

# Sistemas Complejos I

Maestría en Ciencias de la Complejidad

Semestre 2014-I

Dr. Damián Hernández H.

# Caos

## Bibliografía

### Libros de Texto

- **Nonlinear Dynamics and Chaos**, Steven H. Strogatz, Ed. Westview Press.
- **A First course in Chaotic Dynamical Systems**, Robert L. Devaney, Ed. Addison-Wesley
- **Chaos**: A very short introduction, Leonard A. Smith, Ed. Oxford University Press

### Libros de Divulgación

- **Chaos: Making a New Science**, James Gleick,
- **Complexity a guided Tour**, Melanie Mithcell
- **Caos, Fractales y cosas raras**, Eliezer Braun, Fondo de Cultura


- Del capítulo II del libro, Complexity a Guided Tour, vemos que un sistema caótico se caracteriza por:
  1. Comportamiento **aparentemente aleatorio** que emergen de **sistemas deterministas** sin fuentes externas de aleatoriedad.
  2. Comportamientos **impredecibles a “largo plazo”** debido a la **sensibilidad ante condiciones iniciales**.
  3. Aunque no es completamente predecible, hay cierto “orden” en el comportamiento de este tipo de sistemas, e.g. **universalidad, rutas al caos**, etc.

- La sensibilidad ante condiciones iniciales en sistemas dinámicos deterministas fue descubierta por Henri Poincare en el siglo XIX, cuando estudiaba el problema de los tres cuerpos, el cual se había propuesto resolver como un preámbulo al problema de la estabilidad del sistema solar.
- A mediados del Siglo XX (1963), Edward Norton Lorenz “descubre” caos estudiando un modelo simplificado de la dinámica atmosférica. A partir de entonces, las ecuaciones de dicho modelo se conocen como las ecuaciones de Lorenz.

# Ecuaciones de Lorenz

Comportamiento global

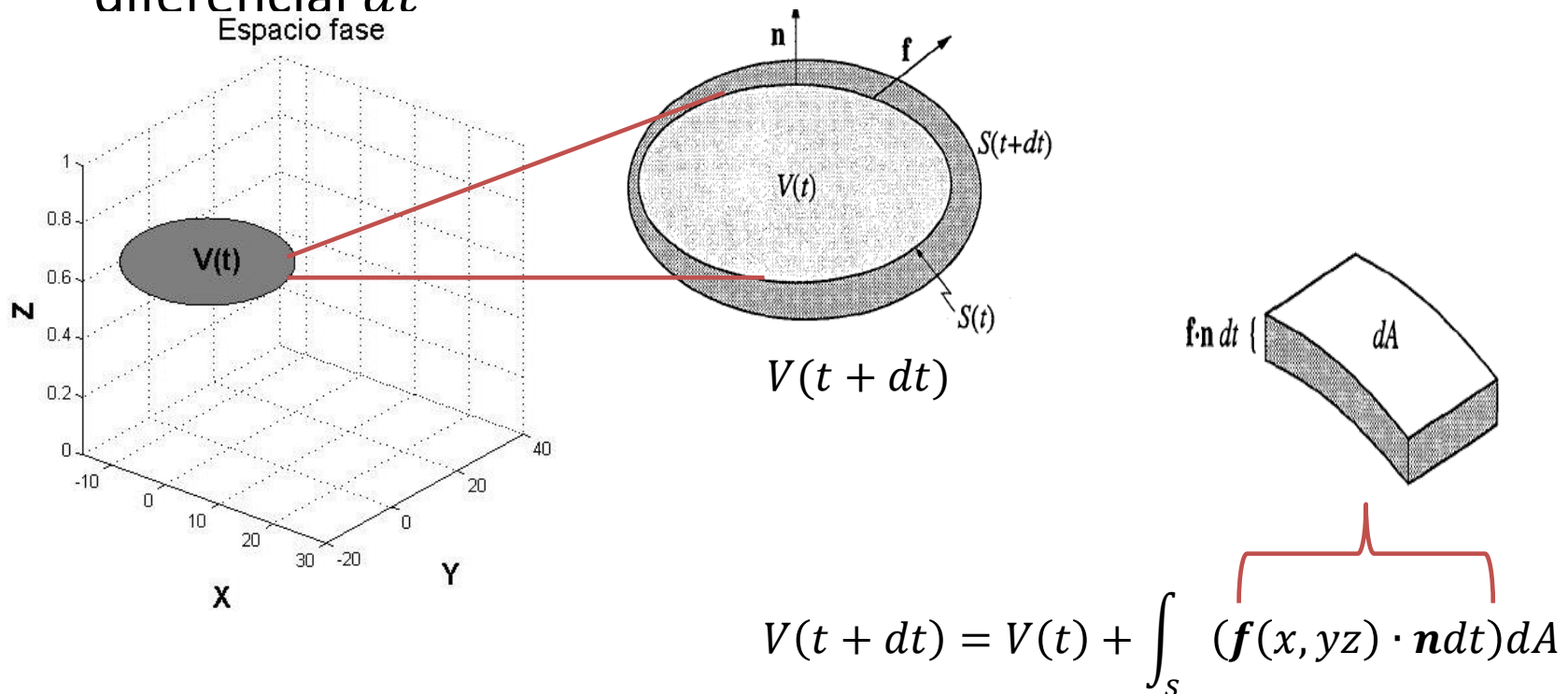
# Ecuaciones de Lorenz

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x); \sigma > 0 \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y - xz; r > 0 \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz; b > 0 \end{aligned} \right\} \left( \frac{d\mathbf{X}}{dt} \right) = \mathbf{f}(x, y, z)$$


Velocidad a la que se mueve el punto  $\mathbf{X}$  en el espacio fase

- Para entender el comportamiento dinámico de este sistema, primero estudiaremos su comportamiento global

- El sistema de ecuaciones de Lorenz es un **sistema dinámico disipativo**, *i.e.* cualquier volumen del espacio fase se contrae bajo la dinámica del sistema.
- Para demostrar que el sistema de Lorenz es disipativo, tomamos un volumen arbitrario del espacio fase a un tiempo  $t$  y estudiamos su evolución en un intervalo de tiempo diferencial  $dt$



- Utilizando el **teorema de la divergencia**, escribimos la integral de superficie como una integral de volumen

$$V(t + dt) = V(t) + \int_V \nabla \cdot (\mathbf{f}(x, yz)) dV$$

- Por otro lado, es fácil ver que  $\nabla \cdot \mathbf{f} = -(\sigma + 1 + b) < 0$ ,
- Rescribiendo la ecuación y tomando el límite cuando  $dt \rightarrow 0$

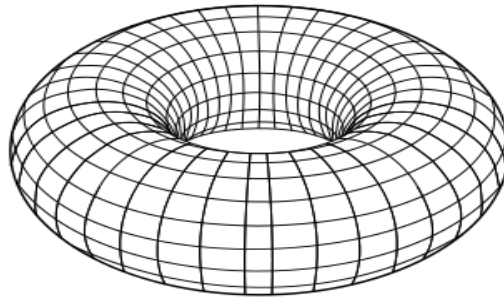
$$\frac{dV}{dt} = \int_V \nabla \cdot (\mathbf{f}(x, yz)) dV = -(\sigma + 1 + b)V$$

$$V(t) = V(0)e^{-(\sigma+1+b)t}$$

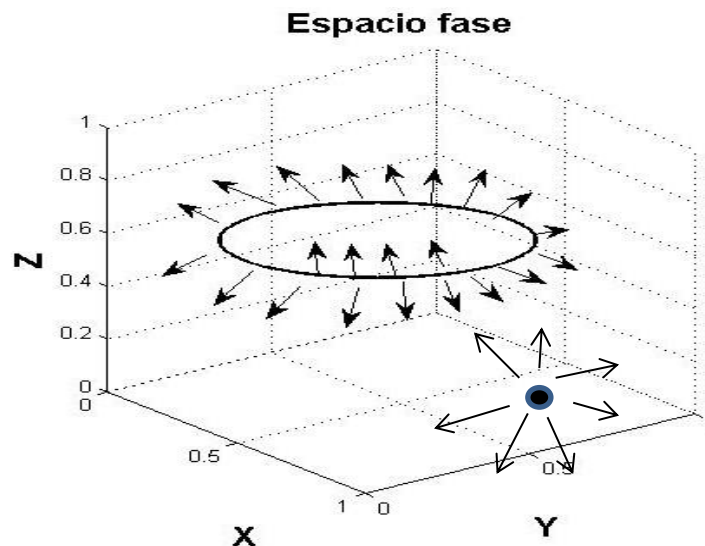


- Debido a que el sistema es disipativo podemos concluir lo siguiente

1. No puede haber movimiento cuasiperiódico



2. No puede haber ni puntos ni ciclos límite repulsivos



- Además, se puede demostrar que **todas las trayectorias** eventualmente entran a un elipsoide y **no salen de ahí**, *i.e.* no hay trayectorias que divejan. Ejercicio **9.2.2** del Strogatz (Cap.9)
- Para darnos una idea más completa del comportamiento del sistema, podemos estudiar los **puntos fijos** y su **estabilidad lineal**
- Los puntos fijos del sistema, son los puntos del espacio fase que no cambian bajo la dinámica, éstos pueden ser de cuatro tipos: **repulsores, atractores, puntos silla o centros.**
- El conjunto de puntos fijos del sistema de Lorenz es solución del siguiente sistema de ecuaciones

$$0 = \sigma(y - x);$$

$$0 = rx - y - xz;$$

$$0 = xy - bz;$$

El número de soluciones reales del sistema, corresponde al número de puntos fijos

