Calculo Numerico

8 de noviembre de 2019

1. 20/08

1.1. Ecuaciones diferenciales

$$x'(t) = f(t, x(t))$$
$$X(t_0) = X_0$$

1.1.1. Metodo de Euler

Es un taylor a primer orden
$x(t+h) = x(t) + hx'(t)$
$x(t+h) = x(t) + hf(t,x)$
Entonces:
x_0Dato
$x_{i+1} = x_i + hf(t_i x_i)$

1.1.2. Taylor de orden 2:

$x(t+h) = x(t) + h.x'(t) + h^2.x''(t)/2$
$x(t+h) = x(t) + h.f(t,x) + h^2??$
Pero como $\begin{cases} x'(t) = f(t,x(t)) \\ x''(t) = f_t(t,x(t)) + f_x(t,x(t))\, f(t,x(t)) \end{cases}$
$x(t+h) = x(t) + h.f(t,x) + h^2(f_t(t,x(t)) + f_x(t,x(t))\, f(t,x(t)))/2$

Metodo de Taylor de orden 2

Aplicado a cada coordenada de un vector x.

Ejemplo:$\begin{cases} x(t) = t * sen(x(t)) \\ x(0) = 1 \end{cases}$

Metodo de Euler
$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{i+1} = x_i + h * t_i * sen(x_i(t)) \end{cases}$
Metodo de Taylor orden 2

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{i+1} = x_i + h * t_i * sen\left(x_i\right) + \frac{h^2}{2}\left[sen\left(x_i\right) + t_i^2 * cos\left(x_i\right) * sen\left(x_i\right)\right] \end{cases}$$

1.1.3. Metodo de Taylor orden k:

Idea: $x\left(t+h\right) = x\left(t\right) + x'\left(t\right)h + ... + \frac{h^k}{k!}x^{(k)}\left(t\right)$

1.2. Octave:

```
function [x,y]=Euler(x0,xf,f,y0,N)
x(i)=x0
y(i)=y0
h=(tf-t0)/N
for i=2:(N+1)
    x(i)=x(i-1)+h
    y(i)=y(i-1)+hf(x(i-1),y(i-1))
end for
plot(x,y) #hold on, pega el grafico uno arriba del otro
```

2. 23/08

2.1. Metodos de un paso

$x' = f\left(t,x\right)\ t\epsilon\left[t_0,\tau\right]$
$x\left(t_0\right) = x_0$
$x_{i+1} = x_i + h\phi$
con $i \ni 0,1,2,...,n-1$ y $h = \frac{\tau - t_0}{n}$
Idea $x\left(t_i\right) \sim x_i$

2.2. Error de truncamiento local

$x_{i+1} = x_i + h\Phi\left(t_i, x, h\right)$
$x\left(t+h\right) = x\left(t\right) + h\Phi\left(t, x\left(t\right), h\right) + h\tau_t\left(h\right)$
$\tau_i = \tau_{ti}\left(h\right)$

2.3. Error Global

$\left|x\left(t_i\right) - x_i\right| <???$
Teorema: Si $\Phi\left(t,x,h\right)$ es Lipshitz con costante K en x, entonces:
$\left|x\left(T\right) - x_m\right| \leq \left(\frac{\tau_{max}}{K}\right)\left(e^{K(T-t_0)} - 1\right)$
$\tau_{max} = max\left\{\left|\tau_i\right|\right\}$

Ejemplo Sea el PVI

$x' = sen\left(x\right) + 2t$

$x\left(0\right) = 1$

Queremos aproximas $x\left(2\right)$con error menor que 10^{-3}.

Calcular m para conseguir esto.

2.3.1. Con Euler

$x_{i+1} = x_i + hf\left(t_i, x_i\right)$

$\Phi\left(t, x, h\right) = f\left(t, x\right) = sen\left(x\right) + 2t$

$x\left(t+h\right) = x\left(t\right) + h\left[f\left(t, x\right)\right] + h\tau_t\left(h\right)$

$x\left(t+h\right) = x\left(t\right) + h\left[x'\left(t\right)\right] + \frac{h^2}{2}x''\left(\theta_{t,h}\right)$ con $\theta_{t,h} \leq \left(t, t+h\right)$

$\tau_t\left(h\right) = \frac{h}{2}x''\left(\theta_{t,h}\right)$

$x''\left(t\right) = \frac{d}{dt}\left(x'\left(t\right)\right) = \frac{d}{dt}\left(f\left(t, x\left(t\right)\right)\right) = \frac{d}{dt}\left(sen\left(x\left(t\right)\right) + 2t\right) = x'\left(t\right)cos\left(x\left(t\right)\right) + 2 = \left(sen\left(x\left(t\right)\right) + 2t\right)cos\left(x\left(t\right)\right) + 2$

$t_0 \leq t \leq T\left(0 \leq t \leq 2\right)$

$\left|x''\left(t\right)\right| \leq \left(\left|sen\left(x\left(t\right)\right)\right| + 2\left|t\right|\right)\left|cos\left(x\left(t\right)\right)\right| + 2 = 7$

$\left|\tau_i\right| = \left|\tau_{ti}\left(h\right)\right| = \left|\frac{h}{2}x''\left(\theta_{t_ih}\right)\right|$

$t_0 \leq t_i < \theta_{t_ih} < t_i + h \leq t_{max}h = T \leq \frac{7}{2}h$

$\tau_{max} = max\left\{\left|\tau_i\right|\right\} \leq \frac{7}{2}h$

$\left|\Phi\left(t, x_1, h\right) - \Phi\left(t, x_2, h\right)\right| = \left|\left(sen\left(x_1\right) + 2t\right) - \left(sen\left(x_2\right) + 2t\right)\right| = \left|sen\left(x_1\right) - sen\left(x_2\right)\right| \leq \left|x_1 - x_2\right|$

$\left|x\left(2\right) - x_m\right| \leq \left(\frac{7}{2}h\right)\left(e^{1(2-0)} - 1\right) = \frac{7}{2}h\left(e^2 - 1\right) \leq 28h = 28\left(\frac{2-0}{m}\right) = \frac{56}{m} < 10^{-3}$

2.3.2. Con Taylor de orden 2

$\Phi\left(t, x, h\right) = f\left(t, x\right) + \frac{h}{2}\left[f_t\left(t, x\right) + f_x\left(t, x\right)\right]$

$x\left(t+h\right) = x\left(t\right) + h\Phi\left(t, x, h\right) + h\tau_t\left(h\right) = x\left(t\right) + hf\left(t, x\right) + \frac{h^2}{2}\left[f_t\left(t, x\right) + f_x\left(t, x\right)f\left(t, x\right)\right] + h\tau_t\left(h\right)$

$x\left(t+h\right) = x\left(t\right) + hx'\left(t\right) + \frac{h^2}{2}x''\left(t\right) + \frac{h^3}{6}x'''\left(\theta_{t,h}\right)$

$\tau_t\left(h\right) = \frac{h^2}{6}x'''\left(\theta_{t,h}\right)$

$x''\left(t\right) = x'\left(t\right)cos\left(x\left(t\right)\right) + 2$

$x'''\left(t\right) = x''\left(t\right)cos\left(x\left(t\right)\right) - \left(x'\left(t\right)\right)^2 sen\left(x\left(t\right)\right)$

$0 \leq t \leq 2$

$\left|x'''\left(t\right)\right| \leq \left|x''\left(t\right)\right| + \left|x'\left(t\right)\right|^2 \leq 7 + \left|sen\left(x\right) + 2t\right|^2 \leq 5 + 16 = 32$

$\left|\tau_{t_i}\left(h\right)\right| \leq \frac{h^2}{6}32 \leq 6h^2$

constante de Lipschitz para Φ en x

$\Phi\left(t, x, h\right) = sen\left(x\right) + 2t + \frac{h}{2}\left[2 + cos\left(x\right)\left(sen\left(x\right) + t\right)\right]$

$\left|\Phi\left(t, x_1, h\right) - \Phi\left(t, x_2, h\right)\right| = \Big|\Big(sen\left(x_1\right) + 2t + \frac{h}{2}\left[2 + cos\left(x_1\right)\left(sen\left(x_1\right) + t\right)\right]\Big) - \Big(sen\left(x_2\right) + 2t + \frac{h}{2}\left[2 + cos\left(x_2\right)\right($

$= \Big|\left(sen\left(x_1\right) - sen\left(x_2\right)\right) + \frac{h}{2}2t\left(cos\left(x_1\right) - cos\left(x_2\right)\right) + \frac{h}{2}\left(cos\left(x_1\right)sen\left(x_1\right) - cos\left(x_2\right)sen\left(x_2\right)\right)\Big| \leq \left|x_1 - x_2\right| + ht\left|x_1 - x_2\right| + \frac{h}{4}\left|sen\left(2x_1\right) - sen\left(2x_2\right)\right| = \left(1 + ht + \frac{h}{2}\right)\left|x_1 - x_2\right| \leq \left(1 + \frac{5}{2}h\right)\left|x_1 - x_2\right|$

$\left|x\left(2\right) - x_m\right| = \left(\frac{\tau_{max}}{K}\right)\left(e^{K(2-0)} - 1\right) \leq \frac{gh^2}{\frac{7}{2}}\left(e^{\frac{7}{2}2} - 1\right) \leq \frac{12}{7}h^2e^7 < 10^{-3}$

$\frac{2}{m} = h < \frac{1}{\sqrt{2}}10^{-2}e^{-4}$

Entonces $32000 < m$

2.4. Sistemas de ecuaciones

$$\overline{x}' = f\left(t, \overline{x}\right), t_0 \leq t \leq \tau$$
$$\overline{x}\left(t_0\right) = x_0$$

