現職教員の雇用を考慮した公立学校における教員配属のためのマッチングメカニズム設計

倉持 誠

横浜市立大学大学院 国際マネジメント研究科国際マネジメント専攻

2025 年 8 月 12 日

要旨

1　序論

1.1　動機と結果の概要

日本の公立高校では、教員の異動に関して、教員の 31 ％ が「可能なら別の学校に移りたい」と回答しており、年度当初には 217 名の欠員が発生するなど、希望と実際の配属の不一致が構造的に生じている。このミスマッチは教科欠員や授業負担の偏在を引き起こし、教育機会格差を拡大させている (OECD(2018), 文科省 (2022))。

このようなミスマッチが生じる主因は大きく三つある。第一に、教員自身にも勤務校や地域、勤務条件に対する明確な選好が存在するため、人気校に希望が集中しやすいということである。第二に、各学校は教科ごとに受け入れ定員を伴う科目制約を抱えており、たとえ応募者が多くても希望者全員を受け入れられるわけではないということである。第三に、新規採用教員が毎年度一定数加わることで、既存の現職教員と新規採用教員を合わせた全体最適を図る必要が生じ、配属計画の複雑性が飛躍的に高まるということである。これらの要因が絡み合う結果、教員側の希望と学校側の需要を同時に充足させることが制度的に難しくなっている。以上の三つの要因 1. 人気校志向による希望の偏在、2. 科目ごとの定員を超過してはいけないという制約、3. 現職と新任を同時に調整することによる複雑性が同時に作用すると、現行制度では、「人員が足りない、または、超過する」という状態が避けられない。

教員の希望は一部の特色校・都市部高偏差値校に集中する傾向が顕著である。文部科学省では、埼玉県の募集 32 枠に対し 150 名（4.7 倍）、宮城県でも 19 枠に 75 名（3.9 倍）の応募が殺到している。東京都教育委員会の令和 5 年度公募結果も、中・高等学校共通枠では、名簿登録者数 1617 名に受験者は 2962 名（1.8 倍） と募集枠超過が続く状況を示している。更に、採用見込み者数は、1020 名とさらに倍率が高くなっている。一方で文科省 (2022) によると、始業日時点で高校だけでも 217 名の欠員が発生しており、人気校への希望集中の裏側で配置が埋まらない学校が恒常的に生じている。　現在、公立高校の教員は、主に都道府県教育委員会が一括して人事権を持ち、毎年実施される「異動希望調査（人事異動調）」を起点に配属が決められる。教員は 10〜11 月頃に第一〜第三希望校・地域などを記入し、校長経由で教育委員会へ提出するが、最終決定は科目ごとの定数調整や地域バランス、在任年数ローテーションを優先した教育委員会の裁量で行われる (長野県教育委員会（2024）)。

各県の異動方針は「同一校勤務が 6〜10 年を超えれば原則配置換」「全県的視野で欠員校を優先配置」と明記しており (広島県教育委員会)、個人希望は最終段階で調整弁として後順位に置かれる。実際、千葉県の方針も「地域間・学校間の過不足を県全体で調整し、適材適所を図る」と規定しており (千葉県教育委員会（2024）)、人気校への希望集中と不人気校の欠員を同時に解消するアルゴリズムや客観指標は導入されていない。結果として、希望は反映されにくく、科目欠員等が発生したまま年度が始まるというのが現状である。実務では、人事担当が教員希望をなるべく考慮しつつ科目定員を充たそうと試みるも

のの、希望が集中した教科・地域では定数オーバーで受け入れられず、一方で不人気校や欠員が出やすい教科は定数割れが残る。結果として、始業直前まで空席が埋まらず免許外担当・複数校兼務・長距離通勤といった“その場しのぎ”の配置が発生し、教員の授業準備時間を圧迫する。さらに年度途中に産休代替や退職が重なると、科目制約を守りつつ、現職全員を再配置する余地が出てくるが、現実的には困難であるため、欠員の長期化と希望未充足の負のスパイラルに陥りやすい。つまり、現行方式は三要因を同時に満たす設計原理を持たないため、「配属を決めようとしても決め切れない」「決めたとしても誰かが不満か欠員が残る」といった“うまくいかない”現象が構造的に生じてしまうのである。

本研究は、この課題に対し、経済学のマッチング理論を用いて、教員の希望を尊重しつつ制度的制約を満たす配属メカニズムを設計する。特に本研究が目指すのは、1. 各学校の科目別定員を守り（科目制約）、2. 教員間の不公平感（正当化された嫉妬）をなくし（公平性）、3. その中で教員にとって最も望ましい配属を実現し（教員最適性）、そして何よりも 4. 全ての現職教員の雇用を保証する（現職必置条件、本稿における a-実現可能性）という、4 つの重要条件を同時に満たすことである 。本稿で提示する結果の概要は以下の通りである。まず、教員が単一の教科免許しか持たない単純化されたモデルでは、既存の理論的枠組みを応用することで、現職教員の雇用保障が常に達成可能であることを示す（定理 1)。しかし、本研究が解き明かす核心的課題は、教員が複数の教科免許を持つ、より現実的な状況で発生する。この複雑な条件下では、既存のアルゴリズムが機能せず、現職教員が配属先を失うケースが存在することを「動機付けの例（例 1)」によって具体的に示す 。この理論的困難を乗り越えるため、本研究は「主たる指導教科」という概念を導入してモデルを精緻化し、独自の「カットオフ調整アルゴリズム」を設計・提案する。本研究の主たる貢献は、この提案アルゴリズムが、複数免許という最も複雑な条件下においても、常に本論文で定義した弱い教科公平性を満たし（定理 2)、その結果として得られるマッチングが、現職教員の雇用を保証する（a-実現可能である）ことを証明した点にある（定理 3)。これにより、現実の教員人事制度が抱える複雑な課題に対し、理論的に裏付けられた具体的な解決策を提示する。

1.2 関連研究 (Related literature)

今回は「教員と学校」のような 2 種類の異なるグループに属する参加者たちをどのように組み合わせるかを考える。このような組み合わせ (マッチング) を二部マッチングと呼ぶ。二部マッチングは、Gale and Shapley(1962) で考案された。Gale and Shapley(1962) では、現実のマッチングに関する問題を数学的に定式化し、どのようにペアを組めば、当事者同士が今のペアよりもお互いを好む組み合わせが存在しないかを考えた。彼らの枠組みにより、金銭を介さない人員配置問題にもゲーム理論的な解が存在することが示された。

しかし、その理論の現実社会への有用性が広く認識されるまでには時間を要した。1980 年代に入り、Roth が医学生と病院の人員配置問題を研究したことが、このギャップを埋める契機となった。Roth (1984) は、米国の研修医の労働市場における採用方式を分析し、

現在用いられている配置方法のゲーム理論的特徴を解明した。彼はこの市場の現行の手法を調べ、それが Gale–Shapley の提案した方法と極めて近いものであり、当時の医学生と病院の組み合わせ方法は病院側にとって最適な安定マッチングと同等であることを示している。Roth (1984) の貢献により、「安定性」(当事者同士が今のペアよりもお互いを好む組み合わせが存在しないこと) がマッチング市場の長期的安定運用に不可欠であることが国際的にも確認された。また、本研究を契機に、他の分野でも集中マッチングの導入が検討されるようになった。ほかにも、様々な市場で、本理論が活用されており、Roth (1984) が単なる分析に留まらず現実の制度設計を直接に方向付けた例と言える。

続いて、1990 年代には、Balinski & Sönmez が大学入試における学生配置問題へとマッチング理論を応用し、古典理論を政策設計に結びつける新たな展開を示した。Balinski & Sönmez (1999) は、中央集権的な大学入学試験制度にもとづく学生配置問題を新たなマッチング理論モデルとして定式化し、従来の制度を分析した。特に、トルコの大学入学者配置方法に重大な欠陥があることを明らかにした。そこで、彼らは、これらの欠陥を克服しうる代替メカニズムとして学生最適の安定マッチング方式を提案した。この理論分析により、学生側最適な安定マッチング (当事者同士が今のペアよりもお互いを好む組み合わせが存在しないマッチング) が受験者配置問題において望ましい原則であり、複数カテゴリーの試験得点という特殊要因があっても安定マッチング理論が有効に機能することが示された点で、本研究の理論的貢献は大きいと言える。Balinski & Sönmez (1999) の貢献により、マッチング理論が労働市場以外の分野にも適用可能であることが示され、特に政策当局が直面する制度設計問題に理論を活かせる道筋が明確になった。これはマッチング理論の応用範囲を大きく拡大し、理論と実践の橋渡しをさらに推し進めた転換点となっている。

