2025年度 卒業論文

ケアワーカーと被介護者のマッチングアルゴリズムの開発

2024年12月18日

国際商学部

(学籍番号：211079)

倉持誠

横浜市立大学 国際商学部

目次

1　はじめに

本研究は、介護現場におけるケアワーカーと被介護者の組み合わせ（以下、マッチング）方法の改善を目的としている。

現状のケアワーカーと被介護者とのマッチングでは、多くの場合、経験則や単純な需給バランスに基づいて行われており、個々のケアワーカーや被介護者の相性などを十分に考慮できていないのが実情である。また、実際に介護を行うそれぞれのケアワーカーの主観的な選好は、現在現場で行われているマッチングの結果に反映されていない。それゆえ、サービスの質の低下やケアワーカーの離職率の上昇など、様々な問題が生じている。

そこで本研究では、「より望ましいマッチングの仕組み」の開発を目指す。ここでいう「より望ましい」とは、ケアワーカーの主観的な選好を反映しつつ、マッチング理論における指標である安定性と効率性を満たすことを意味する。具体的には、主観的な選好（ケアワーカーが特定の被介護者を好む度合い）と、客観的なフィット度（被介護者の健康状態や介護の必要性に基づく評価）を統合する新しい、複数の意見や情報をまとめる方法 (以下、集約ルール) を考案する。そして、その集約された選好を用いて、具体的なマッチングメカニズムを提案する。

この新しい方法の開発にあたり、Bossert and Sprumont (2014) が提案した、「Kemeny ルール」を拡張して使用する。Kemeny ルールは、複数の順位付けを単一の順位にまとめる数学的な方法である。その主な特徴として、各順位付けとの「距離」が最小になるような順位を選ぶこと、パレート最適性を満たすことなどが挙げられる。直感的には、「みんなの意見との食い違いが最も小さくなる順位」を探すものと理解できる。具体的には、複数の人々から集めた順位付けに対し、可能な全ての順位付けパターンを考え、各パターンと元の順位付けとの「違い」を数値化し、その合計が最も小さくなる順序を選ぶ。このプロセスにより、全体の意見を最もよく反映した社会的な順序が得られる。

しかし、Kemeny ルールはランキング（順位付け）同士の集約のみを扱っているため、本研究ではこれをランキングとレイティング（点数付け）の両方を扱えるように拡張する。本研究では、拡張した Kenemy ルールを拡張版 Kemeny ルールと呼んでいる。さらに、この拡張版 Kemeny ルールと、最適な組み合わせを見つけるための方法である「DA アルゴリズム」を組み合わせて、最適なマッチングを実現する方法を提案する。

本研究の主な成果は以下の 3 点である：

- Kemeny ルールを拡張し、ランキングとレイティングの集約を可能にしたこと。
- 拡張した Kemeny ルールが、Grandmont (1978) の“間”(betweenness) の概念を用いた弱効率性と弱耐戦略性を満たすことを示したこと。
- 拡張した Kemeny ルールと DA アルゴリズムを、介護マッチングのプロセスに組み込んだこと。

本論文の構成は以下のようになっている。第 2 章では、現状のケアワーカーと被介護者とのマッチングに関する先行研究を分析し、現在の介護業界の前提を確認する。ここでは、現行のマッチング方法の課題や、改善の必要性について詳しく述べる。第 3 章では、本研究におけるレイティングとランキングの集約について説明し、新しいルールを提案する。拡張版 Kemeny ルールについて詳細に説明し、このルー

ルが弱耐戦略性と弱効率性を満たすことを証明する。また、このルールを使用した具体例を示し、その特徴や利点について考察を行う。第4章では、提案したモデルを用いてケアワーカーと被介護者とのマッチングを行う方法を具体的に、説明する。実際のマッチングプロセスをステップごとに解説し、具体例や数値例を用いて理解を深める。また、この方法の実用性や課題についても考察を行う。第5章では、他の問題への応用を述べる。ここでは、人事・採用分野と教育分野での活用について説明する。第6章では、研究全体のまとめと考察を行う。本研究の成果が介護現場にもたらす可能性のある影響や、今後の課題、さらなる研究の方向性について論じる。

本研究は、数学的な手法を用いて介護現場の人材配置を最適化することを目指している。ケアワーカーの希望や適性を考慮することで、介護サービスの質の向上やケアワーカーの職務満足度の向上につながる可能性がある。

ただし、この方法を実際の現場に導入する際には、システムの運用コストやデータ収集方法、プライバシーの保護など、さまざまな課題に対処する必要がある。また、介護の現場特有の複雑な要因（例えば、緊急時の対応や長期的な人間関係の構築など）をどのようにモデルに組み込むかも今後の課題となる。

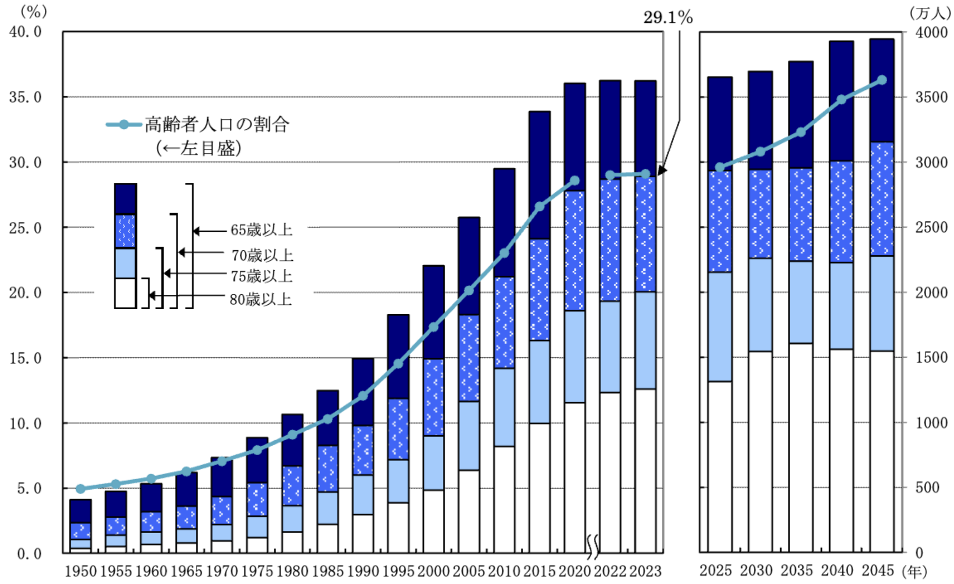
本研究は主に理論的な基礎を提供するものであるが、この新しいアプローチが、介護業界が直面している人材配置の課題に対する一つの解決策となる可能性を秘めている。実際の運用にあたっては、現場の声を十分に聞き、段階的な導入や継続的な改善が必要となる。

2　背景・先行研究

2.1　背景

日本の介護業界は高齢化社会の進展に伴い、様々な課題に直面している。総務省 (2023) によれば、2045 年には 65 歳以上の高齢者人口が約 3,945 万人 (総人口に占める割合としては、36.3%) に達すると予測されている。(図 1 参照) また、それに伴って、必要とされるケアワーカーの数は厚生労働省 (2024) によると、2040 年度には約 272 万人に上ると試算されており、このままでは、約 57 万人不足すると考えられている。このような状況下で、介護サービスの質の向上と効率化が喫緊の課題となっている。その中で、ケアワーカーと被介護者とのマッチングは、介護サービスの質を大きく左右する重要な要素である。

図 1: 高齢者人口及び割合の推移 (1950 年〜2045 年)



(画像引用元: 統計トピックス No.138 統計からみた我が国の高齢者－「敬老の日」にちなんで－ 総務省 (`https://www.stat.go.jp/data/topics/pdf/topics138.pdf`) 参照日 2024/11/8)

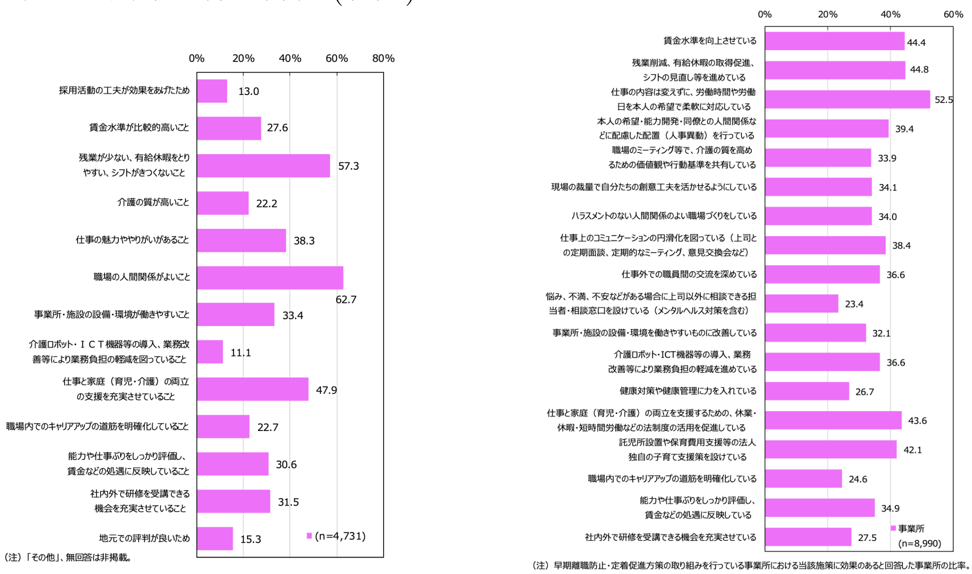
しかしながら、現状では、ケアワーカーと被介護者とのマッチングは必ずしも効果的に行われているとは言えない。多くの場合、マッチングは経験則や単純な需給バランスに基づいて行われており、個々のケアワーカーや被介護者の特性や相性を十分に考慮できていないのが実情である。また、実際に介護を行うそれぞれのケアワーカーの主観的な選好は反映されていない。この結果、サービスの質の低下やケアワーカーの離職率の上昇など、様々な問題が生じている。

公益財団法人介護労働安定センター (2024) によると、「従業員の採用がうまくいっている」と回答した事業所に対して、その理由を尋ねたところ、最も多くあげられたのは、「職場の人間関係がよいこと」(62.7 %) であった。それに続くのは「残業が少ない、有給休暇をとりやすい、シフトがきつくないこと」(57.3 %)、「仕事と家庭（育児・介護）の両立の支援を充実させていること」(47.9 %)、「仕事の魅力ややりがいがあること」(38. ３%)、「事業所・施設の設備・環境が働きやすいこと」(33.4 %) の順となっている（図 2 左図参照)。また、早期離職防止・定着促進のための方策について、その取り組みを実際に行っている事業所において「効果があった」とする項目をみると、「仕事の内容は変えずに、労働時間や労働日を本人の希望で柔軟に対応している」(52.5 %) が最も多かった。それに続くのは「残業削減、有給休暇の取得促進、シフトの見直し等を進めている」(44.8 %)、「賃金水準を向上させている」(44.4 %)、「仕事と家庭（育児・介護）の両立を支援するための、休業・休暇・短時間労働などの法制度の活用を促進している」(43.6 %)、「託児所設置や保育費用支援等の法人独自の子育て支援策を設けている」(42.1 %) の順で、「ハラスメントのない人間関係のよい職場づくりをしている」(34.0 %) は 12 位となっている（図 2 右図参照)。

このことから、全体としてケアワーカーの希望を反映するほど、早期離職を防止し、定着を促進していることがわかる。そのため、各々のケアワーカーの主観的な選好や希望を反映することが、ケアワーカーの定着や離職防止につながると考える

ことができる。

図 2: 採用がうまくいっている理由（複数回答）(左図) と早期離職防止・定着促進方策の取り組みの効果に係る評価 (右図)



(画像引用元: 令和５年度「介護労働実態調査」結果の概要について 公益財団法人介護労働安定センター (`https://www.kaigo-center.or.jp/content/files/report/2023_jittai_chousagaiyou.pdf#page=9.73`) 参照日 2024/11/8)

