Домашня контрольна (вона ж розрахункова, вона ж лабораторна) робота на тему “Процес Пуассона та елементи страхової математики”.

1. Вихідні дані

Метою роботи є дослідження ймовірності банкрутства страхової компанії в моделі Крамера–Лундберга за допомогою точних та наближених методів.

Розглянемо процес страхового ризику U, який згідно з моделлю Крамера–Лундберга має вигляд

$$U(t) = u_0 + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \qquad t \geq 0.$$

Тут $u_0 = U(0)$ — початковий капітал, c — сумарна величина страхових внесків в одиницю часу (т. з. *premium rate*), N — однорідний процес Пуассона з інтенсивністю λ, стрибки якого відбуваються в моменти настання страхових подій, X_i, $i \in \mathbb{N}$, — незалежні між собою та від N однаково розподілені м. н. невід'ємні страхові виплати. Надалі будемо розглядати такі два випадки — $u_0 = 1, \lambda = 1$ та $u_0 = 10, \lambda = 5$. Розподіл страхових виплат (в обох випадках) задано в таблиці.

Студент	Розподіл X_i	Студент	Розподіл X_i	Студент	Розподіл X_i
Андрій Аблець	$\Gamma(3,4)$	Тетяна Собко	$0.3\,\mathrm{Exp}(3) + 0.7\,\mathrm{Exp}(1)$	Андрій Приходько	$\mathrm{U}(0,5)$
Марія Висоцька	$\mathrm{U}(1,3)$	Анна Старовойт	$f_X(x) = (6x - 6x^2)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$	Валерій Сахневич	δ_2
Володимир Возняк	$0.2\,\delta_3 + 0.3\,\delta_5 + 0.5\,\delta_8$	Михайло Столяр	$0.4\,\mathrm{U}(0,1) + 0.6\,\mathrm{U}(2,4)$	Валентина Ярошенко	$f_X(x) = \frac{x}{2} \cdot \mathbb{1}_{[0,2]}(x)$
Всеволод Гульчук	$\max\{\mathrm{Exp}(3), \delta_{1/2}\}$	Сергій Чоловський	$0.6\,\delta_1 + 0.4\,\delta_{10}$	Данил Віштал	$\Gamma(2,3)$
Марія Драгомирова	$0.2\,\delta_5 + 0.8\,\mathrm{U}(1,3)$	Дмитро Шутяк	$f_X(x) = (2-2x)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$	Ольга Ковальчук	$\mathrm{U}(2,7)$
Роман Житар	$\min\{\mathrm{Exp}(2), \delta_{1/3}\}$	Едуард Батейко	$0.3\,\delta_1 + 0.5\,\delta_5 + 0.2\,\delta_{10}$	Катерина Лященко	$f_X(x) = 3x^2\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$
Дмитро Іващенко	$\max\{\mathrm{Exp}_1(2), \mathrm{Exp}_2(2)\}$	Олена Дунебабіна	$\mathrm{U}\big([0,1] \cup [2,5]\big)$	Андрій Московських	δ_4
Анна Кравченко	$f_X(x) = \frac{\sin x}{2} \cdot \mathbb{1}_{[0,\pi]}(x)$	Нікіта Жакулін	$0.7\,\delta_3 + 0.3\,\delta_7$	Марина Пузєй	$f_X(x) = \frac{2-x}{2} \cdot \mathbb{1}_{[0,2]}(x)$
Захар Островський	$0.2\,\mathrm{Exp}\big(\frac{1}{2}\big) + 0.8\,\mathrm{U}(1,3)$	Євгеній Орел	$\mathrm{U}\big([1,3] \cup [5,9]\big)$	Богдан Таровський	$0.8\,\delta_6 + 0.2\,\delta_2$
Віра Павлюк	$\min\{\mathrm{U}_1(0,3), \mathrm{U}_2(0,3)\}$	Максим Третьяков	$f_X(x) = \frac{2}{x^3} \cdot \mathbb{1}_{[1,\infty)}(x)$	Надія Торліна	$\mathrm{U}(0,10)$
Руслан Правосуд	$0.7\,\mathrm{Exp}\big(\frac{1}{2}\big) + 0.3\,\delta_3$	Павло Гаврюшин	$\mathrm{U}(2,5)$	Павло Трофимов	δ_6
Анна Саркісян	$\Gamma(3,2)$	Андрій Мельников	δ_5	Павел Худіков	$f_X(x) = 4x^3\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$