しかし両モデルは、複雑な制約を想定していない。そこで、近年、複雑な制約を伴う市場に一歩踏み込んだのが Kamada & Kojima (2024) である。彼らは、実際の保育園入所において従来の全員が満足する安定した割り当てが存在しない場合が存在することを指摘し、制約のある状況下でも優先順位を尊重した公平な割り当てが得られる新たな仕組みを提案した。また、自治体の保育所割当データを用いたシミュレーションにより、この公平な割り当て方式の効果を検証し、有効性を確認した。制約の緩和と公平性の両立によって参加者の満足度や全体の利益を高められる可能性が示された。とはいえ今回の研究である公立高校における配属問題にそのまま適応することは、以下のような問題点があることから不可能である。

・人気校志向によって希望が偏っている点　既存研究では、希望が特定校に集中した場合に，欠員校を同時に解消する手当てがない。

・それぞれの学校と科目について定員が設定されている点　既存研究では、制約は、学科などの 1 つの上限に対して設定していることが多く、複数科目を横断して上限を同時に守る公立高校の複雑な定員管理には未対応である。

・現職の教員を必ずどこかの高校に配属させなければならない点　既存研究では、単

年度の応募者のみを対象としており、既に在籍している職員を必ず再配置するという条件を入れていない。

本研究では、これらの問題点を同時に満たすメカニズムを構築し、教員配属問題に対する実践的な解決策を提示する。具体的な、本稿の構成は以下の通りである。まず第 2 章では、問題を単純化し、各教員が単一の教科免許のみを持つ「基本モデル」を定義する。このモデルにおいて、既存の理論的枠組みを応用することで、現職教員の雇用が常に保証される安定的なマッチング（教員最適公平マッチング）が存在することを示す（定理 1）。次に第 3 章では、教員が複数の教科免許を持つ、より現実的で複雑な「拡張モデル」へと分析を進める。この状況下では既存のアルゴリズムが機能しないことを例証し、その課題を克服するために独自の「カットオフ調整アルゴリズム」を設計・提案する。そして、この提案アルゴリズムが、複数免許という最も複雑な条件下においても、常に弱い教科公平性を満たし（定理 2）、現職教員の雇用を保証するマッチングを導出可能であることを証明する（定理 3）。第 4 章では、これらの理論的結果が持つ実践的な含意について考察する。最後に第 5 章で、本研究の結論と今後の展望を述べる。

2　基本モデル：単一免許を持つ教員

学校選択モデルを形式的に定義する。I を教師からなる空でない有限集合、S を学校からなる空でない有限集合とする。各教師 $i \in I$ は、学校の集合 S とマッチしない状態 $\emptyset$ の上で定義される厳密な選好順序 $\succ_i$ を持つ。各学校 $s \in S$ は、教師の集合 I の上で定義される厳密な優先順位 $\succ_s$ を持つ。すべての選好の組をプロファイル $\succ_I = (\succ_i)_{i \in I}$ とし、すべての優先順位の組をプロファイル $\succ_S = (\succ_s)_{s \in S}$ とする。

各学校 $s \in S$ について、その採用制約は、実現可能な教師集合の族 $\mathcal{F}_s$ によって与えられる。教師の部分集合 $I' \subseteq I$ は、$I' \in \mathcal{F}_s$ であるとき、学校 s において**実現可能** (feasible) であると定義される。したがって、一つの**問題** (problem) は、組 $(I, S, \succ_I, \succ_S, \{\mathcal{F}_s\}_{s \in S})$ によって特徴づけられる。

マッチング (matching) μ とは、教師を学校に割り当てる写像であり、形式的には以下の 3 つの条件で定義される。

(i) すべての教師 i について、その割り当て先は $\mu_i \in S \cup \{\emptyset\}$ である。

(ii) すべての学校 s について、そこに割り当てられた教師の集合は $\mu_s \subseteq I$ である。

(iii) いかなる教師 i と学校 s のペアにおいても、$\mu_i = s$ であることと $i \in \mu_s$ であることが同値であるように、割り当ては整合的でなければならない。

マッチング μ の質は、いくつかの重要な特性によって評価される。マッチングが**実現可能** (feasible) であるとは、すべての学校 $s \in S$ について $\mu_s \in \mathcal{F}_s$ が成り立つことである。**個人合理的** (individually rational) であるとは、すべての教員 $i \in I$ について $\mu_i \succ_i \emptyset$

が成り立つことである。ある教師 i が教師 i' に対して**正当な嫉妬を持つ** (have justified envy toward) とは、$s \succ_i \mu_i$、$i' \in \mu_s$、かつ $i \succ_s i'$ となるような学校 $s \in S$ が存在する場合をいう。したがって、マッチング μ が**公平** (fair) であるとは、別の教師に対して正当な嫉妬を持つ教師が一人もいないことである。最後に、マッチング μ が**無駄がない** (non-wasteful) とは、$s \succ_i \mu_i$ かつ $\mu_s \cup \{i\} \in \mathcal{F}_s$ となるようなペア $(i, s) \in I \times S$ が存在しないことである。

マッチング μ は、実現可能、個人合理的、公平、かつ無駄がないという性質を同時に満たすとき、**安定** (stable) であると定義される。

定義 1. 制約 $\mathcal{F}_s$ は、$I' \in \mathcal{F}_s$ かつ $I'' \subseteq I'$ ならば常に $I'' \in \mathcal{F}_s$ が成り立つとき、**一般上限** (general upper-bound) である。

定義 2. マッチング μ は、以下の 2 つの条件を満たすとき、**教師最適公平マッチング *(TOFM)*** (teacher-optimal fair matching) となる。

(i) μ は、実現可能、個人合理的、かつ公平であり、かつ

(ii) 実現可能、個人合理的、かつ公平である、他のいかなるマッチング μ' に対しても、すべての教師 $i \in I$ について $\mu_i \succeq_i \mu'_i$ が成り立つ。

本モデルでは、教師が特定の免許を持ち、学校が特定の教科で募集を行うという、教科に基づく制約を導入する。

モデルを拡張し、教科からなる空でない有限集合 J を導入する。割り当て関数 A は、各教師をその単一の教科に、各学校をその学校が募集する教科の集合に対応付ける。

- 教師については、$A : I \to J$ とする。$I_j = \{i \in I \mid A(i) = j\}$ は、教科 j の免許を持つ教師の集合である。
- 学校については、$A : S \to 2^J$ とする。$S_j = \{s \in S \mid j \in A(s)\}$ は、教科 j で募集を行う学校の集合である。

各学校 s は、教科 j ごとに特定のキャパシティ c_s^j を持つ。学校がある教科で募集を行わない場合、その教科のキャパシティはゼロとなる。すなわち、すべての $j \notin A(s)$ について、$c_s^j = 0$ である。

これらの教科制約の下でマッチング μ が実現可能であるとは、ある学校に任意の教科で割り当てられた教師の数が、その学校の当該教科におけるキャパシティを超えない場合をいう。この実現可能性条件 $\mathcal{F}_s$ は、次のように定義される。

$$\mathcal{F}_s = \{\mu_s \subseteq I : \forall j \in J, |\{i \in \mu_s : A(i) = j\}| \leq c_s^j\}$$

本モデルは特別な教師の集合 I_α を導入し、これを**現職教師** (currently employed / in-service teachers) を表すものとする。マッチング μ が**現職必置条件** (in-service teacher condition) を満たすとは、この集合の全ての教師が割り当てを得ること、すなわち $\forall i \in I_\alpha, \mu_i \neq \emptyset$ が成り立つ場合をいう。

2.1 仮定 (Assumptions)

本モデルでは、以下の 4 つの重要な仮定を導入します。

仮定 (1)
各学校 $s \in S$ について、実現可能な教師集合の族 $\mathcal{F}_s$ は、一般上限制約（general upper-bound constraint）です。

仮定 (2)
学校は、他の教師よりも現職教員を一様に優先します。形式的には、任意の学校 $s \in S$、α-教師 $i \in I_\alpha$、非α-教師 $j \in I \setminus I_\alpha$ について、もし両者がその学校にとって受け入れ可能であるならば、学校はα-教師を優先しなければなりません。すなわち、$[i \succ_s \emptyset$ かつ $j \succ_s \emptyset] \implies i \succ_s j$ が成り立ちます。

