1.

Решите уравнение $\frac{\sin(x)}{x} = 0$

$x \neq 0$

$\sin(x) = 0 => x = \pi n,\ n \neq 0,\ n \in \mathbb{R}$

2.

Задание (на листочке) *Даны три прямые y=k1x+b1, y=k2x+b2, y=k3*x+b3. Как узнать, пересекаются они в одной точке или нет?*

- Решить систему уравнений всех трех прямых:

$$\begin{cases} y = k_1 \cdot x + b_1, \\ y = k_2 \cdot x + b_2, \\ y = k_3 \cdot x + b_3. \end{cases}$$

Если система имеет одно решение, то все прямые пересекаются в одной точке, координаты которой даст решение.

$k_1 \cdot x + b_1 = k_2 \cdot x + b_2 = k_3 \cdot x + b_3$

$x = \frac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2} = \frac{b_1 - b_3}{k_3 - k_1} = \frac{b_3 - b_2}{k_2 - k_3} \Rightarrow$

Если параметры прямых удовлетворяют выражению $\frac{b_1 - b_2}{b_1 - b_3} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 - k_3}$, то прямые пересекаются в одной точке.

3.

Задание (в программе или на листочке) На листе тетради «в линейку» (расстояние между линиями равно a) лежит игла (длиной b). Координаты нижней точки иглы (x,y), игла лежит под углом alfa. Пересекает ли игла линию или нет?

In [ ]:

5.

Найти угол α между прямыми $x = \sqrt{2}$ и $x = -\sqrt{3}$

$\alpha = 0^{\circ}$, т.к. прямые параллельны.

In [1]:

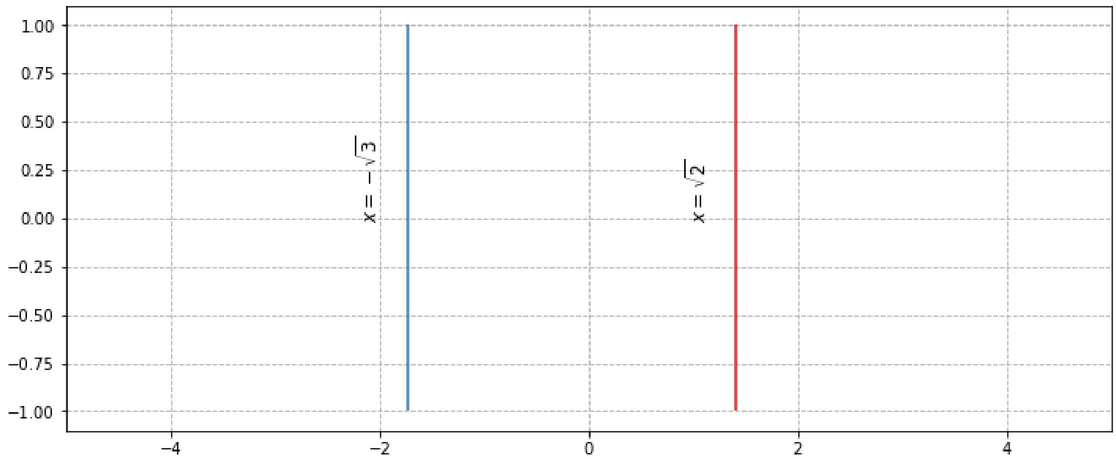
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
%matplotlib inline
```

In [2]:

```
plt.figure(figsize=(12, 5))
y=0; x1=np.sqrt(2); x2=-np.sqrt(3)

plt.vlines(x1, ymin=-1, ymax=1, colors='r')
plt.vlines(x2, ymin=-1, ymax=1);