$x' = ax + by$
$y' = cx + dy$
$x\left(t_0\right) = x_0$
$y\left(t_0\right) = y_0$

Euler $\overline{x}_{i+1} = \overline{x}_i + hf\left(t_i, \overline{x}_i\right)$

2.4.1. Octave

```
function [t,x,y]=euler2x2(a,b,c,d,t0,T,x0,y0,M)
t = linspace(t0,T,M+1)
h=(T-t0)/M
x(1)=x0;
y(1)=y0;
for i=1:M
x(i+1)=x(i)+hx(ax(i)+by(i));
y(i+1)=y(i)+hx(cx(i)+dy(i));
endfor
endfunction
```

3. 27/08

3.1. Metodos implicitos/explicitos

$$\left\{ \begin{array}{c} x' = f\left(t, x\right) \\ x\left(t_0\right) = x_0 \end{array} \right\}$$

$t_i = t_o + i\left(\frac{T-t_0}{M}\right)$, $k = \frac{T-t_0}{M}$

$x_i \sim x\left(t_i\right)$

3.1.1. Metodos Explicitos (de un paso)

$x_{i+1} = x_i + h\Phi\left(t_i, x_i, k\right)$

3.1.2. Metodos Implicitos (de un paso)

$x_{i+1} = x_i + h\Phi\left(t_{i+1}, x_{i+1}, k\right)$

3.1.3. Metodo de Euler Implicito (Eurler-Bacnord)

$x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i)$ Euler normal

Esto hace una proximacion con la derivada.

$x_{i+1} = x_i + hf(t_{i+1}, x_{i+1})$ Euler Implicito

Para acotar $|\tau_t(k)|$en un metodo de orden k hay que acptar $\left|x^{(j)}(t)\right|$ en $[t_0, T]$

Ejemplo $\begin{cases} x' = -tx^3 \\ x(0) = 1 \end{cases}$

Para el PVI se requiere aproximar x en $[0, T]$ utilizando el metodo de euler implicito acotar el error en funcion de T

$x_{i+1} = x_i + hf(t_{i+1}, x_{i+1}) = x_i - ht_{i+1}x_{i+1}^3$

$x_{i+1} + ht_{i+1}x_{i+1}^3 = x_i$

$x(t+h) = x(t) + hf(t+h, x(t+h)) + h\tau_t(h)$

sumo y resto hx'(t)

$x(t) + hx$'$(t) + h(f(t+h, x(t+h)) - x$'$(t) + \tau_t(h))$

Si a $x(t)$ le aplico Taylor y valor medio queda lo siguiente:

$x(t+h) = x(t) + hx$'$(t) + \frac{h^2}{L}x''(\Theta_{t,h})$

$h(f(t+h, x(t+h)) - x$'$(t) + \tau_t(h)) = \frac{h^2}{L}x''(\Theta_{t,h})$

$\tau_t(h) + h^2x''(M_t, h) = \frac{h^2}{2}x''(\Theta_{t,h})$

$\tau_t(h) = h^2\left(\frac{x''(\Theta_{t,h})}{2} - x''(M_t, h)\right)$

$|\tau_t(h)| \leq h^2\left(\frac{|x''(\Theta_{t,h})|}{2} + |x''(M_t, h)|\right)$

Acotemos $x''(t)$

$x(t) = \frac{d(-tx^3)}{dt} = -x^3(t) - 3tx^2(t)x'(t) = -x^3(t) + 3t^2x^5$

Podemos ver que el modulo de la solucion es estrictamente decreciente para t mayo que cero.

$|x''(t)| = \left|-x^3(t) + 3t^2x^5(t)\right| \leq |x(t)|^3 + 3|t|^2|x(t)|^5 \leq (1+3)T^2$

Aca use que $x(t)$siempre es decreciente y empieza en 1, entonces su maximo valor es 1.

$\left||\tau_t(h)| \leq h^2\left(\frac{|x''(\Theta_{t,h})|}{2} + |x''(M_t, h)|\right)\right| \leq h^2\left(\frac{(1+3T^2)}{2} + (1+3T^2)\right) = \frac{3h(1+3T^2)}{2}$

si $t, t+h\epsilon[0,1]$

$|\tau_i(h)| \leq \frac{3h(1+3T^2)}{2}$

3.2. Runge-Kutta

Los metodos de Taylor requieren calcular derivadas y eso termina siendo muy cuentoso.

Idea: Con Euler:
$x(t+h) = x(t) + \int_t^{t+h} x'(s)\, ds$
$x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i)$

Por ahi es mejor si evaluo en varios (θ_i, γ_i), con (θ_i, γ_i) cerca de (t_i, x_i).

Tomar $\Phi(t_i, x_i, h) = A_1 f(\theta_1, \gamma_1) + \ldots + A_m f(\theta_m, \gamma_m)$, con (θ_i, γ_i) cerca de (t_i, x_i)

Prop: $\sum_{i=1}^{m} A_i = 1$

Ejemplo:

1. Orden 2: $x_{i+1} = x_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2} f(t_i, x_i)\right)$
2. Heum: $x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2}\left(f(t_i, x_i) + f(t_i + h, x_i + hf(t_i, x_i))\right)$
3. Orden 4: $x_{i+1} = x_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$
   $K_1 = f(t_i, x_i)$, $K_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2} K_1\right)$, $K_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + hK_2\right)$, $K_4 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + hK_3\right)$

4. 30/08

4.1. Diferencias Finitas

Idea Aproximar: $lim \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$

$u : I \subset R \to R$
$u'(x) = \left[\frac{u(x+h) - u(x)}{h}\right] + O(h), h > 0$
$u'(x) = \left[\frac{u(x) - u(x-h)}{h}\right] + O(h)$
$u'(x) = \left[\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}\right] + O\left(h^2\right)$

Uso Practico $I = [a, b], u : I \to R$

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$
$x_i = a + i\left(\frac{b-a}{m}\right)$
$h = \frac{b-a}{M}$
$x_i - x_{i-1} = h, i = 1, \ldots, u$
$u_i = u(x_i)$
$u_{i+1} = u(x_{i+1}) = u(x_i + h)$
$u_{i-1} = u(x_{i-1}) = u(x_i - h)$
$u'(x_i) \sim \frac{u_{i+1} - u_i}{h}, 0 \le i \le m - 1$
$u'(x_i) \sim \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, 1 \le i \le m$
$u'(x_i) \sim \frac{u_{i+1} - u_{i+1}}{2h}, 1 \le i \le m - 1$

Problema: Hallar una discratizacion de la derivada que requiera solo saltar hacia adelante y que tenga error $O\left(h^2\right)$ Hagamos cuentas con $u\left(x\right), u\left(x+h\right), u\left(x+2h\right)$

$u'\left(x\right) = \left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right] + O\left(h\right)$

$hu'\left(x\right) = u\left(x+h\right) - u\left(x\right) + O\left(h^2\right)$

$hu'\left(x\right) + O\left(h^2\right) = 1 * u\left(x+h\right) + \left(-1\right) * u\left(x\right)$

Busco A, B, C ϵR independientes de x y de h tales que:

$Au\left(x\right) + Bu\left(x+h\right) + Cu\left(x+2h\right) = hu'\left(x\right) + O\left(h^3\right)$

$u\left(x+h\right) = u\left(x\right) + hu'\left(x\right) + \frac{1}{2}h^2u''\left(x\right) + \frac{1}{6}u^3u'''\left(\theta_1\right)$

$u\left(x+2h\right) = u\left(x\right) + 2hu'\left(x\right) + 2h^2u''\left(x\right) + \frac{4}{3}u^3u'''\left(\theta_2\right)$

$Au\left(x\right) + Bu\left(x+h\right) + Cu\left(x+2h\right) = \left(A+B+C\right)u\left(x\right) + \left(B+2C\right)hu'\left(x\right) + \left(\frac{B}{2}+2C\right)h^2u''\left(x\right) + \left(\frac{1}{6}Bu'''\left(\theta_1\right) + \frac{4}{3}Cu'''\left(\theta_2\right)\right)h^3$

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ B+2C=1 \\ \frac{B}{2}+2C=0 \end{cases}$$

Entonces $B=2$, $C=-\frac{1}{2}$ y $A=-\frac{3}{2}$

$-\frac{3}{2}u\left(x\right) + 2\left(x+h\right) - \frac{1}{2}u\left(x++2h\right) = hu'\left(x\right) + O\left(h^3\right)$

Si $\left|u'''\left(\theta\right)\right| \leq K$ para $\theta\epsilon I = [a,b]$ y $x, x+h, x+2h\epsilon I$

$\frac{-\frac{3}{2}u(x)+2(x+h)-\frac{1}{2}u(x++2h)}{h} = u'\left(x\right) + O\left(h^2\right)$

$u'\left(x_0\right) \sim \frac{-\frac{3}{2}u(x)+2(x+h)-\frac{1}{2}u(x++2h)}{h}$

4.2. Derivadas de orden superior

Ejemplo $u''\left(x\right) \sim \frac{u(x+2h)-2u(x)+u(x-h)}{2h^2}$

$u\left(x+h\right) = u\left(x\right) + hu'\left(x\right) + \frac{1}{2}h^2u''\left(x\right) + O\left(h^3\right)$

$u\left(x-h\right) = u\left(x\right) - hu'\left(x\right) + \frac{1}{2}h^2u''\left(x\right) + O\left(h^3\right)$

$u\left(x+h\right) - 2u\left(x\right) + u\left(x-h\right) = h^2u''\left(x\right) + O\left(h^3\right)$

$u''\left(x\right) = \frac{u(x+2h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2} + O\left(h\right)$

4.3. Ejercicios

Dar una discretizacion para el problema:

$$\begin{cases} u''+u=0 \\ u\left(0\right)=A \qquad u\left(\frac{\pi}{2}\right)=B \end{cases}$$

Donde A y B son parametros del problema.

