現職教員を考慮した教員の配属マッチングの設計

倉持 誠

横浜市立大学大学院 国際マネジメント研究科 国際マネジメント専攻

2025年9月15日

要旨

1　序論

1.1　動機と結果の概要

日本の学校では、教員の異動に関して、教員の 31 ％ が「可能なら別の学校に移りたい」と回答しており、年度当初には高等学校だけでも 217 名の欠員が発生するなど、希望と実際の配属の不一致が構造的に生じている。このミスマッチは教科欠員や授業負担の偏在を引き起こし、教育機会格差を拡大させている (OECD(2018), 文科省 (2022))。

このようなミスマッチが生じる主因は大きく三つある。第一に、教員自身にも勤務校や地域、勤務条件に対する明確な選好が存在するため、人気校に希望が集中しやすいということである。第二に、各学校は教科ごとに受け入れ定員を伴う科目制約を抱えており、たとえ応募者が多くても希望者全員を受け入れられるわけではないということである。第三に、新規採用教員が毎年度一定数加わることで、既存の現職教員と新規採用教員を合わせた全体最適を図る必要が生じ、配属計画の複雑性が飛躍的に高まるということである。これらの要因が絡み合う結果、教員側の希望と学校側の需要を同時に充足させることが制度的に難しくなっている。以上の三つの要因 1. 人気校志向による希望の偏在、2. 科目ごとの定員を超過してはいけないという制約、3. 現職と新任を同時に調整することによる複雑性が同時に作用すると、現行制度では、「人員が足りない、または、超過する」という状態が避けられない。

教員の希望は一部の特色校・都市部高偏差値校に集中する傾向が顕著である。文部科学省では、埼玉県の募集 32 枠に対し 150 名（4.7 倍）、宮城県でも 19 枠に 75 名（3.9 倍）の応募が殺到している。東京都教育委員会の令和 5 年度公募結果も、中・高等学校共通枠では、名簿登録者数 1617 名に受験者は 2962 名（1.8 倍）と募集枠超過が続く状況を示している。更に、採用見込み者数は、1020 名とさらに倍率が高くなっている。一方で文科省 (2022) によると、始業日時点で高校だけでも 217 名の欠員が発生しており、人気校への希望集中の裏側で配置が埋まらない学校が恒常的に生じている。現在、公立高校の教員は、主に都道府県教育委員会が一括して人事権を持ち、毎年実施される「異動希望調査（人事異動調)」を起点に配属が決められる。教員は 10〜11 月頃に第一〜第三希望校・地域などを記入し、校長経由で教育委員会へ提出するが、最終決定は科目ごとの定数調整や地域バランス、在任年数ローテーションを優先した教育委員会の裁量で行われる (長野県教育委員会（2024）)。

各県の異動方針は「同一校勤務が 6〜10 年を超えれば原則配置換」「全県的視野で欠員校を優先配置」と明記しており (広島県教育委員会)、個人希望は最終段階で調整弁として後順位に置かれる。実際、千葉県の方針も「地域間・学校間の過不足を県全体で調整し、適材適所を図る」と規定しており (千葉県教育委員会（2024）)、人気校への希望集中と不人気校の欠員を同時に解消するアルゴリズムや客観指標は導入されていない。結果として、希望は反映されにくく、科目欠員等が発生したまま年度が始まるというのが現状である。実務では、人事担当が教員希望をなるべく考慮しつつ科目定員を充たそうと試みるも

のの、希望が集中した教科・地域では定数オーバーで受け入れられず、一方で不人気校や欠員が出やすい教科は定数割れが残る。結果として、始業直前まで空席が埋まらず免許外担当・複数校兼務・長距離通勤といった“その場しのぎ”の配置が発生し、教員の授業準備時間を圧迫する。さらに年度途中に産休代替や退職が重なると、科目制約を守りつつ、現職全員を再配置する余地が出てくるが、現実的には困難であるため、欠員の長期化と希望未充足の負のスパイラルに陥りやすい。つまり、現行方式は三要因を同時に満たす設計原理を持たないため、「配属を決めようとしても決め切れない」「決めたとしても誰かが不満か欠員が残る」といった“うまくいかない”現象が構造的に生じてしまうのである。

本稿は、この課題に対し、経済学のマッチング理論を用いて、教員の希望を尊重しつつ制度的制約を満たす配属メカニズムを設計する。具体的には、1. 各学校の科目別定員を守り（科目制約)、2. 教員間の不公平感（正当化された嫉妬）をなくし（公平性)、3. その中で教員にとって最も望ましい配属を実現し（教員最適性)、そして何よりも 4. 全ての現職教員の雇用を保証する（現職必置条件）という、4 つの重要条件を同時に満たすことである。本稿で提示する主な結果は以下の通りである。まず、教員が単一の教科免許しか持たない単純化されたモデルでは、既存の理論的枠組みを応用することで、現職教員の雇用保障が、前述の 1. 3. を満たした上で達成可能であることを示す（定理 1)。さらに、拡張した教員が複数の教科免許を持つ条件下では、既存のアルゴリズムが機能せず、現職教員が配属先を失うケースが存在することを「動機付けの例（例 1)」によって具体的に示す。この問題を乗り越えるため、本稿は「主たる指導教科」という概念を導入してモデルを精緻化し、「カットオフ調整アルゴリズム」を設計・提案する。本稿の、主たる貢献は、この提案アルゴリズムが、複数免許という最も複雑な条件下においても、常に本論文で定義した弱い教科公平性を満たし（定理 2)、その結果として得られるマッチングが、現職教員の雇用を保証する（現職必置条件を満たす）ことを証明した点にある（定理 3)。これにより、現実の教員人事制度が抱える複雑な課題に対し、理論的に裏付けられた具体的な解決策を提示する。

1.2 関連研究 (Related literature)

今回は「教員と学校」のような 2 種類の異なるグループに属する参加者たちをどのように組み合わせるかを考える。このような組み合わせ (マッチング) を二部マッチングと呼ぶ。二部マッチングは、Gale and Shapley(1962) で考案された。Gale and Shapley(1962) では、現実のマッチングに関する問題を数学的に定式化し、どのようにペアを組めば、当事者同士が今のペアよりもお互いを好む組み合わせが存在しないかを考えた。彼らの枠組みにより、金銭を介さない人員配置問題にもゲーム理論的な解が存在することが示された。

しかし、その理論の現実社会への有用性が広く認識されるまでには時間を要した。1980 年代に入り、Roth が医学生と病院の人員配置問題を研究したことが、このギャップを埋める契機となった。Roth (1984) は、米国の研修医の労働市場における採用方式を分析し、現在用いられている配置方法のゲーム理論的特徴を解明した。彼はこの市場の現行の手法

を調べ、それが Gale – Shapley の提案した方法と極めて近いものであり、当時の医学生と病院の組み合わせ方法は病院側にとって最適な安定マッチングと同等であることを示している。Roth (1984) の貢献により、「安定性」(当事者同士が今のペアよりもお互いを好む組み合わせが存在しないこと) がマッチング市場の長期的安定運用に不可欠であることが国際的にも確認された。また、本研究を契機に、他の分野でも集中マッチングの導入が検討されるようになった。ほかにも、様々な市場で、本理論が活用されており、Roth (1984) が単なる分析に留まらず現実の制度設計を直接に方向付けた例と言える。

続いて、1990 年代には、Balinski & Sönmez が大学入試における学生配置問題へとマッチング理論を応用し、古典理論を政策設計に結びつける新たな展開を示した。Balinski & Sönmez (1999) は、中央集権的な大学入学試験制度にもとづく学生配置問題を新たなマッチング理論モデルとして定式化し、従来の制度を分析した。特に、トルコの大学入学者配置方法に重大な欠陥があることを明らかにした。そこで、彼らは、これらの欠陥を克服しうる代替メカニズムとして学生最適の安定マッチング方式を提案した。この理論分析により、学生側最適な安定マッチング (当事者同士が今のペアよりもお互いを好む組み合わせが存在しないマッチング) が受験者配置問題において望ましい原則であり、複数カテゴリーの試験得点という特殊要因があっても安定マッチング理論が有効に機能することが示された点で、本研究の理論的貢献は大きいと言える。Balinski & Sönmez (1999) の貢献により、マッチング理論が労働市場以外の分野にも適用可能であることが示され、特に政策当局が直面する制度設計問題に理論を活かせる道筋が明確になった。これはマッチング理論の応用範囲を大きく拡大し、理論と実践の橋渡しをさらに推し進めた転換点となっている。

しかし両モデルは、複雑な制約を想定していない。そこで、近年、複雑な制約を伴う市場に一歩踏み込んだのが Kamada & Kojima (2024) である。彼らは、実際の保育園入所において従来の全員が満足する安定した割り当てが存在しない場合が存在することを指摘し、制約のある状況下でも優先順位を尊重した公平な割り当てが得られる新たな仕組みを提案した。また、自治体の保育所割当データを用いたシミュレーションにより、この公平な割り当て方式の効果を検証し、有効性を確認した。制約の緩和と公平性の両立によって参加者の満足度や全体の利益を高められる可能性が示された。とはいえ今回の研究である公立高校における配属問題にそのまま適応することは、以下のような問題点があることから不可能である。まず、人気校志向によって希望が偏っている点である。既存研究では、希望が特定校に集中した場合に，欠員校を同時に解消する手当てがない。次に、それぞれの学校と科目について定員が設定されている点である。既存研究では、制約は、学科などの 1 つの上限に対して設定していることが多く、複数科目を横断して上限を同時に守る公立高校の複雑な定員管理には未対応である。最後に、現職の教員を必ずどこかの高校に配属させなければならない点である。既存研究では、単年度の応募者のみを対象としており、既に在籍している職員を必ず再配置するという条件を入れていない。

本研究では、これらの問題点を同時に満たすメカニズムを構築し、教員配属問題に対

する実践的な解決策を提示する。具体的な、本稿の構成は以下の通りである。まず第 2 章では、問題を単純化し、各教員が単一の教科免許のみを持つ「基本モデル」を定義する。このモデルにおいて、既存の理論的枠組みを応用することで、現職教員の雇用が常に保証される安定的なマッチング（教員最適公平マッチング）が存在することを示す（定理 1)。次に第 3 章では、教員が複数の教科免許を持つ、より現実的で複雑な「拡張モデル」へと分析を進める。この状況下では既存のアルゴリズムが機能しないことを例証し、その課題を克服するために独自の「カットオフ調整アルゴリズム」を設計・提案する。そして、この提案アルゴリズムが、複数免許という最も複雑な条件下においても、常に弱い教科公平性を満たし（定理 2)、現職教員の雇用を保証するマッチングを導出可能であることを証明する（定理 3)。第 4 章では、これらの理論的結果が持つ実践的な含意について考察する。最後に第 5 章で、本研究の結論と今後の展望を述べる。

2　基本モデル：教員が単一免許を持つケース

$I = \{1, ..., m\}$ を教師からなる空でない有限集合、$S = \{m+1, ..., n\}$ を学校からなる空でない有限集合とする。また、I_α を**現職教師** ***(currently employed / in-service teachers)*** からなる空でない有限集合とし、$I_\alpha \subset I$ である。各教師 $i \in I$ は、学校の集合 S とマッチしない状態 $\emptyset$ の和集合 $S \cup \{\emptyset\}$ で定義される厳密な選好順序 $\succ_i$ を持つ。各学校 $s \in S$ は、教師の集合 I の上で定義される厳密な優先順位 $\succ_s$ を持つ。教師が持つすべての選好の組をプロファイル $\succ_I = (\succ_i)_{i \in I}$ で表し、学校が持つすべての優先順位の組をプロファイル $\succ_S = (\succ_s)_{s \in S}$ で表す。

各学校 $s \in S$ について、その制約は、実現可能な教師集合の族 $\mathcal{F}_s \subset 2^I$ によって与えられる。教師の部分集合 $I' \subseteq I$ は、$I' \in \mathcal{F}_s$ であるとき、学校 s において**実現可能** ***(feasible)*** であると定義される。したがって、一つの**問題** ***(problem)*** は、組 $(I, S, \succ_I, \succ_S, \{\mathcal{F}_s\}_{s \in S})$ によって特徴づけられる。

マッチング ***(matching)*** とは、教師と学校の組み合わせを決める写像 $\mu : I \cup S \to S \cup \{\emptyset\} \cup 2^I$ であり、以下の 3 つの条件で定義される。

(i) すべての教師 $i \in I$ について、その割り当て先は $\mu_i \in S \cup \{\emptyset\}$ である。

(ii) すべての学校 $s \in S$ について、そこに割り当てられた教師の集合は $\mu_s \subseteq I$ である。

(iii) いかなる教師 $i \in I$ と学校 $s \in S$ のペアにおいても、$\mu_i = s$ であることと $i \in \mu_s$ であることが同値であるように、割り当てなければならない。

教師が担当する**教科** ***(subject)*** を空でない有限集合 $J = \{j_1, j_2, ..., j_k\}$ で表す。各教師 $i \in I$ について、$A(i) \subset J$ は、各教師が担当可能な教科の集合である。この章では、任意の $i \in I$ について、$|A(i)| = 1$ とする。つまり、各教師は単一の教科のみを担当する。便宜上、各教師 i が担当可能な教科 $j \in A(i)$ と、$A(i)$ を同一視する。このとき、

$I_j = \{i \in I \mid A(i) = j\}$ は、教科 j の免許を持つ教師の集合である。各学校 $s \in S$ について、$A(s)$ でその学校が募集している科目を表す。このとき、学校については、$A : S \to 2^J$ とする。$S_j = \{s \in S \mid j \in A(s)\}$ は、教科 j で募集を行う学校の集合である。

各学校 $s \in S$ は、教科 $j \in J$ ごとに特定のキャパシティ $c_s^j \geq 0$ を持つ。学校がある教科で募集を行っている場合は、その教科のキャパシティは正の数であり、学校がある教科で募集を行わない場合、その教科のキャパシティはゼロとなる。すなわち、すべての $j \in A(s)$ について、$c_s^j > 0$ であり、$j \notin A(s)$ について、$c_s^j = 0$ である。

これらの教科制約の下でマッチング μ が実現可能であるとは、ある学校に任意の教科で割り当てられた教師の数が、その学校の当該教科におけるキャパシティを超えないことをいう。この実現可能性条件 $\mathcal{F}_s$ は、次のように定義される。

$$\mathcal{F}_s = \{\mu_s \subseteq I : \forall j \in J, |\{i \in \mu_s : A(i) = j\}| \leq c_s^j\}$$