- Es fácil ver que si  $r < 1$ , el punto con coordenadas  $x = y = z = 0$ , es la única solución a las ecuaciones para los puntos fijos.
- Por otro lado, si  $r > 1$ , aparecen dos soluciones más, es decir hay tres soluciones distintas para las ecuaciones de los puntos fijos, éstas son

$$C_+ = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$$

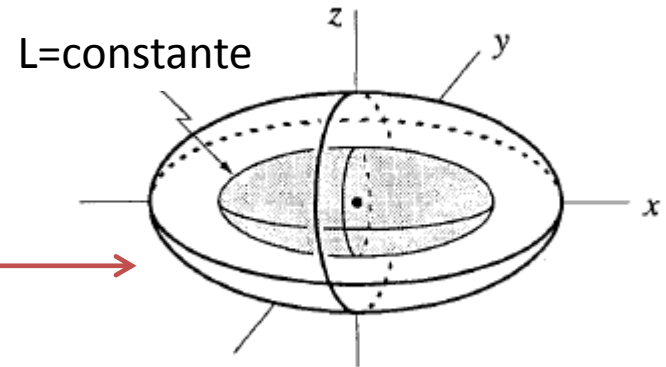
$$C_- = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$$

$$C_0 = (0,0,0)$$

- Por lo tanto, en  $r = 1$  hay una **bifurcación** del tipo tenedor **supercrítica** ( supercritical pitchfork bifurcation). El parámetro  $r$  es un **parámetro de bifurcación** del sistema de Lorenz.

- Cuando  $r < 1$ , se puede demostrar que el origen es un atractor globalmente estable. Es decir, cualquier trayectoria tiende al origen cuando  $t \rightarrow \infty$
- Para esto se construye la siguiente **función de Lyapunov**

$$L(x, y, z) = \frac{1}{\sigma} x^2 + y^2 + z^2$$



Superficies de nivel de la  
función de Lyapunov

- Se demuestra que  $\frac{dL}{dt} < 0$  sobre cualquier trayectoria del sistema

$$\frac{dL}{dt} = \frac{2}{\sigma} x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} + 2z \frac{dz}{dt} = 2((r+1)xy - x^2 - y^2 - bz^2)$$

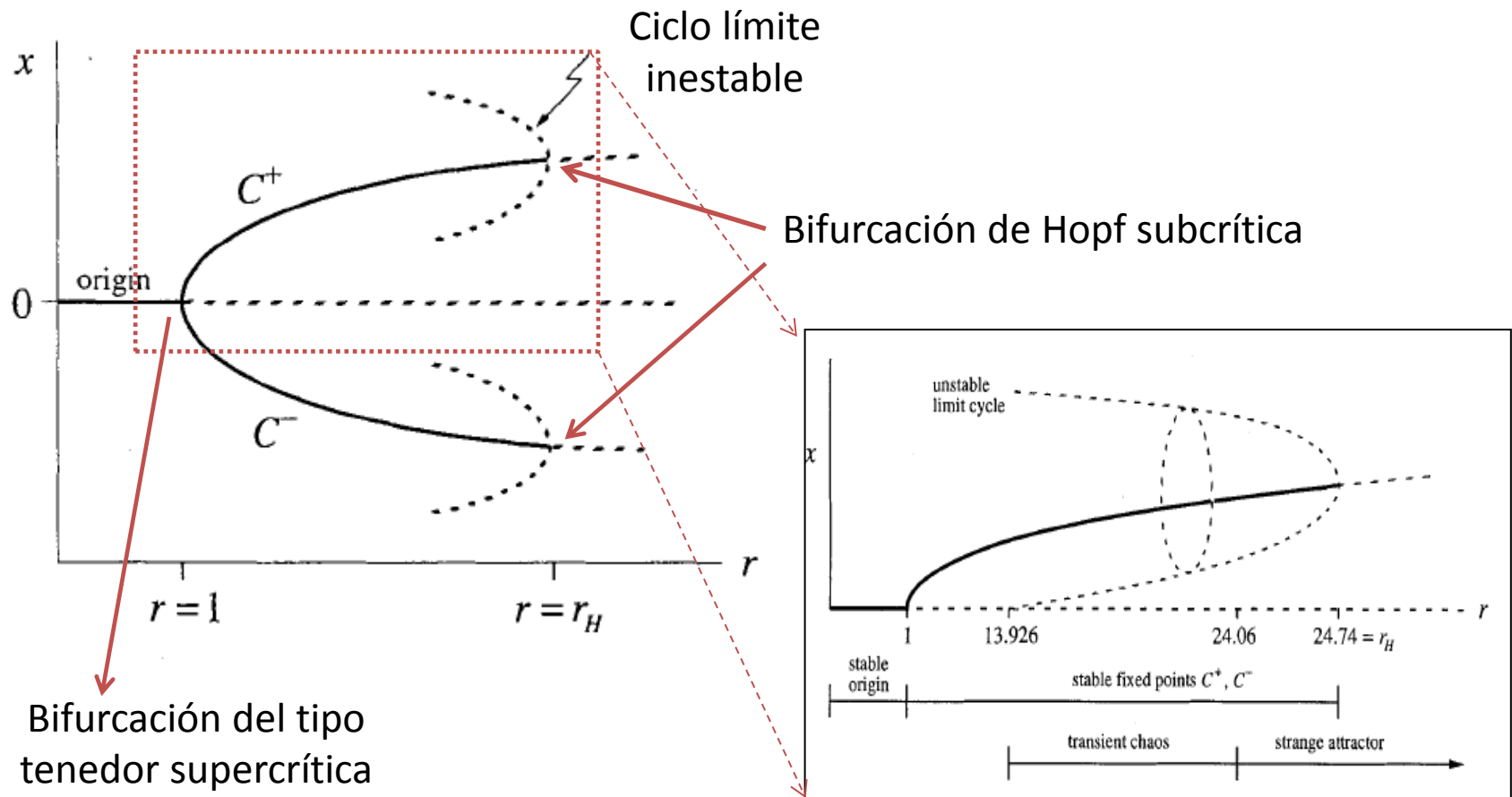
- Completando cuadrados obtenemos la siguiente expresión

$$\frac{dL}{dt} = -\left(x - \frac{r+1}{2}y\right)^2 - \left(1 - \left(\frac{r+1}{2}\right)^2\right)y^2 - bz^2 < 0$$

- Sólo falta demostrar que la derivada temporal de la función de Lyapunov se anula en el origen, cosa fácil si recordamos que  $r < 1$
- De este análisis concluimos que el origen es un **punto fijo globalmente estable**.

- A grandes rasgos, la **estabilidad lineal** de un punto fijo se encuentra a través de los valores propios de la matriz de estabilidad (matriz Jacobiana del problema linealizado) evaluada en el punto fijo en cuestión.
  - Si la **parte real** de todos los valores propios es **negativa**, el punto fijo es un **atractor**.
  - Si la **parte real** de todos los valores propios es **positiva**, el punto fijo es un **repulsor**.
  - Si tenemos algunos valores propios con **parte real positiva y otros con parte real negativa**, el punto fijo es un **punto silla**.
  - Si la parte real de todos los valores propios es cero, el punto fijo es un **centro**.
- Calculando la estabilidad lineal de cada punto fijo como función del parámetro de bifurcación obtenemos el **diagrama de bifurcación** mostrado en la siguiente figura, donde  $r_H = \frac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-b-1}$

- Diagrama de bifurcación (para la variable  $x$ ) del sistema Lorenz



- ¿Qué pasa con las trayectorias del cualquier condición inicial cuándo  $r > r_H$ ?