plt.text(-np.sqrt(3)-0.5,
         0,
         s='$x = -\sqrt{3}$',
         fontsize=12,
         rotation='vertical')
plt.text(np.sqrt(2)-0.5,
         0,
         s='$x = \sqrt{2}$',
         fontsize=12,
         rotation='vertical')
plt.grid(linestyle='--')
plt.xlim(-5, 5);
```



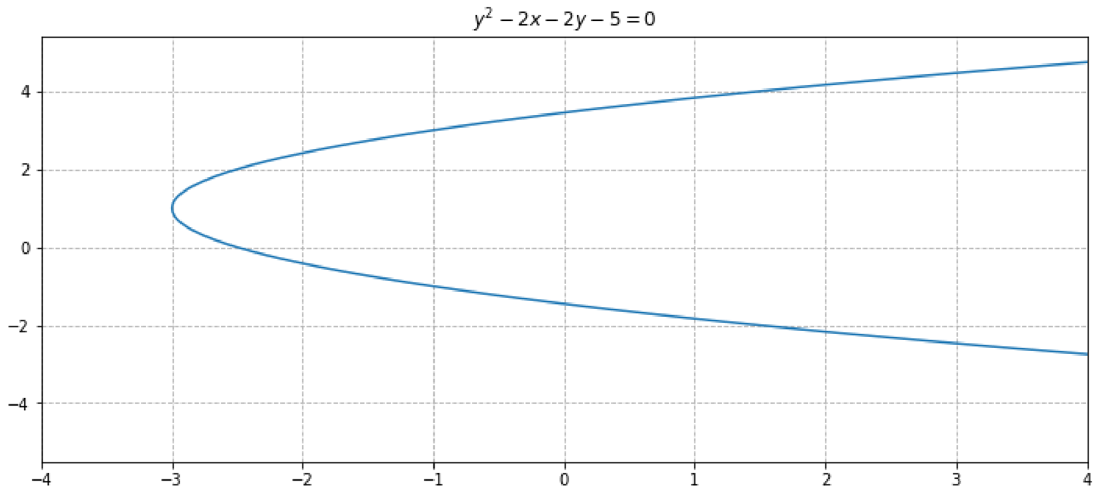
6.

Выяснить тип кривых второго порядка, порожденных следующими уравнениями:

а) $y^2 - 2x - 2y - 5 = 0$

In [3]:
```
plt.figure(figsize=(12, 5))
y = np.arange(-5, 5, 0.1)
x = (2*y - y**2 + 5)/-2
plt.plot(x, y);
plt.xlim(-4, 4)
plt.title('$y^2-2x-2y-5=0$')

plt.grid(linestyle='--')
```



Выглядит как парабола. Можно проверить с помощью инвариантов кривой второго порядка.

Слово инвариантный значит неизменный. Инвариантами кривой называются такие выражения, составленные из коэффициентов ее уравнения, которые не меняются при переходе от одной прямоугольной декартовой системы координат к другой такой же системе, т.е. при поворотах осей координат и при параллельных переносах осей.
(с) "Линейная алгебра и некоторые ее приложения" Л.И. Головина

Для кривой второго порядка сумма коэффициентов при квадратах координат $\tau = a_{11} + a_{22}$,
определитель, составленный из коэфиициентов при старших членах $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$,
и определитель третьего порядка $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$ являются инвариантами.

Общее уравнение кривой второго порядка:
$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$

<table>
<tr><th colspan="2"></th><th colspan="3">Признаки вида</th><th>Название линии</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Центральные линии</td><td rowspan="3">Эллиптический тип</td><td rowspan="3">$\delta > 0$
$\Updownarrow$
$(\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0)$</td><td rowspan="2">$\Delta \neq 0$</td><td>$\tau \cdot \Delta < 0$</td><td>Эллипс</td></tr>
<tr><td>$\tau \cdot \Delta > 0$</td><td>Эллипс мнимый</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\Delta = 0$</td><td>Пара мнимых пересекающихся прямых</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Гиперболический тип</td><td rowspan="2">$\delta < 0$
$\Updownarrow$
$(\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0)$</td><td colspan="2">$\Delta \neq 0$</td><td>Гипербола</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\Delta = 0$</td><td>Пара пересекающихся прямых</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Нецентральные линии</td><td rowspan="4">Параболический тип</td><td rowspan="4">$\delta = 0$
$\Updownarrow$
$(\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0)$</td><td colspan="2">$\Delta \neq 0$</td><td>Парабола</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\Delta = 0$</td><td>$\kappa < 0$</td><td>Пара параллельных прямых</td></tr>
<tr><td>$\kappa > 0$</td><td>Пара мнимых параллельных прямых</td></tr>
<tr><td>$\kappa = 0$</td><td>Пара совпадающих прямых</td></tr>
</table>

Коэффициенты:
$a_{11} = 0 \quad a_{22} = 1 \quad a_{12} = 0 \quad a_1 = -1 \quad a_2 = -1 \quad a_0 = -5$

$\tau = a_{11} + a_{22} = 1$

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

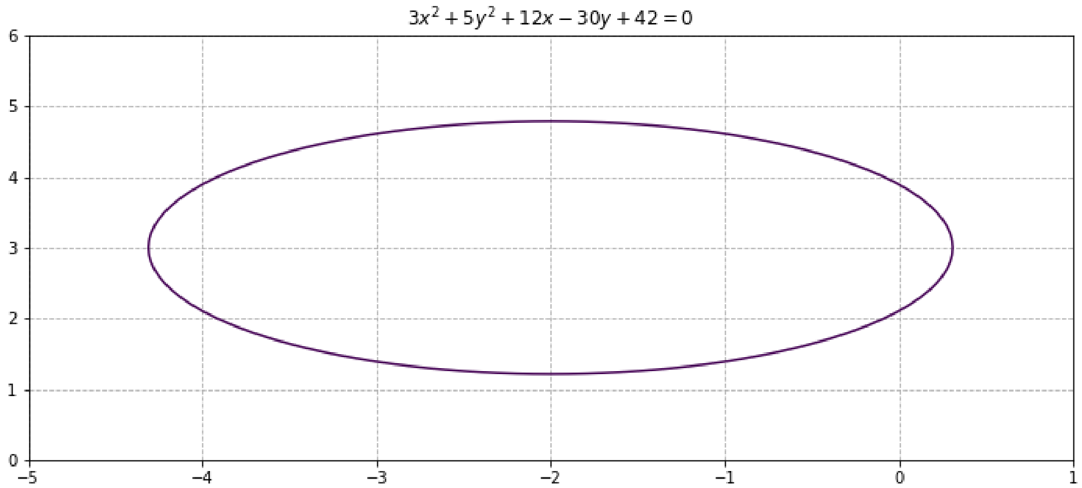
$\delta = 0$ и $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ Уравнение $y^2 - 2x - 2y - 5 = 0$ задаёт параболу.

б) $3x^2 + 5y^2 + 12x - 30y + 42 = 0$

In [4]:
```
plt.figure(figsize=(12, 5))
y = np.arange(-5, 5, 0.1)
x = np.arange(-5, 5, 0.1)