仮定 (3)
すべての現職教員を雇用する、実現可能なマッチングが少なくとも一つは存在します。すなわち、(i) すべての $s \in S$ で $\mu_s \in \mathcal{F}_s$、かつ (ii) すべての $i \in I_\alpha$ に対して $i \in \mu_s$ となる学校 $s \in S$ が存在する、という条件を満たすマッチング μ が存在します。

仮定 (4)
すべての現職教師は、いかなる学校も受け入れ可能な割り当て先であると見なします。形式的には、すべての $i \in I_\alpha$ とすべての $s \in S$ について、$s \succ_i \emptyset$ が成り立ちます。

2.2 教科を考慮したマッチングの特性

公平性（Fairness）の概念は、教科を考慮して精緻化される。ある教師 i が教師 i' に対して**教科に基づいた正当な嫉妬** (subject-justified envy) を持つとは、両者が同じ教科を持ち ($A(i) = A(i')$)、かつ標準的な意味で教師 i が i' に対して正当な嫉妬を持つ（すなわち、$\exists s \in S \text{ s.t. } s \succ_i \mu_i, i' \in \mu_s, i \succ_s i'$）場合をいう。マッチングが**教科公平** (subject-fair) であるとは、教科に基づいた正当な嫉妬を持つ教師が誰もいない状態を指す。

これを用いて、我々の主要な解概念を定義します。マッチング μ が***教科別教師最適公平マッチング (subject-TOFM)*** となるのは、以下の条件を満たす場合である。

(i) μ は、実現可能、個人合理的、かつ教科公平であり、かつ

(ii) 実現可能、個人合理的、かつ教科公平である、他のいかなるマッチング μ' に対しても、すべての教師 $i \in I$ について $\mu_i \succeq_i \mu'_i$ が成り立つ。

2.3 教科ごとの分析とアルゴリズムの構成要素

このモデルの構造は、教科ごとの分析を可能にします。ある教科 $j \in J$ について、その教科の市場に特有の嫉妬や公平性を定義できます。

- **教科 j における教科に基づいた正当な嫉妬:** 同じ教科 j を持つ 2 人の教師間での嫉妬。
- **教科 j において教科公平である:** 教科 j において、教科に基づいた正当な嫉妬を持つ教師がいない状態。
- **教科 j において現職必置条件を満たす:** その教科を持つ全ての現職教師が雇用されるマッチング。すなわち $\forall i \in I_\alpha \cap I_j, \mu_i \neq \emptyset$。

解を見つけるために、カットオフに基づくメカニズムを利用する。各教科 j について、与えられた優先順位カットオフのベクトル p_j における学校 s の需要 $D_s^j(p_j)$ とは、I_j に属する教師の集合であり、その教師は学校 s でカットオフ p_s^j 以上に順位付けられ、かつ、自身が条件を満たす他のどの学校よりも学校 s を好む。形式的には、以下のように記述する。

$D_s^j(p_j) = \{i \in I_j \mid i \succeq_s i^{(s,p_s^j)} \text{ and } s \succ_i \emptyset; \forall s' \in S_j, i \succeq_{s'} i^{(s',p_{s'}^j)} \implies s \succeq_i s'\}$

アルゴリズムの中核は、これらのカットオフを繰り返し調整する**教科別カットオフ調整関数** $T : P \to P$ である。各学校 s と教科 j について、この関数は次のように定義される。

$$T_s^j(p) = \begin{cases} p_s^j + 1 & \text{もし } |D_s^j(p)| > c_s^j \text{ の場合} \\ p_s^j & \text{もし } |D_s^j(p)| \leq c_s^j \text{ の場合} \end{cases}$$

2.4 結果と考察

定理 1. 教科制約の下で、教科別教師最適公平マッチング（*subject-TOFM*）は常にα-実現可能である。

証明. Kamada and Kojima (2023) によれば、各教科 j において、以下の条件を満たす教師最適公平マッチング（TOFM）μ^j が存在する。

(i) 個人合理性 (I.R.) :	$\forall i \in I_j, \mu_i^j \succ_i \emptyset,$
(ii) 公平性 (fair) :	$\nexists i, i' \in I_j, \nexists s \in S_j$ s.t. $s \succ_i \mu_i^j, i' \in \mu_s^j, i \succ_s i',$
(iii) 実現可能性 (feasible) :	$\forall s \in S_j, \mu_s^j \in \mathcal{F}_s^j,$
(iv) 教師最適性 (T.O.) :	$\mu_i^j \succeq_i \bar{\mu}_i^j$ (任意の $i \in I_j$ と、教科 j で実現可能、個人合理的、かつ公平な任意の $\bar{\mu}^j$ に対して)

定理1より、μ^j は教科jにおいてα-実現可能である。ここで、$\forall i \in I_j$ に対して $\mu_i = \mu_i^j$、かつ、$\forall s \in S$ に対して $\mu_s = \bigcup_{j \in A(s)} \mu_s^j$ となるようなマッチング μ を構成する。

(μ が subject-TOFM であることを示す) (i) を示すために、まず μ が**実現可能**であることを示す。任意の $s \in S$ と任意の $j \in J$ をとる。

- **ケース 1: $j \in A(s)$ の場合。** $\mu_s^j \in \mathcal{F}_s^j$ である。μ の定義より $\{i \in I_j : i \in \mu_s^j\} = \{i \in I_j : i \in \mu_s\}$。$\mu_s^j \in \mathcal{F}_s^j$ であるから、$|\{i \in I_j : i \in \mu_s^j\}| = |\{i \in I_j : i \in \mu_s\}| \leq c_j^s$。
- **ケース 2: $j \notin A(s)$ の場合。** このとき、$c_s^j = 0$ である。$|\{i \in I_j : i \in \mu_s\}| = 0 = c_s^j$。

したがって、$\mu_s \in \mathcal{F}_s$ である。(※)

次に、μ が**個人合理的**であることを示す。任意の $i \in I$ をとると、ある $j \in J$ が存在し、$i \in I_j$ となる。μ^j は個人合理的であるから、$\mu_i = \mu_i^j \succeq_i \emptyset$。

次に、μ が**教科公平**であることを示す。$j \equiv A(i) = A(i')$ となる任意の $i, i' \in I$ をとる。背理法により、ある $s \in S$ が存在し、$s \succ_i \mu_i, i' \in \mu_s, i \succ_s i'$ が成り立つと仮定する。$i' \in \mu_s$ であるから、μ の定義より $s \in S_j$ である。仮定より、$s \succ_i \mu_i^j, i' \in \mu_s^j, i \succ_s i'$ となる。これは μ^j が TOFM であること（条件 (ii) 公平性）に矛盾する。したがって、μ は教科公平である。

(ii) **教師最適性**を示すために、任意の $i \in I$ と、実現可能、個人合理的、かつ教科公平である任意の μ' をとる。$j \equiv A(i)$ とする。μ^j の定義より、μ^j は教科jにおける TOFM であり、条件 (iv) を満たす。ここで、$\forall i' \in I_j$ に対して $\bar{\mu}_{i'}^j = \mu'_{i'}$、$\forall s \in S_j$ に対して $\bar{\mu}_s^j = \{i' \in I_j : i' \in \mu'_s\}$ となるような $\bar{\mu}^j$ を構成する。

この $\bar{\mu}^j$ が教科jで実現可能、個人合理的、かつ公平であることを示す。

($\bar{\mu}^j$ が教科jで実現可能であることを示す) 任意の $s \in S_j$ をとる。μ' は実現可能なので $\mu'_s \in \mathcal{F}_s$ である。$\mu'_s \in \mathcal{F}_s$ であるから、任意の $k \in J$ について $|\{i' \in I_k : i' \in \mu'_s\}| \leq c_s^k$ が成り立つ。$j \in J$ なので、特に $|\{i \in I_j : i \in \mu'_s\}| \leq c_s^j$ である。$\bar{\mu}^j$ の定義より、$\bar{\mu}_s^j = \{i' \in I_j : i' \in \mu'_s\}$ なので、$|\bar{\mu}_s^j| = |\{i' \in I_j : i' \in \mu'_s\}| \leq c_s^j$ となる。したがって、$\bar{\mu}_s^j \in \mathcal{F}_s^j$ であり、$\bar{\mu}^j$ は教科jで実現可能である。