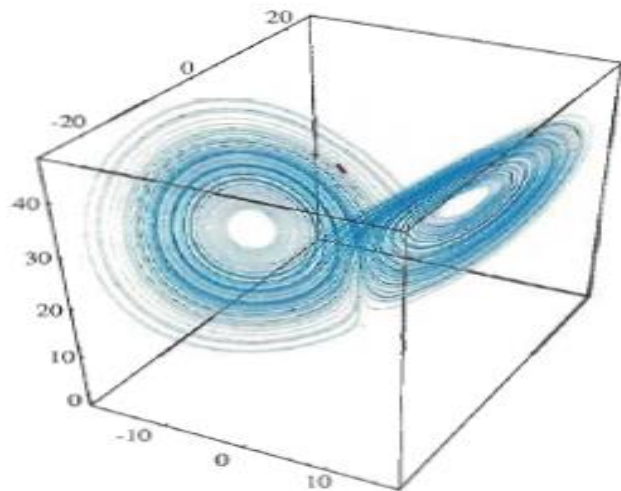
- Tarea: Leer el artículo de Lorenz (Deterministic non periodic flows) y responder la siguiente pregunta ¿Cómo descarta Lorenz la existencia de ciclos límite estables cuando  $r > r_H$ ?
- a) Escribir un “artículo de divulgación” donde se explique las ideas centrales del artículo, sus métodos y conclusiones.
  - b) Investigar el método de Euler para resolver numéricamente sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Utilizar dicho método para resolver el sistema de Lorenz y graficar el comportamiento de varias condiciones iniciales arbitrarias como función del parámetro de bifurcación.

Matlab

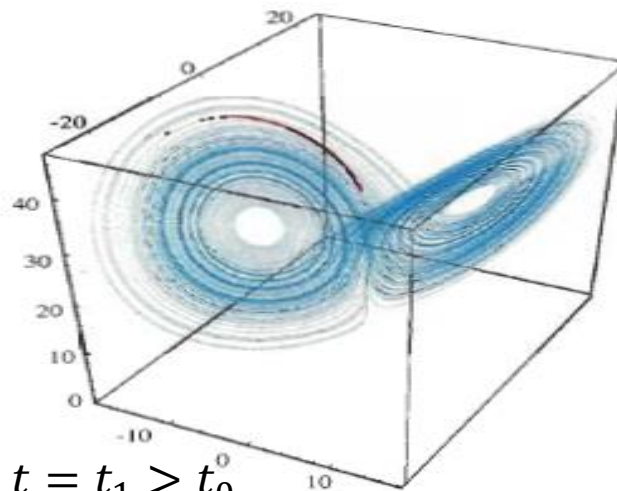


# Sensibilidad ante condiciones iniciales y horizonte de predictibilidad

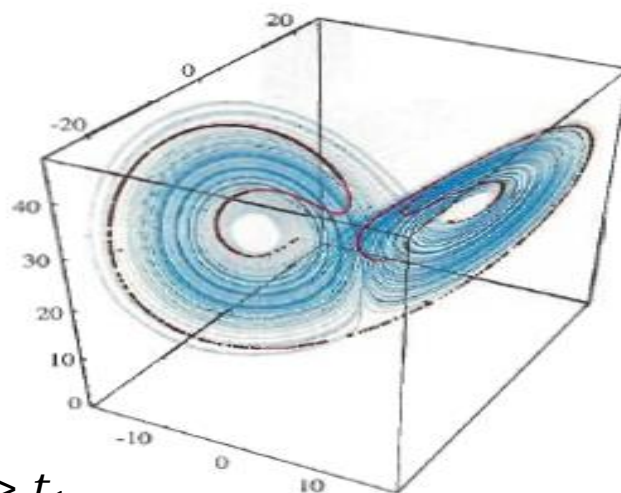
$t = 0$



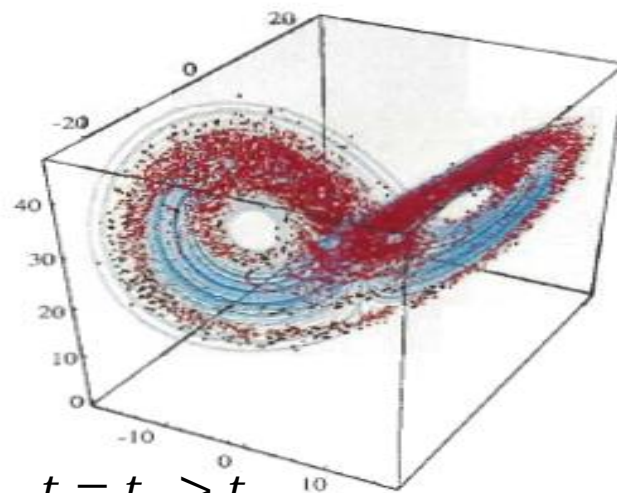
$t = t_1 > t_0$



$t = t_2 > t_1$



$t = t_3 > t_2$



# Exponentes de Lyapunov y horizonte de predictibilidad

- Cuando el sistema está en el régimen caótico, la dinámica presenta sensibilidad ante condiciones iniciales, es decir, las trayectorias de condiciones iniciales “cercanas” se separan de forma exponencial en el tiempo

$$|\delta_x(t)| = |x(t) - x'(t)| \sim |x(0) - x'(0)| e^{\lambda_x t} = |\delta_x(0)| e^{\lambda_x t}$$

$$|\delta_y(t)| = |y(t) - y'(t)| \sim |y(0) - y'(0)| e^{\lambda_y t} = |\delta_y(0)| e^{\lambda_y t}$$

$$|\delta_z(t)| = |z(t) - z'(t)| \sim |z(0) - z'(0)| e^{\lambda_z t} = |\delta_z(0)| e^{\lambda_z t}$$

- $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$  se conocen como **exponentes de Lyapunov**. Si hay **sensibilidad ante condiciones iniciales**, los exponentes de Lyapunov son positivos

- En general, para un sistema cuyo espacio fase es  $n - dimensional$ , existen  $n$  exponentes de Lyapunov.
- Supongamos ahora que conocemos **de forma exacta las leyes de evolución de un sistema dado**, y que dichas leyes se pueden escribir como un sistema **no lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias**. Supongamos además que los valores de los parámetros del sistema implican que éste está en el régimen caótico, *e.g. ecuaciones de Lorenz con  $r > r_H$*
- Para modelar la evolución de nuestro sistema, necesitamos medir las condiciones iniciales de nuestras variables (e.g. humedad, temperatura, número de individuos en una población, etc.), y esto lo hacemos con una incertidumbre de  $\mp a$ ; lo cual implica que los valores reales de las variables de nuestro sistema se encuentran en un una vecindad radio  $2a$  alrededor de nuestros valores medidos, es decir, el valor real de la variable  $x_i$  está en el intervalo  $(x_i(0) - a, x_i(0) + a); i = 1, 2, \dots, n$  ;  $x_i(0) = \text{medición al tiempo } t = 0$

- Al error máximo permitido (depende de que se esté modelando) para cada variable lo llamamos  $E_i$ ; es decir, si la distancia entre el valor real de la variable y el valor de la misma variable en nuestro modelo es mayor que  $E_i$ , la predicción de nuestro modelo es mala (no sirve).
- El tiempo máximo para el cual nuestro modelo va a dar una buena predicción de la evolución del sistema es

$$t_h = \frac{1}{\lambda_{max}} \ln \left( \frac{E_{min}}{\|\delta(0)\|} \right);$$

**Horizonte de predictibilidad**

$$\lambda_{max} = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}; \quad E_{min} = \min\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$$

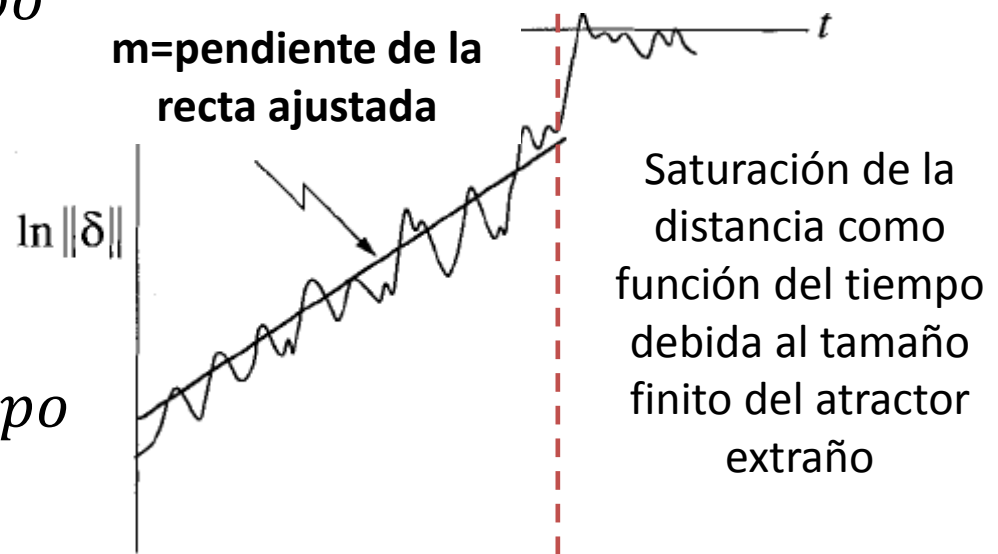
- Nótese que aunque estamos en el régimen caótico, el sistema es predecible dentro del intervalo  $0 \leq t \leq t_h$