$\forall i \in I$, μ_i

マッチング μ の望ましさは、いくつかの重要な特性によって評価される。マッチングが**実現可能** ***(feasible)*** であるとは、すべての学校 $s \in S$ について、$\mu_i \neq \emptyset$ ならば、$\mu_s \in \mathcal{F}_s$ が成り立つことである。**個人合理的** ***(individually rational)*** であるとは、すべての教員 $i \in I$ について $\mu_i \succ_i \emptyset$ が成り立つことである。ある教師 i が教師 i' に対して**正当な嫉妬を持つ** ***(have justified envy toward)*** とは、$s \succ_i \mu_i$、$i' \in \mu_s$、かつ $i \succ_s i'$ となるような学校 $s \in S$ が存在する場合をいう。したがって、マッチング μ が**公平** ***(fair)*** であるとは、別の教師に対して正当な嫉妬を持つ教師が一人もいないことである。最後に、マッチング μ が**効率的** ***(non-wasteful)***[1] であるとは、$s \succ_i \mu_i$ かつ $\mu_s \cup \{i\} \in \mathcal{F}_s$ となるようなペア $(i, s) \in I \times S$ が存在しないことである。マッチング μ は、実現可能、個人合理的、公平、かつ効率的という性質を同時に満たすとき、**安定** ***(stable)*** であると定義される。

Kamada and Kojima(2024) では、公平性と実現可能性をマッチングに求めた際に安定性が失われる可能性があることを指摘している。以下は、Kamada and Kojima(2024) に記載されている例である。

例 1 (安定性を満たすマッチングが存在しない). 学校が 1 つ (s)、学生が 10 人 ($i_1, i_2, \ldots, i_{10}$) いると仮定する。全ての学生は、誰ともマッチしないよりは学校 s とマッチすることを望む。学校 s の選好順位は以下の通りである。

$$\succ_s: i_1, i_2, \ldots, i_9, i_{10}.$$

奇数の添え字を持つ学生は学校にとって 3 単位の費用がかかり、偶数の添え字を持つ学生は 4 単位の費用がかかる。学校 s は 20 単位の予算制約があり、ある学生の集合が s にとって実現可能であるのは、その学生たちに関連する費用の合計が 20 単位を超えない場合に

[1] `https://www.esri.cao.go.jp/jp/esri/archive/bun/bun203/bun203b.pdf` の p.16 参照

限られる。

このとき、例えば $\mu_s = \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\}$ となるマッチング μ を考える。このマッチングは、$\mu_s \cup \{i_7\}$ が実現可能であり、かつ学生 i_7 が誰ともマッチしないより s とマッチすることを望むため、公平（fair）ではあるが効率的でない（wasteful)。一方で、$\mu'_s = \mu_s \cup \{i_7\}$ となるマッチング μ' は、効率性（non-wastefulness）を満たすが、$s \succ_{i_6} \emptyset$、$i_7 \in \mu'_s$、かつ $i_6 \succ_s i_7$ であるため、公平性（fairness）に反する。実際、この例には安定なマッチングが存在しない。これを示すため、まず公平性をマッチングに要求することから、s とマッチする学生の集合は、ある $l \in \{1, \ldots, 10\}$ について $I^l = \bigcup_{k=1}^{l} \{i_k\}$ という形式をとるか、$I^0 = \emptyset$ でなければならない点に注意する。$l \leq 5$ の場合、$I^l \cup \{i_7\} \in \mathcal{F}_s$ かつ $s \succ_{i_7} \emptyset$ であるため、集合 I^l は効率的でない。一方、$l \geq 6$ の場合、集合 I^l は実現可能ではない。

マッチング μ が**現職必置条件** ***(in-service teacher condition)*** を満たすとは、$\forall i \in I_\alpha, \mu_i \neq \emptyset$ が成り立つことであり、全ての現職教師が割り当てられることをいう。

Kamada and Kojima(2024) では、例 1 のような制約がある状態で、安定性を保証することができないため、公平性、個人合理性、実現可能性を満たすマッチングを考えている。しかし、それに現職必置条件を置いた場合、公平性、個人合理性、実現可能性を満たすマッチングを保証することができない。以下にその例を示す。

$I = I_\alpha = \{1, 2\}$、$S = \{3, 4\}$ とする。全ての $i \in I_\alpha$ について $\succ_i = 3, 4, \emptyset$、全ての $s \in S$ について $\succ_s = 1, 2, \emptyset$、そして全ての $s \in S, j \in J$ について $c_s^j = 1$ と仮定する。このとき、マッチングは $\mu_1 = 3$、$\mu_2 = 4$ となる。このマッチングは教員 2 は教員 1 に対して正当な嫉妬（justified envy）を抱くため、公平（fair）ではない。

例 2 (現職必置条件・公平性・個人合理性・実現可能性を満たすマッチングが存在しない). 教科集合を $J = \{m, h\}$ とする。教員集合・現職集合は $I = I_\alpha = \{i_1, i_2, i_3\}$、学校集合は $S = \{s_1, s_2\}$。各校の教科別上限は $c_{s_1}^m = 1, c_{s_1}^h = 1, c_{s_2}^m = 1$ とし、それ以外の c_s^j は 0 とする。したがって s_1 には m と h の各 1 枠、s_2 には m が 1 枠ある。$A(i_1) = A(i_2) = \{m\}$、$A(i_3) = \{h\}$ とする。すなわち、i_1, i_2 は m 教科、i_3 は h 教科を担当可能である。$A(s_1) = \{m, h\}$、$A(s_2) = \{m\}$ とする。すなわち、s_1 は m, h 教科で募集、s_2 は m 教科で募集している。

教員側選好は、i_1 と i_2 は $s_1 \succ s_2 \succ \emptyset$ とする。i_3 は、s_2 は h 枠がないため、$s_1 \succ \emptyset$ とする。学校側優先順位は、s_1 : $i_1 \succ i_2 \succ i_3$, s_2 : $i_1 \succ i_2$. とする。

ここで現職必置条件を満たすマッチングは、$\mu_{s_1}^m = \{i_1\}$, $\mu_{s_1}^h = \{i_3\}$, $\mu_{s_2}^m = \{i_2\}$ である。すなわち s_1 の m 枠に i_1、s_1 の h 枠に i_3、s_2 の m 枠に i_2 を割り当てる。

このマッチングは、s_1 は m, h を各 1 名、s_2 は m を 1 名受け入れており、各校で教科別上限 c_s^j を満たすため、実現可能性（feasibility）を満たしている。さらに、i_3 は s_1、i_1, i_2 は s_1 もしくは s_2 を受け入れるため、各教員は自ら受容可能な学校に配属されている。よって、個人合理性（Individual Rationality）を満たしている。現職教員である、i_1, i_2, i_3 を全員マッチングさせられているため、現職必置条件を満たしている。一方、i_2 は $s_1 \succ s_2$ であり、s_1 は $i_2 \succ i_3$ なので、s_1 に配属されている i_3 に対して i_2 は正当化された嫉妬を

持つ。よって、教科を無視した標準的公平性では μ は公平性を満たさない。ここで、仮に、同教科間のみで正当化された嫉妬を判定する場合は、i_2 の嫉妬対象は同じ m 教科の配属者に限られる。s_1 の m 枠の配属先は i_1 であり、s_1 の優先順位は $i_1 \succ i_2$ であるため、同教科内では i_2 の同教科間のみでの正当化された嫉妬は成立しない。

公平性（Fairness）の概念は、例 2 で見たように、教科を考慮して弱められる。ある教師 i が教師 i' に対して**教科に基づいた正当な嫉妬** ***(subject-justified envy)*** を持つとは、$A(i) = A(i')$ であり、ある $s \in S$ が存在し、$s \succ_i \mu_i, i' \in \mu_s, i \succ_s i'$ が成り立つ時をいう。これは、両者が同じ教科を持ち、かつ標準的な意味で教師 i が i' に対して正当な嫉妬を持つことを意味する。マッチングが**教科公平** ***(subject-fair)*** であるとは、教科に基づいた正当な嫉妬を持つ教師が誰もいない状態を指す。

定義 1. マッチング μ は、以下の 2 つの条件を満たすとき、**教師最適公平マッチング** ***(TOFM)(teacher-optimal fair matching)*** となる。

(i) μ は、実現可能、個人合理的、かつ公平であり、かつ

(ii) 実現可能、個人合理的、かつ公平である、他のいかなるマッチング μ' に対しても、すべての教師 $i \in I$ について $\mu_i \succeq_i \mu'_i$ が成り立つ。

$i \in I, \forall \mu_{i'}, \mu_i \succeq_i \mu_{i'}$

半順序集合 $(X, \succeq)$ において、任意の $x, y \in X$ に対して、上限 $\sup_{\succeq}\{x, y\}$ と下限 $\inf_{\succeq}\{x, y\}$ が常に存在する時、この半順序集合を **束（*Lattice*）**と呼ぶ。これは、集合 X の中からどの 2 つの元（要素）を選んでも、その 2 つを「上から押さえる」ことができる元の中で最小のもの（上限）と、「下から支える」ことができる元の中で最大のもの（下限）が、必ずその集合 X の中に見つかる、という性質を表している。

半順序集合 $(X, \succeq)$ において、空集合ではない任意の部分集合 $Y \subseteq X$ に対して、上限 $\sup_{\succeq} Y$ と下限 $\inf_{\succeq} Y$ が常に存在する時、この半順序集合を **完備束（*Complete Lattice*）**と呼ぶ。これは、束の性質をさらに強力にしたものであり、2 つの元だけでなく、どのような部分集合（元の集まり）を持ってきても、その集合全体に対する上限と下限が必ず集合 X の中に存在する、ということを意味する。有限集合だけでなく、無限個の元からなる部分集合についてもこの条件が成り立つ。

定理. $(L, \leq)$ を完備束とし、$f : L \to L$ を増加関数、すなわち、$x \leq y$ ならば $f(x) \leq f(y)$ が成り立つとする。このとき、f の不動点の集合 $\{u \in L : f(u) = u\}$ は $\leq$ の下で完備束をなす。特に、f は最小不動点 $\underline{u}$ と最大不動点 $\overline{u}$ を持つ。[2]

2.1 Kamada and Kojima(2024) の結果

kamada and kojima(2024) は、現職必置条件を要求せず、$|J| = 1$ であるときを分析し、教師最適マッチング (TOFM) がカットオフ調整アルゴリズム (cutoff adjustment algorithm)

[2] https://pauldelatte.github.io/files/L3.pdf より

を用いて求められることを示した。本節では、そのことについて詳しく説明する。

Kamada and Kojima(2024) の手法は、公平性、個人合理性、そして実行可能性を満たすマッチングを、有限束（a finite lattice）上の関数の不動点（fixed point）によって特徴付けることである。

この特徴付けを確立するため、カットオフプロファイルの集合 $P := \{1, \ldots, |I|, |I|+1\}^S$ を考える。この集合には、すべての $s \in S$ に対して p_s が p'_s 以下であるとき、かつそのときに限り $p \leq p'$ となる半順序（partial order）$\leq$ が与えられている。この空間は有限束（したがって完備束 (complete) でもある。）である。

各学校 s について、$i^{(s,l)}$ を、s の優先順位に従って下から l 番目の学生とする（例えば、s にとって最も順位の高い学生は $i^{(s,|I|)}$ であり、最も低い学生は $i^{(s,1)}$ である)。また、すべての $s \in S$ に対して $i^* = i^{(s,|I|+1)}$ となるような架空の学生 $i^* \in I$ を考え、各 $s \in S$ について選好 $\succ_s$ の定義域を、任意の $i \in I$ に対して $i^* \succ_s i$ が成立するように拡張する。

カットオフプロファイル $p \in P$ が与えられたとき、各学校 $s \in S$ における「需要」を次のように定義する。

$$D_s(p) := \{i \in I \mid i \succeq_s i^{(s,p_s)} \text{ かつ } s \succ_i \emptyset; i \succeq_{s'} i^{(s',p_{s'})} \implies s \succeq_i s'\}.$$

この定義において、前半「$i \succeq_s i^{(s,p_s)}$ かつ $s \succ_i \emptyset$」は、学生 i がカットオフ学生 $i^{(s,p_s)}$ と同等以上の順位であり、かつ学校 s を受容可能（acceptable）と見なしていることを意味する。一方、後半「$i \succeq_{s'} i^{(s',p_{s'})} \implies s \succeq_i s'$」は、$s$ が、学生 i がカットオフを通過する学校の中で最も選好（most preferred）する学校であることを意味する。s への需要は、これら 2 つの基準を満たす学生の集合となる。

以下に、$D_s(p)$ の数値例を示す。5 人の学生 i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 がおり、学校 s の優先度リストは以下の通りとする。また、学校 s のカットオフプロファイルは $p_s = 3$ であり、カットオフ学生は i_3 とする。

$$i_1 \succ_s i_2 \succ_s i_3 \succ_s i_4 \succ_s i_5$$

また、学校 s' の優先度リストも同様に以下の通りとし、のカットオフプロファイルは $p_s = 1$ であり、カットオフ学生は i_5 とする。

$$i_1 \succ_s i_2 \succ_s i_3 \succ_s i_4 \succ_s i_5$$

学生の選好を以下のように設定する。

学生 i_1 の選好：$s' \succ_i s \succ_i \emptyset$
学生 i_2 の選好：$s \succ_i s' \succ_i \emptyset$
学生 i_3 の選好：$s \succ_i s' \succ_i \emptyset$
学生 i_4 の選好：$s' \succ_i s \succ_i \emptyset$
学生 i_5 の選好：$s \succ_i \emptyset$

$$D_s(p) := \{i \in I \mid i \succeq_s i^{(s,p_s)} \text{ and } s \succ_i \emptyset; i \succeq_{s'} i^{(s',p_{s'})} \implies s \succeq_i s'\}.$$

上記定義から、まず、前半の条件である $i \succeq_s i^{(s,p_s)}$ と $s \succ_i \emptyset$ を満たす学生を選ぶ。これを満たすのは、i_1, i_2, i_3 である。次に、後半の条件である $i \succeq_{s'} i^{(s',p_{s'})} \implies s \succeq_i s'$ を満たす学生を選ぶ。これを満たすのは、i_2, i_3, i_5 である。ここで、両条件を満たす学生は、i_2, i_3 である。したがって、学校 s における需要は以下のようになる。

$$D_s(p) = \{i_2, i_3\}$$

写像 $T : P \to P$ が、以下の条件を満たすとき、これを **カットオフ調整関数 *(cutoff adjustment function)*** と呼ぶ。

$$T_s(p) = \begin{cases} p_s + 1 & (D_s(p) \notin \mathcal{F}_s \text{ の場合}) \\ p_s & (D_s(p) \in \mathcal{F}_s \text{ の場合}) \end{cases}$$