2.2　先行研究

介護現場でのマッチング問題は、主観的な選好（ケアワーカーが特定の被介護者を好む度合い）と、客観的なフィット度（被介護者の健康状態や介護の必要性に基づく評価）が複雑に絡み合っている。現行のマッチング方法では、これら二つの側面を十分に反映した意思決定が困難である。その結果としてケアの質の低下やケアワーカーの高い離職率といった形で問題が生じている。そこで、本研究では、この問題を解決するために、主観的選好と客観的評価の双方を集約する方法を考察する。

2.2.1　集約メカニズムに関する研究

ケアワーカーの主観的選好と客観的フィット度の集約には、複数の選好やランキングから最良のランキングを決定する方法の一つである以下のルールを参考にした。具体的なモデルは、Bossert and Sprumont (2014)、Athanasoglou(2016) を元に、今回の集約に適切な形に変更した。

<u>Kemeny ルール (Kemeny(1959))</u>
ここでは、選択肢を A,B,C の 3 つとし、投票者を 1,2 の 2 人とする。
ステップ 1. 投票者 1、2 は、すべての選択肢 A,B,C をランク付けする。左から、1 位、2 位、... という順になっている。

$$\begin{aligned} \text{投票者 1 のランキング} &= BAC \\ \text{投票者 2 のランキング} &= ACB \end{aligned}$$

ステップ 2. すべての選択肢が作りうる順序を全て列挙する。ここでは、以下の6通りとなる。

$$ABC$$
$$ACB$$
$$BAC$$
$$BCA$$
$$CAB$$
$$CBA$$

ステップ 3.　2順序のペア (ステップ2の順序とステップ1の順序) 間で一致しない選択肢のペアの数を出す。ABC を例に出すと、以下のようになる。投票者1のランキングは、BAC であるため、存在する順序のペアは、$\{(B,A),(B,C),(A,C)\}$ となる。比較する、ABC の2順序のペアは、$\{(A,B),(A,C),(B,C)\}$ となる。これを比較すると、不一致のペアは、$\{(A,B),(B,A)\}$ となる。よって不一致のペア数が距離となるため、距離は2となる。

ステップ 4.　以下の表のように、「投票者 1: BAC」と「投票者 2: ACB」のそれぞれの距離を合計する。

	投票者 1: BAC	投票者 2: ACB	合計
ABC	2	2	4
ACB	4	0	4
BAC	0	4	4
BCA	2	6	8
CAB	6	2	8
CBA	4	4	8

ステップ 5. 合計が最小な順序を選択する。ここでは、ABC, ACB, BAC が4となり、最小となる。

ステップ 6. ステップ 5 で選択した順序が複数の場合は、追加の基準で 1 つ選択する。ここでは、「アルファベット順で辞書的に選択する」という基準を持たせていることにすると ABC が選ばれる。

通常、Kemeny ルールは、複数の個人の選好を集約する際に、全体の意見と最も矛盾が少ない社会的順序を導き出すために使用される。しかし、これまでの研究では、Kemeny ルールは主に順位情報（ランキング）の集約に限定されており、客観的な数値評価（レイティング）を含む形では使用されていない。本研究では、Kemeny ルールを拡張し、ケアワーカーの主観的な選好（ランキング）と被介護者の客観的フィット度（レイティング）を同時に集約できるようにしている。これにより、現場でのより現実的で公平なマッチングを実現し、サービスの質を向上させることを目指す。

2.2.2　マッチングメカニズムに関する研究

集約された結果を基に、実際にケアワーカーと被介護者を結びつけるためには、適切なマッチングアルゴリズムが必要である。本研究では、DA（Deferred Acceptance）アルゴリズムを採用した。特に、Gale and Shapley(1962) の理論を基礎とし、Dubins and Freedman(1981) や Roth(1982) の研究を参考にした。このアルゴリズムは、特に参加者が選好を持つ場合に、安定したマッチングを保証する性質がある。安定性とは、いかなるケアワーカーや被介護者も、現在のマッチングに対して不満があり、他の組み合わせを選ぶことでより良い結果を得られると感じない状態を指す。これにより、介護現場において、マッチングの結果に対する長期的な満足度や安定性が確保され、ケアの質が向上することが期待される。

具体的には、以下のようなアルゴリズムを用いた。

DA アルゴリズム (男性側)

ステップ 1. 男性と女性が、それぞれ異性に対して選好を持つものとする。∅ よりも右に位置する番号は、その人にとって一人でいるよりも嫌な相手であることを示す。ここでは、以下のような選好をもつとする。

男性 1 : 46∅5

男性 2 : 45∅6

男性 3 : 6∅54

女性 4 : 321∅

女性 5 : 13∅2

女性 6 : 123∅

ステップ 2. ステップ 1 で表明した選好から、男性は、自分の選好が一番高い人にプロポーズする。女性は、プロポーズされている人の中から自分の選好が一番高い人をキープする。ここでは、男性 1、男性 2 はどちらも女性 4 の選好が一番高いので、女性 4 にプロポーズする。女性 4 は、男性 2 のほうが男性 1 よりも選好が高いので男性 2 をキープする。男性 3 は女性 6 にプロポーズする。女性 6 は他からプロポーズされておらず、一人でいるよりは男性 3 といるほうが選好が高いので男性 3 をキープする。(男性 2 ♡ 女性 4)(男性 3 ♡ 女性 6)

ステップ 3. キープされていない人は、前のステップで表明した次の女性にプロポーズする。ここでは、男性 1 は、女性 4 ではキープされなかったので、女性 6 にプロポーズする。女性 6 は既にキープしている男性 3 と比較して、男性 1 のほうが選好が高いので、男性 1 をキープする。(男性 2 ♡ 女性 4)(男性 1 ♡ 女性 6)

ステップ 4. キープから外された人は、自分の選好の中で表明した選好の次の選好を表明する。男性 3 は、次の選好が ∅ なので、一人でいるよりも嫌な相手なので、プロポーズすることはない。

ステップ 5. ステップ 3、4 を繰り返し、プロポーズする相手がいなくなったら、男性側 DA アルゴリズムは停止し、その時点でのキープ状況が、マッチングペアとして決定する。ここでは、キープ状況が (男性 2 ♡ 女性 4)(男性 1 ♡ 女性 6) なのでマッチングは、(男性 2 ♡ 女性 4)(男性 1 ♡ 女性 6) となる。

2.3 なぜ本研究のマッチングにおいて集約が必要なのか

本研究では、レイティングとは、客観的なフィット度を意味し、ランキングとは、主観的な選好を意味する。なぜ、この 2 つの情報を集約する必要があるのか、その理由を以下に示す。

レイティングとランキングを同時に集約することが必要なのは、客観的な評価と主観的な選好の両方を適切に反映させるためである。特に、レイティングが持つ数

値的な差異や重要な情報を保持しつつ、主観的な好みを反映することで、ケアワーカーと被介護者の適切なマッチングを実現することが可能になる。単に主観的なランキングだけに頼ると、重要な客観的データが無視され、逆にレイティングだけを使用すると個々の選好が反映されない。そのため、これらの集約が非常に重要である。

この集約プロセスにおいて重要な役割を果たすのが、「フィット度」という概念である。フィット度とは、ケアワーカーと被介護者の適合性を示す指標で、客観的な基準に基づいて評価される。例えば、ケアワーカーの専門知識や経験年数、介護技術が被介護者のニーズにどの程度一致しているかを数値で表すものである。フィット度が高ければ、ケアの質や満足度が向上する可能性が高くなる。一方、フィット度が低いと、たとえ主観的な好みでマッチングが行われても、適切なケアが提供されないリスクがある。このフィット度は、単なる主観的な選好（ランキング）だけでは判断できないため、数値としてのレイティングが必要不可欠である。

レイティングとランキングの集約方法を考える際、単純にレイティングをランキングに変換して集約するという考えが浮かぶかもしれない。しかし、この方法には重大な問題がある。レイティングをランキングに変換する過程で、重要な情報が失われてしまう。

例えば、ケアワーカー A、B、C の被介護者 1 に対するフィット度 (レイティング) が 5、4、1 だったとする。これを単純にランキングに変換すると、1 位 A、2 位 B、3 位 C となる。しかし、この変換では A と B の差がわずかであり、B と C の差が大きいという重要な情報が失われてしまう。この情報の損失は、適切な評価や意思決定を行う上で大きな障害となりうる。

したがって、レイティングとランキングの集約は、「客観的指標と主観的選好の両方を適切に反映させる」、「評価間の差の大きさという重要な情報を保持する」という点から重要である。

2.4　なぜ本研究の集約に Kemeny ルールを用いるのか

Kemeny ルールを本研究の集約に用いる理由は、主観的な選好と客観的な評価（レイティング）をバランスよく統合し、不一致を最小化する点にある。ケアワーカーと被介護者のマッチングにおいて、双方の選好や適合性を考慮することが求められるが、主観的なランキングのみでは、適合度や能力の差異を適切に反映できない。一方、客観的なレイティングだけでは、個別の個々人の選好を無視してしまう危険性がある。Kemeny ルールは、複数のランキングやレイティングの不一致を最小化し、より多くの意見や評価を反映する集約を実現できる。このルールを用いることで、主観的な選好と客観的な適合度の両方を考慮し、ケアの質を向上させる最適なマッチングが可能になる。したがって、Kemeny ルールは本研究の目的に合致した集約手法として最適である。

Kemeny ルールの基本となるのは「Kemeny 距離」である。Kemeny 距離は、複数のランキング間の不一致を数値として測定し、その距離を最小化することで、できるだけ多くの意見に合致する順を求めるためのものである。具体的には、2 つのランキング間で順が逆転している候補者のペアの組み合わせをカウントし、その入れ替えの総数を「距離」として表す。この距離が小さいほど、ランキングが一致していることを意味する。

前述した、一般的な Kemeny 距離は、複数のランキングの間でどれだけ順位が入れ替わっているかを数え、その不一致を最小化することを目的とする。しかし、本研究では、単なる順位の入れ替えだけでなく、各候補者に対する数値評価（レイティ

ング）をも考慮した拡張された Kemeny 距離を用いる。ランキングだけでは、候補者間の相対的な順序は示せても、その差の大きさを反映できない。一方、レイティングを用いることで、候補者間の差を数値的に表現でき、Kemeny 距離に基づいてその差異を最小化することが可能になる。例えば、A と B の評価がどちらも高く、それに比べて C の評価が非常に低い場合、単なる順位の入れ替えではその差が無視されるが、レイティングを考慮すればその差を適切に反映できる。この拡張により、主観的な選好と客観的なレイティングのバランスが取れたマッチングが実現できる。

また、ランキングからレイティングに移行しても、Kemeny 距離を適用することが可能であり、同様に不一致を最小化するルールを定義できる。従来の Kemeny 距離は、複数のランキングの間で順位が逆転した場合に、その逆転の回数を数え、不一致として扱うものである。しかし、レイティング（数値評価）を導入することで、単に順位の入れ替えを評価するだけでなく、数値間の差異も考慮した距離を測定できる。

たとえば、評価者 1 が A を 5 点、B を 4 点と評価し、評価者 2 が B を 5 点、A を 2 点と評価した場合、順位が逆転していることに加えて、数値における差も見られる。この場合、レイティングを用いた Kemeny 距離では、単に A と B の逆転があるというだけでなく、評価者 2 の B と A 評価の差が大きいことも考慮に入れる必要がある。

本論文では、これらの差を反映させるために、Kemeny 距離を拡張し、ランキングとレイティングの両方を集約する手法を提案している。これらが考慮された拡張された Kemeny 距離によって、より精度の高い不一致測定が可能となる。

つまり、レイティングに基づく Kemeny 距離でも、不一致を最小化するという根本的な考え方は維持されつつ、より微細な評価の差を反映させることができる。このようにして、主観的な順位付けと客観的な数値評価の両方を統合し、最も合意に近い形で結果を導き出す手法として、Kemeny ルールは引き続き有効に機能する。

3 レイティングとランキングの集約に関する一般的分析

3.1 モデル

本章ではケアワーカーの被介護者に対する主観的な選好と被介護者との客観的なレイティングを集約するためのモデルを記述する。

ケアワーカーの評価実施において、ケアワーカーはそれぞれ主観的な選好と客観的なレイティングを所有していると仮定する。主観的な選好は、介護従事者から見た被介護者全てをランキング付けしたものである。ケアワーカーと被介護者は、共にレイティングとランキングを同様に持つため、同じように集約できる。そのため今回は、ケアワーカーにおける集約を記述する。