- La predicción del comportamiento de sistemas caóticos a tiempos largos ( $t > t_h$ ) es imposible.
- Ejercicio:** Supongamos que  $E_{min} = 10^{-3}$  unidades arbitrarias;  $\|\delta(0)\| = 10^{-7}$  unidades arbitrarias (precisión de las mediciones de las condiciones iniciales),  $\lambda_{max} = m > 0$ ;

$$t_h = \frac{9.21}{m} \text{ unidades de tiempo}$$

- Mejorando nuestras medidas iniciales:  $\|\delta(0)\| = 10^{-13}$

$$t_h = \frac{23.02}{m} \text{ unidades de tiempo}$$



# Ecuaciones en diferencias o Mapeos

- Sistema dinámico **determinista** donde la variable que juega el papel del “tiempo” es discreta. En general, se construyen a través de una función con las siguientes características

Sea  $f$  una función "suave" tal que  $f: \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$

- El mapeo definido por  $f$  toma la siguiente forma

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

- Las ecuaciones en diferencias tienen una gran variedad de aplicaciones, entre las que destacan:
  1. Sirven como herramienta para analizar sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias: **Mapectos de Poincare**
  2. Sirven como “laboratorios” de sistemas dinámicos caóticos
  3. Como modelos de fenómenos naturales: **Dinámica de poblaciones**: Capítulo 1 de Signs of Life, “caja” No. 1
  4. Aparecen de forma natural al analizar **transiciones de fase** en sistemas extendidos a través de **técnicas de renormalización**: Capítulo 2 de Signs of Life, “caja” No.2.

- Cualquier condición inicial  $x_0$  del mapeo, tiene asociada una **órbita**  $x_1, x_2, \dots, x_N, \dots$ , que se construye a través de la **iteración** del mapeo

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \quad x_3 = f(x_2), \dots, \quad x_n = f(x_{n-1}),$$

- Los puntos fijos del mapeo, son los puntos que no cambian bajo la dinámica, es decir que no cambian cuando se les aplica el mapeo

$$x^* = f(x^*)$$

Ecuación que satisfacen los puntos  
fijos del mapeo



- Ejemplos de mapeos unidimensionales

**1. Mapeo Lineal:**  $x_{n+1} = \lambda x_n; x_n \in \mathbb{R}$ , tiene como único punto fijo  $x^* = 0$ . Para este mapeo, la **órbita** asociada a cualquier condición inicial  $x_0$  está dada por:  $x_n = \lambda^n x_0$ . La estabilidad del punto fijo depende del valor de  $\lambda$

a) *Si  $|\lambda| < 1$ , el punto fijo es globalmente estable (**atractor**)*

b) *Si  $|\lambda| > 1$ , el punto fijo es inestable (**repulsor**)*

c) *Si  $\lambda = 1$ , todos los puntos de la recta real son puntos fijos, y no son ni repulsores ni atractores, son **neutralmente estables**. Notese que si  $\lambda = -1$ , la **órbita oscila** entre los valores  $x_0$  y  $-x_0$*

- Ejemplo de mapeo no lineal unidimensional:

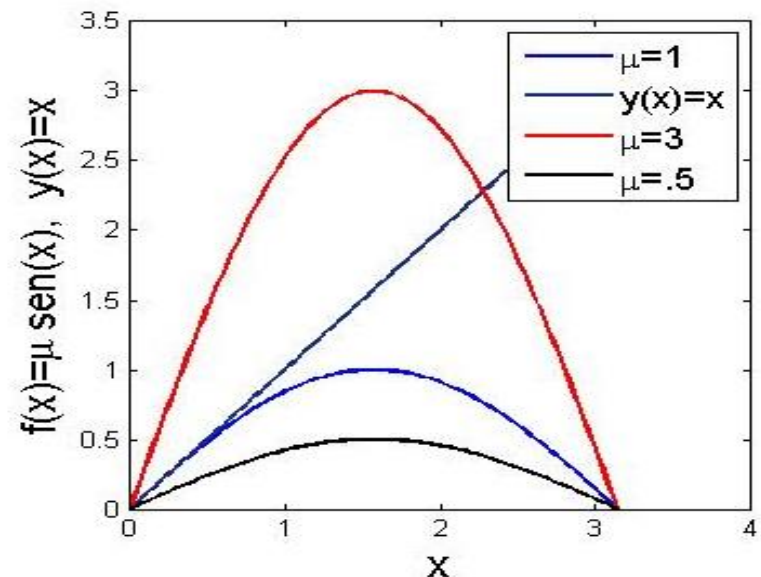
$$x_{n+1} = \mu \text{sen}(x_n), \quad x_n \in [0, \pi]; \mu > 0$$

Mapeo unimodal

- A veces la ecuación de puntos fijos no se puede resolver de forma explícita, en estos casos se resuelve numéricamente o analizando las intersecciones entre la función identidad y la función que define al mapeo.

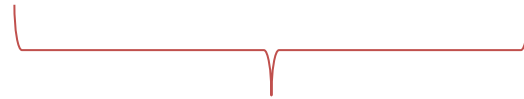
$$x^* = \mu \text{sen}(x^*)$$

Ecuación para los puntos fijos



- Ejemplo de mapeo no lineal unidimensional

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad x \in [0,1]; \quad 0 \leq r \leq 4$$



**Mapeo Logístico**

- La ecuación de puntos fijos para el mapeo logístico es

$$x^* = rx^*(1 - x^*)$$

- Las soluciones de la ecuación de puntos fijos son

$$x^* = 0; \quad x^* = 1 - \frac{1}{r}$$

- De las soluciones vemos que  $r$  es un **parámetro de bifurcación**, y que tenemos un punto de bifurcación en  $r = 1$ .

- Para analizar la estabilidad de los puntos fijos de un mapeo, estudiamos el comportamiento de condiciones iniciales cercanas al punto fijo. Si cualquier condición inicial se aleja del punto fijo, éste es **linealmente inestable**; por el contrario, si éstas se acercan al punto fijo, el punto fijo es **linealmente estable**.

$$\underbrace{x^* + \delta_{n+1}}_{\text{Punto correspondiente a la primera iteración del mapeo sobre la condición inicial}} = f(\underbrace{x^* + \delta_n}_{\text{Condición inicial cercana al punto fijo}}); |\delta_n| \ll 1$$

Punto correspondiente a la primera iteración del mapeo sobre la condición inicial

Condición inicial cercana al punto fijo

- ¿Cómo se comporta la perturbación  $\delta_n$  bajo la dinámica? ó equivalentemente, ¿Cómo se relacionan  $\delta_{n+1}$  y  $\delta_n$ ?

- Si la función que define al mapeo es diferenciable, podemos escribir

$$x^* + \delta_{n+1} = f(x^*) + \frac{df}{dx} \delta_n + O(\delta_n^2)$$

- Despreciando términos de orden cuadrático

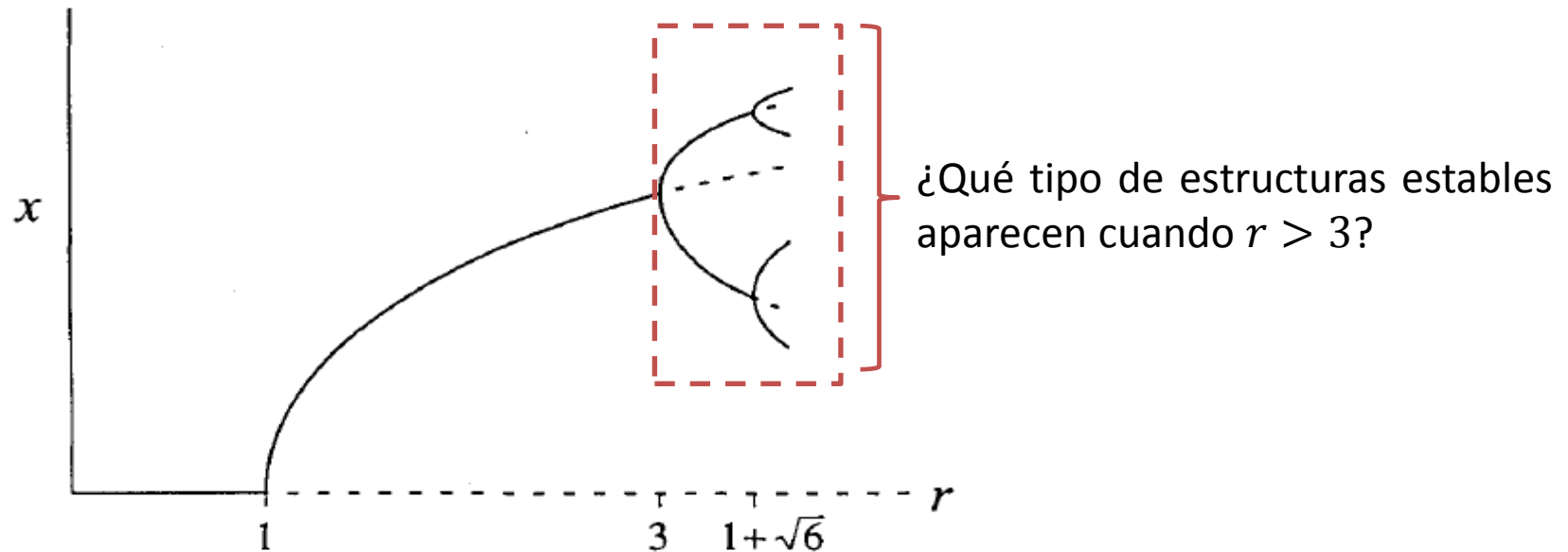
$$\delta_{n+1} = \lambda \delta_n; \lambda = \frac{df}{dx}$$

- Por lo tanto
  - a) **El punto fijo es linealmente estable si  $|\lambda| < 1$ ;**
  - b) **El punto fijo es linealmente inestable si  $|\lambda| > 1$**
  - c) **El punto fijo es neutralmente estable si  $|\lambda| = 1$**

# Mapeo Logístico

Dinámica y ruta hacia el caos

- Analizando la estabilidad lineal de los puntos fijos del mapeo podemos construir el siguiente diagrama de bifurcación



- Ejercicio: Calcular la estabilidad de los puntos fijos del mapeo logístico. ¿Cuál es el valor de la derivada del mapeo en  $r = 3$ ?