ここで、$(|I| + 1) + 1 = 1$ とする。なお、$p \in P$ が T の**不動点 *(fixed point)***であるとは $T(p) = p$ を満たすことをいう。

定義 1. マッチング μ は、以下の 2 つの条件を満たすとき、**学生最適公平マッチング *(SOFM)(student-optimal fair matching)*** となる。

(i) μ は、実現可能、個人合理的、かつ公平であり、かつ

(ii) 実現可能、個人合理的、かつ公平である、他のいかなるマッチング μ' に対しても、すべての学生 $i \in I$ について $\mu_i \succeq_i \mu'_i$ が成り立つ。

定理 1. カットオフ・プロファイル $p \in P$ がカットオフ調整関数 T の不動点であるならば、対応するマッチング μ^p は実現可能であり、個人合理的であり、公平である。さらに、もしあるマッチング μ が実現可能で、個人合理的で、公平であるならば、あるカットオフ・プロファイル $p \in P$ が存在して $\mu = \mu^p$ となり、その p は T の不動点である。

説明　この定理は、カットオフ調整アルゴリズムの理論的基盤を与える重要な結果である。まず前半は、あるカットオフ p が不動点に到達したとき、そこから得られるマッチング μ^p が常に三つの望ましい性質、すなわち「実現可能性」「個人合理性」「公平性」を同時に満たすことを保証している。後半はその逆を述べており、もしもあるマッチングがすでに三つの性質を備えているならば、それは必ず何らかの不動点に対応している、ということを示している。つまり、この定理により、「不動点」と「望ましい性質を満たすマッチング」とが一対一に対応することが明らかになる。このことは、カットオフ調整アルゴリズムを用いれば、理論的に適切なマッチングを漏れなく探索・構築できることを保証している。

不動点になるカットオフ値とそうでないカットオフ値について例を用いて説明する。まず、全ての例で共通となる市場の基本設定を定義する。学校は A, B の 2 校、生徒は $1, 2, 3, 4$ の 4 名が存在する。各学校の定員は、$c_A = 1, c_B = 2$ である。学校側の生徒に対する優先順位は、$A : 1 \succ 2 \succ 3 \succ 4$、$B : 2 \succ 3 \succ 1 \succ 4$ と定められている。一方、生徒側の学校に対する選好は、$1 : A \succ B \succ \emptyset, 2 : B \succ A \succ \emptyset, 3 : B \succ A \succ \emptyset, 4 : B \succ \emptyset$ である。ここで $\emptyset$ はどこにも割り当てられない状況を指す。

例 1：不動点となるカットオフ（$T(p) = p$　まず、カットオフが $p = (p_A, p_B) = (4, 3)$ となる場合を考察する。この設定は、学校 A が優先順位最上位の 1 名までを、学校 B が上位 2 名までをそれぞれ通過させる状況を意味する。このカットオフに基づくと、生徒 1 は A のみ、生徒 2 と 3 は B のみを通過できるため、各生徒が最も好む応募先を選んだ結果、学校 A への需要は $D_A(p) = \{1\}$、学校 B への需要は $D_B(p) = \{2, 3\}$ となる。

生徒	通過 (A)	通過 (B)	応募先（最も好む通過校）
1	◯	×	A
2	×	◯	B
3	×	◯	B
4	×	×	$\emptyset$

次に、この需要が実現可能かを確認する。学校 A の需要 $|D_A(p)| = 1$ は定員 $c_A = 1$ の範囲内であり、学校 B の需要 $|D_B(p)| = 2$ も定員 $c_B = 2$ の範囲内である。両校ともに需要が定員を超えていないため、この状態は実現可能である。したがって、このカットオフ $p = (4, 3)$ は、カットオフ調整関数 T を適用しても変化しない不動点（$T(p) = p$）となっている。

この不動点に対応する最終的な割り当て（マッチング）は、$\mu(1) = A, \mu(2) = B, \mu(3) = B, \mu(4) = \emptyset$ と決定される。この割り当ては、実現可能性（各校の定員が守られている）、個人合理性（割り当てられた生徒は、どこにも行かないよりはその学校を好む）、そして公平性（誰も正当な嫉妬（justified envy）を抱かない）という、望ましい 3 つの性質を全て満たしている。

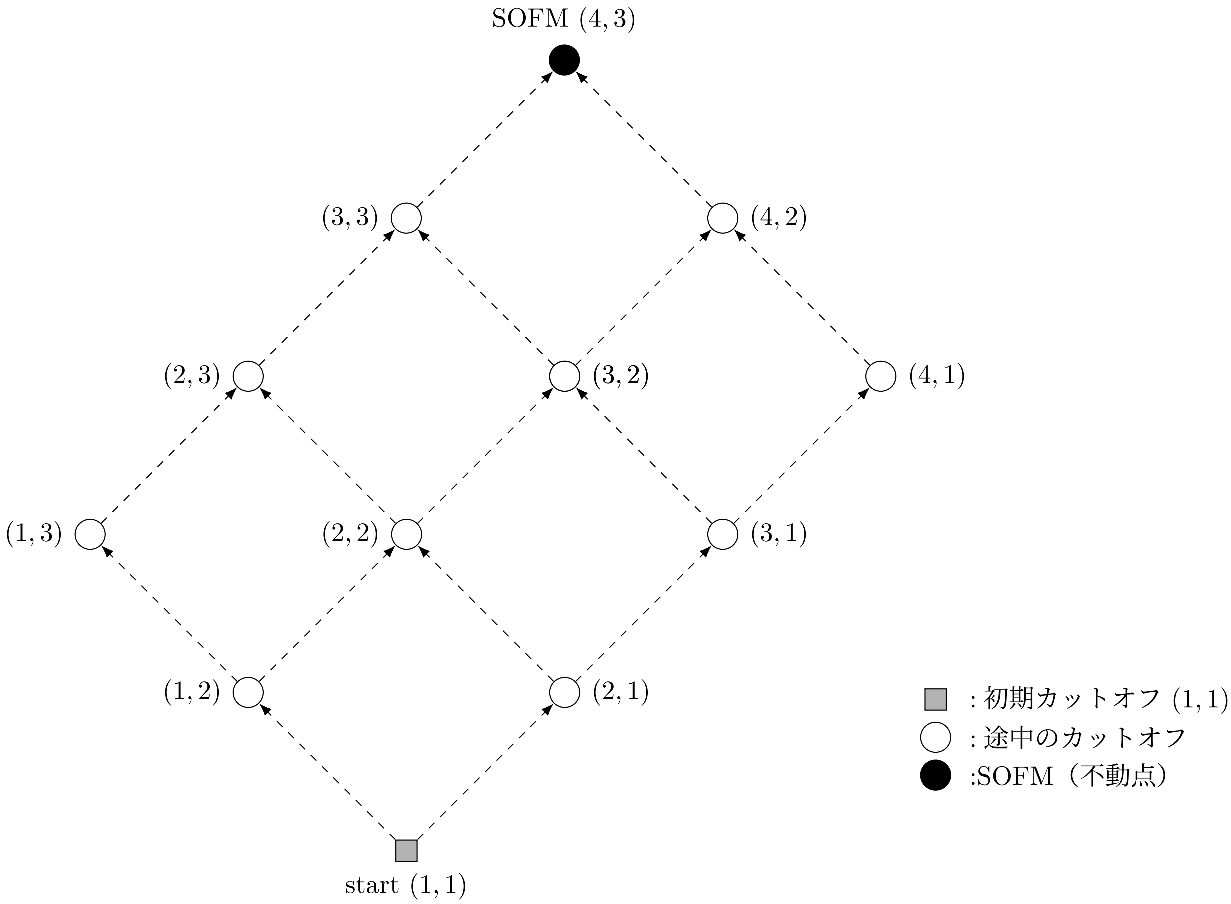
例 2：不動点でないカットオフ（$T(p) \neq p$**）**　次に、カットオフが $p = (p_A, p_B) = (2, 2)$ の場合を考察する。この設定は、学校 A と B が、ともにそれぞれの優先順位リストの上位 3 名までを通過させる状況を意味する。この結果、生徒 1, 2, 3 は両校のカットオフを通過し、生徒 4 は B のカットオフのみを通過する。各生徒が通過可能な学校の中から最も好む応募先を選択するため、学校 A への需要は $D_A(p) = \{1\}$、学校 B への需要は $D_B(p) = \{2, 3, 4\}$ となる。

生徒	通過 (A)	通過 (B)	応募先（最も好む通過校）
1	○	○	A
2	○	○	B
3	○	○	B
4	×	○	B

この需要が実現可能かを確認すると、学校Aの需要 $|D_A(p)| = 1$ は定員 $c_A = 1$ 以内で実現可能である。しかし、学校Bへの需要 $|D_B(p)| = 3$ は定員 $c_B = 2$ を超過しており、実現不可能である。このように、少なくとも一つの学校で需要が定員を超過したため、カットオフ調整関数 T は状態を更新する必要がある。具体的には、$T(p) = (2, 3)$ となり、これは元の $p = (2, 2)$ とは異なる。したがって、このカットオフは不動点ではない。

不動点でない場合の性質について　Kamada and Kojima (2024) の定理1によれば、カットオフ・プロファイル p がカットオフ調整写像 T の不動点であるとき、その対応するマッチング μ_p は実現可能性・個人合理性・公平性の三条件をすべて満たす。では不動点でない場合にはどうかというと、需要集合 $D_s(p)$ の定義上、各生徒は常に「通過できる学校の中で最も好む学校」に応募するため、μ_p は不動点か否かにかかわらず個人合理性を満たす。また、公平性（正当化された嫉妬の不在）についても、定理の証明で示されているように、$D_s(p)$ の構成そのものが嫉妬を生じさせない仕組みになっているため、不動点でなくとも保持される。したがって、不動点でない場合に崩れ得るのは実現可能性のみであり、具体的には定員超過などによって $D_s(p) \notin F_s$ となる学校が存在し、制約違反が生じることになる。結論として、この枠組みにおいては「不動点でないから個人合理性や公平性が壊れる」という例は存在せず、壊れる可能性があるのは実現可能性のみである。

カットオフ遷移説明　以下図は、先述の、不動点になるカットオフ値とそうでないカットオフ値について例で比較した際の、カットオフ調整アルゴリズムの進行を縦長の菱形として表したものである。最下段の■が初期値 $(1, 1)$ を示し、そこから需要の不一致に応じて各学校のカットオフが一段階ずつ引き上げられ、○で表されたさまざまな中間のカットオフ候補へと枝分かれしていく。各○は不動点とは限らず、さらに需要に応じて矢印に沿って上流へと進む。やがてすべての経路は最上段の●に収束し、そこが生徒最適公平マッチング（SOFM）に対応する不動点 $(4, 3)$ である。この図は、初期カットオフから始めると最終的に SOFM に至ること、そしてその過程で複数の中間候補を経由しうることを直感的に示している。



定理 2. 各学校における制約が一般的な上限（general upper-bound）であるならば、SOFM は存在する。

主張 1. 写像 T は最小不動点（smallest fixed point）を持つ。すなわち、$T(p) = p$ を満たし、かつ $T(p') = p'$ を満たすすべての $p' \in P$ に対して $p \leq p'$ となるような $p \in P$ が存在する。

説明　各学校のマッチングに関する制約が「一般上限 (general upper-bound)」という性質を持つ場合、必ず「学生最適で公正なマッチング (SOFM)」が存在することを証明するものである。ここでいう「一般上限」とは、ある学生の集合の受け入れが実現可能であるならば、その任意の部分集合も同様に受け入れ可能であるという条件である。SOFM は、実行可能性、個人合理性、そして「正当な嫉妬」がないという公正性の 3 つの条件を満たす全てのマッチングの中で、全ての学生にとって最も望ましい（あるいはそれ以上に良い結果はない）マッチングのことである 。

この定理の証明における最初の重要なステップが主張 1 である。「カットオフ調整関数 T」が最小の不動点（関数を適用しても値が変わらない点のうち、最も小さいもの）を持つことを主張するものである。この主張は、関数 T が特定の順序関係を保つ「弱増加関数」であることを示し、タルスキの不動点定理を適用することで証明される。この主張 1

によって存在が保証される「最小の不動点」が、実は SOFM に対応するマッチングを導き出す鍵となる。したがって、主張 1 は、SOFM の存在を保証する定理 2 の証明全体の土台となる重要な補題である。

これらのモデルでの実現可能性は、全ての学校 $s \in S$ について、$p_s = |I+1|$ となる場合も許容している。これは、全ての学生 $i \in I$ がどの学校にも通過できないことを意味する。この場合、需要集合 $D_s(p)$ は空集合となり、各学校の制約を満たすため、実現可能性が保たれる。したがって、全ての学生がどこにも割り当てられないマッチングも実現可能なマッチングの一つとして含まれる。これは、現職必置条件を満たさない。そこで本稿では、公平性を弱め、教科公平性を満たすマッチングに着目する。

2.2 仮定

本モデルでは、以下の 3 つの重要な仮定を導入する。

仮定 (1)
任意の学校 $s \in S$、現職教師 $i \in I_\alpha$、現職教師 $j \in I \setminus I_\alpha$ について、$[i \succ_s \emptyset$ かつ $j \succ_s \emptyset] \implies i \succ_s j$ とする。これは、もし両者がその学校にとって受け入れ可能であるならば、学校は現職教師を優先しなければならないと言うことである。

仮定 (2)
(i) すべての $s \in S$ で $\mu_s \in \mathcal{F}_s$、かつ (ii) すべての $i \in I_\alpha$ に対して $i \in \mu_s$ となる学校 $s \in S$ が存在する、という条件を満たすマッチング μ が存在するとする。これは、すべての現職教員を雇用する、実現可能なマッチングが少なくとも一つは存在すると言うことである。

仮定 (3)
すべての $i \in I_\alpha$ とすべての $s \in S$ について、$s \succ_i \emptyset$ が成り立つとする。これは、すべての現職教師は、いかなる学校も受け入れ可能な割り当て先であると見なすと言うことである。

本稿の目的は、下記の定義 2 で述べる「教師にとって最も望ましい教科公平なマッチング」を見つけることである。

定義 2. マッチング μ が**教科別教師最適公平マッチング *(subject-TOFM)*** となるのは、以下の条件を満たす場合である。

(i) μ は、実現可能、個人合理的、かつ教科公平であり、かつ

(ii) 実現可能、個人合理的、かつ教科公平である、他のいかなるマッチング μ' に対しても、すべての教師 $i \in I$ について $\mu_i \succeq_i \mu'_i$ が成り立つ。