ケアワーカーの集約メカニズムにおいて、ケアワーカーを $N = \{1, \ldots, n\}$ とし、被介護者を $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ とする。ここで、ケアワーカー $i \in N$ の被介護者に対するフィット度は、全ての被介護者に対してそれぞれ異なる値を持つものとする。以上のことから、被介護者 $x \in X$ からフィット度を出力する関数 E は単射であり、以下のように定義する。

$$E : X \to \{1, 2, \ldots, h\}$$

さらに、すべてのフィット度関数の集合を $\mathcal{E}$ で表す。つまり、各被介護者 $x \in X$ に対して、ケアワーカー i は $E_i(x) \in \{1, 2, \ldots, h\}$ の値を割り当てる。また、ケアワー

カー i の被介護者に対する選好 (ランキング) は、R_i で表す。なお、R_i は、被介護者 X に対して、厳密な全順序 (すなわち、完備性、推移性、反対称性を持つ二項関係) であるとする。すべての厳密な全順序の集合を $\mathcal{R}$ と書く。ケアワーカーたちの選好プロファイルを $R^N = (R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^N$ で表す。ケアワーカーと被介護者とのフィット度のプロファイルは、$E^N = (E_1, \ldots, E_n) \in \mathcal{E}^N$ と記述する。

ここで、Bossert and Sprumont(2014) 及び、Athanasoglou(2016) では、フィット度関数のような、基数的な順序は考えず、序数的な選好にのみに着目している。そして、Kemeny 距離を不一致の集合の個数と考え、$R, R_i \in \mathcal{R}$ について、

$$D\left(R, R_i\right) = \left(R \backslash R_i\right) \cup \left(R \backslash R_i\right)$$

とした。その上で、ケアワーカーの選好 R と R_i の Kemeny 距離を、

$$\delta\left(R, R_i\right) = \left|D\left(R, R_i\right)\right|$$

と定義している。

一方、本稿では、選好以外の基数的なフィット度も考慮する。まず、ケアワーカーと被介護者とのフィット度の Kemeny 距離を考える。ここで、直感的な数値例を考える。フィット度 $E_1 = (E_1(A), E_1(B), E_1(C)) = (1, 5, 4)$ とする。この時、単純に、フィット度の数値を序数的に考え、数値の大きい順で並べるとする。すると、BCA とランキングとすることができる。しかし、このようなランキングでは、フィット度の数値差を考慮することができなくなってしまう。そこで、今回は、$\bar{R}(E_1) = BCO_1O_2A$ と記述する。左から順に、フィット度が高い順で並べる。フィット度として使用されておらず、かつ、今回であれば 5〜1 の間にある値を O で埋める。

これを一般化し、被介護者が使用していない、フィット度の値を集めた集合 O を考える。その上で、Kemeny 距離を集合 O と、集合 X の和集合において入れ替え回数を最小にする回数として定義する。そこで、フィット度として用いられていない値の要素の個数は、$h - m$ であるので、集合 O は、$O = \{O_1, O_2, \ldots, O_{h-m}\}$ と定義する。また、$\bar{R}(E_1)$ は、$X \cup O$ 上の順序であることを考慮し、$\bar{R}(E_1)$ も一般化する。フィット度 $E_i \in \mathcal{E}$ について、$\bar{R}(E_i)$ を以下のように定義する。

$$\bar{R}(E_i) \text{ such that } \forall x, x^{'} \in X \cup O, E_i(x) \geq E_i(x^{'}) \Rightarrow x\bar{R}(E_i)x^{'}$$

ここで生成された $\bar{R}(E_i)$ は、$X \cup O$ に対して厳密な全順序とする。すべての $X \cup O$ に対する厳密な全順序の集合を $\bar{\mathcal{R}}$ と書く。$X \cup O$ に対するケアワーカーのプロファイルを $\bar{R}^N = (R_1, ..., R_n) \in \bar{\mathcal{R}}^N$ で表す。

それを踏まえると、ケアワーカーの選好 R と E_i の Kemeny 距離 $\delta(R, E_i)$ は、以下のように定義することができる。

$$\delta(E_i, R) \quad = \quad \min\left\{\delta(\bar{R}(E_i), \bar{R}') : \bar{R}' \in \bar{\mathcal{R}} \text{ such that } [\forall x, x' \in X, xRx' \Rightarrow x\bar{R}'x']\right\}$$

Bossert and Sprumont(2014) 及び、Athanasoglou(2016) では、Kemeny ルールを以下のような $K(R^N)$ を用いて、定義している。具体的には、$R_N \in \mathcal{R}^N$ に対し、$\succeq$ の下で最も高くランク付けされた $K(R_N)$ に属する厳格な順序を割り当てる集計ルールとして定義されている。

$$K(R^N) = \arg\min_{R \in \mathcal{R}^{\cdot}} \sum_{i \in N} \delta(R, R_i)$$

上記を参考にしつつ、ケアワーカーの選好と被介護者とのフィット度を集約するためのメカニズムを以下に示す。$\mathcal{R}$ 上における厳密な順序 $\gtrsim$ を 1 つ固定する。ここで、$K(R^N, E^N)$ を以下のように定義する。

$$K(R^N, E^N) = \arg\min_{R\in\mathcal{R}^\cdot}\sum_{i\in N}(\delta(R, R_i) + \delta(R, E_i))$$

この時、フィット度を考慮した拡張版 Kemeny のルールのアウトカム $f(R^N, E^N)$ を $K(R^N, E^N)$ において、$\gtrsim$ に従って最初にランク付けされた厳密な順序とする。

ここで、本研究で定義した、拡張版 Kemeny ルールを用いた数値例を以下に示す。

ケアワーカーの被介護者に対する選好と被介護者とのフィット度を以下のように設定する。ここでは、ケアワーカーを 1、被介護者を A,B,C の 3 人として考える。選好は、左に行くほど好きであることを示す。フィット度は、数値が大きいほどフィット度が高いことを示す。

$$\gtrsim_1 = ACB$$
$$E_1(B) = 4, E_1(C) = 5, E_1(A) = 1$$

この場合、ケアワーカー 1 は A が一番好ましく、次に C、最後に B であるという選好を持っている。また、$E_1(B)$ は、ケアワーカー 1 と被介護者 B とのフィット度が 4 であることを示す。ここでは、C とのフィット度が 5 で一番高く、次に B のフィット度が 4 で次に高く、最後に A とのフィット度が 1 で一番低いことを示している。

これらを踏まえて、“ケアワーカーの選好”、“被介護者とのフィット度”と“被介護者 3 人で構成しうるすべての選好”との Kemeny 距離は、以下の表のようになる。

	$R_1 = ACB$	$E_1 = (E_1(A), E_1(B), E_1(C)) = (1, 5, 4)$	合計
ABC	1	4	5
ACB	0	5	5
BAC	2	3	5
BCA	3	0	3
CAB	1	4	5
CBA	2	1	3

$R_1 = ACB$ と“被介護者 3 人で構成しうるすべての選好”との Kemeny 距離の計算方法は、「2.2.1 集約メカニズムに関する研究」におけるコンドルセ・Kemeny のルールに記述の通りである。一方、$E_1 = (E_1(A), E_1(B), E_1(C)) = (1, 5, 4)$ と“被介護者 3 人で構成しうるすべての選好”との Kemeny 距離の計算方法を BCA の場合と ACB の場合を用いて以下に示す。

<u>フィット度における Kemeny 距離の直感的な計算方法</u>

フィット度 $E_1 = (E_1(A), E_1(B), E_1(C)) = (1, 5, 4)$ を BC ◯◯ A と記述する。左から順に、フィット度が高い順で並べる。フィット度として使用されておらず、かつ、今回であれば 5〜1 の間にある値を◯で埋める。

BCA の場合

1. フィット度 BC ◯◯ A は既に◯を除くと BCA の順になっているので、入れ替える必要はなく、Kemeny 距離は 0 となる。(現在：BC ◯◯ A　回数：0 回目)

ACB の場合

1. フィット度 BC ◯◯ A を ACB に変換するためには、B と C、A と C、A と B を入れ替える必要がある。

2. B と C を入れ替えるためには、B と C は隣接しているので、1 回の入れ替えで入れ替える。(現在：CB ◯◯ A　回数：1 回目)

3. A と B を入れ替えるためには、A と B は隣接していないので、◯◯と、◯を 2 回入れ替える。(現在：CBA ◯◯　回数：3 回目)

4. A と B は隣接したので、1 回の入れ替えで入れ替える。(現在：CAB ◯◯　回数：4 回目)

5. A と C を入れ替えるためには、A と C は隣接しているので、1 回の入れ替えで入れ替える。(現在：ACB ◯◯　回数：5 回目)

6. ◯◯を除いて ACB となっているので、ここで終了し、Kemeny 距離は 5 となる。

他も同様に計算し、合計を見ると、BCA、CBA が最小であるため、ケアワーカーの選好と被介護者とのフィット度を集約するためのメカニズムは、$K(R^N, E^N) = BCA, CBA$ となる。同率となる場合は、主観的な選好を優先して選択することとする。今回同率となっているので、拡張版 Kemeny ルール f で集約される選好は、CBA となる。

ここで選ばれた CBA は、フィット度間の特に差が大きい場所 (今回は、C と A の差が大きいため、C と A の順序は維持する。) を考慮して、選好を集約することができていることがわかる。また、それに加えて、主観的な選好である ACB の CB は維持されており、主観的な選好を組み込むことに成功していることがわかる。

このルールが、Bossert and Sprumont(2014),Athanasoglou(2016) で定義されている弱効率性と弱耐戦略性を、拡張した概念を、満たすことを示したい。そのために、Grandmont (1978) による順序性の“間”(betweenness) の概念を用いる。選好 R と R_i との“間”(betweenness) は Bossert and Sprumont(2014) 及び、Athanasoglou(2016) で、

$$[R_i, R] = \left\{ R^{'} : R_i \cap R \subset R^{'} \right\}$$

と定義されている。

例えば、$R_i = ABC, R = CBA$、即ち、$R_i = \{(A,B),(A,C),(B,C)\}$、$R = \{(C,B),(C,A),(B,A)\}$ とすると、

$$R_i \cup R = \{(A,B),(A,C),(B,C),(C,B),(C,A),(B,A)\}$$

となる。そこで、それらを含む $R^{'}$ を集めると、$\{ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA\}$ となる。よって、$[R_i, R] = \{ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA\}$ となる。

そこで、この概念を拡張するために、フィット度 $E_i \in \mathcal{E}$ を用いて

$$R(E_i) \equiv R^{'} \text{such that } \forall x, x^{'} \in X, E_i(x) \geq E_i(x^{'}) \Rightarrow xR^{'}x^{'}$$

と定義する。

この時、フィット度 $E_i \in \mathcal{E}$ と $R \in \mathcal{R}$ との“間”(betweenness) は、

$$[E_i, R] \equiv [R(E_i), R]$$

と定義できる。

フィット度 $E_i \in \mathcal{E}$ と $R \in \mathcal{R}$ との“間”(betweenness) の数値例を以下に示す。以下のようにレイティングとランキングが与えられたと考える。

- レイティング E_i: $E_i(A) = 5, E_i(B) = 4, E_i(C) = 1$
- ランキング R: BCA

この時、$R(E_i)$ の定義より、$R(E_i) = ABC$ となる。したがって、$[E_i, R]$ は、$[ABC, BCA]$ となる。

よって、$ABC, BAC, BCA \in [E_i, R]$ となる。

3.2 弱効率性と弱耐戦略性

Bossert and Sprumont(2014) 及び、Athanasoglou(2016) では、弱効率性と弱耐戦略性を以下のように定義している。

Bossert and Sprumont(2014) における弱効率性 任意の $i \in N$, $R^N \in \mathcal{R}^N$, $R' \in \mathcal{R}$ について、もし $R' \neq f(R^N)$ であるならば、R' は $[R_i, f(R^N)]$ に含まれない。

Bossert and Sprumont(2014) における弱耐戦略性 任意の $i \in N$, $R^N \in \mathcal{R}^N$, $R' \in \mathcal{R}$ について、もし $f(R'_i, R_{-i}) \neq f(R^N)$ であるならば、$f(R'_i, R_{-i})$ は $[R_i, f(R^N)]$ に含まれない。

