Delta Y_{BC}$	$\Delta Z_{BC}$	$\Delta X_{BD}$	$\Delta Y_{BD}$	$\Delta Z_{BD}$
<b>X<sub>C</sub></b>	<b>16</b>	0	0	<b>3</b>	0	0	<b>43</b>	0	0	<b>2</b>	0	0
<b>Y<sub>C</sub></b>	0	<b>16</b>	0	0	<b>3</b>	0	0	<b>38</b>	0	0	<b>3</b>	0
<b>Z<sub>C</sub></b>	0	0	<b>15</b>	0	0	<b>3</b>	0	0	<b>42</b>	0	0	<b>2</b>
<b>X<sub>E</sub></b>	<b>1</b>	0	0	<b>21</b>	0	0	<b>3</b>	0	0	<b>9</b>	0	0
<b>Y<sub>E</sub></b>	0	<b>1</b>	0	0	<b>22</b>	0	0	<b>3</b>	0	0	<b>9</b>	0
<b>Z<sub>E</sub></b>	0	0	<b>1</b>	0	0	<b>21</b>	0	0	<b>3</b>	0	0	<b>9</b>
<b>X<sub>D</sub></b>	<b>1</b>	0	0	<b>11</b>	0	0	<b>3</b>	0	0	<b>19</b>	0	0
<b>Y<sub>D</sub></b>	0	<b>1</b>	0	0	<b>11</b>	0	0	<b>3</b>	0	0	<b>19</b>	0
<b>Z<sub>D</sub></b>	0	0	<b>1</b>	0	0	<b>11</b>	0	0	<b>3</b>	0	0	<b>21</b>
<b>X<sub>F</sub></b>	<b>2</b>	0	0	<b>6</b>	0	0	<b>4</b>	0	0	<b>6</b>	0	0
<b>Y<sub>F</sub></b>	0	<b>2</b>	0	0	<b>7</b>	0	0	<b>4</b>	0	0	<b>6</b>	0
<b>Z<sub>F</sub></b>	0	0	<b>2</b>	0	0	<b>6</b>	0	0	<b>4</b>	0	0	<b>5</b>

Tabela 6.60 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, sem AF, BF e DC (em mm).

	$\Delta X_{DE}$	$\Delta Y_{DE}$	$\Delta Z_{DE}$	$\Delta X_{FA}$	$\Delta Y_{FA}$	$\Delta Z_{FA}$	$\Delta X_{FC}$	$\Delta Y_{FC}$	$\Delta Z_{FC}$
<b>X<sub>C</sub></b>	<b>0</b>	0	0	-7	0	0	<b>36</b>	0	0
<b>Y<sub>C</sub></b>	0	<b>0</b>	0	0	<b>-9</b>	0	0	<b>39</b>	0
<b>Z<sub>C</sub></b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>-7</b>	0	0	<b>36</b>
<b>X<sub>E</sub></b>	<b>17</b>	0	0	<b>-12</b>	0	0	<b>-4</b>	0	0
<b>Y<sub>E</sub></b>	0	<b>16</b>	0	0	<b>-12</b>	0	0	<b>-4</b>	0
<b>Z<sub>E</sub></b>	0	0	<b>15</b>	0	0	<b>-11</b>	0	0	<b>-4</b>
<b>X<sub>D</sub></b>	<b>-18</b>	0	0	<b>-12</b>	0	0	<b>-4</b>	0	0
<b>Y<sub>D</sub></b>	0	<b>-19</b>	0	0	<b>-13</b>	0	0	<b>-4</b>	0
<b>Z<sub>D</sub></b>	0	0	<b>-21</b>	0	0	<b>-11</b>	0	0	<b>-4</b>
<b>X<sub>F</sub></b>	<b>0</b>	0	0	<b>-16</b>	0	0	<b>-6</b>	0	0
<b>Y<sub>F</sub></b>	0	<b>-1</b>	0	0	<b>-18</b>	0	0	<b>-6</b>	0
<b>Z<sub>F</sub></b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>-15</b>	0	0	<b>-5</b>

Tabela 6.61 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, sem AF, BF e DC (em mm).

	$\Delta X_{FE}$	$\Delta Y_{FE}$	$\Delta Z_{FE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta Y_{FD}$	$\Delta Z_{FD}$	$\Delta X_{FB}$	$\Delta Y_{FB}$	$\Delta Z_{FB}$
<b>X<sub>C</sub></b>	-2	0	0	-2	0	0	<b>-8</b>	0	0
<b>Y<sub>C</sub></b>	0	<b>-3</b>	0	0	<b>-2</b>	0	0	<b>-8</b>	0
<b>Z<sub>C</sub></b>	0	0	<b>-2</b>	0	0	<b>-2</b>	0	0	<b>-8</b>
<b>X<sub>E</sub></b>	<b>27</b>	0	0	<b>8</b>	0	0	<b>-13</b>	0	0
<b>Y<sub>E</sub></b>	0	<b>26</b>	0	0	<b>8</b>	0	0	<b>-11</b>	0
<b>Z<sub>E</sub></b>	0	0	<b>28</b>	0	0	<b>7</b>	0	0	<b>-13</b>
<b>X<sub>D</sub></b>	<b>7</b>	0	0	<b>29</b>	0	0	<b>-13</b>	0	0
<b>Y<sub>D</sub></b>	0	<b>7</b>	0	0	<b>29</b>	0	0	<b>-11</b>	0
<b>Z<sub>D</sub></b>	0	0	<b>9</b>	0	0	<b>28</b>	0	0	<b>-13</b>
<b>X<sub>F</sub></b>	<b>-5</b>	0	0	<b>-5</b>	0	0	<b>-18</b>	0	0
<b>Y<sub>F</sub></b>	0	<b>-5</b>	0	0	<b>-5</b>	0	0	<b>-16</b>	0
<b>Z<sub>F</sub></b>	0	0	<b>-5</b>	0	0	<b>-4</b>	0	0	<b>-19</b>

Analizando e comparando as Tabelas 6.47, 6.48 e 6.49, e as Tabelas 6.59, 6.60 e 6.61, nota-se que na maior parte dos casos, a influência do MDB das observações sobre os parâmetros não se modificou muito retirando também a linha-base  $DC$ , oscilando em no máximo 5 mm (ora aumentando e ora diminuindo, ou até permanecendo a mesma, dependendo da observação e do parâmetro).

Entretanto, alguns resultados interessantes são notados. Por exemplo, embora o MDB das observações das linhas-base  $BD$  e  $FD$  tenham aumentado, suas influências sobre o vértice  $C$  diminuíram consideravelmente (de cerca de 8 mm para 2 mm), retirando a linha-base  $DC$ . Analisando as Figuras 6.1 e 6.3, nota-se que de fato a linha-base  $DC$  contribuía para a propagação de possíveis erros nas linhas-base  $BD$  e  $FD$  sobre o vértice  $C$ .

De maneira análoga, embora o MDB das observações da linha-base  $BC$  tenham aumentado, suas influências sobre o vértice  $D$  diminuíram consideravelmente (de até 10 mm para apenas 3 mm). Outro exemplo interessante neste sentido é a influência do MDB das observações da linha-base  $DE$  sobre o vértice  $C$ , que reduzem de cerca de 6 mm para zero.

Para a linha-base  $FC$ , entretanto, não se observa esta redução significativa de influência sobre o vértice  $D$ , provavelmente devido a configuração da rede (localização dos pontos de controle  $A$  e  $B$ , que também influenciam na propagação dos erros das observações sobre os parâmetros e demais observações da rede).

Além disso, como o MDB das observações das linhas-base  $BC$  e  $FC$  foram os que mais aumentaram, observa-se que de fato o vértice  $C$  foi mais afetado que o vértice  $D$  com a exclusão da linha-base  $DC$ , pois a influência do MDB das observações de  $BC$  e  $FC$  sobre o vértice  $C$  aumentaram entre 14 mm e 17 mm, enquanto a influência do MDB das observações de  $BD$  e  $FD$  sobre o vértice  $D$  aumentaram entre 3 mm e 8 mm.

Uma outra conclusão interessante obtida com estes experimentos é que a confiabilidade externa é muito mais afetada com modificações na geometria do problema do que as demais medidas de confiabilidade consideradas. Retirando linhas-base da rede, os números de redundância sempre tendem a diminuir e os MDB das observações sempre tendem a aumentar, mas a influência destes sobre os parâmetros pode aumentar consideravelmente, ou até mesmo diminuir consideravelmente, e tal fato realça mais uma vez a importância de se analisar as medidas de confiabilidade de uma maneira conjunta.

Verificada a influência em retirar a linha-base  $DC$  da rede sobre as medidas de confiabilidade convencionais (considerando apenas um *outlier* por vez), também foi

verificada esta influência sobre as medidas de confiabilidade generalizadas para múltiplos *outliers* (no caso, para dois *outliers* simultâneos).

Desta forma, após retirar a linha-base *DC*, foram recalculados os coeficientes de correlação múltipla, a confiabilidade interna ( $\text{MDB} - \nabla y_i^q$ ), o número de confiabilidade  $\bar{r}_i^q$  e o número de redundância  $r_i^q$  das observações (para  $q = 2$  *outliers* simultâneos), e alguns destes são mostrados nas Tabelas a seguir (tanto os valores originais, obtidos retirando somente as linhas-base *AF* e *BF*, quanto os valores obtidos com este experimento, retirando as linhas-base *AF*, *BF* e também *DC*).

Tabela 6.62 – Coeficientes de correlação múltipla para algumas observações (com DC).

$\rho_{ij}^q$	$\Delta X_{BC}$	$\Delta Y_{BC}$	$\Delta Z_{BC}$	$\Delta X_{DE}$	$\Delta Y_{DE}$	$\Delta Z_{DE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta Y_{FD}$	$\Delta Z_{FD}$
$\Delta X_{BC}$	<b>1</b>	0,0093	0,0093	<b>0,1185</b>	0,0010	0,0012	<b>0,1557</b>	0,0013	0,0014
$\Delta Y_{BC}$	0,0093	<b>1</b>	0,0094	0,0010	<b>0,1077</b>	0,0012	0,0013	<b>0,1293</b>	0,0013
$\Delta Z_{BC}$	0,0093	0,0094	<b>1</b>	0,0012	0,0011	<b>0,1343</b>	0,0013	0,0012	<b>0,1506</b>
$\Delta X_{FC}$	<b>0,3789</b>	0,0038	0,0036	<b>0,1118</b>	0,0010	0,0014	<b>0,2361</b>	0,0024	0,0021
$\Delta Y_{FC}$	0,0035	<b>0,4019</b>	0,0036	0,0010	<b>0,1174</b>	0,0013	0,0023	<b>0,2465</b>	0,0023
$\Delta Z_{FC}$	0,0035	0,0039	<b>0,3808</b>	0,0013	0,0013	<b>0,1370</b>	0,0019	0,0022	<b>0,2299</b>
$\Delta X_{FD}$	<b>0,1557</b>	0,0013	0,0014	<b>0,5047</b>	0,0049	0,0044	<b>1</b>	0,0099	0,0092
$\Delta Y_{FD}$	0,0013	<b>0,1293</b>	0,0013	0,0049	<b>0,4977</b>	0,0043	0,0099	<b>1</b>	0,0093
$\Delta Z_{FD}$	0,0013	0,0012	<b>0,1506</b>	0,0046	0,0045	<b>0,4655</b>	0,0092	0,0093	<b>1</b>

Tabela 6.63 – Coeficientes de correlação múltipla para algumas observações (sem DC).

$\rho_{ij}^q$	$\Delta X_{BC}$	$\Delta Y_{BC}$	$\Delta Z_{BC}$	$\Delta X_{DE}$	$\Delta Y_{DE}$	$\Delta Z_{DE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta Y_{FD}$	$\Delta Z_{FD}$
$\Delta X_{BC}$	<b>1</b>	0,0093	0,0093	<b>0,0031</b>	0,0000	0,0000	<b>0,0448</b>	0,0004	0,0004
$\Delta Y_{BC}$	0,0093	<b>1</b>	0,0095	0,0001	<b>0,0050</b>	0,0000	0,0004	<b>0,0467</b>	0,0004
$\Delta Z_{BC}$	0,0093	0,0095	<b>1</b>	0,0000	0,0000	<b>0,0003</b>	0,0003	0,0004	<b>0,0420</b>
$\Delta X_{FC}$	<b>0,7931</b>	0,0074	0,0075	<b>0,0040</b>	0,0001	0,0000	<b>0,0565</b>	0,0006	0,0004
$\Delta Y_{FC}$	0,0072	<b>0,7896</b>	0,0075	0,0001	<b>0,0063</b>	0,0000	0,0005	<b>0,0591</b>	0,0005
$\Delta Z_{FC}$	0,0074	0,0077	<b>0,7996</b>	0,0000	0,0000	<b>0,0004</b>	0,0004	0,0005	<b>0,0526</b>
$\Delta X_{FD}$	<b>0,0448</b>	0,0004	0,0004	<b>0,6740</b>	0,0065	0,0060	<b>1</b>	0,0099	0,0094
$\Delta Y_{FD}$	0,0004	<b>0,0467</b>	0,0004	0,0065	<b>0,6661</b>	0,0059	0,0099	<b>1</b>	0,0093
$\Delta Z_{FD}$	0,0003	0,0004	<b>0,0420</b>	0,0062	0,0061	<b>0,6483</b>	0,0094	0,0093	<b>1</b>

Tabela 6.64 – Alguns valores para o MDB das linhas-base BC, FC e FD (com DC).

$\nabla y_i^q$ (cm)	$\Delta X_{BC}$	$\Delta Y_{BC}$	$\Delta Z_{BC}$	$\Delta X_{DE}$	$\Delta Y_{DE}$	$\Delta Z_{DE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta Y_{FD}$	$\Delta Z_{FD}$
$\Delta X_{BC}$	<b>7,7</b>	7,7	7,7	<b>7,8</b>	7,7	7,7	<b>7,8</b>	7,7	7,7
$\Delta Y_{BC}$	7,9	<b>7,9</b>	7,9	7,9	<b>8,0</b>	7,9	7,9	<b>8,0</b>	7,9
$\Delta Z_{BC}$	7,6	7,6	<b>7,6</b>	7,6	7,6	<b>7,6</b>	7,6	7,6	<b>7,7</b>
$\Delta X_{FC}$	<b>8,5</b>	7,9	7,9	<b>7,9</b>	7,9	7,9	<b>8,1</b>	7,9	7,9
$\Delta Y_{FC}$	7,5	<b>8,2</b>	7,5	7,5	<b>7,6</b>	7,5	7,5	<b>7,8</b>	7,5
$\Delta Z_{FC}$	7,7	7,7	<b>8,3</b>	7,7	7,7	<b>7,7</b>	7,7	7,7	<b>7,9</b>
$\Delta X_{FD}$	<b>5,6</b>	5,6	5,6	<b>6,4</b>	5,6	5,6	<b>5,6</b>	5,6	5,6
$\Delta Y_{FD}$	5,7	<b>5,7</b>	5,7	5,7	<b>6,5</b>	5,7	5,7	<b>5,7</b>	5,7
$\Delta Z_{FD}$	5,9	5,9	<b>6,0</b>	5,9	5,9	<b>6,7</b>	5,9	5,9	<b>5,9</b>

Tabela 6.65 – Alguns valores para o MDB das linhas-base BC, FC e FD (sem DC).

$\nabla y_i^q$ (cm)	$\Delta X_{BC}$	$\Delta Y_{BC}$	$\Delta Z_{BC}$	$\Delta X_{DE}$	$\Delta Y_{DE}$	$\Delta Z_{DE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta Y_{FD}$	$\Delta Z_{FD}$
$\Delta X_{BC}$	<b>8,8</b>	8,8	8,8	<b>8,8</b>	8,8	8,8	<b>8,8</b>	8,8	8,8
$\Delta Y_{BC}$	8,8	<b>8,8</b>	8,8	8,8	<b>8,8</b>	8,8	8,8	<b>8,8</b>	8,8
$\Delta Z_{BC}$	8,6	8,6	<b>8,6</b>	8,6	8,6	<b>8,6</b>	8,6	8,6	<b>8,6</b>
$\Delta X_{FC}$	<b>14,7</b>	9,0	9,0	<b>9,0</b>	9,0	9,0	<b>9,0</b>	9,0	9,0
$\Delta Y_{FC}$	8,7	<b>14,2</b>	8,7	8,7	<b>8,7</b>	8,7	8,7	<b>8,7</b>	8,7
$\Delta Z_{FC}$	8,8	8,8	<b>14,6</b>	8,8	8,8	<b>8,8</b>	8,8	8,8	<b>8,8</b>
$\Delta X_{FD}$	<b>6,1</b>	6,0	6,0	<b>8,2</b>	6,0	6,0	<b>6,0</b>	6,0	6,0
$\Delta Y_{FD}$	6,2	<b>6,2</b>	6,2	6,2	<b>8,3</b>	6,2	6,2	<b>6,2</b>	6,2
$\Delta Z_{FD}$	6,4	6,4	<b>6,4</b>	6,4	6,4	<b>8,4</b>	6,4	6,4	<b>6,4</b>

Tabela 6.66 – Alguns valores para o  $r_i^q$  das linhas-base BC, FC e FD (com DC).

$r_i^q$	$\Delta X_{BC}$	$\Delta Y_{BC}$	$\Delta Z_{BC}$	$\Delta X_{DE}$	$\Delta Y_{DE}$	$\Delta Z_{DE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta Y_{FD}$	$\Delta Z_{FD}$
$\Delta X_{BC}$	<b>0,3076</b>	0,5060	0,5060	<b>0,3810</b>	0,5060	0,5060	<b>0,5060</b>	0,5060	0,5060
$\Delta Y_{BC}$	0,5104	<b>0,3323</b>	0,5104	0,5104	<b>0,3864</b>	0,5104	0,5104	<b>0,5104</b>	0,5104
$\Delta Z_{BC}$	0,5112	0,5112	<b>0,3236</b>	0,5112	0,5112	<b>0,4035</b>	0,5112	0,5112	<b>0,5112</b>
$\Delta X_{FC}$	<b>0,8037</b>	0,8095	0,8095	<b>0,8039</b>	0,8095	0,8095	<b>0,7576</b>	0,8095	0,8095
$\Delta Y_{FC}$	0,7592	<b>0,7505</b>	0,7592	0,7592	<b>0,7516</b>	0,7592	0,7592	<b>0,6942</b>	0,7592
$\Delta Z_{FC}$	0,7950	0,7950	<b>0,7867</b>	0,7950	0,7950	<b>0,7892</b>	0,7950	0,7950	<b>0,7237</b>
$\Delta X_{FD}$	<b>0,7099</b>	0,7159	0,7159	<b>0,6840</b>	0,7159	0,7159	<b>0,7126</b>	0,7159	0,7159
$\Delta Y_{FD}$	0,6620	<b>0,6557</b>	0,6620	0,6620	<b>0,6288</b>	0,6620	0,6620	<b>0,6581</b>	0,6620
$\Delta Z_{FD}$	0,7059	0,7059	<b>0,6975</b>	0,7059	0,7059	<b>0,6749</b>	0,7059	0,7059	<b>0,7008</b>

Tabela 6.67 – Alguns valores para o  $r_i^q$  das linhas-base BC, FC e FD (sem DC).

$r_i^q$	$\Delta X_{BC}$	$\Delta Y_{BC}$	$\Delta Z_{BC}$	$\Delta X_{DE}$	$\Delta Y_{DE}$	$\Delta Z_{DE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta Y_{FD}$	$\Delta Z_{FD}$
$\Delta X_{BC}$	<b>0,3026</b>	0,5060	0,5060	<b>0,3771</b>	0,5060	0,5060	<b>0,5060</b>	0,5060	0,5060
$\Delta Y_{BC}$	0,5104	<b>0,3273</b>	0,5104	0,5104	<b>0,3840</b>	0,5104	0,5104	<b>0,5104</b>	0,5104
$\Delta Z_{BC}$	0,5111	0,5111	<b>0,3198</b>	0,5111	0,5111	<b>0,4004</b>	0,5111	0,5111	<b>0,5109</b>
$\Delta X_{FC}$	<b>0,6168</b>	0,6383	0,6383	<b>0,6174</b>	0,6383	0,6383	<b>0,3900</b>	0,6383	0,6383
$\Delta Y_{FC}$	0,5932	<b>0,5676</b>	0,5932	0,5932	<b>0,5709</b>	0,5932	0,5932	<b>0,3650</b>	0,5932
$\Delta Z_{FC}$	0,6572	0,6572	<b>0,6333</b>	0,6572	0,6572	<b>0,6408</b>	0,6572	0,6572	<b>0,3967</b>
$\Delta X_{FD}$	<b>0,6957</b>	0,7049	0,7049	<b>0,6656</b>	0,7049	0,7049	<b>0,6890</b>	0,7049	0,7049
$\Delta Y_{FD}$	0,6521	<b>0,6428</b>	0,6521	0,6521	<b>0,6124</b>	0,6521	0,6521	<b>0,6384</b>	0,6521
$\Delta Z_{FD}$	0,6960	0,6960	<b>0,6840</b>	0,6960	0,6960	<b>0,6593</b>	0,6960	0,6960	<b>0,6774</b>

Sobre os coeficientes de correlação múltipla, em geral, estes mudaram pouco retirando a linha-base  $DC$  (diferenças menores que 10%).

Entretanto, analisando e comparando as Tabelas 6.62 e 6.63, nota-se que em alguns casos, estes tiveram um aumento maior, como por exemplo, para as observações das linhas-base  $BC$  e  $FC$ , referentes ao mesmo eixo cartesiano (aumento em torno de 40%), bem como para as observações das linhas-base  $DE$  e  $FD$ , referentes ao mesmo eixo cartesiano (aumento em torno de 17%).

De maneira análoga, em alguns casos, os coeficientes de correlação múltipla reduziram razoavelmente, como por exemplo, para as observações das linhas-base  $FD$  e  $FC$ , referentes ao mesmo eixo cartesiano (redução em torno de 18%).

A Tabela 6.68 apresenta os pares de linhas-base (considerando observações referentes aos mesmo eixo cartesiano) para os quais houveram os maiores aumentos nos coeficientes de correlação múltipla, bem como para os quais houveram as maiores reduções nos coeficientes de correlação múltipla.

Tabela 6.68 – Pares de linhas-base com os maiores aumentos e reduções em  $\rho_{ij}^q$  (sem DC).

Par de linhas-base	Aumento em $\rho_{ij}^q$	Par de linhas-base	Redução em $\rho_{ij}^q$
$BC$ e $FC$	Em torno de 40%	$FD$ e $FC$	Em torno de 18%
$FD$ e $DE$	Em torno de 17%	$DE$ e $FC$	Em torno de 11%
$BD$ e $FD$	Em torno de 14%	$BC$ e $DE$	Em torno de 11%
$AC$ e $FC$	Em torno de 14%	$FD$ e $BC$	Em torno de 10%
$AC$ e $BC$	Em torno de 13%	$BD$ e $BC$	Em torno de 10%

Analizando a Figura 6.3 e a Tabela 6.68, nota-se que, com a exclusão da linha-base  $DC$ , é como se a rede fosse dividida em duas regiões: Uma a esquerda do trio de vértices  $A$ ,  $F$  e  $B$  (contendo as linhas-base  $AE$ ,  $DE$ ,  $FE$ ,  $FD$ ,  $BD$ ), e a outra a direita do trio de vértices  $A$ ,  $F$  e  $B$  (contendo as linhas-base  $AC$ ,  $BC$ ,  $FC$ ).

Para duas observações de uma mesma região da rede, os coeficientes de correlação múltipla em geral aumentaram, e para duas observações de regiões distintas da rede, os coeficientes de correlação múltipla em geral diminuíram.

Já as observações das linhas-base  $FA$  e  $FB$ , tiveram seus coeficientes de correlação múltipla com as demais pouco alterados com a exclusão de  $DC$ .

Isto novamente pode ser explicado pela localização dos pontos de controle  $A$  e  $B$  na rede, pois, sobre as coordenadas destes, possíveis erros nas observações não são propagados (suas coordenadas são injunções absolutas, permanecendo constantes durante o processo de ajustamento). Tal fato também explica o grande aumento dos coeficientes de correlação

múltipla entre observações das linhas-base  $BC$  e  $FC$ , referentes ao mesmo eixo cartesiano (em torno de 40%, significativamente maior que os demais), pois, neste cenário (sem a linha-base  $DC$ ), a região da rede à direita dos vértices  $A$ ,  $F$  e  $C$  contém apenas estas duas linhas-base e também  $AC$ , sendo as observações de  $AC$  notadamente de menor precisão que as demais da rede (possuindo, portanto, menor peso no processo de estimação).

Quanto ao MDB para  $q = 2$  outliers simultâneos, tal como para o caso convencional, em geral, estes não se alteraram muito retirando a linha-base  $DC$ , aumentando em no máximo 3 mm para a maior parte dos casos.

Entretanto, analisando e comparando as Tabelas 6.64 e 6.65, nota-se que as observações das linhas-base  $BC$  e  $FC$  tiveram um aumento significativo em seus respectivos MDB para  $q = 2$ , retirando a linha-base  $DC$ . Para as observações da linha-base  $BC$ , o aumento foi no mínimo de 1 cm, e no máximo de 6,2 cm, considerando  $q = 2$  para a observação da linha-base  $FC$  referente ao mesmo eixo cartesiano. Para as observações da linha-base  $FC$ , o aumento foi no mínimo de 9 mm, e no máximo de 6,3 cm, considerando  $q = 2$  para a observação da linha-base  $BC$  referente ao mesmo eixo cartesiano.

Outros aumentos significativos no MDB com  $q = 2$  e retirando a linha-base  $DC$  foram para as observações das linhas-base  $DE$  e  $FD$ , referentes ao mesmo eixo cartesiano, onde o aumento foi entre 15 mm e 18 mm.

Outra conclusão interessante analisando as Tabelas 6.62 e 6.63, e as Tabelas 6.64 e 6.65, é que embora os coeficientes de correlação múltipla entre os pares de observações possam aumentar ou diminuir retirando linhas-base, o menor erro detectável destas para  $q = 2$  sempre aumenta ou permanece o mesmo, mas nunca diminui.

Isto faz sentido analisando a expressão 5.13, pois, o MDB para o caso convencional ( $q = 1$ ) sempre aumenta retirando observações da rede (diminuindo a redundância do sistema), e o MDB de uma observação para  $q > 1$  tem uma relação diretamente proporcional ao MDB desta no caso convencional, mas uma relação não linear com o respectivo coeficiente de correlação múltipla.

Ou seja, em termos práticos, diminuindo a redundância da rede, o que realmente afeta o MDB de uma observação no caso generalizado é o seu respectivo MDB no caso convencional, embora o coeficiente de correlação múltipla também exerça sua influência quando seu valor é significativamente aumentado.

Desta forma, verifica-se que a influência da geometria é muito mais significativa para as medidas de confiabilidade generalizadas do que para o caso convencional (os maiores

aumentos no MDB para o caso convencional foram de apenas  $1,1\text{ cm}$ , enquanto no caso generalizado os maiores aumentos no MDB foram de até  $6,3\text{ cm}$ ).

Sobre os números de redundância para  $q = 2$ , tal como o MDB, em geral estes não se alteraram muito retirando a linha-base  $DC$ , com uma redução de no máximo 15% para a maior parte dos casos (mas em média em torno de 5%).

Entretanto, analisando e comparando as Tabelas 6.66 e 6.67, nota-se que em alguns casos as observações tiveram uma redução razoável em seus respectivos números de redundância para  $q = 2$ , retirando a linha-base  $DC$ . Por exemplo, para as observações da linha-base  $BC$ , a redução mínima foi de 11%, e no máximo de 38%, considerando  $q = 2$  para a observação da linha-base  $FC$  referente ao mesmo eixo cartesiano. Já para as observações da linha-base  $FC$ , a redução mínima foi de 12%, e no máximo de 40%, considerando  $q = 2$  para a observação da linha-base  $BC$  referente ao mesmo eixo cartesiano.

De maneira análoga ao MDB para  $q = 2$ , salienta-se que, embora os coeficientes de correlação múltipla entre os pares de observações possam aumentar ou diminuir retirando linhas-base, os números de redundância destas para  $q = 2$  sempre diminuem ou permanecem o mesmo, mas nunca aumentam, pois os números de redundância destas no caso convencional também não aumentam, diminuindo a redundância do sistema (ver a expressão 5.25).

Portanto, a exclusão da linha-base  $DC$  compromete significativamente mais a confiabilidade das observações das linhas-base  $BC$  e  $FC$  do que as demais (este fato já tinha sido constatado no caso convencional, mas se tornou ainda mais evidente nesta abordagem para dois *outliers* simultâneos).

Finalmente, a última medida de confiabilidade para  $q = 2$  *outliers* simultâneos, em que foi verificada a influência de retirar a linha-base  $DC$ , foi a confiabilidade externa máxima sobre os parâmetros. As Tabelas 6.69 e 6.70 mostram alguns dos resultados obtidos.

Tabela 6.69 – Confiabilidade externa máxima de alguns pares de observações ( $q = 2$  *outliers* simultâneos, sem  $DC$ ), sobre os parâmetros  $X_C$ ,  $X_E$ ,  $X_D$ ,  $X_F$  (em mm).

	$\Delta X_{AC} \text{ e } \Delta X_{AE}$	$\Delta X_{AC} \text{ e } \Delta X_{BC}$	$\Delta X_{AC} \text{ e } \Delta X_{BD}$	$\Delta X_{AC} \text{ e } \Delta X_{DE}$
$X_C$	16	54	16	16
$X_E$	21	4	9	17
$X_D$	11	4	19	18
$X_F$	7	6	6	2

Tabela 6.70 – Confiabilidade externa máxima de alguns pares de observações ( $q = 2$  outliers simultâneos, sem DC), sobre os parâmetros  $X_C$ ,  $X_E$ ,  $X_D$ ,  $X_F$  (em mm).

	$\Delta X_{FA}$ e $\Delta X_{FC}$	$\Delta X_{FA}$ e $\Delta X_{FE}$	$\Delta X_{FA}$ e $\Delta X_{FD}$	$\Delta X_{FA}$ e $\Delta X_{FB}$
$X_C$	36	8	8	17
$X_E$	13	28	13	28
$X_D$	14	13	30	29
$X_F$	19	18	18	40

Analizando e comparando as Tabelas 6.56 e 6.69, nota-se que excluindo a linha-base  $DC$ , a influência máxima de todos os pares de observações considerados aumentou sobre o vértice  $C$ , principalmente para o par de observações  $\Delta X_{AC}$  e  $\Delta X_{BC}$ , onde a influência máxima sobre o parâmetro  $X_C$  aumentou de  $31\text{ mm}$  para  $54\text{ mm}$ .

Entretanto, para o vértice  $D$ , estes aumentos não foram tão significativos, inclusive havendo uma redução considerável na influência máxima do par de observações  $\Delta X_{AC}$  e  $\Delta X_{BC}$  sobre o parâmetro  $X_D$  (de  $11\text{ mm}$  para apenas  $4\text{ mm}$ ).

Estes resultados também podem ser explicados pela alteração na configuração da rede GPS excluindo a linha-base  $DC$ , pois já havia sido constatado que as observações relativas ao vértice  $C$  foram mais afetadas neste cenário do que as observações relativas ao vértice  $D$ , devido a “divisão” da rede em duas regiões distintas, a direita e a esquerda das linhas-base  $FA$  e  $FB$ , sendo a região a direita de menor redundância na rede (ver a Figura 6.3).

Tal fato é mais uma vez constatado analisando e comparando as Tabelas 6.57 e 6.70, onde nota-se que retirando a linha-base  $DC$ , a influência máxima do par de observações  $\Delta X_{FA}$  e  $\Delta X_{FC}$  sobre o parâmetro  $X_C$  aumentou de  $20\text{ mm}$  para  $36\text{ mm}$ , enquanto a influência do par de observações  $\Delta X_{FA}$  e  $\Delta X_{FD}$  sobre o parâmetro  $X_D$  aumentou de  $23\text{ mm}$  para  $30\text{ mm}$  (ou seja, aumentou menos tanto em termos relativos quanto em termos absolutos).

Além disso, a influência máxima do par de observações  $\Delta X_{FA}$  e  $\Delta X_{FB}$  sobre o parâmetro  $X_C$  reduziu de  $21\text{ mm}$  para  $17\text{ mm}$ , enquanto a influência máxima do mesmo par de observações sobre o parâmetro  $X_D$  aumentou de  $27\text{ mm}$  para  $29\text{ mm}$ , pois, sem a linha-base  $DC$ , possíveis erros não detectados nas linhas-base  $FA$  e  $FB$  só podem afetar o vértice  $C$  por meio da propagação destes nas observações de  $FC$ , enquanto possíveis erros não detectados nas linhas-base  $FA$  e  $FB$  podem afetar o vértice  $D$  por meio da propagação destes nas observações de  $FD$  e também de  $FE$  (ver a Figura 6.3).

Portanto, em termos gerais, a exclusão da linha-base  $DC$  afetou principalmente as medidas de confiabilidade relativas as observações das linhas-base  $FC$ ,  $BC$ ,  $FD$  e  $BD$ , principalmente as observações das duas primeiras, devido a localização dos pontos de controle  $A$  e  $B$  na rede, bem como a menor precisão das observações da linha-base  $AC$ .

Este fato, que já tinha sido constatado com as medidas de confiabilidade convencionais, se tornou ainda mais evidente com as medidas de confiabilidade para  $q = 2$  *outliers* simultâneos, sendo estas medidas mais sensíveis a alterações na geometria do problema, pois, consideram a existência de múltiplos *outliers* de maneira simultânea, evidenciando melhor os impactos que ocorreram com a mudança da configuração da rede.

Dando continuidade aos experimentos, para o terceiro, exclusão das linhas-base “repetidas”  $AF$  e  $BF$ , e também das linhas-base  $DC$ ,  $FC$  e  $FE$  (Figura 6.4), a Tabela 6.71 apresenta os números de redundância  $r_i$ , os números de absorção  $u_i$  e a confiabilidade interna – MDB das observações (para o caso convencional).

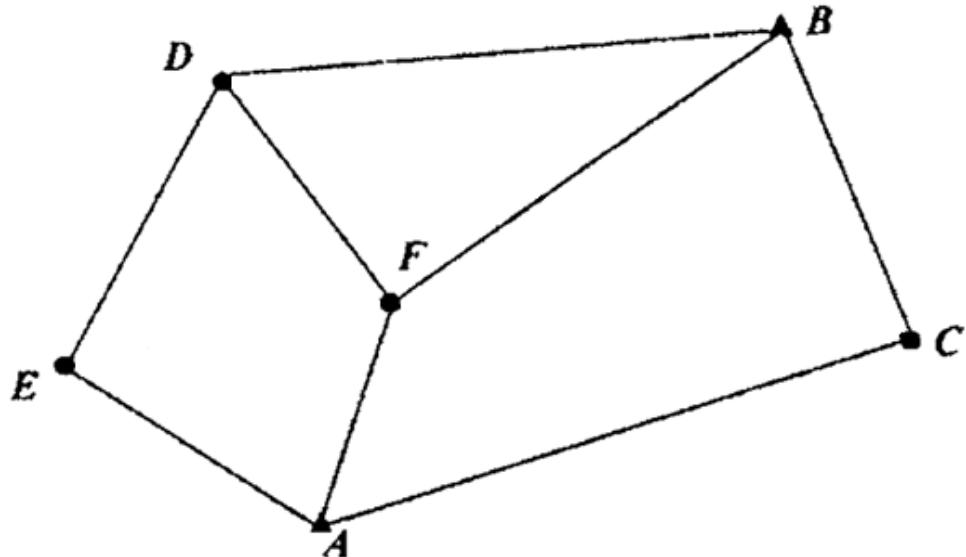


Figura 6.4 – Rede GPS em estudo, sem as linhas-base DC, FC e FE.

Tabela 6.71 – Medidas de confiabilidade das observações, sem AF, BF, DC, FC, FE.

Observação	$r_i$	$u_i$	MDB $\nabla y_i$ (m)
$\Delta X_{AC}$	0,8109	0,1891	0,144
$\Delta Y_{AC}$	0,7865	0,2135	0,143
$\Delta Z_{AC}$	0,8136	0,1864	0,144
$\Delta X_{AE}$	0,5066	0,4934	0,085
$\Delta Y_{AE}$	0,4689	0,5311	0,084
$\Delta Z_{AE}$	0,4701	0,5299	0,085
$\Delta X_{BC}$	0,1891	0,8109	0,144
$\Delta Y_{BC}$	0,2135	0,7865	0,143
$\Delta Z_{BC}$	0,1864	0,8136	0,144
$\Delta X_{BD}$	0,7435	0,2565	0,079
$\Delta Y_{BD}$	0,7426	0,2574	0,079
$\Delta Z_{BD}$	0,7179	0,2821	0,080
$\Delta X_{DE}$	0,2890	0,7110	0,085
$\Delta Y_{DE}$	0,3120	0,6880	0,084
$\Delta Z_{DE}$	0,3008	0,6992	0,085
$\Delta X_{FA}$	0,5888	0,4112	0,047
$\Delta Y_{FA}$	0,5352	0,4648	0,046
$\Delta Z_{FA}$	0,6069	0,3931	0,046
$\Delta X_{FD}$	0,3347	0,6653	0,069
$\Delta Y_{FD}$	0,3518	0,6482	0,069
$\Delta Z_{FD}$	0,3994	0,6006	0,072
$\Delta X_{FB}$	0,5373	0,4627	0,046
$\Delta Y_{FB}$	0,5895	0,4105	0,046
$\Delta Z_{FB}$	0,5049	0,4951	0,045

Analizando e comparando as Tabelas 6.46 e 6.71, nota-se que excluindo as linhas-base  $DC$ ,  $FC$  e  $FE$ , os números de redundância de todas as observações diminuíram, na maior parte dos casos entre 10% e 20%, pois a redundância total do sistema diminuiu em  $3 \times 3 = 9$  graus de liberdade, e, consequentemente, os números de absorção das observações aumentaram na mesma proporção.

As únicas linhas-base cujas observações não tiveram seus números de redundância muito alterados (redução em torno de 5%) foram as da linha-base  $BD$ , e, curiosamente, as das linhas-base  $FA$  e  $FB$ . Analisando as Figuras 6.1 e 6.4, nota-se que de fato as observações de  $FE$  e de  $FC$  não estão diretamente relacionadas com as observações de  $BD$  na geometria da rede, pois são relativas a vértices distintos da mesma.

Entretanto, as observações (excluídas) de  $FE$  e  $FC$  estão diretamente relacionadas com as observações tanto de  $FA$  quanto de  $FB$ . Talvez o fato dos vértices  $A$  e  $B$  serem pontos de controle e o vértice desconhecido  $F$  ser comum as duas linhas-base faz com que a tolerância a

possíveis erros nas observações de  $FA$  e  $FB$  seja relativamente baixa, mesmo excluindo outras observações da rede relativas ao vértice desconhecido  $F$ .

Além disso, excluindo  $DC$ ,  $FC$  e  $FE$ , a linha-base  $BC$  foi a que apresentou maiores alterações nos números de redundância de suas observações, (reduções em torno de 40%), perdendo praticamente toda sua redundância relativa na rede e se tornando a linha-base com os valores mais baixos para esta medida de confiabilidade.

Analizando a Figura 6.4, nota-se que de fato o vértice  $C$ , neste cenário, só possui observações relativas as linhas-base  $AC$  e  $BC$ , sendo as observações de  $AC$  notadamente de menor peso no ajustamento e os pontos  $A$  e  $B$  pontos de controle (injunções absolutas), ou seja, possíveis erros não detectados nas observações de  $BC$  serão consideravelmente absorvidos pelas coordenadas do vértice  $C$ , conforme indicam os baixos valores para os números de redundância das observações desta linha-base.

Outra linha-base que possui valores relativamente baixos para seus números de redundância é a linha-base  $DE$ , e analisando a Figura 6.4, nota-se que sua localização (situação) na rede é semelhante ao caso de  $BC$ .

Além disso, com a exclusão destas linhas-base, os números de redundância das observações já apresentam uma redução significativa, com a redundância média da rede se tornando  $\bar{r} = (24 - 12)/12 = 0,5$ , e, desta forma, os números de absorção das observações já se tornam equiparáveis aos números de redundância destas. Em outras palavras, possíveis erros não detectados nas observações já não são majoritariamente refletidos nos resíduos, mas, começam a afetar também os parâmetros da rede, ou seja, as coordenadas dos vértices (ver as Tabelas 6.46 e 6.71).

Quanto ao MDB das observações, analisando e comparando as Tabelas 6.46 e 6.71, nota-se que com a exclusão de  $DC$ ,  $FC$  e  $FE$ , estes aumentam entre 1 cm e 2 cm para boa parte das linhas-base, a exceção de  $BD$ ,  $FA$ ,  $FB$  e  $BC$ . Para as observações de  $BD$ ,  $FA$  e  $FB$ , os aumentos no MDB das observações foram inferiores a 5 mm, enquanto para  $BC$ , os aumentos no MDB das observações se situaram entre 6,4 cm e 6,8 cm (ou seja, quase duplicaram).

Também é interessante notar que neste cenário, o MDB das observações de  $BC$  se tornou igual ao MDB das respectivas observações de  $AC$ , e o MDB das observações de  $DE$  se tornou igual ao MDB das respectivas observações de  $AE$ . Este resultado é muito curioso, pois embora as linhas-base  $AC$  e  $BC$  contenham pontos de controle, a linha-base  $DE$  não contém pontos de controle, além disso, a linha-base  $AC$  possui precisão inferior as demais, sendo que

o único fato em comum nestes dois cenários é que ambos os vértices  $C$  e  $E$  estão contidos somente em duas linhas-base cada ( $AC$  e  $BC$ , e  $AE$  e  $DE$ , respectivamente).

Por fim, a última medida de confiabilidade (para o caso convencional) onde foi verificada a influência de se retirar as linhas-base  $AF$ ,  $BF$  e também  $DC$ ,  $FC$  e  $FE$  foi a confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, e os resultados obtidos são apresentados nas Tabelas 6.72 e 6.73.

Tabela 6.72 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, sem AF, BF, DC, FC, FE (em mm).