Kamada and Kojima(2024) では、$|J|=1$、すなわち、全体の教科が 1 つの場合を考えていた。本稿では、教科は複数存在し、本章のケースの問題を考える。

ここで、教科 $j\in J$ と学校 $s\in S$ における実現可能性条件 $\mathcal{F}_s^j$ は、次のように定義される。

$$\mathcal{F}_s^j=\{\mu_s\subseteq I_j:|\{i\in\mu_s:A(i)=j\}|\le c_s^j\}$$

さらに、$\mathcal{F}_s^j$ を用い、実現可能性条件 $\mathcal{F}_s$ は、次のように定義される。

$$\mathcal{F}_s=\bigcup_{j\in J}\mathcal{F}_s^j$$

また、本稿では、$(I,S,\succ_I,\succ_S,\{\mathcal{F}_s\}_{s\in S})$ となる問題を考える。この場合においても、各教科 $j\in J$ についてそれぞれ考えることで、Kamada and Kojima(2024) と類似するパターンとして扱うことが可能になる。この時の、現職必置条件は、**教科 j において現職必置条件を満たす** と言い、$\forall i\in I_\alpha\cap I_j,\mu_i\neq\emptyset$ で表すことができる。これは、教科 $j\in J$ を持つ全ての現職教師が雇用されるマッチングのことである。ある教科 $j\in J$ について、その教科のマッチングの望ましさはいくつかの重要な特性によって評価することができる。この際の、正当な嫉妬とは、**教科 j における教科に基づいた正当な嫉妬** と言い、同じ教科 $j\in J$ を持つ 2 人の教師間での正当な嫉妬のことである。また、この時の教科公平とは、**教科 j において教科公平である** と言い、教科 j において、教科に基づいた正当な嫉妬を持つ教師がいない状態のことである。

解を見つけるために、カットオフに基づくメカニズムを利用する。まず、カットオフプロファイルの集合 $P:=\{1,\ldots,|I|,|I|+1\}^S$ を考える。この集合には、すべての $s\in S$ に対して p_s が p'_s 以下であるとき、かつそのときに限り $p\le p'$ となる半順序（partial order）$\le$ が与えられている。この空間は有限束（したがって完備束 (complete) でもある。）である。

各学校 $s\in S$ について、$i^{(s,l)}$ を、s の優先順位に従って下から l 番目の学生とする（例えば、s にとって最も順位の高い学生は $i^{(s,|I|)}$ であり、最も低い学生は $i^{(s,1)}$ である）。また、すべての $s\in S$ に対して $i^*=i^{(s,|I|+1)}$ となるような架空の学生 $i^*\in I$ を考え、各 $s\in S$ について選好 $\succ_s$ の定義域を、任意の $i\in I$ に対して $i^*\succ_s i$ が成立するように拡張する。

各教科 $j\in J$ について、優先順位カットオフを p_j で表す。このカットオフ p_j における学校 s の教科 $j\in J$ に関する需要 $D_s^j(p_j)$ とは、次のように定義される。

$D_s^j(p_j)=\{i\in I_j\mid i\succeq_s i^{(s,p_s^j)}\text{ and }s\succ_i\emptyset;\forall s'\in S_j,i\succeq_{s'}i^{(s',p_{s'}^j)}\implies s\succeq_i s'\}$

これは、I_j に属する教師の集合であり、その教師は学校 s でカットオフ p_s^j 以上に順位付けられ、かつ、自身が条件を満たす他のどの学校よりも学校 s を好むという意味である。

Kamada and Kojima(2024) に倣い、**教科別カットオフ調整関数** $T:P\to P$ は各学校

s と教科 j について、以下のように定義する。

$$T_s^j(p) = \begin{cases} p_s^j + 1 & \text{if } |D_s^j(p)| > c_s^j \\ p_s^j & \text{if } |D_s^j(p)| \le c_s^j \end{cases}$$

ここで、$(|I|+1)+1 = 1$ とする。なお、$p \in P$ が T の**不動点 *(fixed point)*** であるとは $T(p) = p$ を満たすことをいう。

数値例の内容をパラグラフ形式に変更する？

上で定義した需要集合 $D_s^j(p)$ と教科別カットオフ調整関数 T_s^j を、数値例で説明する。初期値 $p = (1, \dots, 1)$ から出発し、$|D_s^j(p)| > c_s^j$ のときにのみ p_s^j を 1 だけ引き上げる更新を反復する。まず $|J| = 2$（例 A）で基本的な「回し方」を確認し、ついで $|J| = 3$（例 B）で校間・教科間の相互作用を示す。

例 A（$|J| = 2$） $J = \{j, j'\}$, $S = \{s\}$, $I = \{i_1, i_2, i_3\}$ とする。定員は $c_s^j = 1$, $c_s^{j'} = 1$。免許集合は $I_j = \{i_1, i_3\}$, $I_{j'} = \{i_2\}$。学校 s の優先順位は $i_1 \succ_s i_2 \succ_s i_3$。初期カットオフは $(p_s^j, p_s^{j'}) = (1, 1)$ である。

$$\boxed{(1,1)} \xrightarrow[|D_s^j|=2>1]{T} \boxed{(2,1)} \xrightarrow[\text{据え置き}]{T} \boxed{(2,1)} \quad \text{（不動点）}$$

ラウンド 0 $(p = (1, 1))$

▷ カットオフ値：$i^{(s,1)} = i_3$

▷ 需要集合：

$$D_s^j(p) = \{i_1, i_3\} \quad (\ |D_s^j| = 2 > c_s^j = 1\ ), \qquad D_s^{j'}(p) = \{i_2\} \quad (\ |D_s^{j'}| = 1 = c_s^{j'}\ )$$

▷ 更新規則（超過需要のときのみ引き上げ）：

$$p_s^j:\ 1 \ \to\ \mathbf{2}, \qquad p_s^{j'}:\ \text{据え置き}$$

▷ 次の状態：

$$p = (\mathbf{2}, 1)$$

ラウンド 1 $(p = (2, 1))$

▷ カットオフ値：$i^{(s,2)} = i_2$

▷ 需要集合：

$$D_s^j(p) = \{i_1\} \quad (\ |D_s^j| = 1 = c_s^j\ ), \qquad D_s^{j'}(p) = \{i_2\} \quad (\ |D_s^{j'}| = 1 = c_s^{j'}\ )$$

▷ 更新規則（ちょうど需要のため据え置き）：

$$p_s^j: \text{ 据え置き}, \qquad p_s^{j'}: \text{ 据え置き}$$

▷ 次の状態：

$$p = (2, 1)$$

ラウンド 2 $(p = (2, 1))$

▷ 判定：両教科とも $|D| = c$ のため更新なし。
▷ 結論：以後変化せず、$\boxed{(p_s^j, p_s^{j'}) = (2, 1)}$ が不動点となる。

例 B（$|J| = 3$） $J = \{j, j', j''\},\ S = \{s, t\}$ とする。定員は $c_s^j = 1,\ c_s^{j'} = 1,\ c_t^j = 1,\ c_t^{j''} = 1$（すなわち $A(s) = \{j, j'\},\ A(t) = \{j, j''\}$）。教師集合は $I = \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\}$ で，免許と選好は次の通り（全員 $\succ \emptyset$）：

$$I_j = \{i_1, i_2, i_5\}, \quad I_{j'} = \{i_3\}, \quad I_{j''} = \{i_4\},$$

$$i_1, i_5 : s \succ t, \quad i_2 : t \succ s, \quad i_3 : s\text{のみ}, \quad i_4 : t\text{のみ}.$$

学校の優先順位（高い順）は

$$s:\ i_1 \succ i_5 \succ i_3 \succ i_2 \succ i_4, \qquad t:\ i_2 \succ i_1 \succ i_4 \succ i_3 \succ i_5.$$

初期カットオフは $(p_s^j, p_s^{j'}, p_t^j, p_t^{j''}) = (1, 1, 1, 1)$。

$$\boxed{(1,1,1,1)} \xrightarrow[|D_s^j|>1]{T} \boxed{(2,1,1,1)} \xrightarrow[|D_s^j|>1]{T} \boxed{(3,1,1,1)} \xrightarrow[|D_s^j|>1]{T} \boxed{(4,1,1,1)} \xrightarrow[|D_s^j|>1]{T} \boxed{(5,1,1,1)} \text{（不動点）}$$

ラウンド 0 $(p = (1, 1, 1, 1))$

▷ カットオフ値：$i(s, 1) = \text{最下位} = i_4, \quad i(t, 1) = \text{最下位} = i_5.$

▷ 需要集合と更新：

学校 s, 教科 j： $I_j = \{i_1, i_2, i_5\},\ i \succeq_s i_4 \Rightarrow \{i_1, i_2, i_5\}$ が通過候補

ただし tでも通る者は $s \succ_i t$のときのみ $D_s^j(p)$に入る。

t側は $p_t^j = 1 \Rightarrow i(t,1) = i_5$なので i_1, i_2, i_5はいずれも通過。

$\Rightarrow D_s^j(p) = \{i_1, i_5\}$ (i_2 は $t \succ s$ なので sを選ばない), $|D_s^j| = 2 > c_s^j (= 1)$

$\Rightarrow\ p_s^j$： $1 \to \mathbf{2}$.

学校 s, 教科 j'： $I_{j'} = \{i_3\},\ |D_s^{j'}| = 1 \leq 1\ \Rightarrow\ p_s^{j'}$ 据え置き.

学校 t, 教科 j： $D_t^j(p) = \{i_2\}\ (t \succ s),\ |D_t^j| = 1 \leq 1\ \Rightarrow\ p_t^j$ 据え置き.

学校 t, 教科 j''： $I_{j''} = \{i_4\},\ |D_t^{j''}| = 1 \leq 1\ \Rightarrow\ p_t^{j''}$ 据え置き.

▷ 次の状態：

$$p = (\mathbf{2}, 1, 1, 1)$$

ラウンド 1 $(p = (2, 1, 1, 1))$

▷ カットオフ値：$i(s,2) = i_2,\ \ i(t,1) = i_5$ (変化なし).

▷ 需要集合と更新：

学校 s, 教科 j： $i \succeq_s i_2 \Rightarrow \{i_1, i_2, i_5\}$ が候補だが,

i_2 は $t \succ s$ のため D_s^jに入らず, $D_s^j(p) = \{i_1, i_5\}$.

$|D_s^j| = 2 > 1\ \Rightarrow\ p_s^j$： $2 \to \mathbf{3}$.

他の 3 つは $|D| = 1\ \Rightarrow$ 据え置き.

▷ 次の状態：

$$p = (\mathbf{3}, 1, 1, 1)$$

ラウンド 2〜3 $(p = (3, 1, 1, 1) \to (4, 1, 1, 1))$

▷ カットオフ値の推移：$i(s,3) = i_3,\ i(s,4) = i_5$（単調に厳しくなる)。

▷ 需要集合：いずれの段階でも $D_s^j(p) = \{i_1, i_5\}$（i_2 は常に $t \succ s$)。したがって毎回 $|D_s^j| = 2 > 1$ となり,

$$p_s^j:\ 3 \to \mathbf{4}\ \to\ \mathbf{5}.$$

ラウンド 4 $(p = (5, 1, 1, 1))$

▷ カットオフ値：$i(s,5) = i_1$。

▷ 需要集合と判定：$D_s^j(p) = \{i_1\}$ で $|D_s^j| = 1 = c_s^j$。他の 3 つも $|D| = c$。更新なし。

▷ 結論：以後変化せず, $\boxed{(p_s^j, p_s^{j'}, p_t^j, p_t^{j''}) = (5, 1, 1, 1)}$ が不動点。

2.1節で説明した、Kamada and Kojima(2024) によると、上記教科別カットオフ調整関数を用いると、各教科 j において、以下の条件を満たす教師最適公平マッチング（TOFM）$\hat{\mu}^j$ を求めることができる。

(i)個人合理性 (individual rationality) : $\forall i \in I_j, \hat{\mu}_i^j \succ_i \emptyset,$

(ii)公平性 (fairness) : $\nexists i, i' \in I_j, \nexists s \in S_j$ s.t. $s \succ_i \hat{\mu}_i^j, i' \in \hat{\mu}_s^j, i \succ_s i',$

(iii)実現可能性 (feasibility) : $\forall s \in S_j, \hat{\mu}_s^j \in \mathcal{F}_s^j,$

(iv)教師最適性 (teacher optimality) : $\hat{\mu}_i^j \succeq_i \bar{\mu}_i^j$ (任意の $i \in I_j$ と、教科 j で実現可能、個人合理的、かつ公平な任意の $\bar{\mu}^j$ に対して)

ここで、$\forall i \in I_j$ に対して $\hat{\mu}_i = \hat{\mu}_i^j$、かつ、$\forall s \in S$ に対して $\hat{\mu}_s = \bigcup_{j \in A(s)} \hat{\mu}_s^j$ となるようなマッチング $\hat{\mu}$ を構成する。

制約 $\mathcal{F}_s$ が**容量制約**であるとは、ある整数 $q \in \mathbb{N}$ が存在して、任意の $I' \subseteq I$ について、$I' \in \mathcal{F}_s$ であることと $|I'| \leq q$ であることが同値であるときにいう。つまり、学校 s の容量制約とは、学校 s に所属する教師の人数が q を超えないことを要求する制約である。

2.3　主要定理

定理 1. 全ての $s \in S$ に対して $\mathcal{F}_s$ が容量制約であるならば、*TOFM* は常に現職必置条件を満たす。

証明. $\mathcal{F}_s$ が 容量制約であると仮定する。Kamada and Kojima(2024) より、一般上限制約は、SOFM を持つ。容量制約は一般上限制約であることより、TOFM である μ^* が存在する。背理法により、$\mu_{i'}^* = \emptyset$ となるような $i' \in I_\alpha$ が存在すると仮定する。(3) より、全ての $s \in S$ に対して $s \succ_{i'} \emptyset$ である。(2) より、$i' \in \mu'_{s'}$ となるような $s' \in S$ が存在する。$\mathcal{F}_s$ が容量制約であることから、$|\mu_{s'}^*| \leq q_{s'}$ である。

ケース 1: $|\mu_{s'}^*| < q_{s'}$ のとき

このとき、$|\mu_{s'}^* \cup \{i'\}| \leq q_{s'}$ である。以下のようにマッチング μ'' を定義する。

$$\mu_s'' = \begin{cases} \mu_s^* \cup \{i'\} & もし\ s = s'\ の場合, \\ \mu_s^* & もし\ s \neq s'\ の場合. \end{cases}$$