そこで、本研究では、フィット度を考慮し、弱効率性と弱耐戦略性を以下のように定義する。

拡張された弱効率性 任意の $R^N \in \mathcal{R}^N$, $E^N \in \mathcal{E}^N$, $R' \in \mathcal{R}$ について、$R' \neq f(R^N, E^N)$ であるならば、

1. $R' \in [R_i, f(R^N, E^N)]$
2. $R' \in [E_i, f(R^N, E^N)]$

が全ての $i \in N$ について同時に満たされることはない。

拡張された弱耐戦略性 任意の $i \in N$, $R^N \in \mathcal{R}^N$, $E^N \in \mathcal{E}^N$, $R' \in \mathcal{R}$, $E' \in \mathcal{E}$ について $f(R'_i, R_{N-i}, E^N) \neq f(R^N, E^N)$ であるならば、$f(R'_i, R_{-i}, E^N) \in [R_i, f(R^N, E^N)]$ を満たす i は存在しない。[1](注 1)

[1](注 1) 今回フィト度は、客観的な方法によって与えられるものである。選好と異なり、ケアワーカーそれぞれが決定するものではない。よって、ケアワーカー自身によって戦略的な操作を行うことはできない。これらを踏まえ、拡張された弱耐戦略性では、選好 R に対してのみ、条件を科している。

3.3　主要定理

3.1 で定義したメカニズムが、3.2 で定義した弱効率性と弱耐戦略性を満たすことを示す。

定理 1　拡張版 Kemeny ルール $f(R^N, E^N)$ は弱効率性を満たす。

証明. f が弱効率性を満たさないと仮定する。
　仮定より、少なくとも一つの $R^N \in \mathcal{R}^N$, $E^N \in \mathcal{E}^N$, $R' \in \mathcal{R}$ が存在し、任意の $i \in N$ について、$R' \neq f(R^N, E^N)$ かつ、$R' \in [R_i, f(R^N, E^N)]$ と $R' \in [E_i, f(R^N, E^N)]$ が同時に満たされる。

　仮定と弱効率性の定義より、$R' \neq f(R^N, E^N)$ であり、今回距離はプラスのみを考えているので、$\delta(R^{'}, f(R^N, E^N)) > 0$ とする。
　これらと、"間"(betweenness) の定義と、$\delta(R^{'}, f(R^N, E^N)) > 0$ より、以下式が成立する $R^N \in \mathcal{R}^N$, $E^N \in \mathcal{E}^N$, $R' \in \mathcal{R}$ が存在する。

$$\delta(R_i, f(R^N, E^N)) = \delta(R_i, R^{'}) + \delta(R^{'}, f(R^N, E^N)) > \delta(R_i, R^{'}) \cdots \cdot (3.1)$$

　同様に、$\delta(E_i, f(R^N, E^N)) > \delta(E_i, R^{'})$ が成り立つことも以下に示す。まず、仮定より、$R' \in [E_i, f(R^N, E^N)]$ となるような、R' が存在する。
　Kemeny 距離 $\delta(f(R^n, E^N), E_i)$ の定義より、以下の条件を満たし、$\delta(\bar{R}'', \bar{R}(E_i))$ を最小とするような $\bar{R}''$ が存在する。

$$\bar{f}(R^N, E^N) \text{ is linear order on } X \cup O, \forall x, x^{'} \in X, x f(R^N, E^N) x' \Rightarrow x \bar{f}(R^N, E^N) x'$$

　また、Kemeny 距離 $\delta(f(R^n, E^N), E_i)$ と $\bar{f}(R^N, E^N)$ の定義より、$\delta(f(R^N, E^N), E_i) = \delta(\bar{f}(R^N, E^N), \bar{R}(E_i))$ となる。
　$\bar{f}(R^N, E^N)$ は、$\delta(\bar{f}(R^N, E^N), \bar{R}(E_i))$ を最小とするので、

$$\forall O, O' \in O, O \bar{R}(E_i) O' \Rightarrow O \bar{f}(R^N, E^N) O'$$

となる。
　ここで、以下の 2 つの条件で、$X \cup O$ 上の $\bar{R}'$ を定義する。

1. $\forall x, y \in X, x \bar{R}' y \Leftrightarrow x R' y$
2. $\forall x, y \in X \cup O, x \bar{f}(R^N, E^N) y \wedge x \bar{R}(E_i) y \Rightarrow x \bar{R}' y$

　条件 1.,2. は矛盾しない。なぜならば、$\forall x, y \in X$ について、$x \bar{f}(R^N, E^N) y$ かつ $x \bar{R}(E_i) y$ とする。この時、$x f(R^N, E^N) y$ かつ $x R(E_i) y$ であり、$R' \in [f(R^N, E^N), R(E_i)]$ の定義より、$x R' y$ も成立するからである。
　$R' \in [f(R^N, E^N), R(E_i)]$ の定義より、$f(R^N, E^N) \cap R(E_i) \subset R'$ となる。また、$\bar{R}'$ の定義より、$\bar{f}(R^N, E^N) \cap \bar{R}(E_i) \subset \bar{R}'$ となる。よって、$\bar{R}' \in [\bar{f}(R^N, E^N), \bar{R}(E_i)]$ となる。
　$D(\bar{R}(E_i), \bar{R}') \subset D(\bar{f}(R^N, E^N), \bar{R}(E_i))$ を示す。
　任意の $(x, y) \in D(\bar{R}(E_i), \bar{R}')$ をとる。D の定義より、$(x, y) \in \bar{R}(E_i) \setminus \bar{R}'$ または、$(x, y) \in \bar{R}' \setminus \bar{R}(E_i)$ である。
　ここで、$(x, y) \in \bar{R}(E_i) \setminus \bar{R}'$ と仮定する。

$(x,y) \in \bar{R}(E_i)$ かつ $(x,y) \notin \bar{R}'$ であるから、$\bar{R}'$ の定義より、$(x,y) \notin \bar{f}(R^N, E^N)$ である。(なぜならば、$(x,y) \in \bar{f}(R^N, E^N)$ である場合、$\bar{R}'$ の定義から、$(x,y) \in \bar{R}'$ でなければばならないからである。)

よって、$(x,y) \in \bar{R}(E_i) \setminus \bar{f}(R^N, E^N) \subset D(\bar{R}(E_i), \bar{f}(R^N, E^N))$ となる。

$(x,y) \in \bar{R}' \setminus \bar{R}(E_i)$ と仮定する。仮定より、$(x,y) \in \bar{R}'$ かつ $(x,y) \notin \bar{R}(E_i)$ である。$(x,y) \notin \bar{f}(R^N, E^N)$ と仮定し、矛盾を導く。$\bar{R}(E_i)$ と $\bar{f}(R^N, E^N)$ は、完備性を満たしているため、仮定は、$(y,x) \in \bar{R}(E_i)$ かつ $(y,x) \in \bar{f}(R^N, E^N)$ であることを意味する。$\bar{R}'$ の定義より、$(y,x) \in \bar{R}'$ となり、これは、$(x,y) \in \bar{R}'$ であることと矛盾する。

よって、$(x,y) \in \bar{f}(R^N, E^N)$ となる。

これらより、$(x,y) \in \bar{f}(R^N, E^N) \setminus \bar{R}(E_i) \subset D(\bar{f}(R^N, E^N), \bar{R}(E_i))$ となる。

$D(\bar{R}(E_i), \bar{R}') \subset D(\bar{f}(R^N, E^N), \bar{R}(E_i))$ が示された。

$$
\begin{aligned}
&\delta(f(R^N, E^N), E_i) = \delta(\bar{f}(R^N, E^N), \bar{R}(E_i)) \geq \delta(\bar{R}(E_i), \bar{R}') \\
&\geq \min\left\{\delta(\bar{R}(E_i), \bar{R}''); \bar{R}'' \in \bar{\mathcal{R}}\right\} = \delta(E_i, R_i')
\end{aligned}
$$

これらと $\delta(R^{'}, f(R^N, E^N)) > 0$ より、以下式が成立する $R^N \in \mathcal{R}^N$, $E^N \in \mathcal{E}^N$, $R' \in \mathcal{R}$ が存在する。

$$\delta(E_i, f(R^N, E^N)) \geq \delta(E_i, R^{'}) \cdots \cdot (3.2)$$

つまり、

である。

(3.1) 式と (3.2) 式を片片足し合わせると、

$$\delta(R_i, f(R^N, E^N)) + \delta(E_i, f(R^N, E^N)) > \delta(R_i, R^{'}) + \delta(E_i, R^{'}) \cdots \cdot (3.3)$$

となる。

(3.3) 式は、任意の $i \in N$ について成立しているため

$$\sum_{i \in N} \delta(R_i, f(R^N, E^N)) + \sum_{i \in N} \delta(E_i, f(R^N, E^N)) > \sum_{i \in N} \delta(R_i, R^{'}) + \sum_{i \in N} \delta(E_i, R^{'}) \cdots \cdot (3.4)$$

となる。

一方、Kemeny ルールの定義より、任意の $i \in N$ と R' について、以下の式が成立している。

$$\sum_{i \in N} \delta(R_i, R^{'}) + \sum_{i \in N} \delta(E_i, R^{'}) > \sum_{i \in N} \delta(R_i, f(R^N, E^N)) + \sum_{i \in N} \delta(E_i, f(R^N, E^N)) \cdots \cdot (3.5)$$

(3.4) 式と、(3.5) 式は同時に成り立つことがなく、矛盾している。よって、f は弱効率性を満たす。

□

定理 2　拡張版 Kemeny ルール $f(R^N, E^N)$ は弱耐戦略性を満たす。

証明. f が弱耐戦略性を満たさないと仮定する。
つまり、ある $i \in N$, $R^N \in \mathcal{R}^N$, $E^N \in \mathcal{E}^N$, $R' \in \mathcal{R}$, $E' \in \mathcal{E}$ が存在し、$f(R_i', R_{-i}, E^N) \neq f(R^N, E^N)$ かつ $f(R_i', R_{-i}, E^N) \in [R_i, f(R^N, E^N)]$ が成り立つ。

ここで、拡張版 Kemeny ルールの定義から、以下の式が成立する。

$$f(R^N, E^N) = \arg\min_{R \in \mathcal{R}} \left(\sum_{i \in N} \delta(R, R_i) + \sum_{j \in N} \delta(R, E_i) \right) \Leftrightarrow$$

$$f(R^N, E^N) =$$
$$\left\{ R \in \mathcal{R} : \forall R' \in \mathcal{R}, \sum_{i \in N} \delta(R, R_i) + \sum_{j \in N} \delta(R, E_i) \leq \sum_{i \in N} \delta(R', R_i) + \sum_{j \in N} \delta(R', E_i) \right\} \Leftrightarrow$$

$$\forall R' \in \mathcal{R},$$
$$\sum_{i \in N} \delta(R_i, f(R^N, E^N)) + \sum_{j \in N} \delta(E_i, f(R^N, E^N)) \leq \sum_{i \in N} \delta(R_i, R') + \sum_{j \in N} \delta(E_i, R')$$

また、$f(R^N, E^N)$ の定義と、$f(R_i', R_{-i}, E^N) \in \mathcal{R}$ より、

$$\delta(f(R^N, E^N), R_i) + \sum_{k \in N \setminus \{i\}} \delta(f(R^N, E^N), R_k) + \sum_{j \in N} \delta(R, E_i)$$
$$\leq \delta(f(R_i', R_{-i}, E^N), R_i) + \sum_{k \in N \setminus \{i\}} \delta(f(R_i', R_{-i}, E^N), R_k) + \sum_{j \in N} \delta(R, E_i) \cdots\cdots (3.6)$$

となる。

補題 1. 任意の順序 T, T', T'' on X について、以下式が成立する。

$$\delta(T, T'') = \delta(T, T') + |(T \cap T') \cap D(T', T'')| - |D(T, T') \cap D(T', T'')| \cdots\cdots (3.7)$$

証明. 任意の順序 T, T', T'' on X を 1 つとる。
主張 1 より、以下の式が成立する。

$$D(T, T'') = [(T \cap T') \cap D(T', T'')] \cup [D(T, T') \cap (T' \cap T'')]$$

主張 2 より、$[(T \cap T') \cap D(T', T'')]$ と $[D(T, T') \cap (T' \cap T'')]$ は互いに素であるため、以下式が成立する。

$$\delta(T, T'') = |(T \cap T') \cap D(T', T'')| + |D(T, T') \cap (T' \cap T'')| \cdots\cdots (3.8)$$