Discretizamos $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$x_i = i\left(\frac{\pi}{2M}\right), 0 \leq i \leq M$

Voy a aproximar $u''\left(x_i\right) + u\left(x_i\right) = 0$ en el interior y en los contornos uso las condiciones, A y B.

Llamamos a u_ia la aproximacion

De $u\left(x_i\right)$

$u''\left(x_i\right) \sim \frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}, 1 \leq i \leq M-1$

$$\begin{cases} \frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2} + u_i = 0 & 1 \leq i \leq M-1 \\ u_0 = A, u_M = B & Bordes \end{cases}$$

$u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}+h^2u_i=0$
$u_{i+1}-\left(2-h^2\right)u_i+u_{i-1}=0$
$u_{i+1}+\alpha\left(h\right)u_i+u_{i-1}=0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & & & \dots & 0 \\ 1 & \alpha\left(h\right) & 1 & \dots & & & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha\left(h\right) & 1 & & & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ B \end{pmatrix}$$

4.4. Octave

function problema (m)
x=linspace(0,$\frac{\pi}{2}$,m+1);
h=$\pi/\left(2*M\right)$;
b=zeros(m+1,1);
b(1)=A;
b(M+1)=B;
M=zeros(m+1,m+1);
M(1,1)=1;
M(m+1,m+1)=1;
C=-(2-h**2);
for i=2:m;
m(i,i-1)=1;
m(i,i)=C;
m(i,i+1)=1;
endfor
endfunction

5. 03/09

5.1. Sistema de n ecuaciones.

¿Cuanto afectará a la solucion un error en el dato b?¿Como medir el error?
Dado $n\epsilon\mathbb{N}$, tenemos definidas $||.||_1\,,||.||_2\,...\,||.||_\infty$
Para todo $x\epsilon\mathbb{R}^n$:
$||x||_1=\Sigma\left|x_i\right|$
$||x||_\infty=max\left|x_i\right|$
$||x||_2=\sqrt{\Sigma x_i^2}$
Hay una equivalencia entre las normas!!
Por ejemplo $||x||_\infty\leq||x||_1\leq n\,||x||_\infty$
qvq $||x||_1\leq n\,||x||_\infty$
$||x||_1=\left|x_1\right|+...\left|x_n\right|\leq max\left|x_i\right|+max\left|x_i\right|+...+max\left|x_i\right|=||x||_\infty+....+||x||_\infty=n\,||x||_\infty$
qvq $||x||_\infty\leq||x||_1$

$||x||_\infty = max\,|x_i| \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_n| = ||x||_1$

Otro ejemplo $||x||_2 \leq ||x||_1 \leq \sqrt{n}\,||x||_2$

qvq $||x||_2^2 \leq ||x||_1^2$

$||x||_2^2 = x_1^2 + ... + x_n^2 = |x_1|^2 + ... + |x_n|^2 \leq (|x_1| + ... + |x_n|)^2 = ||x||_1^2$

qvq $||x||_1 \leq \sqrt{n}\,||x||_2$

$||x||_1^2 \leq n\,||x||_2^2$

$||x||_1^2 = (|x_1| + ... + |x_n|)^2 \leq n\left(x_1^2 + ... + x_n^2\right)$

Desilgualdad de C-S:

Para todo $a, b \in \mathbb{R}^n$se tiene que:

$\left(\overline{a}\overline{b}\right)^2 \leq (\overline{a}\overline{a}) . \left(\overline{b}\overline{b}\right)$

$((|x_1|, ..., |x_n|) . (1, ..., 1))^2 \leq ((|x_1|, ..., |x_n|) . (|x_1|, ..., |x_n|))\,((1, ..., 1) . (1, ..., 1))$

$(|x_1| + ... + |x_n|)^2 \leq \left(x_1^2 + ... + x_n^2\right) n$

Ejemplo Queremos resolver el siguiente sistema $Ax = b$

$$\begin{pmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{pmatrix}$$

Modificamos 'b' $\vec{A}\vec{x} = \vec{b}$

$$\begin{pmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.11 \\ 9.7 \end{pmatrix}$$

$$||\Delta b||_1 = \left|\left|b - \vec{b}\right|\right|_1 = \left|\left|\begin{pmatrix} -0.01 \\ 0 \end{pmatrix}\right|\right|_1 = |-0.01| + |0| = 0.01$$

$$||\Delta x||_1 = ||x - \vec{x}||_1 = \left|\left|\begin{pmatrix} 0.66 \\ -0.97 \end{pmatrix}\right|\right|_1 = |0.66| + |0.97| = 1.63$$

El error relativo se amplifica mucho

$\frac{||x-\vec{x}||_1}{||x||_1} = \frac{1.63}{1} = 1.63$

$\frac{\left|\left|b-\vec{b}\right|\right|_1}{||b||_1} = \frac{0.01}{13.8} = 0.724 * 10^{-3}$

¿Por que este comportamiento?

Dado A ¿Cual sera el factor de amplificacion del error relativo? ¿Tiene cota?

Para una matriz arbitraria $A \in \mathbb{R}^{nxn}$y una norma de vectores $||||$cualquiera, definimos la norma matricial asociada como:

$||A|| = max\frac{||Ax||}{||x||}$

$||A|| = max\,||Ax||$ tomando x con $||x|| = 1$

$||A||_1 = \text{máx}_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$

$||A||_\infty = \text{máx}_i \sum_{j=i}^n |a_{ij}|$

Ahora lo vamos a demostrar

qvq $||A||_\infty = \text{máx}_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

$$||Ax||_\infty = \left|\left|\begin{array}{c} a_{11}x + ... + a_{1m}x_m \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mm}x_m \end{array}\right|\right|_\infty = max\left\{|a_{11}x + ... + a_{1m}x_m|, ..., |a_{m1}x_1 + ... + a_{mm}x_m|\right\}$$

$max_i \left|\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j\right|$

$max_i \sum_{j=1}^m |a_{ij}|\,|x_j| \leq max_i \sum_{j=1}^m |a_{ij}|\,||x||_\infty = ||x||_\infty\,max_i \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$

$||Ax||_\infty \leq ||x||_\infty\,max_i \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$

$\frac{||Ax||_\infty}{||x||_\infty} \leq max_i \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$

$||A||_\infty \leq max_i \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$

Queda demostrado. Ahora vamos para la otra desigualdad
qvq $||A||_\infty \geq max_i \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$

Sea k tal que $\sum_{j=1}^m |a_{kj}|$ es maximo y tomemos: $x = \begin{pmatrix} sg(a_{k1}) \\ ... \\ sg(a_{km}) \end{pmatrix}$

$(Ax)_k = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1m} \\ ... & ... & ... \\ a_{k1} & ... & a_{km} \\ ... & ... & ... \\ a_{mm} & ... & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sg(a_{11}) \\ ... \\ sg(a_{k1}) \\ ... \\ sg(a_{mm}) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^m |a_{kj}|$

$||Ax||_\infty \geq \sum_{j=1}^m |a_{kj}|$ y como $||x||_\infty = 1$

$\frac{||Ax||_\infty}{||x||_\infty} \geq \sum_{j=1}^m |a_{kj}|$

$||A||_\infty \geq \frac{||Ax||_\infty}{||x||_\infty} \geq max_i \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$

6. 06/09

6.1. Normas de Matrices

$A \in \mathbb{R}^{nxn}$

$||A||_\infty = max_{1\leq i\leq n} \left(\sum_j |a_{ij}|\right)$

$||A||_1 = max_{1\leq i\leq n} \left(\sum_i |a_{ij}|\right)$

Obs

$||A||_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$

ρ: Radio espectral, $\rho(M)$ =max$\Big\{|\lambda| \quad \lambda$ auovalor de M

6.2. Numero de condicion

$||.||$ norma de vectores.

$Cond_{||.||}(A) = ||A|| \, ||A^{-1}||$

1) $Cond_{||.||}(A) \geq 1$

2)$Cond_{||.||}(A) = Cond_{||.||}(A^{-1})$

Obs: $||AB|| \leq ||A|| \, ||B||$

Notacion: $Cond_\rho(A) = Cond_{||.||_\rho}(A)$

$||x||_\rho = (|x_1|^\rho + ... + |x_m|^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$ con $\rho \geq 1$

$||x||_\infty = max_{1\leq i\leq n} |(x_i)|$

Sabemos que

$\frac{||A||_\infty}{\sqrt{m}} \leq ||A||_2 \leq \sqrt{m}\, ||A||_\infty$

$\frac{||A||_1}{\sqrt{m}} \leq ||A||_2 \leq \sqrt{m}\, ||A||_1$

$\frac{||A||_\infty}{\sqrt{m}} \leq ||A||_1 \leq \sqrt{m}\, ||A||_\infty$

6.2.1. Comparacion de numeros de condicion

Usar comparacion de normas

Ejemplo 2-∞:

$Cond_2(A) = ||A||_2 \left|\left|A^{-1}\right|\right|_2 \leq (\sqrt{m}\,||A||_\infty)\left(\sqrt{m}\left|\left|A^{-1}\right|\right|_\infty\right) = m\,||A||_\infty \left|\left|A^{-1}\right|\right|_\infty = mcond_\infty(A)$

$Cond_2(A) \geq \left(\frac{||A||_\infty}{\sqrt{m}}\right)\left(\frac{||A||_\infty}{\sqrt{m}}\right) = \frac{1}{m}Cond_\infty(A)$

Teorema: Si $A \in \mathbb{R}^{nxn}$y es inversible, entonces:

$\frac{1}{cond_{||||}(A)} = inf\left\{\frac{||A-B||}{||A||}, B\ singular\right\}$

Aplicacion: A es mlaa proparando errores , tomando matrices B adecuadas ve que: $\frac{1}{cond(A)} \leq [Algo\ chiquito]$

Ejemplo:

$A(\epsilon) = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon & 2\epsilon \\ 4 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1)Ver que $A(\epsilon)$ es no singular para $\epsilon > 0$

2)Estimar $cond_\infty(A(\epsilon))$para ϵ tendiendo a 0

1)$det(A(\epsilon)) = 1(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} \epsilon & 2\epsilon \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -4\epsilon \neq 0$

2)$\frac{1}{cond_\infty(A(\epsilon))} = inf\left\{\frac{||A(\epsilon)-B||_\infty}{||A(\epsilon)||_\infty}\right\}$

$||A(\epsilon)-B||_\infty = \left|\left|\begin{matrix} 0 & \epsilon & 2\epsilon \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right|\right|_\infty = max_{1\leq i\leq 3}\left(\sum_{j=1}^{3}\left|(A(\epsilon)-B)_{ij}\right|\right) = 3\epsilon$

$||A(\epsilon)||_\infty = \left|\left|\begin{matrix} 1 & \epsilon & 2\epsilon \\ 4 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right|\right|_\infty = 12$ si ϵ es chiquito.