任意の $i \in I_j$ をとる。前提より、マッチング μ' は個人合理的であるから、$\mu'_i \succ_i \emptyset$ が成り立つ。$\bar{\mu}^j$ の定義によれば $\bar{\mu}_i^j = \mu'_i$ であるため、$\bar{\mu}_i^j \succ_i \emptyset$ もまた真である。したがって、$\bar{\mu}^j$ は教科jで個人合理的である。

($\bar{\mu}^j$ が教科jで公平であることを示す) 任意の $i', i'' \in I_j$ をとる。このとき $A(i') = A(i'') = j$ である。背理法により、ある $s \in S_j$ が存在し、$s \succ_{i'} \bar{\mu}_{i'}^j$, $i'' \in \bar{\mu}_s^j$, かつ $i' \succ_s i''$ が成り立つと仮定する。

しかし、前提としてマッチング μ' は教科公平である。これは、$A(i') = A(i'')$ であることから、$s \succ_{i'} \mu'_{i'}$, $i'' \in \mu'_s$, かつ $i' \succ_s i''$ となるような学校 $s \in S$ が存在しないことを

意味する。$\bar{\mu}^j$ の定義（$\bar{\mu}^j_{i'} = \mu'_{i'}, \bar{\mu}^j_s = \{k \in I_j \mid k \in \mu'_s\}$）を考慮すると、我々の仮定は μ' の教科公平性に直接矛盾する。したがって、$\bar{\mu}^j$ は教科 j で公平である。

以上より、$\bar{\mu}^j$ は教科 j において実現可能、個人合理的、かつ公平であることが示された。μ^j は教科 j における TOFM であるから、その教師最適性の定義より、任意の $i' \in I_j$ に対して $\mu^j_{i'} \succeq_{i'} \bar{\mu}^j_{i'}$ が成り立つ。

μ と μ' の構成方法から、$\mu_{i'} = \mu^j_{i'}$ および $\mu'_{i'} = \bar{\mu}^j_{i'}$ であるため、

$$\mu_{i'} \succeq_{i'} \mu'_{i'}$$

が導かれる。これは任意の教師について成り立つため、μ は教科別教師最適公平マッチング（subject-TOFM）である。

(μ が現職必置条件を満たしていることを示す)　(※) より μ は実現可能である。したがって、残るは全ての現職教師が割り当てを得ていること、すなわち $\forall i \in I_\alpha$ に対して $\mu_i \neq \emptyset$ であることを示せばよい。

任意の $i \in I_\alpha$ をとり、$j \equiv A(i)$ とする。μ^j は教科 j における TOFM であり、定理 1 より、μ^j は教科 j において現職必置条件を満たしている。（なぜなら、$\mathcal{F}^j_s$ は教師集合 I_j と学校集合 S_j 間のマッチング問題におけるキャパシティ制約であるから。）

よって、$\mu^j_i \neq \emptyset$ が成り立つ。μ の構成方法から $\mu_i = \mu^j_i$ であるため、$\mu_i \neq \emptyset$ となる。これは任意の $i \in I_\alpha$ について真であるため、μ は現職必置条件を満たしている。

よって、subject-TOFM は教科制約の下で常に現職必置条件を満たしている。

□

3　拡張モデル：複数免許を持つ教員

学校選択モデルを形式的に定義する。I を教師からなる空でない有限集合、S を学校からなる空でない有限集合とする。各教師 $i \in I$ は、学校の集合 S とマッチしない状態 $\emptyset$ の上で定義される厳密な選好順序 $\succ_i$ を持つ。各学校 $s \in S$ は、教師の集合 I の上で定義される厳密な優先順位 $\succ_s$ を持つ。すべての選好の組をプロファイル $\succ_I = (\succ_i)_{i \in I}$ とし、すべての優先順位の組をプロファイル $\succ_S = (\succ_s)_{s \in S}$ とする。

各学校 $s \in S$ について、その採用制約は、実現可能な教師集合の族 $\mathcal{F}_s$ によって与えられる。教師の部分集合 $I' \subseteq I$ は、$I' \in \mathcal{F}_s$ であるとき、学校 s において**実現可能** (feasible) であると定義される。したがって、一つの**問題** (problem) は、組 $(I, S, \succ_I, \succ_S, \{\mathcal{F}_s\}_{s \in S})$ によって特徴づけられる。

マッチング (matching) μ とは、教師を学校に割り当てる写像であり、形式的には以下の 3 つの条件で定義される。

(i) すべての教師 i について、その割り当て先は $\mu_i \in S \cup \{\emptyset\}$ である。

(ii) すべての学校 s について、そこに割り当てられた教師の集合は $\mu_s \subseteq I$ である。

(iii) いかなる教師 i と学校 s のペアにおいても、$\mu_i = s$ であることと $i \in \mu_s$ であることが同値であるように、割り当ては整合的でなければならない。

マッチング μ の質は、いくつかの重要な特性によって評価される。マッチングが**実現可能** (feasible) であるとは、すべての $s \in S$ について $\mu_s \in \mathcal{F}_s$ が成り立つことである。**個人合理的** (individually rational) であるとは、すべての $i \in I$ について $\mu_i \succ_i \emptyset$ が成り立つことである。ある教師 i が教師 i' に対して**正当化された嫉妬を持つ** (have justified envy toward) とは、$s \succ_i \mu_i$、$i' \in \mu_s$、かつ $i \succ_s i'$ となるような学校 $s \in S$ が存在する場合をいう。したがって、マッチング μ が**公平** (fair) であるとは、別の教師に対して正当化された嫉妬を持つ教師が一人もいないことである。最後に、マッチング μ が**無駄がない** (non-wasteful) とは、$s \succ_i \mu_i$ かつ $\mu_s \cup \{i\} \in \mathcal{F}_s$ となるようなペア $(i, s) \in I \times S$ が存在しないことである。

マッチング μ は、実現可能、個人合理的、公平、かつ無駄がないという性質を同時に満たすとき、**安定** (stable) であると定義される。

定義 3. 制約 $\mathcal{F}_s$ は、$I' \in \mathcal{F}_s$ かつ $I'' \subseteq I'$ ならば常に $I'' \in \mathcal{F}_s$ が成り立つとき、**一般上限** (general upper-bound) である。

定義 4. マッチング μ は、以下の 2 つの条件を満たすとき、**教師最適公平マッチング *(TOFM)*** (teacher-optimal fair matching) となる。

(i) μ は、実現可能、個人合理的、かつ公平であり、かつ

(ii) 実現可能、個人合理的、かつ公平である、他のいかなるマッチング μ' に対しても、すべての教師 $i \in I$ について $\mu_i \succeq_i \mu'_i$ が成り立つ。

3.1 仮定 (Assumptions)

本モデルでは、以下の 4 つの重要な仮定を導入します。

仮定 (1)

各学校 $s \in S$ について、実現可能な教師集合の族 $\mathcal{F}_s$ は、一般上限制約（general upper-bound constraint）です。

仮定 (2)

学校は、他の教師よりも現職教員を一様に優先します。形式的には、任意の学校 $s \in S$、α-教師 $i \in I_\alpha$、非現職教員 $j \in I \setminus I_\alpha$ について、もし両者がその学校にとって受け入れ可能であるならば、学校は現職教員を優先しなければなりません。すなわち、$[i \succ_s \emptyset$ かつ $j \succ_s \emptyset] \implies i \succ_s j$ が成り立ちます。

仮定 (3)
すべての現職教員を雇用する、実現可能なマッチングが少なくとも一つは存在します。すなわち、(i) すべての $s \in S$ で $\mu_s \in \mathcal{F}_s$、かつ (ii) すべての $i \in I_\alpha$ に対して $i \in \mu_s$ となる学校 $s \in S$ が存在する、という条件を満たすマッチング μ が存在します。

仮定 (4)
すべての現職教員は、いかなる学校も受け入れ可能な割り当て先であると見なします。形式的には、すべての $i \in I_\alpha$ とすべての $s \in S$ について、$s \succ_i \emptyset$ が成り立ちます。

このセクションでは、前節のモデルを**複数教科制約** (Multi-Subject Constraint) の場合に拡張する。これにより、教師が持つ免許は 1 つだけという制約がなくなり、複数の教科で資格を持つことが許容される。モデルの他の側面は、単一教科の場合と同様である。