	$\Delta X_{AC}$	$\Delta Y_{AC}$	$\Delta Z_{AC}$	$\Delta X_{AE}$	$\Delta Y_{AE}$	$\Delta Z_{AE}$	$\Delta X_{BC}$	$\Delta Y_{BC}$	$\Delta Z_{BC}$	$\Delta X_{BD}$	$\Delta Y_{BD}$	$\Delta Z_{BD}$
$X_C$	<b>27</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>117</b>	0	0	<b>0</b>	0	0
$Y_C$	0	<b>30</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>112</b>	0	0	<b>0</b>	0
$Z_C$	0	0	<b>27</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>117</b>	0	0	<b>0</b>
$X_E$	<b>0</b>	0	0	<b>42</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>13</b>	0	0
$Y_E$	0	<b>0</b>	0	0	<b>44</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>12</b>	0
$Z_E$	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>45</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>14</b>
$X_D$	<b>0</b>	0	0	<b>17</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>20</b>	0	0
$Y_D$	0	<b>0</b>	0	0	<b>18</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>20</b>	0
$Z_D$	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>20</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>22</b>
$X_F$	<b>0</b>	0	0	<b>5</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>6</b>	0	0
$Y_F$	0	<b>0</b>	0	0	<b>5</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>5</b>	0
$Z_F$	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>4</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>5</b>

Tabela 6.73 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, sem AF, BF, DC, FC, FE (em mm).

	$\Delta X_{DE}$	$\Delta Y_{DE}$	$\Delta Z_{DE}$	$\Delta X_{FA}$	$\Delta Y_{FA}$	$\Delta Z_{FA}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta Y_{FD}$	$\Delta Z_{FD}$	$\Delta X_{FB}$	$\Delta Y_{FB}$	$\Delta Z_{FB}$
$X_C$	<b>0</b>	0	0									
$Y_C$	0	<b>0</b>	0									
$Z_C$	0	0	<b>0</b>									
$X_E$	<b>43</b>	0	0	<b>-8</b>	0	0	<b>24</b>	0	0	<b>-8</b>	0	0
$Y_E$	0	<b>39</b>	0	0	<b>-8</b>	0	0	<b>22</b>	0	0	<b>-7</b>	0
$Z_E$	0	0	<b>40</b>	0	0	<b>-6</b>	0	0	<b>21</b>	0	0	<b>-8</b>
$X_D$	<b>-17</b>	0	0	<b>-12</b>	0	0	<b>37</b>	0	0	<b>-13</b>	0	0
$Y_D$	0	<b>-18</b>	0	0	<b>-13</b>	0	0	<b>36</b>	0	0	<b>-11</b>	0
$Z_D$	0	0	<b>-20</b>	0	0	<b>-10</b>	0	0	<b>35</b>	0	0	<b>-12</b>
$X_F$	<b>-5</b>	0	0	<b>-19</b>	0	0	<b>-9</b>	0	0	<b>-21</b>	0	0
$Y_F$	0	<b>-5</b>	0	0	<b>-21</b>	0	0	<b>-9</b>	0	0	<b>-19</b>	0
$Z_F$	0	0	<b>-4</b>	0	0	<b>-18</b>	0	0	<b>-8</b>	0	0	<b>-22</b>

Analizando e comparando as Tabelas 6.47, 6.48 e 6.49, e as Tabelas 6.72 e 6.73, nota-se que retirando também as linha-base  $DC$ ,  $FC$  e  $FE$ , a confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros aumenta ou diminui, mas com alguns casos interessantes.

Por exemplo, retirando  $DC$ ,  $FC$  e  $FE$ , somente possíveis erros não detectados nas observações das linhas-base  $AC$  e  $BC$  podem influenciar nas coordenadas do vértice  $C$ , o que

faz sentido analisando a Figura 6.4, pois, devido ao fato dos vértices  $A$  e  $B$  serem pontos de controle (injunções absolutas), possíveis erros não detectados em outras observações não serão propagados sobre o vértice  $C$ .

De maneira análoga, possíveis erros não detectados nas observações das linhas-base  $AC$  e  $BC$  só serão propagados sobre o vértice  $C$ , não afetando, portanto, os demais vértices desconhecidos da rede (pontos  $D$ ,  $E$  e  $F$ ). Estas constatações mostram a importância do planejamento da localização dos pontos de controle na configuração da rede.

Além disso, excluindo  $DC$ ,  $FC$  e  $FE$ , o MDB das observações da linha-base  $AC$  aumentou entre  $0,9\text{ cm}$  e  $1,1\text{ cm}$ , e o MDB das observações da linha-base  $BC$  aumentou entre  $6,4\text{ cm}$  e  $6,8\text{ cm}$ , entretanto, a influência destes sobre as coordenadas do vértice  $C$  aumentou entre  $1,6\text{ cm}$  e  $1,9\text{ cm}$  (para  $AC$ ) e em entre  $8,8\text{ cm}$  e  $9,2\text{ cm}$  (para  $BC$ ).

Ou seja, embora o MDB das observações de  $AC$  e  $BC$  tenha se tornado numericamente igual neste cenário, devido ao maior peso das observações de  $BC$ , a influência destes sobre o vértice  $C$  é muito maior do que a influência do MDB das observações de  $AC$ .

Outro exemplo interessante é que a influência do MDB das observações das linhas-base  $AE$  e  $DE$  sobre o vértice  $E$ , no mínimo, duplicaram, retirando  $DC$ ,  $FC$  e  $FE$ , pois estas são as únicas linhas-base que contém o vértice  $E$  neste cenário, e além disso, o ponto  $A$  é um ponto de controle (dificultando a propagação de erros nestas observações sobre os demais vértices e linhas-base). A influência do MDB das observações de  $AE$  e  $DE$  sobre o vértice  $E$  é relativamente da mesma ordem de grandeza, provavelmente devido ao fato que, embora a linha-base  $AE$  contenha um ponto de controle, a precisão das observações da linha-base  $DE$  é um pouco maior (ver a Tabela 6.1).

Também se nota que, embora o MDB das observações da linha-base  $FD$  sejam maiores que os respectivos MDB das observações das linhas-base  $FA$  e  $FB$  (ver a Tabela 6.71), a influência do MDB das observações de  $FA$  e de  $FB$  sobre as coordenadas do vértice  $F$  é maior do que a influência do MDB das observações de  $FD$  sobre este mesmo vértice. Isto se deve ao fato de  $A$  e  $B$  serem pontos de controle (e, portanto, possíveis erros nas observações não são propagados em suas coordenadas), enquanto o vértice  $D$  é um vértice desconhecido.

Ou seja, mais uma vez, a alteração na geometria da rede se mostrou mais significativa para a confiabilidade externa do que para as demais medidas de confiabilidade consideradas. Como na prática, geralmente se está mais interessado nos parâmetros (coordenadas dos pontos de uma rede, por exemplo), do que nas observações propriamente ditas (componentes de uma linha-base entre dois vértices, por exemplo), no planejamento de uma rede geodésica,

simulando diferentes geometrias/configurações para a mesma, é sempre aconselhável estimar não somente o menor erro detectável de uma observação, como também a sua influência sobre os parâmetros da rede, visto que esta pode ser significativamente modificada com as alterações na configuração do problema.

Ainda analisando e comparando as Tabelas 6.47, 6.48 e 6.49, e as Tabelas 6.72 e 6.73, nota-se que para as linhas-base  $AE$ ,  $BD$ ,  $DE$  e  $FD$ , a influência de possíveis erros não detectados nas observações destas se tornou nula sobre as coordenadas do vértice  $C$  (conforme já esperado), mas aumentou sobre os demais vértices desconhecidos da rede (pontos  $D$ ,  $E$  e  $F$ ).

Entretanto, para as observações das linhas-base  $FA$  e  $FB$ , a exclusão de  $DC$ ,  $FC$  e  $FE$  praticamente não afetou a confiabilidade externa destas sobre os parâmetros, com uma diferença máxima de apenas  $3\text{ mm}$  (a exceção das coordenadas vértice  $C$ , onde a influência destas se tornou nula). Isto pode ser explicado devido ao fato do MDB das observações de  $FA$  e  $FB$  ter aumentando em no máximo  $2\text{ mm}$  neste experimento (ver as Tabelas 6.46 e .671).

Verificada a influência em retirar as linhas-base  $DC$ ,  $FC$  e  $FE$  da rede sobre as medidas de confiabilidade convencionais (considerando apenas um *outlier* por vez), também foi verificada esta influência sobre as medidas de confiabilidade generalizadas para múltiplos *outliers* (no caso, para dois *outliers* simultâneos).

Desta forma, após retirar as linhas-base  $DC$ ,  $FC$  e  $FE$ , foram recalculados os coeficientes de correlação múltipla, a confiabilidade interna ( $\text{MDB} - \nabla y_i^q$ ), o número de confiabilidade  $\bar{r}_i^q$  e o número de redundância  $r_i^q$  das observações (para  $q = 2$  *outliers* simultâneos), e alguns destes são mostrados nas Tabelas a seguir (tanto os valores originais, obtidos retirando somente as linhas-base “repetidas”  $AF$  e  $BF$ , quanto os valores obtidos com este experimento, retirando as linhas-base  $AF$ ,  $BF$  e também  $DC$ ,  $FC$  e  $FE$ ).

Tabela 6.74 – Alguns coeficientes de correlação múltipla das observações (com DC, FC, FE).

$\rho_{ij}^q$	$\Delta X_{AC}$	$\Delta Y_{AC}$	$\Delta Z_{AC}$	$\Delta X_{AE}$	$\Delta Y_{AE}$	$\Delta Z_{AE}$	$\Delta X_{BD}$	$\Delta Y_{BD}$	$\Delta Z_{BD}$
$\Delta X_{BC}$	<b>0,2073</b>	0,0019	0,0019	<b>0,1049</b>	0,0009	0,0009	<b>0,1528</b>	0,0013	0,0015
$\Delta Y_{BC}$	0,0020	<b>0,2012</b>	0,0019	0,0010	<b>0,1034</b>	0,0011	0,0014	<b>0,1399</b>	0,0015
$\Delta Z_{BC}$	0,0018	0,0018	<b>0,2001</b>	0,0009	0,0010	<b>0,1085</b>	0,0015	0,0014	<b>0,1643</b>
$\Delta X_{DE}$	<b>0,0486</b>	0,0005	0,0005	<b>0,3403</b>	0,0034	0,0030	<b>0,2364</b>	0,0023	0,0028
$\Delta Y_{DE}$	0,0005	<b>0,0488</b>	0,0005	0,0036	<b>0,3591</b>	0,0036	0,0024	<b>0,2465</b>	0,0026
$\Delta Z_{DE}$	0,0005	0,0005	<b>0,0548</b>	0,0032	0,0035	<b>0,3312</b>	0,0028	0,0026	<b>0,2619</b>
$\Delta X_{FD}$	<b>0,0638</b>	0,0006	0,0006	<b>0,1009</b>	0,0011	0,0007	<b>0,3571</b>	0,0037	0,0033
$\Delta Y_{FD}$	0,0006	<b>0,0585</b>	0,0006	0,0011	<b>0,1103</b>	0,0010	0,0038	<b>0,3596</b>	0,0033
$\Delta Z_{FD}$	0,0006	0,0006	<b>0,0614</b>	0,0008	0,0010	<b>0,0859</b>	0,0034	0,0034	<b>0,3308</b>

Tabela 6.75 – Alguns coeficientes de correlação múltipla das observações (sem DC, FC, FE).

$\rho_{ij}^q$	$\Delta X_{AC}$	$\Delta Y_{AC}$	$\Delta Z_{AC}$	$\Delta X_{AE}$	$\Delta Y_{AE}$	$\Delta Z_{AE}$	$\Delta X_{BD}$	$\Delta Y_{BD}$	$\Delta Z_{BD}$
$\Delta X_{BC}$	<b>1</b>	0,0097	0,0095	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0	0
$\Delta Y_{BC}$	0,0097	<b>1</b>	0,0097	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0
$\Delta Z_{BC}$	0,0095	0,0097	<b>1</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>
$\Delta X_{DE}$	<b>0</b>	0	0	<b>1</b>	0,0099	0,0099	<b>0,2977</b>	0,0030	0,0035
$\Delta Y_{DE}$	0	<b>0</b>	0	0,0099	<b>1</b>	0,0100	0,0030	<b>0,3118</b>	0,0034
$\Delta Z_{DE}$	0	0	<b>0</b>	0,0099	0,0100	<b>1</b>	0,0035	0,0034	<b>0,3418</b>
$\Delta X_{FD}$	<b>0</b>	0	0	<b>0,5481</b>	0,0055	0,0050	<b>0,6353</b>	0,0064	0,0061
$\Delta Y_{FD}$	0	<b>0</b>	0	0,0056	<b>0,5553</b>	0,0053	0,0064	<b>0,6171</b>	0,0058
$\Delta Z_{FD}$	0	0	<b>0</b>	0,0052	0,0053	<b>0,5330</b>	0,0063	0,0060	<b>0,6130</b>

Tabela 6.76 – Alguns valores para o MDB das linhas-base BC, DE e FD (com DC, FC, FE).

$\nabla y_i^q$ (cm)	$\Delta X_{AC}$	$\Delta Y_{AC}$	$\Delta Z_{AC}$	$\Delta X_{AE}$	$\Delta Y_{AE}$	$\Delta Z_{AE}$	$\Delta X_{BD}$	$\Delta Y_{BD}$	$\Delta Z_{BD}$
$\Delta X_{BC}$	<b>7,9</b>	7,7	7,7	<b>7,7</b>	7,7	7,7	<b>7,8</b>	7,7	7,7
$\Delta Y_{BC}$	7,9	<b>8,1</b>	7,9	7,9	<b>8,0</b>	7,9	7,9	<b>8,0</b>	7,9
$\Delta Z_{BC}$	7,6	7,6	<b>7,7</b>	7,6	7,6	<b>7,6</b>	7,6	7,6	<b>7,7</b>
$\Delta X_{DE}$	<b>6,5</b>	6,4	6,4	<b>6,9</b>	6,4	6,4	<b>6,6</b>	6,4	6,4
$\Delta Y_{DE}$	6,5	<b>6,5</b>	6,5	6,5	<b>7,0</b>	6,5	6,5	<b>6,7</b>	6,5
$\Delta Z_{DE}$	6,5	6,5	<b>6,6</b>	6,5	6,5	<b>6,9</b>	6,5	6,5	<b>6,8</b>
$\Delta X_{FD}$	<b>5,6</b>	5,6	5,6	<b>5,6</b>	5,6	5,6	<b>5,9</b>	5,6	5,6
$\Delta Y_{FD}$	5,7	<b>5,7</b>	5,7	5,7	<b>5,7</b>	5,7	5,7	<b>6,1</b>	5,7
$\Delta Z_{FD}$	5,9	5,9	<b>5,9</b>	5,9	5,9	<b>5,9</b>	5,9	5,9	<b>6,3</b>

Tabela 6.77 – Alguns valores para o MDB das linhas-base BC, DE e FD (sem DC, FC, FE).

$\nabla y_i^q$ (cm)	$\Delta X_{AC}$	$\Delta Y_{AC}$	$\Delta Z_{AC}$	$\Delta X_{AE}$	$\Delta Y_{AE}$	$\Delta Z_{AE}$	$\Delta X_{BD}$	$\Delta Y_{BD}$	$\Delta Z_{BD}$
$\Delta X_{BC}$	$\infty$	14,4	14,4	<b>14,4</b>	14,4	14,4	<b>14,4</b>	14,4	14,4
$\Delta Y_{BC}$	14,3	$\infty$	14,3	14,3	<b>14,3</b>	14,3	14,3	<b>14,3</b>	14,3
$\Delta Z_{BC}$	14,4	14,4	$\infty$	14,4	14,4	<b>14,4</b>	14,4	14,4	<b>14,4</b>
$\Delta X_{DE}$	<b>8,5</b>	8,5	8,5	$\infty$	8,5	8,5	<b>8,9</b>	8,5	8,5
$\Delta Y_{DE}$	8,4	<b>8,4</b>	8,4	8,4	$\infty$	8,4	8,4	<b>8,8</b>	8,4
$\Delta Z_{DE}$	8,5	8,5	<b>8,5</b>	8,5	8,5	$\infty$	8,5	8,5	<b>9,1</b>
$\Delta X_{FD}$	<b>6,9</b>	6,9	6,9	<b>8,2</b>	6,9	6,9	<b>8,9</b>	6,9	6,9
$\Delta Y_{FD}$	6,9	<b>6,9</b>	6,9	6,9	<b>8,3</b>	6,9	6,9	<b>8,8</b>	6,9
$\Delta Z_{FD}$	7,2	7,2	<b>7,2</b>	7,2	7,2	<b>8,5</b>	7,2	7,2	<b>9,1</b>

Tabela 6.78 – Alguns valores para o  $r_i^q$  das linhas-base BC, DE e FD (com DC, FC, FE).

$r_i^q$	$\Delta X_{AC}$	$\Delta Y_{AC}$	$\Delta Z_{AC}$	$\Delta X_{AE}$	$\Delta Y_{AE}$	$\Delta Z_{AE}$	$\Delta X_{BD}$	$\Delta Y_{BD}$	$\Delta Z_{BD}$
$\Delta X_{BC}$	<b>0,6356</b>	0,6641	0,6641	<b>0,6568</b>	0,6641	0,6641	<b>0,6486</b>	0,6641	0,6641
$\Delta Y_{BC}$	0,6925	<b>0,6644</b>	0,6925	0,6925	<b>0,6851</b>	0,6925	0,6925	<b>0,6789</b>	0,6925
$\Delta Z_{BC}$	0,6708	0,6708	<b>0,6439</b>	0,6708	0,6708	<b>0,6629</b>	0,6708	0,6708	<b>0,6526</b>
$\Delta X_{DE}$	<b>0,5048</b>	0,5060	0,5060	<b>0,4474</b>	0,5060	0,5060	<b>0,4777</b>	0,5060	0,5060
$\Delta Y_{DE}$	0,5104	<b>0,5092</b>	0,5104	0,5104	<b>0,4446</b>	0,5104	0,5104	<b>0,4794</b>	0,5104
$\Delta Z_{DE}$	0,5111	0,5111	<b>0,5096</b>	0,5111	0,5111	<b>0,4550</b>	0,5111	0,5111	<b>0,4761</b>
$\Delta X_{FD}$	<b>0,5149</b>	0,5170	0,5170	<b>0,5117</b>	0,5170	0,5170	<b>0,4511</b>	0,5170	0,5170
$\Delta Y_{FD}$	0,5260	<b>0,5242</b>	0,5260	0,5260	<b>0,5196</b>	0,5260	0,5260	<b>0,4580</b>	0,5260
$\Delta Z_{FD}$	0,5872	0,5872	<b>0,5849</b>	0,5872	0,5872	<b>0,5828</b>	0,5872	0,5872	<b>0,5229</b>

Tabela 6.79 – Alguns valores para o  $r_i^q$  das linhas-base BC, DE e FD (sem DC, FC, FE).

$r_i^q$	$\Delta X_{AC}$	$\Delta Y_{AC}$	$\Delta Z_{AC}$	$\Delta X_{AE}$	$\Delta Y_{AE}$	$\Delta Z_{AE}$	$\Delta X_{BD}$	$\Delta Y_{BD}$	$\Delta Z_{BD}$
$\Delta X_{BC}$	<b>0</b>	0,1891	0,1891	<b>0,1891</b>	0,1891	0,1891	<b>0,1891</b>	0,1891	0,1891
$\Delta Y_{BC}$	0,2135	<b>0</b>	0,2135	0,2135	<b>0,2135</b>	0,2135	0,2135	<b>0,2135</b>	0,2135
$\Delta Z_{BC}$	0,1864	0,1864	<b>0</b>	0,1864	0,1864	<b>0,1864</b>	0,1864	0,1864	<b>0,1864</b>
$\Delta X_{DE}$	<b>0,2890</b>	0,2890	0,2890	<b>0</b>	0,2890	0,2890	<b>0,2634</b>	0,2890	0,2890
$\Delta Y_{DE}$	0,3120	<b>0,3120</b>	0,3120	0,3120	<b>0</b>	0,3120	0,3120	<b>0,2817</b>	0,3120
$\Delta Z_{DE}$	0,3008	0,3008	<b>0,3008</b>	0,3008	0,3008	<b>0</b>	0,3008	0,3008	<b>0,2657</b>
$\Delta X_{FD}$	<b>0,3347</b>	0,3347	0,3347	<b>0,2341</b>	0,3347	0,3347	<b>0,1996</b>	0,3347	0,3347
$\Delta Y_{FD}$	0,3518	<b>0,3518</b>	0,3518	0,3518	<b>0,2433</b>	0,3518	0,3518	<b>0,2178</b>	0,3518
$\Delta Z_{FD}$	0,3994	0,3994	<b>0,3994</b>	0,3994	0,3994	<b>0,2859</b>	0,3994	0,3994	<b>0,2493</b>

Analizando e comparando as Tabelas 6.74 e 6.75, nota-se que para observações referentes ao mesmo eixo cartesiano das linhas-base  $AC$  e  $BC$ , os coeficientes de correlação múltipla aumentaram em cerca de 80%, assumindo o valor máximo possível  $\rho_{ij}^q = 1$ . Da mesma maneira, para observações referentes a outras linhas-base, os coeficientes de correlação múltipla das observações de  $AC$  e  $BC$  se tornaram nulos.

Além disso, como o MDB das observações de  $AC$  e  $BC$  referentes ao mesmo eixo cartesiano se tornaram numericamente iguais no caso convencional, e como os coeficientes de correlação múltipla destas com observações de outras linhas-base são nulos, o MDB de uma observação em  $AC$  no caso generalizado também é numericamente igual ao MDB da observação  $BC$  referente ao mesmo eixo cartesiano, quando o complemento do modelo de erro considerado (ou seja, as demais observações suspeitas consideradas) é o mesmo em ambos os casos. Por exemplo, o MDB de  $\Delta X_{BC}$ , considerando  $q = 2$  para  $\Delta X_{DE}$ , é igual ao MDB de  $\Delta X_{AC}$ , considerando  $q = 2$  também para  $\Delta X_{DE}$ , pois o coeficiente de correlação múltipla entre  $\Delta X_{BC}$  e  $\Delta X_{DE}$  é igual ao coeficiente de correlação múltipla entre  $\Delta X_{AC}$  e  $\Delta X_{DE}$  ( $\rho_{ij}^q = 0$ ), e além disso, no *data snooping* ( $q = 1$ ) o MDB de  $\Delta X_{BC}$  é igual ao MDB de  $\Delta X_{AC}$ .

Outros aumentos notórios nos coeficientes de correlação múltipla, analisando e comparando as Tabelas 6.74 e 6.75, se dão para os pares de observações referentes ao mesmo eixo cartesiano das linhas-base  $DE$  e  $AE$  (cerca de 65%, assumindo o valor máximo possível  $\rho_{ij}^q = 1$ ),  $FD$  e  $AE$  (cerca de 45%), e também  $FD$  e  $BD$  (cerca de 18%).

Ressalva-se que estes valores de  $\rho_{ij}^q = 1$  para os pares de observações referentes ao mesmo eixo cartesiano das linhas-base  $AC$  e  $BC$  e também  $DE$  e  $FE$  são coerentes com a Figura 6.4, pois as únicas linhas-base contendo o vértice  $C$  são  $AC$  e  $BC$ , enquanto que as únicas linhas-base contendo o vértice  $E$  são  $DE$  e  $FE$ . Em outras palavras, não se pode obter medidas de confiabilidade para *outliers* simultâneos em duas observações referentes ao

mesmo eixo nestes dois pares de linhas-base mencionados, pois, não existe um controle das observações (uma redundância que estipule uma tolerância a erros) nestes cenários. Ou seja, para  $q = 2$ , é impossível a identificação, simultânea, de erros nestes pares de observações.

Ainda sobre os coeficientes de correlação múltipla, a exceção dos casos extremos com  $AC$  e  $BC$  (onde se reduzem para zero com as observações das demais linhas-base), em geral estes tendem a aumentar conforme se retiram linhas-base da rede, pois maior se torna a tolerância a erros nestes cenários (ou seja, menor é a redundância de observações), especialmente nesta abordagem para múltiplos *outliers* simultâneos (onde  $q > 1$ , ou seja, o número de graus de liberdade do teste estatístico para localização de erros é maior).

Tal fato demonstra mais uma vez a importância da geometria da rede (redundância de observações), pois, quanto maior o coeficiente de correlação múltipla, maior é o menor erro detectável das observações na abordagem para múltiplos *outliers* (ver a expressão 5.13), e da mesma maneira, menor é o valor dos números de confiabilidade e redundância das observações nesta abordagem (ver as expressões 5.24 e 5.25).

Além disso, analisando e comparando as Tabelas 6.74 e 6.75, novamente é observada uma divisão da rede em duas regiões, uma a direita ( $AC$  e  $BC$ ) e a outra a esquerda ( $AE$ ,  $BD$ ,  $DE$ ,  $FD$ ) das linhas-base  $FA$  e  $FB$ . Foram escolhidas as observações das linhas-base  $FA$  e  $FB$  para não serem consideradas nas tabelas de resultados pois novamente, assim como no caso convencional, retirando as linhas-base  $DC$ ,  $FC$  e  $FE$ , foram estas as observações menos afetadas em suas medidas de confiabilidade para  $q = 2$  (com os coeficientes de correlação múltipla oscilando entre  $-20\%$  e  $+20\%$  apenas neste experimento).

Quanto ao MDB das observações para  $q = 2$  *outliers* simultâneos, analisando e comparando as Tabelas 6.76 e 6.77, nota-se que na maior parte dos casos, estes aumentaram em até  $3\text{ cm}$ , retirando as linhas-base  $DC$ ,  $FC$  e  $FE$ . Somente a linha-base  $BC$  apresenta um aumento mínimo no MDB de suas observações de  $6,2\text{ cm}$ , devido ao fato do MDB destas no caso convencional já ter sido significativamente maior sem  $DC$ ,  $FC$  e  $FE$  (ver as Tabelas 6.46 e 6.71, bem como a expressão 5.13).

Além disso, como  $\rho_{ij}^q = 1$  para observações referentes ao mesmo eixo cartesiano dos pares de linhas-base  $AC$  e  $BC$  e também  $AE$  e  $DE$ , o menor erro detectável em uma observação de  $BC$ , considerando  $q = 2$  para a observação de mesmo eixo cartesiano em  $AC$  é infinito (e vice-versa, pois  $\rho_{ij}^q = 1$ ), e o mesmo para as observações de  $AE$  e  $DE$  referentes ao mesmo eixo cartesiano (pois também para estas,  $\rho_{ij}^q = 1$ ).

Em outras palavras, não é possível identificar erros de maneira simultânea nestes cenários, pois não existe redundância de observações na rede para possibilitar isto (são  $q = 2$  erros simultâneos justamente nas únicas  $n = 2$  observações em comum, relativas ao mesmo vértice). Em um cenário ideal, onde se fosse possível “repetir” todas as observações, sem acarretar em custos extras acima do desejado ao projeto, se teria a garantia de pelo menos uma observação redundante em qualquer caso para  $q = 2$  (ou seja, não se teria valores infinitos para o MDB de uma observação, não importa o modelo de erro considerado). Da mesma maneira, para  $q = 3$ , o número de observações repetidas deveria ser duplicado, e assim por diante.

Sobre os números de redundância para  $q = 2$  *outliers* simultâneos, analisando e comparando as Tabelas 6.78 e 6.79, nota-se que na maior parte dos casos, estes reduziram em até 30%, retirando as linhas-base *DC*, *FC* e *FE*.

Além disso, como  $\rho_{ij}^q = 1$  para observações referentes ao mesmo eixo cartesiano dos pares de linhas-base *AC* e *BC* e também *AE* e *DE*, o número de redundância de uma observação de *BC*, considerando  $q = 2$  para a observação de mesmo eixo cartesiano em *AC* é zero (e vice-versa, pois  $\rho_{ij}^q = 1$ ), e o mesmo para as observações de *AE* e *DE* referentes ao mesmo eixo cartesiano (pois também para estas,  $\rho_{ij}^q = 1$ ).

Em outras palavras, 100% de um possível erro em alguma destas observações é absorvido pelos parâmetros da rede (coordenadas dos vértices), pois não existe redundância de observações na rede para que estes possam ser devidamente refletidos nos resíduos (são  $q = 2$  erros simultâneos justamente nas únicas  $n = 2$  observações em comum, relativas ao mesmo vértice).

Novamente, em um cenário ideal, onde se fosse possível “repetir” todas as observações, sem acarretar em custos extras ao projeto, se teria a garantia de pelo menos uma observação redundante em qualquer caso para  $q = 2$  (ou seja, não se teria valores nulos para o número de redundância de uma observação, não importa o modelo de erro considerado). Da mesma maneira, para  $q = 3$ , o número de observações repetidas deveria ser duplicado, e assim por diante.

Neste experimento, retirando as linhas-base *DC*, *FC* e *FE*, diferenças significativas entre as medidas de confiabilidade convencionais ( $q = 1$  *outlier* por vez apenas – *data snooping*) e as medidas de confiabilidade generalizadas para  $q = 2$  *outliers* simultâneos começam a surgir: Na abordagem para múltiplos *outliers* (no caso,  $q = 2$ ), dependendo do modelo de erro considerado (ou seja, qual é o par de observações suspeitas de estarem

contaminadas por erros simultaneamente), pode não ser possível detectar e identificar erros nestas por meio de testes estatísticos em função dos resíduos (pois, não existe redundância neste cenário, e consequentemente, possíveis erros nestas observações são completamente absorvidos pelos parâmetros incógnitos, tornando infinito o valor do menor erro detectável de tais observações nestes cenários).

Já para as medidas de confiabilidade convencionais, o valor do menor erro detectável das observações aumenta excluindo as linhas-base  $DC$ ,  $FC$  e  $FE$ , mas ainda possui uma ordem de grandeza passível de ser detectada por testes estatísticos (se mantém em uma ordem de grandeza decimétrica, não assumindo um valor numericamente “infinito”). Isto permite elaborar estratégias de detecção e identificação de erros utilizando as duas abordagens ( $q = 1$  e  $q > 1$ ), pois ambas apresentam vantagens e desvantagens.

Finalmente, a última medida de confiabilidade para  $q = 2$  outliers simultâneos em que foi verificada a influência de retirar as linhas-base  $DC$ ,  $FC$  e  $FE$  foi a confiabilidade externa máxima sobre os parâmetros. A Tabela 6.80 mostra alguns dos resultados obtidos.

Tabela 6.80 – Confiabilidade externa máxima de alguns pares de observações ( $q = 2$  outliers simultâneos, sem  $DC$ ,  $FC$ ,  $FE$ ), sobre os parâmetros  $X_C$ ,  $X_E$ ,  $X_D$ ,  $X_F$  (em mm).

	$\Delta X_{AC}$ e $\Delta X_{AE}$	$\Delta X_{AC}$ e $\Delta X_{BC}$	$\Delta X_{AC}$ e $\Delta X_{BD}$	$\Delta X_{AC}$ e $\Delta X_{DE}$	$\Delta X_{FA}$ e $\Delta X_{FD}$	$\Delta X_{FA}$ e $\Delta X_{FB}$
$X_C$	27	$\infty$	27	27	0	0
$X_E$	42	0	13	43	24	24
$X_D$	17	0	20	17	37	37
$X_F$	5	0	6	5	25	60

Analizando e comparando as Tabelas 6.72, 6.73 e 6.80, nota-se que a influência de possíveis erros nas observações das linhas-base  $AC$  e  $BC$  sobre as coordenadas dos vértices  $E$ ,  $D$  e  $F$  no caso generalizado, tal como no caso convencional, é nula, e além disso, é “infinita” sobre o vértice  $C$  quando o par de observações considerado destas duas linhas-base é referente ao mesmo eixo cartesiano.

Além disso, a influência máxima de erros nos pares de observações  $\Delta X_{AC}$  e  $\Delta X_{AE}$ ,  $\Delta X_{AC}$  e  $\Delta X_{BC}$ , e também  $\Delta X_{AC}$  e  $\Delta X_{DE}$  sobre o parâmetro  $X_C$  é igual a  $27\text{ mm}$ , ou seja, é igual a influência de apenas  $\Delta X_{AC}$  no caso convencional (ver a Tabela 6.72). Em outras palavras, tal como no caso convencional, possíveis erros em observações que não são referentes as linhas-base  $AC$  e  $BC$  não exercem influência nenhuma sobre as coordenadas do vértice  $C$ . Tal fato também pode ser notado pela influência nula dos pares de observações  $\Delta X_{FA}$  e  $\Delta X_{FD}$  e também  $\Delta X_{FA}$  e  $\Delta X_{FB}$  sobre o parâmetro  $X_C$ .

Da mesma maneira, a influência máxima de possíveis erros no par de observações  $\Delta X_{AC}$  e  $\Delta X_{AE}$  sobre os parâmetros  $X_D$ ,  $X_E$  e  $X_F$  é igual a influência de apenas a observação  $\Delta X_{AE}$  sobre estes no caso convencional (ver a Tabela 6.72). O mesmo pode ser dito para os pares de observações  $\Delta X_{AC}$  e  $\Delta X_{BD}$  e também  $\Delta X_{AC}$  e  $\Delta X_{DE}$ . Ou seja, verifica-se novamente que, tal como no caso convencional, possíveis erros nas observações das linhas-base  $AC$  e  $BC$  não exercem influência sobre as coordenadas dos vértices  $D$ ,  $E$  e  $F$ .

Já para o par de observações  $\Delta X_{FA}$  e  $\Delta X_{FD}$ , analisando as Tabelas 6.57 e 6.80, nota-se que retirando as linhas-base  $DC$ ,  $FC$  e  $FE$ , a influência máxima de possíveis erros neste par de observações mais do que duplica para o parâmetro  $X_E$  (aumenta de  $11\text{ mm}$  para  $24\text{ mm}$ ), aumenta  $14\text{ mm}$  sobre o parâmetro  $X_D$  (de  $23\text{ mm}$  para  $37\text{ mm}$ ), e aumenta apenas  $7\text{ mm}$  sobre o parâmetro  $X_F$  (de  $18\text{ mm}$  para  $25\text{ mm}$ ). Ou seja, aumentou mais para o vértice  $E$  e para o vértice  $D$  do que para o vértice  $F$ , provavelmente devido ao fato do vértice  $E$  conter apenas duas linhas-base neste cenário (ver a Figura 6.4), além do fato do vértice  $F$  estar contido em duas linhas-base com pontos de controle ( $FA$  e  $FB$ ).

Finalmente, para o par de observações  $\Delta X_{FA}$  e  $\Delta X_{FB}$ , analisando e comparando as Tabelas 6.57 e 6.80, nota-se que retirando as linhas-base  $DC$ ,  $FC$  e  $FE$ , a influência máxima de possíveis erros neste par de observações diminuiu  $3\text{ mm}$  para o parâmetro  $X_E$  (pois a linha  $FE$  foi removida, reduzindo uma possível propagação dos erros destas observações sobre este vértice), aumenta  $10\text{ mm}$  sobre o parâmetro  $X_D$  (de  $27\text{ mm}$  para  $37\text{ mm}$ ), e aumenta  $21\text{ mm}$  sobre o parâmetro  $X_F$  (de  $39\text{ mm}$  para  $60\text{ mm}$ ). Ou seja, conforme já observado no caso convencional, as linhas-base  $FA$  e  $FB$ , neste cenário, são muito mais influentes sobre o vértice  $F$  do que a linha base  $FD$ .

Em um último experimento visando verificar em como o número de linhas-base (observações) pode influenciar nas medidas de confiabilidade, com a exclusão das linhas-base “repetidas”  $AF$  e  $BF$ , e também das linhas-base  $DC$ ,  $FC$ ,  $FE$ ,  $DE$  e  $FD$  (Figura 6.5), a Tabela 6.81 apresenta os números de redundância  $r_i$ , os números de absorção  $u_i$  e a confiabilidade interna – MDB das observações (para o caso convencional).

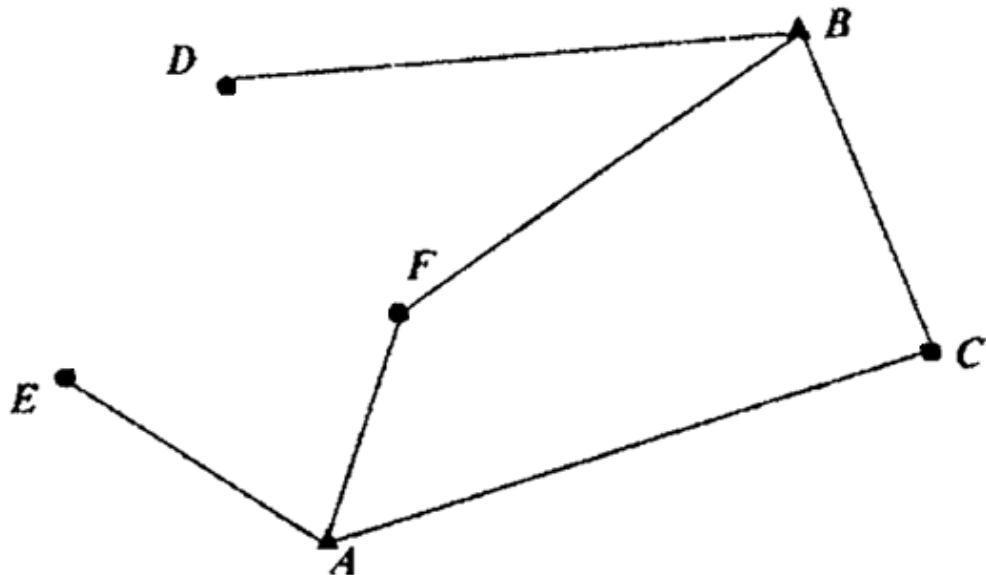


Figura 6.5 – Rede GPS em estudo, sem as linhas-base DC, FC, FE, DE, FD.

Tabela 6.81 – Medidas de confiabilidade das observações, sem DC, FC, FE, DE e FD.

Observação	$r_i$	$u_i$	MDB $\nabla y_i$ (m)
$\Delta X_{AC}$	0,8109	0,1891	0,144
$\Delta Y_{AC}$	0,7865	0,2135	0,143
$\Delta Z_{AC}$	0,8136	0,1864	0,144
$\Delta X_{AE}$	0	1	$\infty$
$\Delta Y_{AE}$	0	1	$\infty$
$\Delta Z_{AE}$	0	1	$\infty$
$\Delta X_{BC}$	0,1891	0,8109	0,144
$\Delta Y_{BC}$	0,2135	0,7865	0,143
$\Delta Z_{BC}$	0,1864	0,8136	0,144
$\Delta X_{BD}$	0	1	$\infty$
$\Delta Y_{BD}$	0	1	$\infty$
$\Delta Z_{BD}$	0	1	$\infty$
$\Delta X_{FA}$	0,5295	0,4705	0,049
$\Delta Y_{FA}$	0,4690	0,5310	0,049
$\Delta Z_{FA}$	0,5574	0,4426	0,048
$\Delta X_{FB}$	0,4705	0,5295	0,049
$\Delta Y_{FB}$	0,5310	0,4690	0,049
$\Delta Z_{FB}$	0,4426	0,5574	0,048

Analizando a Figura 6.5, nota-se que neste cenário, todas as seis linhas-base consideradas contém um ponto de controle e um ponto desconhecido, e, além disso, os vértices  $D$  e  $E$  contém apenas uma linha-base cada.

Analizando a Tabela 6.81, nota-se que excluindo as linhas-base  $DC$ ,  $FC$ ,  $FE$ ,  $DE$  e  $FD$ , ou seja, deixando os vértices  $D$  e  $E$  com apenas uma linha-base cada ( $BD$  e  $AE$ , respectivamente), as observações destas apresentam números de redundância nulos. Em

outras palavras, 100% de um possível erro em alguma destas observações será completamente absorvido pela respectiva coordenada de um destes vértices, o que também é indicado pelo número de absorção  $u_i = 1$  e o  $\text{MDB} - \nabla y_i = \infty$  destas observações na Tabela 6.81.

Um fato interessante é que neste cenário, o vértice  $C$  está contido em duas linhas-base ( $AC$  e  $BC$ ), e o vértice  $F$  também está contido em duas linhas-base ( $FA$  e  $FB$ ) e, além disso, tanto as linhas-base contendo o vértice  $F$  quanto as linhas-base contendo o vértice  $C$  também contém os pontos de controle  $A$  e  $B$ .

Entretanto, analisando e comparando as Tabelas 6.46 e 6.81, nota-se que, excluindo as linhas-base  $DC$ ,  $FC$ ,  $FE$ ,  $DE$  e  $FD$ , os números de redundância das observações de  $AC$ ,  $FA$  e  $FB$  reduziram apenas entre 10% e 15%, porém, os números de redundância das observações de  $BC$  reduziram em quase 50%.

Da mesma maneira, enquanto o MDB das observações de  $FA$  e  $FB$  aumentou em cerca de apenas 5 mm, e o MDB das observações de  $AC$  aumentou em cerca de 1 cm, o MDB das observações de  $BC$  quase duplicou, aumentando entre 6,4 cm e 6,8 cm (ver as Tabelas 6.46 e 6.81).

Portanto, de fato a precisão inferior das observações de  $AC$  compromete as medidas de confiabilidade de  $BC$ , pois o par de linhas-base  $FA$  e  $FB$  contém apenas um vértice desconhecido e dois pontos de controle, e não teve suas medidas de confiabilidade muito afetadas excluindo cinco linhas-base (sendo três destas também relativas ao vértice  $F$ ), enquanto o par de linhas-base  $AC$  e  $BC$  também contém apenas um vértice desconhecido e dois pontos de controle, e as medidas de confiabilidade de  $BC$  foram muito afetadas excluindo cinco linhas-base (sendo que apenas duas destas também continham o vértice  $C$ ).

Isto demonstra a importância de se ter um modelo estocástico o mais homogêneo possível, ou seja, cujas observações possuam precisões de grandeza equivalente, para que as medidas de confiabilidade de algumas observações não sejam degradadas em virtude da precisão inferior de outras observações.

Além disso, é interessante notar que, mesmo excluindo cinco linhas-base (ou seja, diminuindo a redundância do sistema em  $5 \times 3 = 18$  graus de liberdade), sendo três destas também relativas ao vértice  $F$ , os números de redundância das observações de  $FA$  e  $FB$  reduzem em no máximo 15%, e o MDB destas aumenta em no máximo 5 mm. Portanto, uma estratégia interessante a se adotar no planejamento de uma rede geodésica, é garantir que o máximo de vértices desconhecidos desta estejam contidos em pelo menos duas linhas-base

distintas que também contenham pontos de controle, o que resulta em uma maior proteção das observações destas linhas-base a possíveis erros.