x, y = np.meshgrid(x, y)
plt.contour(x, y,3*x**2 + 5*y**2 + 12*x - 30*y + 42, [1])

plt.xlim(-5, 1)
plt.ylim(0, 6)
plt.title('$3x^2 + 5y^2 + 12x - 30y + 42 = 0$')
plt.grid(linestyle='--')
```



Коэффициенты:

$a_{11} = 3 \quad a_{22} = 5 \quad a_{12} = 0 \quad a_1 = 6 \quad a_2 = -15 \quad a_0 = 42$

$\tau = a_{11} + a_{22} = 8$

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 15$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & -15 \\ 6 & -15 & 42 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -15 \\ -15 & 42 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & -15 \end{vmatrix} = -225$$

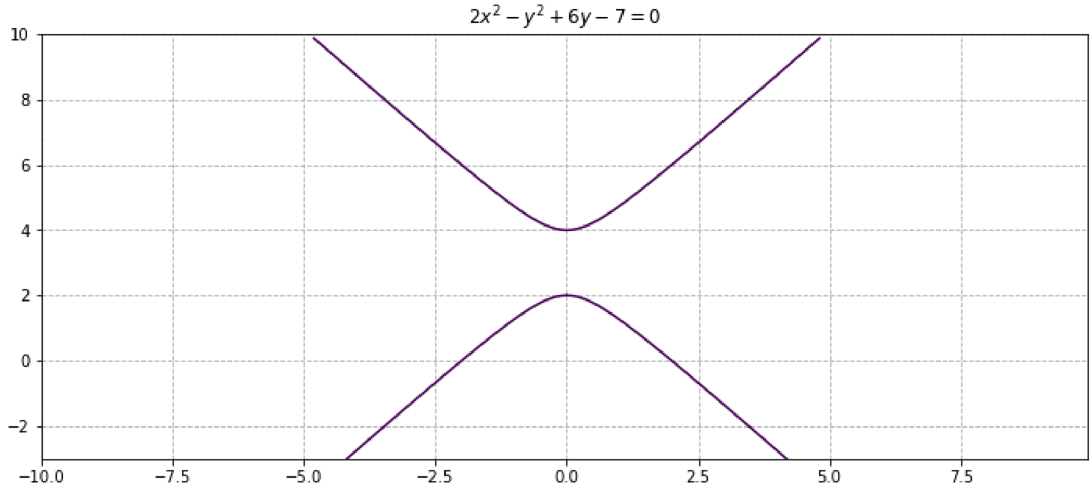
$\delta > 0, \Delta \neq 0$ и $\tau \cdot \Delta < 0 \Rightarrow$ Уравнение $3x^2 + 5y^2 + 12x - 30y + 42 = 0$ задает эллипс.

в) $2x^2 - y^2 + 6y - 7 = 0$

In [67]:
```
plt.figure(figsize=(12, 5))
y = np.arange(-10, 10, 0.1)
x = np.arange(-10, 10, 0.1)