μ'' は実現可能なマッチング (FM) である。($|\mu_{s'}^* \cup \{i'\}| \leq q_{s'}$ であるため μ'' は実現可能であり、(3) より個人合理性を満たし、(1) より公平である。) TOFM の定義 (ii) より、$\mu_{i'}^* \succ_{i'} \mu_{i'}''$ でなければならない。しかし、$\mu_{i'}^* = \emptyset$、$\mu_{i'}'' = s'$ であり、かつ $s' \succ_{i'} \emptyset$ である。したがって、$\mu_{i'}^* \not\succ_{i'} \mu_{i'}''$ となる。これは TOFM の定義 (ii) に矛盾する。

ケース 2: $|\mu_{s'}^*| = q_{s'}$ のとき

このとき、$j \in \mu_{s'}^*$ となるような $j \in I \setminus I_\alpha$ が存在し、(1) より $i' \succ_{s'} j$ が成立する。以下

のようにマッチング μ''' を定義する。

$$\mu'''_s = \begin{cases} (\mu^*_s \setminus \{j\}) \cup \{i'\} & \text{もし } s = s' \text{ の場合,} \\ \mu^*_s & \text{もし } s \neq s' \text{ の場合.} \end{cases}$$

μ''' は実現可能なマッチング (FM) である。($|(\mu^*_{s'} \setminus \{j\}) \cup \{i'\}| = q_{s'}$ であり定員を満たすため μ''' は実現可能であり、(3) より個人合理性を満たし、(1) より公平である。) TOFM の定義 (ii) より、$\mu^*_{i'} \succ_{i'} \mu'''_{i'}$ でなければならない。しかし、$\mu^*_{i'} = \emptyset$、$\mu'''_{i'} = s'$ であり、かつ $s' \succ_{i'} \emptyset$ である。したがって、$\mu^*_{i'} \not\succ_{i'} \mu'''_{i'}$ となる。これは TOFM の定義 (ii) に矛盾する。

ケース 1 とケース 2 のいずれにおいても矛盾が導かれたため、最初の仮定 ($\mu^*_{i'} = \emptyset$ となる $i' \in I_\alpha$ が存在する) は偽である。したがって、全ての $i \in I_\alpha$ に対して $\mu^*_i \neq \emptyset$ である。ゆえに、TOFM は定員制約の下で常に現職必置条件を満たす。 □

定理 2. *2.2* 節で定義したマッチング $\hat{\mu}$ が教科別教師最適公平マッチング (*subject-TOFM*) である。

証明. 定義 2 の (i) を示すために、まず $\hat{\mu}$ が実現可能であることを示す。任意の $s \in S$ と任意の $j \in J$ をとる。

- **ケース 1:** $j \in A(s)$ **の場合。** $\hat{\mu}^j_s \in \mathcal{F}^j_s$ である。$\hat{\mu}$ の定義より $\{i \in I_j : i \in \hat{\mu}^j_s\} = \{i \in I_j : i \in \hat{\mu}_s\}$。$\hat{\mu}^j_s \in \mathcal{F}^j_s$ であるから、$|\{i \in I_j : i \in \hat{\mu}^j_s\}| = |\{i \in I_j : i \in \hat{\mu}_s\}| \leq c^s_j$。
- **ケース 2:** $j \notin A(s)$ **の場合。** このとき、$c^j_s = 0$ である。$|\{i \in I_j : i \in \hat{\mu}_s\}| = 0 = c^j_s$。

したがって、$\hat{\mu}_s \in \mathcal{F}_s$ である。

次に、$\hat{\mu}$ が個人合理的であることを示す。任意の $i \in I$ をとると、ある $j \in J$ が存在し、$i \in I_j$ となる。$\hat{\mu}^j$ は個人合理的であるから、$\hat{\mu}_i = \hat{\mu}^j_i \succeq_i \emptyset$。

次に、$\hat{\mu}$ が教科公平であることを示す。$j \equiv A(i) = A(i')$ となる任意の $i, i' \in I$ をとる。背理法により、ある $s \in S$ が存在し、$s \succ_i \hat{\mu}_i, i' \in \hat{\mu}_s, i \succ_s i'$ が成り立つと仮定する。$i' \in \hat{\mu}_s$ であるから、$\hat{\mu}$ の定義より $s \in S_j$ である。仮定より、$s \succ_i \hat{\mu}^j_i, i' \in \hat{\mu}^j_s, i \succ_s i'$ となる。これは $\hat{\mu}^j$ が TOFM であること (条件 (ii) 公平性) に矛盾する。したがって、$\hat{\mu}$ は教科公平である。

定義 2 の (ii) 教師最適性を示すために、任意の $i \in I$ と、実現可能、個人合理的、かつ教科公平である任意の μ' をとる。$j \equiv A(i)$ とする。$\hat{\mu}^j$ の定義より、$\hat{\mu}^j$ は教科 j における TOFM であり、条件 (iv) を満たす。ここで、$\forall i' \in I_j$ に対して $\bar{\mu}^j_{i'} = \mu'_{i'}$、$\forall s \in S_j$ に対して $\bar{\mu}^j_s = \{i' \in I_j : i' \in \mu'_s\}$ となるような $\bar{\mu}^j$ を構成する。

この $\bar{\mu}^j$ が教科 j で実現可能、個人合理的、かつ公平であることを示す。

$\bar{\mu}^j$ が教科 j で実現可能であること　任意の $s \in S_j$ をとる。μ' は実現可能なので $\mu'_s \in \mathcal{F}_s$ である。$\mu'_s \in \mathcal{F}_s$ であるから、任意の $k \in J$ について $|\{i' \in I_k : i' \in \mu'_s\}| \leq c^k_s$ が成り立つ。

$j \in J$ なので、特に $|\{i \in I_j : i \in \mu'_s\}| \leq c^j_s$ である。$\bar{\mu}^j$ の定義より、$\bar{\mu}^j_s = \{i' \in I_j : i' \in \mu'_s\}$ なので、$|\bar{\mu}^j_s| = |\{i' \in I_j : i' \in \mu'_s\}| \leq c^j_s$ となる。したがって、$\bar{\mu}^j_s \in \mathcal{F}^j_s$ であり、$\bar{\mu}^j$ は教科 j で実現可能である。

$\bar{\mu}^j$ が教科 j で個人合理的であること　任意の $i \in I_j$ をとる。前提より、マッチング μ' は個人合理的であるから、$\mu'_i \succ_i \emptyset$ が成り立つ。$\bar{\mu}^j$ の定義によれば $\bar{\mu}^j_i = \mu'_i$ であるため、$\bar{\mu}^j_i \succ_i \emptyset$ もまた真である。したがって、$\bar{\mu}^j$ は教科 j で個人合理的である。

$\bar{\mu}^j$ が教科 j で公平であること　任意の $i', i'' \in I_j$ をとる。このとき $A(i') = A(i'') = j$ である。背理法により、ある $s \in S_j$ が存在し、$s \succ_{i'} \bar{\mu}^j_{i'}, i'' \in \bar{\mu}^j_s,$ かつ $i' \succ_s i''$ が成り立つと仮定する。

しかし、前提としてマッチング μ' は教科公平である。これは、$A(i') = A(i'')$ であることから、$s \succ_{i'} \mu'_{i'}, i'' \in \mu'_s,$ かつ $i' \succ_s i''$ となるような学校 $s \in S$ が存在しないことを意味する。$\bar{\mu}^j$ の定義（$\bar{\mu}^j_{i'} = \mu'_{i'}, \bar{\mu}^j_s = \{k \in I_j \mid k \in \mu'_s\}$）を考慮すると、我々の仮定は μ' の教科公平性に直接矛盾する。したがって、$\bar{\mu}^j$ は教科 j で公平である。

以上より、$\bar{\mu}^j$ は教科 j において実現可能、個人合理的、かつ公平であることが示された。$\hat{\mu}^j$ は教科 j における TOFM であるから、その教師最適性の定義より、任意の $i' \in I_j$ に対して $\hat{\mu}^j_{i'} \succeq_{i'} \bar{\mu}^j_{i'}$ が成り立つ。

$\hat{\mu}$ と μ' の構成方法から、$\hat{\mu}_{i'} = \hat{\mu}^j_{i'}$ および $\mu'_{i'} = \bar{\mu}^j_{i'}$ であるため、

$$\hat{\mu}_{i'} \succeq_{i'} \mu'_{i'}$$

が導かれる。これは任意の教師について成り立つため、$\hat{\mu}$ は教科別教師最適公平マッチング（subject-TOFM）である。

□

定理 3. $\hat{\mu}$ は現職必置条件を満たす。

証明. 定理 2 の証明の冒頭で確認した通り、$\hat{\mu}$ は実現可能である。したがって、残るは全ての現職教師が割り当てを得ていること、すなわち $\forall i \in I_\alpha$ に対して $\hat{\mu}_i \neq \emptyset$ であることを示せばよい。

任意の $i \in I_\alpha$ をとり、$j \equiv A(i)$ とする。$\hat{\mu}^j$ は教科 j における TOFM であり、定理 1 より、$\hat{\mu}^j$ は教科 j において現職必置条件を満たしている。

よって、$\hat{\mu}^j_i \neq \emptyset$ が成り立つ。$\hat{\mu}$ の構成方法から $\hat{\mu}_i = \hat{\mu}^j_i$ であるため、$\hat{\mu}_i \neq \emptyset$ となる。これは任意の $i \in I_\alpha$ について真であるため、$\hat{\mu}$ は現職必置条件を満たしている。

よって、subject-TOFM は教科制約の下で常に現職必置条件を満たしている。 □

2.4 まとめと考察

本章では、各教員が単一免許を持つ状況を明示的に定式化し、(i) 実現可能性、(ii) 個人合理性、(iii) 教科公平性の三条件を同時に満たす割当と、カットオフ調整関数の不動点が一対一に対応することを確認した（定理 1 の含意)。この対応により、初期カットオフから需要超過のある教科・学校のみカットオフ値を引き上げていく単純な反復で、理論的に適切なマッチングを網羅的に構成できる。すなわち、不動点のカットオフから得られる割当は三条件を満たし、逆に三条件を満たす任意の割当は何らかの不動点に対応する。

反復の途中（不動点に達する前）であっても、各教員は常に「通過できる学校の中で最も好む学校」に応募するよう定義されているため、個人合理性と公平性は保たれる一方、実現可能性のみが崩れ得る（定員超過など）ことも併せて確認した。したがって、反復の目的は「公平性・個人合理性は維持したまま、実現可能性を満たすまでカットオフを引き上げる」ことにある。

さらに、本章で導入した仮定の下では、構成したマッチングが現職必置条件 (すべての現職教員が必ずいずれかの学校に割り当てられる）を満たすことを示した（定理 2)。これは、教科ごとに得られる教師最適・教科公平な割当を束ねて全体の割当を構成すると、各現職教員の割当が非空であることから従う。実務的には「現職の雇用保障を壊さずに、応募希望と科目定員を同時に調整できる」ことを意味する。

含意と限界. (1) 基本モデルのカットオフ反復は、単純で実装容易（需要超過の箇所だけを機械的に引き上げればよい）であり、最終状態が三条件を満たすことが保証されるため、制度設計の基盤として有用である。(2) 一方で、前提は「各教員が単一免許」という単純化に依拠している。複数免許や教科間の相互作用が強い環境では、同一の手続きが機能しない場合があるため、次章では複数免許を許す拡張モデルに進み、教科間連関を踏まえたカットオフ調整とその性質（弱い教科公平性の下での存在・現職必置の保証）を検討する。

3 拡張モデル：複数免許を持つ教員

本章では，2 章における「問題」の定義および「マッチング」の定義をそのまま採用する。すなわち，集合 I, S，各教師の選好 $\succ_i$，各学校の優先順位 $\succ_s$，各学校の実現可能集合族 $\mathcal{F}_s$，および写像 μ に関する記号と意味は 2 章と同一である。

教師と教科の割り当て関数 A は、各教師をその教師が免許を持つ教科の空でない集合に対応付ける。

$$A : I \to 2^J \setminus \emptyset$$

ある教科 $j \in J$ に関連する教師の集合 I_j と学校の集合 S_j は、2 章と同様に定義される。再配置前に教師 i が担当していた主担当教科の集合を $B(i)$ とし、$|B(i)| = 1$ と仮定する。また、教師 i が免許を持つものの、以前は担当していなかった教科の集合を $C(i) = A(i) \setminus B(i)$

とする。

学校の実現可能性制約 $\mathcal{F}_s$ は、各教師 $i \in \mu_s$ に対して $J_s(i) \in A(i)$ を満たす**教科割り当て関数** (subject assignment function) $J_s : \mu_s \to J$ に依存し、以下のように定義される。

$$\mathcal{F}_s = \{\mu_s \subseteq I : \exists J_s : \mu_s \to J \text{ s.t. } \forall j \in J, |\{i \in \mu_s : J_s(i) = j\}| \leq c_s^j\}$$

教師の集合 μ_s が学校 s にとって実現可能であるとは、受け入れられた各教師をその教師が免許を持つ教科のいずれか一つに割り当てることで、学校の教科ごとのキャパシティを満たすような方法が存在する場合をいう。

マッチング μ の質は、いくつかの重要な特性によって評価される。本章でも、2 章で導入した定義をそのまま継承する。とくに「実現可能（feasible)」「個人合理的（individually rational)」「正当化された嫉妬（justified envy)」「公平（fair)」「効率的（non-wasteful)」「安定（stable)」「現職必置条件（in-service teacher condition)」はすべて 2 章の定義に従う。

公平性の概念は、この新しい設定に合わせて調整される。ある教師 i が教師 i' に対して**教科に基づいた正当な嫉妬** (subject justified envy) を持つとは、教師 i が教えることのできる教科の集合が教師 i' のそれ以上であり（すなわち、$A(s) \cap A(i') \subset A(s) \cap A(i)$)、かつ標準的な正当な嫉妬の条件が満たされる（$\exists s \in S$ s.t. $s \succ_i \mu_i, i' \in \mu_s, i \succ_s i'$）場合をいう。マッチングが**教科公平** (subject-fair) であるとは、他の教師に対して教科に基づいた正当な嫉妬を持つ教師が誰もいない状態を指す。

さらに、マッチングが教科 j において現職必置条件を満たす (α-feasible on j) であることや教師最適公平マッチング (TOFM) についても、2 章の定義をそのまま継承する。