$\frac{1}{cond_{\infty(A(\epsilon))}} = inf\{\} \leq \frac{||A(\epsilon)-B||_\infty}{||A(\epsilon)||_\infty} = \frac{\epsilon}{4}$

$\frac{4}{\epsilon} < cond_\infty(A(\epsilon))$,para todo $\epsilon < 1$

Entonces $cond_\infty(A(\epsilon))$ tiende a ∞

Ejercicio 2: Sea $A\epsilon\mathbb{R}^{2nx2n}$dada por :

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} \frac{2}{n} & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \begin{pmatrix} \frac{3}{m} & n \\ 0 & n \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & n \\ 0 & n \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

1) Ver que A no es singular

2) Ver que $cond_\infty(A) \geq n^2$

3) Ver que $cond_2(A)$ tiende a ∞

1)$det(A) = \left(\Pi_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\right)\left(\Pi_{i=1}^{n}i\right) = \frac{(n!)^2}{n^n} \neq 0$

Si una matriz es traingular $det(A) = \Pi_i\theta_{ij}$, entonces A no es singular

2) Tomo B singular parecida a A

$$B = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & i \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & n \\ 0 & n \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

B es igual a A menos en la posicion i-esima. B_i es singular porque las filas 2i-1, 2i son iguales.

$$||A(\epsilon) - B||_\infty = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \begin{pmatrix} \frac{i}{n} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|_\infty = \frac{i}{n}$$

$||A||_\infty = \frac{n}{n} + n = n + 1$

$\frac{1}{cond_{\infty 1}(A)} = inf\left\{\right\} \leq \frac{||A(\epsilon)-B||_\infty}{||A(\epsilon)||_\infty} = \frac{i}{n(n+1)}$

$cond_{\infty 1}(A) \geq \frac{n^2+n}{i}$, puedo tomar $i = 1$,$cond_\infty (A) \geq n^2 + n \geq n^2$

3) Antes mostramos que $cond_2(A) \geq \frac{1}{m} cond_\infty (A)$

Si $A \epsilon \mathbb{R}^{mxm}$. Tomando m=2n y usando 2).

$cond_2(A) \geq \frac{1}{2n} cond_\infty (A) \geq \frac{1}{2n} n^2 = \frac{n}{2}$tiende a ∞ cuando n tiende a ∞

7. 10/09

7.1. Eliminacion Gaussiana

$A \epsilon \Re^{nxn}$, $b \epsilon \Re^{nxn}$

$Ax = b$

$(A|b) \rightarrow \left(\vec{A}|\vec{b}\right)$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 0 & -1 & | & 0 \\ 3 & 1 & 2 & | & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -2 & -3 & | & -2 \\ 0 & -2 & -1 & | & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2 & | & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

7.1.1. Notacion:

Cuando hacemos eliminacion Gaussiana transformamos $A \epsilon \Re^{nxn}$ haciendo operaciones de fila y en el paso k-enesimo tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & * & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & m_{kk} & & \cdots & m_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & m_{nk} & & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

Eliminacion gausiana sin pivoteo, el $m_{kk} \neq 0$ y entonces no necesito permutar filas, necesitamos pivoteo si $m_{kk} = 0$

7.1.2. Objetivo del pivoteo

Poner algo no nulo en el lugar kk, entonces intercambio filas $f_k \rightleftarrows f_i$
para poder elegir la fila necesito $m_{ik} \neq 0$
Posibles estrategias:

- Tomar el primer $m_{ik} \neq 0$
- Tomar el m_{ik}de modulo maximo
- Tomar el m_{ik}tal que $max_{k \leq j \leq v} \frac{m_{ij}}{m_{ik}}$ es minimo

7.1.3. Cuentas para eliminacion:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & 0 & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * & & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & * & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{kk} & & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nk} & & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Hago $f_j \leftarrow f_j + \left(-\frac{a_{jk}}{a_{kk}}\right) f_k$

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & * & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{a_{kk+1}}{a_{kk}} & \cdots & \frac{a_{kn}}{a_{kk}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nk} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & * & & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & a_{23} & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{a_{kk+1}}{a_{kk}} & & \frac{a_{kn}}{a_{kk}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$Ax = b \to (A|b) \rightsquigarrow \left(\vec{A}|\vec{b}\right) \rightsquigarrow \vec{A}x = \vec{b}$

$x_n = b_n$

$1x_{n-1} + a_{n-1n}x_n = b_{n-1}$

$x_{n-1} = b_{n-1} - a_{n-1n}x_n$

$x_i = b_i - \sum_{l=i+1}^{n} a_{il}x_l$

Estructura de la funcion que resuelve la ecuacion con eliminacion gaussiana sin pivoteo

[Argumentos recibidos: A, b]

1. Chequear los tamaños
2. Triangular la matriz
3. Chequear que $a_{kk} \neq 0$ cada paso
4. Calcular x

Codigo Octave

```
function x = EliminacionSinPivoteo(A,b)
x = zeros(n,1);
[n,m] = size(A);
for k=1:n
| if A(k,k) == 0
| | disp('No se puede triangular')
| | return
| endif
| pivote = A(k,k);
| A(k, k+1:n) = A(k,k+1:n)/pivote;
| b(k) = b(k)/pivote;
| for i=k+1:n
| | A(i, k+1:n) = A(i,k+1:n)-A(i,k+1)*A(k,k+1:n);
| endfor
endfor
for i = n:-1:1
| x(i)=b(i)-A(i,i+1:n)*x(i+1:n);
endfor
endfunction
```

7.1.4. Test de eliminacion

```
Test_eleminicion.m
N=2000;
n = 20;
for k=1:N
| A = rand(n,n);
| x = rand(n,1);
| b = A.x;
| x_ap = eliminacionSinPivoteo(A,b);
| err(k) = norm(x-x_ap, inf);
endfor
similog(1:N,err);
```

8. 13/09

8.1. Resolucion de sistemas:

$Ax = b$

- Metodos directos: resolver sistema pasando a un problema mas simples
- Metodos iterativos: construir una sucecion $x^{(0)}$, $x^{(1)}...x^{(k)} \to x_{sol}$

8.1.1. Triangulacion de Gauss.

Teorema: si no hace falta intercambiar filas en la eliminacion de Gauss $A = LU$, con L triangular inferior y con U triangular superior.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$,$L_1 = \begin{pmatrix} 1_{11} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$con $m_{j1} = \frac{-a_{j1}}{a_{11}}$

Ejemplo:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} L_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, entonces $L_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{pmatrix} L_2 L_1 A =$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$

$A = L_1^{-1} L_2^{-1} U = LU$

Si hace falta intercambiar filas, se tiene $A \epsilon \Re^{nxn}$inversible, $\exists P$ matriz de permutacion, $\exists L$ triangular inferior, $\exists V$ triangular superiror, talque $PA = LU$. P se obtiene intercambiando filas, o columnas, en la matriz identidad. $P = P_{ij}$ permuta filas i y j de la identidad ($P.P = I$, $\det P_{ij} = -1$)

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 12 \end{pmatrix} P_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$P_{1,2}.A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&2&1\\1&2&1&3\\1&1&-1&1\\0&1&8&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&1&2&1\\1&1&-1&1\\0&1&8&12\end{pmatrix}$$

$$L_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\ L_1P_{1,2}A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&1&2&1\\1&1&-1&1\\0&1&8&12\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&1&2&1\\0&-1&-2&-2\\0&1&8&12\end{pmatrix}$$

$$L_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}\ L_2L_1P_{1,2}A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&1&2&1\\0&-1&-2&-2\\0&1&8&12\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&1&2&1\\0&0&0&-1\\0&0&6&11\end{pmatrix}$$

$$P_{3,4}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\ P_{3,4}L_2L_1P_{1,2}A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&1&2&1\\0&0&0&-1\\0&0&6&11\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&1&2&1\\0&0&6&11\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

Una vez obtenidas los P's puedo tener los mismos P's y distintos L's $\rightarrow$ $P_{3,4}L_2L_1P_{1,2}A=\vec{L_2}\vec{L_1}P_{3,4}P_{1,2}A$

$$\vec{L_1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-1&1&0&1\end{pmatrix},\ L_1P_{3,4}P_{1,2}A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&1&2&1\\0&1&8&12\\1&1&-1&1\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&1&2&1\\0&1&8&12\\0&-1&-2&-2\end{pmatrix}$$