x, y = np.meshgrid(x, y)
plt.contour(x, y,2*x**2-y**2+6*y-7, [1])

plt.ylim(-3, 10)
plt.title('$ 2x^2-y^2 + 6y - 7 = 0$')
plt.grid(linestyle='--')
```



Коэффициенты:

$a_{11} = 2 \quad a_{22} = -1 \quad a_{12} = 0 \quad a_1 = 0 \quad a_2 = 3 \quad a_0 = -7$

$\tau = a_{11} + a_{22} = 1$

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = -4$$

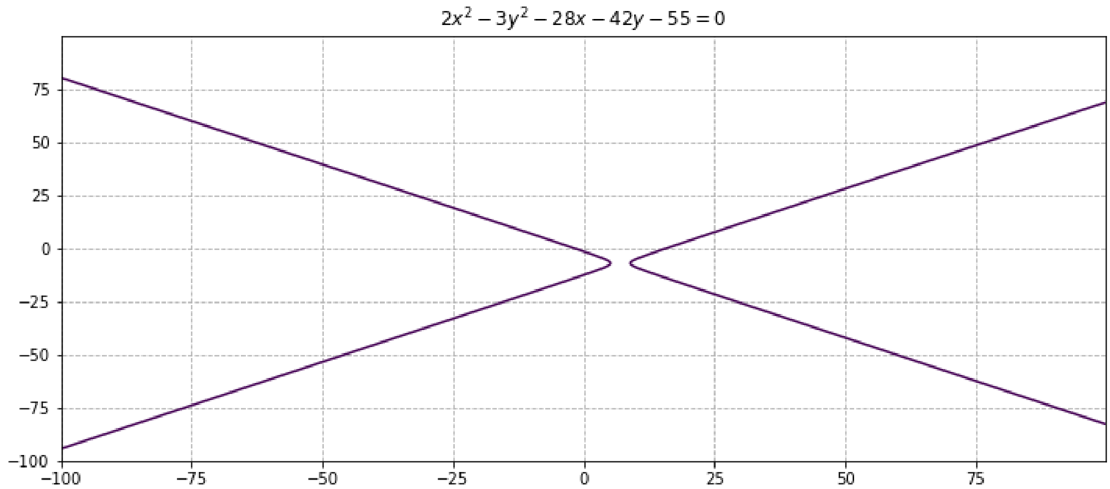
$\delta < 0, \Delta \neq 0 \Rightarrow$ Уравнение $2x^2 - y^2 + 6y - 7 = 0$ задает гиперболу.

г) $2x^2 - 3y^2 - 28x - 42y - 55 = 0$

In [65]:
```
plt.figure(figsize=(12, 5))
y = np.arange(-100, 100, 0.1)
x = np.arange(-100, 100, 0.1)

x, y = np.meshgrid(x, y)
plt.contour(x, y,2*x**2-3*y**2-28*x-42*y-55, [1])

# plt.xlim(-5, 1)
# plt.ylim(-3, 10)
plt.title('$ 2x^2 - 3y^2 - 28x - 42y - 55 = 0$')
plt.grid(linestyle='--')
```



Коэффициенты:

$a_{11} = 2 \quad a_{22} = -3 \quad a_{12} = 0 \quad a_1 = -14 \quad a_2 = -21 \quad a_0 = -55$

$\tau = a_{11} + a_{22} = -1$

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -6$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -14 \\ 0 & -3 & -21 \\ -14 & -21 & -55 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -21 \\ -21 & -55 \end{vmatrix} - 14 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -14 & -21 \end{vmatrix} = 36$$

$\delta < 0, \Delta \neq 0 \Rightarrow$ Уравнение $2x^2 - 3y^2 - 28x - 42y - 55 = 0$ задает гиперболу.