Novamente, também observa-se que, para um vértice que esteja contido em apenas duas linhas-base (no caso, o vértice  $F$  em  $FA$  e  $FB$  e o vértice  $C$  em  $AC$  e  $BC$ ), o MDB das respectivas observações destes pares de linhas-base ( $FA$  e  $FB$ , e  $AC$  e  $BC$ ) se torna numericamente igual. No caso, o valor do MDB das observações de  $AC$  e  $BC$  é o mesmo do experimento anterior (não se modificou excluindo as linhas-base  $FD$  e  $DE$ , pois  $AC$  e  $BC$  já não estavam mais interligadas com as demais observações da rede desde o experimento anterior).

Esta questão requer um estudo mais cuidadoso, podendo verificar se, por exemplo, o MDB das observações de duas linhas-base com dois vértices desconhecidos cada também se tornam iguais, contanto que um dos vértices destas esteja contido somente nestas duas linhas-base da rede.

Outra conclusão obtida é que neste cenário, a redundância média das observações resulta em  $\bar{r} = (18 - 12)/18 \cong 0,33$ . Analisando a Tabela 6.81, nota-se que esta condição é de fato obedecida, pois as observações de  $FA$  e  $FB$ , devido a suas precisões equivalentes, possuem  $r_i \cong 0,5$ , as observações de  $AC$  e  $BC$ , devido a suas precisões diferentes, possuem, respectivamente,  $r_i \cong 0,8$  e  $r_i \cong 0,2$ , enquanto as observações de  $AE$  e  $BD$ , devido a falta de redundância sobre estes vértices, possuem  $r_i = 0$ .

Por fim, a última medida de confiabilidade (para o caso convencional) onde foi verificada a influência de se retirar as linhas-base  $AF$ ,  $BF$  e também  $DC$ ,  $FC$ ,  $FE$ ,  $DE$  e  $FD$  foi a confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, e os resultados obtidos são apresentados nas Tabelas 6.82 e 6.83.

Tabela 6.82 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, sem DC, FC, FE, DE e FD (em mm).

	$\Delta X_{AC}$	$\Delta Y_{AC}$	$\Delta Z_{AC}$	$\Delta X_{AE}$	$\Delta Y_{AE}$	$\Delta Z_{AE}$	$\Delta X_{FA}$	$\Delta Y_{FA}$	$\Delta Z_{FA}$
$X_C$	<b>27</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0	0
$Y_C$	0	<b>30</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0
$Z_C$	0	0	<b>27</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>
$X_E$	<b>0</b>	0	0	$\infty$	0	0	<b>0</b>	0	0
$Y_E$	0	<b>0</b>	0	0	$\infty$	0	0	<b>0</b>	0
$Z_E$	0	0	<b>0</b>	0	0	$\infty$	0	0	<b>0</b>
$X_D$	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0	0
$Y_D$	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0
$Z_D$	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>
$X_F$	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>-23</b>	0	0
$Y_F$	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>-26</b>	0
$Z_F$	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>-21</b>

Tabela 6.83 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, sem DC, FC, FE, DE e FD (em mm).

	$\Delta X_{BC}$	$\Delta Y_{BC}$	$\Delta Z_{BC}$	$\Delta X_{BD}$	$\Delta Y_{BD}$	$\Delta Z_{BD}$	$\Delta X_{FB}$	$\Delta Y_{FB}$	$\Delta Z_{FB}$
$X_C$	<b>117</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0	0
$Y_C$	0	<b>112</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0
$Z_C$	0	0	<b>117</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>
$X_E$	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0	0
$Y_E$	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0
$Z_E$	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>
$X_D$	<b>0</b>	0	0	$\infty$	0	0	<b>0</b>	0	0
$Y_D$	0	<b>0</b>	0	0	$\infty$	0	0	<b>0</b>	0
$Z_D$	0	0	<b>0</b>	0	0	$\infty$	0	0	<b>0</b>
$X_F$	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>-23</b>	0	0
$Y_F$	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>-26</b>	0
$Z_F$	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>-27</b>

Analizando as Tabelas as Tabelas 6.82 e 6.83, nota-se que retirando as linha-base  $DC$ ,  $FC$ ,  $FE$ ,  $DE$  e  $FD$ , a influência do MDB das observações de  $FA$  e  $FB$  afetam apenas as coordenadas do vértice  $F$ , a influência do MDB das observações de  $AC$  e  $BC$  afetam apenas as coordenadas do vértice  $C$ , a influência do MDB das observações de  $AE$  afeta apenas as coordenadas do vértice  $E$ , e a influência do MDB das observações de  $BD$  afeta apenas as coordenadas do vértice  $D$ .

Analizando a Figura 6.5, estes resultados são coerentes com a configuração da rede neste cenário, devido a localização dos pontos de controle  $A$  e  $B$  (lembrando que possíveis erros nas observações não são propagados sobre as coordenadas destes).

Além disso, como o MDB das observações de  $AE$  e  $BD$  neste cenário é “infinito”, suas influências sobre as respectivas coordenadas dos vértices  $E$  e  $D$  também são “infinitas”. Já para as observações das linhas-base  $FA$  e  $FB$ , que possuem precisões equivalentes, a influência do MDB destas sobre as coordenadas do vértice  $F$  também são semelhantes, enquanto o MDB das observações de  $BC$  exercem uma influência muito maior sobre as coordenadas do vértice  $C$  do que as observações de  $AC$ , devido a maior precisão das observações de  $BC$ , embora o MDB das respectivas observações em  $AC$  e  $BC$  seja numericamente igual neste cenário (tal como no experimento anterior).

Verificada a influência em retirar as linhas-base  $DC$ ,  $FC$ ,  $FE$ ,  $DE$  e  $FD$  da rede sobre as medidas de confiabilidade convencionais (considerando apenas um *outlier* por vez), também foi verificada esta influência sobre as medidas de confiabilidade generalizadas para múltiplos *outliers* (no caso, para dois *outliers* simultâneos).

Desta forma, após retira as linhas-base  $DC$ ,  $FC$ ,  $FE$ ,  $DE$  e  $FD$ , foram recalculados os coeficientes de correlação múltipla, a confiabilidade interna ( $MDB - \nabla y_i^q$ ), o número de

confiabilidade  $\bar{r}_i^q$  e o número de redundância  $r_i^q$  das observações (para  $q = 2$  outliers simultâneos), e alguns destes são mostrados nas Tabelas a seguir (tanto os valores originais, obtidos retirando somente as linhas-base  $AF$  e  $BF$ , quanto os valores obtidos com este experimento, retirando as linhas-base  $AF$ ,  $BF$  e também  $DC$ ,  $FC$ ,  $FE$ ,  $DE$  e  $FD$ ).

Tabela 6.84 – Alguns coeficientes de correlação múltipla das observações (sem DC, FC, FE, DE e FD).

$\rho_{ij}^q$	$\Delta X_{AC}$	$\Delta Y_{AC}$	$\Delta Z_{AC}$	$\Delta X_{AE}$	$\Delta Y_{AE}$	$\Delta Z_{AE}$	$\Delta X_{FB}$	$\Delta Y_{FB}$	$\Delta Z_{FB}$
$\Delta X_{BC}$	<b>1</b>	0,0097	0,0095	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0	0
$\Delta Y_{BC}$	0,0097	<b>1</b>	0,0097	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0
$\Delta Z_{BC}$	0,0095	0,0097	<b>1</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>
$\Delta X_{BD}$	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0	0
$\Delta Y_{BD}$	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0
$\Delta Z_{BD}$	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>
$\Delta X_{FA}$	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>1</b>	0,0101	0,0112
$\Delta Y_{FA}$	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0	0,0101	<b>1</b>	0,0103
$\Delta Z_{FA}$	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0,0112	0,0103	<b>1</b>

Tabela 6.85 – Alguns valores para o MDB das linhas-base BC, BD e FA (sem DC, FC, FE, DE e FD).

$\nabla y_i^q$ (cm)	$\Delta X_{AC}$	$\Delta Y_{AC}$	$\Delta Z_{AC}$	$\Delta X_{AE}$	$\Delta Y_{AE}$	$\Delta Z_{AE}$	$\Delta X_{FB}$	$\Delta Y_{FB}$	$\Delta Z_{FB}$
$\Delta X_{BC}$	$\infty$	14,4	14,4	<b>14,4</b>	14,4	14,4	<b>14,4</b>	14,4	14,4
$\Delta Y_{BC}$	14,3	$\infty$	14,3	14,3	<b>14,3</b>	14,3	14,3	<b>14,3</b>	14,3
$\Delta Z_{BC}$	14,4	14,4	$\infty$	14,4	14,4	<b>14,4</b>	14,4	14,4	<b>14,4</b>
$\Delta X_{BD}$	$\infty$								
$\Delta Y_{BD}$	$\infty$								
$\Delta Z_{BD}$	$\infty$								
$\Delta X_{FA}$	<b>4,9</b>	4,9	4,9	<b>4,9</b>	4,9	4,9	$\infty$	4,9	4,9
$\Delta Y_{FA}$	4,9	<b>4,9</b>	4,9	4,9	<b>4,9</b>	4,9	4,9	$\infty$	4,9
$\Delta Z_{FA}$	4,8	4,8	<b>4,8</b>	4,8	4,8	<b>4,8</b>	4,8	4,8	$\infty$

Tabela 6.86 – Alguns valores para o  $r_i^q$  das linhas-base BC, BD e FA (sem DC, FC, FE, DE e FD).

$r_i^q$	$\Delta X_{AC}$	$\Delta Y_{AC}$	$\Delta Z_{AC}$	$\Delta X_{AE}$	$\Delta Y_{AE}$	$\Delta Z_{AE}$	$\Delta X_{FB}$	$\Delta Y_{FB}$	$\Delta Z_{FB}$
$\Delta X_{BC}$	<b>0</b>	0,1891	0,1891	<b>0,1891</b>	0,1891	0,1891	<b>0,1891</b>	0,1891	0,1891
$\Delta Y_{BC}$	0,2135	<b>0</b>	0,2135	0,2135	<b>0,2135</b>	0,2135	0,2135	<b>0,2135</b>	0,2135
$\Delta Z_{BC}$	0,1864	0,1864	<b>0</b>	0,1864	0,1864	<b>0,1864</b>	0,1864	0,1864	<b>0,1864</b>
$\Delta X_{BD}$	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0	0
$\Delta Y_{BD}$	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0
$\Delta Z_{BD}$	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>
$\Delta X_{FA}$	<b>0,5295</b>	0,5295	0,5295	<b>0,5295</b>	0,5295	0,5295	<b>0</b>	0,5295	0,5295
$\Delta Y_{FA}$	0,4690	<b>0,4690</b>	0,4690	0,4690	<b>0,4690</b>	0,4690	0,4690	<b>0</b>	0,4690
$\Delta Z_{FA}$	0,5574	0,5574	<b>0,5574</b>	0,5574	0,5574	<b>0,5574</b>	0,5574	0,5574	<b>0</b>

Analizando a Tabela 6.84, nota-se que para observações referentes ao mesmo eixo cartesiano das linhas-base  $AC$  e  $BC$ , os coeficientes de correlação múltipla novamente

assumiram o valor máximo possível  $\rho_{ij}^q = 1$ . Da mesma maneira, para observações referentes a outras linhas-base, os coeficientes de correlação múltipla das observações de  $AC$  e  $BC$  se tornaram nulos. O mesmo pode ser dito para o par de linhas-base  $FA$  e  $FB$ , conforme mostra a Tabela 6.84 e a Figura 6.5.

Já para as observações referentes as linhas-base  $AE$  e  $BD$ , os coeficientes de correlação múltipla entre estas e observações de outras linhas-base também são nulos em todos os casos, pois não existe redundância de observações neste cenário, sendo estas duas linhas-base radiais e isoladas na rede (ver a Figura 6.5). Em outras palavras, as coordenadas dos vértices  $D$  e  $E$  admitem solução única (derivada somente de  $BD$  e  $AE$ , respectivamente).

Quanto ao MDB para  $q = 2$  *outliers* simultâneos, analisando a Tabela 6.85, nota-se que para as observações das linhas-base  $BC$  e  $FA$ , este é “infinito” quando a outra observação suspeita considerada é a observação relativa ao mesmo eixo cartesiano de  $AC$  e  $FB$ , respectivamente. Para os demais casos, o MDB das observações das linhas-base  $BC$  e  $FA$  é igual ao respectivo MDB no caso convencional, pois os coeficientes de correlação nestes casos são iguais a zero (ver a Tabela 6.84). O mesmo pode ser dito para o MDB das observações das linhas-base  $AC$  e  $FB$ , embora estes não sejam apresentados na Tabela 6.85.

Para as observações da linha-base  $BD$ , como os coeficientes de correlação múltipla entre estas e observações de outras linhas-base são nulos neste cenário, o MDB destas é sempre igual ao MDB no caso convencional, ou seja “infinito” (não existe controle destas observações tanto no caso convencional quanto no caso generalizado). De maneira análoga, o mesmo pode ser dito para as observações da linha-base  $AE$  (ver a Figura 6.5 e a Tabela 6.84).

Sobre os números de redundância para  $q = 2$  *outliers* simultâneos, analisando a Tabela 6.86, nota-se que para as observações das linhas-base  $BC$  e  $FA$ , este é nulo quando a outra observação suspeita considerada é a observação relativa ao mesmo eixo cartesiano de  $AC$  e  $FB$ , respectivamente. Para os demais casos, o número de redundância das observações das linhas-base  $BC$  e  $FA$  é igual ao respectivo número de redundância no caso convencional, pois os coeficientes de correlação nestes casos são iguais a zero (ver a Tabela 6.84). O mesmo pode ser dito para o número de redundância das observações das linhas-base  $AC$  e  $FB$ , embora estes não sejam apresentados na Tabela 6.86.

Já para as observações da linha-base  $BD$ , da mesma forma que o MDB, como os coeficientes de correlação múltipla entre estas e observações de outras linhas-base são nulos neste cenário, o número de redundância destas é sempre igual ao respectivo número de redundância no caso convencional, ou seja nulo (não existe controle destas observações tanto

no caso convencional quanto no caso generalizado). De maneira análoga, o mesmo pode ser dito para as observações da linha-base  $AE$  (ver a Figura 6.5 e a Tabela 6.84).

Finalmente, a última medida de confiabilidade para  $q = 2$  outliers simultâneos em que foi verificada a influência de retirar as linhas-base  $DC$ ,  $FC$ ,  $FE$ ,  $DE$  e  $FD$  foi a confiabilidade externa máxima sobre os parâmetros. A Tabela 6.87 mostra alguns dos resultados obtidos.

Tabela 6.87 – Confiabilidade externa máxima de alguns pares de observações ( $q = 2$  outliers simultâneos, sem  $DC$ ,  $FC$ ,  $FE$ ,  $DE$  e  $FD$ ) sobre os parâmetros  $X_C$ ,  $X_E$ ,  $X_D$ ,  $X_F$  (em mm).

	$\Delta X_{AC}$ e $\Delta X_{AE}$	$\Delta X_{AC}$ e $\Delta X_{BC}$	$\Delta X_{AC}$ e $\Delta X_{BD}$	$\Delta X_{FA}$ e $\Delta X_{FB}$
$X_C$	27	$\infty$	27	0
$X_E$	$\infty$	0	0	0
$X_D$	0	0	$\infty$	0
$X_F$	0	0	0	$\infty$

Analizando e comparando as Tabelas 6.82, 6.83 e 6.87, nota-se que a influência de possíveis erros nas observações das linhas-base  $AC$  e  $BC$  sobre as coordenadas dos vértices  $E$ ,  $D$  e  $F$  no caso generalizado, tal como no caso convencional, é nula, e além disso, é “infinita” sobre o vértice  $C$  quando o par de observações considerado destas duas linhas-base é referente ao mesmo eixo cartesiano.

Além disso, a influência máxima dos pares de observações  $\Delta X_{AC}$  e  $\Delta X_{AE}$  e também  $\Delta X_{AC}$  e  $\Delta X_{BC}$ , sobre o parâmetro  $X_C$  é igual a 27 mm, ou seja, é igual a influência de apenas  $\Delta X_{AC}$  no caso convencional (ver a Tabela 6.82). Em outras palavras, tal como no caso convencional (e também no experimento anterior), possíveis erros em observações que não são referentes as linhas-base  $AC$  e  $BC$  não exercem influência nenhuma sobre as coordenadas do vértice  $C$ . Tal fato também pode ser notado pela influência nula do par de observações  $\Delta X_{FA}$  e  $\Delta X_{FB}$  sobre o parâmetro  $X_C$ .

Da mesma maneira, a influência máxima de possíveis erros no par de observações  $\Delta X_{AC}$  e  $\Delta X_{AE}$  sobre o parâmetro  $X_E$ , é igual a influência de apenas a observação  $\Delta X_{AE}$  sobre estes no caso convencional, ou seja, “infinita” (ver a Tabela 6.82). O mesmo pode ser dito para o par de observações  $\Delta X_{AC}$  e  $\Delta X_{BD}$ . Ou seja, verifica-se novamente que, tal como no caso convencional, possíveis erros nas observações das linhas-base  $AC$  e  $BC$  não exercem influência sobre as coordenadas dos vértices  $D$ ,  $E$  e  $F$ .

Já para o par de observações  $\Delta X_{FA}$  e  $\Delta X_{FB}$ , analisando a Tabela 6.87, nota-se que retirando as linhas-base  $DC$ ,  $FC$ ,  $FE$ ,  $DE$  e  $FD$ , a influência máxima de possíveis erros neste par de observações sobre as coordenadas dos vértices  $C$ ,  $D$  e  $E$  no caso generalizado, tal como

no caso convencional, é nula, e além disso, é “infinita” sobre o vértice  $F$  quando o par de observações considerado destas duas linhas-base é referente ao mesmo eixo cartesiano.

Desta forma, excluindo as linhas-base  $DC$ ,  $FC$ ,  $FE$ ,  $DE$  e  $FD$ , ou seja, fazendo com que cada vértice da rede esteja contido em no máximo duas linhas-base distintas (ver a Figura 6.5), as medidas de confiabilidade generalizadas para  $q = 2$  outliers simultâneos são iguais as medidas de confiabilidade do caso convencional ( $q = 1$  outlier por vez apenas) em praticamente todos os casos.

Os únicos casos em que estas medidas diferem são quando as observações consideradas suspeitas de maneira simultânea, para  $q = 2$ , são observações referentes ao mesmo eixo cartesiano dos pares de linhas-base  $AC$  e  $BC$  e também  $FA$  e  $FB$ . Nestes casos, para  $q = 2$ , ao contrário do caso convencional, o menor erro detectável das observações torna-se “infinito” (bem como sua influência no respectivo parâmetro) e consequentemente, o número de redundância destas torna-se nulo (ou seja, não existe controle sobre estas observações nestes casos com  $q = 2$ , embora, teoricamente, exista para  $q = 1$ , pois o MDB não é infinito bem como o número de redundância destas não é nulo, ver a Tabela 6.81).

Após estes quatro experimentos onde foi verificada a influência do número de observações (número de linhas-base) sobre as medidas de confiabilidade, o próximo experimento realizado foi relativo ao número de injunções (pontos de controle), bem como a posição (localização) destes na rede.

Desta forma, os vértices  $A$  e  $B$ , antes pontos de controle, foram tratados como pontos desconhecidos, e o vértice  $F$ , antes um ponto desconhecido, foi tratado como um ponto de controle (Figura 6.6), tendo as suas coordenadas estimadas no ajustamento da rede original com  $n = 39$  observações agora injuncionadas no sistema de equações de maneira absoluta.

Além disso, novamente as linhas-base “repetidas”  $AF$  e  $BF$  não foram consideradas no ajustamento, e a Tabela 6.88 apresenta os números de redundância  $r_i$ , os números de absorção  $u_i$  e a confiabilidade interna – MDB das observações (para o caso convencional – *data snooping*) obtidos neste experimento.

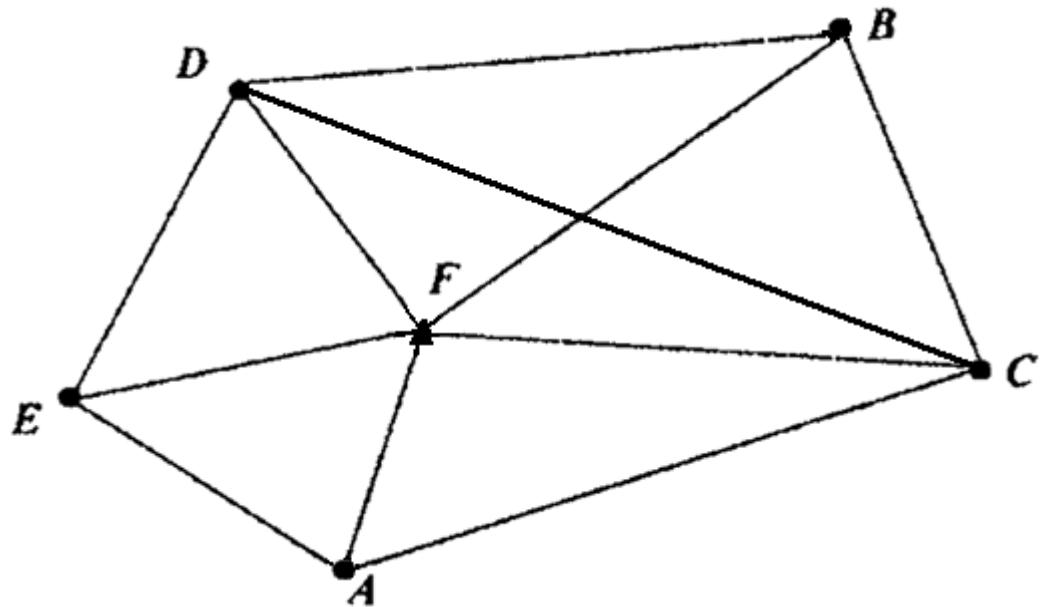


Figura 6.6 – Rede GPS com o vértice F como ponto de controle e os vértices A e B livres.

Analizando a Figura 6.6, nota-se que neste cenário, o número de parâmetros incógnitos do sistema é maior do que da rede original ( $u = 5 \times 3 = 15$ ), pois agora tem-se cinco vértices desconhecidos ( $A, B, C, D$  e  $E$ ), enquanto na configuração original da rede (Figura 6.1), o número de parâmetros incógnitos era  $u = 4 \times 3 = 12$ , pois tinha-se apenas quatro vértices desconhecidos ( $C, D, E$  e  $F$ ). Desta forma, o sistema de equações reduz em três graus de liberdade ( $r = n - u$ ) com este experimento.

Tabela 6.88 – Medidas de confiabilidade das observações, com F como ponto de controle e A e B livres.

Observação	$r_i$	$u_i$	MDB $\nabla y_i$ (m)
$\Delta X_{AC}$	0,8781	0,1219	0,139
$\Delta Y_{AC}$	0,8774	0,1226	0,135
$\Delta Z_{AC}$	0,8807	0,1193	0,138
$\Delta X_{AE}$	0,6229	0,3771	0,077
$\Delta Y_{AE}$	0,6038	0,3962	0,074
$\Delta Z_{AE}$	0,6060	0,3940	0,075
$\Delta X_{BC}$	0,6121	0,3879	0,080
$\Delta Y_{BC}$	0,6325	0,3675	0,083
$\Delta Z_{BC}$	0,6223	0,3777	0,079
$\Delta X_{BD}$	0,7375	0,2625	0,079
$\Delta Y_{BD}$	0,7217	0,2783	0,080
$\Delta Z_{BD}$	0,7337	0,2663	0,079
$\Delta X_{DC}$	0,4729	0,5271	0,073
$\Delta Y_{DC}$	0,5035	0,4965	0,074
$\Delta Z_{DC}$	0,4432	0,5568	0,071
$\Delta X_{DE}$	0,4883	0,5117	0,066
$\Delta Y_{DE}$	0,4913	0,5087	0,067
$\Delta Z_{DE}$	0,4920	0,5080	0,067
$\Delta X_{FA}$	0,2500	0,7500	0,071
$\Delta Y_{FA}$	0,2399	0,7601	0,068
$\Delta Z_{FA}$	0,2631	0,7369	0,070
$\Delta X_{FC}$	0,6995	0,3005	0,079
$\Delta Y_{FC}$	0,6451	0,3549	0,076
$\Delta Z_{FC}$	0,6911	0,3089	0,077
$\Delta X_{FE}$	0,4569	0,5431	0,059
$\Delta Y_{FE}$	0,4766	0,5234	0,060
$\Delta Z_{FE}$	0,4346	0,5654	0,059
$\Delta X_{FD}$	0,5128	0,4872	0,056
$\Delta Y_{FD}$	0,5209	0,4791	0,057
$\Delta Z_{FD}$	0,5838	0,4162	0,059
$\Delta X_{FB}$	0,2690	0,7310	0,065
$\Delta Y_{FB}$	0,2874	0,7126	0,067
$\Delta Z_{FB}$	0,2495	0,7505	0,064

Analizando e comparando as Tabelas 6.46 e 6.88, nota-se que injuncionando as coordenadas do vértice  $F$  e considerando os vértices  $A$  e  $B$  como pontos desconhecidos, os números de redundância das observações das linhas-base contendo os vértices  $A$  e  $B$  ( $AC$ ,  $AE$ ,  $BC$ ,  $BD$ ) reduzem entre 4% e 10%, enquanto para as linhas-base contendo o vértice  $F$  ( $FC$ ,  $FE$ ,  $FD$ ), estas reduções nos números de redundância são inferiores a 1%.

Portanto, embora todas as observações tenham seus números de redundância reduzidos (pois o sistema de equações reduziu em 3 graus de liberdade), nota-se que o fato dos vértices  $A$  e  $B$  serem agora tratados como pontos desconhecidos neste experimento afetou mais os

números de redundância das observações de  $AC$ ,  $AE$ ,  $BC$  e  $BD$ , enquanto o fato do vértice  $F$  ser tratado como ponto de controle fez com que os números de redundância das observações de  $FC$ ,  $FE$  e  $FD$  praticamente não fossem alterados.

Ou seja, novamente verifica-se a importância de um ponto de controle sobre os números de redundância das observações de uma linhas-base. Para as observações da linha-base  $DE$ , por exemplo (onde os vértices  $D$  e  $E$  são pontos desconhecidos em ambos os casos), os números de redundância reduziram por um fator intermediário, entre 1,5% e 2%.

Entretanto, para as observações da linha-base  $FB$ , os números de redundância reduziram entre 31% e 35%, enquanto para as observações da linha-base  $FA$ , os números de redundância reduziram entre 35% e 40%. Estas reduções relativamente significativas para os números de redundância das observações de  $FA$  e  $FB$  em relação as demais se devem a nova localização do ponto de controle nestas linhas-base.

Antes, com a configuração original da rede, os pontos de controle destas linhas-base eram os vértices  $A$  e  $B$ , respectivamente (ver a Figura 6.1). Ou seja, possíveis erros não detectados nestas linhas-base seriam refletidos nos respectivos resíduos das observações, ou absorvidos pelas coordenadas do vértice  $F$  (que está contido em cinco linhas-base distintas).

Neste experimento, com o ponto de controle das linhas-base  $FA$  e  $FB$  sendo o vértice  $F$  (ver a Figura 6.6), possíveis erros não detectados nas observações destas linhas-base são refletidos nos respectivos resíduos, ou absorvidos pelas coordenadas dos vértices  $A$  e  $B$ , respectivamente (que estão contidos somente em três linhas-base distintas cada).

Além disso, com a configuração original da rede, o vértice desconhecido  $F$  estava contido em duas linhas-base que também continham pontos de controle ( $FA$  e  $FB$ ), enquanto neste experimento, os vértices desconhecidos  $A$  e  $B$  estão contidos em apenas uma linha-base cada que também contém um ponto de controle ( $FA$  e  $FB$ , respectivamente).

Provavelmente, a redução um pouco maior nos números de redundância das observações de  $FA$  em relação a  $FB$  se deve ao fato das observações de  $AC$  possuírem menor peso no ajustamento do que as observações de  $BC$  (aumentando desta forma a influência das observações de  $FA$  sobre a estimação dos parâmetros), além da existência de uma linha-base ( $DC$ ) relacionando os vértices  $D$  e  $C$  na rede, e a não existência de uma linha-base relacionando os vértices  $C$  e  $E$  na rede (ver a Figura 6.6).

Também nota-se uma redução um pouco maior nos números de redundância das observações das linhas-base envolvendo o vértice  $E$  ( $AE$  e  $FE$ ), do que das observações envolvendo os vértices  $C$  e  $D$  ( $AC$  e  $FC$ ) e ( $BD$ , e  $FD$ ), respectivamente. Talvez isto deve-se

ao fato dos vértices  $C$  e  $D$  estarem contidos em quatro linhas-base distintas cada, enquanto o vértice  $E$  está contido em três linhas-base distintas.

Sobre os números de absorção das observações, nota-se que estes aumentaram na mesma proporção que os números de redundância destas reduziram, novamente preservando a igualdade  $r_i + u_i = 1$  para todas estas.

Quanto ao MDB das observações, analisando e comparando as Tabelas 6.46 e 6.88, nota-se que injuncionando as coordenadas do vértice  $F$  e considerando os vértices  $A$  e  $B$  como pontos desconhecidos, o MDB das observações de  $DC$ ,  $DE$ ,  $FC$ ,  $FE$  e  $FD$ , em termos práticos, permaneceram os mesmos (aumentaram em no máximo 1 mm).

Desta forma, embora a redundância do sistema de equações tenha diminuído em 3 graus de liberdade, as linhas-base  $FC$ ,  $FE$  e  $FD$  contém um ponto de controle neste experimento (vértice  $F$ ), fazendo com o que o MDB das observações destas se mantivesse o mesmo, em termos práticos.

Já o MDB das observações das linhas-base  $AC$ ,  $AE$ ,  $BC$  e  $BD$  aumentou entre 3 mm e 6 mm, devido ao fato dos vértices  $A$  e  $B$  também serem pontos desconhecidos neste experimento (além da redundância do sistema ter diminuído em três graus de liberdade).

As linhas-base que apresentaram um maior aumento no MDB de suas observações, foram  $FA$  (entre 2,5 cm e 2,7 cm) e  $FB$  (entre 2,1 cm e 2,2 cm). De maneira análoga aos números de redundância, estes aumentos relativamente maiores para o MDB das observações de  $FA$  e  $FB$  em relação as demais se devem a nova localização do ponto de controle nestas linhas-base. Também de maneira análoga aos números de redundância, este aumento um pouco maior no MDB das observações de  $FA$  em relação as observações de  $FB$  provavelmente se deve ao menor peso das observações de  $AC$ , além da presença da linha-base  $DC$  na rede (e a ausência de uma possível linha-base  $CE$ ).

Por fim, a última medida de confiabilidade (para o caso convencional) onde foi verificada a influência de injuncionar as coordenadas do vértice  $F$  e considerar os vértices  $A$  e  $B$  como pontos desconhecidos foi a confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, e os resultados obtidos são apresentados nas Tabelas 6.89, 6.90 e 6.91.

Tabela 6.89 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, com F como ponto de controle e A e B livres (em mm).

	$\Delta X_{AC}$	$\Delta Y_{AC}$	$\Delta Z_{AC}$	$\Delta X_{AE}$	$\Delta Y_{AE}$	$\Delta Z_{AE}$	$\Delta X_{BC}$	$\Delta Y_{BC}$	$\Delta Z_{BC}$	$\Delta X_{BD}$	$\Delta Y_{BD}$	$\Delta Z_{BD}$
<b>X<sub>C</sub></b>	<b>10</b>	0	0	<b>1</b>	0	0	<b>21</b>	0	0	<b>1</b>	0	0
<b>Y<sub>C</sub></b>	0	<b>10</b>	0	0	<b>1</b>	0	0	<b>19</b>	0	0	<b>1</b>	0
<b>Z<sub>C</sub></b>	0	0	<b>9</b>	0	0	<b>1</b>	0	0	<b>20</b>	0	0	<b>3</b>
<b>X<sub>E</sub></b>	<b>-1</b>	0	0	<b>14</b>	0	0	<b>2</b>	0	0	<b>4</b>	0	0
<b>Y<sub>E</sub></b>	0	<b>-1</b>	0	0	<b>15</b>	0	0	<b>1</b>	0	0	<b>4</b>	0
<b>Z<sub>E</sub></b>	0	0	<b>-1</b>	0	0	<b>14</b>	0	0	<b>2</b>	0	0	<b>4</b>
<b>X<sub>D</sub></b>	<b>2</b>	0	0	<b>4</b>	0	0	<b>4</b>	0	0	<b>10</b>	0	0
<b>Y<sub>D</sub></b>	0	<b>2</b>	0	0	<b>5</b>	0	0	<b>3</b>	0	0	<b>10</b>	0
<b>Z<sub>D</sub></b>	0	0	<b>3</b>	0	0	<b>4</b>	0	0	<b>5</b>	0	0	<b>11</b>
<b>X<sub>A</sub></b>	<b>-7</b>	0	0	<b>-15</b>	0	0	<b>1</b>	0	0	<b>1</b>	0	0
<b>Y<sub>A</sub></b>	0	<b>-6</b>	0	0	<b>-14</b>	0	0	<b>1</b>	0	0	<b>1</b>	0
<b>Z<sub>A</sub></b>	0	0	<b>-7</b>	0	0	<b>-16</b>	0	0	<b>2</b>	0	0	<b>1</b>
<b>X<sub>B</sub></b>	<b>2</b>	0	0	<b>1</b>	0	0	<b>-11</b>	0	0	<b>-11</b>	0	0
<b>Y<sub>B</sub></b>	0	<b>2</b>	0	0	<b>1</b>	0	0	<b>-11</b>	0	0	<b>-12</b>	0
<b>Z<sub>B</sub></b>	0	0	<b>2</b>	0	0	<b>1</b>	0	0	<b>-10</b>	0	0	<b>-10</b>

Tabela 6.90 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, com F como ponto de controle e A e B livres (em mm).

	$\Delta X_{DC}$	$\Delta Y_{DC}$	$\Delta Z_{DC}$	$\Delta X_{DE}$	$\Delta Y_{DE}$	$\Delta Z_{DE}$	$\Delta X_{FA}$	$\Delta Y_{FA}$	$\Delta Z_{FA}$	$\Delta X_{FC}$	$\Delta Y_{FC}$	$\Delta Z_{FC}$
<b>X<sub>C</sub></b>	<b>27</b>	0	0	<b>-7</b>	0	0	<b>6</b>	0	0	<b>24</b>	0	0
<b>Y<sub>C</sub></b>	0	<b>25</b>	0	0	<b>-7</b>	0	0	<b>6</b>	0	0	<b>27</b>	0
<b>Z<sub>C</sub></b>	0	0	<b>26</b>	0	0	<b>-8</b>	0	0	<b>6</b>	0	0	<b>24</b>
<b>X<sub>E</sub></b>	<b>-4</b>	0	0	<b>18</b>	0	0	<b>12</b>	0	0	<b>3</b>	0	0
<b>Y<sub>E</sub></b>	0	<b>-4</b>	0	0	<b>18</b>	0	0	<b>14</b>	0	0	<b>3</b>	0
<b>Z<sub>E</sub></b>	0	0	<b>-4</b>	0	0	<b>17</b>	0	0	<b>12</b>	0	0	<b>3</b>
<b>X<sub>D</sub></b>	<b>-11</b>	0	0	<b>-15</b>	0	0	<b>5</b>	0	0	<b>7</b>	0	0
<b>Y<sub>D</sub></b>	0	<b>-12</b>	0	0	<b>-16</b>	0	0	<b>5</b>	0	0	<b>8</b>	0
<b>Z<sub>D</sub></b>	0	0	<b>-13</b>	0	0	<b>-17</b>	0	0	<b>5</b>	0	0	<b>8</b>
<b>X<sub>A</sub></b>	<b>1</b>	0	0	<b>4</b>	0	0	<b>54</b>	0	0	<b>2</b>	0	0
<b>Y<sub>A</sub></b>	0	<b>0</b>	0	0	<b>4</b>	0	0	<b>52</b>	0	0	<b>2</b>	0
<b>Z<sub>A</sub></b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>4</b>	0	0	<b>52</b>	0	0	<b>2</b>
<b>X<sub>B</sub></b>	<b>3</b>	0	0	<b>-4</b>	0	0	<b>2</b>	0	0	<b>6</b>	0	0
<b>Y<sub>B</sub></b>	0	<b>3</b>	0	0	<b>-4</b>	0	0	<b>2</b>	0	0	<b>6</b>	0
<b>Z<sub>B</sub></b>	0	0	<b>3</b>	0	0	<b>-4</b>	0	0	<b>2</b>	0	0	<b>6</b>

Tabela 6.91 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, com F como ponto de controle e A e B livres (em mm).

	$\Delta X_{FE}$	$\Delta Y_{FE}$	$\Delta Z_{FE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta Y_{FD}$	$\Delta Z_{FD}$	$\Delta X_{FB}$	$\Delta Y_{FB}$	$\Delta Z_{FB}$
$X_C$	<b>6</b>	0	0	<b>14</b>	0	0	<b>18</b>	0	0
$Y_C$	0	<b>5</b>	0	0	<b>13</b>	0	0	<b>16</b>	0
$Z_C$	0	0	<b>6</b>	0	0	<b>13</b>	0	0	<b>18</b>
$X_E$	<b>32</b>	0	0	<b>10</b>	0	0	<b>4</b>	0	0
$Y_E$	0	<b>31</b>	0	0	<b>10</b>	0	0	<b>4</b>	0
$Z_E$	0	0	<b>33</b>	0	0	<b>9</b>	0	0	<b>5</b>
$X_D$	<b>11</b>	0	0	<b>27</b>	0	0	<b>11</b>	0	0
$Y_D$	0	<b>10</b>	0	0	<b>27</b>	0	0	<b>11</b>	0
$Z_D$	0	0	<b>12</b>	0	0	<b>25</b>	0	0	<b>13</b>
$X_A$	<b>8</b>	0	0	<b>3</b>	0	0	<b>2</b>	0	0
$Y_A$	0	<b>8</b>	0	0	<b>3</b>	0	0	<b>2</b>	0
$Z_A$	0	0	<b>9</b>	0	0	<b>3</b>	0	0	<b>2</b>
$X_B$	<b>3</b>	0	0	<b>7</b>	0	0	<b>47</b>	0	0
$Y_B$	0	<b>3</b>	0	0	<b>7</b>	0	0	<b>47</b>	0
$Z_B$	0	0	<b>3</b>	0	0	<b>6</b>	0	0	<b>48</b>

Analisando e comparando as Tabelas 6.48 e 6.90, nota-se que para as observações das linhas-base  $DC$  e  $DE$ , a influência do MDB das observações sobre os parâmetros não se modificou muito injuncionando o vértice  $F$  e considerando os vértices  $A$  e  $B$  como pontos desconhecidos, aumentando ou diminuindo em no máximo 2 mm apenas (lembrando que os vértices  $D$ ,  $C$  e  $E$  permaneceram como pontos desconhecidos neste experimento).

Para as observações das linhas-base  $AE$ ,  $BC$  e  $BD$ , analisando e comparando as Tabelas 6.47 e 6.89, nota-se que, embora o MDB destas tenha aumentando entre 3 mm e 6 mm (ver as Tabelas 6.48 e 6.88), a influência de possíveis MDB nas observações destas sobre as coordenadas dos vértices  $C$ ,  $E$  e  $D$  diminuem entre 3 mm e 7 mm injuncionando as coordenadas do vértice  $F$  e considerando os vértices  $A$  e  $B$  como pontos desconhecidos.

Isto se deve ao fato que na configuração original da rede, os vértices  $A$  e  $B$  eram pontos de controle, enquanto neste experimento, são vértices desconhecidos, ou seja, a influência de possíveis MDB nas observações destas linhas-base também passam a influenciar as coordenadas dos vértices  $A$  e  $B$ , e não somente as coordenadas dos vértices  $C$ ,  $E$  e  $D$ .

Entretanto, para a linha-base  $AC$  (cujo MDB das observações também aumentou entre 3 mm e 6 mm), a influência destes sobre as coordenadas dos vértices  $C$ ,  $E$  e  $D$  diminuiu entre 1 mm e 2 mm apenas com este experimento, provavelmente devido ao menor peso das observações desta linha-base na estimação dos parâmetros incógnitos do sistema (ou seja, as próprias coordenadas dos vértices desconhecidos da rede).

Já para as observações das linhas-base  $FC$ ,  $FE$  e  $FD$ , analisando e comparando as Tabelas 6.48 e 6.49 e as Tabelas 6.90 e 6.91, nota-se, embora o MDB destas tenha aumentando em no máximo  $1\text{ mm}$ , a influência de possíveis MDB nas observações destas sobre as coordenadas dos vértices  $C$ ,  $E$  e  $D$  aumentam entre  $2\text{ mm}$  e  $6\text{ mm}$  injuncionando as coordenadas do vértice  $F$  e considerando os vértices  $A$  e  $B$  como pontos desconhecidos.

Isto se deve ao fato que na configuração original da rede, o vértice  $F$  também era um ponto desconhecido, enquanto neste experimento, o vértice  $F$  é um ponto de controle, ou seja, a influência de possíveis MDB nas observações destas linhas-base não influenciam mais nas coordenadas do vértice  $F$ , somente nas coordenadas dos vértices desconhecidos da rede ( $C$ ,  $E$  e  $D$ , por exemplo, além de  $A$  e  $B$ ).

Desta forma, verifica-se que, ao considerar uma linha-base originalmente composta por dois pontos desconhecidos em uma linha-base com um ponto de controle e um ponto desconhecido, pelo fato de possíveis erros não detectados nas observações destas não poderem mais ser propagados para as coordenadas do agora ponto de controle, em geral a influência destes sobre as coordenadas dos vértices desconhecidos da rede aumenta.