У цій таблиці $\Gamma(\alpha,\beta)$ означає гама-розподіл, $\mathrm{U}(a,b)$ та $\mathrm{U}(C)$ — рівномірний розподіл на відрізку $[a,b]$ та множині C відповідно, $\mathrm{Exp}(\lambda)$ — експоненціальний розподіл, δ_a — вироджений (детермінований) розподіл (відповідна випадкова величина дорівнює a м. н.). Крім того, індексами позначено незалежні величини — скажемо, $\mathrm{Exp}_1(2)$ та $\mathrm{Exp}_2(2)$ означають дві незалежні випадкові величини, розподілені за експоненціальним законом з параметром 2. У деяких варіантах замість позначення розподілу задана його щільність.

Знаком “+” позначено суміш розподілів. Скажемо, розподіл $0.2\,\delta_5 + 0.8\,\mathrm{U}(1,3)$ має випадкова величина, що з імовірністю 0.2 набуває значення 5, а з імовірністю 0.8 рівномірно розподілена на відрізку $[1,3]$. Її функція розподілу, математичне сподівання та інші характеристики є відповідними лінійними комбінаціями таких характеристик компонент суміші:

$$F_{0.2\,\delta_5 + 0.8\,\mathrm{U}(1,3)}(x) = 0.2\,F_{\delta_5}(x) + 0.8\,F_{\mathrm{U}(1,3)}(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\mathbb{E}\big(0.2\,\delta_5 + 0.8\,\mathrm{U}(1,3)\big) = 0.2\,\mathbb{E}\delta_5 + 0.8\,\mathbb{E}\mathrm{U}(1,3).$$

2. Хід роботи

В обох наведених вище випадках необхідно виконати такі дії.

1) Записати умову NPC у вигляді $c >$ *число*;

2) у подальших пунктах покласти $c = 2\lambda\mu$ для першого випадку та $c = 1.05\lambda\mu$ для другого;

3) в явному вигляді записати інтегральне рівняння для ймовірності небанкрутства $\varphi(u)$, $u \geq 0$;

4) у максимально простому вигляді записати перетворення Лапласа цієї функції $\Phi(p)$;

А далі починається найцікавіше...

5) На часовому проміжку $[0, 10]$ змоделювати та побудувати на спільному рисунку графіки 5 траєкторій процесу U;

6) оцінити ймовірність банкрутства за допомогою грубого методу Монте-Карло: для цього на проміжку $[0, 1000]$ змоделювати 1000 траєкторій процесу U й обчислити частку тих, що банкрутують протягом цього проміжку;

7) оцінити ймовірність банкрутства за допомогою більш точного методу Монте-Карло: для цього спочатку записати функцію розподілу модифікованої випадкової величини $\tilde{X}$, а потім змоделювати геометрично розподілену кількість незалежних копій цієї величини (див. лекцію від 10 вересня);

8) порівняти одержані результати та написати висновки.

3. Прикінцеві зауваження

1) Термін здачі роботи — 1 жовтня;

2) максимальна кількість рейтингових балів за роботу — 20; за кожен додатковий день нараховується -1 бал, а за кожен день дострокової здачі надається +1 бонусний бал. Отже, максимальна кількість балів тих з вас, хто виконає роботу за декілька годин, що залишилися до *сьогоднішньої* опівночі, становить 20+18=38;

3) допускається програмна реалізація будь-якою мовою та в будь-якому середовищі;

4) оформлені роботи надсилаються в телеграм-чат;

5) коти в роботі вітаються, але не впливають на остаточну оцінку.