主な変更点は、教師と教科の割り当て関数 A である。この関数は、各教師をその教師が免許を持つ教科の空でない集合に対応付ける。

$$A : I \to 2^J \setminus \emptyset$$

ある教科 $j \in J$ に関連する教師の集合 I_j と学校の集合 S_j は、この新しい文脈の下で以前と同様に、$I_j = \{i \in I \mid j \in A(i)\}$ および $S_j = \{s \in S \mid j \in A(s)\}$ と定義される。

学校の実現可能性制約 $\mathcal{F}_s$ は、大きく異なる。教師の集合 μ_s が学校 s にとって実現可能であるとは、受け入れられた各教師をその教師が免許を持つ教科のいずれか一つに割り当てることで、学校の教科ごとのキャパシティを満たすような方法が存在する場合をいう。これは、各教師 $i \in \mu_s$ に対して $J_s(i) \in A(i)$ を満たす**教科割り当て関数** (subject assignment function) $J_s : \mu_s \to J$ に依存する。形式的な制約は以下の通りである。

$$\mathcal{F}_s = \{\mu_s \subseteq I : \exists J_s : \mu_s \to J \text{ s.t. } \forall j \in J, |\{i \in \mu_s : J_s(i) = j\}| \leq c_s^j\}$$

3.2 新しいマッチングの特性

公平性の概念は、この新しい設定に合わせて調整される。ある教師 i が教師 i' に対して**弱い教科に基づいた正当な嫉妬** (weak subject justified envy) を持つとは、教師 i が教えることのできる教科の集合が教師 i' のそれ以上であり（すなわち、$A(s) \cap A(i') \subset A(s) \cap A(i)$）、かつ標準的な正当な嫉妬の条件が満たされる（$\exists s \in S$ s.t. $s \succ_i \mu_i, i' \in \mu_s, i \succ_s i'$）場合をいう。マッチングが**弱い教科公平** (weak subject-fair) であるとは、他の教師に対して弱い教科に基づいた正当な嫉妬を持つ教師が誰もいない状態を指す。

さらに、マッチングが**教科 j において現職必置条件を満たす** (α-feasible on j) であるとは、複数教科制約の下で実現可能であり、かつ、教科 j の免許を持つ全ての現職教師

が雇用されている（すなわち、$\forall i \in I_\alpha \cap I_j, \mu_i \neq \emptyset$）場合をいう。

3.3　複数教科に対応するためのアルゴリズムの拡張

カットオフ調整アルゴリズムを、複数教科のケースを扱えるように拡張する。学校 s の教科 j における需要関数 $D_s^j(p)$ は、教師が持つ全ての免許教科にわたる他の選択肢（alternative opportunities）を考慮するように再定義される。教師 $i \in I_j$ がこの需要集合に含まれるのは、その教師が学校 s の教科 j におけるカットオフを上回り、かつ、自身が条件を満たす他のいかなる割り当て候補 (s', j') よりも学校 s での職を好む場合である。

$$
\begin{aligned}
D_s^j(p) = \{ i \in I_j \mid i \succeq_s i^{(s,p_s^j)} \text{ かつ } s \succ_i \emptyset \text{ であり、} \\
\forall s' \in S \setminus \{s\}, \forall j' \in A(i) \cap A(s'), i \succeq_{s'} i^{(s',p_{s'}^{j'})} \implies s \succ_i s' \}
\end{aligned}
$$

教科別カットオフ調整関数 $T : P \to P$ は、以前と同様に動作しますが、この新しい需要関数に対して適用される。

$$
T_s^j(p) = \begin{cases} p_s^j + 1 & \text{もし } |D_s^j(p)| > c_s^j \text{ の場合} \\ p_s^j & \text{もし } |D_s^j(p)| \leq c_s^j \text{ の場合} \end{cases}
$$

もし p がこの関数 T の不動点（fixed point）であるならば、その結果として得られる需要のある教師の集合は、各学校にとって実現可能となる。すなわち、$\bigcup_{j \in A(s)} D_s^j(p) \in \mathcal{F}_s$ である。この不動点から最終的なマッチング μ^p を構成することができる。これは、各学校に対して、その学校が募集するすべての教科にわたる需要のある教師の和集合を割り当てることで行われます。

$$
\mu_s^p = \bigcup_{j \in A(s)} D_s^j(p)
$$

3.4　結果と考察

定理 2. もしカットオフのプロファイル $p \in P$ が関数 T の不動点であるならば、それによって定まるマッチング μ^p は弱い教科公平（*weak subject-fair*）である。

証明. カットオフのプロファイル $p \in P$ が T の不動点であると仮定する。背理法により、μ^p が弱い教科公平でないと仮定する。このとき、$A(s) \cap A(i') \subset A(s) \cap A(i)$ かつ $s \succ_i \mu_i^p$, $i' \in \mu_s^p$, $i \succ_s i'$ を満たすような教師 $i, i' \in I$ と学校 $s \in S$ が存在する。$i' \in \mu_s^p$ であるから、μ_s^p の定義より、$i' \in D_s^j(p)$ かつ $j \in A(i')$ となるような教科 $j \in A(s)$ が存在する。$i' \in D_s^j(p)$ であるから、$i' \succeq_s i^{(s,p_s^j)}$ が成り立つ。一方、$A(s) \cap A(i') \subset A(s) \cap A(i)$ かつ $j \in A(s) \cap A(i')$ であることから、$j \in A(s) \cap A(i)$ である。すなわち、$j \in A(i)$ となる。$i \succ_s i'$ かつ $i' \succeq_s i^{(s,p_s^j)}$ であるから、優先順位の推移性より $i \succ_s i^{(s,p_s^j)}$ が成り立つ。

まず、$\mu_i^p = \emptyset$ のケースを考える。このとき、i は需要集合 $D_s^j(p)$ には含まれない。前段の議論から i は (s, j) でのカットオフは満たしているので、$i \notin D_s^j(p)$ となる理由は、i が s よりも厳密に好む別の選択肢が存在するためでなければならない。すなわち、$i \succeq_{s'} i^{(s', p_{s'}^{j'})}$ かつ $s' \succ_i s$ となるような、別の学校と教科の組 (s', j')（ただし $s' \in S \setminus \{s\}, j' \in A(i) \cap A(s')$）が存在する。しかし、前提より $\mu_i^p = \emptyset$ であるから、i は最終的に s' にも割り当てられないため、$i \notin D_{s'}^{j'}(p)$ でもある。したがって、この論法を繰り返すと、$s'' \succ_i s'$ となる、さらに好ましい学校 s'' が存在することになる。この手続きは無限の選好サイクル（$\cdots \succ_i s'' \succ_i s' \succ_i s$）を示唆するが、これは学校 S と教科 J の集合が有限であるという事実に矛盾する。

次に、$\mu_i^p \neq \emptyset$ のケースを考える。教師 i の割り当て先を $s' \equiv \mu_i^p$ とおく。このとき、定義より $i \in \mu_{s'}^p$ となる。したがって、$\mu_{s'}^p$ の定義から、ある教科 $j' \in A(s')$ について $i \in D_{s'}^{j'}(p)$ となる。我々は元々、教師 i が学校 s において嫉妬を持つ状況を考えており、$s \neq s'$ である。前段の議論から、$j \in A(i) \cap A(s)$ かつ $i \succeq_s i^{(s, p_s^j)}$ が成立している。$i \in D_{s'}^{j'}(p)$ であることの定義は、i がカットオフを満たす他のいかなる学校（この場合は s）よりも s' を好むことを要求する。よって、$\mu_i^p = s' \succ_i s$ でなければならない。しかし、これは元々の弱い教科に基づいた嫉妬の仮定である $s \succ_i \mu_i^p = s'$ と矛盾する。 □

3.5 割り当てを保証するためのモデルの精緻化

このセクションでは、前述のモデルが現職教師全員への割り当てを保証できないケースを提示し、この問題に対処するためのモデルの精緻化を導入します。

3.5.1 動機付けの例

以下の例を考えます。これは、前述のアルゴリズムの下ではα-実現可能な不動点が存在しないシナリオを説明するものです。

例 1. 教師の集合を $I = \{1, 2, 3, 4\}$、学校の集合を $S = \{5, 6\}$ とし、現職教師の集合を $I_\alpha = \{1, 2, 3\}$ とする。