リマークの内容を整える

Remark 1 (弱すぎる教科公平の定義について). 本章で導入した「教科に基づいた正当な嫉妬（subject justified envy)」と「教科公平（subject-fair)」を、$A(i) = A(i')$（教えられる教科集合が一致）という場合にのみ検知するように弱めて定義すると、公平性の概念が弱くなりすぎる。

直観的には、i の方が i' より広い教科集合を持ち（すなわち $A(i') \subsetneq A(i)$)、かつ標準的な意味で i が i' に対して正当な嫉妬を持つ状況であっても、$A(i) = A(i')$ でないという理由だけで「教科に基づいた正当な嫉妬」として数え上げられないからである。このとき、そのマッチングは実際には不公平であるにもかかわらず、形式的には「教科公平」と判定されうる。言い換えれば、$A(i) = A(i')$ の場合に限って嫉妬を認める定義は、$A(i) \neq A(i')$ のすべての局面（とりわけ $A(i') \subsetneq A(i)$）で生じる正当な嫉妬を黙殺してしまい、公平性テストとしての弁別力を失わせる。

（例）ある学校 s において、i は i' より多くの教科資格を持ち（$A(i') \subsetneq A(i)$)、標準的条件（$\exists s \in S$ s.t. $s \succ_i \mu_i$, $i' \in \mu_s$, $i \succ_s i'$）が満たされるとする。この状況は実質的な不公正（i は s に割り当てられるべき）を示すが、$A(i) = A(i')$ を満たさないため、弱い定義では「教科に基づいた正当な嫉妬」と認識されず、結果としてそのマッチングが「教

科公平」と誤って評価されうる。

以上より、$A(i) = A(i')$ に限定する弱い定義は、公平性の本質的な違反を看過し得るため、分析目的に照らして不適切に弱い。

Remark 2 (強すぎる教科公平の定義について). 本章の「教科に基づいた正当な嫉妬」や「教科公平」の検査条件を、担当教科集合の交差が非空であること（$A(i) \cap A(i') \neq \emptyset$）を満たすだけで嫉妬の候補に含めるように強めると、公平性の概念は過度に強くなる。

直観的には、i が学校 s における（現在 i' が担っている）特定の教科枠を実際には担当できない局面であっても、$A(i) \cap A(i') \neq \emptyset$ というだけで「入れ替え可能」と見なされ、i の不満が「教科に基づく正当な嫉妬」と数え上げられてしまう。この過剰検出により、フェアと見なせるマッチングの集合が空になり、結果として教師最適教科公平マッチング（TOFM）が存在しない事態を招きうる。

反例教師 $I = \{i_A, i_B, i_{AB}\}$、学校 $S = \{s_A, s_B\}$ を考える。それぞれが担当できる教科集合と、学校側の必要教科は次の通り：

$$A(i_A) = \{A\}, \quad A(i_B) = \{B\}, \quad A(i_{AB}) = \{A, B\}, \qquad s_A : \text{教科 } A,\ s_B : \text{教科 } B.$$

各教師は配属を $\emptyset$ より好み、学校の優先順位は

$$\succ_{s_A}:\ i_B \succ i_{AB} \succ i_A, \qquad \succ_{s_B}:\ i_A \succ i_{AB} \succ i_B$$

とする（すなわち、s_A では B 専任の i_B が、s_B では A 専任の i_A がともに i_{AB} より上位にランクされている）。この設定では、実現可能性から s_A には $\{i_A, i_{AB}\}$ のいずれか、s_B には $\{i_B, i_{AB}\}$ のいずれかを割り当てるしかない。

- もし $\mu(s_A) = i_{AB},\ \mu(s_B) = i_B$ とすると、i_A は未配属であり、$A(i_A) \cap A(i_{AB}) = \{A\} \neq \emptyset$ を理由に s_B にいる i_{AB} へ（教科 B の枠であるにもかかわらず）嫉妬が成立してしまう。強い定義ではこのような特定枠に関する実現可能性を無視した交差ベースの嫉妬もカウントされるため、μ は教科公平でない。
- 逆に $\mu(s_A) = i_A,\ \mu(s_B) = i_{AB}$ とすると、未配属の i_B が $A(i_B) \cap A(i_{AB}) = \{B\} \neq \emptyset$ を根拠に s_A の i_{AB} に嫉妬し、同様に教科公平に反する判定となる。

さらに i_{AB} を未配属として $\mu(s_A) = i_A,\ \mu(s_B) = i_B$ としても、交差条件の下では i_{AB} が両校のいずれかに対して $A(i_{AB}) \cap A(i_A) \neq \emptyset$ あるいは $A(i_{AB}) \cap A(i_B) \neq \emptyset$ を理由に嫉妬を主張でき、やはり教科公平が壊れてしまう。

帰結。この反例が示す通り、$A(i) \cap A(i') \neq \emptyset$ を満たすだけで嫉妬を認定する（＝交差ベースの強い教科公平）定義は、特定の学校・特定の教科枠における 実現可能な入れ替えという本質を捉え損ない、フェアと判定されるマッチングを消し去ってしまうことがある。ゆえに、TOFM の存在を保証したい分析目的に対しては、この定義は強すぎる。

3.1　仮定

本モデルでは、以下の 4 つの重要な仮定を導入する。

仮定 (1)
任意の学校 $s \in S$、現職教師 $i \in I_\alpha$、現職教師 $j \in I \setminus I_\alpha$ について、$[i \succ_s \emptyset$ かつ $j \succ_s \emptyset] \implies i \succ_s j$ とする。これは、もし両者がその学校にとって受け入れ可能であるならば、学校は現職教師を優先しなければならないと言うことである。

仮定 (2)'　後述する例 1 で浮き彫りになった問題に対処するため、主担当教科に基づいて現職教師を優先する、さらなる仮定を導入する。この仮定は、以前の仮定 (2) を置き換えるものである。以下の条件を満たすマッチング μ が存在するとする。

1. $\forall s \in S, \mu_s \in \mathcal{F}_s$。
2. $\forall i \in I_\alpha$ について、i がその主担当教科 $j = B(i)$ を教えるために学校 s に割り当てられるような、$s \in S$ が存在する。

すなわち、全ての現職教師が自身の主担当教科の職に割り当てられるような、実現可能なマッチングが少なくとも一つは存在すると仮定する。

仮定 (3)
すべての $i \in I_\alpha$ とすべての $s \in S$ について、$s \succ_i \emptyset$ が成り立つとする。これは、すべての現職教師は、いかなる学校も受け入れ可能な割り当て先であると見なすと言うことである。

仮定 (4)　任意の学校 $s \in S$ と、その学校が募集する任意の教科 $j \in A(s)$ について、

$$\forall s \in S, \forall i, i' \in I, \forall j \in A(s),\ \text{もし } B(i) = \{j\} \text{ かつ } j \in C(i'),\ \text{ならば } i \succ_s^j i'.$$

が成り立つとする。なお、ここでは、$\succ_s^j$ は、教科 j の資格を持つ教師に対する学校 s の選好を表すものとする。

これは、学校は、主担当教科が j である教師を、j が主担当科目でない教師よりも優先する。

学校 s の教科 j における需要関数 $D_s^j(p)$ は、以下のように定義される。

$$\begin{aligned} D_s^j(p) = \{ i \in I_j \mid i \succeq_s i^{(s, p_s^j)} &\text{ かつ } s \succ_i \emptyset \text{ であり、} \\ &\forall s' \in S \setminus \{s\}, \forall j' \in A(i) \cap A(s'), i \succeq_{s'} i^{(s', p_{s'}^{j'})} \implies s \succ_i s' \} \end{aligned}$$

これは、その教師が学校 s の教科 j におけるカットオフを上回り、かつ、自身が条件を満たす他のいかなる割り当て候補となる学校 s' の科目 j' よりも学校 s での職を好む場合に、教師 i が学校 s の教科 j における需要集合に含まれることを意味する。

教科別カットオフ調整関数 $T : P \to P$ は、以下のように定義される。

$$T_s^j(p) = \begin{cases} p_s^j + 1 & \text{if } |D_s^j(p)| > c_s^j \\ p_s^j & \text{if } |D_s^j(p)| \leq c_s^j \end{cases}$$

ここで、$(|I| + 1) + 1 = 1$ とする。なお、$p \in P$ が T の**不動点** ***(fixed point)*** であるとは $T(p) = p$ を満たすことをいう。

半順序集合 $(X, \succeq)$ において、任意の $x, y \in X$ に対して、上限 $\sup_{\succeq}\{x, y\}$ と下限 $\inf_{\succeq}\{x, y\}$ が常に存在する時、この半順序集合を **束（*Lattice*）** と呼ぶ。これは、集合 X の中からどの 2 つの元（要素）を選んでも、その 2 つを「上から押さえる」ことができる元の中で最小のもの（上限）と、「下から支える」ことができる元の中で最大のもの（下限）が、必ずその集合 X の中に見つかる、という性質を表している。

半順序集合 $(X, \succeq)$ において、空集合ではない任意の部分集合 $Y \subseteq X$ に対して、上限 $\sup_{\succeq} Y$ と下限 $\inf_{\succeq} Y$ が常に存在する時、この半順序集合を **完備束（*Complete Lattice*）** と呼ぶ。これは、束の性質をさらに強力にしたものであり、2 つの元だけでなく、どのような部分集合（元の集まり）を持ってきても、その集合全体に対する上限と下限が必ず集合 X の中に存在する、ということを意味する。有限集合だけでなく、無限個の元からなる部分集合についてもこの条件が成り立つ。

定理. $(L, \leq)$ を完備束とし、$f : L \to L$ を増加関数、すなわち、$x \leq y$ ならば $f(x) \leq f(y)$ が成り立つとする。このとき、f の不動点の集合 $\{u \in L : f(u) = u\}$ は $\leq$ の下で完備束をなす。特に、f は最小不動点 $\underline{u}$ と最大不動点 $\overline{u}$ を持つ。[3]

もし p がこの関数 T の不動点（fixed point）であるならば、$\bigcup_{j \in A(s)} D_s^j(p) \in \mathcal{F}_s$ となる。これは、需要関数から得られる教員の集合が、各学校にとって実現可能であることを意味する。この不動点から最終的なマッチング μ^p を以下のように構成することができる。

$$\mu_s^p = \bigcup_{j \in A(s)} D_s^j(p)$$

これは、各学校に対して、その学校が募集するすべての教科にわたる需要のある教師の和集合を割り当てることで行われている。

[3] https://pauldelatte.github.io/files/L3.pdf より

不動点の例と非不動点の例／教科公平性の確認

本節では、カットオフ調整関数 T に対して、不動点となるカットオフと非不動点となるカットオフの具体例を与え、併せて教科公平性（subject-fairness）の成否を確認する。

共通の基本設定　学校は A, B の 2 校、生徒は $1, 2, 3, 4$ とし、定員は $c_A = 1,\ c_B = 2$。学校の優先順位は $A : 1 \succ 2 \succ 3 \succ 4$、$B : 2 \succ 3 \succ 1 \succ 4$。生徒の選好は $1 : A \succ B \succ \emptyset,\ 2 : B \succ A \succ \emptyset,\ 3 : B \succ A \succ \emptyset,\ 4 : B \succ \emptyset$ とする。

例 A（不動点）　カットオフ $p = (p_A, p_B) = (4, 3)$ とする。このとき需要は $D_A(p) = \{1\}$、$D_B(p) = \{2, 3\}$ であり、いずれも定員内なので $T(p) = p$。対応するマッチングは $\mu(1) = A,\ \mu(2) = B,\ \mu(3) = B,\ \mu(4) = \emptyset$。この μ は実現可能・個人合理的であり、かつ誰も正当化された嫉妬を持たないので（同一教科で見ても）教科公平である。

例 B（非不動点）　カットオフ $p = (2, 2)$ とする。このとき $D_A(p) = \{1\}$、$D_B(p) = \{2, 3, 4\}$ で $|D_B(p)| = 3 > c_B$ となり、$T(p) = (2, 3) \neq p$。すなわち p は不動点ではない。

非不動点時の性質　非不動点であっても、需要集合の定義より各生徒は常に「通過できる学校の中で最も好む学校」に応募するため、対応する割当 μ^p は個人合理的である。また需要の構成上、正当化された嫉妬（同一教科に限定した教科に基づく正当化嫉妬を含む）は生じない。崩れ得るのは実現可能性（例 B のように定員超過が発生）である。

結論（要点）

- p が不動点なら、対応する μ^p は実現可能・個人合理的・（教科）公平である。
- p が不動点でない場合、「教科公平性が必ず壊れる」わけではない。壊れ得るのは実現可能性のみである。

Remark 3 (弱すぎる教科公平の定義に関する注意). 教科集合が一致する場合（$A(i) = A(i')$）にしか「教科に基づく正当化嫉妬」を認めない定義は、$A(i') \subset A(i)$ のように教科集合が包含関係にあるケースで不公正を見逃すため、分析上は弱すぎる。

3.2　主要定理

定理 4. もしカットオフのプロファイル $p \in P$ が関数 T の不動点であるならば、それによって定まるマッチング μ^p は教科公平（*subject-fair*）である。

実現可能性、個人合理性も追加で証明する。

証明. カットオフのプロファイル $p \in P$ が T の不動点であると仮定する。背理法により、μ^p が弱い教科公平でないと仮定する。このとき、$A(s) \cap A(i') \subset A(s) \cap A(i)$ かつ $s \succ_i \mu_i^p$, $i' \in \mu_s^p$, $i \succ_s i'$ を満たすような教師 $i, i' \in I$ と学校 $s \in S$ が存在する。$i' \in \mu_s^p$ であるから、μ_s^p の定義より、$i' \in D_s^j(p)$ かつ $j \in A(i')$ となるような教科 $j \in A(s)$ が存在する。$i' \in D_s^j(p)$ であるから、$i' \succeq_s i^{(s,p_s^j)}$ が成り立つ。一方、$A(s) \cap A(i') \subset A(s) \cap A(i)$ かつ $j \in A(s) \cap A(i')$ であることから、$j \in A(s) \cap A(i)$ である。すなわち、$j \in A(i)$ となる。$i \succ_s i'$ かつ $i' \succeq_s i^{(s,p_s^j)}$ であるから、優先順位の推移性より $i \succ_s i^{(s,p_s^j)}$ が成り立つ。