Matlab (cobweb diagram )

- A partir de  $r = 3$ , vimos que aparece un **ciclo de periodo dos**, es decir un conjunto de puntos  $\{p, q\}$  que satisfacen la siguiente ecuación

$$q = f(p); p = f(q)$$

- Es decir cualquiera de estos puntos cumple con la ecuación

$$q = f(f(q)) = f^2(q); \quad p = f(f(p)) = f^2(p);$$

- Por lo tanto,  $p, q$  son puntos fijos del mapeo que consiste en la función  $f(x)$  compuesta con ella misma



- Calculando la composición de  $f$  con ella misma tenemos

$$f^2(x) = rf(x)(1 - f(x)) = r(rx(1 - x))(1 - rx(1 - x))$$

- Después de hacer la talacha tenemos

$$f^2(x) = -r^3x^4 + 2r^3x^3 - r^2(1 + r)x^2 + r^2x$$

- Por lo tanto, para encontrar los puntos pertenecientes al ciclo de periodo 2, tenemos que resolver la siguiente ecuación

$$P_4(x) = -r^3x^4 + 2r^3x^3 - r^2(1 + r)x^2 + (r^2 - 1)x = 0$$

- Nótese que los puntos fijos de  $f$  deben de ser también puntos fijos de  $f^2$
- Por lo tanto, la ecuación de puntos fijos debe de poder escribirse de la siguiente forma

$$P_4(x) = (ax^2 + bx + c) \left( x - \left[ 1 - \frac{1}{r} \right] \right) x = 0$$

- Haciendo la talacha e igualando término a término con el polinomio de orden cuatro que obtuvimos de la ecuación de puntos fijos para la segunda iteración de  $f$ , obtenemos los coeficientes del primer trinomio de la ecuación anterior

$$a = r^3, b = -r^2(r + 1), c = r(r + 1)$$

- Los puntos correspondientes al ciclo límite son

$$p = \frac{r+1+\sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}, q = \frac{r+1-\sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}$$

- Para calcular la estabilidad del ciclo, calculamos la estabilidad de los puntos fijos  $p, q$  de la segunda iteración de  $f$

$$\begin{aligned} \frac{df^2}{dx}(p) &= \left( \frac{df}{dx}(f(x)) \frac{df}{dx}(x) \right) (p) \\ &= \left( (r - 2rf(x)) (r - 2rx) \right) (p) = (r - 2rq)(r - 2rp) \end{aligned}$$

- Sustituyendo los valores de  $p, q$  y viendo cuando el valor absoluto de la derivada es menor que uno, tenemos

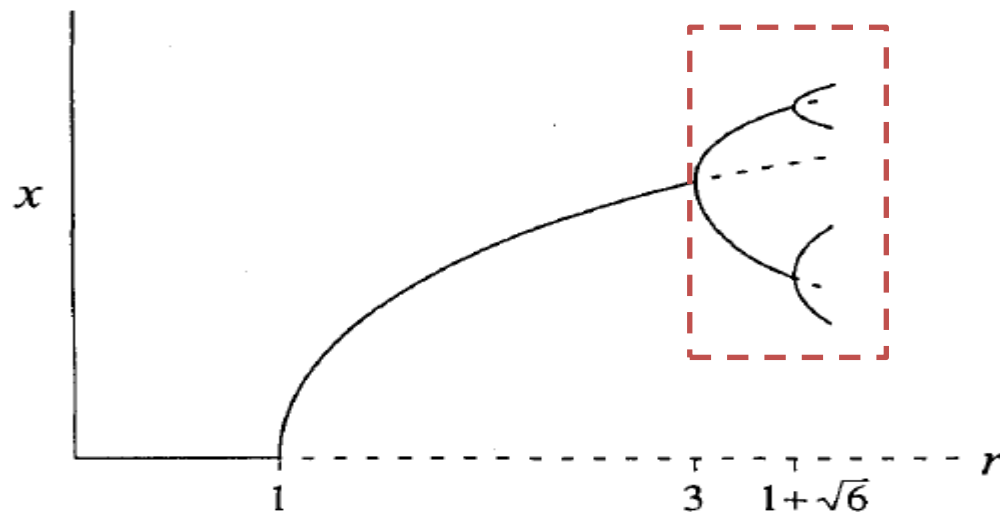
$$\left| \frac{df^2}{dx} \right| = |r^2 - 2r - 4| < 1$$

- Resolviendo la desigualdad, tenemos el ciclo de periodo 2 es estable cuando

$$3 < r < 1 + \sqrt{6}$$

Matlab (Gráfica mapeo  
logístico y segunda iteración)

- Para encontrar los puntos de los siguientes ciclos y su estabilidad, se tienen que encontrar las raíces de polinomios de orden cada vez mayor (*polinomio de orden 16 para el ciclo de periodo 4*), por lo que es conveniente hacer esto de forma numérica.

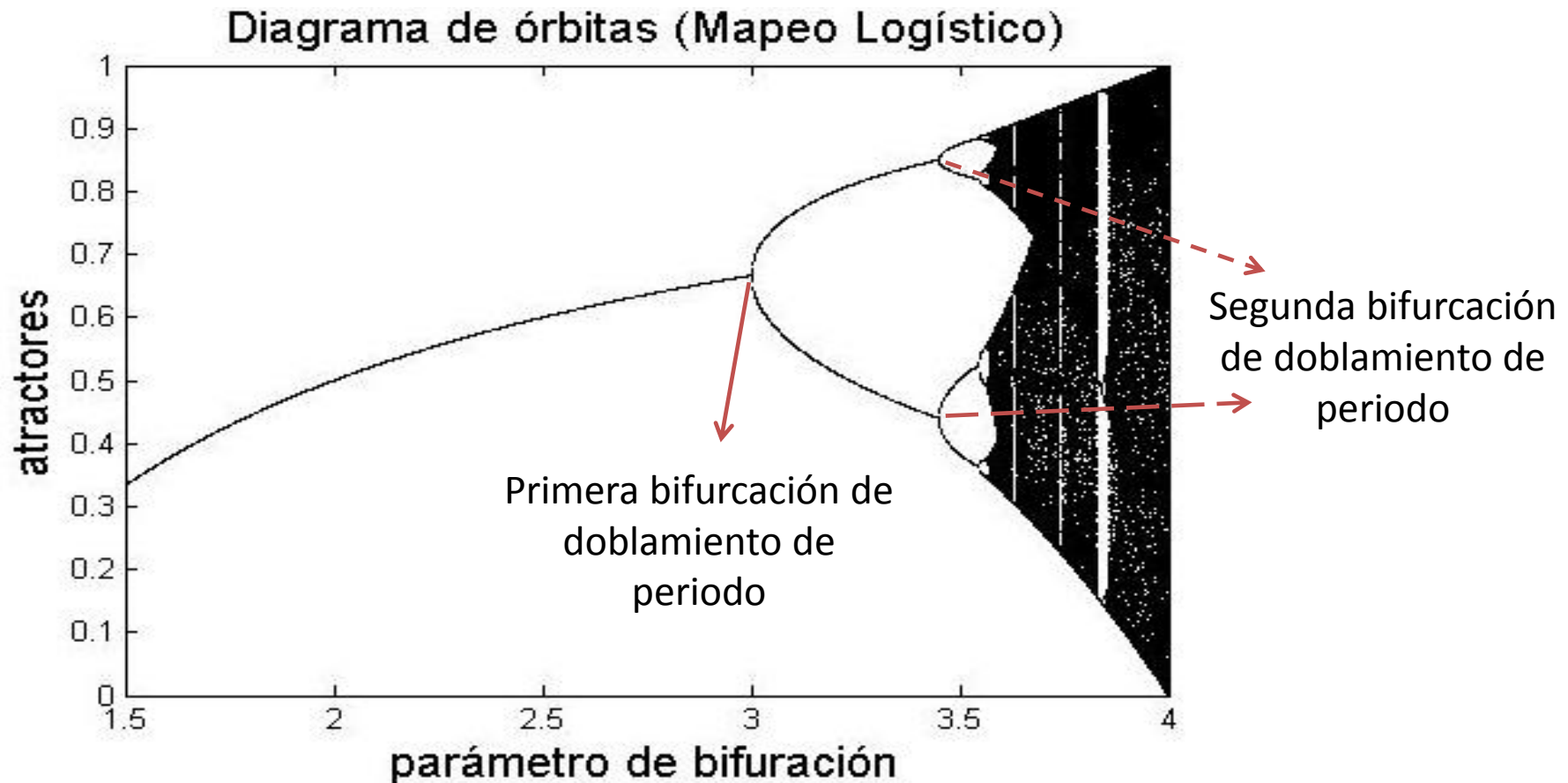


- Estudiando el tipo de estructuras que van apareciendo como función del parámetro de bifurcación, podemos construir la siguiente tabla y ver que **la ruta al caos es a través de doblamientos de periodo**