Todo esto en codigo$\rightarrow$ $[l,u,p]=lu(A)$

Para encontrar A^{-1}

$Ax=b$

$P\,(AX)=Pb$

$L\,(UX)=Pb$

$UX=y$

$\begin{cases} Ly = Pb \rightsquigarrow & y \\ UX = y \rightsquigarrow & x \end{cases}$
Aplico la descomposicion LU al sistema

$Ax = \begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} \rightsquigarrow i$ para cada $1 \leq i \leq n$

8.2. Octave

```
for i = 1:n
| id = eye(n);
| b = p(:,i);
| y = l\b;
| x = u\y;
| A_inv(:,i)=x;
end
```

8.3. Choleskay:

Def: $A\epsilon\Re^{nxn}$simetrica, definida positiva

1. $A = A^t$
2. $\overline{x}^t A\overline{x} > 0 \, \forall \overline{x} \neq 0$

8.3.1. Observaciones:

1. A simetrica positiva $\rightarrow$A es NO singular, osea inversible
2. A(k) menor principal de A de orden k, si A simetrica positiva $\rightarrow$A(k) simetrica y definida positiva
3. A simetrica y positiva $a_{ij} > 0 \, \forall j = 1, ..., n$

8.3.2. Teorema:

Si A es simetrica positiva $\rightarrow$ $\exists$!matriz L con $l_{ii} > 0 \, /A = LL^t$
Dem 3x3: $A = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ 0 & l_{22} & l_{23} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$
$a_{11} = l_{11}^2 \rightarrow \sqrt{a_{11}} = l_{11}$
$a_{12} = l_{12}l_{21} \rightarrow l_{21} = \frac{a_{12}}{l_{11}}$
$a_{13} = l_{11}l_{13} \rightarrow l_{31} = \frac{a_{13}}{l_{11}}$
y asi con todos los elementos.

Dem nxn: $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & \cdots & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1n} \\ 0 & l_{22} & \cdots & l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}$

Algoritmo: para j=1,...,n. $l_{jj} = \left(a_{jj} - \sum_{i=1}^{j-1} l_{ji}^2\right)^{1/2}$

Para i=j+1,....,n

$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{jj}}$

9. 17/09

¿Que es multiplicar $A \epsilon \mathbb{R}^{nxn}$ a derecha por un vector columna?

Es hacer combinacion lineal con las columnas A

$Ax = \begin{pmatrix} A_1 & |A_2| & \cdots & |A_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_n x_n$

¿Que es multiplicar $A \epsilon \mathbb{R}^{mxn}$ a derecha por una matriz $B \epsilon \mathbb{R}^{nxp}$?

Es hacer lo mismo muchas veces

$AB = \begin{pmatrix} A_1| & \cdots & |A_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1| & \cdots & |B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & |\sum_{k=1}^{m} B_{kj} A_k| & \cdots \end{pmatrix}$(Columna j-esima)

9.1. Descomposicion QR

Def:$A \epsilon \mathbb{R}^{nxn}$ es:

1. Simetrica si $A^T = A$
2. Ortogonal si $A^T = A^{-1}$

$A \epsilon \mathbb{C}^{nxn}$ es:

1. Hermetica si $A^* = A$
2. Unitaria si $A^* = A^{-1}$

9.1.1. Porblema de descomposicion QR

Dada $A \epsilon \mathbb{C}^{mxn}$, escribirla como $A = QR$, con $Q \epsilon \mathbb{C}^{nxn}$unitaria y $R \epsilon \mathbb{C}^{mxn}$ triangular superior.

$A = \begin{pmatrix} A_1| & \cdots & |A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1| & \cdots & |Q_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1m} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & r_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 r_{11}| & \cdots & |Q_n r_{nm} \end{pmatrix}$

9.1.2. Proceso de Gramn-Schmidt

Supongamos que $\{v_1, \cdots, v_r\}$ es un conjunto LI en (V,<,>). Hay norma, angulo, etc.

$S =< v_1, \cdots, v_r >$

Construimos $w_1, w_2, \cdots, w_r$con estas propiedades

- $\{w_1, \cdots, w_r\}$ base ortonormal de S
- $\langle v_1, \cdots, v_j\rangle = \langle w_1, \cdots, w_j\rangle, 1 \leq j \leq r$

Construyo vectores auxiliares $u_1, u_2, \cdots, u_r$

v_1 $u_1 \coloneqq v_1; w_1 = \frac{u_1}{||u_1||}$

v_2 $u_2 \coloneqq v_2 - proy(v_2, w_1);\ w_2 = \frac{u_2}{||u_2||}$

$proy(v, u) = \frac{\langle v,u\rangle}{||u||^2}.u$

9.1.3. Coordenadas en una base ortonormal.

$\{u_1, \cdots, u_n\}$BON

$v\epsilon \langle u_1, \cdots, u_n\rangle$

$v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i$

$\alpha_i = \langle v, u_i\rangle$

Ejemplo:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Obs sobre las R: no tienen porque ser cuadradas, la diagonal principal quedaria algo asi:

$\begin{pmatrix} & & \\ 0 & & \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

$q\epsilon\mathbb{R}^{3x3}$ $\rightarrow$columnas son BON de $\mathbb{R}^3$

$R\epsilon\mathbb{R}^{3x4}$

si $q = (q_1|q_2|q_3)$, $A = (A_1|A_2|A_3|A_4)$

$\langle A_1\rangle \subseteq \langle q_1\rangle$

$\langle A_1, A_2\rangle \subseteq \langle q_1, q_2\rangle$

$\langle A_1, A_2, A_3\rangle \subseteq \langle q_1, q_2, q_3\rangle$

$S = \langle (2, 0, -2), (1, 1, -1), (1, 1, 1)\rangle = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$

$v_1 = (2, 0, -2) \rightarrow u_1 = (2, 0, -2) \rightarrow w_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$v_2 = (1, 1, -1) \rightarrow u_2 = v_2 - proy(v_2, w_1) = (1, 1, -1) - \langle v_2, w_1\rangle .w_1 = (1, 1, -1) - \frac{2}{\sqrt{2}}.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (1, 1, -1) - (1, 0, -1) = (0, 1, 0)$

$w_2 = (0, 1, 0)$, porque la norma es 1

$u_3 = v_3 - proy_{w_1}(v_3) - proy_{w_2}(v_3) = (1, 1, 1) - \langle v_3, w_1\rangle w_1 - \langle v_3, w_2\rangle w_2 = (1, 1, 1) - 0.w_1 - 1.(0, 1, 0) = (1, 0, 1)$

$w_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Tomamos q asi:$q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \epsilon \mathbb{R}^{3x3}$

Entonces lo unico que me queda es encontrar R, que lo puedo hacer resolviendo el sistema QR=A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = QR = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

9.2. Metodo de Haus Holder

Lema: sean $x, y \epsilon \mathbb{C}^n$tales que

- $x \neq y$
- $||x||_2 = ||y||_2$
- $\langle x, y \rangle = y^*.x \epsilon \mathbb{R}$

Entonces $U = I - 2v.v^*$ donde $v = \frac{x-y}{||x-y||_2}$ es unitaria y $Ux = y$.

Idea: supongo que $U_1 A = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \vec{A_1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, con U_1 unitaria.

$$\vec{U_2}\vec{A_1} = \begin{pmatrix} \beta_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \vec{A_2} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \vec{U_2} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$\to U_2 U_1 A = \begin{pmatrix} \beta_1 & \eta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_2 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \vec{A_2} & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

Entonces puedo iterar varias veces

$U_k U_{k-1} \cdots U_1 A = R$

$A = \left(U_1^{-1} \cdots U_k^{-1}\right).R = \left(U_1^T \cdots U_k^T\right).R$

Como es en cada paso

$A \epsilon \mathbb{C}^{nxn}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \\ \vdots & |A_2| \cdots |A_m \\ a_{n1} & \end{pmatrix} \text{quiero } UA = \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & \\ \vdots & |\vec{A_2}| \cdots |\vec{A_m} \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Vamos a usar el lema

$$\beta = \begin{cases} \frac{a_{11}}{||a_{11}||}\,||A_1|| & si\; a_{11} \neq 0 \\ ||A_1|| & si\; a_{11} = 0 \end{cases}$$

Tomar $x = A_1$, $y = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ y usar el lema para armar U

Ojo: si $A = \begin{pmatrix} * & \\ 0 & \\ \vdots & |A_2| \cdots |A_m \\ 0 & \end{pmatrix}$ ya tiene columan 1 $\rightarrow U = I_m$ y listo.

10. 8/10

10.1. Resolucion de ecuaciones no lineales.

Ecuacion en $\mathbb{R}^1$, $f(x) = 0$ con f en general.
Problema: aproximar $r \epsilon Dom(f)$ con $f(r) = 0$
Supongamos:

- $Dom(f)$ intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$
- f continua
- $\exists ! r \epsilon I$ con $f(r)$

10.1.1. Metodos de un punto

Contruyen una sucesion: $x_0, x_1, ..., x_m, ... \subseteq Dom(f)$ con $x_m \rightarrow r$
Ejemplos: Newton_Rapson, Secante, Punto fijo,etc.