ここで、主張 3 より、以下の式が成立する。

$$D(T, T') = [D(T, T') \cap (T' \cap T'')] \cup [D(T, T') \cap D(T', T'')]$$

$\delta(T, T')$ は、$|D(T, T')|$ であることと主張 4 を考慮すると、以下の式が成立する。

$$\delta(T, T') = |D(T, T')| = |D(T, T') \cap (T' \cap T'')| + |D(T, T') \cap D(T', T'')|$$

これを式変形すると、

$$|D(T,T')\cap(T'\cap T'')| = \delta(T,T') - |D(T,T')\cap D(T',T'')| \cdots\cdots (3.9)$$

とできる。(3.9) 式を (3.8) 式に代入すると、

$$\delta(T,T'') = \delta(T,T') + |(T\cap T')\cap D(T',T'')| - |D(T,T')\cap D(T',T'')|$$

となり、(3.7) 式が成立する。よって、補題 1 が成立する。

□

補題 1 の式の、$T = f(R^N, E^N), T' = R_i, T'' = R_i'$ とすると、(3.10) 式が成立する。

$$\delta(f(R^N,E^N),R_i') = \delta(f(R^N,E^N),R_i) + |(f(R^N,E^N)\cap R_i)\cap D(R_i,R_i')| -$$
$$|D(f(R^N,E^N),R_i)\cap D(R_i,R_i')| \cdots\cdots (3.10)$$

同様に、$T = f(R_i', R_{-i}, E^N), T' = R_i, T'' = R_i'$ とすると、(3.11) 式が成立する。

$$\delta(f(R_i',R_{-i},E^N),R_i') = \delta(f(R_i',R_{-i},E^N),R_i) + |(f(R_i',R_{-i},E^N)\cap R_i)\cap D(R_i,R_i')| -$$

$$|D(f(R_i',R_{-i},E^N),R_i)\cap D(R_i,R_i')| \cdots\cdots (3.11)$$

また、以下のように変形することもできる。

(3.10) 式 $\Leftrightarrow$
$\delta(f(R^N,E^N),R_i') - \delta(f(R^N,E^N),R_i) =$
$|(f(R^N,E^N)\cap R_i)\cap D(R_i,R_i')| - |D(f(R^N,E^N),R_i)\cap D(R_i,R_i')| \cdots\cdots (3.12)$
(3.11) 式 $\Leftrightarrow$
$\delta(f(R_i',R_{-i},E^N),R_i') - \delta(f(R_i',R_{-i},E^N),R_i) =$
$|(f(R_i',R_{-i},E^N)\cap R_i)\cap D(R_i,R_i')| - |D(f(R_i',R_{-i},E^N),R_i)\cap D(R_i,R_i')| \cdots\cdots (3.13)$

主張 1. 任意の順序 T, T', T'' on X について、以下式が成立する。

$$D(T,T'') = [(T\cap T')\cap D(T',T'')] \cup [D(T,T')\cap(T'\cap T'')]$$

証明. $D(T,T'') \subset [(T\cap T')\cap D(T',T'')] \cup [D(T,T')\cap(T'\cap T'')]$ を示す。
$(x,x') \in D(T,T'')$ となるような任意の $x, x' \in X$ をとる。
$(x,x') \in D(T,T'')$ より、

$$[(x,x')\in T\setminus T''] \vee [(x,x')\in T''\setminus T] \Leftrightarrow$$
$$[(x,x')\in T \wedge (x,x')\notin T''] \vee [(x,x')\in T'' \wedge (x,x')\notin T]$$

となる。
今回、どのランキングも X の全ての要素を用いてランキングを形成している。ここでは、任意の (x,x') のペアを考えており、T と T' において、そのペアが一致してい

るか、一致していないかの 2 ケースのため、以下のように分けて考える。
ケース 1:$(x,x') \in T \cap T'$ の場合 (一致している場合)
$(x,x') \in T \cap T'$ より、$(x,x') \notin T''$ であることを考慮すると、$(x,x') \in D(T',T'') \wedge (x,x') \notin T' \cap T''$ となる。
よって、$(x,x') \subset [(T \cap T') \cap D(T',T'')]$ となり、成立する。
ケース 2:$(x,x') \in D(T,T')$ の場合 (一致していない場合)
$(x,x') \in D(T,T')$ と $(x,x') \in D(T,T'')$ が同時に成り立つことを考慮すると、$(x,x') \in T' \cap T'' \wedge (x,x') \notin D(T',T'')$ となる。仮に、$(x,x') \in D(T,T')$ と $(x,x') \in D(T',T'')$ が成り立つとなると、$(x,x') \in D(T,T'')$ であることに矛盾するため。
よって、$(x,x') \subset [D(T,T') \cap (T' \cap T'')]$ となり、成立する。
$D(T,T'') \supset [(T \cap T') \cap D(T',T'')] \cup [D(T,T') \cap (T' \cap T'')]$ を示す。
$(x,x') \in [(T \cap T') \cap D(T',T'')] \cup [D(T,T') \cap (T' \cap T'')]$ となるような任意の $x,x' \in X$ をとる。
ケース 1:$(x,x') \in [(T \cap T') \cap D(T',T'')]$ の場合
$(x,x') \in [(T \cap T') \cap D(T',T'')]$ より、$(x,x') \in (f(R^N,E^N) \cap R_i) \wedge (x,x') \in D(R_i,R_i')$ となる。
さらに解体すると、$[(x,x') \in T \wedge (x,x') \in T'] \wedge [(x,x') \in T' \setminus T'' \vee (x,x') \in T'' \setminus T']$ となる。
さらに、整理すると、$(x,x') \in T \wedge (x,x') \in T' \wedge (x,x') \in T' \setminus T''$ となる。
$(x,x') \in T' \setminus T''$ は、$(x,x') \in T'' \wedge (x,x') \notin T''$ である。
まとめると、$(x,x') \in T \wedge (x,x') \notin T''$ が成立することから、$(x,x') \in T \setminus T'' \in D(T,T'')$ となる。
ケース 2:$(x,x') \in [D(T,T') \cap (T' \cap T'')]$ の場合
ケース 1 と同様に、$(x,x') \in [D(T,T') \cap (T' \cap T'')]$ であることから、$(x,x') \in D(T,T') \wedge (x,x') \in T' \cap T''$ となる。
これを、変形・整理していくと、$(x,x') \in T' \setminus T \wedge (x,x') \in T' \wedge (x,x') \in T''$ となる。
よって、$(x,x') \in T'' \wedge (x,x') \notin T$ が成立することから、$(x,x') \in T'' \setminus T \in D(T',T'')$ となる。
Step1 と Step2 より、$D(T,T'') = [(T \cap T') \cap D(T',T'')] \cup [D(T,T') \cap (T' \cap T'')]$ が成立する。 □

主張 2. 任意の順序 T,T',T'' on X について、以下式が成立する。

$$[(T \cap T') \cap D(T',T'')] \cup [D(T,T') \cap (T' \cap T'')] = \emptyset$$

証明. $[(T \cap T') \cap D(T',T'')] \cap [D(T,T') \cap (T' \cap T'')] \subset \emptyset$ を示す。
$(x,x') \in [(T \cap T') \cap D(T',T'')] \cap [D(T,T') \cap (T' \cap T'')]$ となるような、任意の $x,x' \in X$ をとる。
条件を解体すると、$(x,x') \in (T \cap T') \wedge (x,x') \in D(T',T'') \wedge (x,x') \in D(T,T') \wedge (x,x') \in T' \wedge (x,x') \in T''$ となる。
重複部分を除き、さらに整理すると、$(x,x') \in T \wedge (x,x') \in T' \wedge (x,x') \in T'' \wedge [(x,x') \in T' \setminus T'' \vee (x,x') \in T'' \setminus T'] \wedge [(x,x') \in T \setminus T' \vee (x,x') \in T' \setminus T]$ となる。
$[(x,x') \in T' \setminus T'' \vee (x,x') \in T'' \setminus T']$ 部分と $[(x,x') \in T \setminus T' \vee (x,x') \in T' \setminus T]$ に注目すると、どちらの条件も $(x,x') \in T \wedge (x,x') \in T' \wedge (x,x') \in T''$ と同時に成立することはない。
したがって、$(x,x') \in [(T \cap T') \cap D(T',T'')] \cap [D(T,T') \cap (T' \cap T'')]$ は存在せず、

$(x,x') \in \emptyset$ となる。
$[(T \cap T') \cap D(T',T'')] \cap [D(T,T') \cap (T' \cap T'')] \supset \emptyset$ を示す。
$(x,x') \in \emptyset$ となるような、任意の $x,x' \in X$ をとる。
$\emptyset$ の定義より、$(x,x') \in \emptyset$ は成立しない。
よって、常に、$(x,x') \in \emptyset \Rightarrow (x,x') \in [(T \cap T') \cap D(T',T'')] \cap [D(T,T') \cap (T' \cap T'')]$ となる。
それゆえ、$\emptyset \subset [(T \cap T') \cap D(T',T'')] \cap [D(T,T') \cap (T' \cap T'')]$ が成立する。
Step1 と Step2 より、$[(T \cap T') \cap D(T',T'')] \cap [D(T,T') \cap (T' \cap T'')] = \emptyset$ が成立する。 □

主張 3. 任意の順序 T,T',T'' on X について、以下式が成立する。

$$D(T,T') = [D(T,T') \cap (T' \cap T'')] \cup [D(T,T') \cap D(T',T'')] \Leftrightarrow$$
$$D(T,T') = D(T,T') \cap [(T' \cap T'') \cup D(T',T'')]$$

なお、同値変形できるのは、任意の (x,x') は R_i と R_i' において、一致しているか、一致していないかのどちらかしか存在しないため。

証明. $D(T,T') \subset [D(T,T') \cap (T' \cap T'')] \cup [D(T,T') \cap D(T',T'')]$ を示す。
$(x,x') \in D(T,T')$ となるような任意の $x,x' \in X$ をとる。
$(x,x') \in D(T,T')$ より、$(x,x') \in T \setminus T' \vee (x,x') \in T' \setminus T$ となる。
ケース 1:$(x,x') \in T' \cap T''$ の場合
$(x,x') \in T' \cap T''$ と、$(x,x') \in D(T,T')$ より、$(x,x') \in [D(T,T') \cap (T' \cap T'')] \in [D(T,T') \cap (T' \cap T'')] \cup [D(T,T') \cap D(T',T'')]$ となり、成立する。
ケース 2:$(x,x') \in D(T',T'')$ の場合
$(x,x') \in D(T',T'')$ と、$(x,x') \in D(T,T')$ より、$(x,x') \in [D(T,T') \cap D(T',T'')] \in [D(T,T') \cap D(T',T'')] \cup [D(T,T') \cap D(T',T'')]$ となり、成立する。
$D(T,T') \supset [D(T,T') \cap (T' \cap T'')] \cup [D(T,T') \cap D(T',T'')]$ を示す。
$(x,x') \in [D(T,T') \cap (T' \cap T'')] \cup [D(T,T') \cap D(T',T'')]$ となるような任意の $x,x' \in X$ をとる。
$[D(T,T') \cap (T' \cap T'')] \cup [D(T,T') \cap D(T',T'')] \Leftrightarrow D(T,T') \cap [(T' \cap T'') \cup D(T',T'')]$ である。
よって、$(x,x') \in D(T,T') \cap [(T' \cap T'') \cup D(T',T'')] \in D(T,T')$ となり、成立する。
Step1 と Step2 より、$D(T,T') = [D(T,T') \cap (T' \cap T'')] \cup [D(T,T') \cap D(T',T'')]$ が成立する。 □

主張 4. 任意の順序 T,T',T'' on X について、以下式が成立する。

$$[D(T,T') \cap (T' \cap T'')] \cup [D(T,T') \cap D(T',T'')] = \emptyset$$

証明. $[D(T,T') \cap (T' \cap T'')] \cap [D(T,T') \cap D(T',T'')] \subset \emptyset$ を示す。
$(x,x') \in [D(T,T') \cap (T' \cap T'')] \cap [D(T,T') \cap D(T',T'')]$ となるような、任意の $x,x' \in X$ をとる。
式を解体すると、$[(x,x') \in [T \setminus T'] \vee (x,x') \in [T' \setminus T]] \wedge (x,x') \in (T' \cap T'') \wedge [(x,x') \in [T' \setminus T''] \vee (x,x') \in [T'' \setminus T']]$ となる。
ケース 1:$(x,x') \in [T \setminus T']$ の場合