Parámetro de bifurcación (parámetro de control)	Puntos de bifurcación y Conjuntos atractores
$0 < r < 1$	$x^* = 0$ (único punto fijo)
$r = r_1 = 3$	Aparece ciclo de periodo 2
$r = r_2 \approx 3.449$	Aparece ciclo de periodo 4
$r = r_3 \approx 3.54409$	Aparece ciclo de periodo 8
$r = r_4 \approx 3.5644$	Aparece ciclo de periodo 16
$r = r_5 \approx 3.568$	Aparece ciclo de periodo 32
• • •	Más Bifurcaciones de doblamiento de periodo
$r = r_\infty \approx 3.569946$	Aparece Caos

**Infinitas Bifurcaciones  
de doblamiento de  
periodo**

- A través de la tabla, se puede construir el siguiente **diagrama de órbitas**



Matlab (Diagrama de orbitas  
y gráfica mapeo logístico)

- Sabemos que en el régimen caótico la dinámica presenta **sensibilidad ante condiciones iniciales**, es decir, si tomamos dos condiciones iniciales muy cerca una de la otra, bajo la evolución dinámica del sistema éstas **se separan exponencialmente**

$$|\delta_n| \approx |\delta_0|e^{\lambda n}; \delta_n = f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0)$$

- Despejando  $\lambda$  tenemos

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \ln \left( \left| \frac{\delta_n}{\delta_0} \right| \right) = \frac{1}{n} \left| \frac{f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0)}{\delta_0} \right|$$

- **Tomando el límite cuando la separación entre las condiciones iniciales tiende a cero,** obtenemos la siguiente expresión para el exponente de Lyapunov

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left( \left| \frac{df^n}{dx} \right| \right) \Big|_{x=x_0}$$

- Utilizando la regla de la cadena, podemos reescribir la fórmula anterior de la siguiente manera

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left( \prod_{i=0}^{n-1} |f'(x_i)| \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln(|f'(x_i)|)$$



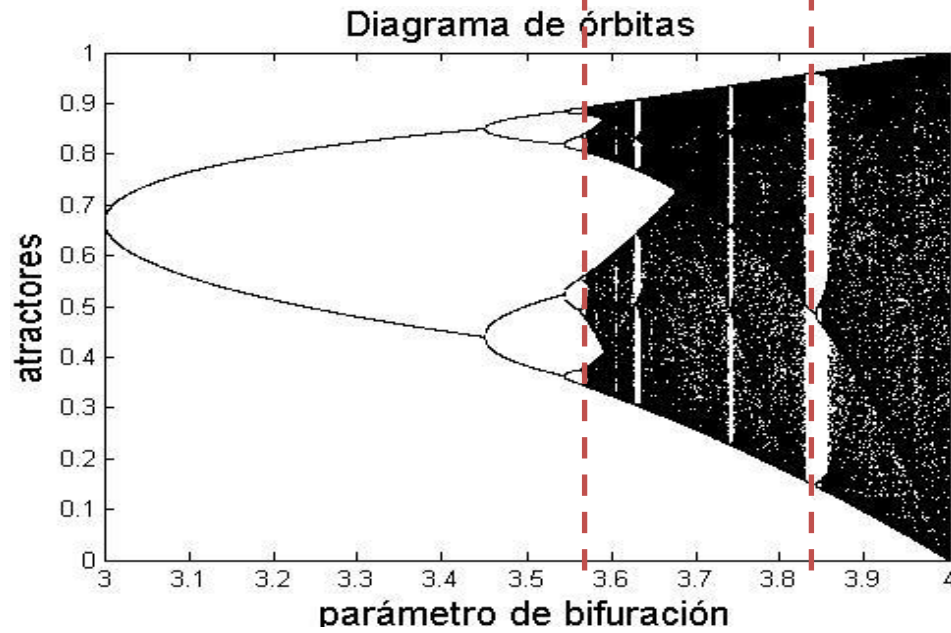
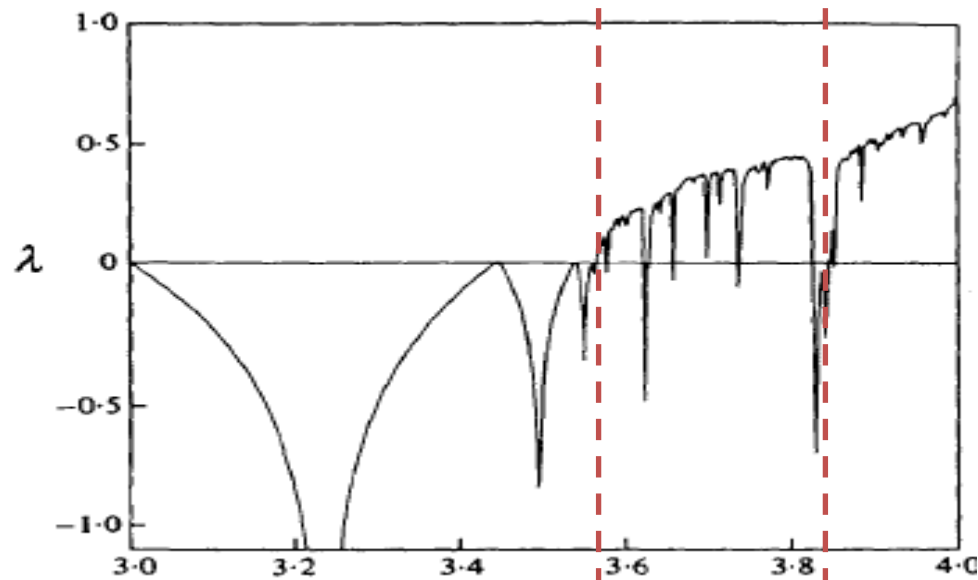
- El signo del exponente de Lyapunov nos dice si existe sensibilidad ante condiciones iniciales, y debe caracterizar a toda la órbita asociada a la condición inicial  $x_0$ . Por lo tanto el exponente de Lyapunov debe estar definido en el límite cuando el número de iteraciones tiende a infinito, es decir

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln(|f'(x_i)|)$$

Exponente de Lyapunov

- Aunque el exponente de Lyapunov depende de  $x_0$ , éste toma el mismo valor para toda condición inicial dentro de la cuenca de atracción asociada a un atractor
- Para puntos fijos y ciclos estables, el exponente es negativo
- **Para atractores caóticos el exponente de Lyapunov es positivo**

- Para el mapeo Logístico, el **exponente de Lyapunov como función del parámetro de bifurcación** se ve de la siguiente forma



- Ejercicio: Supongamos que tenemos un mapeo de la forma  $x_{n+1} = f(x_n)$ , para el cual existe un ciclo de periodo  $p$  estable. Mostrar que el exponente de Lyapunov es negativo

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|$$

- Si definimos  $n = mp$ , y tomamos a  $x_0$  como uno de los puntos del ciclo de orden  $p$ , podemos reescribir la fórmula para el exponente de Lyapunov de la siguiente forma

$$\lambda = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{mp} \left( \underbrace{\sum_{i=0}^{p-1} \ln |f'(x_i)| + \sum_{j=0}^{p-1} \ln |f'(x_j)| + \cdots \sum_{k=0}^{p-1} \ln |f'(x_k)|}_{m \text{ términos}} \right)$$

- Como  $x_0$  pertenece al ciclo de periodo  $p$ , la expresión del exponente de Lyapunov toma la siguiente forma