10.1.2. Metodos de dos puntos (Bracketina)

Construyen 3 sucesiones $(a_m)_m, (b_m)_m, (c_m)_m$ tales que:

1. $r \epsilon [a_m, b_m] \subset Dom(f)$ $(f(a_m) f(b_m) < 0)$
2. $c_m \epsilon [a_m, b_m]$ entonces $c_m \rightarrow_m r$

Ejemplos: Biseccion, Regula Falsi

10.2. Estructura de las implementaciones.

10.2.1. Metodo de un punto

#Octave
function r = metodo(f,x0)
| [iniciacion]

```
| while [condicion]:
| | x(m) = g(x(m-1))
| end
|r =....
end
```

10.2.2. Metodo de dos puntos

```
function r = metodo(j,a,b)
[iniciacion]
c = ....
while [condicion]
| a=.....
| b=.....
| c=.....
end
```

10.2.3. Metodo de biseccion

Inicialmente se tiene $[a_0, b_0]$ con $f(a_0) f(b_0) < 0$.
Despues hago $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$
Si $f(c_0) = 0$ listo!.
Si $f(c_0) \neq 0$ entonces pasa alguna de las siguientes:

- $sg(f(c_0)) = sg(f(a_0))$
- $sg(f(c_0)) = sg(f(b_0))$

Entonces hago un nuevo intervalo con $[a_1, b_1]$ que es $[a_0, c_0]$ o $[c_0, b_0]$ segun cual verifica que tiene signos distintos en los bordes.

Ahora vuelvo al paso inicial.
Pregunta ¿Cuando Parar?
Iterar hasta que:

1. $|f(x_m)| < \varepsilon, |f(c_m)| < \varepsilon$
2. $|b_m - a_m| < \varepsilon$
3. $|c_m - c_{m-1}| < \varepsilon$
4. $m > N$

#octave

```
function r = biseccion(f,a,b)
| max_iter = 50;
| tol = 0.1^12;
| c = (a+b)/2
| n=1
| while n <= mac_iter && abs(b-a)>tol
```

| | if f(c) == 0
| | | terminar
| | elseif sign(f(c)) == sign(f(a))
| | | a = c
| | else
| | | b = c
| | endif
| | c = (a+b)/2
| | n=n+1
| end

10.2.4. Metodo Regula Falsi.

En lugar de tomar $c = \frac{a+b}{2}$, tomar c como el 0 de la funcion lineal que pasa por (a, f(a)) y (b,f(b)).

$L\left(x\right) = f\left(a\right) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x-a\right)$
$L\left(c\right) = 0$
$0 = f\left(a\right) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a)$
$c = -f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)} + a$
$c = \frac{a*f(b)-b*f(a)}{f(b)-f(a)}$
Obs: este intervalo no tiende a 0!!!
#octave
function r = biseccion(f,a,b)
| max_iter = 50;
| tol = 0.1^12;
| c = (a*f(b)-b*f(a))/(f(b)-f(a))
| n=1
| while n <= mac_iter #No sirve esta →abs(b-a)>tol
| | if abs(f(c)) < tol
| | | terminar
| | elseif sign(f(c)) == sign(f(a))
| | | a = c
| | else
| | | b = c
| | endif
| | c = (a*f(b)-b*f(a))/(f(b)-f(a))
| | n=n+1
| end

11. 11/10

11.1. Newton-Raphson: metodo de la tangente

$y = f'\left(x_n\right)\left(x-x_n\right) + f\left(x_n\right)$
x_{n+1} se define como el cero de la Rt

$0 = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n)$
$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
Necesito que exista la derivada y $f' \neq 0$ en cierto intervalo.

11.1.1. Algoritmo de N-R

```
#Octave
j = 0;
X = x1;
Z = X - f(X) / f_p(X)
while (j<Max_Iter && abs(Z-X)>tol):
| X = Z
| Z = X - f(X)/ f_p(X)
| j = j + 1
end
```

11.1.2. Alternatvida: Metodo de la secante

Aproximar a la derivada por el crociente incremental.
$y = f(xoy)(x - x_n) + f(x_n)$
$y = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - x_n) + f(x_n)$
$0 = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x_{n+1} - x_n) + f(x_n)$
$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$

11.1.3. ¿NR converge siempre?

No, puede fallar.

Fallas de Newton-Raphson:

- Finalizacion prematura o Breakdown: para algun $x_n \rightsquigarrow f'(x_n = 0)$

Si $f(x) = x^3 - 4x - 1,\ f'(x) = 3x^2 - 4$
$x_0 = 0.838917$
$x_1 = -115470$
$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

- $\{x_n\}$se aleja de la raiz r.

Si $f(x) = xe^{-x}$, $x_0 = 1.3$.
$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
$f'(x) = 1e^{-x} + xe^{-x} * -1 = e^{-x}(1 - x)$
$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n e^{-x_n}}{e^{-x_n}(1 - x_n)}$

$x_1 = x_0 - \frac{x_0 e^{-x_0}}{e^{-x_0}(1-x_0)}$
$x_2 = x_1 - \frac{x_1 e^{-x_1}}{e^{-x_1}(1-x_1)}$
Calculando se ve que es creciente y no acotada, entonces diverge.

- El proceso iteratico genera una sucecion oscilante.

Si $f(x) = x^3 - 2x + 2,\ f'(x) = 3x^2 - 2\ x_0 = 0$
$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1$
$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0$
Sucecion oscilante.

11.2. Sistema no lineal.

Ejemplo: $\begin{cases} x^2 + x - y^2 = 1 \\ y - sen\left(x^2\right) = 0 \end{cases}$
$f_1(x,y) = \begin{cases} x^2 + x - y^2 - 1 = 0 \\ y - sen\left(x^2\right) = 0 \end{cases}$
$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ x \epsilon \mathbb{R}^n \quad F(\overline{x}) = \overline{0}$
$0 = Df(\overline{x}_n)(\overline{x}_{n+1} - \overline{x}_n) + f(\overline{x}_n)$
$\overline{x}_{n+1} = \overline{x}_n - Df^{-1}(\overline{x}_n) f(\overline{x}_n)$

11.3. Ejercicios

1) Sea $f(x) = |x|^\alpha$con $\alpha > 0$. Analizar para que valores de α el metodo de newton es convergente, comenzando con $x_0 \neq 0$
$f(x) = \begin{cases} x^\alpha & x \geq 0 \\ (-x)^\alpha & x < 0 \end{cases} \to f'(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} & x > 0 \\ -\alpha x^{\alpha-1} & x < 0 \end{cases}$
$f'(x) = \alpha |x|^\alpha sgn(x) \quad x \neq 0$
$x_{n+1} = x_n - \frac{|x_n|^\alpha}{\alpha |x_n|^{\alpha-1} sgn(x_n)} = x_n - \frac{1}{\alpha} |x_n| \, sgn(x_n)$
$x_{n+1} = x_n \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$
$x_{n+1} = x_n \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) = x_{n-1} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^2 = ... = x_0 \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^{n+1}$
Para que valores de $\alpha > 0,\ x_n \to 0$
$X_n \to 0 \iff \left|1 - \frac{1}{\alpha}\right| < 1$
$-1 < 1 - \frac{1}{\alpha} < 1$
$-2 < -\frac{1}{\alpha} < 0$
$2 > \frac{1}{\alpha} > 0$
$2 > \frac{1}{\alpha}$
$2\alpha > 1$
$\alpha > \frac{1}{2}$
Es importante calcular el error para saber el radio de convergencia.
$x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^{n+1} x_0$
$|x_{n+1} - 0| = \left|1 - \frac{1}{\alpha}\right| |x_n - 0|$
$e_{n+1} = \left|1 - \frac{1}{\alpha}\right| e_n$

$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \left|1 - \frac{1}{\alpha}\right| < 1$

2) Considere $f(x) = \begin{cases} sg(x)\, e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Hallar la raiz en 0 por el metodo de Newton. ¿Que puede decir de la convergencia?

$f'(x) = \begin{cases} sg(x)\, e^{-\frac{1}{x^2}} 2x^{-3} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$x_{n+1} = x_n - \frac{sg(x_n) e^{-\frac{1}{x_n^2}}}{sg(x_n) e^{-\frac{1}{x_n^2}} 2x_n^{-3}} = x_n - \frac{x_n^3}{2}$

$x_{n+1} = x_n \left(1 - \frac{x_n^2}{2}\right)$

$x_1 = x_0 \left(1 - \frac{x_0^2}{2}\right)$

Podemos pedir que $\left|1 - \frac{x_0^2}{2}\right| < 1$

$-1 < 1 - \frac{x_0^2}{2} < 1$

$-2 < -\frac{x_0^2}{2} < 0$

$-4 < -x_0^2 < 0$

$4 > x_0^2 > 0$

$2 > |x_0|$

$|x_1| = |x_0| \left|1 - \frac{x_0}{2}\right| < |x_0|$

$|x_1| < |x_0|$

$x_2 = x_1 \left(1 - \frac{x_1^2}{2}\right) \to |x_2| < |x_1|$

Por induccion $|x_i|$son decrecientes. Quiero pedir que NO cambie de signo (para que no oscile).

Pido $0 < 1 - \frac{x_0^2}{2} < 1$

$-1 < -\frac{x_0^2}{2} < 0$

$-2 < -x_0^2 < 0$

$\sqrt{2} > |x_0|$

Supongo que $0 < x_0 < \sqrt{2}$

$x_1 = x_0 \left(1 - \frac{x_0}{2}\right) > 0$ ademas $|x_1| < |x_0|$pero como son positivos $x_1 < x_0$

Osea me construyo una sucecion monotona decreciente.

Por induccion $x_i > x_{i+1}.. > 0$. $\{x_i\}$decreciente y acotada inferior por 0, entonces tiene limite l.

Tomo limite cuando $n \to \infty$

$x_{n+1} = x_n \left(1 - \frac{x_n^2}{2}\right) \to l = l \left(1 - \frac{l^2}{2}\right) \to l = 0$

Si hubieramos tomado $-\sqrt{2} < x_0 < 0$ la sucecion va a resultar creciente y acotada superiormente por 0 $\to$tiende a 0.