Em outras palavras, uma linha-base composta por dois vértices desconhecidos propaga (distribui) possíveis erros não detectados principalmente sobre estes dois vértices desconhecidos que a compõem, exercendo pouca influência nos demais vértices desconhecidos da rede, enquanto uma linha-base composta por um ponto de controle e um vértice desconhecido não propaga possíveis erros não detectados sobre o ponto de controle, somente para o seu vértice desconhecido (ou seja, não distribui estes erros nos dois vértices). Isto faz com que a influência de possíveis erros não detectados desta linha-base com um ponto de controle e um ponto desconhecido sobre os demais vértices da rede seja maior do que caso esta linha-base fosse constituída por dois pontos desconhecidos.

Para a linha-base  $FA$ , analisando e comparando as Tabelas 6.48 e 6.90, nota-se que a influência de possíveis MDB nas observações desta linha-base diminuem sobre as coordenadas dos vértices  $C$  (entre  $2\text{ mm}$  e  $4\text{ mm}$ ) e  $D$  (entre  $5\text{ mm}$  e  $7\text{ mm}$ ), devido a nova localização do ponto de controle desta linha-base (antes o vértice  $A$  e agora o vértice  $F$ , ver a Figura 6.6). Da mesma maneira, a influência de possíveis MDB nas observações desta linha-base aumentaram sobre as coordenadas do vértices  $E$  (mas entre  $1\text{ mm}$  e  $2\text{ mm}$  apenas).

Finalmente para a linha-base  $FB$ , analisando e comparando as Tabelas 6.49 e 6.91, nota-se que a influência de possíveis MDB nas observações desta linha-base aumentam sobre as coordenadas dos vértice  $C$  (entre  $7\text{ mm}$  e  $8\text{ mm}$ ) e diminuíram sobre as coordenadas do

vértice  $E$  (entre 5 mm e 7 mm), devido a nova localização do ponto de controle desta linha-base (antes o vértice  $B$  e agora o vértice  $F$ , ver a Figura 6.6). Da mesma maneira, em termos práticos, a influência de possíveis MDB nas observações desta linha-base sobre as coordenadas do vértice  $D$  permaneceram a mesma (diferença de no máximo 1 mm).

Ainda sobre as linhas-base  $FA$  e  $FB$ , a influência do MDB de suas observações sobre as coordenadas do vértice  $F$  (na configuração original da rede, com este vértice como ponto desconhecido), situava-se entre 15 mm e 18 mm (ver as Tabelas 6.48 e 6.49). Entretanto, injuncionando as coordenadas do vértice  $F$  e considerando os vértices  $A$  e  $B$  como pontos desconhecidos, a influência do MDB das observações de  $FA$  e  $FB$  sobre os vértices  $A$  e  $B$ , respectivamente, situa-se entre 52 mm e 54 mm ( $FA$  sobre o vértice  $A$ , ver a Tabela 6.90), e entre 47 mm e 48 mm ( $FB$  sobre o vértice  $B$ , ver a Tabela 6.91).

Ou seja, modificando o ponto de controle das linhas-base  $FA$  e  $FB$  (de  $A$  e  $B$ , respectivamente, para  $F$ ), a influência do MDB de suas observações sobre as coordenadas dos respectivos pontos desconhecidos contidos nestas linhas-base aumenta consideravelmente.

Desta forma, a injunção das coordenadas do vértice  $F$ , considerando os vértices  $A$  e  $B$  como pontos desconhecidos, apresentou resultados diversos nas medidas de confiabilidade convencionais das observações. Para as observações das linhas-base  $DE$  e  $DC$ , por exemplo, estas medidas praticamente não se alteraram. Para as observações de  $FC$ ,  $FE$  e  $FD$ , os números de redundância e o MDB destas permaneceram praticamente os mesmos, embora o sistema tenha reduzido sua redundância em três graus de liberdade, mas a influência de possíveis erros não detectados sobre os parâmetros aumentou um pouco. Já para as observações de  $AC$ ,  $AE$ ,  $BC$  e  $BD$ , os números de redundância diminuíram um pouco e o MDB destas aumentou um pouco, mas a confiabilidade externa sobre os parâmetros melhorou sensivelmente. Por fim, para as observações de  $FA$  e  $FB$ , os números de redundância diminuíram significativamente, o MDB destas também aumentou, e além disso, a confiabilidade externa sobre os parâmetros também foi prejudicada.

Verificada a influência em considerar o vértice  $F$  como ponto de controle e  $A$  e  $B$  como pontos desconhecidos sobre as medidas de confiabilidade convencionais (considerando apenas um *outlier* por vez), também foi verificada esta influência sobre as medidas de confiabilidade generalizadas para múltiplos *outliers* (no caso, para dois *outliers* simultâneos).

Desta forma, após injuncionar as coordenadas do vértice  $F$  e considerar os vértices  $A$  e  $B$  como pontos desconhecidos, foram recalculados os coeficientes de correlação múltipla, a confiabilidade interna (MDB –  $\nabla y_i^q$ ), o número de confiabilidade  $\bar{r}_i^q$  e o número de

redundância  $r_i^q$  das observações (para  $q = 2$  outliers simultâneos), e alguns destes são mostrados nas Tabelas a seguir (tanto os valores originais, obtidos considerando os vértices  $A$  e  $B$  como pontos de controle e o vértice  $F$  como ponto desconhecido, quanto os valores obtidos com este experimento, injuncionando as coordenadas do vértice  $F$  e considerando os pontos  $A$  e  $B$  como pontos desconhecidos).

Tabela 6.92 – Coeficientes de correlação múltipla para algumas observações  
(A e B como pontos de controle e F como ponto desconhecido).

$\rho_{ij}^q$	$\Delta X_{AC}$	$\Delta X_{AE}$	$\Delta X_{BC}$	$\Delta X_{BD}$	$\Delta X_{DE}$	$\Delta X_{FA}$	$\Delta X_{FE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta X_{FB}$
$\Delta X_{AC}$	<b>1</b>	0,0430	0,2073	0,0626	0,0486	0,0689	0,0090	0,0638	0,0758
$\Delta X_{AE}$	0,0430	<b>1</b>	0,1049	0,1499	0,3403	0,2169	0,5113	0,1009	0,2387
$\Delta X_{BC}$	0,2073	0,1049	<b>1</b>	0,1528	0,1185	0,1680	0,0220	0,1557	0,1849
$\Delta X_{BD}$	0,0626	0,1499	0,1528	<b>1</b>	0,2364	0,1812	0,0928	0,3571	0,1994
$\Delta X_{DE}$	0,0486	0,3403	0,1185	0,2364	<b>1</b>	0,0054	0,6341	0,5047	0,0059
$\Delta X_{FA}$	0,0689	0,2169	0,1680	0,1812	0,0054	<b>1</b>	0,1833	0,1809	0,6237
$\Delta X_{FE}$	0,0090	0,5113	0,0220	0,0928	0,6341	0,1833	<b>1</b>	0,3783	0,2017
$\Delta X_{FD}$	0,0638	0,1009	0,1557	0,3571	0,5047	0,1809	0,3783	<b>1</b>	0,1991
$\Delta X_{FB}$	0,0758	0,2387	0,1849	0,1994	0,0059	0,6237	0,2017	0,1991	<b>1</b>

Tabela 6.93 – Coeficiente de correlação múltipla para algumas observações  
(A e B como pontos desconhecidos e F como ponto de controle).

$\rho_{ij}^q$	$\Delta X_{AC}$	$\Delta X_{AE}$	$\Delta X_{BC}$	$\Delta X_{BD}$	$\Delta X_{DE}$	$\Delta X_{FA}$	$\Delta X_{FE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta X_{FB}$
$\Delta X_{AC}$	<b>1</b>	0,1345	0,1563	0,0033	0,0931	0,3905	0,0196	0,0857	0,1293
$\Delta X_{AE}$	0,1345	<b>1</b>	0,0033	0,0560	0,2976	0,8597	0,5029	0,1440	0,0487
$\Delta X_{BC}$	0,1563	0,0033	<b>1</b>	0,2484	0,0702	0,0837	0,0610	0,1366	0,6058
$\Delta X_{BD}$	0,0033	0,0560	0,2484	<b>1</b>	0,1960	0,0537	0,1342	0,3471	0,6202
$\Delta X_{DE}$	0,0931	0,2976	0,0702	0,1960	<b>1</b>	0,2285	0,6756	0,5330	0,2178
$\Delta X_{FA}$	0,3905	0,8597	0,0837	0,0537	0,2285	<b>1</b>	0,4571	0,1780	0,1119
$\Delta X_{FE}$	0,0196	0,5029	0,0610	0,1342	0,6756	0,4571	<b>1</b>	0,3713	0,1596
$\Delta X_{FD}$	0,0857	0,1440	0,1366	0,3471	0,5330	0,1780	0,3713	<b>1</b>	0,3957
$\Delta X_{FB}$	0,1293	0,0487	0,6058	0,6202	0,2178	0,1119	0,1596	0,3957	<b>1</b>

Tabela 6.94 – Valores para o MDB de algumas observações com  $q = 2$   
(A e B como pontos de controle e F como ponto desconhecido).

$\nabla y_i^q$ (cm)	$\Delta X_{AC}$	$\Delta X_{AE}$	$\Delta X_{BC}$	$\Delta X_{BD}$	$\Delta X_{DE}$	$\Delta X_{FA}$	$\Delta X_{FE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta X_{FB}$
$\Delta X_{AC}$	<b>13,5</b>	13,5	13,8	13,6	13,5	13,6	13,5	13,6	13,6
$\Delta X_{AE}$	7,2	<b>7,2</b>	7,2	7,2	7,6	7,3	8,3	7,2	7,4
$\Delta X_{BC}$	7,9	7,7	<b>7,7</b>	7,8	7,8	7,8	7,7	7,8	7,8
$\Delta X_{BD}$	7,6	7,7	7,7	<b>7,6</b>	7,8	7,7	7,6	8,1	7,8
$\Delta X_{DE}$	6,5	6,9	6,5	6,6	<b>6,4</b>	6,4	8,3	7,5	6,4
$\Delta X_{FA}$	4,5	4,6	4,5	4,5	4,5	<b>4,5</b>	4,5	4,5	5,7
$\Delta X_{FE}$	5,9	6,9	5,9	5,9	7,6	6,0	<b>5,9</b>	6,4	6,0
$\Delta X_{FD}$	5,6	5,6	5,6	5,9	6,4	5,6	6,0	<b>5,6</b>	5,7
$\Delta X_{FB}$	4,4	4,5	4,4	4,5	4,4	5,6	4,5	4,5	<b>4,4</b>

Tabela 6.95 – Valores para o MDB de algumas observações com  $q = 2$   
(A e B como pontos desconhecidos e F como ponto de controle).

$\nabla y_i^q$ (cm)	$\Delta X_{AC}$	$\Delta X_{AE}$	$\Delta X_{BC}$	$\Delta X_{BD}$	$\Delta X_{DE}$	$\Delta X_{FA}$	$\Delta X_{FE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta X_{FB}$
$\Delta X_{AC}$	<b>13,9</b>	14,0	14,0	13,9	13,9	15,1	13,9	13,9	14,0
$\Delta X_{AE}$	7,8	<b>7,7</b>	7,7	7,7	8,1	15,1	8,9	7,8	7,7
$\Delta X_{BC}$	8,1	8,0	<b>8,0</b>	8,3	8,0	8,0	8,0	8,1	10,1
$\Delta X_{BD}$	7,9	7,9	8,2	<b>7,9</b>	8,1	7,9	8,0	8,4	10,1
$\Delta X_{DE}$	6,6	6,9	6,6	6,7	<b>6,6</b>	6,7	8,9	7,8	6,7
$\Delta X_{FA}$	7,8	14,0	7,2	7,2	7,3	<b>7,1</b>	8,0	7,3	7,2
$\Delta X_{FE}$	5,9	6,9	6,0	6,0	8,1	6,7	<b>5,9</b>	6,4	6,0
$\Delta X_{FD}$	5,6	5,6	5,6	5,9	6,6	5,7	6,0	<b>5,6</b>	6,1
$\Delta X_{FB}$	6,5	6,5	8,2	8,3	6,7	6,5	6,6	7,1	<b>6,5</b>

Tabela 6.96 – Valores para o  $r_i^q$  de algumas observações com  $q = 2$   
(A e B como pontos de controle e F como ponto desconhecido).

$r_i^q$	$\Delta X_{AC}$	$\Delta X_{AE}$	$\Delta X_{BC}$	$\Delta X_{BD}$	$\Delta X_{DE}$	$\Delta X_{FA}$	$\Delta X_{FE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta X_{FB}$
$\Delta X_{AC}$	<b>0,9217</b>	0,9200	0,8821	0,9181	0,9195	0,9173	0,9216	0,9179	0,9164
$\Delta X_{AE}$	0,7169	<b>0,7182</b>	0,7103	0,7021	0,6350	0,6844	0,5304	0,7109	0,6773
$\Delta X_{BC}$	0,6356	0,6568	<b>0,6641</b>	0,6486	0,6548	0,6454	0,6638	0,6480	0,6414
$\Delta X_{BD}$	0,7941	0,7793	0,7786	<b>0,7972</b>	0,7527	0,7711	0,7904	0,6956	0,7655
$\Delta X_{DE}$	0,5048	0,4474	0,4989	0,4777	<b>0,5060</b>	0,5060	0,3026	0,3771	0,5060
$\Delta X_{FA}$	0,6352	0,6082	0,6203	0,6173	0,6383	<b>0,6383</b>	0,6168	0,6174	0,3900
$\Delta X_{FE}$	0,4646	0,3432	0,4644	0,4606	0,2778	0,4490	<b>0,4646</b>	0,3981	0,4457
$\Delta X_{FD}$	0,5149	0,5117	0,5045	0,4511	0,3853	0,5001	0,4430	<b>0,5170</b>	0,4965
$\Delta X_{FB}$	0,5896	0,5592	0,5727	0,5694	0,5930	0,3623	0,5688	0,5695	<b>0,5930</b>

Tabela 6.97 – Valores para o  $r_i^q$  de algumas observações com  $q = 2$   
(A e B como pontos desconhecidos e F como ponto de controle).

$r_i^q$	$\Delta X_{AC}$	$\Delta X_{AE}$	$\Delta X_{BC}$	$\Delta X_{BD}$	$\Delta X_{DE}$	$\Delta X_{FA}$	$\Delta X_{FE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta X_{FB}$
$\Delta X_{AC}$	<b>0,8781</b>	0,8622	0,8566	0,8781	0,8705	0,7442	0,8777	0,8716	0,8634
$\Delta X_{AE}$	0,6116	<b>0,6229</b>	0,6229	0,6209	0,5677	0,1625	0,4654	0,6100	0,6214
$\Delta X_{BC}$	0,5972	0,6121	<b>0,6121</b>	0,5743	0,6091	0,6078	0,6098	0,6007	0,3875
$\Delta X_{BD}$	0,7375	0,7352	0,6920	<b>0,7375</b>	0,7092	0,7354	0,7242	0,6486	0,4538
$\Delta X_{DE}$	0,4841	0,4451	0,4859	0,4696	<b>0,4883</b>	0,4628	0,2655	0,3496	0,4652
$\Delta X_{FA}$	0,2118	0,0652	0,2482	0,2492	0,2369	<b>0,2500</b>	0,1977	0,2420	0,2468
$\Delta X_{FE}$	0,4568	0,3414	0,4552	0,4487	0,2484	0,3615	<b>0,4569</b>	0,3939	0,4453
$\Delta X_{FD}$	0,5090	0,5022	0,5033	0,4510	0,3671	0,4966	0,4421	<b>0,5128</b>	0,4325
$\Delta X_{FB}$	0,2645	0,2683	0,1703	0,1655	0,2562	0,2656	0,2621	0,2269	<b>0,2690</b>

Analisando e comparando as Tabelas 6.92 e 6.93, nota-se que os coeficientes de correlação múltipla das observações pouco se alteraram ao considerar o vértice  $F$  como ponto de controle e os vértices  $A$  e  $B$  como pontos desconhecidos, oscilando entre apenas  $\pm 10\%$  na maior parte dos casos.

Entretanto, a Tabela 6.98 apresenta os pares de linhas-base (considerando observações referentes aos mesmo eixo cartesiano) para os quais houveram os maiores aumentos nos

coeficientes de correlação múltipla, bem como para os quais houveram as maiores reduções nos coeficientes de correlação múltipla.

Tabela 6.98 – Pares de linhas-base com maiores aumentos e reduções em  $\rho_{ij}^q$  (com F como ponto de controle).

Par de linhas-base	Aumento em $\rho_{ij}^q$	Par de linhas-base	Redução em $\rho_{ij}^q$
FA e AE	Em torno de 63%	FA e FB	Em torno de 51%
FB e BC	Em torno de 43%	AE e FB	Em torno de 20%
FB e BD	Em torno de 42%	FA e BD	Em torno de 12%
FA e AC	Em torno de 31%	AE e BC	Em torno de 10%
FA e FE	Em torno de 28%	AE e BD	Em torno de 9%

Analizando a Figura 6.6 e a Tabela 6.98, nota-se que, considerando o vértice  $F$  como ponto de controle e os vértices  $A$  e  $B$  como pontos desconhecidos, para linhas-base que se localizam próximas na rede, com pelo menos um vértice em comum (como por exemplo,  $FA$  e  $AE$ ,  $FB$  e  $BC$ ,  $FB$  e  $BD$ ,  $FA$  e  $AC$ ,  $FA$  e  $FE$ ), os coeficientes de correlação múltipla das observações em geral aumentam, e para linhas-base que se localizam mais distantes entre si na rede, sem nenhum vértice em comum (como por exemplo,  $AE$  e  $FB$ ,  $FA$  e  $BD$ ,  $AE$  e  $BC$ ,  $AE$  e  $BD$ ), os coeficientes de correlação múltipla das observações em geral diminuem.

Isto se deve a localização central do ponto de controle  $F$  na rede, pois, com suas coordenadas fixas, a propagação de possíveis erros nas linhas-base  $FA$ ,  $FE$ ,  $FD$ ,  $FB$  e  $FC$  se torna “radial”, em direção aos extremos da rede, e a correlação entre observações de diferentes linhas-base tem um caráter mais local, pois o vértice central  $F$  é um ponto de coordenadas fixas. Além disso, nota-se também que os aumentos nos coeficientes de correlação múltipla, em geral, foram mais significativos do que as reduções destes.

Entretanto, este caso geral também apresenta exceções. Por exemplo, analisando e comparando as Tabelas 6.92 e 6.93, nota-se que os coeficientes de correlação múltipla entre observações das linhas-base  $AE$  e  $DE$  e também  $BD$  e  $DE$  diminuíram entre 4% e 5% considerando o vértice central  $F$  como ponto de controle, mesmo com  $AE$  e  $DE$  e também  $BD$  e  $DE$  sendo pares de linhas-base “vizinhas” na rede (com pelo menos um vértice em comum). Isto se deve ao fato que, na configuração original da rede, a correlação entre as observações de  $AE$  e  $BD$  com as observações de  $DE$  era maior devido ao fato dos vértices  $A$  e  $B$  serem pontos de controle (Figura 6.1), enquanto que neste experimento, com o vértice  $F$  como ponto de controle e os vértices  $A$  e  $B$  como pontos desconhecidos, esta correlação entre as observações de  $DE$  com as observações de  $AE$  e  $BD$  diminui, pois os vértices  $A$  e  $B$  também são pontos desconhecidos.

Analisando e comparando as Tabelas 6.94 e 6.95, nota-se que, tal como os coeficientes de correlação múltipla, o MDB das observações para  $q = 2$  *outliers* simultâneos pouco se alteraram ao considerar o vértice  $F$  como ponto de controle e os vértices  $A$  e  $B$  como pontos desconhecidos, aumentando em no máximo 5 mm para a maior parte dos casos (estes sempre aumentam ou permanecem o mesmo porque o MDB de todas as observações no caso convencional aumentou ou permaneceu o mesmo, já que a redundância do sistema diminuiu em três graus de liberdade).

As únicas exceções são para as observações das linhas-base  $FA$  e  $FB$ , onde o MDB para  $q = 2$  *outliers* simultâneos aumentou em, no mínimo, 1,3 cm para  $FA$  e 0,9 cm para  $FB$ . Entretanto, conforme já visto, o MDB das observações de  $FA$ , no caso convencional, aumentou entre 2,5 cm e 2,7 cm e o MDB das observações de  $FB$ , no caso convencional, aumentou entre 2,1 cm e 2,2 cm.

Ou seja, embora o MDB para  $q = 2$  *outliers* nunca diminuiu considerando o vértice  $F$  como ponto de controle e os vértices  $A$  e  $B$  como pontos desconhecidos (diminuindo, desta forma, em três graus de liberdade a redundância do sistema), nota-se que neste experimento, as reduções nos coeficientes de correlação múltipla entre alguns pares de observações ( $FA$  e  $FB$ , por exemplo) já se mostraram mais significativas do que em outros experimentos no cálculo desta medida de confiabilidade para  $q = 2$  (em outras palavras, a influência do aumento no MDB das observações no caso convencional se tornou menos significativa em alguns cenários para  $q = 2$ ).

A Tabela 6.99 apresenta os pares de linhas-base (considerando observações referentes aos mesmo eixo cartesiano) para os quais houveram os maiores aumentos no MDB para  $q = 2$ .

Tabela 6.99 – Pares de linhas-base com os maiores aumentos em  $\nabla y_i^q$  (com ponto  $F$  como ponto de controle).

Par de linhas-base (com observações referentes ao mesmo eixo cartesiano)	Aumento em $\nabla y_i^q$
Observações de $FA$ considerando $q = 2$ para observações de $AE$	Em torno de 92 mm
Observações de $AE$ considerando $q = 2$ para observações de $FA$	Em torno de 77 mm
Observações de $FB$ considerando $q = 2$ para observações de $BD$	Em torno de 38 mm
Observações de $FB$ considerando $q = 2$ para observações de $BC$	Em torno de 38 mm
Observações de $FA$ considerando $q = 2$ para observações de $FE$	Em torno de 34 mm

Analizando a Tabela 6.99, nota-se que o par de linhas-base  $FA$  e  $AE$  foi o mais afetado considerando o vértice  $F$  como ponto de controle. Analisando a Figura 6.1, nota-se que na configuração original da rede, com o vértice  $A$  como ponto de controle e o vértice  $F$  como

ponto desconhecido, possíveis erros na linha-base  $FA$  não eram diretamente propagados sobre a linha-base  $AE$  e vice-versa.

Entretanto, analisando a Figura 6.6, nota-se que com o vértice  $A$  como ponto desconhecido e o vértice  $F$  como ponto de controle, possíveis erros na linha-base  $FA$  podem ser diretamente propagados sobre  $AE$  e vice-versa, pois o vértice  $A$  agora é um ponto desconhecido, e por isto este grande aumento no MDB destas observações para  $q = 2$  (além do fato das observações de  $AC$  possuírem menor peso no ajustamento, ou seja, a correlação entre as observações de  $FA$  e  $AE$  é maior do que a correlação entre as observações de  $FA$  e  $AC$  ou  $AE$  e  $AC$ ). Conclusões análogas podem ser obtidas para os pares de observações  $FB$  e  $BC$  e  $FB$  e  $BD$ , também presentes na Tabela 6.99. Ou seja, mais uma vez evidencia-se o caráter mais local na correlação de pares de observações na rede, com o vértice central  $F$  como ponto de controle.

Sobre os números de redundância para  $q = 2$  *outliers* simultâneos, analisando e comparando as Tabelas 6.96 e 6.97, nota-se que, em geral, estes pouco se alteraram ao considerar o vértice  $F$  como ponto de controle e os vértices  $A$  e  $B$  como pontos desconhecidos, reduzindo em no máximo 10% para a maior parte dos casos (estes sempre diminuem ou permanecem os mesmos porque o número de redundância de todas as observações no caso convencional diminuiu ou permaneceu praticamente o mesmo, já que a redundância do sistema diminuiu em três graus de liberdade).

Novamente, as únicas exceções são para as observações das linhas-base  $FA$  e  $FB$ , onde o número de redundância para  $q = 2$  *outliers* simultâneos reduziu em, no mínimo, 13% para  $FA$  e 10% para  $FB$ . Entretanto, conforme já visto, o número de redundância das observações de  $FA$ , no caso convencional, aumentou entre 35% e 40% e o número de redundância das observações de  $FB$ , no caso convencional, aumentou entre 31% e 35%.

Ou seja, nota-se novamente que neste experimento, as reduções nos coeficientes de correlação múltipla entre alguns pares de observações ( $FA$  e  $FB$ , por exemplo) já se mostraram mais significativas do que em outros experimentos no cálculo das medidas de confiabilidade para  $q = 2$  (em outras palavras, a redução do número de redundância das observações no caso convencional se tornou menos significativa em alguns cenários para  $q = 2$ ).

Finalmente, a última medida de confiabilidade para  $q = 2$  *outliers* simultâneos em que foi verificada a influência de considerar o vértice  $F$  como ponto de controle e os vértices  $A$  e

B como pontos desconhecidos foi a confiabilidade externa máxima sobre os parâmetros. As Tabelas 6.100 e 6.101 mostra alguns dos resultados obtidos.

Tabela 6.100 – Confiabilidade externa máxima de alguns pares de observações ( $q = 2$  outliers, F como ponto de controle e A e B livres), sobre os parâmetros  $X_C$ ,  $X_E$ ,  $X_D$ ,  $X_A$  e  $X_B$  (em mm).

	$\Delta X_{AC}$ e $\Delta X_{AE}$	$\Delta X_{AC}$ e $\Delta X_{BC}$	$\Delta X_{AC}$ e $\Delta X_{BD}$	$\Delta X_{AC}$ e $\Delta X_{DC}$	$\Delta X_{AC}$ e $\Delta X_{DE}$
$X_C$	10	24	10	31	13
$X_E$	14	2	4	4	18
$X_D$	5	5	10	11	16
$X_A$	18	7	7	7	8
$X_B$	3	11	11	4	5

Tabela 6.101 – Confiabilidade externa máxima de alguns pares de observações ( $q = 2$  outliers, F como ponto de controle e A e B livres), sobre os parâmetros  $X_C$ ,  $X_E$ ,  $X_D$ ,  $X_A$  e  $X_B$  (em mm).

	$\Delta X_{FA}$ e $\Delta X_{FC}$	$\Delta X_{FA}$ e $\Delta X_{FE}$	$\Delta X_{FA}$ e $\Delta X_{FD}$	$\Delta X_{FA}$ e $\Delta X_{FB}$
$X_C$	25	11	16	19
$X_E$	13	44	18	14
$X_D$	9	15	29	13
$X_A$	54	65	55	54
$X_B$	6	5	8	48

Analizando e comparando as Tabelas 6.89, 6.90 e 6.91 e as Tabela 6.100 e 6.101, nota-se que a influência máxima dos pares de observações considerados ( $q = 2$ ), em geral, é um pouco menor do que a soma das influências individuais destas observações no caso convencional ( $q = 1$ ), com uma diferença máxima de apenas 7 mm para o par de observações  $\Delta X_{AC}$  e  $\Delta X_{BC}$  sobre o parâmetro  $X_C$ .

As únicas exceções ocorrem para o par de observações  $\Delta X_{FA}$  e  $\Delta X_{FE}$  sobre o parâmetro  $X_E$  (influência máxima destas para  $q = 2$  é igual a soma das influências individuais destas para  $q = 1$ ), e também o par de observações  $\Delta X_{FA}$  e  $\Delta X_{FE}$  sobre o parâmetro  $X_A$  (influência máxima destas para  $q = 2$  é 3 mm maior do que a soma das influências individuais destas para  $q = 1$ ). Tal resultado faz sentido, considerando o valor relativamente alto para os coeficientes de correlação múltipla entre observações de *FA* e *FE* neste experimento com o vértice *F* como ponto de controle (ver a Tabela 6.93).

Comparando os resultados da confiabilidade externa máxima destes pares de observações sobre os parâmetros, com a configuração original da rede (vértices *A* e *B* como pontos de controle e vértice *F* como ponto desconhecido), e a configuração deste experimento (vértices *A* e *B* como pontos desconhecidos e vértice *F* como ponto de controle), analisando e comparando as Tabelas 6.56 e 6.100, nota-se que em geral, para os pares de observações

considerados nestas, a influência máxima de possíveis erros não detectados sobre os parâmetros diminui, tal como no caso convencional.

Entretanto, analisando e comparando as Tabelas 6.57 e 6.101, nota-se que em geral, para os pares de observações considerados nestas, a influência máxima de possíveis erros não detectados sobre os parâmetros aumenta, tal como no caso convencional. O maior aumento ocorreu para o par de observações  $\Delta X_{FA}$  e  $\Delta X_{FE}$  sobre o parâmetro  $X_E$  (de 27 mm com a configuração original da rede para 44 mm com a configuração neste experimento). Além disso, para o par de observações  $\Delta X_{FA}$  e  $\Delta X_{FB}$ , a influência sobre os parâmetros  $X_C, X_E, X_D$  diminui (em até 14 mm) com a configuração da rede neste experimento.

Tais resultados fazem sentido, considerando o aumento relativamente alto para os coeficientes de correlação múltipla entre as observações de  $FA$  e  $FE$  e a redução relativamente alta para os coeficientes de correlação múltipla entre as observações de  $FA$  e  $FB$  com o vértice  $F$  como ponto de controle (ver as Tabelas 6.92 e 6.93).

Infelizmente, não é possível para a rede em estudo, considerar dois vértices como pontos de controle, sendo um destes o vértice central  $F$ , sem excluir uma linha-base da rede, pois não faz sentido uma linha-base da rede conter dois pontos de controle (ver a Figura 6.1). Desta forma, não foi possível fazer uma análise conclusiva sobre a melhor localização dos pontos de controle na rede (central ou mais periférica), em termos de confiabilidade das observações, sendo esta uma questão que requer um estudo mais detalhado.

Os dois últimos experimentos relacionados com a geometria da rede em estudo são referentes a configuração da mesma. Desta forma, o primeiro destes consiste em retirar o vértice  $F$  da rede, (ou seja, excluir as linhas-base  $FA, FB, FC, FD$  e  $FE$ , além de  $AF$  e  $BF$ ), mantendo os pontos  $A$  e  $B$  como pontos de controle, conforme ilustra a Figura 6.7.

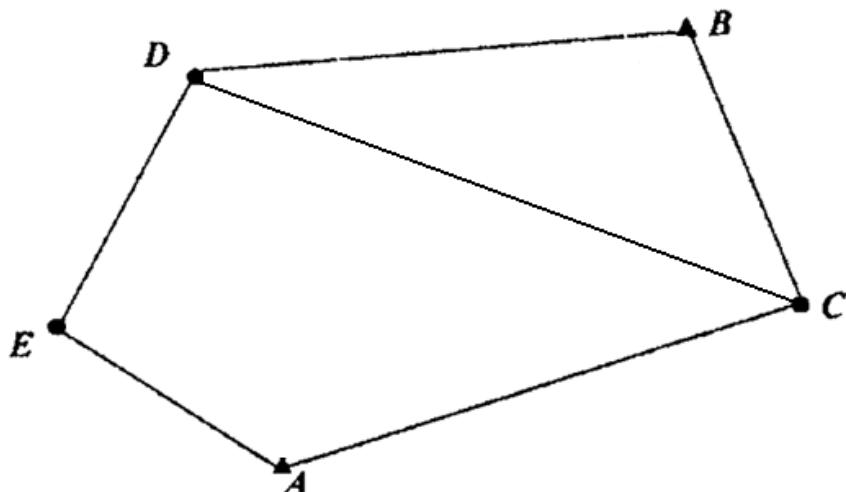


Figura 6.7 – Configuração da rede GPS removendo o vértice F.

Analizando e comparando as Figuras 6.1 e 6.7, nota-se que, embora tenha-se excluído um vértice desconhecido (ou seja, reduzido o número de parâmetros da rede de  $4 \times 3 = 12$  para  $3 \times 3 = 9$ ), a redundância da mesma é significativamente afetada, pois o número de observações diminuiu de  $13 \times 3 = 39$  (configuração original da rede) para apenas  $6 \times 3 = 18$  (configuração da rede sem o vértice  $F$ ). A Tabela 6.102 apresenta os números de redundância  $r_i$ , os números de absorção  $u_i$  e a confiabilidade interna – MDB das observações (para o caso convencional) obtidos neste experimento.

Tabela 6.102 – Medidas de confiabilidade das observações da rede sem o vértice F.

Observação	$r_i$	$u_i$	MDB $\nabla y_i$ (m)
$\Delta X_{AC}$	0,8840	0,1160	0,138
$\Delta Y_{AC}$	0,8705	0,1295	0,136
$\Delta Z_{AC}$	0,8876	0,1124	0,137
$\Delta X_{AE}$	0,4422	0,5578	0,091
$\Delta Y_{AE}$	0,4041	0,5959	0,090
$\Delta Z_{AE}$	0,4238	0,5762	0,090
$\Delta X_{BC}$	0,5027	0,4973	0,088
$\Delta Y_{BC}$	0,5232	0,4768	0,091
$\Delta Z_{BC}$	0,5095	0,4905	0,087
$\Delta X_{BD}$	0,6165	0,3835	0,086
$\Delta Y_{BD}$	0,6159	0,3841	0,087
$\Delta Z_{BD}$	0,6244	0,3756	0,085
$\Delta X_{DC}$	0,3023	0,6977	0,091
$\Delta Y_{DC}$	0,3173	0,6827	0,093
$\Delta Z_{DC}$	0,2835	0,7165	0,089
$\Delta X_{DE}$	0,2523	0,7477	0,091
$\Delta Y_{DE}$	0,2689	0,7311	0,090
$\Delta Z_{DE}$	0,2712	0,7288	0,090

Analizando e comparando as Tabelas 6.46 e 6.102, nota-se que, excluindo as demais linhas-base da rede que continham o vértice  $F$  (além de  $AF$  e  $BF$ ), os números de redundância das observações das linhas-base restantes reduzem entre cerca de 5% e 30%. As linhas-base cujas observações foram menos afetadas são  $AC$  (de menor precisão, e consequentemente menor peso no processo de estimação) e  $BD$  (contendo um ponto de controle e um ponto desconhecido presente em três linhas-base de precisões relativamente equivalentes).

A linha-base cujos números de redundância mais reduziram (cerca de 30%), foi  $AE$  (o vértice  $E$  é o único vértice desconhecido presente somente em duas linhas-base), e as duas linhas-base cujas observações apresentam os menores números de redundância são  $DC$  e  $DE$ .

(sendo que ambas são as únicas que contém dois vértices desconhecidos e nenhum ponto de controle neste experimento).

Na questão da hierarquia das linhas-base, em termos dos números de redundância de suas observações, analisando e comparando as Tabelas 6.46 e 6.88, nota-se que esta hierarquia praticamente se mantém a mesma, excluindo o vértice  $F$  da rede. Isto provavelmente se deve ao fato que as linhas-base contendo o vértice  $F$  também continham todos os demais vértices da rede ( $A, B, C, D$  e  $E$ ), ou seja, aumentavam o número de redundância de todas as demais linhas-base da rede, e não somente de algumas.

Além disso, a configuração da rede neste experimento (Figura 6.7) possui um número de redundância médio de  $\bar{r} = (n - u)/n = 0,5$ , sendo este o valor aproximado para o número de redundância médio da maioria das redes geodésicas obtidas pelas técnicas de posicionamento “clássicas” (ver, por exemplo, POPE, 1976).

Sobre os números de absorção, mais uma vez, estes aumentam na mesma proporção que os números de redundância diminuem, preservando a igualdade  $r_i + u_i = 1$  para todas as observações  $y_i$ .

Quanto ao menor erro detectável, analisando e comparando as Tabelas 6.46 e 6.102, nota-se que estes aumentaram muito pouco para as observações de  $AC$  (menos que 5 mm), e que para as observações das demais linhas-base, estes aumentaram entre 1 cm e 2,5 cm (sendo os maiores aumentos relativos as observações de  $DE$  e  $AE$ ). É interessante notar que, em todos os experimentos realizados referentes a geometria da rede, a linha-base  $AC$  em geral possui suas medidas de confiabilidade menos afetadas que as demais. Ou seja, aumentando ou reduzindo a redundância do sistema, as medidas de confiabilidade das demais linhas-base (de precisões relativamente equivalentes) podem se alterar bastante, mas as medidas de confiabilidade de  $AC$ , de pior precisão que as demais, em geral, são menos afetadas.

Além disso, analisando a Tabela 6.102, nota-se que novamente as observações de  $DE$  e  $AE$  referentes ao mesmo eixo cartesiano apresentam o mesmo valor numérico para o seu respectivo MDB. É interessante verificar se este fato (mesmo valor para o MDB das observações quando um vértice desconhecido está contido somente em duas linhas-base da rede) também ocorre em outros cenários (como por exemplo, duas linhas-base contendo dois vértices desconhecidos e nenhum ponto de controle, e cujas observações possuem precisões relativamente diferentes).

Finalmente, para a confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, as Tabelas 6.103 e 6.104 apresentam os resultados obtidos retirando o vértice  $F$  da rede.

Tabela 6.103 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros sem o vértice F (em mm).

	$\Delta X_{AC}$	$\Delta Y_{AC}$	$\Delta Z_{AC}$	$\Delta X_{AE}$	$\Delta Y_{AE}$	$\Delta Z_{AE}$	$\Delta X_{BC}$	$\Delta Y_{BC}$	$\Delta Z_{BC}$
<b>X<sub>C</sub></b>	<b>16</b>	0	0	<b>16</b>	0	0	<b>44</b>	0	0
<b>Y<sub>C</sub></b>	0	<b>18</b>	0	0	<b>16</b>	0	0	<b>43</b>	0
<b>Z<sub>C</sub></b>	0	0	<b>15</b>	0	0	<b>16</b>	0	0	<b>43</b>
<b>X<sub>E</sub></b>	<b>5</b>	0	0	<b>51</b>	0	0	<b>14</b>	0	0
<b>Y<sub>E</sub></b>	0	<b>5</b>	0	0	<b>54</b>	0	0	<b>12</b>	0
<b>Z<sub>E</sub></b>	0	0	<b>5</b>	0	0	<b>52</b>	0	0	<b>14</b>
<b>X<sub>D</sub></b>	<b>8</b>	0	0	<b>28</b>	0	0	<b>22</b>	0	0
<b>Y<sub>D</sub></b>	0	<b>8</b>	0	0	<b>29</b>	0	0	<b>21</b>	0
<b>Z<sub>D</sub></b>	0	0	<b>8</b>	0	0	<b>27</b>	0	0	<b>23</b>

Tabela 6.104 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros sem o vértice F (em mm).

	$\Delta X_{BD}$	$\Delta Y_{BD}$	$\Delta Z_{BD}$	$\Delta X_{DC}$	$\Delta Y_{DC}$	$\Delta Z_{DC}$	$\Delta X_{DE}$	$\Delta Y_{DE}$	$\Delta Z_{DE}$
<b>X<sub>C</sub></b>	<b>19</b>	0	0	<b>35</b>	0	0	<b>-16</b>	0	0
<b>Y<sub>C</sub></b>	0	<b>18</b>	0	0	<b>37</b>	0	0	<b>-16</b>	0
<b>Z<sub>C</sub></b>	0	0	<b>19</b>	0	0	<b>35</b>	0	0	<b>-16</b>
<b>X<sub>E</sub></b>	<b>21</b>	0	0	<b>-18</b>	0	0	<b>40</b>	0	0
<b>Y<sub>E</sub></b>	0	<b>20</b>	0	0	<b>-16</b>	0	0	<b>36</b>	0
<b>Z<sub>E</sub></b>	0	0	<b>20</b>	0	0	<b>-17</b>	0	0	<b>38</b>
<b>X<sub>D</sub></b>	<b>33</b>	0	0	<b>-28</b>	0	0	<b>-28</b>	0	0
<b>Y<sub>D</sub></b>	0	<b>33</b>	0	0	<b>-27</b>	0	0	<b>-29</b>	0
<b>Z<sub>D</sub></b>	0	0	<b>32</b>	0	0	<b>-28</b>	0	0	<b>-27</b>

Analizando e comparando as Tabelas 6.47 e 6.48 e as Tabelas 6.103 e 6.104, nota-se que para a maior parte dos casos, excluindo o vértice *F* da rede, a influência de possíveis erros não detectados nas observações sobre os parâmetros, no mínimo, duplica, e em alguns casos, até mesmo triplica, embora o MDB destas tenha aumentando em, no máximo, 2,6 cm apenas. Ou seja, mais uma vez se observa que a confiabilidade externa se mostra significativamente mais afetada que as demais medidas de confiabilidade com as alterações na geometria da rede.

Em outras palavras, com esta geometria “mais pobre” para a rede retirando o vértice *F* (Figura 6.7), o valor numérico do MDB das observações individuais não aumentou muito, mas a influência destes sobre os parâmetros (confiabilidade externa) aumentou significativamente em praticamente todos os casos, além de não ter reduzido em nenhum.

Se o único critério de confiabilidade adotado no planejamento desta rede geodésica fosse o MDB das observações individuais (confiabilidade interna), se poderia cometer o equívoco de concluir que a presença das linhas-base contendo o vértice *F* em pouco contribui para o controle de qualidade das demais observações da rede, e caso o vértice *F* não fosse de essencial importância para o projeto, considerando custos e benefícios, poder-se-ia optar por

fazer o levantamento da rede com apenas estas 6 linhas-base, ao invés das 13 originais (ou 11, desconsiderando as linhas-base “repetidas *AF* e *BF*”).

Desta forma, na ocorrência de possíveis erros não detectáveis nas observações, todas as coordenadas de todos os vértices da rede seriam relativamente mais afetadas do que caso a rede fosse levantada com mais linhas-base, adicionando também o vértice *F*, embora a magnitude destes possíveis erros não detectáveis praticamente fosse a mesma em ambos os cenários. Logo, novamente é comprovada a importância da análise da confiabilidade externa.

Verificada a influência em retirar as linhas-base envolvendo o vértice *F* sobre as medidas de confiabilidade convencionais (considerando apenas um *outlier* por vez – *data snooping*), também foi verificada esta influência sobre as medidas de confiabilidade generalizadas para múltiplos *outliers* (no caso, para dois *outliers* simultâneos).

Desta forma, retirar as linhas-base envolvendo o vértice *F*, foram recalculados os coeficientes de correlação múltipla, a confiabilidade interna (*MDB* –  $\nabla y_i^q$ ), o número de confiabilidade  $\bar{r}_i^q$  e o número de redundância  $r_i^q$  das observações (para  $q = 2$  *outliers* simultâneos), e alguns destes são mostrados nas Tabelas a seguir (tanto os valores originais, obtidos removendo apenas as linhas-base *AF* e *BF*, quanto os valores obtidos com este experimento, removendo todas as linhas-base envolvendo o vértice *F*).