まず、$\mu_i^p = \emptyset$ のケースを考える。このとき、i は需要集合 $D_s^j(p)$ には含まれない。前段の議論から i は 学校 s の科目 j でのカットオフは満たしているので、$i \notin D_s^j(p)$ となる理由は、i が s よりも厳密に好む別の選択肢が存在するためでなければならない。すなわち、$i \succeq_{s'} i^{(s',p_{s'}^{j'})}$ かつ $s' \succ_i s$ となるような、別の学校 s' の科目 j'（ただし $s' \in S \setminus \{s\}, j' \in A(i) \cap A(s')$）が存在する。しかし、前提より $\mu_i^p = \emptyset$ であるから、i は最終的に s' にも割り当てられないため、$i \notin D_{s'}^{j'}(p)$ でもある。したがって、この論法を繰り返すと、$s'' \succ_i s'$ となる、さらに好ましい学校 s'' が存在することになる。この手続きは無限の選好サイクル（$\cdots \succ_i s'' \succ_i s' \succ_i s$）を示唆するが、これは学校 S と教科 J の集合が有限であるという事実に矛盾する。

次に、$\mu_i^p \neq \emptyset$ のケースを考える。教師 i の割り当て先を $s' \equiv \mu_i^p$ とおく。このとき、定義より $i \in \mu_{s'}^p$ となる。したがって、$\mu_{s'}^p$ の定義から、ある教科 $j' \in A(s')$ について $i \in D_{s'}^{j'}(p)$ となる。我々は元々、教師 i が学校 s において嫉妬を持つ状況を考えており、$s \neq s'$ である。前段の議論から、$j \in A(i) \cap A(s)$ かつ $i \succeq_s i^{(s,p_s^j)}$ が成立している。$i \in D_{s'}^{j'}(p)$ であることの定義は、i がカットオフを満たす他のいかなる学校（この場合は s）よりも s' を好むことを要求する。よって、$\mu_i^p = s' \succ_i s$ でなければならない。しかし、これは元々の弱い教科に基づいた嫉妬の仮定である $s \succ_i \mu_i^p = s'$ と矛盾する。

更に、μ^p が実現可能であることを背理法を用いて示す。ある学校 $s \in S$、教科 $j \in J$ が存在して $|D_s^j(p)| > c_s^j$ と仮定する。D_s^j の定義より、このとき 学校 s の教科 j では定員超過が生じているので、T は 学校 s の教科 j のカットオフ値を引き上げるはずである。これは p が T の不動点（$T_s^j(p) = p$）であることに反する。よって任意の s, j で $|D_s^j(p)| \leq c_s^j$ が成り立つ。μ^p は各校に $D_s^j(p)$ をそのまま割り当てる構成であるから、$\mu_s^p = D_s^j(p) \in \mathcal{F}_s$、すなわち μ^p は実現可能である。

最後に、μ^p が個人合理的であることを示す。任意の $i \in I$ をとる。定義より各 i は「自分が通過する学校」の集合の中で最も好む学校に応募し、通過校がなければ $\emptyset$ を選ぶ。したがって、$\mu_i^p \neq \emptyset$ のときは $\mu_i^p \succ_i \emptyset$、通過校がないときは $\mu_i^p = \emptyset$ であり自明に個人合理的である。ゆえに μ^p は個人合理的である。

□

定理 5. マッチング μ^p が現職必置条件を満たすような、関数 T の不動点 p が存在する。

証明. $\widehat{I} \equiv I_\alpha$ とおく。全ての $i \in \widehat{I}$ について、$\widehat{A}(i) \equiv B(i)$ とする。すなわち、全ての $i \in \widehat{I}$ について $|\widehat{A}(i)| = 1$ である。ここでは、$\widehat{I}$ と S の間のマッチング μ を考える。こ

のとき、実現可能性制約を次のように定義する。

$$\widehat{\mathcal{F}}_s = \{\mu_s \subset \widehat{I} : \forall j \in J, |\{i \in \mu_s : \widehat{A}(i) = \{j\}\}| \leq c_s^j\}$$

複数教科制約であるから、(仮定 1) は満たされる。$I \setminus I_\alpha = \emptyset$ であるから、(仮定 2) も満たされる。元の問題 $(I, S, \succ_I, \succ_S, \mathcal{F}_s)$ における (仮定 3) より、(i) と (ii) を満たすマッチング μ が存在する。ここで、全ての $i \in \widehat{I}$ について $\widehat{\mu}_i = \mu_i$ となるように、$\widehat{\mu}$ を定義する。(仮定 3)' より、$\widehat{\mu}_s \in \widehat{\mathcal{F}}_s$ であり、かつ全ての $i \in \widehat{I}$ についてある $s \in S$ が存在して $i \in \widehat{\mu}_s$ となる。したがって、$\widehat{\mu}$ は (元の) 仮定 (3) を満たす。元の問題 $(I, S, \succ_I, \succ_S, \mathcal{F}_s)$ における (仮定 4) より、全ての $i \in I_\alpha (= \widehat{I})$ と全ての $s \in S$ について、$s \succ_i \emptyset$ である。以上より、(このサブ問題において) 仮定 (1) から (4) は全て満たされる。

$|\widehat{A}(i)| = 1$ という条件と $\widehat{\mathcal{F}}_s$ の構成方法から、この制約は教科制約（subject constraint）である。この制約が教科制約であることから、定理 2 より、問題 $(\widehat{I}, S, \succ_{\widehat{I}}, \succ_S, \widehat{\mathcal{F}}_s)$ において、で現職必置条件を満たすような教科別教師最適公平マッチング（subject-TOFM）$\widehat{\mu}$ が存在する。

$\widehat{i}^{(s,j,l)}$ を、学校 s の優先順位 $\succ_s$ に従って並べたときに、集合 $\{i\}_{i \in \widehat{I}_j}$ の中で l 番目に順位の低い教師とする。任意の $s \in S$ と $j \in J$ をとる。

$$p^\star_{(s,j)} = \begin{cases} \min\{l \mid \widehat{i}^{(s,j,l)} \in \widehat{\mu}_s^j\} & \text{if } \widehat{\mu}_s^j \neq \emptyset, \\ |\widehat{I}_j| + 1 & \text{if } \widehat{\mu}_s^j = \emptyset. \end{cases}$$

需要集合を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \widehat{D}_s^j(p_j^\star) = \{ i \in I_j \mid & i \succeq_s i^{(s,j,p^\star_{(s,j)})} \text{ かつ } s \succ_i \emptyset; \\ & \text{かつ } \forall s' \in S_j, i \succeq_{s'} i^{(s',j,p^\star_{(s',j)})} \implies s \succeq_i s' \} \end{aligned}$$

$\widehat{\mu} = \widehat{\mu}^{p^\star}$ を示す　（すなわち、全ての $s \in S, j \in J$ について、$\widehat{\mu}_s^j = \widehat{\mu}^{p^\star}_{(s,j)} = \widehat{D}_s^j(p_j^\star)$ であることを示す）

$\widehat{\mu}_s^j \subseteq \widehat{D}_s^j(p_j^\star)$ を示す　任意の $i \in \widehat{\mu}_s^j$ をとる。$i = \widehat{i}^{(s,j,l)}$ となるような l を考える。$i \in \widehat{\mu}_s^j$ ということと、$p^\star_{(s,j)}$ の定義から、$i = \widehat{i}^{(s,j,l)} \succeq_s \widehat{i}^{(s,j,p^\star_{(s,j)})}$ が成り立つ。ここで、背理法により、$i \succeq_{s'} \widehat{i}^{(s',j,p^\star_{(s',j)})}$ かつ $s' \succ_i s = \widehat{\mu}_i$ となるような $s' \in S_j$ が存在すると仮定する。このとき、$s' \succ_i \widehat{\mu}_i$ である。$p^\star_{(s',j)}$ の定義から、カットオフランクの教師はマッチングに含まれるため、$\widehat{i}^{(s',j,p^\star_{(s',j)})} \in \widehat{\mu}_{s'}^j$ である。この状況は、教師 i が学校 s' において、そこに割り当てられている教師 $\widehat{i}^{(s',j,p^\star_{(s',j)})}$ に対して正当化された嫉妬を持つことを意味し、これは $\widehat{\mu}$ が教科公平（subject-fair）であるという事実に矛盾する。したがって、背理法の仮定は偽であり、全ての $s' \in S_j$ について、$i \succeq_{s'} \widehat{i}^{(s',j,p^\star_{(s',j)})}$ ならば $s \succeq_i s'$ でなければならない。$\widehat{\mu}$ は個人合理的（I.R.）であるから、$\widehat{\mu}_i = s \succ_i \emptyset$ である。以上より、$i \succeq_s \widehat{i}^{(s,j,p^\star_{(s,j)})}$、

$s \succ_i \emptyset$、そして「全ての $s' \in S_j$ について $i \succeq_{s'} \widehat{i}^{(s',j,p^\star_{(s',j)})} \Rightarrow s \succeq_i s'$」が全て成立するため、$i \in \widehat{D}^j_s(p^\star_j)$ である。

$\widehat{\mu}^j_s \supseteq \widehat{D}^j_s(p^\star_j)$ **を示す**　任意の $i \in \widehat{D}^j_s(p^\star_j)$ をとる。背理法により、$i \notin \widehat{\mu}^j_s$ と仮定する。$i \in \widehat{D}^j_s(p^\star_j)$ であるから、定義より $i \succeq_s \widehat{i}^{(s,j,p^\star_{(s,j)})}$ であり、かつ $\widehat{i}^{(s,j,p^\star_{(s,j)})} \in \widehat{\mu}^j_s$ である。背理法の仮定 $i \notin \widehat{\mu}^j_s$ より、$i \neq \widehat{i}^{(s,j,p^\star_{(s,j)})}$ であるため、優先順位の関係は厳密になり、$i \succ_s \widehat{i}^{(s,j,p^\star_{(s,j)})}$ となる。$\widehat{\mu}$ は現職必置条件を満たすため i はどこかに割り当てられるはずなので、その学校を $s' = \widehat{\mu}_i$ とする。仮定より $s \neq s'$ である。$i = \widehat{i}^{(s',j,l)}$ となるような l を考える。$i \in \widehat{\mu}^j_{s'}$ ということと、$p^\star_{(s',j)}$ の定義から、$i = \widehat{i}^{(s',j,l)} \succeq_{s'} \widehat{i}^{(s',j,p^\star_{(s',j)})}$ が成り立つ。一方、$i \in \widehat{D}^j_s(p^\star_j)$ であるから、その定義より、「$i \succeq_{s'} \widehat{i}^{(s',j,p^\star_{(s',j)})}$ ならば $s \succeq_i s'$」でなければならない。$s \neq s'$ であることから、これは $s \succ_i s'$ を意味する。これらをまとめると、$s \succ_i s' = \widehat{\mu}_i, \widehat{i}^{(s,j,p^\star_{(s,j)})} \in \widehat{\mu}^j_s,$ かつ $i \succ_s \widehat{i}^{(s,j,p^\star_{(s,j)})}$ が成立する。これは、$\widehat{\mu}$ が教科公平であるという事実に矛盾する。s したがって、最初の仮定は偽であり、$i \in \widehat{\mu}^j_s$ でなければならない。

次のように関数 $\widehat{T}$ を定義する。

$$\widehat{T}^j_s(p^\star) = \begin{cases} p^\star_{(s,j)} + 1 & \text{if } |\widehat{D}^j_s(p^\star_j)| > c^j_s \\ p^\star_{(s,j)} & \text{if } |\widehat{D}^j_s(p^\star_j)| \leq c^j_s, \end{cases}$$

ただし、$(|\widehat{I}_j| + 1) + 1 = 1$ と定める。

$p^\star$ が $\widehat{T}$ の不動点であることを示すには、全ての s, j について $\widehat{T}^j_s(p^\star) = p^\star_{(s,j)}$ であることを示せばよい。

任意の s, j をとる。前の議論で示した $\widehat{\mu} = \widehat{\mu}^{p^\star}$ という等式と、$\widehat{\mu}$ の実現可能性から、$\widehat{D}^j_s(p^\star_j)$ は実現可能である。すなわち、$|\widehat{D}^j_s(p^\star_j)| \leq c^j_s$ が成り立つ。

$\widehat{T}$ の定義によれば、もし $|\widehat{D}^j_s(p^\star_j)| \leq c^j_s$ ならば、$\widehat{T}^j_s(p^\star) = p^\star_{(s,j)}$ となる。これは示すべきことであった。

問題 $(I, S, \succ_I, \succ_S, \mathcal{F}_s)$ を考える。

$i^{(s,j,l)}$ を、学校 s の優先順位 $\succ_s$ に従って並べたときに、集合 $\{i\}_{i \in I_j}$ の中で l 番目に順位の低い教師とする。ここで、次のように定義する。

$$p_{(s,j)} = \begin{cases} p^\star_{(s,j)} + |I_j \setminus \{i \in I_\alpha : B(i) = \{j\}\}| & \text{if } \widehat{\mu}^j_s \neq \emptyset, \\ |I_j| + 1 & \text{if } \widehat{\mu}^j_s = \emptyset. \end{cases}$$

全ての現職教師 $i \in I_\alpha$ について $\widehat{\mu}^{p^\star}_i = \mu^p_i$ であり、かつ、全ての非現職教師 $i \notin I_\alpha$ について $\mu^p_i = \emptyset$ であることを示す。（これは、需要集合について $\widehat{D}^j_s(p^\star_j) = D^j_s(p)$ であることを示すことと同値である。）

$\widehat{D}^j_s(p^\star_j) \subseteq D^j_s(p)$ を示す　任意の $i \in \widehat{D}^j_s(p^\star_j)$ をとる。このとき、定義より $B(i) = \{j\}$ である。$i \in \widehat{D}^j_s(p^\star_j)$ であるから、$i \succeq_s \widehat{i}^{(s,j,p^\star_{(s,j)})}$ が成り立つ。このことと、p の構成方法から $\widehat{i}^{(s,j,p^\star_{(s,j)})} = i^{(s,j,p_{(s,j)})}$ であるため、$i \succeq_s i^{(s,j,p_{(s,j)})}$ が従う。

ここで、背理法により、$i \succeq_{s'} i^{(s',j',p_{(s',j')})}$ かつ $s' \succ_i s$ となるような $s' \in S \setminus \{s\}$ と $j' \in A(i) \cap A(s')$ が存在すると仮定する。

(仮定 5) より、i の主担当ではない全ての教科 $j' \in A(i)$ $(j' \neq j)$ について、$B(k) = \{j'\}$ となる全ての現職教師 $k \in I_\alpha$ に対して、$k \succ^{j'}_{s'} i$ が成り立つ。(6)