$(x,x') \in [T \setminus T']$ の場合、$(x,x') \in [T'' \setminus T']$ を選ぶ必要があるが、$(x,x') \in (T' \cap T'')$ であることから、$(x,x') \in \emptyset$ となる。
ケース 2:$(x,x') \in [T' \setminus T]$ の場合
$(x,x') \in [T' \setminus T]$ の場合、$(x,x') \in [T' \setminus T'']$ を選択するが、$(x,x') \in (T' \cap T'')$ であることから、$(x,x') \in \emptyset$ となる。
$[D(T,T') \cap (T' \cap T'')] \cap [D(T,T') \cap D(T',T'')] \supset \emptyset$ を示す。
$(x,x') \in \emptyset$ となるような、任意の $x,x' \in X$ をとる。
$\emptyset$ の定義より、$(x,x') \in \emptyset$ は成立しない。
よって、常に、$(x,x') \in \emptyset \Rightarrow (x,x') \in [D(T,T') \cap (T' \cap T'')] \cap [D(T,T') \cap D(T',T'')]$ となる。
それゆえ、$\emptyset \subset [D(T,T') \cap (T' \cap T'')] \cap [D(T,T') \cap D(T',T'')]$ が成立する。
Step1 と Step2 より、$[D(T,T') \cap (T' \cap T'')] \cap [D(T,T') \cap D(T',T'')] = \emptyset$ が成立する。 $\square$

$f(R_i', R_{-i}, E^N) \neq f(R^N, E^N)$ かつ $f(R_i', R_{-i}, E^N) \in [R_i, f(R^N, E^N)]$ となるような $i \in N$ を1つ固定する。

R_i と R_i' における"間"(betweenness) の定義と、$f(R_i', R_{-i}, E^N) \neq f(R^N, E^N)$ より、以下の式が成立する。Kemeny 距離が短いほど、一致部分が多く、不一致部分が少なくなるため。

$$\delta(R_i, f(R^N, E^N)) =$$
$$\delta(R_i, f(R_i', R_{-i}, E^N)) + \delta(f(R_i', R_{-i}, E^N), f(R^N, E^N)) > \delta(R_i, f(R_i', R_{-i}, E^N)) \Leftrightarrow$$
$$(f(R^N, E^N) \cap R_i) \subset (f(R_i', R_{-i}, E^N) \cap R_i) \wedge D(f(R_i', R_{-i}, E^N), R_i) \subset D(f(R^N, E^N), R_i)$$

上記関係より、(3.12)、(3.13) 式の右辺同士の関係は、

$$\begin{aligned} &|(f(R^N, E^N) \cap R_i) \cap D(R_i, R_i')| - |D(f(R^N, E^N), R_i) \cap D(R_i, R_i')| \\ &\leq |(f(R_i', R_{-i}, E^N) \cap R_i) \cap D(R_i, R_i')| - |D(f(R_i', R_{-i}, E^N), R_i) \cap D(R_i, R_i')| \end{aligned}$$

となる。

よって、これらと、(3.12)、(3.13) 式から、

$$\begin{aligned} \delta(f(R^N, E^N), R_i') - \delta(f(R^N, E^N), R_i) \leq \\ \delta(f(R_i', R_{-i}, E^N), R_i') - \delta(f(R_i', R_{-i}, E^N), R_i) \cdots\cdot(3.14) \end{aligned}$$

となる。

より、(3.6) 式と (3.14) 式を片片足し合わせると、

$$\begin{aligned} &\delta(f(R^N, E^N), R_i') + \sum_{k \in N \setminus \{i\}} \delta(f(R^N, E^N), R_k) + \sum_{j \in N} \delta(R, E_i) \\ &\leq \delta(f(R_i', R_{-i}, E^N), R_i') + \sum_{k \in N \setminus \{i\}} \delta(f(R_i', R_{-i}, E^N), R_k) + \sum_{j \in N} \delta(R, E_i) \cdots\cdot(3.14) \end{aligned}$$

となる。すなわち、$f(R^N, E^N) \gtrsim f(R_i', R_{-i}, E^N)$ である。

$f(R'_i, R_{-i}, E^N)$ の定義から、

$$\delta(f(R^N, E^N), R'_i) + \sum_{k \in N \setminus \{i\}} \delta(f(R^N, E^N), R_k) + \sum_{j \in N} \delta(R, E_i)$$
$$\geq \delta(f(R'_i, R_{-i}, E^N), R'_i) + \sum_{k \in N \setminus \{i\}} \delta(f(R'_i, R_{-i}, E^N), R_k) + \sum_{j \in N} \delta(R, E_i)$$

である。すなわち、$f(R'_i, R_{-i}, E^N) \gtrsim f(R^N, E^N)$ である。

よって、$f(R^N, E^N) \gtrsim f(R'_i, R_{-i}, E^N) \wedge f(R'_i, R_{-i}, E^N) \gtrsim f(R^N, E^N)$ である。
これは、仮定から、$f(R'_i, R_{-i}, E^N) \neq f(R^N, E^N)$ であるため成立しない。よって、f は弱耐戦略性を満たす。

□

3.4 結果と考察

本章では、ケアワーカーの被介護者に対する主観的な選好と被介護者との客観的なレイティングを集約するためのルールを提案した。このルールの最大の強みは、ケアワーカーの主観的選好と客観的フィット度を巧みに統合している点にある。主観的選好を考慮することで、ケアワーカーの職務満足度とモチベーションが高まり、結果としてサービスの質が向上する可能性がある。同時に、スキルや経験に基づく客観的フィット度を評価することで、安全で効果的な介護サービスの提供が可能になる。このバランスの取れたアプローチにより、単なるスキルベースのマッチングや純粋に個人的選好に基づくマッチングよりも、現実的で包括的なマッチングが実現する可能性を秘めている。

提案したルールが、弱効率性と弱耐戦略性を満たすことを示した。まず、弱耐戦略性の証明により、参加者が自身の真の選好を正直に報告することが最善の戦略となることが保証される。次に、弱効率性の証明は、生成されるマッチングがパレート効率的であることを示している。これは、限られた資源の最適配分を確保する上で重要であり、社会全体の福祉を最大化する可能性がある。

次の章では、提案したメカニズムを用いて、ケアワーカーの被介護者に対する主観的な選好と被介護者との客観的なレイティングを集約することで、ケアワーカーと被介護者とのマッチングを実施する。

4 Kemeny ルールを用いたマッチングプロセスの具体例

4.1 (被介護者側)DA アルゴリズムに関する記法

ケアワーカーと被介護者とのマッチングを実施するにあたり必要となる DA アルゴリズムについて、本章ではそれに必要となる記法を記述する。記法に関して、坂井 (2010) を参考にした。

ケアワーカーと被介護者とのマッチングメカニズムにおいて、ケアワーカー i と被介護者 x がマッチングをし、その結果成立したペア (i, x) のことを配分という。次に n 人のケアワーカーを m 人の被介護者に割り当てる問題を考える。それぞれのケアワーカーを $i = 1, ..., n$ により、被介護者を $x = x_1, ..., x_m$ により表す。ケアワーカーは被介護者に対して、被介護者はケアワーカーに対して選好 $\gtrsim_i$ を持っている。記号 $\emptyset$ は「無所属」ないし「拒否」を表す。

例えば $n=6$ かつ $m=3$ として、

$$\succsim_1 = 79\emptyset 8$$
$$\succsim_7 = 31256\emptyset 4$$

であるとする。

上記はケアワーカー1と被介護者7の好きなケアワーカーまたは被介護者のランキング、つまり選好を表している。左になるほど好き、という意味でケアワーカー1は被介護者7・被介護者9・$\emptyset$・被介護者8の順で好きであることを表す。つまりケアワーカー1にとっては「被介護者8とマッチングするくらいなら退職をする」ことを意味し、被介護者7にとっては「ケアワーカー4とマッチングするくらいなら他業者に変更する」状態であると解釈される。

またケアワーカーと被介護者の選好の組を

$$\succsim = (\succsim_1, ..., \succsim_n, \succsim_{n+1}, ..., \succsim_{n+m})$$

で表す。3章で集約の結果、出力されたランキングを、ここでは、選好とみなしている。各ケアワーカーはキャパシティー C_i(被介護者数) を持っている。C_i は1以上の整数であり、ケアワーカー i は C_i 人まで被介護者をマッチングすることができる。

- 被介護者 x のマッチング先を $\mu(x)$ で表す。ただし、このマッチング先 $\mu(x)$ はケアワーカー i のどれかであるか、無所属を意味する $\emptyset$ であるものとする。つまり $\mu(x)=\emptyset$ のとき、被介護者 x はどのケアワーカーにもマッチングをしない。

- 記号 $|\mu(i)|$ により、ケアワーカー i にマッチングをした被介護者の数を表し、これはキャパシティー制約 $0 \leq |\mu(i)| \leq C_i$ を満たすものとする。$|\mu(i)| = \emptyset$ であれば、ケアワーカー i にはどの被介護者もマッチングをしていないことを表す。

上記二つの条件を満たす、各被介護者 x にケアワーカー $\mu(x)$ を割り当てる関数 μ のことをマッチングという。さらに一般的なマッチングメカニズムならば満たすべきと考えられる性質に個人合理性と安定性というものがある。

個人合理性とは、何人たりとも無所属を意味する $\emptyset$ よりも嫌な相手とマッチングすることを防止する性質のことである。

個人合理性　マッチング μ が選好 $\succsim$ のもとで個人合理的であるとは、すべてのケアワーカー i、被介護者 x について、$\mu(x) \succ_x \emptyset$ かつ $\mu(i) \succ_i \emptyset$ が成り立つことである。

また、安定性という性質を Gale and Shapley (1962) は「安定した配分とは、すべての申請者がその配分の下でも、他の安定した割り当ての下でも、少なくとも同じぐらい裕福である場合に最適な割り当てと呼ばれる」と述べている。この性質について説明する前に、ブロックという概念について記述する。いまマッチング μ のもとでケアワーカーと被介護者の組み合わせ (i,x) について、$x \succ_i \mu(i)$ かつ $i \succ_x \mu(x)$ が成り立つものとする。

これはケアワーカー i が「x を現在のマッチング結果である $\mu(i)$ より好きで」あり、被介護者 x が「i を現在のマッチング結果である $\mu(x)$ より好き」であることを意味する。この場合、i,x はマッチング μ に従わず 被介護者 x が ケアワーカー i に勝手に提案を行い、ケアワーカー i が 被介護者 x に対して勝手にマッチングを行うことが考えられる。このとき $\succsim$ のもとで (i,x) は μ をブロックするという。以上を踏まえてマッチング μ が $\succsim$ のもとで安定的であるとは、以下の 2 条件が $\succsim$ のもとで成り立つことである。

安定性

1. μ が個人合理的である

2. どのような (i,x) によっても μ はブロックされない

「2.2.2 マッチングメカニズムに関する研究」で説明した、DA アルゴリズムは、安定性を満たしている。次章では、本章で述べた記法や条件を用いて、マッチングプロセスの記述を行う。

4.2 拡張された Kemeny ルールを取り入れたマッチングプロセス

4.2.1 マッチングに用いる情報

3 章では、主観的な選好と客観的なフィット度は既に与えられているものとして、集約を行った。ここでは、具体的にどのような情報を用いて、フィット度が算出されるのかを記述する。フィット度は、以下の例のような客観的に測定可能な情報を用いて算出される。例えば、性格、趣味・興味、価値観、コミュニケーション能力、専門知識・スキル、健康状態、経験年数などが考えられる。これらの情報を用いて、ケアワーカーと被介護者とのフィット度を算出する。
例：