Tabela 6.105 – Alguns coeficientes de correlação múltipla das observações (com o vértice F).

$\rho_{ij}^q$	$\Delta X_{AC}$	$\Delta Y_{AC}$	$\Delta Z_{AC}$	$\Delta X_{AE}$	$\Delta Y_{AE}$	$\Delta Z_{AE}$	$\Delta X_{BC}$	$\Delta Y_{BC}$	$\Delta Z_{BC}$
$\Delta X_{BD}$	<b>0,0626</b>	0,0006	0,0007	<b>0,1499</b>	0,0015	0,0015	<b>0,1528</b>	0,0014	0,0015
$\Delta Y_{BD}$	0,0006	<b>0,0634</b>	0,0007	0,0016	<b>0,1597</b>	0,0016	0,0013	<b>0,1399</b>	0,0014
$\Delta Z_{BD}$	0,0007	0,0007	<b>0,0670</b>	0,0016	0,0016	<b>0,1521</b>	0,0015	0,0015	<b>0,1643</b>
$\Delta X_{DC}$	<b>0,1976</b>	0,0019	0,0019	<b>0,1081</b>	0,0010	0,0010	<b>0,4821</b>	0,0042	0,0045
$\Delta Y_{DC}$	0,0020	<b>0,1927</b>	0,0020	0,0010	<b>0,1078</b>	0,0012	0,0042	<b>0,4254</b>	0,0042
$\Delta Z_{DC}$	0,0019	0,0019	<b>0,1952</b>	0,0010	0,0011	<b>0,1141</b>	0,0044	0,0042	<b>0,4788</b>
$\Delta X_{DE}$	<b>0,0486</b>	0,0005	0,0005	<b>0,3403</b>	0,0034	0,0030	<b>0,1185</b>	0,0010	0,0012
$\Delta Y_{DE}$	0,0005	<b>0,0488</b>	0,0005	0,0036	<b>0,3591</b>	0,0036	0,0010	<b>0,1077</b>	0,0011
$\Delta Z_{DE}$	0,0005	0,0005	<b>0,0548</b>	0,0032	0,0035	<b>0,3312</b>	0,0012	0,0012	<b>0,1343</b>

Tabela 6.106 – Alguns coeficientes de correlação múltipla das observações (sem o vértice F).

$\rho_{ij}^q$	$\Delta X_{AC}$	$\Delta Y_{AC}$	$\Delta Z_{AC}$	$\Delta X_{AE}$	$\Delta Y_{AE}$	$\Delta Z_{AE}$	$\Delta X_{BC}$	$\Delta Y_{BC}$	$\Delta Z_{BC}$
$\Delta X_{BD}$	<b>0,1524</b>	0,0015	0,0016	<b>0,5232</b>	0,0054	0,0055	<b>0,4185</b>	0,0038	0,0041
$\Delta Y_{BD}$	0,0016	<b>0,1564</b>	0,0016	0,0055	<b>0,5504</b>	0,0055	0,0037	<b>0,3873</b>	0,0038
$\Delta Z_{BD}$	0,0016	0,0015	<b>0,1534</b>	0,0055	0,0054	<b>0,5138</b>	0,0041	0,0039	<b>0,4231</b>
$\Delta X_{DC}$	<b>0,2876</b>	0,0029	0,0029	<b>0,4456</b>	0,0041	0,0042	<b>0,7898</b>	0,0073	0,0076
$\Delta Y_{DC}$	0,0031	<b>0,3108</b>	0,0031	0,0043	<b>0,4443</b>	0,0045	0,0072	<b>0,7693</b>	0,0075
$\Delta Z_{DC}$	0,0029	0,0030	<b>0,2888</b>	0,0042	0,0043	<b>0,4538</b>	0,0075	0,0075	<b>0,7963</b>
$\Delta X_{DE}$	<b>0,1282</b>	0,0013	0,0013	<b>1</b>	0,0098	0,0100	<b>0,3519</b>	0,0033	0,0033
$\Delta Y_{DE}$	0,0013	<b>0,1381</b>	0,0014	0,0098	<b>1</b>	0,0100	0,0031	<b>0,3418</b>	0,0033
$\Delta Z_{DE}$	0,0013	0,0014	<b>0,1311</b>	0,0100	0,0100	<b>1</b>	0,0033	0,0035	<b>0,3614</b>

Tabela 6.107 – Alguns valores para o MDB das linhas-base BD, DC e DE (com o vértice F).

$\nabla y_i^q$ (cm)	$\Delta X_{AC}$	$\Delta Y_{AC}$	$\Delta Z_{AC}$	$\Delta X_{AE}$	$\Delta Y_{AE}$	$\Delta Z_{AE}$	$\Delta X_{BC}$	$\Delta Y_{BC}$	$\Delta Z_{BC}$
$\Delta X_{BD}$	<b>7,6</b>	7,6	7,6	<b>7,7</b>	7,6	7,6	<b>7,7</b>	7,6	7,6
$\Delta Y_{BD}$	7,7	<b>7,7</b>	7,7	7,7	<b>7,8</b>	7,7	7,7	<b>7,7</b>	7,7
$\Delta Z_{BD}$	7,6	7,6	<b>7,6</b>	7,6	7,6	<b>7,7</b>	7,6	7,6	<b>7,7</b>
$\Delta X_{DC}$	<b>7,4</b>	7,2	7,2	<b>7,3</b>	7,2	7,2	<b>8,3</b>	7,2	7,2
$\Delta Y_{DC}$	7,4	<b>7,5</b>	7,4	7,4	<b>7,4</b>	7,4	7,4	<b>8,2</b>	7,4
$\Delta Z_{DC}$	7,1	7,1	<b>7,2</b>	7,1	7,1	<b>7,1</b>	7,1	7,1	<b>8,1</b>
$\Delta X_{DE}$	<b>6,5</b>	6,4	6,4	<b>6,9</b>	6,4	6,4	<b>6,5</b>	6,4	6,4
$\Delta Y_{DE}$	6,5	<b>6,5</b>	6,5	6,5	<b>7,0</b>	6,5	6,5	<b>6,6</b>	6,5
$\Delta Z_{DE}$	6,5	6,5	<b>6,6</b>	6,5	6,5	<b>6,9</b>	6,5	6,5	<b>6,6</b>

Tabela 6.108 – Alguns valores para o MDB das linhas-base BD, DC e DE (sem o vértice F).

$\nabla y_i^q$ (cm)	$\Delta X_{AC}$	$\Delta Y_{AC}$	$\Delta Z_{AC}$	$\Delta X_{AE}$	$\Delta Y_{AE}$	$\Delta Z_{AE}$	$\Delta X_{BC}$	$\Delta Y_{BC}$	$\Delta Z_{BC}$
$\Delta X_{BD}$	<b>8,7</b>	8,6	8,6	<b>10,1</b>	8,6	8,6	<b>9,5</b>	8,6	8,6
$\Delta Y_{BD}$	8,7	<b>8,8</b>	8,7	8,7	<b>10,4</b>	8,7	8,7	<b>9,4</b>	8,7
$\Delta Z_{BD}$	8,5	8,5	<b>8,6</b>	8,5	8,5	<b>10,0</b>	8,5	8,5	<b>9,4</b>
$\Delta X_{DC}$	<b>9,5</b>	9,1	9,1	<b>10,1</b>	9,1	9,1	<b>14,8</b>	9,1	9,1
$\Delta Y_{DC}$	9,3	<b>9,8</b>	9,3	9,3	<b>10,4</b>	9,3	9,3	<b>14,6</b>	9,3
$\Delta Z_{DC}$	8,9	8,9	<b>9,3</b>	8,9	8,9	<b>10,0</b>	8,9	8,9	<b>14,7</b>
$\Delta X_{DE}$	<b>9,2</b>	9,1	9,1	$\infty$	9,1	9,1	<b>9,8</b>	9,1	9,1
$\Delta Y_{DE}$	9,0	<b>9,1</b>	9,0	9,0	$\infty$	9,0	9,0	<b>9,6</b>	9,0
$\Delta Z_{DE}$	9,0	9,0	<b>9,1</b>	9,0	9,0	$\infty$	9,0	9,0	<b>9,6</b>

Tabela 6.109 – Alguns valores para o  $r_i^q$  das linhas-base BD, DC e DE (com o vértice F).

$r_i^q$	$\Delta X_{AC}$	$\Delta Y_{AC}$	$\Delta Z_{AC}$	$\Delta X_{AE}$	$\Delta Y_{AE}$	$\Delta Z_{AE}$	$\Delta X_{BC}$	$\Delta Y_{BC}$	$\Delta Z_{BC}$
$\Delta X_{BD}$	<b>0,7941</b>	0,7972	0,7972	<b>0,7793</b>	0,7972	0,7972	<b>0,7786</b>	0,7972	0,7972
$\Delta Y_{BD}$	0,7935	<b>0,7904</b>	0,7935	0,7935	<b>0,7733</b>	0,7935	0,7935	<b>0,7780</b>	0,7935
$\Delta Z_{BD}$	0,7865	0,7865	<b>0,7829</b>	0,7865	0,7865	<b>0,7683</b>	0,7865	0,7865	<b>0,7652</b>
$\Delta X_{DC}$	<b>0,4565</b>	0,4750	0,4750	<b>0,4695</b>	0,4750	0,4750	<b>0,3646</b>	0,4750	0,4750
$\Delta Y_{DC}$	0,5051	<b>0,4864</b>	0,5051	0,5051	<b>0,4992</b>	0,5051	0,5051	<b>0,4137</b>	0,5051
$\Delta Z_{DC}$	0,4447	0,4447	<b>0,4278</b>	0,4447	0,4447	<b>0,4389</b>	0,4447	0,4447	<b>0,3428</b>
$\Delta X_{DE}$	<b>0,5048</b>	0,5060	0,5060	<b>0,4474</b>	0,5060	0,5060	<b>0,4989</b>	0,5060	0,5060
$\Delta Y_{DE}$	0,5104	<b>0,5092</b>	0,5104	0,5104	<b>0,4446</b>	0,5104	0,5104	<b>0,5045</b>	0,5104
$\Delta Z_{DE}$	0,5111	0,5111	<b>0,5096</b>	0,5111	0,5111	<b>0,4550</b>	0,5111	0,5111	<b>0,5019</b>

Tabela 6.110 – Alguns valores para o  $r_i^q$  das linhas-base BD, DC e DE (sem o vértice F).

$r_i^q$	$\Delta X_{AC}$	$\Delta Y_{AC}$	$\Delta Z_{AC}$	$\Delta X_{AE}$	$\Delta Y_{AE}$	$\Delta Z_{AE}$	$\Delta X_{BC}$	$\Delta Y_{BC}$	$\Delta Z_{BC}$
$\Delta X_{BD}$	<b>0,6022</b>	0,6165	0,6165	<b>0,4477</b>	0,6165	0,6165	<b>0,5085</b>	0,6165	0,6165
$\Delta Y_{BD}$	0,6159	<b>0,6009</b>	0,6159	0,6159	<b>0,4294</b>	0,6159	0,6159	<b>0,5236</b>	0,6159
$\Delta Z_{BD}$	0,6244	0,6244	<b>0,6097</b>	0,6244	0,6244	<b>0,4595</b>	0,6244	0,6244	<b>0,5126</b>
$\Delta X_{DC}$	<b>0,2773</b>	0,3023	0,3023	<b>0,2423</b>	0,3023	0,3023	<b>0,1137</b>	0,3023	0,3023
$\Delta Y_{DC}$	0,3173	<b>0,2867</b>	0,3173	0,3173	<b>0,2547</b>	0,3173	0,3173	<b>0,1295</b>	0,3173
$\Delta Z_{DC}$	0,2835	0,2835	<b>0,2599</b>	0,2835	0,2835	<b>0,2251</b>	0,2835	0,2835	<b>0,1037</b>
$\Delta X_{DE}$	<b>0,2481</b>	0,2523	0,2523	<b>0</b>	0,2523	0,2523	<b>0,2210</b>	0,2523	0,2523
$\Delta Y_{DE}$	0,2689	<b>0,2638</b>	0,2689	0,2689	<b>0</b>	0,2689	0,2689	<b>0,2375</b>	0,2689
$\Delta Z_{DE}$	0,2712	0,2712	<b>0,2665</b>	0,2712	0,2712	<b>0</b>	0,2712	0,2712	<b>0,2358</b>

Analizando e comparando as Tabelas 6.105 e 6.106, nota-se que excluindo o vértice  $F$  da rede, os coeficientes de correlação múltipla entre os pares de observações aumentam em praticamente todos os casos, ou, em termos práticos, permanecem os mesmos.

As observações da linha-base  $AE$  foram as que apresentaram os maiores aumentos, com cerca de 66% para as observações de  $DE$  (referentes ao mesmo eixo cartesiano), cerca de 37% para as observações de  $BD$  (referentes ao mesmo eixo cartesiano), e cerca de 33% para as observações de  $DC$  (referentes ao mesmo eixo cartesiano).

Para as observações de  $AE$  e  $DE$  referentes ao mesmo eixo cartesiano, mais uma vez os coeficientes de correlação múltipla assumem o valor máximo possível  $\rho_{ij}^q = 1$ . Novamente também, as observações referentes ao mesmo eixo cartesiano de  $AE$  e  $DE$  apresentam os mesmos valores para os coeficientes de correlação múltipla com todas as observações.

Por fim, mais uma vez também as observações da linha-base  $AC$  foram as que apresentaram os menores aumentos em seus coeficientes de correlação múltipla com as observações das demais linhas-base, aumentando em até cerca de 15% com as observações de  $BC$  (referentes ao mesmo eixo cartesiano).

Quanto ao MDB das observações para  $q = 2$  outliers simultâneos, analisando e comparando as Tabelas 6.107 e 6.108, nota-se que as observações da linha-base  $DE$  foram as que apresentaram os maiores aumentos, com o MDB destas se tornando até mesmo “infinito” quando a outra observação considerada suspeita para  $q = 2$  é referente ao mesmo eixo cartesiano de  $AE$  (e vice-versa).

Além disso, como as observações de  $AE$  e  $DE$  referentes ao mesmo eixo cartesiano apresentam os mesmos valores para os coeficientes de correlação múltipla com todas as observações, e também o mesmo valor para o respectivo MDB no caso convencional, o MDB destas no caso generalizado também é igual em todos os modelos de erros possíveis para  $q = 2$ .

Outros aumentos interessantes no MDB das observações para  $q = 2$  ocorrem para os pares de linha-base  $DC$  e  $BC$  (cerca de  $6,5\text{ cm}$  e  $5,5\text{ cm}$ , respectivamente, quando a outra observação considerada suspeita é referente ao mesmo eixo cartesiano de  $BC$  e  $DC$ , respectivamente).

Entretanto, tal como no caso convencional, em geral o MDB das observações para  $q = 2$  *outliers* simultâneos não se alterou muito retirando o vértice  $F$  da rede (diferença inferior a  $3\text{ cm}$  na maior parte dos casos, e para a linha-base  $AC$ , por exemplo, a diferença é de no máximo  $11\text{ mm}$  apenas).

Sobre os números de redundância das observações, analisando e comparando as Tabelas 6.109 e 6.110, nota-se que as observações da linha-base  $DE$  foram as que apresentaram as maiores reduções, com o MDB destas se tornando até mesmo nulos quando a outra observação considerada suspeita para  $q = 2$  é referente ao mesmo eixo cartesiano de  $AE$  (e vice-versa).

Entretanto, embora as observações de  $AE$  e  $DE$  referentes ao mesmo eixo cartesiano apresentam os mesmos valores para os coeficientes de correlação múltipla com todas as observações, como os valores para os respectivos números de redundância destas no caso convencional são diferentes, o número de redundância destas no caso generalizado também é diferente, ao contrário do MDB (que é igual tanto no caso convencional quanto no caso generalizado).

Em outras palavras, quando um vértice desconhecido é contido em somente duas linhas-base da rede, para as duas observações destas referentes ao mesmo eixo cartesiano, os números de redundância (ou seja, a parcela de um possível erro não aleatório refletida nos resíduos) são diferentes, mas de tal forma que o MDB (menor erro detectável) destas duas observações seja numericamente igual.

Finalmente, a última medida de confiabilidade para  $q = 2$  *outliers* simultâneos em que foi verificada a influência de se retirar o vértice  $F$  da rede foi a confiabilidade externa máxima sobre os parâmetros. A Tabela 6.111 mostra alguns dos resultados obtidos.

Tabela 6.111 – Confiabilidade externa máxima de alguns pares de observações ( $q = 2$  *outliers*, sem o vértice  $F$ ), sobre os parâmetros  $X_C$ ,  $X_E$  e  $X_D$  (em mm).

	$\Delta X_{AC} \text{ e } \Delta X_{AE}$	$\Delta X_{AC} \text{ e } \Delta X_{BC}$	$\Delta X_{AC} \text{ e } \Delta X_{BD}$	$\Delta X_{AC} \text{ e } \Delta X_{DC}$	$\Delta X_{AC} \text{ e } \Delta X_{DE}$
$X_C$	24	56	27	44	24
$X_E$	52	18	23	18	40
$X_D$	30	28	36	28	30

Analisando e comparando as Tabelas 6.103, 6.104 e 6.111, nota-se que a influência máxima dos pares de observações considerados ( $q = 2$ ), em geral, é um pouco menor do que a soma das influências individuais destas observações no caso convencional ( $q = 1$ ), com uma diferença máxima de apenas 8 mm.

Já analisando e comparando as Tabelas 6.56 e 6.111, nota-se que, tal como no caso convencional, a confiabilidade externa máxima dos pares de observações considerados sobre os parâmetros, na maior parte dos casos, duplica, e em alguns casos, até mesmo triplica, excluindo o vértice  $F$  da rede. Ou seja, de fato, esta medida de confiabilidade foi muito mais afetada que as demais, tanto no caso convencional quanto no caso generalizado para  $q = 2$  outliers simultâneos.

Portanto, no planejamento de uma rede geodésica, é importante estar atento quanto ao número de vértices distintos possíveis de serem levantados, pois a inclusão de um novo vértice, por meio de novas observações, pode, a princípio, melhorar sensivelmente a confiabilidade interna e o número de redundância das demais observações, mas a confiabilidade externa destas sobre os parâmetros pode melhorar consideravelmente, com esta inclusão de novas observações bem como de um novo vértice. De fato, conclui-se que o controle de qualidade deve sempre contemplar a análise da confiabilidade externa.

Por fim, em um último experimento relacionado com a geometria (configuração) da rede, foram excluídas as linhas-base  $AF$ ,  $BF$  e também  $AE$ ,  $DE$ ,  $BD$ ,  $BC$  e  $AC$ , tornando a configuração da rede “praticamente radial” (mantendo os vértices A e B como pontos de controle), conforme ilustra a Figura 6.8.

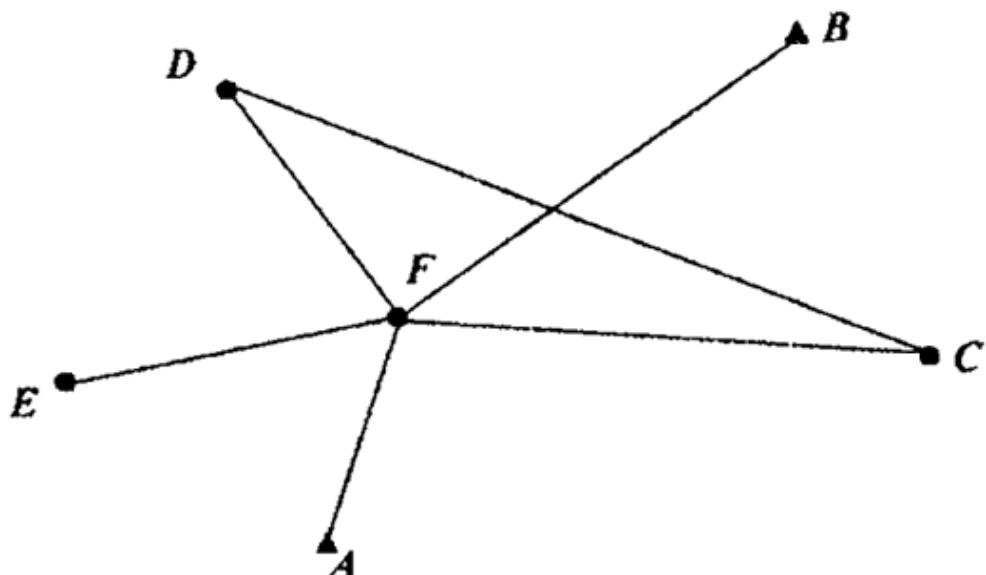


Figura 6.8 – Configuração “praticamente radial” da rede GPS.

Analizando a Figura 6.8, nota-se que neste experimento a redundância do sistema é significativamente reduzida, pois tem-se apenas  $n = 6 \times 3 = 18$  observações para  $u = 4 \times 3 = 12$  parâmetros incógnitos (ou seja, o sistema tem somente  $r = n - u = 6$  graus de liberdade). A Tabela 6.112 apresenta os números de redundância  $r_i$ , os números de absorção  $u_i$  e a confiabilidade interna – MDB das observações (para o caso convencional) obtidos neste experimento.

Tabela 6.112 – Medidas de confiabilidade das observações com a configuração da rede praticamente radial.

Observação	$r_i$	$u_i$	MDB $\nabla y_i$ (m)
$\Delta X_{DC}$	0,2945	0,7055	0,092
$\Delta Y_{DC}$	0,3388	0,6612	0,090
$\Delta Z_{DC}$	0,2664	0,7336	0,092
$\Delta X_{FA}$	0,5295	0,4705	0,049
$\Delta Y_{FA}$	0,4690	0,5310	0,049
$\Delta Z_{FA}$	0,5574	0,4426	0,048
$\Delta X_{FC}$	0,5174	0,4826	0,092
$\Delta Y_{FC}$	0,4540	0,5460	0,090
$\Delta Z_{FC}$	0,4883	0,5117	0,092
$\Delta X_{FE}$	0	1	$\infty$
$\Delta Y_{FE}$	0	1	$\infty$
$\Delta Z_{FE}$	0	1	$\infty$
$\Delta X_{FD}$	0,1881	0,8119	0,092
$\Delta Y_{FD}$	0,2073	0,7927	0,090
$\Delta Z_{FD}$	0,2453	0,7547	0,092
$\Delta X_{FB}$	0,4705	0,5295	0,049
$\Delta Y_{FB}$	0,5310	0,4690	0,049
$\Delta Z_{FB}$	0,4426	0,5574	0,048

Analizando e comparando as Tabelas 6.46 e 6.112, nota-se que, tornando a configuração da rede GPS praticamente radial, os números de redundância das observações das linhas-base restantes reduzem entre 10% e 13% para *FA* e *FB* (as duas únicas linhas-base com pontos de controle), e entre 17% e 21% para *DC* e *FC*.

Entretanto, para as observações de *FD*, as reduções foram entre 32% e 34% e para *FE*, as reduções foram entre 44% e 48%, tornando os números de redundância destas nulos.

Analizando e comparando as Figuras 6.1 e 6.8, nota-se que de fato os números de redundância das observações de *FD* e *FE* seriam mais afetados, pois foram excluídas duas linhas-base contendo os vértices *D* e *E* (*DE* e *BD*, *DE* e *AE*, respectivamente). Além disso, com esta configuração, o vértice *E* está contido somente em *FE*, tornando os números de redundância das observações desta linha-base nulos.

Sobre os números de absorção, novamente estes aumentam na mesma proporção que os números de redundância diminuem, preservando a igualdade  $r_i + u_i = 1$  para todas as observações  $y_i$ . Além disso, estes são em geral maiores que os números de redundância das observações, pois o seu somatório resulta em  $\sum_{i=1}^n u_i = u = 12$ , e para os números de redundância, tem-se  $\sum_{i=1}^n r_i = r = 6$ .

Em outras palavras, trata-se de fato de uma rede de baixa redundância, onde a maior parte de possíveis erros não aleatório seriam absorvidos pelas coordenadas dos pontos desconhecidos, e a menor parte destes seria refletida nos respectivos resíduos das observações.

Quanto ao MDB das observações, analisando e comparando as Tabelas 6.46 e 6.112, nota-se que estes aumentaram entre  $4\text{ mm}$  e  $6\text{ mm}$  apenas para  $FA$  e  $FB$  (as duas únicas linhas-base com pontos de controle), e entre  $1,3\text{ cm}$  e  $2,1\text{ cm}$  para  $DC$  e  $FC$ . Entretanto, para as observações de  $FD$ , estes aumentos foram entre  $3,2\text{ cm}$  e  $3,7\text{ cm}$  e para  $FE$ , o MDB das observações desta linha-base se torna “infinito” (o que faz sentido considerando também os números de redundância nulos destas).

Interessante notar também que, mais uma vez, o MDB das observações de  $FA$  e  $FB$ , referentes ao mesmo eixo cartesiano, se tornaram numericamente iguais, embora neste experimento, o vértice desconhecido  $F$  também esteja contido em outras três linhas-base distintas ( $FC$ ,  $FE$  e  $FD$ ).

Além disso, o MDB das observações de  $DC$ ,  $FC$  e  $FD$ , referentes ao mesmo eixo cartesiano, também se tornaram numericamente iguais, embora os seus números de redundância e também as suas precisões sejam ligeiramente diferentes (com uma diferença máxima de  $6\text{ mm}$ ).

Ou seja, mais uma vez, a alteração na geometria (configuração) da rede influenciou de maneira significativa apenas os números de redundância e o MDB das observações de algumas das linhas-base restantes. Entretanto, para a confiabilidade externa destas, alguns resultados mais interessantes são obtidos com este experimento, conforme mostram as Tabelas 6.113 e 6.114.

Tabela 6.113 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, com a configuração da rede “praticamente radial” (em mm).

	$\Delta X_{DC}$	$\Delta Y_{DC}$	$\Delta Z_{DC}$	$\Delta X_{FA}$	$\Delta Y_{FA}$	$\Delta Z_{FA}$	$\Delta X_{FC}$	$\Delta Y_{FC}$	$\Delta Z_{FC}$
$X_C$	<b>48</b>	0	0	<b>-23</b>	0	0	<b>44</b>	0	0
$Y_C$	0	<b>41</b>	0	0	<b>-26</b>	0	0	<b>49</b>	0
$Z_C$	0	0	<b>45</b>	0	0	<b>-21</b>	0	0	<b>47</b>
$X_E$	<b>0</b>	0	0	<b>-23</b>	0	0	<b>0</b>	0	0
$Y_E$	0	<b>0</b>	0	0	<b>-26</b>	0	0	<b>0</b>	0
$Z_E$	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>-21</b>	0	0	<b>0</b>
$X_D$	<b>-17</b>	0	0	<b>-23</b>	0	0	<b>17</b>	0	0
$Y_D$	0	<b>-19</b>	0	0	<b>-26</b>	0	0	<b>19</b>	0
$Z_D$	0	0	<b>-22</b>	0	0	<b>-21</b>	0	0	<b>22</b>
$X_F$	<b>0</b>	0	0	<b>-23</b>	0	0	<b>0</b>	0	0
$Y_F$	0	<b>0</b>	0	0	<b>-26</b>	0	0	<b>0</b>	0
$Z_F$	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>-21</b>	0	0	<b>0</b>

Tabela 6.114 – Confiabilidade externa das observações sobre os parâmetros, com a configuração da rede “praticamente radial” (em mm).

	$\Delta X_{FE}$	$\Delta Y_{FE}$	$\Delta Z_{FE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta Y_{FD}$	$\Delta Z_{FD}$	$\Delta X_{FB}$	$\Delta Y_{FB}$	$\Delta Z_{FB}$
$X_C$	<b>0</b>	0	0	<b>48</b>	0	0	<b>-26</b>	0	0
$Y_C$	0	<b>0</b>	0	0	<b>41</b>	0	0	<b>-23</b>	0
$Z_C$	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>45</b>	0	0	<b>-27</b>
$X_E$	$\infty$	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>-26</b>	0	0
$Y_E$	0	$\infty$	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>-23</b>	0
$Z_E$	0	0	$\infty$	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>-27</b>
$X_D$	<b>0</b>	0	0	<b>75</b>	0	0	<b>-26</b>	0	0
$Y_D$	0	<b>0</b>	0	0	<b>71</b>	0	0	<b>-23</b>	0
$Z_D$	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>69</b>	0	0	<b>-27</b>
$X_F$	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>-26</b>	0	0
$Y_F$	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>-23</b>	0
$Z_F$	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>-27</b>

Analizando as Tabelas 6.113 e 6.114, nota-se que as únicas linhas-base cujos possíveis erros não detectados nas observações podem influenciar as coordenadas do vértice  $F$  são  $FA$  e  $FB$ , embora este vértice desconhecido esteja contido em mais três linhas-base ( $FC, FE, FD$ ).

Este resultado é muito curioso, pois possíveis erros não detectados nas observações de  $FD$  e  $FC$ , por exemplo, podem influenciar até mesmo as coordenadas dos vértices  $C$  e  $D$ , respectivamente, mas possuem influência nula sobre o vértice  $F$ , sendo que este está contido nestas duas linhas-base.

Para as observações de  $FE$ , a influência de possíveis erros não detectados se torna nula sobre quase todos os vértices da rede (incluindo o vértice  $F$ ), a exceção do vértice  $E$ , onde a influência sobre suas coordenadas é “infinita”. Em outras palavras, possíveis erros não detectados em uma observação de  $FE$  são completamente absorvidos pela respectiva

coordenada do vértice  $E$  da rede. Ou seja, não existe controle para as observações desta linha-base, pois seus resíduos serão nulos ( $r_i = 0$ ).

Outro resultado interessante analisando as Tabelas 6.113 e 6.114, é que a influência de possíveis erros não detectados nas observações de  $FA$  e  $FB$ , afetam igualmente as respectivas coordenadas de todos os vértices desconhecidos da rede. Ou seja, na existência de um possível erro não detectado em alguma observação de  $FA$  ou  $FB$ , a influência deste é igual sobre as respectivas coordenadas de todos os vértices desconhecidos da rede ( $C, D, E$  e  $F$ ).

Os resultados obtidos com a confiabilidade externa das observações neste experimento são peculiares e requerem um estudo mais cuidadoso. Talvez estes estejam relacionados ao fato de que os pontos de controle  $A$  e  $B$  só estão contidos em uma linha-base cada ( $FA$  e  $FB$ ), além de o vértice  $F$  ser o único vértice desconhecido da rede a estar contido em linhas-base com pontos de controle, além, é claro, da configuração praticamente “radial” da rede.

Verificada a influência desta configuração praticamente radial da rede GPS sobre as medidas de confiabilidade convencionais (considerando apenas um *outlier* por vez), também foi verificada esta influência sobre as medidas de confiabilidade generalizadas para múltiplos *outliers* (no caso, para dois *outliers* simultâneos).

Desta forma, com esta configuração praticamente radial da rede GPS, foram recalculados os coeficientes de correlação múltipla, a confiabilidade interna ( $MDB - \nabla y_i^q$ ), o número de confiabilidade  $\bar{r}_i^q$  e o número de redundância  $r_i^q$  das observações (para  $q = 2$  *outliers* simultâneos), e alguns destes são mostrados nas Tabelas a seguir.

Tabela 6.115 – Alguns coeficientes de correlação múltipla das observações (configuração “praticamente radial”).

$\rho_{ij}^q$	$\Delta X_{FE}$	$\Delta Y_{FE}$	$\Delta Z_{FE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta Y_{FD}$	$\Delta Z_{FD}$	$\Delta X_{FB}$	$\Delta Y_{FB}$	$\Delta Z_{FB}$
$\Delta X_{DC}$	<b>0</b>	0	0	<b>1</b>	0,0095	0,0093	<b>0</b>	0	0
$\Delta Y_{DC}$	0	<b>0</b>	0	0,0095	<b>1</b>	0,0096	0	<b>0</b>	0
$\Delta Z_{DC}$	0	0	<b>0</b>	0,0093	0,0096	<b>1</b>	0	0	<b>0</b>
$\Delta X_{FA}$	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>1</b>	0,0101	0,0112
$\Delta Y_{FA}$	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0	0,0101	<b>1</b>	0,0103
$\Delta Z_{FA}$	0	0	<b>0</b>	0	0	<b>0</b>	0,0112	0,0103	<b>1</b>
$\Delta X_{FC}$	<b>0</b>	0	0	<b>1</b>	0,0095	0,0093	<b>0</b>	0	0
$\Delta Y_{FC}$	0	<b>0</b>	0	0,0095	<b>1</b>	0,0096	0	<b>0</b>	0
$\Delta Z_{FC}$	0	0	<b>0</b>	0,0093	0,0096	<b>1</b>	0	0	<b>0</b>

Tabela 6.116 – Alguns valores para o MDB das linhas-base DC, FA e FC (configuração “praticamente radial”).

$\nabla y_i^q$ (cm)	$\Delta X_{FE}$	$\Delta Y_{FE}$	$\Delta Z_{FE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta Y_{FD}$	$\Delta Z_{FD}$	$\Delta X_{FB}$	$\Delta Y_{FB}$	$\Delta Z_{FB}$
$\Delta X_{DC}$	<b>9,2</b>	9,2	9,2	$\infty$	9,2	9,2	<b>9,2</b>	9,2	9,2
$\Delta Y_{DC}$	9,0	<b>9,0</b>	9,0	9,0	$\infty$	9,0	9,0	<b>9,0</b>	9,0
$\Delta Z_{DC}$	9,2	9,2	<b>9,2</b>	9,2	9,2	$\infty$	9,2	9,2	<b>9,2</b>
$\Delta X_{FA}$	<b>4,9</b>	4,9	4,9	<b>4,9</b>	4,9	4,9	$\infty$	4,9	4,9
$\Delta Y_{FA}$	4,9	<b>4,9</b>	4,9	4,9	<b>4,9</b>	4,9	4,9	$\infty$	4,9
$\Delta Z_{FA}$	4,8	4,8	<b>4,8</b>	4,8	4,8	<b>4,8</b>	4,8	4,8	$\infty$
$\Delta X_{FC}$	<b>9,2</b>	9,2	9,2	<b>9,2</b>	9,2	$\infty$	<b>9,2</b>	9,2	9,2
$\Delta Y_{FC}$	9,0	<b>9,0</b>	9,0	9,0	<b>9,0</b>	9,0	$\infty$	<b>9,0</b>	9,0
$\Delta Z_{FC}$	9,2	9,2	<b>9,2</b>	9,2	9,2	<b>9,2</b>	9,2	$\infty$	<b>9,2</b>

Tabela 6.117 – Alguns valores para o  $r_i^q$  das linhas-base DC, FA e FC (configuração “praticamente radial”).

$r_i^q$	$\Delta X_{FE}$	$\Delta Y_{FE}$	$\Delta Z_{FE}$	$\Delta X_{FD}$	$\Delta Y_{FD}$	$\Delta Z_{FD}$	$\Delta X_{FB}$	$\Delta Y_{FB}$	$\Delta Z_{FB}$
$\Delta X_{DC}$	<b>0,2945</b>	0,2945	0,2945	<b>0</b>	0,2945	0,2945	<b>0,2945</b>	0,2945	0,2945
$\Delta Y_{DC}$	0,3388	<b>0,3388</b>	0,3388	0,3388	<b>0</b>	0,3388	0,3388	<b>0,3388</b>	0,3388
$\Delta Z_{DC}$	0,2664	0,2664	<b>0,2664</b>	0,2664	0,2664	<b>0</b>	0,2664	0,2664	<b>0,2664</b>
$\Delta X_{FA}$	<b>0,5295</b>	0,5295	0,5295	<b>0,5295</b>	0,5295	0,5295	<b>0</b>	0,5295	0,5295
$\Delta Y_{FA}$	0,4690	<b>0,4690</b>	0,4690	0,4690	<b>0,4690</b>	0,4690	0,4690	<b>0</b>	0,4690
$\Delta Z_{FA}$	0,5574	0,5574	<b>0,5574</b>	0,5574	0,5574	<b>0,5574</b>	0,5574	0,5574	<b>0</b>
$\Delta X_{FC}$	<b>0,5174</b>	0,5174	0,5174	<b>0</b>	0,5174	0,5174	<b>0,5174</b>	0,5174	0,5174
$\Delta Y_{FC}$	0,4540	<b>0,4540</b>	0,4540	0,4540	<b>0</b>	0,4540	0,4540	<b>0,4540</b>	0,4540
$\Delta Z_{FC}$	0,4883	0,4883	<b>0,4883</b>	0,4883	0,4883	<b>0</b>	0,4883	0,4883	<b>0,4883</b>

Analisando a Tabela 6.115, nota-se que os coeficientes de correlação múltipla entre as observações de *FE* e as observações das demais linhas-base são nulos, pois não existe redundância sobre o vértice *E* na rede, e desta forma, a solução para suas coordenadas é única e obtida diretamente por meio das observações de *FE*.

Para observações referentes ao mesmo eixo cartesiano de *DC*, *FC* e *FD*, os coeficientes de correlação múltipla assumem o valor máximo possível  $\rho_{ij}^q = 1$ , e para as observações das demais linhas-base (*FA*, *FB*, *FE*), estes são nulos. Da mesma maneira, para observações referentes ao mesmo eixo cartesiano de *FA* e *FB*, os coeficientes de correlação múltipla assumem o valor máximo possível  $\rho_{ij}^q = 1$ , e para as observações das demais linhas-base (*DC*, *FC*, *FD*, *FE*), estes são nulos.

Em outras palavras, é como se as observações de *FA* e *FB* só tivessem correlações não nulas com as observações destas linhas-base; *DC*, *FC* e *FD* só tivessem correlações não nulas com as observações destas linhas-base; e as observações de *FE* não tivessem correlação com nenhuma das observações das demais linhas-base.

Desta forma, em termos práticos, o MDB das observações para  $q = 2$  outliers simultâneos (Tabela 6.116), será igual ao respectivo MDB para o caso convencional (Tabela

6.112), ou igual a “infinito”, caso a outra observação considerada para  $q = 2$  possua coeficiente de correlação múltipla  $\rho_{ij}^q = 1$  com a observação em questão.

Da mesma maneira, em termos práticos, o número de redundância das observações para  $q = 2$  *outliers* simultâneos (Tabela 6.117), será igual ao respectivo número de redundância para o caso convencional (Tabela 6.112), ou igual a zero, caso a outra observação considerada para  $q = 2$  possua coeficiente de correlação múltipla  $\rho_{ij}^q = 1$  com a observação em questão.

Ou seja, na abordagem generalizada para  $q = 2$  *outliers* simultâneos, com a configuração da rede GPS praticamente radial, as medidas de confiabilidade das observações são iguais as medidas do caso convencional ( $q = 1$  *outlier* por vez apenas), ou então não existe controle para as observações, quando a outra observação considerada para  $q = 2$  possui coeficiente de correlação múltipla  $\rho_{ij}^q = 1$  com a observação em questão.

Tabela 6.118 – Confiabilidade externa máxima de alguns pares de observações ( $q = 2$  *outliers*, configuração da rede “praticamente radial”), sobre os parâmetros  $X_C$ ,  $X_E$ ,  $X_D$  e  $X_F$  (em mm).

	$\Delta X_{FA}$ e $\Delta X_{FC}$	$\Delta X_{FA}$ e $\Delta X_{FE}$	$\Delta X_{FA}$ e $\Delta X_{FD}$	$\Delta X_{FA}$ e $\Delta X_{FB}$
$X_C$	50	23	53	$\infty$
$X_E$	23	$\infty$	23	$\infty$
$X_D$	29	23	78	$\infty$
$X_F$	23	23	23	$\infty$

Analizando e comparando as Tabelas 6.113, 6.114 e 6.118, nota-se que a influência máxima dos pares de observações considerados ( $q = 2$ ), em geral, é praticamente (ou) igual a maior influência individual entre estas observações no caso convencional ( $q = 1$ ).

Por exemplo, no caso convencional, a influência de possíveis erros na observação  $\Delta X_{FA}$  sobre o parâmetro  $X_D$  é de 23 mm, e a influência de possíveis erros na observação  $\Delta X_{FD}$  sobre o parâmetro  $X_D$  é de 75 mm. Entretanto, a influência máxima de possíveis erros no par de observações  $\Delta X_{FA}$  e  $\Delta X_{FD}$  sobre o parâmetro  $X_D$  é de 78 mm, praticamente igual a influência individual de  $\Delta X_{FD}$  no caso convencional.

Da mesma forma, no caso convencional, a influência de possíveis erros na observação  $\Delta X_{FA}$  sobre o parâmetro  $X_D$  é de 23 mm, e a influência de possíveis erros na observação  $\Delta X_{FE}$  sobre o parâmetro  $X_D$  é nula. Portanto, a influência máxima de possíveis erros no par de observações  $\Delta X_{FA}$  e  $\Delta X_{FE}$  sobre o parâmetro  $X_D$  é de 23 mm, ou seja, igual a influência individual de  $\Delta X_{FA}$  no caso convencional.

A única exceção ocorre para o par de observações  $\Delta X_{FA}$  e  $\Delta X_{FB}$ , onde a influência máxima de possíveis erros nestas sobre todos os parâmetros é “infinita”, pois, conforme já visto, não existe controle considerando  $q = 2$  para este par de observações.

Ou seja, na abordagem generalizada para  $q = 2$  *outliers* simultâneos, com a configuração da rede GPS praticamente radial, as medidas de confiabilidade das observações são iguais as medidas do caso convencional ( $q = 1$  *outlier* por vez apenas), ou então não existe controle para as observações, quando a outra observação considerada para  $q = 2$  possui coeficiente de correlação múltipla  $\rho_{ij}^q = 1$  com a observação em questão.

De maneira resumida, é como se neste experimento, a rede GPS fosse dividida em três partes: O par de linhas-base  $FA$  e  $FB$ , o trio de linhas-base  $DC$ ,  $FC$  e  $FD$  (formando um triângulo), e a linha-base  $FE$ .