選好は以下の通りである。

- 全ての教師 $i \in I$ について、$\succ_i$: $6 \succ 5 \succ \emptyset$。
- 全ての学校 $s \in S$ について、$\succ_s$: $1 \succ 2 \succ 3 \succ 4 \succ \emptyset$。

教師の免許教科 $(A(i))$ と学校の募集教科 $(A(s))$ は以下の通りである。

- $A(1) = \{$ 英語, 数学 $\}$
- $A(2) = \{$ 英語, 数学 $\}$
- $A(3) = \{$ 数学 $\}$

- $A(4) = \{$ 英語 $\}$

- $A(5) = \{$ 英語, 数学 $\}$

- $A(6) = \{$ 英語 $\}$

最後に、教科ごとのキャパシティは $c_5^{\text{英語}} = 2$ および $c_5^{\text{数学}} = 1$ である。

この設定では、アルゴリズムの一つの結果として、$\mu_5 = \{2\}$ および $\mu_6 = \{1\}$ といったマッチングが生じうる。この場合、現職教師である教師 3 ($3 \in I_\alpha$) は、職を得られないままとなる。これは、α-実現可能なマッチングの存在が保証されないことを示している。

3.5.2 新しい仮定と定義

例 2 で浮き彫りになった問題に対処するため、主担当教科に基づいて現職教師を優先する、さらなる仮定を導入します。

まず、各教師について 2 つの新しい集合を定義します。

- $B(i)$: 再配置前に教師 i が担当していた主担当教科。$|B(i)| = 1$ と仮定します。

- $C(i) = A(i) \setminus B(i)$: 教師 i が免許を持つものの、以前は担当していなかった教科の集合。

これらの定義を用いて、学校の優先順位に関する新しい仮定を導入し、適切なマッチングの存在に関する以前の仮定を修正します。ここで、$\succ_s^j$ は、教科 j の資格を持つ教師に対する学校 s の選好を表すものとします。

仮定 (5)　任意の学校 $s \in S$ と、その学校が募集する任意の教科 $j \in A(s)$ について、学校は、主担当教科が j である教師を、j が副次的な免許教科である教師よりも優先する。形式的には、

$$\forall s \in S, \forall i, i' \in I, \forall j \in A(s),\ \text{もし}\ B(i) = \{j\}\ \text{かつ}\ j \in C(i'),\ \text{ならば}\ i \succ_s^j i'.$$

仮定 (3)'　この仮定は、以前の仮定 (3) を置き換えるものである。我々は、全ての現職教師が自身の主担当教科の職に割り当てられるような、実現可能なマッチングが少なくとも一つは存在すると仮定する。形式的には、以下の条件を満たすマッチング μ が存在する。

1. $\forall s \in S, \mu_s \in \mathcal{F}_s$。

2. $\forall i \in I_\alpha$ について、i がその主担当教科 $j = B(i)$ を教えるために学校 s に割り当てられるような、$s \in S$ が存在する。

定理 3. マッチング μ^p が α-実現可能となるような、関数 T の不動点 p が存在する。

証明. $\widehat{I} \equiv I_\alpha$ とおく。全ての $i \in \widehat{I}$ について、$\widehat{A}(i) \equiv B(i)$ とする。すなわち、全ての $i \in \widehat{I}$ について $|\widehat{A}(i)| = 1$ である。ここでは、$\widehat{I}$ と S の間のマッチング μ を考える。このとき、実現可能性制約を次のように定義する。

$$\widehat{\mathcal{F}}_s = \{\mu_s \subset \widehat{I} : \forall j \in J, |\{i \in \mu_s : \widehat{A}(i) = \{j\}\}| \leq c_s^j\}$$

複数教科制約であるから、(仮定 1) は満たされる。$I \setminus I_\alpha = \emptyset$ であるから、(仮定 2) も満たされる。元の問題 $(I, S, \succ_I, \succ_S, \mathcal{F}_s)$ における (仮定 3) より、(i) と (ii) を満たすマッチング μ が存在する。ここで、全ての $i \in \widehat{I}$ について $\widehat{\mu}_i = \mu_i$ となるように、$\widehat{\mu}$ を定義する。(仮定 3)' より、$\widehat{\mu}_s \in \widehat{\mathcal{F}}_s$ であり、かつ全ての $i \in \widehat{I}$ についてある $s \in S$ が存在して $i \in \widehat{\mu}_s$ となる。したがって、$\widehat{\mu}$ は (元の) 仮定 (3) を満たす。元の問題 $(I, S, \succ_I, \succ_S, \mathcal{F}_s)$ における (仮定 4) より、全ての $i \in I_\alpha (= \widehat{I})$ と全ての $s \in S$ について、$s \succ_i \emptyset$ である。以上より、(このサブ問題において) 仮定 (1) から (4) は全て満たされる。

$|\widehat{A}(i)| = 1$ という条件と $\widehat{\mathcal{F}}_s$ の構成方法から、この制約は教科制約（subject constraint）である。この制約が教科制約であることから、定理 2 より、問題 $(\widehat{I}, S, \succ_{\widehat{I}}, \succ_S, \widehat{\mathcal{F}}_s)$ において、α-実現可能であるような教科別教師最適公平マッチング（subject-TOFM）$\widehat{\mu}$ が存在する。

$\widehat{i}^{(s,j,l)}$ を、学校 s の優先順位 $\succ_s$ に従って並べたときに、集合 $\{i\}_{i \in \widehat{I}_j}$ の中で l 番目に順位の低い教師とする。任意の $s \in S$ と $j \in J$ をとる。

$$p^\star_{(s,j)} = \begin{cases} \min\{l \mid \widehat{i}^{(s,j,l)} \in \widehat{\mu}_s^j\} & \text{もし } \widehat{\mu}_s^j \neq \emptyset \text{ の場合,} \\ |\widehat{I}_j| + 1 & \text{もし } \widehat{\mu}_s^j = \emptyset \text{ の場合.} \end{cases}$$

需要集合を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \widehat{D}_s^j(p_j^\star) = \{i \in I_j \mid & i \succeq_s i^{(s,j,p^\star_{(s,j)})} \text{ かつ } s \succ_i \emptyset; \\ & \text{かつ } \forall s' \in S_j, i \succeq_{s'} i^{(s',j,p^\star_{(s',j)})} \implies s \succeq_i s'\} \end{aligned}$$

$\widehat{\mu} = \widehat{\mu}^{p^\star}$ **を示す**　（すなわち、全ての $s \in S, j \in J$ について、$\widehat{\mu}_s^j = \widehat{\mu}^{p^\star}_{(s,j)} = \widehat{D}_s^j(p_j^\star)$ であることを示す）

方向 1: $\widehat{\mu}_s^j \subseteq \widehat{D}_s^j(p_j^\star)$ **を示す**　任意の $i \in \widehat{\mu}_s^j$ をとる。$i = \widehat{i}^{(s,j,l)}$ となるような l を考える。$i \in \widehat{\mu}_s^j$ ということと、$p^\star_{(s,j)}$ の定義から、$i = \widehat{i}^{(s,j,l)} \succeq_s \widehat{i}^{(s,j,p^\star_{(s,j)})}$ が成り立つ。ここで、背理法により、$i \succeq_{s'} \widehat{i}^{(s',j,p^\star_{(s',j)})}$ かつ $s' \succ_i s = \widehat{\mu}_i$ となるような $s' \in S_j$ が存在すると仮定する。このとき、$s' \succ_i \widehat{\mu}_i$ である。$p^\star_{(s',j)}$ の定義から、カットオフランクの教師はマッチングに含まれるため、$\widehat{i}^{(s',j,p^\star_{(s',j)})} \in \widehat{\mu}_{s'}^j$ である。この状況は、教師 i が学校 s' において、そこに割り当てられている教師 $\widehat{i}^{(s',j,p^\star_{(s',j)})}$ に対して正当化された嫉妬を持つことを意味し、これは $\widehat{\mu}$ が教科公平（subject-fair）であるという事実に矛盾する。したがっ

て、背理法の仮定は偽であり、全ての $s' \in S_j$ について、$i \succeq_{s'} \widehat{i}^{(s',j,p^\star_{(s',j)})}$ ならば $s \succeq_i s'$ でなければならない。$\widehat{\mu}$ は個人合理的（I.R.）であるから、$\widehat{\mu}_i = s \succ_i \emptyset$ である。以上より、$i \succeq_s \widehat{i}^{(s,j,p^\star_{(s,j)})}$、$s \succ_i \emptyset$、そして「全ての $s' \in S_j$ について $i \succeq_{s'} \widehat{i}^{(s',j,p^\star_{(s',j)})} \Rightarrow s \succeq_i s'$」が全て成立するため、$i \in \widehat{D}^j_s(p^\star_j)$ である。