項目	ケアワーカー	被介護者	評価基準
性格	内向的/外向的、穏やか/活発など	内向的/外向的、穏やか/活発など	相互の性格のバランス
趣味・興味	読書、音楽、スポーツなど	読書、音楽、会話など	共通の趣味・興味の有無
価値観	働き方、人生観、家族観など	生活スタイル、介護に対する考え方など	価値観の一致度
コミュニケーション能力	話し方、聞き方、共感力など	話し方、聞き方、理解力など	円滑なコミュニケーションの可否
専門知識・スキル	介護技術、医療知識など	介護サービスに対するニーズなど	専門知識・スキルのマッチング
健康状態	体力、精神状態など	健康状態、介護度など	身体的な負担の軽減
経験年数	介護経験年数	介護サービス利用期間など	経験に基づく信頼関係の構築

主観的な選好は、ケアワーカーと被介護者それぞれに、相手に対する好みや希望を表明してもらう。この際、被介護者は全員が選好を表明できるとは限らないため、その家族などが選好を表明したもので代用する。今回は、対象となるマッチング相手全員に対して、選好を表明することができると仮定している。

4.2.2 ランキングの生成

4.2.1 で記述した、情報から生成される客観的なフィット度と被介護者・ケアワーカーがそれぞれ持つ主観的な選好を用いて、ランキングを生成する。今回は、3.4 での数値例を用いる。

ここでは、具体例を用いて、3.1 で定義したメカニズムについて考える。具体例として、被介護者のケアワーカーに対する選好とケアワーカーとのフィット度を以下のように設定する。ここでは、被介護者 6、ケアワーカーを 1,2,3 の 3 人として考える。選好は、左に行くほど好きであることを示す。フィット度は、数値が大きいほどフィット度が高いことを示す。

$$\succsim_6 = 321$$
$$E_6(1) = 4, E_6(2) = 5, E_6(3) = 1$$

この場合、被介護者 6 は 3 が一番好ましく、次に 2、最後に 1 であるという選好を持っている。また、$E(1)$ は、被介護者 6 とケアワーカー 1 とのフィット度が 4 であることを示す。ここでは、ケアワーカー 2 とのフィット度が 5 で一番高く、次にケ

アワーカー 1 のフィット度が 4 で次に高く、最後にケアワーカー 3 とのフィット度が 1 で一番低いことを示している。

これらを踏まえて、“被介護者の選好”、“ケアワーカーとのフィット度”と“ケアワーカー 3 人で構成しうるすべての選好”との Kemeny 距離は、以下の表のようになる。

	$\gtrsim_6 = 321$	$E_6 = (E_6(1), E_6(2), E_6(3)) = (4, 5, 1)$	合計
312	1	4	5
321	0	5	5
132	2	3	5
123	3	0	3
231	1	4	5
213	2	1	3

$\gtrsim_6 = 321$ と“ケアワーカー 3 人で構成しうるすべての選好”との Kemeny 距離の計算方法は、「2.2.1 集約メカニズムに関する研究」における Kemeny ルールに記述の通りである。

計算し、合計を見ると、123、213 が最小であるため、ケアワーカーの選好と被介護者とのフィット度を集約するためのメカニズムは、$K(R^N, E^N) = 123, 213$ となる。同率となる場合は、主観的な選好を優先して選択することとする。主観的な選好を優先するのにはいくつかの理由がある。まず、現状、現場で行われているマッチングでは、当事者同士の選好を反映させられておらず、それに伴うミスマッチなどが発生しているからである。また、主観的な選好を優先することで、ケアワーカーのモチベーション向上や職務満足度の向上に繋がると考えられる。今回、同率となっているので、拡張版 Kemeny ルール $f(R^N, E^N)$ で集約される選好は、213 となる。

ここで選ばれた 213 は、フィット度間の特に差が大きい場所 (今回は、2 と 3 の差が大きいため、2 と 4 の順序は維持する。) を考慮して、選好を集約することができていることがわかる。また、それに加えて、主観的な選好である 321 の 21 は維持されており、主観的な選好を組み込むことに成功している。

なお、ここでは、$\gtrsim_6$ の生成のみ行なっているが、ケアワーカー・被介護者全員について同様の手順を行い、全体のランキングを生成する。

4.2.3 マッチングの生成

ケアワーカーと被介護者それぞれについて、4.2.2 で生成されたランキングを用いて、DA アルゴリズムを適応する。具体的に、ここでは、ケアワーカー $N = 3$、被介護者 $X = 4$ として、ケアワーカーと被介護者がそれぞれ持つランキングを以下のように設定する。また、ケアワーカーが受け持つことができる被介護者の数は、$C_1 = 1, C_2 = 1, C_3 = 2$ とする。

$$\gtrsim_1 = 745\emptyset 6$$
$$\gtrsim_2 = 476\emptyset 5$$
$$\gtrsim_3 = 5467\emptyset$$
$$\gtrsim_4 = 123\emptyset$$
$$\gtrsim_5 = 3\emptyset 12$$
$$\gtrsim_6 = 213\emptyset$$
$$\gtrsim_7 = 12\emptyset 3$$

これを以下のステップで、DA アルゴリズムに適応する。

ステップ 1　被介護者 4, 5, 6, 7 がそれぞれの第一希望に提案する。具体的には、被介護者 4 はケアワーカー 1、被介護者 5 はケアワーカー 3、被介護者 6 はケアワーカー 2、被介護者 7 はケアワーカー 1 に提案する。その結果、被介護者 4 はケアワーカー 1 から拒否され、それ以外は仮受け入れされる。

$$
\begin{aligned}
&\text{被介護者 4} \rightarrow \text{ケアワーカー 1}\\
&\text{被介護者 5} \rightarrow \text{ケアワーカー 3}\\
&\text{被介護者 6} \rightarrow \text{ケアワーカー 2}\\
&\text{被介護者 7} \rightarrow \text{ケアワーカー 1}
\end{aligned}
$$

結果:

$$
\begin{aligned}
&\text{ケアワーカー 1: } 7\\
&\text{ケアワーカー 2: } 6\\
&\text{ケアワーカー 3: } 5
\end{aligned}
$$

ステップ 2　拒否された被介護者 4 は、次の希望であるケアワーカー 2 に提案する。ケアワーカー 2 にとって、被介護者 4 は今仮受け入れしている被介護者 6 よりも良い提案なので、被介護者 4 を仮受け入れし、被介護者 6 を拒否する。

$$\text{被介護者 4} \rightarrow \text{ケアワーカー 2}$$

結果:

$$
\begin{aligned}
&\text{ケアワーカー 1: } 7\\
&\text{ケアワーカー 2: } 4\\
&\text{ケアワーカー 3: } 5
\end{aligned}
$$

ステップ 3　拒否された被介護者 6 は、次の希望であるケアワーカー 1 に提案する。被介護者 6 は、ケアワーカー 1 にとって、マッチングしない $\emptyset$ よりも嫌なので、拒否される。

$$\text{被介護者 6} \rightarrow \text{ケアワーカー 1}$$

結果:

$$
\begin{aligned}
&\text{ケアワーカー 1: } 7\\
&\text{ケアワーカー 2: } 4\\
&\text{ケアワーカー 3: } 5
\end{aligned}
$$

ステップ 3　拒否された被介護者 6 は、次の希望であるケアワーカー 3 に提案する。ケアワーカー 3 は、受け入れ可能な被介護者数が 2 人であることと、マッチングしない $\emptyset$ より被介護者 6 とマッチするほうが好ましいので、被介護者 6 を受け入れる。

$$\text{被介護者 6} \rightarrow \text{ケアワーカー 3}$$

結果:

$$\text{ケアワーカー 1: } 7 \qquad \text{ケアワーカー 2: } 4\text{ケアワーカー 3: } 5, 6$$

ステップ 4　すべての被介護者がマッチングされたため、アルゴリズムは終了する。

最終的なマッチング　ケアワーカー 1 と被介護者 7、ケアワーカー 2 と被介護者 4、ケアワーカー 3 と被介護者 5, 6 のマッチングが成立した。

$$\text{ケアワーカー 1: } 7$$
$$\text{ケアワーカー 2: } 4$$
$$\text{ケアワーカー 3: } 5, 6$$

4.3　DA アルゴリズムと他のアルゴリズムとの比較

ここでは、被介護者とケアワーカーのマッチング問題において、DA（Deferred Acceptance）アルゴリズムがシリアル・ディクテータシップおよびボストンメカニズムと比較して優れていることを具体的な数値例を用いて示す。具体的に、ここでは、ケアワーカー $n = 3$、被介護者 $m = 3$ として、ケアワーカーと被介護者がそれぞれ持つランキングを以下のように設定する。また、ケアワーカーが受け持つことができる被介護者の数は、$C_1 = 1, C_2 = 1, C_3 = 1$ とする。

$$\gtrsim 1 = 546$$
$$\gtrsim 2 = 654$$
$$\gtrsim 3 = 456$$
$$\gtrsim 4 = 123$$
$$\gtrsim 5 = 213$$
$$\gtrsim 6 = 123$$

4.3.1　DA アルゴリズム (被介護者側)

ステップ 1: 各被介護者は第一希望のケアワーカーに提案する。ケアワーカー 1 は、被介護者 4 と 6 で比較し、優先順位が高い、被介護者 4 を仮受け入れし、被介護者 6 を拒否する。ケアワーカー 2 は、被介護者 5 を仮受け入れする。

$$\text{被介護者 } 4 \rightarrow \text{ケアワーカー } 1$$
$$\text{被介護者 } 5 \rightarrow \text{ケアワーカー } 2$$
$$\text{被介護者 } 6 \rightarrow \text{ケアワーカー } 1$$

ステップ 2: 拒否された被介護者 6 は第二希望のケアワーカー 2 に提案する。ケアワーカー 2 は既存の仮受け入れ者 5 と新たな被介護者 6 を比較し、優先順位の高い被介護者 6 を仮受け入れ、被介護者 5 を拒否する。

$$\text{被介護者 } 6 \rightarrow \text{ケアワーカー } 2$$

ステップ 3: 拒否された被介護者 5 は第二希望のケアワーカー 1 に提案する。ケアワーカー 1 は既存の仮受け入れ者 4 と新たな被介護者 5 を比較し、優先順位の高い被介

護者 5 を仮受け入れ、被介護者 4 を拒否する。

$$\text{被介護者 } 5 \rightarrow \text{ ケアワーカー } 1$$

ステップ 4: 拒否された被介護者 4 は第三希望のケアワーカー 3 に提案する。ケアワーカー 3 は被介護者 4 を仮受け入れする。

$$\text{被介護者 } 4 \rightarrow \text{ ケアワーカー } 3$$

最終的なマッチング: 被介護者 4 とケアワーカー 3、被介護者 5 とケアワーカー 1、被介護者 6 とケアワーカー 2 のマッチングが成立した。

$$\text{被介護者 } 4 \leftrightarrow \text{ ケアワーカー } 3$$
$$\text{被介護者 } 5 \leftrightarrow \text{ ケアワーカー } 1$$
$$\text{被介護者 } 6 \leftrightarrow \text{ ケアワーカー } 2$$

4.3.2 シリアル・ディクテータシップ

ステップ 1: 被介護者は、6,5,4 の順で入所してきたと仮定し、その順でそれぞれの第一希望のケアワーカーに提案する。ケアワーカー 1 は、被介護者 6 を受け入れ、被介護者 4 を拒否する。ケアワーカー 2 は、被介護者 5 を受け入れる。

$$\text{被介護者 } 4 \rightarrow \text{ ケアワーカー } 1$$
$$\text{被介護者 } 5 \rightarrow \text{ ケアワーカー } 2$$
$$\text{被介護者 } 6 \rightarrow \text{ ケアワーカー } 1$$

ステップ 2: 被介護者 4 は、第二希望のケアワーカー 2 に提案する。ケアワーカー 2 は、既に定員が埋まっているため、4 を拒否する。

$$\text{被介護者 } 4 \rightarrow \text{ ケアワーカー } 2$$

ステップ 3: 被介護者 4 は、第三希望のケアワーカー 3 に提案する。ケアワーカー 3 は被介護者 4 を受け入れる。

$$\text{被介護者 } 4 \rightarrow \text{ ケアワーカー } 3$$

最終的なマッチング: 被介護者 4 とケアワーカー 3、被介護者 5 とケアワーカー 2、被介護者 6 とケアワーカー 1 のマッチングが成立した。

$$\text{被介護者 } 4 \leftrightarrow \text{ ケアワーカー } 3$$
$$\text{被介護者 } 5 \leftrightarrow \text{ ケアワーカー } 2$$
$$\text{被介護者 } 6 \leftrightarrow \text{ ケアワーカー } 1$$