背理法の仮定より、$i \succeq_{s'} i^{(s',j',p_{(s',j')})}$ であった。(7) これは、教師 i の優先順位がカットオフ $p_{(s',j')}$ 以上であることを意味するため、不等式で表すと次のようになる。

$$|\{k \in I_{j'} \mid i \succeq_{s'} k\}| \geq p_{(s',j')}$$

また、(6) から、i よりも優先順位が厳密に高い教師の数は、主担当教科が j' である現職教師の数以上でなければならない。

$$|\{k \in I_{j'} \mid k \succ_{s'} i\}| \geq |\{k \in I_\alpha \mid B(k) = \{j'\}\}| \quad \cdots (8)$$

(7) と (8) より、

$$|I_{j'}| = |\{k \in I_{j'} \mid k \succ_{s'} i\}| + |\{k \in I_{j'} \mid i \succeq_{s'} k\}| \geq |\{k \in I_\alpha \mid B(k) = \{j'\}\}| + p_{(s',j')} \quad \cdots (9)$$

となる。

ケース 1: $\widehat{\mu}^{j'}_{s'} \neq \emptyset$ の場合　このとき、p の定義より、$p_{(s',j')} = p^\star_{(s',j')} + |I_{j'} \setminus \{i' \in I_\alpha \mid B(i') = \{j'\}\}|$ である。これを (9) 式の右辺に代入すると、

$$\begin{aligned}(9)\text{ 式の右辺} &= p_{(s',j')} + |\{i' \in I_\alpha \mid B(i') = \{j'\}\}| \\ &= p^\star_{(s',j')} + |I_{j'} \setminus \{i' \in I_\alpha \mid B(i') = \{j'\}\}| + |\{i' \in I_\alpha \mid B(i') = \{j'\}\}| \\ &= p^\star_{(s',j')} + |I_{j'}|\end{aligned}$$

したがって、(9) 式は $|I_{j'}| \geq p^\star_{(s',j')} + |I_{j'}|$ となる。$p^\star_{(s',j')} \geq 1$ であるから、これは矛盾である。

ケース 2: $\widehat{\mu}^{j'}_{s'} = \emptyset$ の場合　このとき、p の定義より、$p_{(s',j')} = |I_{j'}| + 1$ である。これを (9) 式に代入すると、$|I_{j'}| \geq (|I_{j'}| + 1) + |\{i' \in I_\alpha \mid B(i') = \{j'\}\}|$ となる。これは明らかに矛盾である。

ケース 1、2 のいずれにおいても矛盾が導かれた。これは、背理法の最初の仮定（$s' \succ_i s$ となるような i の主担当ではない教科 $j' \neq j$ が存在する）が誤りであったことを意味す

る。したがって、$j'=j$ でなければならない。

ここで、再度背理法により、$i \succeq_{s'} i^{(s',j',p_{(s',j')})}$ かつ $s' \succ_i s$ となるような $s' \in S \setminus \{s\}$ と $j' \in A(i) \cap A(s')$ が存在すると仮定する。しかし、前段の結論から $j'=j$ でなければならない。したがって、この仮定は、ある $s' \in S_j$ が存在し、$i \succeq_{s'} i^{(s',j,p_{(s',j)})}$ かつ $s' \succ_i s$ となることを意味する。p の構成方法（$\widehat{i}^{(s,j,p^\star_{(s,j)})} = i^{(s,j,p_{(s,j)})}$）を用いると、これは「ある $s' \in S_j$ が存在し、$i \succeq_{s'} \widehat{i}^{(s',j,p^\star_{(s',j)})}$ かつ $s' \succ_i s$ となる」ことと同値である。しかし、これは $\widehat{\mu}^{p^\star}(=\widehat{D}^j(p^\star_j))$ が教科公平であるという事実（証明済み）に矛盾する。したがって、背理法の仮定は偽であり、最終的に $i \in D^j_s(p)$ でなければならない。

$D^j_s(p) \subseteq \widehat{D}^j_s(p^\star_j)$ を示す　任意の $i \in D^j_s(p)$ をとる。$i \in D^j_s(p)$ であるから、定義より $i \succeq_s i^{(s,j,p_{(s,j)})}$ が成り立つ。このことと、p の構成方法（$\widehat{i}^{(s,j,p^\star_{(s,j)})} = i^{(s,j,p_{(s,j)})}$）から、$i \succeq_s \widehat{i}^{(s,j,p^\star_{(s,j)})}$ が従う。また、$i \in D^j_s(p)$ であるから、その定義より、全ての $s' \in S \setminus \{s\}$ と全ての $j' \in A(i) \cap A(s')$ について、

$$i \succeq_{s'} i^{(s',j',p_{(s',j')})} \implies s \succ_i s'$$

が成り立つ。特に、教科 j に限定すると、全ての $s' \in S_j$ について、「$i \succeq_{s'} i^{(s',j,p_{(s',j)})}$ ならば $s \succ_i s'$」が成り立つことになる。これは、i が $\widehat{D}^j_s(p^\star_j)$ の定義における選好条件（$s \succeq_i s'$）よりも強い条件を満たしていることを意味する。i が $\widehat{D}^j_s(p^\star_j)$ の元であるための条件は、(1) カットオフを満たすこと、(2) 個人合理的であること（$i \in D^j_s(p)$ より成立）、(3) 他の選択肢より s を好むこと、の 3 つである。上記で示したことはこれらの条件を全て満たすため、$i \in \widehat{D}^j_s(p^\star_j)$ である。

この状況において、p が T の不動点であることを示します。そのためには、全ての $s \in S$ と全ての $j \in J$ について、$T^j_s(p) = p^j_s$ であることを示す必要があります。任意の $s \in S$ と $j \in J$ をとります。これまでの証明により、$\widehat{D}^j_s(p^\star_j) = D^j_s(p)$ であり、また $\widehat{\mu}^{p^\star}$ は実現可能でした。$\widehat{D}^j_s(p^\star_j) = \widehat{\mu}^j_s(p^\star)$ であり、その実現可能性から $|\widehat{\mu}^j_s(p^\star)| \le c^j_s$ です。したがって、

$$|D^j_s(p)| = |\widehat{D}^j_s(p^\star_j)| = |\widehat{\mu}^j_s(p^\star)| \le c^j_s$$

が成り立ちます。関数 T の定義によれば、もし $|D^j_s(p)| \le c^j_s$ ならば、$T^j_s(p) = p^j_s$ となります。これは、p が T の不動点であることを示しています。 □

例 1.(仮定 (3)', 仮定 (5) を仮定しない場合に現職必置条件を保証できない例) 教師の集合を $I=\{1,2,3,4\}$、学校の集合を $S=\{5,6\}$ とし、現職教師の集合を $I_\alpha=\{1,2,3\}$ とする。

選好は以下の通りである。

- 全ての教師 $i \in I$ について、$\succ_i$: $6 \succ 5 \succ \emptyset$。
- 全ての学校 $s \in S$ について、$\succ_s$: $1 \succ 2 \succ 3 \succ 4 \succ \emptyset$。

教師の免許教科 ($A(i)$) と学校の募集教科 ($A(s)$) は以下の通りである。

- $A(1) = \{$英語, 数学$\}$
- $A(2) = \{$英語, 数学$\}$
- $A(3) = \{$数学$\}$
- $A(4) = \{$英語$\}$
- $A(5) = \{$英語, 数学$\}$
- $A(6) = \{$英語$\}$

最後に、教科ごとのキャパシティは $c_5^{\text{英語}} = 2$ および $c_5^{\text{数学}} = 1$ である。

この設定では、アルゴリズムの一つの結果として、$\mu_5 = \{2\}$ および $\mu_6 = \{1\}$ といったマッチングが生じうる。この場合、現職教師である教師 3 ($3 \in I_\alpha$) は、職を得られないままとなる。これは、現職必置条件を満たすマッチングの存在が保証されないことを示している。

3.3 まとめと考察

本章では, 2 章の定義と記法を踏襲したうえで(集合 I, S, 選好 $\succ_i$, 優先順位 $\succ_s$, 実現可能集合族 F_s, マッチング μ)複数免許を持つ教員を許容する拡張モデルを構成し, 学校側の実現可能性を「割当関数」$J_s : \mu_s \to J$ の存在条件で定義した($\forall j \in J,\ |\{i \in \mu_s : J_s(i) = j\}| \leq c_{js}$). これにより，学校は受け入れた各教員をその保有免許のいずれか一つに充てつつ，教科別キャパシティを同時に満たせるかどうかで feasibility を判定できるようにした。

基本モデルと同様に，教科ごとの需要とカットオフに基づく教科別カットオフ調整を定義し，弱い教科公平性（同一教科内での正当化された嫉妬の不在）・個人合理性・実現可能性を満たす割当を特徴付けた．その結果，教科ごとに得られる教師最適・教科公平な割当（subject-TOFM）を束ねることで，拡張環境でも望ましい全体割当を構成できることを示した（定理 2 の結論；証明スケッチでは教科別 TOFM の教師最適性を用いて全体での最適・公平・実現可能性を導いた）

さらに，構成した割当 $\hat{\mu}$ は現職必置条件（すべての現職教員が必ずいずれかへ配属）を満たすことを示した（定理 3)．核心は，各教科 j における TOFM が現職必置を満たすため，全体割当でも各現職 i について $\hat{\mu}_i = \hat{\mu}_i^j \neq \emptyset$ が従うという点である．よって，複数免許・教科横断の制約下でも，弱い教科公平性のもとで現職の雇用保証を壊さずに配属が可能となる。

反復過程の性質．本章の反復（超過需要のある教科・学校のみカットオフを引き上げる）は，2 章と同様に，途中段階でも各教員は「通過できる選択肢の中で最も好む学校」に応募するよう定義されているため，個人合理性と（弱い）教科公平性は常に保たれる．崩れ

得るのは実現可能性のみであり，反復の目的は公平性・個人合理性を維持したまま実現可能性を満たす不動点へ到達することにある（不動点到達時の割当が三条件を同時に満たす点は 2 章の議論と同型）.

含意と限界.

1. 制度設計上の実装容易性：需要計測とカットオフ更新は局所的（教科別・校別）であり，手続きは機械的でスケーラブルである．複数免許ゆえの教科横断制約は割当関数の存在判定に吸収され，現場実装では「候補集合の生成 $\to$ 実現可能性チェック」の繰り返しに還元できる.
2. 現職雇用の安定確保：subject-TOFM を積み上げる構成により，現職必置を理論的に保証できる．人事上の最低要件（雇用の連続性）を満たしながら，希望と科目定員の両立を図れる.
3. モデル化の限界と今後の課題：本章は主担当の概念や弱い教科公平性の採用に依拠しているため，複数教科の同時担当／時間割・校務負担／学年横断的配置などの運用要件を更に内生化する拡張が課題である．また，優先順位やキャパシティが学期内で内生的に変動する場合の動学的拡張，および実データでの校種・地域別の制度比較も今後の検証対象となる．（定義と証明構成の中核は本章の枠内で与えた割当関数による可否判定に依存している.）

4　結果と考察

5　結論

付録: 証明

反例 1 (予算制約下では、現職必置条件満たさない場合がある)
$s_4, S_5 \in S$、$i_1, i_2, i_3 \in I$、$i_1, i_3 \in I_\alpha$、そして $i_2 \in I \setminus I_\alpha$ であると仮定する。
このとき、選好が以下であると仮定する。

$$\begin{aligned}
&\succ_{i_1}: 45\emptyset,\\
&\succ_{i_2}: 4\emptyset5,\\
&\succ_{i_3}: 54\emptyset,\\
&\succ_{s_4}: 132\emptyset,\\
&\succ_{s_5}: 312\emptyset.
\end{aligned} \tag{5}$$

$\mathcal{F}_s$ が予算制約であるため、これは (1) を満たす。(5) は (2) と (4) を満たします。$i_1 \in \mu_{s_5}$

かつ $i_3 \in \mu_{s_4}$ となるようなマッチング μ が存在するため、これは (3) も満たす。このとき、$i_3 \in \mu^*_{s_5}$ となるマッチング μ^* は TOFM だが、$i_1 \in I_\alpha$ であり、かつ $\mu^*_{i_1} = \emptyset$ であるため、現職必置条件を満たさない。したがって、TOFM は予算制約下で職必置条件を満たさない場合がある。

参考文献

- OECD（2020）『TALIS 2018 結果（第 2 巻）：教員と校長の専門職としての価値（日本：カントリーノート拡張版）』OECD 出版、パリ.(最終アクセス日: 2025 年 5 月 8 日) https://www.oecd.org/content/dam/oecd/en/about/programmes/edu/talis/talis2018participantnotes/volii/TALIS2018_CN_JPN_Vol_II_extended_jpn.pdf
- 文部科学省 (2022)『教師不足に関する実態調査』.(最終アクセス日: 2025 年 5 月 8 日) https://www.mext.go.jp/content/20220128-mxt_kyoikujinzai01-000020293-1.pdf
- 文部科学省『別紙 1 公立学校教員の公募制・FA 制等の取組事例』.(最終アクセス日: 2025 年 5 月 8 日) https://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/040/siryo/attach/1379275.htm
- 東京都教育委員会（2023 年 9 月 29 日）．令和 5 年度東京都公立学校教員採用候補者選考（6 年度採用）の結果について.(最終アクセス日: 2025 年 5 月 8 日) https://www.kyoiku.metro.tokyo.lg.jp/information/press/2023/09/2023092901
- 長野県教育委員会 (2024)．令和 6 年度高等学校教育職員人事異動方針. (最終アクセス日: 2025 年 5 月 8 日) https://www.pref.nagano.lg.jp/kyoiku/koko/saiyo-nyuushi/joho/documents/0_2jinjikoko.pdf
- 広島県教育委員会. 広島県公立学校教職員人事異動方針. (最終アクセス日: 2025 年 5 月 8 日) https://www.pref.hiroshima.lg.jp/site/kyouiku/04file-h26-jinjiihoushin.html
- 千葉県教育委員会（2024）．令和 6 年度末及び令和 7 年度公立学校職員人事異動方針. (最終アクセス日: 2025 年 5 月 8 日) https://www.pref.chiba.lg.jp/kyouiku/syokuin/jinji/idou/documents/r06-jinjiidouhoushin.pdf
- Gale, D., & Shapley, L. S. (1962). College admissions and the stability of marriage. The American Mathematical Monthly, 69(1), 9 – 15.

- Roth, A. E. (1984). The evolution of the labor market for medical interns and residents: A case study in game theory. Journal of Political Economy, 92(6), 991 – 1016.
- Balinski, M., & Sönmez, T. (1999). A tale of two mechanisms: Student placement. Journal of Economic Theory, 84(1), 73 – 94.
- Kamada, Y., & Kojima, F. (2024). Fair matching under constraints: Theory and applications. The Review of Economic Studies, 91(2), 1162 – 1199.