12. 15/10

12.1. Punto Fijo

$f(x) = x^3 - 13x + 18$
Queremos resolver $f(x) = 0$

- $x^3 - 13x + 18 = 0 \to x^3 + 18 = 13x \to x = \frac{x^3+18}{13} = g(x)$
- $x^3 - 13x + 18 = 0 \to x^3 - 12x - x + 18 = 0 \to x^3 - 12x + 18 = x$
- $x^3 - 13x + 18 = 0 \to xx^2 = 13x - 18 \to x = \frac{13x-18}{x^2}$

Se define una sucesion por iteracion, elige x_0 y $x_{n+1} = g(x_n)$. Si converge es a un punto fijo.

Teo: I=$[a,b]$ si $g(I) \subset I \to g$ tiene al menos 1 punto fijo.

Teo: Si g es derivable y $|g'(x)| \leq \lambda < 1 \forall x \epsilon I$ y $g(I) \subset I \to$tiene unico punto fijo.

Teo: $g/\ \ |g'(x)| \leq \lambda < 1 \forall x \epsilon I$ y $g(I) \subset I \to (x_n)$ def $x_{n+1} = g(x_n)$converge al unico punto y
1) $|x_n - r| \leq \lambda^n |x_o - r|$
2) $|e_n| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} |x_1 - x_0|$

Teo: y continua en (a,b), $r\epsilon(a,b)$, punto fijo de g.
Si $|g'(r)| < 1 \to \exists \epsilon > 0$ / la iteracion es convergente si $x_0 \epsilon I_\varepsilon = (r - \varepsilon, r + \varepsilon)$

Ejemplo:
$x^2 - x - 2 = 0$
$x^2 = x + 2$
$|x| = \sqrt{x+2}$
Si $x > 0$ $x = \sqrt{x+2} = g(x)$
$Dom(g) = [-2, +\infty]$
Proponemos $I = [0, +\infty)$ y queremos $g(I) \subset I$
$g'(x) = \frac{1}{2}(x+2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} > 0$
$\to g$ es creciente y $g(0) = \sqrt{2}\epsilon\,[0, \infty) \to g(I) \subset I$
El metodo iterativo converge $|g'(x)| < 1$ y $g(I) \subset I$
$|F'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} < 1$
$1 < 2\sqrt{x+2}$
$\frac{1}{2} < \sqrt{x+2}$
$\frac{1}{4} < x + 2$
$-\frac{7}{4} < x$
Si arranco con $x_0\epsilon\,[0, +\infty)$seguro que la iteracion $x_{n+1} = g(x_n)$converge al punto fijo $x = 2$.

12.2. Newton como punto fijo

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = g(x_n)$

- Si f tiene una raiz simple en $x = r$ veamos que $g(r) = r$

$f(r) = 0$

$f'(r) \neq 0$

$g(r) = r - \frac{f(r)}{f'(r)} = r$

- Veamos que si $g'(r) = 0$ y $g''(0) \neq 0 \rightarrow$Tiene orden 2.

Orden de convergencia: Consideramos $g\,/\,g(r) = r \rightarrow g^{(k)}(r) = 0 \;\; 1 \leq k < p \rightarrow$el metodo tiene orden p

$g'(x) = 1 - \frac{f'f' - ff''}{(f')^2} = 1 - \frac{(f')^2}{(f')^2} + \frac{ff''}{(f')^2} = \frac{ff''}{(f')^2}$

$g'(r) = \frac{f(r)f''(r)}{(f'(r))^2} \quad f(r) = 0 \neq f'(r)$

$g'(r) = 0$

$g''(x) = \frac{(f'f'' + ff'')(f')^2 - ff''2f'f''}{(f')^4} = \frac{(f'f'' + ff'')(f') - ff''2f''}{(f')^3} = \frac{(f')^2 f'' + ff''' f' - 2f(f'')^2}{(f')^3}$

$g''(r) = \frac{f''(r)}{f'(r) \neq 0}$ si $f''(r) \neq 0 \rightarrow g''(r) \neq 0$ tiene orden cuadratico.

- Si f tiene una raiz doble en $x = r$, osea $f(r) = 0$ y $f'(r) = 0$

$g(r) = \lim\limits_{x \to r} x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \lim\limits_{x \to r} x - \lim\limits_{x \to r} \frac{f(x)}{f'(x)} = r - \lim\limits_{x \to r} \frac{f'(x) \to 0}{f''(x) \to \neq 0} = r$

Veamos que en este caso $g'(r) \neq 0$

$g'(x) = \frac{ff''}{(f')^2}$ No puedo evaluar

$g'(r) = \lim\limits_{x \to r} \frac{ff'' \to 0}{(f')^2 \to 0} = \lim\limits_{x \to r} \frac{f'f'' + ff''}{2f'f''} = \lim\limits_{x \to r} \frac{1}{2} + \frac{ff'''}{2f'f''} = \frac{1}{2} + \lim\limits_{x \to r} \frac{ff''' \to 0}{2f'f'' \to 0} = \frac{1}{2} + \lim\limits_{x \to r} \frac{f'f''' + ff''''}{2(f''f'' + f'f''')} = \frac{1}{2} \neq 0$

¿Como recuperamos el orden cuadratico? Multiplicamos con un 2.

$g(x) = x - 2\frac{f(x)}{f'(x)}$ (Si la raiz tiene multiplicidad 3 entonces agrego un 3)

Ver que $g(r) = r$

Ver que tiene orden 2

$g'(r) = 0$

$g''(r) \neq 0$

Ejercicio: $f(x) = 0$ siendo $f(x) = xe^x - \cos(x)$

Considerear el siguiente metodo de punto fijo: $xe^x - \cos(x) = 0$

$x = \frac{\cos(x)}{e^x} = e^{-x}\cos(x) = g(x)$

Vamos a tratar de ver en donde converge el metodo de punto fijo y cual es el orden.

$g'(x) = -e^{-x}\cos x - e^{-x}\operatorname{sen} x = -e^{-x}(\cos(x) + \operatorname{sen}(x))$

Debo analizar $|g(x)| < 1$, propongo $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$|e^{-x}(\cos(x) + \operatorname{sen}(x))| < 1$

Ya que todo es positivo en I la pregunta de fondo es:

¿Cuando $e^{-x}(\cos(x) + \operatorname{sen}(x)) < 1$?

e^{-x}es decreciente, $\rightarrow e^{-x} < 1 \forall x \epsilon \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$g''(x) = -e^{-x}(\cos(x) + \operatorname{sen}(x)) + e^{-x}(\cos(x) - \operatorname{sen}(x)) = -2e^{-x}\operatorname{sen}(x) < 0$

h es decreciente

$g'(0) = e^{-0}(\cos(0) + \operatorname{sen}(0)) = 1$

Propongo $I = \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

$\rightarrow$Vale que es <1 en todos lados menos en 0

$\rightarrow |g'(x)| < 1$ en $I = \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\quad y \quad$ $g'(x) \neq 0 \forall x \epsilon \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en particular $g'(r) = 0$ tiene orden lineal.

13. 18/10

Notas importantes de la clase pasada. Queremos ver que la derivada de la funcion es menor que 1, para eso se ve que onda las segundas derivadas para ver si son crecientes o decrecientes y entonces saber si la funcion es menor que 1 para algun punto lo es para el resto o saber cuantas raices tiene.

13.1. N-R: Orden de convergencia

Definición: Sea $X_0, X_1, ...$ que converge a r decimos que converge con orden p > 0 si

$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = C$

Ejemplo: $f(x) = |x|^{\alpha}$ con $\alpha > 0$.

$x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) x_n$

$x_{n+1} - 0 = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)(x_n - 0)$

$|e_{n+1}| = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)|e_n| \rightarrow \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = \left|1 - \frac{1}{\alpha}\right|$

$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = \left|1 - \frac{1}{\alpha}\right| \neq 0$ si $\alpha \neq 1$

Ejercicio: Dada la funcion $f(x) = e^{-3x} - \frac{x}{2}$

A) Demuestra que f tiene una unica raiz.

$f(0) = e^{-3*0} - \frac{0}{2} = 1 > 0$

$f(1) = e^{-3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{e^3} - \frac{1}{2} < 0$

$\exists$ por Bolzano por lo menos una raiz entra $(0, 1)$

Falta ver que es unica.

$f'(x) = e^{-3x}(-3) - \frac{1}{2} = -\left(e^{-3x} - \frac{1}{2}\right) < 0 \forall x \epsilon \mathbb{R}$, osea que f es decreciente entonces la raiz es unica, porque pasa solo una vez por el 0.

b) Demuestr que cualquiera sea el x_0 inicial la sucesion generada por N-R $x_1, ..., x_n$ es monotona creciente acotada superiormente por la raiz y concluya la convergencia ¿Con que orden converge?

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $\qquad$ $e_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_n)} e_n^2$ con $x_n > \xi > r$

$f''(x) = 9e^{-3x} > 0$

$x_1 - \xi = e_1 = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_0)} e_0^2 = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi) > 0}{f'(x_0) < 0}\left(e_0^2 > 0\right) < 0$

$x_1 \leq r$

qvq $x_1 \leq x_2 \leq r$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

$f'(x_1) < 0$ entonces f es decreciente $\rightarrow f(x_1) \geq f(r) = 0$

$x_2 = x_1 - \left(\frac{f(x_1) \geq 0}{f'(x_1) < 0} < 0\right) \rightarrow x_2 - x_1 \geq 0 \rightarrow x_2 > x_1$

qvq $x_2 \leq r$

En general vale que $x_n \leq x_{n+1} \leq r$

Probarlo por inducción

$\rightarrow (x_n)$ converge.
$\rightarrow$ Orden cuadratico, la raiz es simple.