O par de linhas-base  $FA$  e  $FB$  é o único que tem influência sobre o vértice  $F$ , e a influência de  $FA$  (ou de  $FB$ ) sobre os vértices  $D$ ,  $C$ ,  $E$  e  $F$  é igual. O trio de linhas-base  $DC$ ,  $FC$  e  $FD$  só tem influência sobre os vértices  $C$  e  $D$ , e a linha-base  $FE$  só tem influência sobre o vértice  $E$ . Além disso, as observações de  $FA$  e  $FB$  só tem correlação com observações destas linhas-base, as observações de  $DC$ ,  $FC$  e  $FD$  só tem correlação com as observações destas linhas-base, e as observações de  $FE$  não tem correlação com as observações das demais linhas-base.

Por fim, analisando e comparando as Tabelas 6.57 e 6.118, nota-se que a influência máxima dos pares de observações considerados, no mínimo, duplica sobre os vértices  $C$ ,  $D$  e  $E$ , ao tornar a configuração da rede GPS praticamente radial.

Em alguns casos, estes aumentos foram consideravelmente significativos, como por exemplo, a influência máxima de  $\Delta X_{FA}$  e  $\Delta X_{FD}$  sobre  $X_C$ , que aumenta de 11 mm (com a configuração original da rede, sem  $AF$  e  $BF$  apenas), para 53 mm (com a configuração praticamente radial da rede neste experimento). Ou seja, em termos práticos, esta influência máxima aumentou 5 vezes, embora na configuração original da rede, o vértice  $C$  esteja contido em somente mais duas linhas-base ( $AC$  e  $BC$ , sendo ainda  $AC$  a linha-base de menor precisão da rede).

O único vértice para o qual esta influência máxima não aumentou muito foi o vértice  $F$ , pois todas as linhas-base que contém o vértice  $F$  na configuração original da rede foram mantidas neste experimento com a configuração praticamente radial (sendo que  $AF$  e  $BF$  foram excluídas nos dois cenários).

Uma conclusão obtida com estes experimentos relacionados com a geometria da rede, é que os números de redundância e o MDB das observações, se analisados isoladamente, podem fornecer hierarquias para as observações, em termos de suas medidas de confiabilidade, que podem levar a conclusões precipitadas.

Por exemplo, na configuração original da rede GPS (Tabela 6.3), a observação  $\Delta Z_{AC}$  tem um número de redundância local  $r_i = 0,9275$ , enquanto a observação  $\Delta Z_{DC}$  tem um número de redundância local  $r_i = 0,4458$ . Entretanto, devido a precisão inferior de  $\Delta Z_{AC}$ , o MDB de  $\Delta Z_{AC}$  é de  $13,4\text{ cm}$ , enquanto o MDB de  $\Delta Z_{DC}$  é de  $7,1\text{ cm}$ . Outro exemplo é que uma observação pode ter um MDB relativamente menor que o de outra observação, porém, mesmo sendo menor em módulo, a influência do primeiro sobre todos os parâmetros pode ser maior ou (no máximo) um pouco menor do que a influência do segundo, devido a diferença na localização destas observações na rede (ver, por exemplo, a confiabilidade interna e externa das observações  $\Delta X_{FB}$  e  $\Delta X_{BD}$  nas Tabelas 6.46, 6.47 e 6.49, e a Figura 6.1).

Por fim, considerando apenas os números de redundância e a confiabilidade interna das observações, pode-se concluir que a inclusão de um novo vértice na rede (com mais cinco linhas-base distintas), pode não ter um aumento significativo nas medidas de confiabilidade das demais observações. Entretanto, se for analisada a confiabilidade externa destas, nota-se que a mesma duplica, ou até mesmo triplica, adicionando este novo vértice com mais cinco linhas-base na rede GPS (ver o penúltimo experimento relativo a alteração na geometria da rede).

De maneira resumida, conclui-se que com possíveis alterações na geometria da rede, a confiabilidade externa das observações se mostrou muito mais afetada que os números de redundância e o MDB destas, tanto no caso convencional quanto no caso generalizado.

Como geralmente, na prática, se está mais interessado na influência de possíveis erros não detectados nas observações sobre os resultados do ajustamento, ou seja, no vetor dos parâmetros estimados (confiabilidade externa), ao invés da magnitude destes (confiabilidade interna), ou na parcela destes que é refletida nos resíduos (número de redundância), recomenda-se sempre realizar a análise da confiabilidade externa na etapa de planejamento de uma rede geodésica.

Sobre as diferenças entre as medidas de confiabilidade no caso convencional e no caso generalizado, a inserção de erros propositais nas observações, e a verificação de como estes foram devidamente refletidos nos resíduos, ou absorvidos pelos parâmetros incógnitos, além dos resultados dos testes estatísticos para identificação de erros, podem confirmar na prática qual das duas abordagens é mais efetiva e representa de maneira mais fiel a realidade do

problema na etapa de identificação de *outliers*. Este verificação será feita em alguns experimentos na próxima seção.

## 6.6 Inserção de Erros e Testes Estatísticos para Identificação de Erros

Após a comparação entre as medidas de confiabilidade no caso convencional e no caso generalizado para dois *outliers* simultâneos, visando verificar se de fato, na prática, existem diferenças entre os testes para a identificação (localização) de erros considerando múltiplos *outliers* simultâneos na hipótese alternativa e o procedimento de teste convencional *data snooping* (onde apenas uma observação é suspeita por vez), foram inseridos erros propositais em algumas observações da rede. No caso, foi utilizada a configuração da rede com  $n = 33$  observações, sem as linhas-base “repetidas” *AF* e *BF*.

Primeiramente, foram inseridos erros propositais em duas observações, e foi aplicado o teste para identificação de erros para múltiplos *outliers* (ver as hipóteses consideradas neste teste na expressão 3.7), bem como o procedimento de teste convencional *data snooping*, trabalhando com a estatística  $T_q$  (expressões 3.25 e 3.26) para ambos os casos, com  $q = 2$  e  $q = 1$ , respectivamente.

Como o parâmetro de não centralidade do modelo foi mantido o mesmo ( $\lambda_0 = 17,075$ ) para o cálculo das medidas de confiabilidade para  $q = 1$  e  $q = 2$  na seção anterior, mas os graus de liberdade dos dois testes são diferentes, foi encontrado em um monograma em Baarda (1968) um valor aproximado para o nível de significância ( $\alpha$ ) do teste para  $q = 2$ , considerando que para o procedimento de teste *data snooping*, o nível de significância arbitrado foi  $\alpha_0 = 0,001$ .

Desta forma, o valor encontrado para o nível de significância do teste com  $q = 2$  foi  $\alpha = 0,003$ . Seguindo esta metodologia (ver, por exemplo, BAARDA, 1968; TEUNISSEN, 2006; KNIGHT et al., 2010), os valores críticos tabelados para os testes na distribuição qui quadrado central, com  $q = 1$  grau de liberdade e  $\alpha_0 = 0,001$ , e com  $q = 2$  graus de liberdade e  $\alpha = 0,003$ , são, respectivamente, dados por  $K_{\alpha_0} = 10,83$  e  $K_\alpha = 11,62$ .

A Tabela 6.119 apresenta um resumo dos resultados obtidos com os experimentos.

Tabela 6.119 – Erros propostais em duas observações e as estatísticas calculadas dos testes ( $q = 1$  e  $q = 2$ ).

	<b>Observação</b>	<b>Erro Propostal Inserido</b>	<b>Estatística calculada do teste para <math>q = 1</math></b>	<b>Estatística calculada do teste para <math>q = 2</math></b>
<b>Experimento 1</b>	$\Delta X_{FE}$	+ 20 cm	$T_q = 136,12$	$T_q = 197,22$
	$\Delta X_{FD}$	+ 10 cm		
<b>Experimento 2</b>	$\Delta X_{FE}$	+ 20 cm	$T_q = 299,27$	$T_q = 334,87$
	$\Delta X_{FD}$	- 10 cm		
<b>Experimento 3</b>	$\Delta X_{FE}$	+ 20 cm	$T_q = 206,36$	$T_q = 232,34$
	$\Delta X_{BC}$	+ 10 cm		
<b>Experimento 4</b>	$\Delta X_{FE}$	+ 20 cm	$T_q = 213,21$	$T_q = 244,97$
	$\Delta X_{BC}$	- 10 cm		

Analizando a Tabela 6.119, nota-se que foram realizados quatro experimentos, inserção de um erro grosso de +20 cm na observação  $\Delta X_{FE}$  e +10 cm na observação  $\Delta X_{FD}$ , inserção de um erro grosso de +20 cm na observação  $\Delta X_{FE}$  e -10 cm na observação  $\Delta X_{FD}$ , inserção de um erro grosso de +20 cm na observação  $\Delta X_{FE}$  e +10 cm na observação  $\Delta X_{BC}$ , e inserção de um erro grosso de +20 cm na observação  $\Delta X_{FE}$  e -10 cm na observação  $\Delta X_{BC}$ .

Nota-se que os erros inseridos foram relativamente maiores do que os MDBs das observações para  $q = 1$  (ver a Tabela 6.46). Foram escolhidos os pares de observações  $\Delta X_{FE}$  /  $\Delta X_{FD}$  e  $\Delta X_{FE}$  /  $\Delta X_{BC}$  para a inserção de erros propostais porque o primeiro par apresenta um valor relativamente alto para o seu coeficiente de correlação múltipla ( $p_{ij}^q = 0,3783$ ), enquanto o segundo apresenta um valor relativamente baixo para o seu coeficiente de correlação múltipla ( $p_{ij}^q = 0,0220$ ).

Analizando o resultado resumido dos testes para  $q = 1$ , nota-se que nos quatro cenários a observação  $\Delta X_{FE}$  foi devidamente identificada, pois a sua estatística de teste  $T_q$  foi muito superior ao valor critico tabelado ( $K_{\alpha_0} = 10,83$ ), além de ter sido a maior estatística calculada dentre todas as observações.

A próxima etapa neste procedimento de teste ( $q = 1$ , *data snooping*) seria excluir a observação  $\Delta X_{FE}$  do modelo, repetir o ajustamento da rede, e repetir o teste, para verificar se a outra observação também seria identificada.

Por exemplo, no primeiro cenário, excluindo a observação  $\Delta X_{FE}$  e repetindo o ajustamento e o teste *data snooping*, a observação  $\Delta X_{FD}$  foi identificada, pois sua estatística de teste apresentou valor numérico  $T_q = 61,10$ , além de ter sido a maior estatística dentre todas as observações restantes. Excluída a observação  $\Delta X_{FD}$  do modelo, repete-se novamente o ajustamento e o teste *data snooping*, e nesta etapa, nenhuma observação foi identificada, ou

seja, o *data snooping* identificou e localizou corretamente as duas observações contaminadas por erros, num processo iterativo. Para os outros três cenários apresentados, o *data snooping* também identificou corretamente somente as duas observações contaminadas.

Sobre os resultados do teste para  $q = 2$ , nota-se que nos quatro cenários, as duas observações consideradas foram identificadas simultaneamente, pois a estatística de teste  $T_q$  foi muito superior ao valor critico tabelado ( $K_\alpha = 11,62$ ) em todos estes.

Após esta análise para  $q = 2$  *outliers*, foram inseridos erros propositais em três observações, e novamente aplicados os testes para identificação de erros para múltiplos *outliers*, bem como o procedimento de teste convencional *data snooping*, trabalhando com a estatística  $T_q$  em ambos os casos.

Mantendo o mesmo poder do teste para  $q = 1$  e  $q = 3$ , em um monograma em Baarda (1968) foi encontrado um valor aproximado para o nível de significância ( $\alpha$ ) do teste para múltiplos *outliers*, considerando que para o procedimento de teste *data snooping* o nível de significância arbitrado foi  $\alpha_0 = 0,001$ . Desta forma, o valor encontrado para o nível de significância do teste com  $q = 3$  foi  $\alpha = 0,006$ . Seguindo esta metodologia, os valores críticos tabelados para os testes na distribuição qui quadrado central, com  $q = 1$  grau de liberdade e  $\alpha_0 = 0,001$ , e com  $q = 3$  graus de liberdade e  $\alpha = 0,006$ , são, respectivamente, dados por  $K_{\alpha_0} = 10,83$  e  $K_\alpha = 12,45$ . A Tabela 6.120 apresenta um resumo dos resultados obtidos com os experimentos.

Tabela 6.120 – Erros propositais em três observações e as estatísticas calculadas dos testes ( $q = 1$  e  $q = 2$ ).

	<b>Observação</b>	<b>Erro Proposital Inserido</b>	<b>Estatística calculada do teste para <math>q = 1</math></b>	<b>Estatística calculada do teste para <math>q = 3</math></b>
<b>Experimento 1</b>	$\Delta X_{FE}$	+ 20 cm	$T_q = 55,77$	$T_q = 60,04$
	$\Delta X_{AE}$	+ 10 cm		
	$\Delta X_{DE}$	+ 10 cm		
<b>Experimento 2</b>	$\Delta X_{FE}$	+ 20 cm	$T_q = 243,33$	$T_q = 314,15$
	$\Delta X_{AE}$	+ 10 cm		
	$\Delta X_{DE}$	- 10 cm		
<b>Experimento 3</b>	$\Delta X_{FE}$	+ 20 cm	$T_q = 205,57$	$T_q = 233,14$
	$\Delta X_{AC}$	+ 10 cm		
	$\Delta X_{BC}$	+ 10 cm		
<b>Experimento 4</b>	$\Delta X_{FE}$	+ 20 cm	$T_q = 212,40$	$T_q = 259,37$
	$\Delta X_{AC}$	+ 10 cm		
	$\Delta X_{BC}$	- 10 cm		

Analizando o resultado resumido dos testes para  $q = 1$  (*data snooping*) na Tabela 6.120, nota-se que nos quatro cenários a observação  $\Delta X_{FE}$  foi devidamente identificada, pois a

sua estatística de teste  $T_q$  foi muito superior ao valor critico tabelado ( $K_{\alpha_0} = 10,83$ ), além de ter sido a maior estatística dentre todas observações.

Sobre os resultados do teste para  $q = 3$ , nota-se que nos quatro cenários, as três observações consideradas foram identificadas simultaneamente, pois a estatística de teste  $T_q$  foi muito superior ao valor critico tabelado ( $K_\alpha = 12,45$ ) em todos estes.

É importante destacar que apenas um modelo de erro dos  $\binom{n}{q}$  possíveis foi testado nos experimentos para múltiplos *outliers* ( $q = 2$  e  $q = 3$ ), sendo este o modelo de erro correto em cada caso. Na prática, o procedimento correto dos testes para múltiplos *outliers*, seria estipular o número de *outliers*  $q$  considerado (com  $1 < q < n - u$ ), e calcular a estatística de teste de todos os  $\binom{n}{q}$  modelos de erro possíveis para este número de *outliers*  $q$  estipulado.

Ou seja, embora se teste simultaneamente “ $q$ ” *outliers*, o teste generalizado também apresenta um alto custo computacional, pois requer o cálculo de  $\binom{n}{q}$  estatísticas de teste.

De maneira semelhante ao procedimento *data snooping*, as  $q$  observações suspeitas identificadas, simultaneamente, seriam aquelas que apresentarem uma estatística de teste maior que o valor crítico tabelado, além de ser a maior estatística de teste dentro todos os modelos de erro  $C_y$  possíveis para  $q$  (ver, por exemplo, KNIGHT et al., 2010).

Apenas para título de demonstração, no último cenário (inserção de um erro grosseiro de  $+20\text{ cm}$  em  $\Delta X_{FE}$ ,  $+10\text{ cm}$  em  $\Delta X_{AC}$  e  $-10\text{ cm}$  em  $\Delta X_{BC}$ ), alterando as observações consideradas suspeitas de  $\Delta X_{FE}$ ,  $\Delta X_{AC}$  e  $\Delta X_{BC}$  para  $\Delta Y_{FE}$ ,  $\Delta Y_{AC}$  e  $\Delta Y_{BC}$  (mantendo  $q = 3$ ), a estatística de teste deste novo modelo de erro resulta em  $T_q = 2,06$ , ou seja, apresenta valor inferior ao valor crítico tabelado ( $K_\alpha = 12,45$ ), e, desta forma, este novo trio de observações testado ( $\Delta Y_{FE}$ ,  $\Delta Y_{AC}$  e  $\Delta Y_{BC}$ ) não pode ser considerado contaminado por *outliers* (simultaneamente), segundo o nível de significância estipulado, mantido em  $\alpha = 0,006$ .

Ainda neste último cenário, alterando as  $q$  observações consideradas suspeitas para  $\Delta X_{FE}$ ,  $\Delta X_{AC}$  e  $\Delta X_{FC}$ , a estatística de teste deste novo modelo de erro resulta em  $T_q = 235,32$ . Embora este novo trio de observações testado apresente uma estatística de teste bem superior ao valor crítico tabelado ( $K_\alpha = 12,45$ ), para  $q = 3$ , o trio de observações que pode ser considerado contaminado por *outliers* simultaneamente ainda é  $\Delta X_{FE}$ ,  $\Delta X_{AC}$  e  $\Delta X_{BC}$ , pois este é o trio de observações que apresenta a maior estatística de teste ( $T_q = 259,37$ ).

Visando realçar algumas das possíveis “armadilhas” que podem ocorrer no procedimento de teste *data snooping*, mais dois experimentos foram realizados.

Em um primeiro, foram inseridos erros propositais de  $+10\text{ cm}$  em  $\Delta X_{DC}$ ,  $-10\text{ cm}$  em  $\Delta X_{FD}$  e  $-10\text{ cm}$  em  $\Delta X_{BD}$ . Neste cenário, para  $q = 1$ , a observação identificada foi a observação  $\Delta X_{DE}$ , apresentando a maior estatística de teste dentre todas as observações, com  $T_q = 26,38$ , ou seja, embora tenham três observações contaminadas por erros ( $\Delta X_{DC}$ ,  $\Delta X_{FD}$  e  $\Delta X_{BD}$ ), e estes sejam maiores que os respectivos MDB na Tabela 6.46, o procedimento *data snooping* identificou uma quarta observação ( $\Delta X_{DE}$ ) erroneamente (na literatura é chamado de fenômeno *swamping*).

Entretanto, no caso generalizado para  $q = 3$  *outliers*, com o modelo de erro definido adequadamente ( $\Delta X_{DC}$ ,  $\Delta X_{FD}$  e  $\Delta X_{BD}$ ), a estatística de teste apresenta o valor  $T_q = 26,57$ , ou seja, as três observações contaminadas são identificadas corretamente.

Em outro experimento, foram inseridos erros propositais de  $+20\text{ cm}$  nas observações de  $\Delta Z_{FA}$ ,  $\Delta Z_{FC}$ ,  $\Delta Z_{FE}$ ,  $\Delta Z_{FD}$  e  $\Delta Z_{FB}$ , ou seja, como se a coordenada  $Z_F$  fosse contaminada por um mesmo erro sistemático de  $-20\text{ cm}$  nas respectivas observações das cinco linhas-base que contém o vértice  $F$  na rede (Figura 6.1).

Neste cenário, para  $q = 1$  (*data snooping*), a observação  $\Delta X_{AE}$  foi a que apresentou a maior estatística de teste dentre todas as observações, com  $T_q = 3,87$ , sendo este inferior ao valor crítico tabelado  $K_{\alpha_0} = 10,83$ . Desta forma, embora tenha cinco observações contaminadas por erros de  $+20\text{ cm}$ , o procedimento *data snooping* não identificou nenhuma observação contaminada por erros (na literatura é chamado de fenômeno *masking*).

Além disso, sem a inserção dos erros propositais, o ajustamento da rede geodésica apresenta como estimativa para o parâmetro  $Z_F = 4354116,687\text{ m}$ . Com a inserção destes, o ajustamento da rede geodésica apresenta como estimativa para o parâmetro  $Z_F = 4354116,487\text{ m}$ , ou seja, de fato este erro sistemático afetaria em  $-20\text{ cm}$  a coordenada  $Z$  do vértice  $F$  da rede, passando despercebido pelo teste *data snooping*.

Entretanto, no caso generalizado para  $q = 5$  *outliers*, com o modelo de erro definido adequadamente ( $\Delta Z_{FA}$ ,  $\Delta Z_{FC}$ ,  $\Delta Z_{FE}$ ,  $\Delta Z_{FD}$  e  $\Delta Z_{FB}$ ), a estatística de teste apresenta o valor  $T_q = 88,21$ , ou seja, as cinco observações contaminadas são identificadas corretamente, pois o valor crítico tabelado para a distribuição qui quadrado, com  $q = 5$  graus de liberdade e nível de significância  $\alpha = 0,014$  (valor este novamente obtido em BAARDA, 1968) é  $K_\alpha = 14,27$ .

Provavelmente, o teste para  $q = 5$  *outliers* simultâneos identificou corretamente todas as observações contaminadas pelo fato da rede em estudo possuir mais observações referentes aos parâmetros desconhecidos  $Z_C$ ,  $Z_D$  e  $Z_E$ , enquanto no *data snooping*, supõe-se que apenas

uma observação esta contaminada por erros por vez, ou seja, erros sistemáticos comuns a várias observações podem passar desapercebidos.

Porém, poder-se-ia realizar um teste para  $q = 1$  diferente do *data snooping*, pois se trata de um erro sistemático de magnitude constante para todas as cinco observações. Desta forma, ao invés do modelo de erro ser definido para  $q = 5$ , poder-se-ia definir um teste para  $q = 1$  (um *outlier* apenas, mas contaminando cinco observações), modificando corretamente a matriz  $C_y$  para este cenário (que no caso vira um vetor  $c_y$ , pois  $q = 1$ ). Este vetor  $c_y$  iria conter valor 1 nas linhas das observações suspeitas consideradas (no caso,  $\Delta Z_{FA}$ ,  $\Delta Z_{FC}$ ,  $\Delta Z_{FE}$ ,  $\Delta Z_{FD}$  e  $\Delta Z_{FB}$ ), e valor nulo nas linhas das  $(n - 5)$  observações restantes.

Para este caso, a estatística de teste (3.25) apresenta o valor  $T_q = 80,23$ , ou seja, as cinco observações contaminadas são identificadas corretamente, pois o valor crítico tabelado para a distribuição qui quadrado, com  $q = 1$  graus de liberdade e nível de significância  $\alpha_0 = 0,001$  (mantendo a relação dos níveis de significância para diferentes valores de  $q$ ) é  $K_{\alpha_0} = 10,83$ . Este procedimento é muito útil quando se deseja identificar um mesmo erro sistemático afetando um conjunto de observações. O teste continua sendo realizado para  $q = 1$ , porém, como comentado, modifica-se o vetor  $c_y$  na estatística de teste em 3.25.

Estas duas “armadilhas” para o procedimento de teste *data snooping* (fenômenos *swamping* e *masking*) ocorreram devido a existência de múltiplas observações contaminadas por *outliers*, além, é claro, da propagação de erros entre os resíduos das observações.

Ressalva-se que o teste generalizado para  $q > 1$  *outliers* simultâneos também pode ser suscetível a estas armadilhas, quando o número de *outliers*  $q$  assumido para o teste for diferente do verdadeiro (e, na prática, desconhecido) número de *outliers* presente no conjunto de observações.

Desta forma, estes exemplos mostram o cuidado que se deve ter na aplicação destes testes estatísticos para identificação de erros, pois, observações podem ser excluídas do conjunto de observações erroneamente, e erros sistemáticos presentes em várias observações podem passar desapercebidos pelo procedimento de teste utilizado e afetar significativamente a determinação de um ou mais parâmetros incógnitos estimados. Entretanto, como determinar corretamente o número de “ $q$ ” *outliers* que será testado, é uma questão que ainda está em aberto (KNIGHT et al., 2010).

Dando continuidade, a próxima etapa após a identificação das observações com erros é a chamada adaptação, neste caso, o que fazer com essas observações. Normalmente, se retiram estas observações do conjunto e realiza-se um outro ajustamento para as observações

restantes. Porém, aqui será adotada uma outra estratégia.

Desta forma, após a identificação das  $q$  observações suspeitas de estarem contaminadas por *outliers* (segundo o nível de significância  $\alpha$  estipulado), os mesmos podem ser devidamente parametrizados no modelo matemático e ter a sua influência minimizada nos resultados do ajustamento (no vetor dos parâmetros  $x$ ).

Para isto, rejeita-se a hipótese nula  $H_0$  (ver a expressão 3.7), ou seja, aceita-se a hipótese alternativa  $H_A$ , e, primeiramente, estima-se a magnitude e o sinal dos  $q$  *outliers* por mínimos quadrados, por meio da expressão (5.39).

A Tabela 6.121 apresenta os resultados obtidos aplicando a expressão (5.39) no último experimento da Tabela 6.120 (para  $q = 3$ ).

Tabela 6.121 – Erros inseridos e erros estimados nas observações  $\Delta X_{FE}$ ,  $\Delta X_{AC}$  e  $\Delta X_{BC}$ .

Observação	Erro Propositado Inserido	Erro Estimado por MMQ
$\Delta X_{FE}$	+ 20 cm	+20,6 cm
$\Delta X_{AC}$	+ 10 cm	+ 9,3 cm
$\Delta X_{BC}$	- 10 cm	-10,6 cm

Analizando a Tabela 6.121, nota-se que os erros estimados por MMQ se aproximaram dos erros propositalmente inseridos. Esta é uma metodologia que pode ser utilizada no controle de qualidade do ajustamento, pois as  $q$  observações identificadas não precisam ser removidas do modelo, diminuindo a redundância do sistema, mas podem ter os seus erros (não aleatórios) estimados por MMQ, diminuindo, desta forma, a influência destes no vetor dos parâmetros ajustados  $x$  (mais detalhes em TEUNISSEN, 2006 e também em GUO et al., 2007). Esta metodologia também pode ser empregada para o procedimento de teste *data snooping* (ver, por exemplo, CAMARGO, 1992).

Um último experimento relativo aos testes estatísticos para identificação de erros, é verificar quais medidas de confiabilidade apresentam maior concordância com a realidade, se as medidas de confiabilidade convencionais, ou as medidas de confiabilidade generalizadas para múltiplos *outliers*. Desta forma, a configuração da rede GPS utilizada nestes estudos será aquela com o vértice  $F$  como ponto de controle, e os vértices  $A$  e  $B$  como pontos desconhecidos (sem as linhas-base “repetidas”  $AF$  e  $BF$ , ver a Figura 6.6).

Primeiramente, foram inseridos erros propositais de +10 cm nas observações  $\Delta X_{AE}$  e  $\Delta X_{FA}$ . Após o ajustamento por mínimos quadrados da rede GPS, o resíduo da observação  $\Delta X_{AE}$  apresentou o valor  $v_i = -9,8$  cm e o de  $\Delta X_{FA}$  apresentou o valor  $v_i = -3,7$  cm. Sem a inserção destes erros propositais, o resíduo ajustado de  $\Delta X_{AE}$  apresentou o valor

$v_i = -2,2 \text{ cm}$ , e para  $\Delta X_{FA}$ ,  $v_i = +8 \text{ mm}$ . Ou seja, a inserção dos erros propositais de  $+10 \text{ cm}$  em  $\Delta X_{AE}$  e  $\Delta X_{FA}$  aumentou em  $7,6 \text{ cm}$  o resíduo de  $\Delta X_{AE}$  e em  $2,9 \text{ cm}$  o resíduo de  $\Delta X_{FA}$ .

Analizando a Tabela 6.88 nota-se que o número de redundância da observação  $\Delta X_{AE}$ , para  $q = 1$  (*data snooping*), é  $r_i = 0,6229$ , e para  $\Delta X_{FA}$ ,  $r_i = 0,2500$ . Analisando a Tabela 6.97, nota-se que o número de redundância da observação  $\Delta X_{AE}$ , considerando  $q = 2$  para a observação  $\Delta X_{FA}$ , é  $r_i^q = 0,1625$  e o número de redundância da observação  $\Delta X_{FA}$ , considerando  $q = 2$  para a observação  $\Delta X_{AE}$ , é de 0,0652.

Portanto, pela magnitude dos resíduos de  $\Delta X_{AE}$  e  $\Delta X_{FA}$  inserindo erros propositais de  $+10 \text{ cm}$  nestas ( $v_i = -9,8 \text{ cm}$  e  $-3,7 \text{ cm}$ , respectivamente), nota-se que o número de redundância do caso convencional ( $q = 1$ ) foi mais realista do que o número de redundância do caso generalizado ( $q = 2$ ) para ambas as observações.

Aplicando o procedimento de teste *data snooping* no conjunto de observações, a observação que apresenta a maior estatística de teste é a observação  $\Delta X_{FA}$  ( $T_q = 74,13$ ), ou seja, foi identificada corretamente. Aplicando o teste para múltiplos *outliers*, considerando  $q = 2$  para  $\Delta X_{AE}$  e  $\Delta X_{FA}$ , a estatística de teste resulta em  $T_q = 445,60$ , ou seja, as duas observação são identificadas corretamente e de maneira simultânea.

Analizando a Tabela 6.88, nota-se que os MDBs das observações  $\Delta X_{AE}$  e  $\Delta X_{FA}$ , para  $q = 1$ , são, respectivamente, de  $7,7 \text{ cm}$  e  $7,1 \text{ cm}$  (ou seja, menores que os erros propositais inseridos de  $+10 \text{ cm}$ ). Entretanto, analisando a Tabela 6.95, nota-se que o MDB da observação  $\Delta X_{AE}$ , considerando  $q = 2$  para a observação  $\Delta X_{FA}$ , é de  $15,1 \text{ cm}$ , e o MDB da observação  $\Delta X_{FA}$ , considerando  $q = 2$  para a observação  $\Delta X_{AE}$ , é de  $14 \text{ cm}$  (ou seja, maiores que os erros propositais inseridos de  $+10 \text{ cm}$ ).

Portanto, nota-se que, tal como os números de redundância, a confiabilidade interna do caso convencional ( $q = 1$ , *data snooping*) foi mais realista do que a confiabilidade interna do caso generalizado ( $q = 2$ ) para ambas as observações. Ressalva-se que estas medidas foram obtidas fixando o poder do teste em  $\gamma = 0,80$ , embora o verdadeiro valor do poder do teste seja sempre desconhecido na prática.

Uma comparação entre a confiabilidade externa do caso convencional e do caso generalizado é mais complexa de ser feita, pois no caso convencional, a confiabilidade interna é um vetor obtido substituindo o MDB da observação no estimador por mínimos dos parâmetros, enquanto no caso generalizado, para cada parâmetro específico, a confiabilidade externa máxima é obtida resolvendo um problema de autovalores e autovetores.

Também foram comparados os resultados dos testes estatísticos para os casos extremos em que os pares de observações, no caso generalizado, apresentam coeficiente de correlação múltipla  $\rho_{ij}^q = 1$ . Desta forma, no último experimento realizado alterando a geometria da rede, com a configuração desta praticamente radial (Figura 6.8), foram inseridos erros propositais de  $+1\text{ m}$  nas observações  $\Delta X_{FC}$  e  $\Delta X_{FD}$ .

Após o ajustamento por mínimos quadrados da rede GPS, o resíduo de ambas as observações  $\Delta X_{FC}$  e  $\Delta X_{FD}$  foi de  $v_i = 0\text{ mm}$ . Sem a inserção destes erros propositais, o resíduo de ambas as observações também foi de  $v_i = 0\text{ mm}$ .

Analizando a Tabela 6.112, nota-se que o número de redundância da observação  $\Delta X_{FC}$ , para  $q = 1$ , é  $r_i = 0,5174$ , e para  $\Delta X_{FD}$ ,  $r_i = 0,1881$ . Como o coeficiente de correlação múltipla para este par de observações resulta em  $\rho_{ij}^q = 1$ , o número de redundância da observação  $\Delta X_{FC}$ , considerando  $q = 2$  para a observação  $\Delta X_{FD}$ , é  $r_i^q = 0$  e o número de redundância da observação  $\Delta X_{FD}$ , considerando  $q = 2$  para a observação  $\Delta X_{FC}$ , também é  $r_i^q = 0$ .

Portanto, pela magnitude nula dos resíduos de  $\Delta X_{FC}$  e  $\Delta X_{FD}$  inserindo erros propositais de  $+1\text{ m}$  nestas, nota-se que o número de redundância do caso generalizado ( $q = 2$ ) foi mais realista do que o número de redundância do caso convencional ( $q = 1$ ) para ambas as observações.

Aplicando o procedimento de teste *data snooping* no conjunto de observações, a observação que apresenta a maior estatística de teste é a observação  $\Delta Z_{FE}$  ( $T_q = 45598,88$ ), ou seja, foi identificada corretamente, e com um valor altíssimo para a sua estatística de teste. Provavelmente, isto ocorreu devido ao fato da linha-base *FE* estar “isolada” na rede, não existindo controle sobre as observações da mesma. Entretanto, aplicando o teste para múltiplos *outliers*, considerando  $q = 2$  para  $\Delta X_{FC}$  e  $\Delta X_{FD}$ , a estatística de teste resulta em  $T_q = 0,01$ , ou seja, as duas observação não são identificadas como contaminadas por erros.

Analizando a Tabela 6.112, nota-se que os MDBs das observações  $\Delta X_{FC}$  e  $\Delta X_{FD}$ , para  $q = 1$ , são iguais a  $9,2\text{ cm}$  (ou seja, muito menores que os erros propositais inseridos de  $+1\text{ m}$ ). Entretanto, como o coeficiente de correlação múltipla para este par de observações resulta em  $\rho_{ij}^q = 1$ , o MDB da observação  $\Delta X_{FC}$ , considerando  $q = 2$  para a observação  $\Delta X_{FD}$ , é “infinito”, e o MDB da observação  $\Delta X_{FD}$ , considerando  $q = 2$  para a observação  $\Delta X_{FC}$ , também é “infinito” (em outras palavras, não existe controle sobre estas observações nestes cenários).

Portanto, como nem o procedimento de teste *data snooping* e nem o teste para múltiplos *outliers* identificou corretamente as duas observações contaminadas por erros, a confiabilidade interna do caso generalizado ( $q = 2$ ) foi mais realista do que a confiabilidade interna do caso convencional ( $q = 1$ ) para ambas as observações.

Sobre os parâmetros estimados, os parâmetros  $X_C$  e  $X_D$  apresentam uma diferença de 1 m, realizando o ajustamento por mínimos quadrados da rede (sem os erros propositais), e com a inserção de erros propositais de +1 m em  $\Delta X_{FC}$  e  $\Delta X_{FD}$ . Considerando que não existe controle considerando  $q = 2$  para este par de observações, a confiabilidade externa do caso generalizado também foi mais realista do que a confiabilidade externa do caso convencional para ambas as observações.

Desta forma, nestes dois últimos experimentos, se verificou que dependendo do caso, as medidas de confiabilidade convencionais podem ser mais realistas do que as medidas de confiabilidade generalizadas para múltiplos *outliers*, e vice-versa. Importante ressaltar que todas estas medidas de confiabilidade só são de fato verdadeiras quando a hipótese alternativa, bem como o poder do teste estipulado, são verdadeiros, o que nem sempre ocorre na prática.

Na ocorrência de múltiplos *outliers*, tanto o procedimento de teste *data snooping* quanto os testes para múltiplos *outliers* podem identificar todas as observações contaminadas corretamente, podem identificar observações não contaminadas erroneamente, e podem não identificar observações contaminadas por erros.

Entretanto, as medidas de confiabilidade generalizadas para múltiplos *outliers* (simultâneos) são sempre piores, ou, na melhor das hipóteses, iguais as medidas de confiabilidade convencionais (considerando apenas um *outlier* por vez). Portanto, embora na prática, as medidas de confiabilidade convencionais, em alguns, podem ser mais realistas do que as medidas de confiabilidade generalizadas, se o planejamento de uma rede geodésica for feito de forma que esta seja resistente a  $q$  *outliers* simultâneos, quanto maior o número de *outliers*  $q$  considerado, maior será a “proteção” da rede a possíveis erros não detectados nas observações, pois mais baixas serão as medidas de confiabilidade destas.

## 6.7 Aplicação do Método QUAD

Finalmente, visando aplicar um dos diversos métodos de identificação de *outliers* encontrados na literatura, alternativos aos procedimentos de testes estatísticos apresentados, esta seção se utiliza do Método QUAD (*QUasi-Accurate Detection of outliers method*).

Para o método QUAD (OU, 1999; CHAI et al., 2002; GUI et al., 2005; GUO et al., 2007), primeiramente, três experimentos foram realizados, relativos a inserção proposital de três erros grosseiros (*outliers*) no conjunto de observações (novamente sem as linhas-base *AF* e *BF*), conforme mostra a Tabela 6.122.

Tabela 6.122 – Erros propositais inseridos nas observações  $\Delta X_{AC}$ ,  $\Delta X_{BC}$  e  $\Delta X_{FB}$  nos três experimentos realizados sobre o método QUAD.

	<b>Erro inserido em <math>\Delta X_{AC}</math></b>	<b>Erro inserido em <math>\Delta X_{BC}</math></b>	<b>Erro inserido em <math>\Delta X_{FB}</math></b>
<b>1º Experimento</b>	+10 cm	-10 cm	+10 cm
<b>2º Experimento</b>	+30 cm	-30 cm	+30 cm
<b>3º Experimento</b>	+50 cm	-50 cm	+50 cm

Analizando as Tabela 6.122 e 6.46, nota-se que no primeiro experimento, foram inseridos *outliers* de baixa magnitude (da mesma ordem de grandeza do MDB destas observações), no segundo experimento, foram inseridos *outliers* de magnitude relativamente alta (entre 2 e 7 vezes o MDB destas observações), e no terceiro experimento, foram inseridos *outliers* de alta magnitude (entre 3 e 12 vezes o MDB destas observações).

No primeiro experimento, como algumas observações (referentes a mesma linha-base) possuem covariâncias não nulas, seguindo a metodologia apresentada em Guo et al. (2007), primeiramente, calculou-se o indicador de sensibilidade local  $\tau_i$  de cada uma das  $n = 33$  observações, por meio da expressão (5.35), conforme mostra a Figura 6.9.

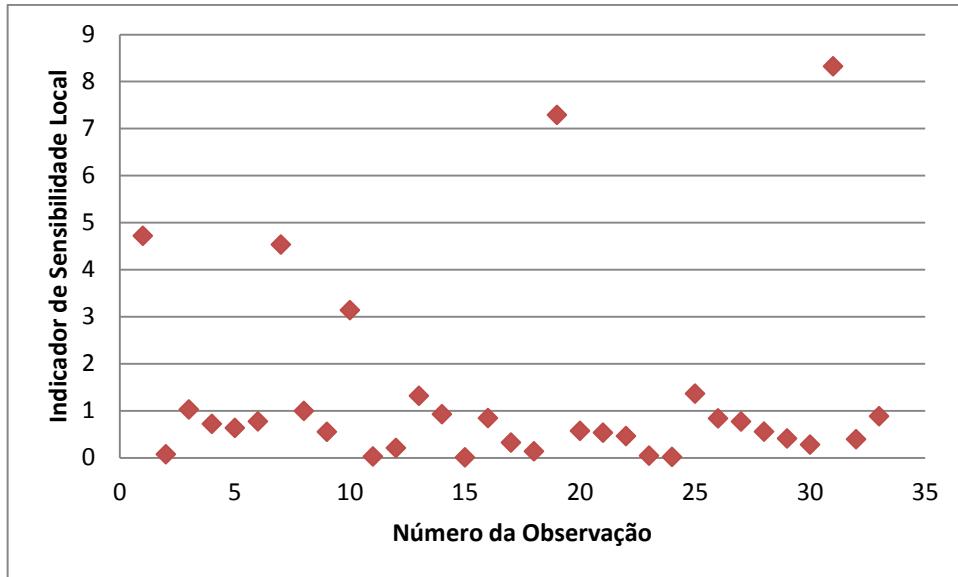


Figura 6.9 – Indicador de sensibilidade local  $\tau_i$  de cada uma das  $n = 33$  observações.

Para a escolha das observações “quase-acuradas”, foi aplicado o critério apresentado na expressão (5.36), substituindo o termo  $\sqrt{\sigma^2}$  nesta expressão por seu *robust least median of squares estimator*, dado pela expressão (5.37).

Desta forma, arbitrando o valor da constante  $K$  em (5.36) por  $K = 1,5$  (para maiores detalhes, ver, por exemplo, GUO et al., 2007), as observações selecionadas como “quase acuradas” serão aquelas cujos indicadores de sensibilidade local apresentam valor inferior a  $\tau_i < 1,41$ . A Figura 6.10 apresenta graficamente a linha com o valor crítico ( $\tau_i = 1,41$ ) para os indicadores de sensibilidade local das observações.

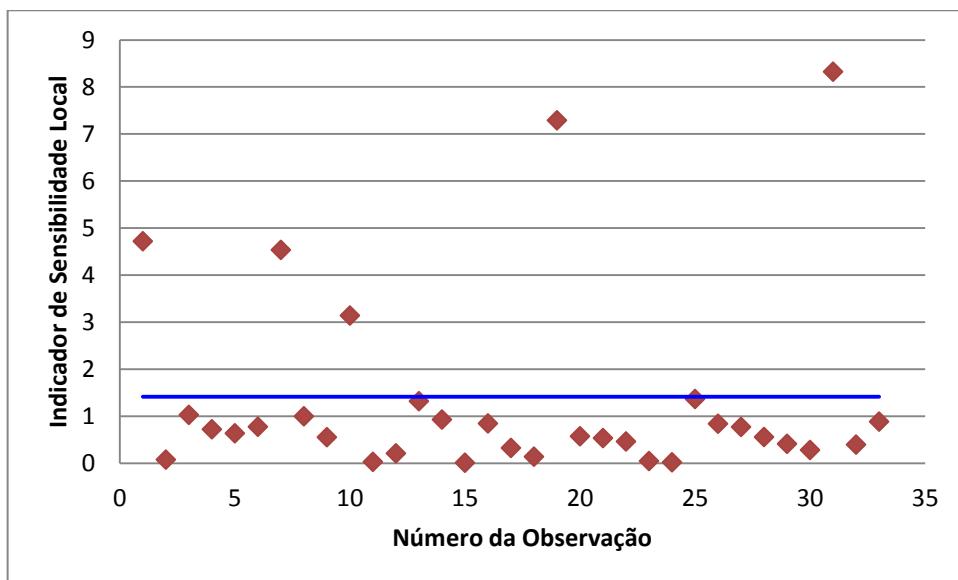


Figura 6.10 – Indicadores de sensibilidade local das observações e o valor crítico  $\tau_i = 1,41$ .