4.3.3 ボストンメカニズム

ステップ 1: 各被介護者は第一希望のケアワーカーに提案する。ケアワーカー 1 は、被介護者 4 を受け入れ、被介護者 6 を拒否する。ケアワーカー 2 は、被介護者 5 を受け入れる。

$$\text{被介護者}\,4 \to \text{ケアワーカー}\,1$$
$$\text{被介護者}\,5 \to \text{ケアワーカー}\,2$$
$$\text{被介護者}\,6 \to \text{ケアワーカー}\,1$$

ステップ 2: 拒否された被介護者 6 は第二希望のケアワーカー 2 に提案する。ケアワーカー 2 は既に定員が埋まっているため、6 を拒否する。

$$\text{被介護者}\,6 \to \text{ケアワーカー}\,2$$

ステップ 3: 被介護者 6 は第三希望のケアワーカー 3 に提案する。ケアワーカー 3 は被介護者 6 を受け入れる。

$$\text{被介護者}\,6 \to \text{ケアワーカー}\,3$$

最終的なマッチング: 被介護者 4 とケアワーカー 1、被介護者 5 とケアワーカー 2、被介護者 6 とケアワーカー 3 のマッチングが成立した。

$$\text{被介護者}\,4 \leftrightarrow \text{ケアワーカー}\,1$$
$$\text{被介護者}\,5 \leftrightarrow \text{ケアワーカー}\,2$$
$$\text{被介護者}\,6 \leftrightarrow \text{ケアワーカー}\,3$$

4.3.4 マッチング結果の比較と分析

結果をまとめると以下のようになる。今回の例では、3 つ全てのメカニズムについて異なる結果を生成している。ここでは、安定性の観点と、耐戦略性について考察する。

被介護者	DA アルゴリズム	シリアル・ディクテータシップ	ボストンメカニズム
4	3	3	1
5	1	2	2
6	2	1	3

他のアルゴリズムと比較した際の、安定性における DA アルゴリズムの優位性

DA アルゴリズムでは、どの被介護者も、自身のマッチング先よりも好ましいケアワーカーで、自身がそのケアワーカーの既存のマッチングされた被介護者よりも高い優先順位を持つ組み合わせは存在しない。一方、シリアル・ディクテータシップでは、ブロッキングペアが存在する。例えば、シリアル・ディクテータシップでは、被介護者 4 は自身のマッチング先であるケアワーカー 3 よりもケアワーカー 1 を好み、かつケアワーカー 1 での優先順位は被介護者 6 よりも被介護者 4 の方が高い。よって、$(4, 1)$ はブロッキングペアとなる。

他のアルゴリズムと比較した際の、耐戦略性における DA アルゴリズムの優位性

DA アルゴリズムでは、被介護者にとって戦略的に自身の選好を偽るインセンティブがない。真の選好を報告することが最善である。一方、ボストンメカニズムでは、被介護者は自身の選好を偽ることで、より好ましい結果を得ることが可能である。例えば、被介護者 6 は自身の選好を偽ってケアワーカー 2 を第一希望と報告することで、ケアワーカー 2 にマッチングされる。

4.4　結果と考察

DA アルゴリズムは、安定性を達成できる点が最大の強みである。一方で、シリアル・ディクテータシップは、安定性を保証しないため、安定性を重視する場合には不適切である。ボストンメカニズムは、受け入れ保留ではないため耐戦略性という観点から弱い。これらの理論的特性により、DA アルゴリズムは多くのマッチング問題、特に参加者の選好が重要な役割を果たす状況において、最適なアルゴリズムの選択肢となる。本研究においても、その特性から DA アルゴリズムを採用することで、安定的で、福祉資源の効率的な配分という観点から優れた結果を得ることができると考えられる。

5　他の問題への応用

介護分野で開発された「ケアワーカーと被介護者との客観的なフィット度とケアワーカーの被介護者に対する主観的な選好を一つのランキングに集約するルール」は、他の多くの分野でも適用可能な潜在力を秘めている。このルールの核心は、Kemeny ルールを改良し、ランキングだけでなくレイティングとランキングを同時に集約できるようにした点にある。さらに、この改良されたルールが弱耐戦略性と弱効率性を満たし、レイティングの値同士の差を反映できる点も、他分野への応用可能性を高めている。

人事・採用分野では、このメカニズムの適用により、より公平で効果的な採用プロセスを構築できる可能性がある。具体的には、以下のような活用方法が考えられる。採用の最終選考段階では、より複雑な評価基準を統合する必要がある。技術面接のスコア、適性検査の結果、チームワークの評価など、複数の客観的指標（レイティング）と、文化適合性や将来性などの主観的評価（ランキング）を一つの評価に統合できる。このメカニズムにより、多面的な評価を行いつつ、一貫性のある最終決定を下すことが可能になる。さらに、このメカニズムは内部昇進や人材配置の決定にも活用できる。従業員の業績評価（レイティング）と、リーダーシップポテンシャルや特定のプロジェクトへの適性（ランキング）を統合することで、最適な人材配置や昇進決定を行うことができる。このメカニズムの弱耐戦略性は、採用プロセスの公平性を高めるのに役立つ。面接官や評価者が個人的なバイアスや利害関係に基づいて評価を歪める動機が減少し、より客観的な評価が促進される。また、弱効率性により、採用チーム全体の意見が適切に反映された決定が可能になる。

教育分野では、このメカニズムを用いることで、より包括的で公平な学生評価システムを構築できる。特に、以下のような場面での活用が考えられる。まず、総合的な学業成績の評価において、このメカニズムは有効である。例えば、高校の成績評価では、各科目の試験点数（レイティング）と、課外活動やリーダーシップなど

の非学術的な成果（ランキング）を統合して、生徒の総合的な評価を行うことができる。これにより、学術的能力だけでなく、個人の成長や潜在能力も含めた多面的な評価が可能になる。また、芸術や音楽などの創造的分野の評価にも、このメカニズムは特に有効である。例えば、音楽コンクールにおいて、技術的な正確さや難易度（レイティング）と、表現力や独創性（ランキング）を統合して評価することができる。これにより、技術と芸術性のバランスが取れた評価が可能になる。

以上のように、介護分野で開発されたこのメカニズムは、人事・採用、教育など、様々な分野で応用可能である。客観的な数値データと主観的な選好を統合する必要がある様々な状況で、このメカニズムは公平で効率的な意思決定を支援する強力なツールとなる。

6　まとめ・考察

本研究は、高齢化社会における介護施設入所者と介護施設のマッチング問題に焦点を当て、効率的かつ公平なマッチングシステムの構築を目指した。特に、ケアワーカーの選好とケアワーカーと被介護者とのフィット度を考慮しつつ、社会的に望ましい結果を導き出す方法を開発した。

研究の主な目的は以下の 2 点であった。:

- ケアワーカーの選好とケアワーカーと被介護者とのフィット度を統合した新たな選好集約方法を提案すること。
- 既存のマッチング理論をケアワーカーと被介護者とのマッチング応用する可能性を検討すること。

これらの目的に対して、本研究では以下の成果を得ることができた。まず、Bossert and Sprumont(2014)、Athanasoglou (2016) の提案する Kemeny 距離をベースとした選好集約方法を拡張し、ケアワーカーの選好とケアワーカーと被介護者とのフィット度を統合した新たな選好集約方法を開発した。この方法は、個々の選好を尊重しつつ、社会的に望ましい結果を導き出すことを目指している。具体的には、ケアワーカーの選好順序とケアワーカーと被介護者とのフィット度を統合し、それらの間の距離を最小化する最適な社会的順序を見出す方法を提案した。次に、DA アルゴリズムやシリアル・ディクテーターシップなどの既存のマッチング理論をケアワーカーマッチング問題に適用する可能性を検討した。

提案した選好集約方法に基づくマッチングアルゴリズムの有効性については、理論的な分析を通じて検証した。理論的分析では、選好集約方法が弱耐戦略性を持つこと、すなわち参加者が自身の真の選好を偽って申告するインセンティブを持たないことを証明した。また、弱効率性も満たすことを示した。

これらの成果を踏まえると、当初設定した研究目的はおおむね達成できたと評価できる。特に、ケアワーカーマッチング問題に特化した選好集約方法の開発と、それに基づくマッチングアルゴリズムの理論的・実践的な有効性の検証は、この分野における重要な貢献となり得ると考えている。

一方で、本研究にはいくつかの限界と課題も存在する。まず、現実のケアワーカーと被介護者とのマッチングの問題には、本研究で考慮しきれなかった要素も多く存在する。例えば、被介護者の健康状態の経時的変化や、家族の希望、地理的要因などである。これらの要素を組み込んだより包括的な選好集約モデルの開発が今後必要となる。

また、本研究では理論的な分析に留まっており、数値シミュレーションや実際の介護施設や入所希望者のデータを用いた検証には至っていない。今後は、数値シミュレーション、実データを用いた分析などを通じて、提案した選好集約方法とマッチングアルゴリズムの実用性をより詳細に検証していく必要がある。

将来的な展望としては、本研究で開発した選好集約方法とマッチングアルゴリズムを基盤としつつ、以下のような方向性が考えられる。第一に、動的マッチングへの拡張である。ケアワーカーや被介護者の状態変化や人員の追加など、時間とともに変化する状況に対応できるよう、選好集約方法とマッチングアルゴリズムを動的に拡張することが考えられる。第二に、他分野への応用可能性がある。開発した選好集約方法とマッチングアルゴリズムの基本的な考え方は、介護施設入所問題以外の社会的マッチング問題にも応用できる可能性がある。

最後に、本研究の社会的意義について考察する。日本をはじめとする多くの国々で高齢化が進む中、ケアワーカーと被介護者とのマッチング問題は今後ますます重要性を増していくと考えられる。限られた資源を効率的かつ公平に配分することは、社会の持続可能性を維持する上で極めて重要である。本研究で提案した選好集約方法とマッチングアプローチは、この課題に対する一つの解決策を提示している。しかし、実用化に向けてはまだ多くの課題が残されている。今後は、これらの課題に取り組みながら、研究をさらに発展させていきたいと考えている。

参考文献

Athanasoglou, Stergios. (2016)“Strategyproof and Efficient Preference Aggregation with Kemeny-Based Criteria,” *Games and Economic Behavior* , 95, 67-156.

Bossert, Walter., and Yves, Sprumont. (2014)“Strategy-Proof Preference Aggregation: Possibilities and Characterizations,” *Games and Economic Behavior* ,85,26-109.

Dubins, L. E., and Freedman, D. A. (1981) “Machiavelli and the Gale-Shapley Algorithm,” *The American Mathematical Monthly*, 88, 94-485.

Gale, D., and Shapley, L. (1962)“College Admissions and the Stability of Marriage,” *TheAmerican Mathematical Monthly*,Vol.69,9-15.

Grandmont, Jean-Michel. (1978)“Intermediate Preferences and the Majority Rule,” *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 46, 317.

Roth, Alvin E. (1982)“Incentive Compatibility in a Market with Indivisible Goods,” *Economics Letters*, 9, 32-127.

坂井豊貴（2010）『マーケットデザイン入門-オークションとマッチングの経済学』ミネルヴァ書房.

総務省 (2023)「統計からみた我が国の高齢者」(最終閲覧日 2024 年 7 月 31 日) https://www.stat.go.jp/data/topics/pdf/topics138.pdf.

厚生労働省 (2024)「第９期介護保険事業計画に基づく介護職員の必要数について」(最終閲覧日 2024 年 7 月 31 日)https://www.mhlw.go.jp/stf/newpage_41379.html.

公益財団法人介護労働安定センター (2024)「令和５年度「介護労働実態調査」結果の概要について」(最終閲覧日 2024 年 10 月 5 日)https://www.kaigo-center.or.jp/content/files/report/2023_jittai_chousagaiyou.pdf.

Kemeny, John G.(1959) "Mathematics without numbers," *Daedalus*, 88.4, 577-591.

Mibu Naomi, and Kamba Naoko. (2013) " Factors affecting job satisfaction in care staff at special nursing homes," *International Journal of Human Culture Studies*, 2013,99-287.