方向 2: $\widehat{\mu}^j_s \supseteq \widehat{D}^j_s(p^\star_j)$ を示す　任意の $i \in \widehat{D}^j_s(p^\star_j)$ をとる。背理法により、$i \notin \widehat{\mu}^j_s$ と仮定する。$i \in \widehat{D}^j_s(p^\star_j)$ であるから、定義より $i \succeq_s \widehat{i}^{(s,j,p^\star_{(s,j)})}$ であり、かつ $\widehat{i}^{(s,j,p^\star_{(s,j)})} \in \widehat{\mu}^j_s$ である。背理法の仮定 $i \notin \widehat{\mu}^j_s$ より、$i \neq \widehat{i}^{(s,j,p^\star_{(s,j)})}$ であるため、優先順位の関係は厳密になり、$i \succ_s \widehat{i}^{(s,j,p^\star_{(s,j)})}$ となる。$\widehat{\mu}$ は α-実現可能であるため i はどこかに割り当てられるはずなので、その学校を $s' = \widehat{\mu}_i$ とする。仮定より $s \neq s'$ である。$i = \widehat{i}^{(s',j,l)}$ となるような l を考える。$i \in \widehat{\mu}^j_{s'}$ ということと、$p^\star_{(s',j)}$ の定義から、$i = \widehat{i}^{(s',j,l)} \succeq_{s'} \widehat{i}^{(s',j,p^\star_{(s',j)})}$ が成り立つ。一方、$i \in \widehat{D}^j_s(p^\star_j)$ であるから、その定義より、「$i \succeq_{s'} \widehat{i}^{(s',j,p^\star_{(s',j)})}$ ならば $s \succeq_i s'$」でなければならない。$s \neq s'$ であることから、これは $s \succ_i s'$ を意味する。これらをまとめると、$s \succ_i s' = \widehat{\mu}_i, \widehat{i}^{(s,j,p^\star_{(s,j)})} \in \widehat{\mu}^j_s,$ かつ $i \succ_s \widehat{i}^{(s,j,p^\star_{(s,j)})}$ が成立する。これは、$\widehat{\mu}$ が教科公平であるという事実に矛盾する。s したがって、最初の仮定は偽であり、$i \in \widehat{\mu}^j_s$ でなければならない。

次のように関数 $\widehat{T}$ を定義する。

$$\widehat{T}^j_s(p^\star) = \begin{cases} p^\star_{(s,j)} + 1 & \text{もし } |\widehat{D}^j_s(p^\star_j)| > c^j_s \text{ の場合} \\ p^\star_{(s,j)} & \text{もし } |\widehat{D}^j_s(p^\star_j)| \leq c^j_s \text{ の場合}, \end{cases}$$

ただし、$(|\widehat{I}_j| + 1) + 1 = 1$ と定める。

$p^\star$ が $\widehat{T}$ の不動点であることを示すには、全ての s, j について $\widehat{T}^j_s(p^\star) = p^\star_{(s,j)}$ であることを示せばよい。

任意の s, j をとる。前の議論で示した $\widehat{\mu} = \widehat{\mu}^{p^\star}$ という等式と、$\widehat{\mu}$ の実現可能性から、$\widehat{D}^j_s(p^\star_j)$ は実現可能である。すなわち、$|\widehat{D}^j_s(p^\star_j)| \leq c^j_s$ が成り立つ。

$\widehat{T}$ の定義によれば、もし $|\widehat{D}^j_s(p^\star_j)| \leq c^j_s$ ならば、$\widehat{T}^j_s(p^\star) = p^\star_{(s,j)}$ となる。これは示すべきことであった。

問題 $(I, S, \succ_I, \succ_S, \mathcal{F}_s)$ を考えます。

$i^{(s,j,l)}$ を、学校 s の優先順位 $\succ_s$ に従って並べたときに、集合 $\{i\}_{i \in I_j}$ の中で l 番目に順位の低い教師とします。ここで、次のように定義します。

$$p_{(s,j)} = \begin{cases} p^\star_{(s,j)} + |I_j \setminus \{i \in I_\alpha : B(i) = \{j\}\}| & \text{もし } \widehat{\mu}^j_s \neq \emptyset \text{ の場合}, \\ |I_j| + 1 & \text{もし } \widehat{\mu}^j_s = \emptyset \text{ の場合}. \end{cases}$$

全ての現職教師 $i \in I_\alpha$ について $\widehat{\mu}^{p^\star}_i = \mu^p_i$ であり、かつ、全ての非現職教師 $i \notin I_\alpha$ について $\mu^p_i = \emptyset$ であることを示す。（これは、需要集合について $\widehat{D}^j_s(p^\star_j) = D^j_s(p)$ であることを示すことと同値である。）

$\widehat{D}^j_s(p^\star_j) \subseteq D^j_s(p)$ を示す　任意の $i \in \widehat{D}^j_s(p^\star_j)$ をとる。このとき、定義より $B(i) = \{j\}$ である。$i \in \widehat{D}^j_s(p^\star_j)$ であるから、$i \succeq_s \widehat{i}^{(s,j,p^\star_{(s,j)})}$ が成り立つ。このことと、p の構成方法から $\widehat{i}^{(s,j,p^\star_{(s,j)})} = i^{(s,j,p_{(s,j)})}$ であるため、$i \succeq_s i^{(s,j,p_{(s,j)})}$ が従う。

ここで、背理法により、$i \succeq_{s'} i^{(s',j',p_{(s',j')})}$ かつ $s' \succ_i s$ となるような $s' \in S \setminus \{s\}$ と $j' \in A(i) \cap A(s')$ が存在すると仮定する。

(仮定 5) より、i の主担当ではない全ての教科 $j' \in A(i)$ $(j' \neq j)$ について、$B(k) = \{j'\}$ となる全ての現職教師 $k \in I_\alpha$ に対して、$k \succ^{j'}_{s'} i$ が成り立つ。(6)

背理法の仮定より、$i \succeq_{s'} i^{(s',j',p_{(s',j')})}$ であった。(7) これは、教師 i の優先順位がカットオフ $p_{(s',j')}$ 以上であることを意味するため、不等式で表すと次のようになる。

$$|\{k \in I_{j'} \mid i \succeq_{s'} k\}| \geq p_{(s',j')}$$

また、(6) から、i よりも優先順位が厳密に高い教師の数は、主担当教科が j' である現職教師の数以上でなければならない。

$$|\{k \in I_{j'} \mid k \succ_{s'} i\}| \geq |\{k \in I_\alpha \mid B(k) = \{j'\}\}| \quad \cdots (8)$$

(7) と (8) より、

$$|I_{j'}| = |\{k \in I_{j'} \mid k \succ_{s'} i\}| + |\{k \in I_{j'} \mid i \succeq_{s'} k\}| \geq |\{k \in I_\alpha \mid B(k) = \{j'\}\}| + p_{(s',j')} \quad \cdots (9)$$

となる。

ケース 1: $\widehat{\mu}^{j'}_{s'} \neq \emptyset$ の場合　このとき、p の定義より、$p_{(s',j')} = p^\star_{(s',j')} + |I_{j'} \setminus \{i' \in I_\alpha \mid B(i') = \{j'\}\}|$ である。これを (9) 式の右辺に代入すると、

$$\begin{aligned}
\text{(9) 式の右辺} &= p_{(s',j')} + |\{i' \in I_\alpha \mid B(i') = \{j'\}\}| \\
&= p^\star_{(s',j')} + |I_{j'} \setminus \{i' \in I_\alpha \mid B(i') = \{j'\}\}| + |\{i' \in I_\alpha \mid B(i') = \{j'\}\}| \\
&= p^\star_{(s',j')} + |I_{j'}|
\end{aligned}$$

したがって、(9) 式は $|I_{j'}| \geq p^\star_{(s',j')} + |I_{j'}|$ となる。$p^\star_{(s',j')} \geq 1$ であるから、これは矛盾である。