Analizando a Figura 6.10, nota-se que boa parte das observações apresentam seus indicadores de sensibilidade local inferiores ao valor crítico ( $\tau_i = 1,41$ ), ou seja, são selecionadas como “quase acuradas”. As únicas observações cujos indicadores de sensibilidade local excederam este valor crítico foram as observações 1 ( $\Delta X_{AC}$ ), 7 ( $\Delta X_{BC}$ ), 10 ( $\Delta X_{BD}$ ), 19 ( $\Delta X_{FA}$ ), e 31 ( $\Delta X_{FB}$ ).

Desta forma, após selecionar as observações quase acuradas, foi estimado o vetor dos erros verdadeiros para todas as observações, por meio da expressão (5.38), que utiliza a matriz peso modificada (desconsiderando as covariâncias destas e atribuindo o peso  $w_i = 1$  para as observações não selecionadas como quase-acuradas, sem modificar os pesos originais das demais). A Figura 6.11 apresenta os resultados obtidos.

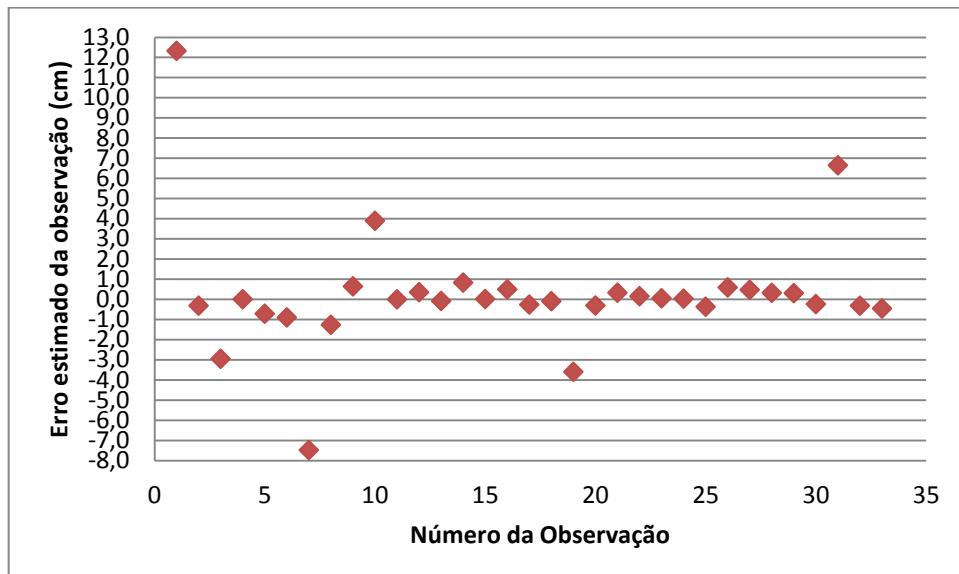


Figura 6.11 – Erros estimados para as observações aplicando o método QUAD.

Analizando a Figura 6.11, nota-se que o fenômeno “*hive-off*” é observado para a observação  $\Delta X_{AC}$ , entretanto, devido a propagação de erros no processo de estimação e o fato das observações  $\Delta X_{BD}$  e  $\Delta X_{FA}$  possuírem peso praticamente nulo (pois também não foram selecionadas como quase acuradas), o fenômeno “*hive-off*” não é muito evidente para as observações  $\Delta X_{BC}$  e  $\Delta X_{FB}$ . Nota-se também que os erros estimados para  $\Delta X_{BC}$  e  $\Delta X_{FB}$  foram inferiores aos erros propositalmente inseridos nestas (10 cm).

Para o segundo experimento da Tabela 6.122, após inserir os erros propositais de magnitude de 30 cm em  $\Delta X_{AC}$ ,  $\Delta X_{BC}$  e  $\Delta X_{FB}$ , foram calculados os indicadores de sensibilidade local das observações, conforme ilustra a Figura 6.12.

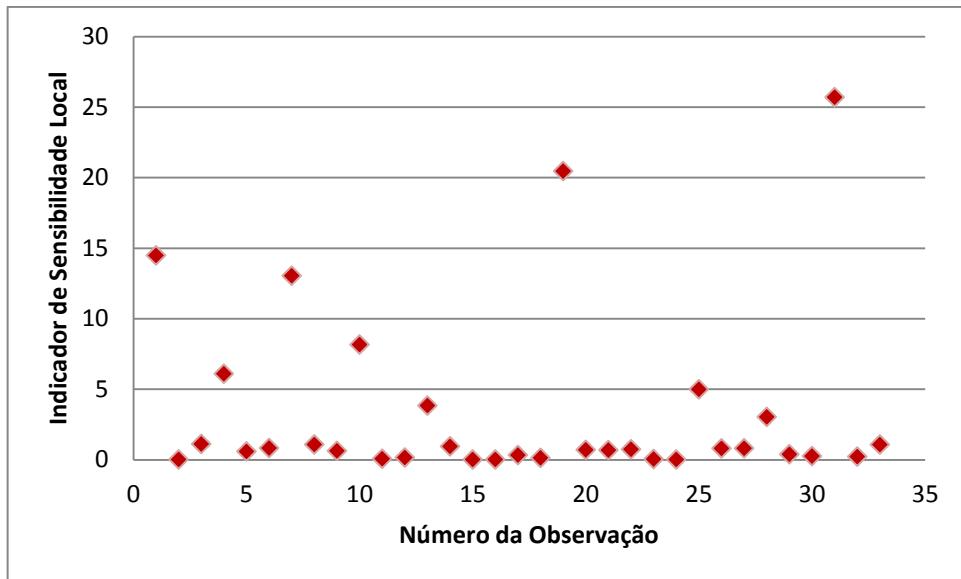


Figura 6.12 – Indicador de sensibilidade local  $\tau_i$  de cada uma das  $n = 33$  observações.

Seguindo a metodologia adotada, para a escolha das observações “quase-acuradas”, foi novamente aplicado o critério apresentado na expressão (5.36), substituindo o termo  $\sqrt{\sigma^2}$  nesta expressão por seu *robust least median of squares estimator*, dado pela expressão 5.37.

Desta forma, arbitrando o valor da constante  $K$  em (5.36) por  $K = 2,5$ , as observações selecionadas como “quase acuradas” serão aquelas cujos indicadores de sensibilidade local apresentam valor inferior a  $\tau_i < 2,75$ . A Figura 6.13 apresenta graficamente a linha com o valor crítico ( $\tau_i = 2,75$ ) para os indicadores de sensibilidade local das observações.

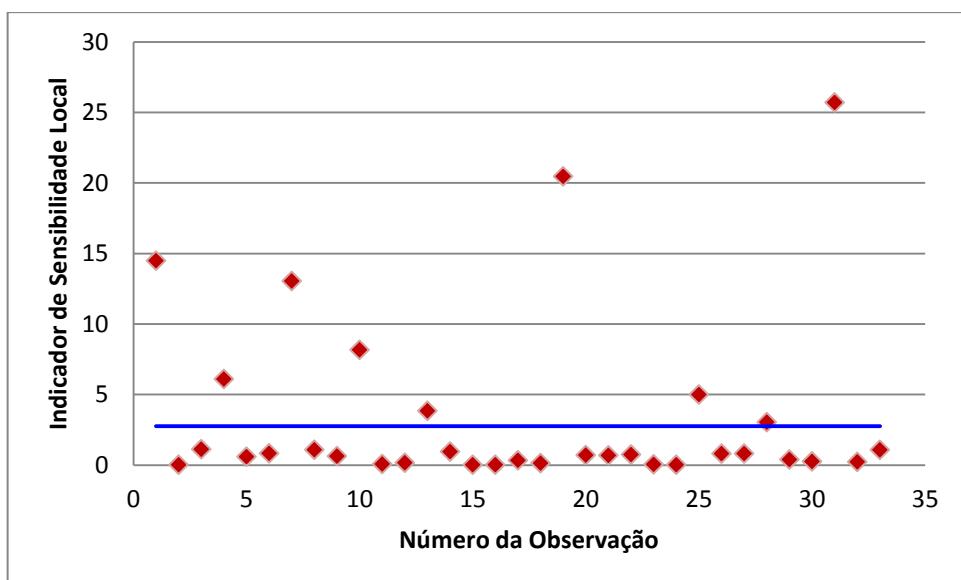


Figura 6.13 – Indicadores de sensibilidade local das observações e o valor crítico  $\tau_i = 2,75$ .

Analisando a Figura 6.13, nota-se que praticamente todas as observações relativas ao eixo cartesiano  $X$  não foram selecionadas como quase acuradas, pois seus indicadores de sensibilidade local excederam o valor crítico ( $\tau_i = 2,75$ ). As únicas observações referentes a este eixo cartesiano cujas observações foram selecionadas como quase acuradas foram as observações 16 ( $\Delta X_{DE}$ ) e 22 ( $\Delta X_{FC}$ ).

Desta forma, após selecionar as observações quase acuradas, foi estimado o vetor dos erros verdadeiros para todas as observações, por meio da expressão (5.38), utilizando novamente a matriz peso modificada (desconsiderando as covariâncias destas e atribuindo o peso  $w_i = 1$  para as observações não selecionadas como quase-acuradas, sem modificar os pesos originais das demais). A Figura 6.14 apresenta os resultados obtidos.

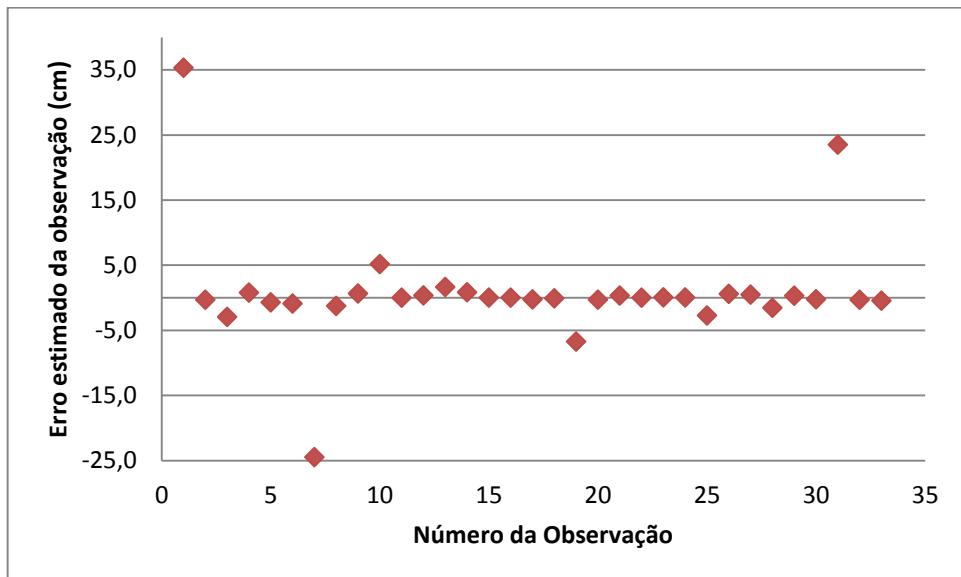


Figura 6.14 – Erros estimados para as observações aplicando o método QUAD.

Analizando a Figura 6.14, nota-se que o fenômeno “*hive-off*” é devidamente observado para as três observações contaminadas  $\Delta X_{AC}$ ,  $\Delta X_{BC}$  e  $\Delta X_{FB}$ , identificando corretamente as observações com erros. Este resultado é interessante, pois, das onze observações referentes ao eixo cartesiano  $X$ , somente duas foram selecionadas como quase acuradas ( $\Delta X_{DE}$  e  $\Delta X_{FC}$ ), ou seja, as nove restantes eram candidatas a ter erro. Mesmo assim, dentre estas nove observações, o método QUAD conseguiu identificar, por meio do fenômeno “*hive-off*”, as únicas três observações contaminadas por *outliers* corretamente ( $\Delta X_{AC}$ ,  $\Delta X_{BC}$  e  $\Delta X_{FB}$ ), enquanto para as seis observações restantes, a magnitude de seus erros estimados possuiu a mesma ordem de grandeza do restante das observações, que foram selecionadas como “quase acuradas”.

Provavelmente, isto se deve ao fato que os *outliers* inseridos nas três observações, possuem uma magnitude relativamente alta (30 cm), ou seja, o método QUAD se mostra bastante efetivo para *outliers* de alta magnitude.

Finalmente para o terceiro experimento da Tabela 6.122, após inserir os erros propositais de alta magnitude de 50 cm em  $\Delta X_{AC}$ ,  $\Delta X_{BC}$  e  $\Delta X_{FB}$ , foram calculados os indicadores de sensibilidade local das observações, conforme ilustra a Figura 6.15.

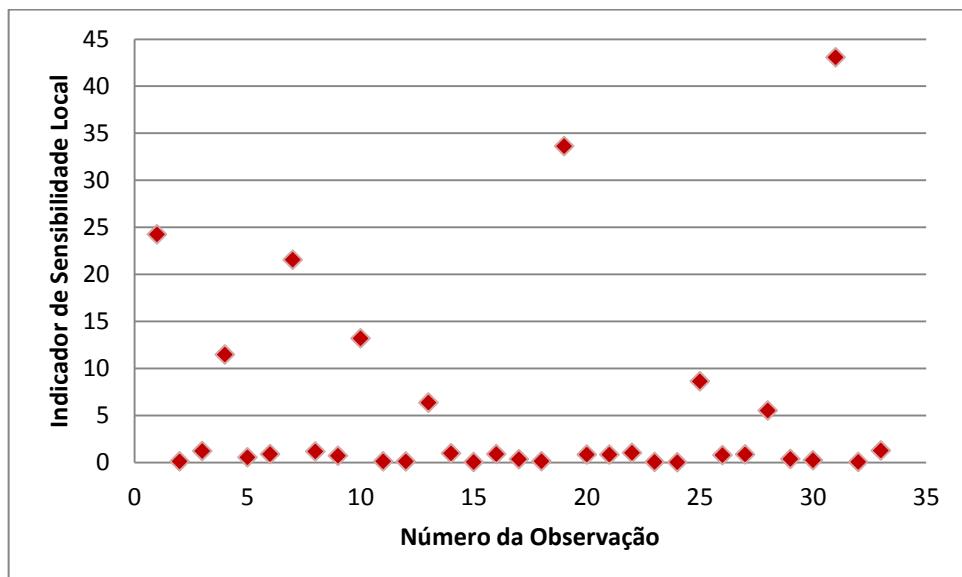


Figura 6.15 – Indicador de sensibilidade local  $\tau_i$  de cada uma das  $n = 33$  observações.

Seguindo a metodologia adotada, para a escolha das observações “quase-acuradas”, foi novamente aplicado o critério apresentado em (5.36), substituindo o termo  $\sqrt{\sigma^2}$  nesta expressão por seu *robust least median of squares estimator*, dado pela expressão 5.37.

Desta forma, arbitrando o valor da constante  $K$  em (5.36) por  $K = 2,5$  as observações selecionadas como “quase acuradas” serão aquelas cujos indicadores de sensibilidade local apresentam valor inferior a  $\tau_i < 3,17$ . A Figura 6.16 apresenta graficamente a linha com o valor crítico ( $\tau_i = 3,17$ ) para os indicadores de sensibilidade local das observações.

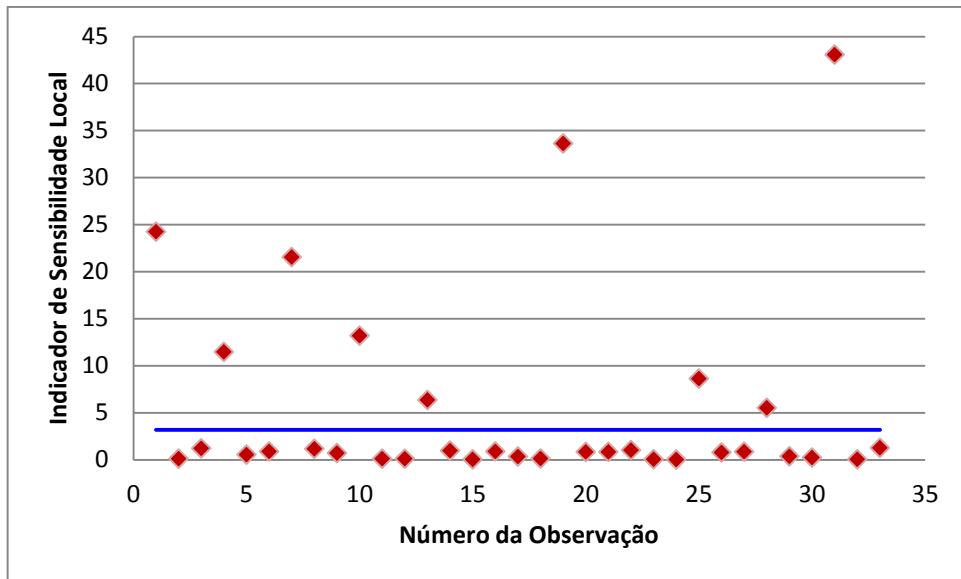


Figura 6.16 – Indicadores de sensibilidade local das observações e o valor crítico  $\tau_i = 3,17$ .

Analizando a Figura 6.16, nota-se que praticamente todas as observações relativas ao eixo cartesiano  $X$  não foram selecionadas como quase acuradas, pois seus indicadores de sensibilidade local excederam o valor crítico ( $\tau_i = 3,17$ ).

Novamente, as únicas observações referentes a este eixo cartesiano cujas observações foram selecionadas como quase acuradas foram as observações 16 ( $\Delta X_{DE}$ ) e 22 ( $\Delta X_{FC}$ ).

Desta forma, após selecionar as observações quase acuradas, foi estimado o vetor dos erros verdadeiros para todas as observações, por meio da expressão (5.38), utilizando mais uma vez a matriz peso modificada (desconsiderando as covariâncias destas e atribuindo o peso  $w_i = 1$  para as observações não selecionadas como quase-acuradas, sem modificar os pesos originais das demais). A Figura 6.17 apresenta os resultados obtidos.

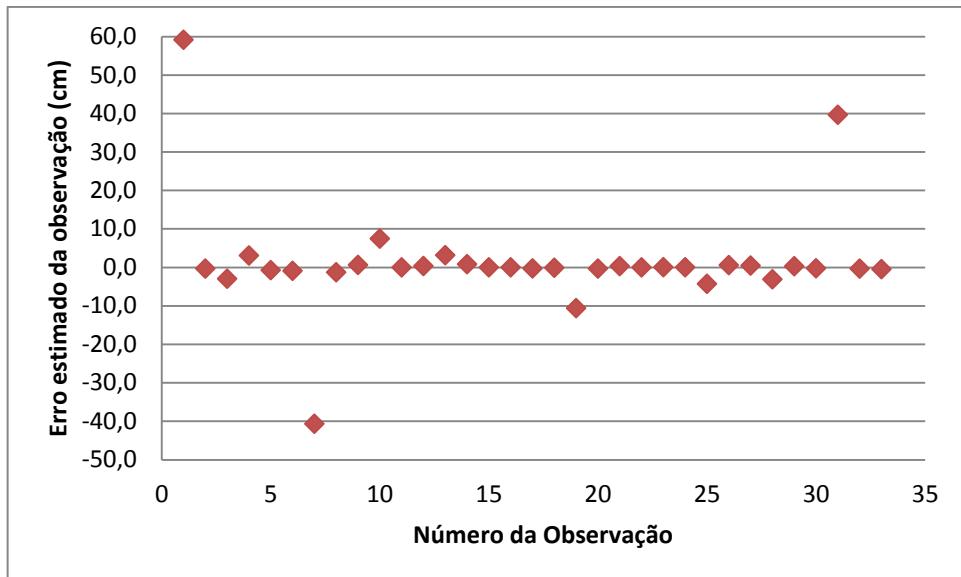


Figura 6.17 – Erros estimados para as observações aplicando o método QUAD.

Analizando a Figura 6.17, nota-se que o fenômeno “*hive-off*” é mais uma vez observado para as três observações contaminadas  $\Delta X_{AC}$ ,  $\Delta X_{BC}$  e  $\Delta X_{FB}$ , embora, novamente, das onze observações referentes ao eixo cartesiano  $X$ , somente duas foram selecionadas como quase acuradas ( $\Delta X_{DE}$  e  $\Delta X_{FC}$ ), ou seja, as nove restantes eram candidatas a estarem com erros. Analisando e comparando ainda as Figuras 6.14 e 6.17, nota-se também que, com a magnitude maior dos erros propositalmente inseridos, mais evidente se tornou o fenômeno “*hive-off*” para as três observações contaminadas, ou seja, o método QUAD definitivamente se mostrou bastante efetivo para *outliers* de alta magnitude.

Para verificar se de fato o método QUAD não é muito efetivo para *outliers* de “baixa” magnitude, o mesmo também foi aplicado no segundo experimento da Tabela 6.119 (inserção de um erro proposital de  $+20\text{ cm}$  em  $\Delta X_{FE}$ ,  $+10\text{ cm}$  em  $\Delta X_{AE}$  e  $-10\text{ cm}$  em  $\Delta X_{DE}$ ), para o qual tanto o procedimento *data snooping* quanto o teste para múltiplos *outliers* se mostraram eficientes.

Desta forma, após inserir os erros propositais de magnitude de  $+20\text{ cm}$  em  $\Delta X_{FE}$ ,  $+10\text{ cm}$  em  $\Delta X_{AE}$  e  $-10\text{ cm}$  em  $\Delta X_{DE}$ , foram calculados os indicadores de sensibilidade local das observações, conforme ilustra a Figura 6.18.

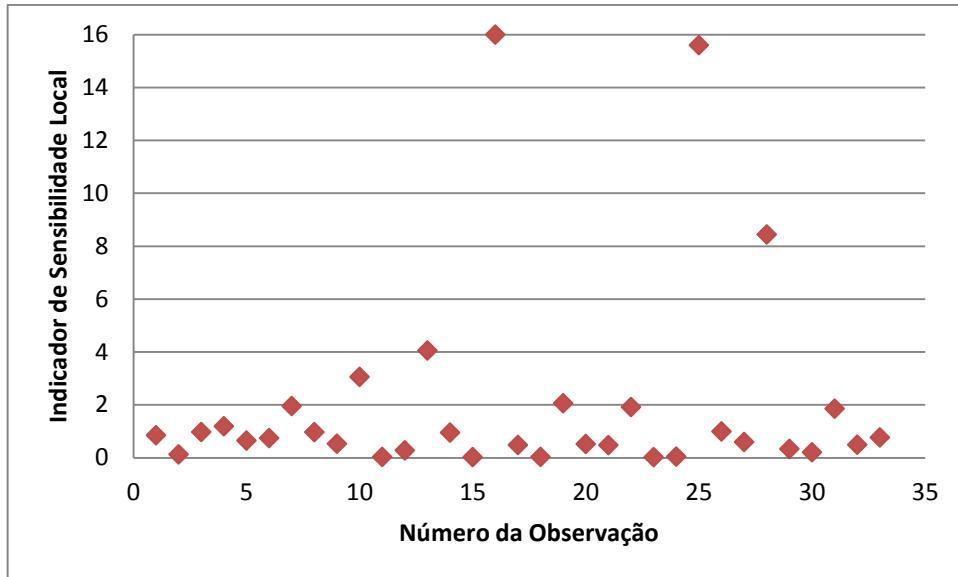


Figura 6.18 – Indicador de sensibilidade local  $\tau_i$  de cada uma das  $n = 33$  observações.

Seguindo a metodologia adotada, para a escolha das observações “quase-acuradas”, foi novamente aplicado o critério apresentado em (5.36), substituindo o termo  $\sqrt{\sigma^2}$  nesta expressão por seu *robust least median of squares estimator*, dado pela expressão 5.37.

Desta forma, arbitrando o valor da constante  $K$  em (5.36) por  $K = 1,5$  as observações selecionadas como “quase acuradas” serão aquelas cujos indicadores de sensibilidade local apresentam valor inferior a  $\tau_i < 1,65$ . A Figura 6.19 apresenta graficamente a linha com o valor crítico ( $\tau_i = 1,65$ ) para os indicadores de sensibilidade local das observações.

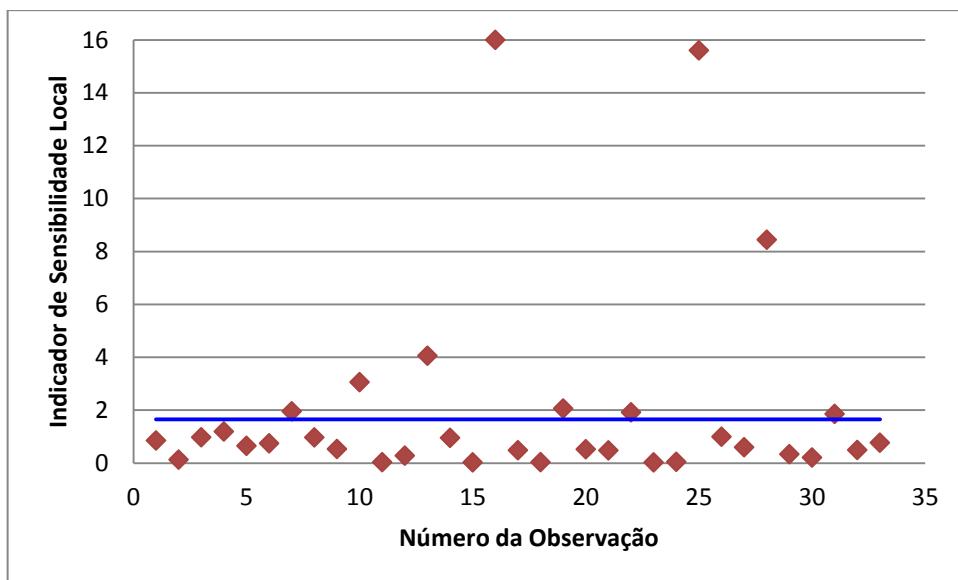


Figura 6.19 – Indicadores de sensibilidade local das observações e o valor crítico  $\tau_i = 1,65$ .

Analizando a Figura 6.19, nota-se que, as observações cujos indicadores de sensibilidade local excederam o valor crítico ( $\tau_i = 1,65$ ), não sendo, portanto, selecionadas como quase acuradas, foram as observações 7 ( $\Delta X_{BC}$ ), 10 ( $\Delta X_{BD}$ ), 13 ( $\Delta X_{DC}$ ), 16 ( $\Delta X_{DE}$ ), 19 ( $\Delta X_{FA}$ ), 22 ( $\Delta X_{FC}$ ), 25 ( $\Delta X_{FE}$ ), 28 ( $\Delta X_{FD}$ ) e a 31 ( $\Delta X_{FB}$ ).

Logo, as duas únicas observação selecionadas como quase acuradas, referente ao eixo cartesiano  $X$ , foram as observações 1 ( $\Delta X_{AC}$ ) e, curiosamente, a observação 4 ( $\Delta X_{AE}$ ), embora esta contenha um erro proposital de +10 cm.

Salienta-se que o valor da constante  $K$  foi arbitrado em  $K = 1,5$  (lembrando que, usualmente, de acordo com a literatura,  $1,5 \leq K \leq 2,5$ ). Ou seja, seguindo a metodologia apresentada em Gui et al. (2007), a observação  $\Delta X_{AE}$  seria selecionada como quase acurada para qualquer valor da constante  $K$  entre  $1,5 \leq K \leq 2,5$ .

Após selecionar as observações quase acuradas (com a observação  $\Delta X_{AE}$  selecionada erroneamente), foi estimado o vetor dos erros aleatórios para todas as observações, por meio da expressão (5.38), utilizando mais uma vez a matriz peso modificada (desconsiderando as covariâncias destas e atribuindo o peso  $w_i = 1$  para as observações não selecionadas como quase-acuradas, sem modificar os pesos originais das demais). A Figura 6.20 apresenta os resultados obtidos.

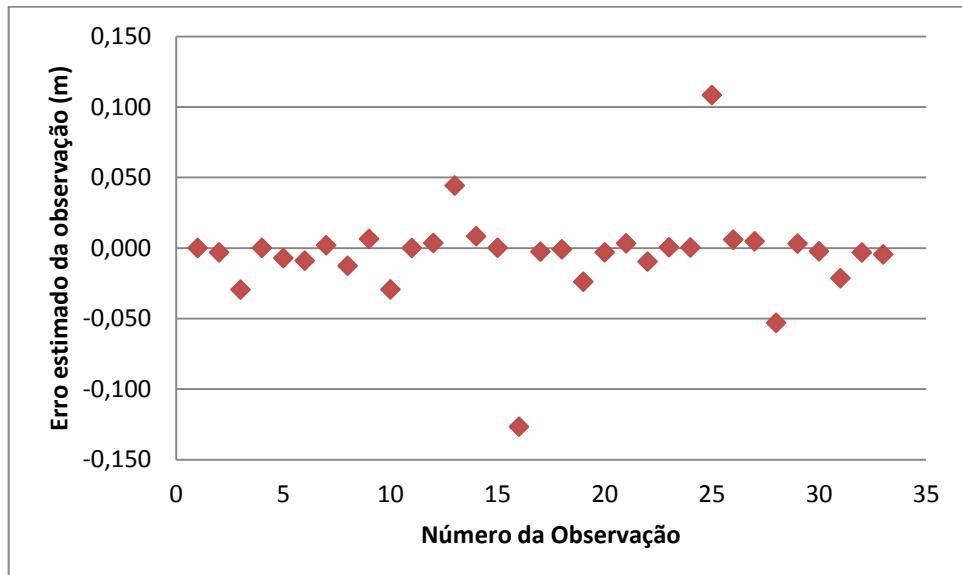


Figura 6.20 – Erros estimados para as observações aplicando o método QUAD.

Analizando a Figura 6.20, nota-se que o fenômeno “hive-off” não é perfeitamente observado, embora as observações 16 ( $\Delta X_{DE}$ ) e 25 ( $\Delta X_{FE}$ ) apresentem seus erros estimados relativamente superiores aos das demais observações, porém, em termos absolutos de

magnitude, menos de 3 vezes maior do que boa parte das demais observações, ou seja, o fenômeno “*hive-off*” não pode ser considerado conclusivo para este caso, tal como foi para os dois últimos experimentos anteriores, por exemplo.

Portanto, pode-se concluir que para *outliers* de baixa magnitude, o método QUAD, pelo fato de se utilizar do fenômeno “*hive-off*” para a localização dos *outliers*, não se mostrou muito efetivo, devido a propagação de erros nas observações, além da própria magnitude relativamente baixa destes.

Inclusive, para estes casos, seguindo a metodologia encontrada na literatura, o método QUAD pode selecionar erroneamente uma observação contaminada por erro como quase acurada.

Por fim, um último experimento realizado com o método QUAD, foi para verificar se o mesmo também é suscetível a algumas “armadilhas” que podem ocorrer na prática. Desta forma, novamente foram inseridos erros propositais de  $+20\text{ cm}$  nas observações de  $\Delta Z_{FA}$ ,  $\Delta Z_{FC}$ ,  $\Delta Z_{FE}$ ,  $\Delta Z_{FD}$  e  $\Delta Z_{FB}$ , ou seja, como se a coordenada  $Z_F$  fosse contaminada por um erro sistemático de  $-20\text{ cm}$  nas respectivas observações das cinco linhas-base que contém o vértice  $F$  na rede (Figura 6.1).

Desta forma, após inserir os erros propositais de  $+20\text{ cm}$  em  $\Delta Z_{FA}$ ,  $\Delta Z_{FC}$ ,  $\Delta Z_{FE}$ ,  $\Delta Z_{FD}$  e  $\Delta Z_{FB}$ , foram calculados os indicadores de sensibilidade local das observações, conforme ilustra a Figura 6.21.

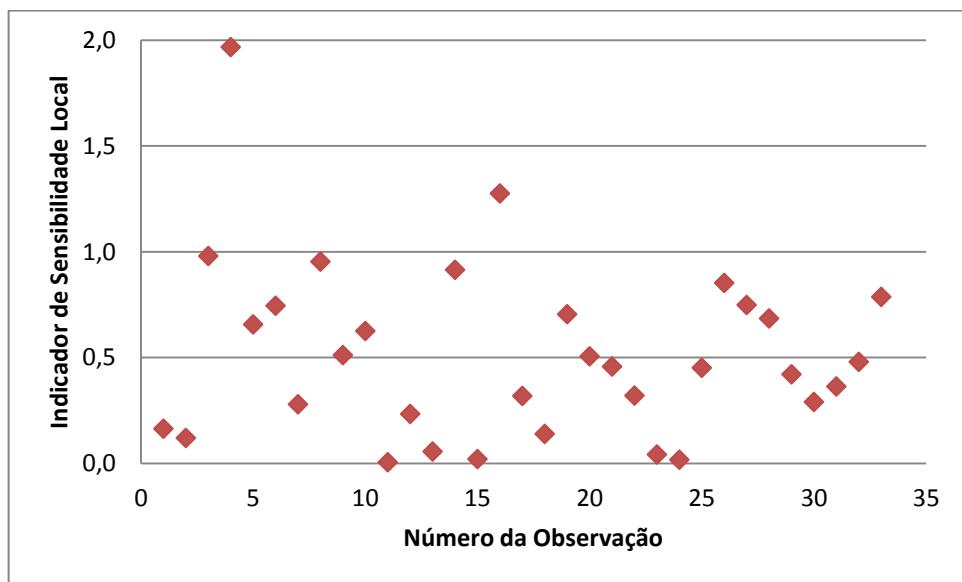


Figura 6.21 – Indicador de sensibilidade local  $\tau_i$  de cada uma das  $n = 33$  observações.

Seguindo a metodologia adotada, para a escolha das observações “quase-acuradas”, foi novamente aplicado o critério apresentado em (5.36), substituindo o termo  $\sqrt{\sigma^2}$  nesta expressão por seu *robust least median of squares estimator*, dado pela expressão 5.37.

Desta forma, arbitrando o valor da constante  $K$  em (5.36) por  $K = 1,5$  as observações selecionadas como “quase acuradas” serão aquelas cujos indicadores de sensibilidade local apresentam valor inferior a  $\tau_i < 1,02$ . A Figura 6.22 apresenta graficamente a linha com o valor crítico ( $\tau_i = 1,02$ ) para os indicadores de sensibilidade local das observações.

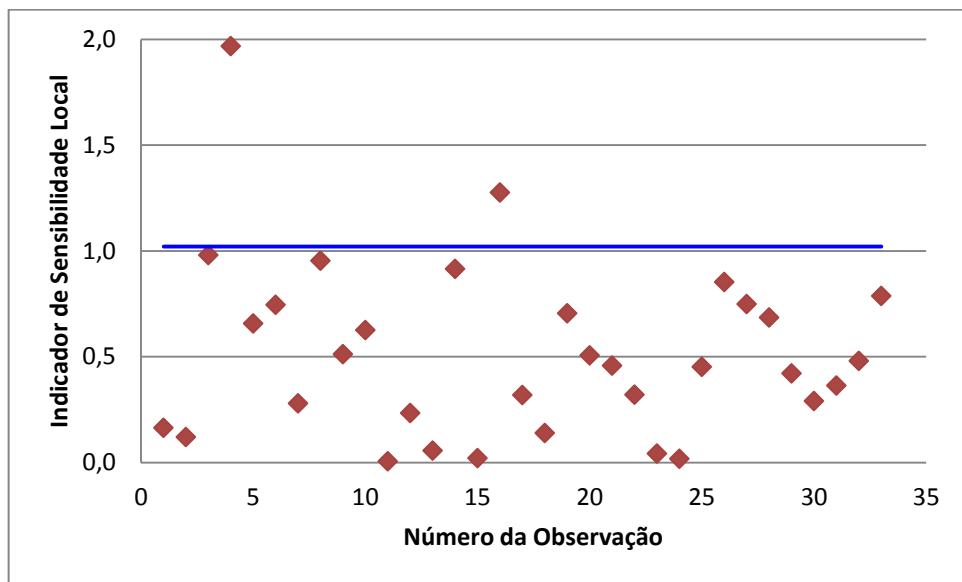


Figura 6.22 – Indicadores de sensibilidade local das observações e o valor crítico  $\tau_i = 1,02$ .

Analizando a Figura 6.22, nota-se que as duas únicas observações que apresentaram seus indicadores de sensibilidade local superior ao valor crítico ( $\tau_i = 1,02$ ), não sendo, portanto, selecionadas como quase acuradas, foram as observações 4 ( $\Delta X_{AE}$ ) e 16 ( $\Delta X_{DE}$ ).

Após selecionar as observações quase acuradas, foi estimado o vetor dos erros aleatórios para todas as observações, por meio da expressão (5.38), utilizando mais uma vez a matriz peso modificada (desconsiderando as covariâncias destas e atribuindo o peso  $w_i = 1$  para as observações não selecionadas como quase-acuradas, sem modificar os pesos originais das demais). A Figura 6.23 apresenta os resultados obtidos.

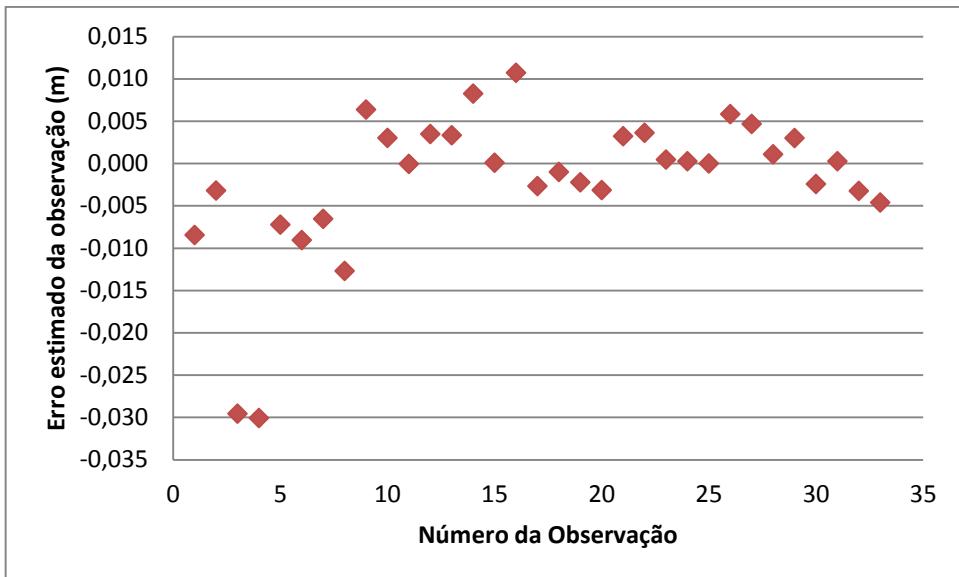


Figura 6.23 – Erros estimados para as observações aplicando o método QUAD.

Analisando a Figura 6.23, nota-se que as duas únicas observações cujos erros estimados foram relativamente maiores que das demais foram as observações 3 ( $\Delta Z_{AC}$ ) e 4 ( $\Delta X_{DE}$ ). Porém, devido a pequena diferença entre os erros estimados das observações, mais uma vez o fenômeno “hive-off” não pode ser considerado conclusivo.

Portanto, o método QUAD, tal como o procedimento de teste *data snooping*, falhou perante a “armadilha” de se inserir erros propositais de +20 cm em  $\Delta Z_{FA}$ ,  $\Delta Z_{FC}$ ,  $\Delta Z_{FE}$ ,  $\Delta Z_{FD}$  e  $\Delta Z_{FB}$ .

Entretanto, é importante salientar que, apesar de suas limitações, o método QUAD se mostra uma alternativa interessante aos rigorosos procedimentos de testes estatísticos para a detecção e identificação de *outliers*, especialmente no caso de *outliers* de alta magnitude.

Portanto, devido ao fato do método QUAD utilizar um procedimento de cálculo mais simples, e, principalmente, não necessitar de um processo iterativo, sendo de (relativo) baixo custo computacional, o mesmo pode ser utilizado como uma estratégia preliminar para a identificação de *outliers* de alta magnitude, para só então, após este, se empregar os procedimentos de testes estatísticos para a identificação de possíveis *outliers* remanescentes nas observações.

Importante ressaltar que o método QUAD não possui medidas de confiabilidade associadas, além de não ser formulado com base em critérios estatísticos, fazendo uso unicamente do fenômeno “hive-off” para a identificação simultânea de *outliers*, pressupondo que as observações quase acuradas foram selecionadas corretamente. Portanto, nos estudos sobre o método QUAD, pode-se verificar também os coeficientes de correlação múltipla das

observações não selecionadas como quase acuradas, os diferentes valores para o MDB das observações contaminadas com erros e etc., visando investigar se as medidas de confiabilidade das observações podem fornecer informações úteis sobre quais serão as observações selecionadas como quase-acuradas com a aplicação do método QUAD.

Além disso, o método QUAD também não possui uma das principais limitações dos testes estatísticos para múltiplos *outliers*, que é a definição adequada do número de *outliers*  $q$  considerado, pois estes surgem de maneira simultânea por meio do fenômeno “*hive-off*”, quando este ocorre.

Por ser um método relativamente recente, recomenda-se ainda mais estudos sobre o QUAD, alterando, por exemplo, o número de *outliers* considerados, bem como a magnitude e o sinal destes.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS, CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

### 7.1 Considerações Finais

Nesta pesquisa, apresentou-se uma ampla revisão teórica sobre o tema controle de qualidade no ajustamento de observações geodésicas, contemplando o método dos mínimos quadrados, sua interpretação geométrica e propriedades, os testes estatísticos para a detecção e a identificação de erros, bem como a teoria de confiabilidade associada a estes, tanto por meio da abordagem convencional (considerando apenas um *outlier* por vez), quanto a abordagem mais recente, considerando a existência de múltiplos *outliers* de maneira simultânea. Também foi apresentado o método QUAD, uma outra abordagem recente para o controle de qualidade do ajustamento, e alternativa aos procedimentos de testes descritos.

Antes da realização desta pesquisa, poucos trabalhos no âmbito nacional, referentes ao tema controle de qualidade no ajustamento de observações geodésicas haviam sido realizados, principalmente considerando a abordagem mais recente da teoria de confiabilidade, ou seja, a sua generalização para múltiplos *outliers* simultâneos. Além disso, no cenário nacional, também não se tinha o conhecimento de nenhum estudo realizado sobre o método QUAD.

Importante mencionar que, por serem estratégias de controle de qualidade relativamente recentes, poucos estudos no cenário internacional sobre a teoria de confiabilidade generalizada para múltiplos *outliers* e o método QUAD também haviam sido realizados até então.