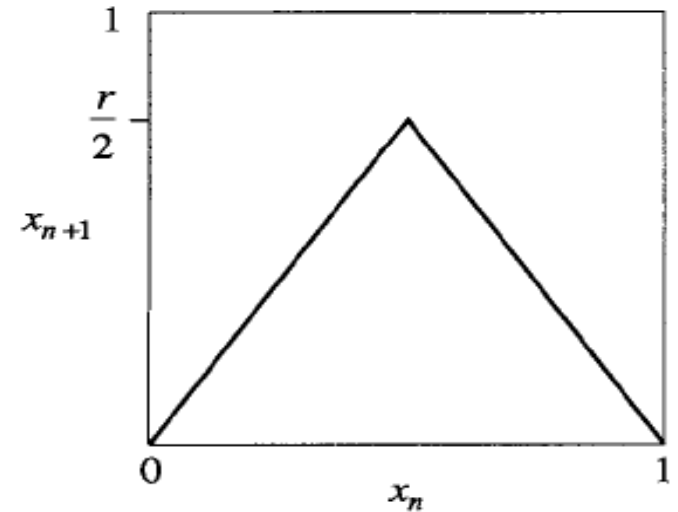
$$\lambda = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{mp} \sum_{i=0}^{p-1} \ln |f'(x_i)|$$

- Por otro lado, sabemos que  $\left| \frac{df^p}{dx} \right|_{x_i} < 1$ , donde  $x_i$  es cualquier punto del ciclo de periodo  $p$ . Reescribiendo la expresión de arriba para el exponente de Lyapunov tenemos como

$$\lambda = \frac{1}{p} \ln \left( \prod_{i=0}^{p-1} |f'(x_i)| \right) = \frac{1}{p} \ln \left( \left| \frac{df^p}{dx} \right|_{x_0} \right) < 0$$

- Ejercicio: Supongamos que tenemos un mapeo de la forma  $x_{n+1} = f(x_n)$ , donde la función  $f$  está dada por

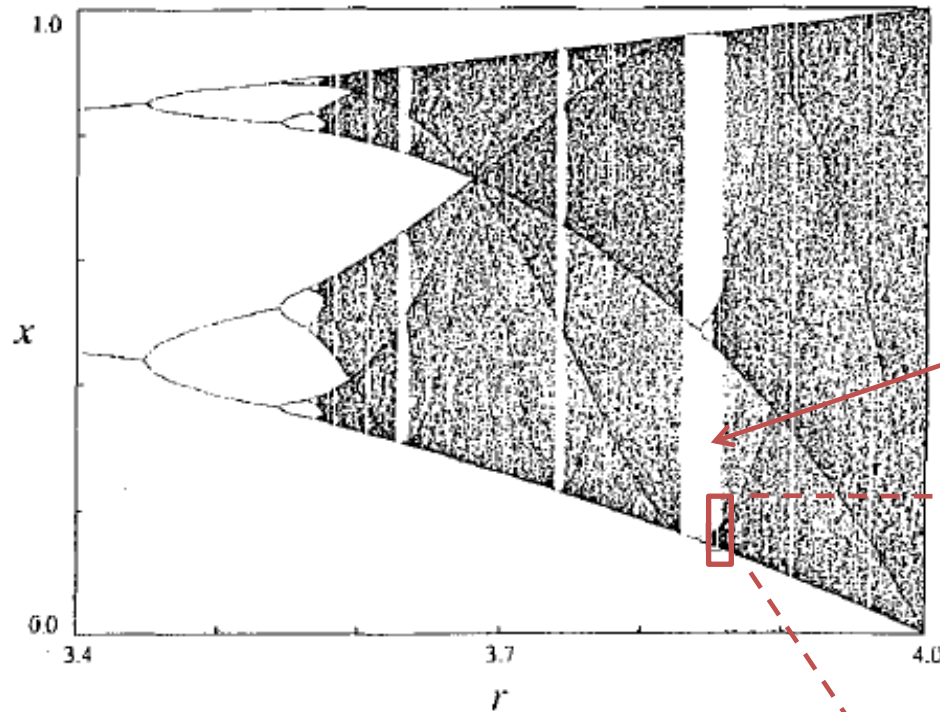
$$f(x) = \begin{cases} rx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ r - rx, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1; 0 \leq r \leq 2 \end{cases}$$



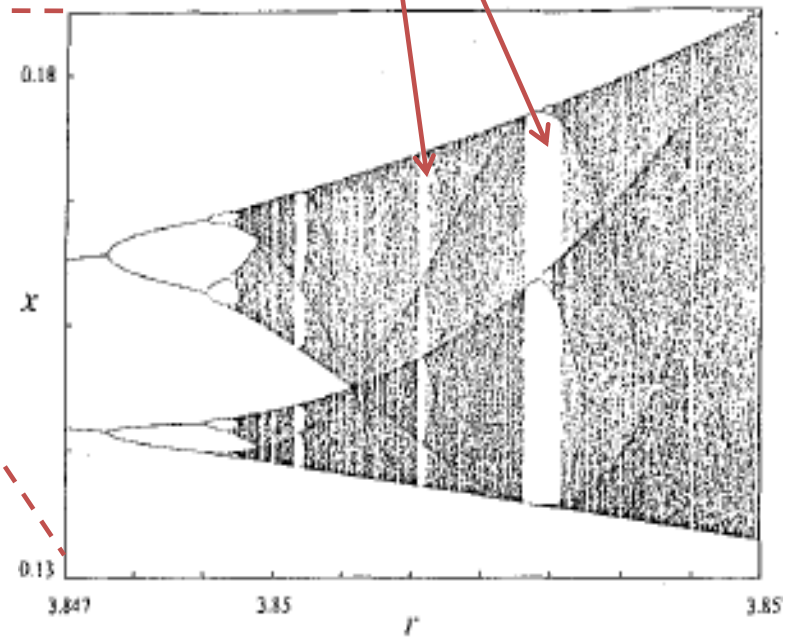
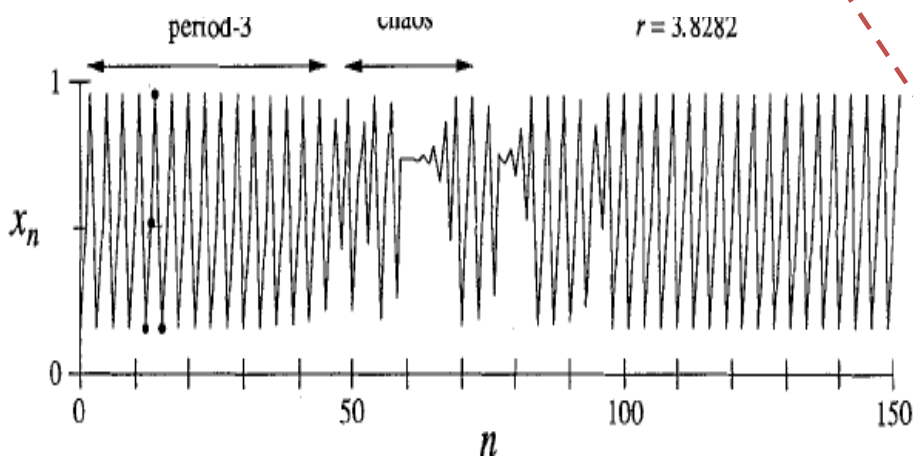
Demostrar que el mapeo exhibe sensibilidad ante condiciones iniciales cuando  $r > 1$

- Nótese que para cualquier órbita que no contenga al  $x = \frac{1}{2}$ ,  $|f'| = r$ , por lo tanto :  $\lambda = \ln(r)$
- Por lo tanto, si  $r > 1$ , **el exponente de Lyapunov es positivo**

- Diagrama de órbitas a distintas escalas (**conjunto autosimilar**)