ケース 2: $\widehat{\mu}^{j'}_{s'} = \emptyset$ の場合　このとき、p の定義より、$p_{(s',j')} = |I_{j'}| + 1$ である。これを (9) 式に代入すると、$|I_{j'}| \geq (|I_{j'}| + 1) + |\{i' \in I_\alpha \mid B(i') = \{j'\}\}|$ となる。これは明らかに矛盾である。

ケース 1、2 のいずれにおいても矛盾が導かれた。これは、背理法の最初の仮定（$s' \succ_i s$ となるような i の主担当ではない教科 $j' \neq j$ が存在する）が誤りであったことを意味す

る。したがって、$j' = j$ でなければならない。

ここで、再度背理法により、$i \succeq_{s'} i^{(s',j',p_{(s',j')})}$ かつ $s' \succ_i s$ となるような $s' \in S \setminus \{s\}$ と $j' \in A(i) \cap A(s')$ が存在すると仮定する。しかし、前段の結論から $j' = j$ でなければならない。したがって、この仮定は、ある $s' \in S_j$ が存在し、$i \succeq_{s'} i^{(s',j,p_{(s',j)})}$ かつ $s' \succ_i s$ となることを意味する。p の構成方法（$\widehat{i}^{(s,j,p^\star_{(s,j)})} = i^{(s,j,p_{(s,j)})}$）を用いると、これは「ある $s' \in S_j$ が存在し、$i \succeq_{s'} \widehat{i}^{(s',j,p^\star_{(s',j)})}$ かつ $s' \succ_i s$ となる」ことと同値である。しかし、これは $\widehat{\mu}^{p^\star}(= \widehat{D}^j(p^\star_j))$ が教科公平であるという事実（証明済み）に矛盾する。したがって、背理法の仮定は偽であり、最終的に $i \in D^j_s(p)$ でなければならない。

$D^j_s(p) \subseteq \widehat{D}^j_s(p^\star_j)$ を示す　任意の $i \in D^j_s(p)$ をとる。$i \in D^j_s(p)$ であるから、定義より $i \succeq_s i^{(s,j,p_{(s,j)})}$ が成り立つ。このことと、p の構成方法（$\widehat{i}^{(s,j,p^\star_{(s,j)})} = i^{(s,j,p_{(s,j)})}$）から、$i \succeq_s \widehat{i}^{(s,j,p^\star_{(s,j)})}$ が従う。また、$i \in D^j_s(p)$ であるから、その定義より、全ての $s' \in S \setminus \{s\}$ と全ての $j' \in A(i) \cap A(s')$ について、

$$i \succeq_{s'} i^{(s',j',p_{(s',j')})} \implies s \succ_i s'$$

が成り立つ。特に、教科 j に限定すると、全ての $s' \in S_j$ について、「$i \succeq_{s'} i^{(s',j,p_{(s',j)})}$ ならば $s \succ_i s'$」が成り立つことになる。これは、i が $\widehat{D}^j_s(p^\star_j)$ の定義における選好条件（$s \succeq_i s'$）よりも強い条件を満たしていることを意味する。i が $\widehat{D}^j_s(p^\star_j)$ の元であるための条件は、(1) カットオフを満たすこと、(2) 個人合理的であること（$i \in D^j_s(p)$ より成立）、(3) 他の選択肢より s を好むこと、の 3 つである。上記で示したことはこれらの条件を全て満たすため、$i \in \widehat{D}^j_s(p^\star_j)$ である。

この状況において、p が T の不動点であることを示します。そのためには、全ての $s \in S$ と全ての $j \in J$ について、$T^j_s(p) = p^j_s$ であることを示す必要があります。任意の $s \in S$ と $j \in J$ をとります。これまでの証明により、$\widehat{D}^j_s(p^\star_j) = D^j_s(p)$ であり、また $\widehat{\mu}^{p^\star}$ は実現可能でした。$\widehat{D}^j_s(p^\star_j) = \widehat{\mu}^j_s(p^\star)$ であり、その実現可能性から $|\widehat{\mu}^j_s(p^\star)| \leq c^j_s$ です。したがって、

$$|D^j_s(p)| = |\widehat{D}^j_s(p^\star_j)| = |\widehat{\mu}^j_s(p^\star)| \leq c^j_s$$

が成り立ちます。関数 T の定義によれば、もし $|D^j_s(p)| \leq c^j_s$ ならば、$T^j_s(p) = p^j_s$ となります。これは、p が T の不動点であることを示しています。 $\square$

4　結果と考察 (Results and Discussion)

5　結論 (Conclusion)

付録: 証明 (Appendix: Proofs)

CounterExample 1 (Under budget constraints, may not be α-feasible).
Sps that $s_4, S_5 \in S$ and $i_1, i_2, i_3 \in I$ and $i_1, i_3 \in I_\alpha$ and $i_2 \in I \setminus I_\alpha$.
Assume that

$$\begin{aligned}
&\succ_{i_1}: 45\emptyset,\\
&\succ_{i_2}: 4\emptyset 5,\\
&\succ_{i_3}: 54\emptyset,\\
&\succ_{s_4}: 132\emptyset,\\
&\succ_{s_5}: 312\emptyset. \cdots (5)
\end{aligned}$$

Since $\mathcal{F}_s$ is budget constraints, this satisfies (1). (5) stisfies (2) and (4). Since $\exists \mu$ s.t. $i_1 \in \mu_{s_5}$ and $i_3 \in \mu_{s_4}$, this satisfies (3). Then, the matching $\mu*$ s.t. $i_3 \in \mu*_{s_5}$is TOFM but not α-feasible because $i_1 \in I_\alpha, \mu*_{i_1} = \emptyset$. Therefore, TOFM may not be α-feasible under budget constraints.

定理 4. *If $\forall s \in S, \mathcal{F}_s$ is capacity constraints, then TOFM is always α-feasible.*

証明. Sps $\mathcal{F}_s$ is capacity constraints. By (1),$\exists$ TOFM μ^*. Sps , by cont, that $\exists i' \in I_\alpha$ s.t. $\mu^*_{i'} = \emptyset$. By (4), $\forall s \in S$, $s \succ_{i'} \emptyset$. By (3), $\exists s' \in S$ s.t. $i' \in \mu'_{s'}$. By $\mathcal{F}_s$ is capacity constraints, $|\mu *_{s'}| \leq q_{s'}$.

Case 1:$|\mu *_{s'}| < q_{s'}$
$|\mu *_{s'} \cup \{i'\}| \leq q_{s'}$ Let

$$\mu^{''}_s = \begin{cases} \mu^*_s \cup \{i'\} & \text{if } s = s', \\ \mu^*_s & \text{if } s \neq s'. \end{cases}$$

μ'' is FM.(By $|\mu *_{s'} \cup \{i'\}| \leq q_{s'}$, μ'' is feasible. By (4), μ'' is I.R.. By (2), μ'' is fair.) By def of TOFM(ii), $\mu^*_{i'} \succ_{i'} \mu''_{i'}$. But $\mu*_{i'} = \emptyset$, $\mu''_{i'} = s'$, and $s' \succ_{i'} \emptyset$. Therefore, $\mu*_{i'} \not\succ_{i'} \mu''_{i'}$. This is cont by def of TOFM(ii).

Case 2:$|\mu *_{s'}| = q_{s'}$

$\exists j \in I \setminus I_\alpha$ s.t. $j \in \mu*_{s'}$. By (2), $i' \succ_{s'} j$. Let

$$\mu_s^{'''} = \begin{cases} (\mu_s^* \setminus \{j\}) \cup \{i'\} & \text{if } s = s', \\ \mu_s^* & \text{if } s \neq s'. \end{cases}$$

μ''' is FM.(By $|\mu *_{s'} \cup \{i'\}| \leq q_{s'}$, μ''' is feasible. By (4), μ''' is I.R.. By (2), μ''' is fair.) By def of TOFM(ii), $\mu_{i'}^* \succ_{i'} \mu_{i'}^{'''}$. But $\mu*_{i'} = \emptyset$, $\mu_{i'}^{'''} = s'$, and $s' \succ_{i'} \emptyset$. Therefore, $\mu*_{i'} \not\succ_{i'} \mu_{i'}^{'''}$. This is cont by def of TOFM(ii). Therefore, $\forall i \in I_\alpha$, $\mu_i^* \neq \emptyset$. Therefore, TOFM is always α-feasible under capacity constraints. $\square$

参考文献

Kamada, Y. and Kojima, F. (2023). Fair matching under constraints: Theory and applications. The Review of Economic Studies, 91(2):1162–1199.