Nos experimentos realizados nesta dissertação, procurou-se investigar como a questão das variâncias e covariâncias das observações, além da geometria (configuração) de uma rede geodésica, podem influenciar nas medidas de confiabilidade consideradas, tanto no caso convencional, quanto no caso generalizado. Também se fez um estudo comparativo entre os testes estatísticos para a identificação de erros, utilizando tanto a abordagem convencional (procedimento *data snooping*, considerando apenas um *outlier* por vez), quanto os testes estatísticos para a identificação de múltiplos *outliers* simultâneos nas observações. Finalmente, um estudo comparativo entre a abordagem alternativa do método QUAD e os referidos testes estatísticos também foi realizado.

## 7.2 Conclusões

Sobre o estudo teórico dos métodos convencionais e do estado da arte sobre o tema proposto, pode-se concluir que o objetivo foi concluído com êxito.

À respeito da revisão teórica da parte convencional, buscou-se produzir um texto didático, com maior desenvolvimento na explicação principalmente das fórmulas, objetivando demonstrar os fundamentos envolvidos no desenvolvimento dos testes estatísticos e das medidas de confiabilidade convencionais. Consultando a bibliografia nacional na área da Geodésia não se encontra um trabalho com tal detalhamento dos métodos convencionais do controle de qualidade. Além disso, mesmo na bibliografia internacional sobre o tema, muito do desenvolvimento teórico dos métodos encontra-se de forma “fragmentada”. Desta forma, espera-se que a revisão apresentada nesta dissertação seja uma fonte de consulta para os interessados em entender de forma ampla o desenvolvimento do controle de qualidade do ajustamento usualmente aplicado na prática.

À respeito da revisão teórica do estado da arte do tema proposto, apresentou-se o atual estado da arte das medidas de confiabilidade convencionais, agora ampliada para casos generalizados. Ainda não se encontra no cenário nacional tal abordagem, e desta forma, esta dissertação pretende contribuir também neste sentido.

Métodos alternativos atuais para identificação de erros também foram estudados, do qual foi detalhado o método QUAD. À respeito deste método é importante enfatizar que a expressão (5.38) foi desenvolvida nesta presente dissertação como uma alternativa mais simples do que a apresentada pelos autores do método (expressão 5.34), e que chega aos mesmos resultados.

Partindo para os experimentos realizados, primeiramente, sobre as medidas de confiabilidade das observações, em termos gerais, pode-se concluir que:

- Linhas-base compostas por um ponto de controle e um ponto desconhecido, em geral, apresentam maiores valores para seus números de redundância do que linhas-base compostas por dois pontos desconhecidos, ou seja, quanto menor o número de parâmetros incógnitos diretamente relacionados com uma observação, maior o seu número de redundância;

- Linhas-base compostas por um ponto de controle e um ponto desconhecido, em geral, apresentam menores valores para o MDB de suas observações do que linhas-base compostas por dois pontos desconhecidos, ou seja, quanto menor o número de parâmetros incógnitos diretamente relacionados com uma observação, menor o seu MDB;
- Quando a MVC das observações possui estrutura bloco diagonal, e além disso, as covariâncias não nulas das observações são muito menores que as variâncias destas (como por exemplo, cerca de 100 vezes), os números de confiabilidade das observações, em termos práticos, são iguais aos números de redundância;
- A confiabilidade interna *a priori* é uma boa aproximação da confiabilidade interna, sendo que para observações com um número de redundância maior do que o número de redundância médio das observações, a confiabilidade interna tende a ser subestimada (o menor erro detectável *a priori* é maior do que o calculado após o ajustamento), enquanto para observações com um número de redundância menor do que o número de redundância médio das observações, a confiabilidade interna tende a ser superestimada (o menor erro detectável *a priori* é menor do que o calculado após o ajustamento);
- Entretanto, ressalva-se que estipulando uma geometria *a priori* para a rede e a precisão esperada para as observações, pode-se definir a matriz *design A* e uma aproximação da matriz peso *W*, e assim, calcular um valor mais próximo para o MDB das observações, utilizando a sua expressão original ao invés da expressão simplificada da confiabilidade interna *a priori*;
- Os coeficientes de correlação múltipla das observações não dependem somente das covariâncias destas, mas também da geometria do problema, e desta forma, observações com covariâncias nulas podem apresentar maior valor para o seu coeficiente de correlação múltipla do que observações com covariâncias não nulas, porém referentes a eixos cartesianos distintos, por exemplo;
- Quando a rede geodésica apresenta muita redundância (ou seja, um número de observações muito maior do que o número de parâmetros), as medidas de

confiabilidade para múltiplos *outliers* simultâneos, na maior parte dos casos, em pouco difere das medidas de confiabilidade convencionais (considerando apenas um *outlier* por vez), pois os coeficientes de correlação múltipla tendem a diminuir conforme se aumenta o número de observações. Entretanto, quando a rede geodésica não apresenta muita redundância, os coeficientes de correlação múltipla das observações tendem a ser relativamente maiores e as medidas de confiabilidade da abordagem convencional podem diferir consideravelmente da abordagem generalizada para múltiplos *outliers*;

- Ressalva-se também a importância de analisar as medidas de confiabilidade de maneira conjunta, pois uma observação pode ter um alto número de redundância, mas também um alto valor para o seu MDB, e além disso, uma influência relativamente baixa de seu MDB sobre os parâmetros, ou seja, estas medidas podem ordenar as observações de maneiras distintas, em termos de confiabilidade, e a análise isolada de apenas uma destas pode não ser coerente com a realidade do problema;
- Como a confiabilidade das observações diminui aumentando o número de *outliers* simultâneos considerado, e como as medidas de confiabilidade independem do valor numérico das observações (ou seja, podem ser estimadas antes da etapa de campo), um exemplo de aplicação da teoria de confiabilidade generalizada para múltiplos *outliers* é o planejamento de uma rede geodésica para que esta seja “resistente a  $q$  *outliers* simultâneos”. Ou seja, pode-se estipular *a priori* uma geometria para a rede, a precisão esperada para as observações, os níveis de probabilidade assumidos e o número  $q$  de *outliers* simultâneos considerado, e então calcular as medidas de confiabilidade para  $q$  *outliers*. Caso os valores obtidos sejam muito elevados, segundo algum critério de tolerância estipulado pelo geodesista, pode-se melhorar a geometria da rede (como o número de observações e de parâmetros), e a precisão das observações (por meio da seleção de equipamentos e técnicas de posicionamento mais adequadas).

Sobre a influência das variâncias e covariâncias das observações sobre as medidas de confiabilidade, pode-se afirmar que:

- Multiplicando a MVC das observações por um escalar qualquer  $K$ , a confiabilidade interna e a confiabilidade externa destas aumenta (ou diminui) numa proporção  $\sqrt{K}$ , enquanto os números de redundância e de confiabilidade permanecem os mesmos;
- Importante ressaltar que, multiplicando as observações por um escalar qualquer  $K$ , a hierarquia das observações, em termos relativos de confiabilidade, permanece a mesma para todas as medidas consideradas;
- Quando a MVC das observações é diagonal, o MDB de uma observação para múltiplos *outliers* simultâneos é igual ao MDB desta no caso convencional, quando as demais observações suspeitas são referentes a eixos cartesianos distintos;
- Quanto menor a razão de grandeza entre as variâncias e covariâncias das observações, menor é a diferença entre os números de redundância e de confiabilidade, e quanto maior a razão de grandeza entre as variâncias e covariâncias, maior é a diferença entre os números de redundância e de confiabilidade destas;
- Aumentando somente as covariâncias das observações por um escalar  $K$ , a diferença (em %) entre os números de confiabilidade e de redundância destas aumenta em um fator  $K^2$ , e desta forma, é importante a determinação adequada das covariâncias, não apenas para que a solução pelo MMQ possua ótimas propriedades, mas também para que as medidas de confiabilidade obtidas sejam de fato adequadas com a dependência estatística das observações;
- Como as variâncias e covariâncias das observações estão intimamente relacionadas com a precisão dos equipamentos e/ou das técnicas de posicionamento utilizadas, ressalva-se a importância da escolha de métodos e equipamentos adequados na etapa de planejamento da rede, considerando não só a precisão esperada para os parâmetros estimados, como também a

confiabilidade das observações;

Em relação a questão da geometria/configuração da rede em estudo e as medidas de confiabilidade, conclui-se que:

- Embora os coeficientes de correlação múltipla das observações possam aumentar ou diminuir, alterando a geometria da rede por meio da exclusão de linhas-base, como a redundância do sistema diminui excluindo observações, o MDB de uma observação sempre aumenta (ou permanece o mesmo), e o número de redundância de uma observação sempre diminui (ou permanece o mesmo), tanto no caso convencional quanto no caso generalizado;
- A inclusão de observações “repetidas” melhora consideravelmente a confiabilidade das demais observações que foram “repetidas”, e pouco afeta as medidas de confiabilidade das observações restantes;
- Além disso, a influência de um possível erro não detectado em uma observação, reduz pela metade em todos os parâmetros, quando existe uma observação “repetida” para esta. Mais ainda, a influência máxima de possíveis erros não detectáveis em duas observações (de maneira simultânea), diminui três vezes sobre todos os parâmetros, quando existe uma observação “repetida” para cada uma destas duas observações;
- Também, a influência de possíveis erros não detectados nas observações sobre um parâmetro específico podem reduzir muito, quando existem observações “repetidas” diretamente relacionadas com este parâmetro. Desta forma, para os parâmetros considerados de maior importância na rede (coordenadas de algum vértice em específico, por exemplo), a coleta de observações “repetidas” pode ser uma estratégia interessante para melhorar a confiabilidade dos resultados, quando a ocupação de novos vértices não seja disponível ou economicamente viável para o projeto;
- Uma observação de precisão relativamente inferior pode afetar negativamente as medidas de confiabilidade das demais observações, pois, por ter uma

precisão menor, possui menos peso no processo de estimação dos parâmetros, e desta forma, a influência das demais observações sobre os parâmetros é maior (ou seja, devido ao maior peso, possíveis erros não detectados nestas podem ser diretamente absorvidos pelos parâmetros no processo de estimação, reduzindo desta forma a controlabilidade destas observações). Isto demonstra a importância de se ter um modelo estocástico o mais homogêneo possível, ou seja, cujas observações possuam precisões de grandeza equivalente, para que as medidas de confiabilidade de algumas observações não sejam degradadas em virtude da precisão inferior de outras observações. Além disso, aumentando ou diminuindo a redundância do sistema, por meio de alterações na configuração da rede, em geral a confiabilidade das observações de precisão inferior são pouco afetadas em relação a confiabilidade das demais;

- As medidas de confiabilidade para múltiplos *outliers* simultâneos são mais sensíveis a alterações na geometria da rede do que as medidas de confiabilidade convencionais, pois, por considerarem a existência de múltiplos *outliers* de maneira simultânea, evidenciam melhor as mudanças que ocorrem na configuração da rede;
- Além disso, a confiabilidade externa é muito mais afetada com modificações na geometria da rede do que as demais medidas de confiabilidade consideradas. Retirando linhas-base da rede, os números de redundância sempre tendem a diminuir e os MDB das observações sempre tendem a aumentar (pois a redundância do sistema diminui), mas a influência de possíveis erros não detectados sobre os parâmetros pode aumentar consideravelmente, ou até mesmo diminuir consideravelmente, e tal fato realça mais uma vez a importância de se analisar as medidas de confiabilidade de uma maneira conjunta. Como geralmente, na prática, se está mais interessado na influência de possíveis erros não detectados nas observações sobre os resultados do ajustamento, ou seja, no vetor dos parâmetros estimados (confiabilidade externa), ao invés da magnitude destes (confiabilidade interna), ou na parcela destes que é refletida nos resíduos (número de redundância), recomenda-se utilizar como critério de confiabilidade das observações, na etapa de planejamento da geometria de uma rede geodésica, a confiabilidade

externa, seja em conjunto com o MDB e o número de redundância destas, ou não;

- Mais ainda, diminuindo significativamente o número de observações, por meio da exclusão de um vértice, por exemplo, pode ocorrer do MDB das observações restantes não ser muito alterado, entretanto, a influência destes sobre os parâmetros pode aumentar consideravelmente. Desta forma, ressalva-se mais uma vez a importância de se analisar as medidas de confiabilidade de maneira conjunta, pois, por meio da análise da confiabilidade interna, pode-se concluir que a exclusão de diversas linhas-base, por meio de um vértice, não afetaria muito o MDB das observações restantes, enquanto por meio da análise da confiabilidade externa, se verificaria que a influência de possíveis erros não detectados sobre os parâmetros se tornaria muito mais crítica, embora a magnitude destes praticamente não tenha aumentado;
- Curiosamente, quando um vértice desconhecido está contido somente em duas linhas-base, o MDB das observações desta linha-base, referentes ao mesmo eixo cartesiano, se tornam numericamente iguais, mesmo que estas observações possuam precisões diferentes, ou que uma linha-base seja composta por um ponto de controle e um ponto desconhecido e a outra por dois pontos desconhecidos. Mas embora a confiabilidade interna se torne igual nestes cenários, os números de redundância e a confiabilidade externa destas observações permanecem diferentes;
- Além disso, quando um vértice desconhecido está contido somente em duas linhas-base, os coeficientes de correlação múltipla entre as duas observações destas, referentes ao mesmo eixo cartesiano, se tornam iguais a 1, e desta forma, não é possível localizar erros nestas observações, simultaneamente. Em um cenário ideal, onde se fosse possível “repetir” todas as observações, sem acarretar em custos extras ao projeto, se teria uma controlabilidade a erros para todas as observações, considerando dois *outliers* simultâneos, não importa o modelo de erro adotado. Da mesma maneira, para três *outliers* simultâneos, o número de observações repetidas deveria ser duplicado, e assim por diante;

- Portanto, quando a rede apresenta baixa redundância, e cada vértice desconhecido está contido somente em duas linhas-base distintas, as medidas de confiabilidade para múltiplos *outliers* simultâneos são iguais as medidas de confiabilidade convencionais, ou, dependendo do modelo de erro considerado, não é possível detectar erros de maneira simultânea nas observações;
- Nestes cenários onde não se é possível identificar erros de maneira simultânea em algumas observações, recomenda-se também utilizar a teoria convencional de confiabilidade (considerando um *outlier* por vez apenas), pois em muitos destes casos, os erros ainda possuem uma ordem de grandeza passível de ser detectada pelo procedimento *data snooping*;
- Sobre os pontos de controle em uma rede geodésica, quando injuncionados de maneira absoluta, estes permanecem com suas coordenadas fixas durante o processo de estimação (pois estas são tratadas como constantes “conhecidas”, e não como parâmetros incógnitos). Desta forma, os pontos de controle atuam como uma “barreira” na propagação de erros entre diferentes observações, pois os erros nestas só podem ser refletidos nos respectivos resíduos, ou absorvidos pelas coordenadas dos pontos desconhecidos da rede. Portanto, a localização dos pontos de controle na rede pode fazer com que a mesma seja “dividida” em diferentes regiões: Para observações de uma mesma região, os coeficientes de correlação múltipla podem ser relativamente altos, enquanto para observações de regiões distintas, os coeficientes de correlação múltipla podem ser relativamente baixos. De maneira resumida, pode-se dizer que a localização dos pontos de controle na rede afeta diretamente os coeficientes de correlação múltipla das observações, e consequentemente, as medidas de confiabilidade destas para múltiplos *outliers* simultâneos;
- Por exemplo, quando o ponto de controle possui uma localização central na rede, a correlação de observações de diferentes linhas-base apresenta um caráter mais “local”, pois, devido ao fato do ponto de controle atuar como uma “barreira” na propagação de erros na rede, os coeficientes de correlação múltipla de observações mais afastadas na rede tendem a ser baixos;

- Quando um par de linhas-base contém um ponto de controle cada e o mesmo vértice desconhecido, mesmo excluindo diversas linhas-base que também contenham este vértice desconhecido, as medidas de confiabilidade das observações destas duas linhas-base não se alteram muito, contanto que as duas possuam precisões semelhantes. Portanto, uma estratégia interessante a se adotar no planejamento de uma rede geodésica, é garantir que o máximo de vértices desconhecidos desta estejam contidos em pelo menos duas linhas-base distintas que também contenham pontos de controle;
- Além disso, uma linha-base composta por dois vértices desconhecidos propaga (distribui) possíveis erros não detectados principalmente sobre estes dois vértices desconhecidos que a compõem, exercendo pouca influência nos demais vértices desconhecidos da rede, enquanto uma linha-base composta por um ponto de controle e um vértice desconhecido não propaga possíveis erros sobre o ponto de controle, somente para o seu vértice desconhecido (ou seja, não distribui estes erros nos dois vértices). Isto faz com que a influência de possíveis erros não detectados desta linha-base com um ponto de controle e um ponto desconhecido sobre os demais vértices da rede seja maior do que caso esta linha-base fosse constituída por dois pontos desconhecidos. Em outras palavras, embora o MDB de uma observação de uma linha-base composta por um ponto de controle e um ponto desconhecido, em geral, seja menor do que o MDB de uma observação de uma linha-base composta por dois pontos desconhecidos, a sua influência sobre os parâmetros, quando não detectado, é maior, e portanto, mais crítica;

Sobre os testes estatísticos para a detecção e a identificação de erros, se constatou que:

- Mesmo que o teste global do ajustamento seja “não rejeitado”, recomenda-se a realização do procedimento *data snooping*, pois a existência de um ou mais resíduos discrepantes no conjunto de observações pode ser negligenciada pelo teste global, quando o número de graus de liberdade do sistema é elevado;
- Entretanto, o teste global do ajustamento retém sua importância, pois as medidas de confiabilidade consideradas são relativas a testes para a

identificação (localização) de erros nas observações, mas não, por exemplo, no modelo estocástico, enquanto o teste global do ajustamento é um teste para a detecção de erros no modelo (sejam estes nas observações, no modelo estocástico, no modelo funcional e etc.). Além disso, o mesmo tem um custo computacional relativamente simples, e também pode dar uma informação geral sobre as outras causas que podem levar a falha do mesmo;

- Tanto o procedimento *data snooping* quanto os testes estatísticos para múltiplos *outliers* simultâneos podem localizar corretamente todas as observações contaminadas por erros. Entretanto, ambas estratégias apresentam um custo computacional relativamente alto, pois o *data snooping* necessita refazer o ajustamento e os  $n$  testes em um processo iterativo, cada vez que uma observação suspeita é identificada e removida do modelo (diminuindo assim a redundância do sistema), enquanto a abordagem para múltiplos *outliers* simultâneos requer o cálculo de  $\binom{n}{q}$  testes estatísticos, um para cada modelo de erro possível, estipulado o número de *outliers*  $q$  considerado.
- Ressalva-se também que deve-se ter cuidado na aplicação dos testes estatísticos para identificação de erros, pois os mesmos podem ser suscetíveis a algumas “armadilhas”, como os fenômenos *swamping* e *masking*, principalmente o *data snooping*, na existência de múltiplas observações contaminadas por *outliers*, pois este considera apenas uma observação por vez;
- Dependendo do caso, as medidas de confiabilidade convencionais podem ser mais realistas do que as medidas de confiabilidade generalizadas para múltiplos *outliers*, e vice-versa. Importante ressaltar que todas estas medidas de confiabilidade só são de fato verdadeiras quando a hipótese alternativa, bem como o poder do teste estipulado, são verdadeiros, o que nem sempre ocorre na prática.
- De qualquer maneira, as medidas de confiabilidade generalizadas para múltiplos *outliers* (simultâneos) são sempre piores, ou, na melhor das hipóteses, iguais as medidas de confiabilidade convencionais (considerando

apenas um *outlier* por vez). Portanto, embora na prática, as medidas de confiabilidade convencionais, em alguns, podem ser mais realistas do que as medidas de confiabilidade generalizadas, se o planejamento de uma rede geodésica for feito de forma que esta seja resistente a  $q$  *outliers* simultâneos, quanto maior o número de *outliers*  $q$  considerado, maior será a “proteção” da rede a possíveis erros não detectados nas observações, pois mais baixas serão as medidas de confiabilidade destas.

Por último, sobre o método QUAD, se concluiu que:

- Para *outliers* de baixa magnitude, o método QUAD, pelo fato de se utilizar do fenômeno “*hive-off*” para a localização dos *outliers*, não se mostrou muito efetivo, devido a propagação de erros nas observações, além da própria magnitude relativamente baixa destes. Inclusive, para estes casos, seguindo a metodologia encontrada na literatura, o método QUAD pode selecionar erroneamente uma observação contaminada por erro como quase acurada.
- Entretanto, quando a magnitude dos *outliers* é relativamente grande, o fenômeno “*hive-off*” é devidamente observado, de maneira simultânea, para todas as observações contaminadas;
- Devido ao fato do método QUAD utilizar um procedimento de cálculo mais simples, de (relativo) baixo custo computacional, o mesmo pode ser utilizado como uma estratégia preliminar para a identificação de *outliers* de alta magnitude, para só então, após este, se empregar os rigorosos procedimentos de testes estatísticos para a identificação de possíveis *outliers* remanescentes nas observações.
- Além disso, o método QUAD também não possui uma das principais limitações dos testes estatísticos para múltiplos *outliers*, que é a definição adequada do número de *outliers*  $q$  considerado, pois estes surgem de maneira simultânea por meio do fenômeno “*hive-off*”, quando este ocorre.

### 7.3 Recomendações

Com a experiência adquirida durante realização desta pesquisa, como sugestões para trabalhos futuros, pode-se citar:

Realizar estudos mais complexos sobre a questão das variâncias e covariâncias sobre as medidas de confiabilidade, como por exemplo, considerar uma rede geodésica cuja MVC não seja apenas bloco diagonal, mas que apresente covariâncias não nulas para diversos pares de observações, ou ainda, uma rede geodésica que apresente observações oriundas de diversos tipos de equipamentos e técnicas de observação, resultando num modelo estocástico heterogêneo, ou seja, de diferentes precisões (ver, por exemplo, Hekimoglu e Erenoglu, 2007).

Outro estudo interessante a ser realizado neste sentido é alterar a precisão de somente algumas observações específicas, para verificar como fica a nova hierarquia das observações em termos de confiabilidade, mantendo a geometria original do problema (ou seja, a redundância  $r = n - u$  do sistema e a configuração da rede).

Sobre a geometria da rede, um estudo interessante a ser feito é verificar se a relação de proporção entre a influência de possíveis erros nas observações sobre os parâmetros se mantém, adicionando mais linhas-base “repetidas” ao conjunto de observações (como por exemplo, verificar como fica a confiabilidade externa, tanto no caso convencional quanto no caso generalizado, adicionando mais uma, duas ou três linhas-base “repetidas”).

Também recomenda-se mais investigações sobre o fato do MDB de duas observações referentes ao mesmo eixo cartesiano se tornar numericamente igual, quando um vértice desconhecido está contido somente nestas duas linhas-base da rede, verificando se isto ocorre em outros cenários, como por exemplo, duas linhas-base contendo dois vértices desconhecidos e nenhum ponto de controle, e cujas observações possuem precisões relativamente diferentes.

Além disso, nesta pesquisa só foram consideradas injunções absolutas, e certamente, o uso de injunções relativas também afeta as medidas de confiabilidade, pois, neste caso, assume-se que as mesmas possuem variâncias não nulas, não sendo tratadas como constantes durante o processo de estimação. Também seria interessante verificar o comportamento das medidas de confiabilidade e dos testes estatísticos inserindo erros proposicionais nas injunções (tanto absolutas quanto relativas).

Outra questão que merece atenção é em relação ao modelo funcional, neste trabalho, o modelo funcional adotado foi linear e relativamente simples (equações de diferenças de coordenadas), entretanto, o modelo funcional pode ser mais complexo (não linear em relação aos parâmetros), necessitando de um processo iterativo de ajustamento, como por exemplo, em fototriangulações, poligonais topográficas/geodésicas, e nos diferentes modelos matemáticos no posicionamento por GNSS (*Global Navigation Sattelite System*).

Sobre os testes estatísticos para identificação de erros, a maior limitação destes ainda é como determinar o número de *outliers* existente nas observações de maneira correta. Os mesmos apenas indicam qual o modelo de erro (ou seja, quais as observações suspeitas) que apresentam a maior probabilidade de estarem contaminadas, simultaneamente, por erros, contanto que o valor estipulado para  $q$  esteja correto. Desta forma, estudos neste sentido ainda se fazem necessários, sendo um possível tema de pesquisa dentro desta área.

O método QUAD, por ser relativamente recente, também carece de mais estudos sobre a eficácia do mesmo, podendo verificar como o mesmo se comporta em diferentes cenários, alterando, por exemplo, o número de *outliers* considerados, bem como a magnitude e o sinal destes. Além disso, também pode-se verificar os coeficientes de correlação múltipla das observações não selecionadas como quase acuradas, os diferentes valores para o MDB das observações contaminadas com erros e etc., visando investigar se as medidas de confiabilidade das observações podem fornecer informações úteis sobre quais serão as observações selecionadas como “quase-acuradas” para a aplicação do método QUAD. Também, desenvolver novos métodos para a seleção das observações que serão selecionadas como “quase acuradas”.

Finalmente, recomenda-se mais estudos, principalmente no âmbito nacional, sobre as outras estratégias de controle de qualidade encontradas na literatura, como os métodos de estimativa robusta, a análise de robustez, a inferência bayesiana, dentre outros.

## REFERÊNCIAS

- ALMAGBILLE, A.; WANG, J.; DING, W.; KNIGHT, N. **Sensitivity analysis of multiple fault test and reliability measures in integrated GPS/INS systems.** In: 7th International Symposium on Mobile Mapping Technology, Cracow, Poland, 2011.
- ANDREWS, D. F. A robust method for multiple linear regression. **Technometrics**, v. 16, p. 523-531, 1974.
- ANGUS, J. E. RAIM with multiple faults. **Navigation**, v. 53, n. 4, p. 249-257, 2006.
- ARNOLD, S. F. **The theory of linear models and multivariate analysis.** New York: John Wiley & Sons, 1981.
- ASSOCIATE COMMITTEE ON GEODESY AND GEOPHYSICS. **Minutes of the 60<sup>th</sup> meeting.** National Research Council of Canada, Ottawa, 1973.
- BAARDA, W. A testing procedure for use in geodetic networks. **Publications on Geodesy**, New Series, v. 2, n. 5, Delft: Netherlands Geodetic Commission, 1968.
- \_\_\_\_\_. **Measures for the accuracy of geodetic networks.** In: Symposium on Optimization of Design and Computation of Control Networks, p. 419-436, Sopron, Hungary, 1977.
- BERBER, M.; DARE, P. J.; VANÍČEK, P.; CRAYMER, M. R. On **The Application Of Robustness Analysis To Geodetic Networks.** In: Annual Conference of the Canadian Society for Civil Engineering, 2003.
- BERBER, M.; DARE, P. J.; VANÍČEK, P. Robustness Analysis of Two-Dimensional Networks. **Journal of Surveying Engineering**, v. 132, n. 4, p. 168-174, 2006.
- BERBER, M.; HEKIMOGLU, S. What Is The Reliability Of Conventional Outlier Detection And Robust Estimation In Trilateration Networks? **Survey Review**, v. 37, n. 290, p. 308-318, 2003.
- BERBER, M. **Robustness Analysis of Geodetic Networks.** 2006. 121 p. Ph.D. Dissertation - Department of Geodesy and Geomatics Engineering, University of New Brunswick, Fredericton, Canada, 2006.
- BREIMAN, L. **Statistics: with a view toward applications.** Boston: Houghton Mifflin Company, 1973. 399p.
- CAMARGO, P. O. **Controle de qualidade aplicado ao filtro de Kalman.** 1992. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas) – Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1992.
- CARVALHO, A. S. **Avaliação do Desempenho de Técnicas de Ajustamento para Análise de Deslocamentos em Redes GPS.** 2009. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas) – Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Setor de Ciências da Terra, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

CEN, M.; LI, Z.; DING, X.; ZHUO, J. Gross error diagnostics before least squares adjustment of observations. **Journal of Geodesy**, v. 77, n. 9, p. 503-513, 2003.

CHAI, Y. J.; OU, J. K.; DU, Z. X. A new approach for distinguishing different deformation trend blocks with displacement observations. **Acta Seismologica Sinica**, v. 15, n. 6, p. 607-615, 2002.

CHANG, X.; GUO, Y. Huber's M-estimation in relative GPS positioning: Computational aspects. **Journal of Geodesy**, v. 79, n. 6-7, p. 351-362, 2005.

CHEN, Y. Q.; KAVOURAS, M.; CHRZANOWSKI, A. A strategy for detection of outlying observations in measurements of high precision. **The Canadian Surveyor**, v. 41, n. 4, p. 529-540, 1987.

CHEN, Y. Q.; WANG, J. Reliability measure for correlated observations. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, v. 121, n. 5, p. 211-219, 1996.

DALMOLIN, Q. **Ajustamento por Mínimos Quadrados**. Curitiba: Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas/UFPR, 2002. 175p.

DING, X.; COLEMAN, R. Multiple outlier detection by evaluating redundancy contributions of observations. **Journal of Geodesy**, v. 70, n. 8, p. 489-498, 1996a.

DING, X.; COLEMAN, R. Sensitivity analysis in Gauss-Markov models. **Journal of Geodesy**, v. 70, n. 8, p. 480-488, 1996b.

DUCHNOWSKI, R. **Geodetic Application of R-estimation: Leveling network examples**. In: 13th FIG Symposium on Deformation Measurement and Analysis and 4th Symposium on Geodesy for Geotechnical and Structural Engineering, Lisbon, Portugal, 2008.

FIRKOWSKI, H. **Confiabilidade da fototriangulação: configuração e detecção de erros no apoio de campo**. 1986. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas) – Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1986.

FÖRSTNER, W. Reliability analysis of parameter estimation in linear models with applications to mensuration problems in computer vision. **Computer Vision, Graphics and Image Processing**, v. 40, p. 273-310, 1987.

GAMBIN, W.; PARZYŃSKI, Z.; PRÓSZYŃSKI W. **The Concept of Network Robustness based on Strain Analogy as seen in the Light of Continuum Mechanics**. In: Proceedings of FIG/IAG Symposium Measuring the Changes, Lisbon, 2008.

GAO, Y.; KRAKIWSKY, E. J.; CZOMPO, J. Robust testing procedure for detection of multiple blunders. **Journal of Surveying Engineering**, v. 118, n. 1, p. 11-23, 1992.

GEMAEL, C. **Introdução ao ajustamento de observações: aplicações geodésicas**. Curitiba: Ed. UFPR, 1994. 319p.

GHILANI, C. D.; WOLF, P. R. **Adjustment Computations: Spatial Data Analysis.** 4. ed. New York: John Wiley & Sons, 2006. 611p.

GHOSH, B. K. Some monotonicity theorems for  $\chi^2$ , F and t-distributions with applications. **Journal of the Royal Statistical Society**, v. 35, p. 480-492, 1973.

GÖKALP, E.; GÜNGÖR, O.; BOZ, Y. Evaluation of Different Outlier Detection Methods for GPS Networks. **Sensors**, v. 8, p.7344-7358, 2008.

GUI, Q.; GONG, Y.; LI, G.; LI, B. Bayesian approach for detection of gross errors based on posterior probability. **Journal of Geodesy**, v. 81, n. 10, p. 651-659, 2007.

GUI, Q.; LI, G.; OU, J. Robust-biased estimation based on quasi-accurate detection. **Journal of Surveying Engineering**, v. 131, n. 3, p. 67-72, 2005.

GUI, Q.; LI, X.; GONG, Y.; LI, B.; LI, G. A Bayesian unmasking method for locating multiple gross errors based on posterior probabilities of classification variables. **Journal of Geodesy**, v. 85, n. 4, p. 191-203, 2010.

GULLU, M.; YILMAZ, I. Outlier Detection for Geodetic Nets Using ADALINE Learning Algorithm. **Scientific Research And Essays**, v. 5, p. 440-447, 2010.

GUO, J. F.; OU, J. K.; WANG, H. Quasi-accurate detection of outliers for correlated observations. **Journal of Surveying Engineering**, v. 133, n. 3, p. 129-133, 2007.

GUO, J.; OU, J.; WANG, H. Robust estimation for correlated observations: two local sensitivity-based downweighting strategies. **Journal of Geodesy**, v. 84, n. 4, p. 243-250, 2010.

HEKIMOGLU, S.; BERBER, M. Effectiveness of robust methods in heterogeneous linear models. **Journal Of Geodesy**, v. 76, n. 11-12, p. 706-713, 2003.

HEKIMOGLU, S.; ERENOGLU, R. C. Effect of heteroscedasticity and heterogeneousness on outlier detection for geodetic networks. **Journal of Geodesy**, v. 81, n. 2, p. 137-148, 2007.

HUBER, P. J. Robust estimation of a location parameter. **Annals of Mathematical Statistics**. v. 35, p. 73-101, 1964.

INTERNATIONAL ASSOCIATION OF GEODESY. 2011. **Why is Geodesy fundamental to the Society.** Disponível em: <[http://www.iag-aig.org/index.php?tpl=intro&id\\_c=72&id\\_t=360](http://www.iag-aig.org/index.php?tpl=intro&id_c=72&id_t=360)>. Acesso em: 04 set. 2011.

JUNHUAN, P. The Asymptotic Variance-Covariance Matrix, Baarda Test, and the Reliability of  $L_1$ -Norm Estimates. **Journal Of Geodesy**, v. 78, n. 11-12, p.668-682, 2005.

KAVOURAS, M. **On the Detection of Outliers and the Determination of Reliability in Geodetic Networks.** 1982. M.Sc.E. Thesis – Department of Geodesy and Geomatics Engineering, University of New Brunswick, Fredericton, Canada, 1982.

KERN, M.; PREIMESBERGER, T.; ALLESCH, M.; PAIL, R.; BOUMAN, J.; KOOP, R. Outlier detection algorithms and their performance in GOCE gravity field processing. **Journal of Geodesy**, v. 78, n. 9, p. 509-519, 2005.

KLEIN, I.; MATSUOKA, M. T.; SOUZA, S. F.; VERONEZ, M. R. Ajustamento de Observações: Uma Interpretação Geométrica para o Método dos Mínimos Quadrados. **Boletim de Ciências Geodésicas**, v. 17, n. 2, p. 272-294, 2011.

KNIGHT, N. L.; WANG, J. A Comparison of Outlier Detection Procedures and Robust Estimation Methods in GPS Positioning. **Journal Of Navigation**, v. 62, p. 699-709, 2009.

KNIGHT, N. L.; WANG, J.; RIZOS, C. Generalised Measures Of Reliability For Multiple Outliers. **Journal of Geodesy**, v. 84, n. 10, p. 625-635, 2010.

KOCH, K. R. **Parameter estimation and hypothesis testing in linear models**. 2. ed. Berlin: Springer, 1999.

KOK, J. J. **On data snooping and multiple outlier testing**. NOAA Technical Report, NOS NGS. 30, U. S. Department of Commerce, Rockville, Maryland, 1984.

LARSON, H. J. **Introduction to probability theory and statistical inference**. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1974. 430p.

LAY, D. C. **Linear Algebra And Its Applications**. 2. ed. Reading, Addison-Wesley, 1997.

LEICK, A. **GPS satellite surveying**. 3. ed. New York: John Wiley & Sons, 2004.

MACHADO, W. C.; MONICO, J. F. G . Controle de qualidade do ajustamento recursivo de observações GPS em linhas de base curta. **Boletim de Ciências Geodésicas**, v. 10, n. 2, p. 123-140, 2004.

MAGALHÃES, M. N.; LIMA, A. C. P. **Noções de probabilidade e estatística**. 6. ed. São Paulo: Ed. USP, 2005. 392p.

MAGRO, F. H. S. **Aerotriangulação com métodos alternativos na detecção de erros e uso de injunções**. 1990. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas) – Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1990.

MARQUES, J. M. **O método da análise de componentes principais na detecção e identificação de outliers múltiplos em fototriangulação**. 1994. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas) – Departamento de Geociências, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1994.

MIKHAIL, E. M.; GRACIE, G. **Analysis and Adjustment of Survey Measurements**. New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1981.

MITISHITA, E. A. **Detectão de erros grosseiros nas aerotriangulações**. 1986. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas) – Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1986.

MONICO, J. F. G.; MATSUOKA, M. T.; SAPUCCI, L. F. Confiabilidade interna e externa em Aplicações Geodésicas: Exemplo de uma Rede de Nivelamento. **Geodésia Online**, v. 2, p. 1, 2006.

MONICO, J. F. G. **Posicionamento pelo GNSS: descrição, fundamentos e aplicações**. 2. ed. São Paulo: Ed. UNESP, 2008. 473p.

MORAES, C. V. Caracterização de Extremas no Espaço Geométrico: Fundamentos Jurídicos e Geodésicos. **Revista Brasileira de Cartografia**, n. 53, p. 1-15, 2001.

NEUMANN, I.; KUTTERER, H.; SCHÖN, S. **Outlier Detection in Geodetic Applications with respect to observation imprecision**. In: Proceedings of the NSF Workshop on Reliable Engineering Computing -Modeling Errors and Uncertainty in Engineering Computations, Savannah (Georgia), USA, p. 75-90, 2006.

OBER, P.B. **New, generally applicable metrics for RAIM/AIM integrity monitoring**. In: 9th international technical meeting of The Satellite Division of The Institute of Navigation, IONGPS-96, Kansas City, Missouri, p. 1677-1686, 1996.

OLIVEIRA, R.; DALMOLIN, Q. Critérios para a análise da geometria de redes geodésicas por componentes principais. **Boletim de Ciências Geodésicas**, v. 9, n. 1, p. 25-37, 2003.

OLIVEIRA, R.; DALMOLIN, Q. A Influência da Redundância da Observação sobre a Precisão dos Parâmetros. **Boletim de Ciências Geodésicas**, v. 14, n. 3, p. 295-315, 2008.

OLIVEIRA, R. **Otimização dos pesos das observações geodésicas pelo problema de valor próprio inverso com considerações sobre o planejamento da confiabilidade da observação**. 2007. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas) – Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Setor de Ciências da Terra, Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2007.

OU, J. K. A new method of identifying and locating gross errors: Quasi-accurate detection. **Chinese Science Bulletin**, v. 44, n. 23, p. 2200-2204, 1999.

PAPOULIS, A. **Probability, random variables and stochastic processes**. New York: McGraw-Hill Book Company, 1991.

PELZER, H. Some criteria for the reliability of networks. In: HALMOS, F.; SOMOGYI, J. (Ed.) **Optimization of Design And Computation of Control Networks**. Budapest: Akadémiai Kiadó, 1979. p. 553-562.

POPE, A. J. **The statistics of residuals and the detection of outliers**. NOAA Technical Report. NOS 65 NGS 1, Rockville, Md, 1976.

PRÓSZYNSKI, W. Another approach to reliability measures for systems with correlated observations. **Journal of Geodesy**, v. 84, n. 9, p. 547-556, 2010.

\_\_\_\_\_. Measuring the robustness potential of the least squares estimation: geodetic illustration. **Journal of Geodesy**, v. 71, n. 10, p. 652-659, 1997.

RANGELOVA, E.; FOTOPOULOS, G.; SIDERIS, M. G. On the use of iterative re-weighting least-squares and outlier detection for empirically modelling rates of vertical displacement. **Journal of Geodesy**, v. 83, n. 6, p. 523-535, 2009.

SANTOS, A. J. P. M. **Proposta de ajustamento para melhoria da confiabilidade e precisão dos pontos de rede geodésicas para fins topográficos locais.** 2006. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Transportes) – Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo. São Carlos, 2006.

SANTOS JUNIOR, G.; FREITAS, S. R. C.; GEMAEL, C.; FAGGION, P. L. Implicações em Ajustar uma Rede Gravimétrica com Observações Médias ou Independentes: Análise de Precisão e Confiabilidade. **Revista Brasileira de Cartografia**, n. 57/02, 2005.

SCHAFFRIN, B. Reliability measures for correlated observations. **Journal of Surveying Engineering**, v. 123, n. 3, p. 126-137, 1997.

SCHWARZ, C. R.; KOK, J. J. Blunder detection and Data Snooping in LS and Robust Adjustment. **Journal of Surveying Engineering**, v. 119, n. 4, p. 127-136, 1993.

SILVA, J. F. C. **A inferência bayesiana e a detecção e localização automática de erros grosseiros em fototriangulação por feixes de raios.** 1987. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas) – Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1987.

STEFANOVIC, P. Blunders and Least Squares. **ITC Journal**, v. 1, p. 122-157, 1978.

\_\_\_\_\_. Pitfalls in Blunder Detection Techniques. presented paper, **International Archives of Photogrammetry**, v. 23, Part B3, Commission III, p. 687-700, 1980.

STRANG, G.; BORRE, K. **Linear algebra, Geodesy and GPS.** Wellesley: Wellesley-Cambridge Press, 1997.

TEIXEIRA, N. N.; FERREIRA, L. D. D. Análise da Confiabilidade de Redes Geodésicas. **Boletim de Ciências Geodésicas**, v. 9, n. 2, p. 199-216, 2003.

TOMMASELLI, A. M. G.; LUGNANI, J. B. **Detecção de erros grosseiros em Fototriangulação.** In: Simpósio Latino Americano de Sensoriamento Remoto, Gramado, 1986.

TEUNISSEN, P. J. G. **Adjustment Theory: an introduction.** Delft: Ed. Delft University Press, 2003. 193p.

\_\_\_\_\_. **Testing theory: an introduction.** 2. ed. Delft: Ed. VSSD, 2006. 147p.

VANÍČEK, P.; CRAYMER, M. R.; KRAKIWSKY, E. J. Robustness analysis of geodetic horizontal networks. **Journal of Geodesy**, v. 75, n. 4, p. 199-209, 2001.

VANIČEK, P.; GRAFARENDS, E. W.; BERBER, M. Short Note: Strain invariants. **Journal of Geodesy**, v. 82, n. 4-5, p. 263-268, 2008.

WANG, J.; CHEN, Y. On the reliability measure of observations. **Acta Geodaetica et Canographica Sinica**, English Edition, p. 42-51, 1994.

XU, P. Sign-constrained robust least squares, subjective breakdown point and the effect of weights of observations on robustness. **Journal of Geodesy**, v. 79, n. 1-3, p. 146-159, 2005.

YANG, Y.; SONG, L.; XU, T. Robust estimator for correlated observations based on bifactor equivalent weights. **Journal of Geodesy**, v. 76, n. 6-7, p. 353-358, 2002.