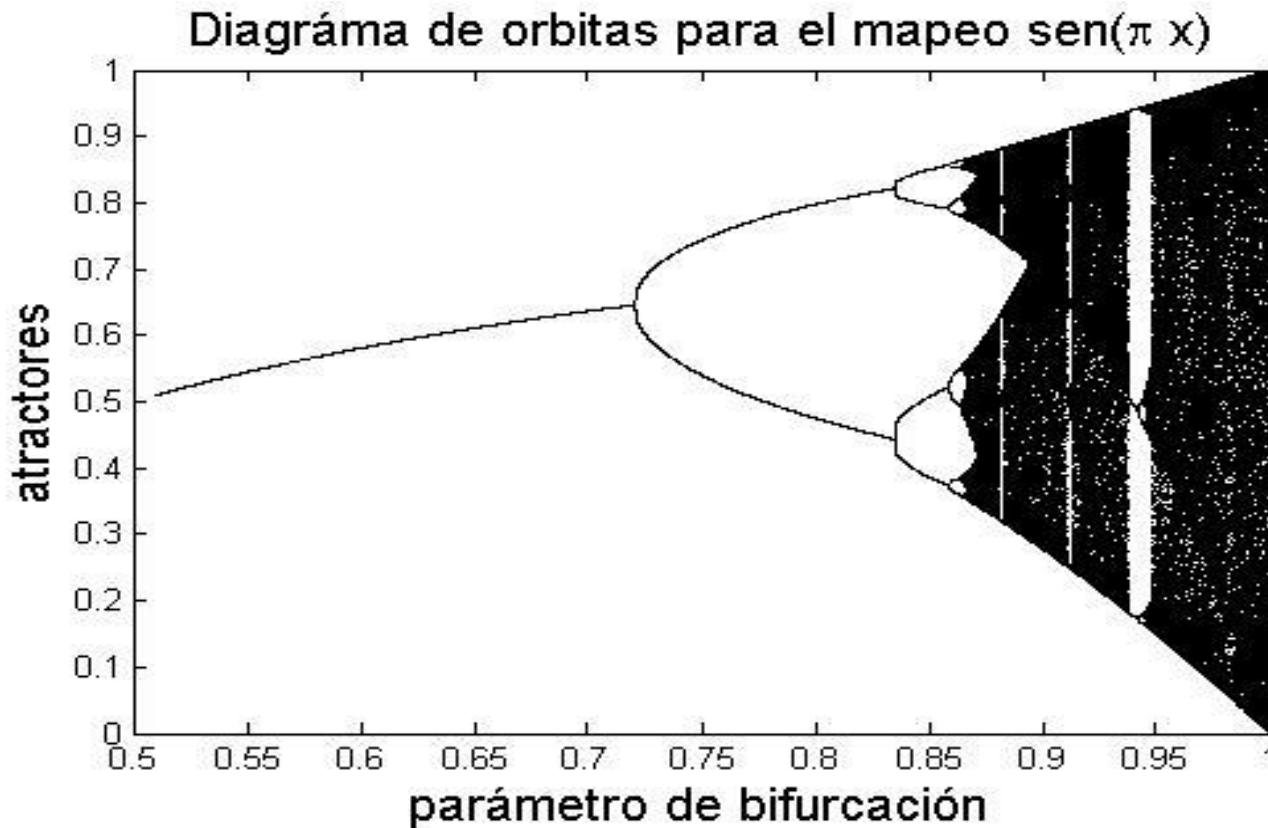
**Ventanas periódicas**  
(Intermitencia- ruta al caos  
a través de intermitencia)



# Universalidad

- Consideremos ahora otro ejemplo de **mapeo unimodal** no lineal

$$x_{n+1} = r \operatorname{sen}(\pi x_n), x \in [0,1]$$



- La ruta al caos de todo mapeo unimodal es a través de bifurcaciones de doblamiento de periodo.
- Las ventanas periódicas aparecen en el mismo orden, de hecho se puede demostrar (Metropolis *et.al*) que para todo mapeo unimodal de la forma:  $x_{n+1} = rf(x_n)$ ; con  $f(0) = f(1) = 0$ ; el orden en el que aparecen las soluciones periódicas estables al variar el parámetro  $r$  es el mismo: **secuencia U (U-sequence) :**

1, 2,  $2 \times 2$ , 6, 5, 3,  $2 \times 3$ , 5, 6, 4, 6, 5, 6.

Secuencia U hasta ciclos de periodo 6

- Todos los mapeos unimodales de la forma arriba descrita, también presentan intermitencia, y por lo tanto también presentan rutas al caos a través de intermitencia



Parámetro de bifurcación (parámetro de control)	Puntos de bifurcación y Conjuntos atractores
$0 < r < 1$	$x^* = 0$ (único punto fijo)
$r = r_1 = 3$	Aparece ciclo de periodo 2
$r = r_2 \approx 3.449$	Aparece ciclo de periodo 4
$r = r_3 \approx 3.54409$	Aparece ciclo de periodo 8
$r = r_4 \approx 3.5644$	Aparece ciclo de periodo 16
$r = r_5 \approx 3.568$	Aparece ciclo de periodo 32
▪ ▪ ▪	Más Bifurcaciones de doblamiento de periodo
$r = r_\infty \approx 3.569946$	Aparece Caos

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = 4.669 \dots$$



**Constante de Feigenbaum**



**Es la misma para todo  
mapeo unimodal: es  
universal**

- La ruta al caos a través de bifurcaciones de doblamiento de periodo no es exclusiva de los mapeos unimodales, también sucede en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, e.g. **Sistema de Rössler (Matlab sistema de Rössler)**

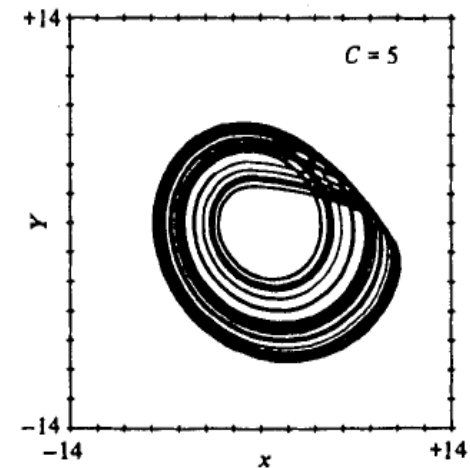
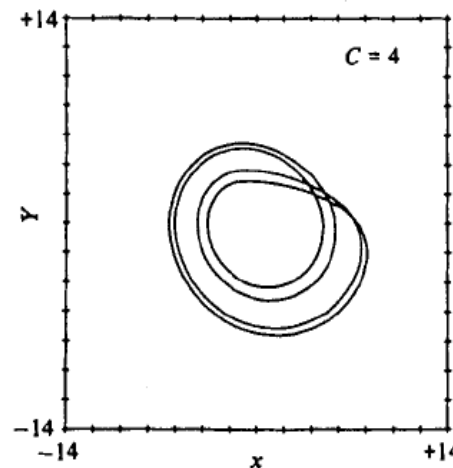
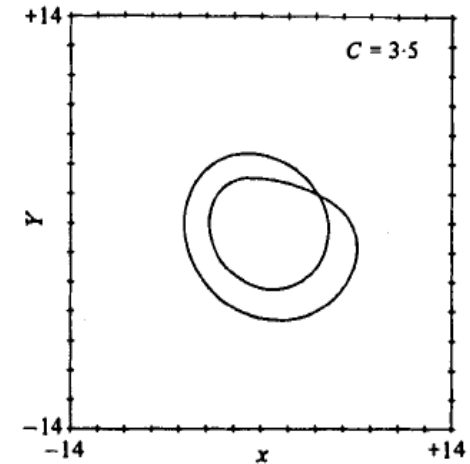
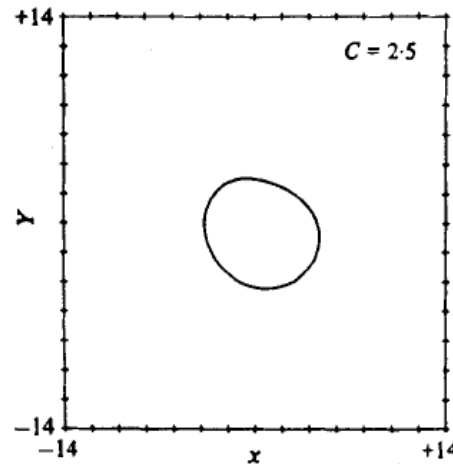
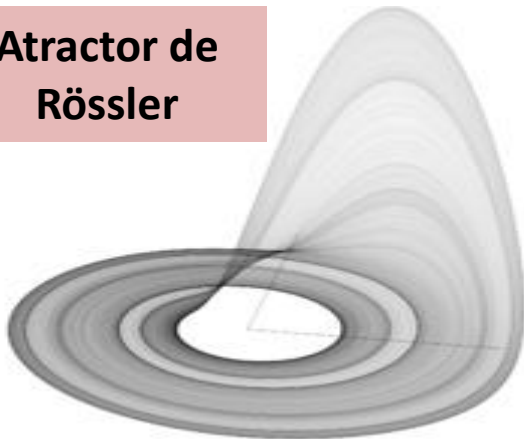
$$\dot{x} = -y - z$$

$$\dot{y} = x + ay$$

$$\dot{z} = b + z(x - c)$$

$$a = b = 0.2$$

Atractor de  
Rössler



- **Terminamos con caos, el siguiente tema es transiciones de fase.**

➤ Tarea : Entrar a la biblioteca de modelos de Netlogo y abrir la que corresponde al Modelo de Ising. Leer la explicación del modelo y jugar con él.

Contestar las siguientes preguntas:

1. ¿Qué es y por qué es importante el modelo de Ising?
2. ¿Qué diferencias hay en el comportamiento del modelo a altas y bajas temperaturas?
3. ¿Qué es la fase ferromagnética?
4. ¿Qué es la fase paramagnética?
5. ¿A qué temperatura sucede la transición de fase?
6. Describe el comportamiento del sistema cuando la temperatura es mayor a la temperatura crítica pero está cerca de ésta.
7. Describe el comportamiento del sistema cuando la temperatura es menor a la temperatura crítica pero está cerca de ésta
8. ¿Cómo se comporta el sistema para valores de los siguientes valores de la constante de acoplamiento como función de la temperatura:  $J \gg 1$ ;  $J \ll 1$ ;  $J=0$  ?