14. 22/10

14.1. Interpolacion

Problema: Dados pares $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$
Hallar $\rho \epsilon \rho_n$ tal que $\rho(x_i) = y_i \forall i$, siendo ρ un polinomio.

14.1.1. Metodo 1: Sistema de ecuaciones lineales.

$\rho = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$
ρ sirve $\iff a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + ... + a_n x_i^n = y_i$
La matriz del sistema es:

$$V(x_0, ..., x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^m \end{pmatrix}$$

Matriz de vandermonde.

14.1.2. Metodo 2: Base de Lagrange

Si consigo $l_0, l_1, l_2 ... l_n$ polinomio de ρ_n tales que:

$$\begin{cases} \rho_i(x_i) = 1 & i = j \\ \quad 0 & i \neq j \end{cases}$$

Listo: $\rho = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i$
$(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$

$$l_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$

Obs: Hay que hacer cuenatas para conseguir los coeficientes de ρ

14.1.3. Metodo 3: forma de Newton

$m = 0 \qquad (x_0, y_0) \rightarrow \rho = y_o$
$m = 1 \qquad (x_0, y_0), (x_1, y_1) \rightarrow \rho = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$
$m = 2 \qquad \rho = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + Algo(x - x_0)(x - x_1)$
Supongamos dada f tal que $f(x_i) = y_i$

Diferencias divididas $\quad f[x_0] = f(x_0)$ orden 0
$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ orden 1
$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$ orden 2
$f[x_0, x_1, x_2, ..., x_k] = \frac{f[x_1 ... x_k] - f[x_0 ... x_{k-1}]}{x_k - x_0}$ orden k
Forma de Newton para ρ

$\rho = f\left[x_0\right] + f\left[x_0, x_1\right]\left(x - x_0\right) + ... + f\left[x_0, ..., x_n\right]\left(x - x_0\right)$
$q_0 = 1, f_1 = \left(x - x_0\right) .... \ q_k = \left(x - x_{k-1}\right) q_{k-1}$
Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ x_i & -1 & 1 & 2 & 4 \\ y_i & 1 & 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_0 & f\left(x_0\right) & & & \\ x_1 & f\left(x_1\right) & f\left[x_0, x_1\right] & & \\ x_2 & f\left(x_2\right) & f\left[x_1, x_2\right] & f\left[x_0, x_1, x_2\right] & \\ x_3 & f\left(x_3\right) & f\left[x_2, x_3\right] & f\left[x_1, x_2, x_3\right] & f\left[x_0, x_1, x_2, x_3\right] \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & & & \\ 1 & 4 & \frac{3}{2} & & \\ 2 & 1 & -3 & \frac{3}{2} & \\ 3 & 4 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{5} \end{vmatrix}$$

$\rho = 1 + \frac{3}{2}\left(x+1\right) - \frac{3}{2}\left(x+1\right)\left(x-1\right) + \frac{3}{5}\left(x+1\right)\left(x-1\right)\left(x-2\right)$
$\rho = 1 + \frac{3}{2}\left(x+1\right) - \frac{3}{2}\left(x^2-1\right) + \frac{3}{5}\left(x^3 - 2x^2 - x + 2\right)$
Falta hacer la convinacion lineal.
Objetivo: Implementar funcion que calcule ρ coeficiente a coeficiente:
#Octave
function P = interpolar(X, Y)
| validar_datos
| calcular_tabla diferencias divididas
| calcular_tabla coeficientes q_k
| calcular_coeficientes P
end
####
function P = interpolar(X, Y)
| n=length(X);
| P = zeros(n,n);
| q = zeros(n,n);
| q$(1, 1) = 1$;
| for k=2:n
| | q$(k, 1) = -x\left(k-1\right) * q\left(k-1, 1\right);$
| | for j=2:k
| | | $q\left(k, j\right) = q\left(k-1, j-1\right) - x\left(k-1\right) q\left(k-1, j\right);$
| | end
| end
| T = nan(n, n)
| T(:,1) = Y;
| for k=2:n
| | for i=k:n
| | | T(i,k)=$\frac{(T(i,k-1)-T(i-1,k-1))}{(x(i)-x(i+1-k))}$
| | end
| end

15. 25/10

15.1. Interpolación

Vimos 3 mentodos:

- Metodo de coeficiente indeterminado(Matriz de Vanderrmonde).
- Forma de Newton: $P_n(x) = f[x_0] + ... + f[x_0, ..., x_n](x - x_0) .... (x - x_n)$(el polinomio puede tener menor grado que n)
- Forma de Lagrange: $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x)$ donde $l_k = \frac{\prod_{j \neq k}^{n} (x - x_j)}{\prod_{j \neq k}^{n} (x_k - x_j)}$.

Esta ultimo tiene dos problemas:

1. La cantidad de productos y divicsiones que hay que realizar.
2. Si agrego un punto mas debemos recalcular todo.

Ejemplo de forma de Newton:

x_j	-1	0	1
$f(x)$	-5	-3	-1

Busco P_2

$P_2(x) = \sum_{k=0}^{2} f(x_k) l_k(x)$

$P_2(x) = f(x_0) l_0(x) + f(x_1) l_1(x) + f(x_2) l_2(x) = -5 l_0(x) - 3 l_1(x) - 1 l_2(x)$

$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{x(x-1)}{2}$

$l_1(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = -x^2 + 1$

$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)x}{2}$

$P_2(x) = -5\frac{x(x-1)}{2} - 3\left(-x^2+1\right) - 1\frac{(x+1)x}{2} = -\frac{5}{2}x^2 + 3x^2 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{2}x - \frac{x}{2} - 3 =$

$P_2(x) = 2x - 3$

¿Que error cometemos al aproximar f por P_n?

Teorema: Sea $f \epsilon C^{n+1}([a,b]) . \{x_0, ..., x_n\} \subset [a,b]$ con $x_i \neq x_j$ cuando $i \neq j$ $p \epsilon P_n$el unico polinomio que interpola a f en esos puntos $\rightarrow \exists \xi_x \epsilon [a,b]$ talque $f(x) - p(x) = \frac{f^{n+1}(\xi_x)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$ con $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0) ... (x - x_n)$

15.1.1. Cota del error de un polinomio:

Bajo la hipotesis del teorema:

$\|g\|_{\infty \atop x\epsilon[a,b]} = \sup_{x \epsilon [a,b]} |g(x)|$

f^{n+1} continua $\left\|f^{n+1}\right\|_{\infty \atop x\epsilon[a,b]} = \max_{x\epsilon[a,b]} \left|f^{n+1}(x)\right|$

$|f(x) - p(x)| = \frac{\left|f^{n+1}(\xi_x)\right|}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|$

¿Como acotar $\|\omega\|_\infty$?

Para empezar trabajaos en $[-1,1]$ y despues se puede transformar para $[a,b]$ cualquiera.

$x_0 = -1$ y $x_n = 1$

$x_j = -1 + hj$ con $h = \frac{2}{n}$ y $N = \frac{n}{2}$

$x_0 = -1 = -Nh$

$x_1 = -1 + h = -Nh + h = (-N+1)\,h$

$x_2 = -1 + 2h = -Nh + h = (-N+2)\,h$

$x_n = Nh$

$x = rh$ con $-N \leq r \leq N$

Vamos a considerar:

$x_{n-1} \leq x \leq x_n$

$h\,(N-1) \leq rh \leq Nh$

$N - 1 \leq r \leq N$

Ahora vemos $x - x_{n-2} = rh - (N-2)\,h$

$h \leq rh - (N-2)\,h \leq 2h$

Obs: Estas cosas son utiles para el ejercicio 12 de la guia 6.

Ahora vemos $x - x_{n-3} = rh - (N-3)\,h$

$2h \leq rh - (N-3)\,h \leq 3h$

De igual manera puedo hacer esto para x_0, y queda:

$x - x_0 \leq 2Nh = nh$

$x - x_0 \geq (2N-1)\,h = (n-1)\,h$

$(n-1)\,h \leq x - x_0 \leq nh$

Luego podemos intentar acotar ω

$|\omega\,(x)| \leq nh\,(n-1)\,h...2h\,(x - x_{n-1})\,(x - x_n) = n!h^{n+1}\,(x - x_{n-1})\,(x - x_n)$

$|\omega\,(x)| \geq (n-1)!h^{n-1}\,(x - x_{n-1})\,(x - x_n)$

¿Que puedo decir sobre $|(x - x_{n-1})\,(x - x_n)|$?

$|(x - x_{n-1})\,(x - x_n)|$ se puede pensar como una cuadratica factorizada.

$x_\nu = \frac{x_{n+1}+x_n}{2}$

$y_\nu = T\,(x_\nu) = \left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2} - x_{n-1}\right)\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2} - x_n\right) = \frac{1}{4}\,(x_n - x_{n-1})\,(x_{n-1} - x_n)$

$|(x - x_{n-1})\,(x - x_n)| \leq \left|\frac{1}{4}\,(x_n - x_{n-1})\,(x_{n-1} - x_n)\right| = \frac{1}{4}\,|x_n - x_{n-1}|^2 \leq \frac{h^2}{4}$

$|\omega\,(x)| \leq n!h^{n-1}\,(x - x_{n-1})\,(x - x_n) \leq n!h^{n-1}\frac{h^2}{4} = n!\frac{h^{n+1}}{4} = \frac{n!}{4}\left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} = n!\frac{2^{n-1}}{n^{n+1}}$

#Octave

$f\,(x) = \frac{1}{1+25x^2}$

```
| t = -1:0.001:1;
| x = -1:0.2:1;
| y = f(x)
| z = polyval(polifit(x,y,lenght(x)-1),t)
| plot(t,z)
```

16. 29/10

16.1. Polinomio de Tchebychev

Notacion:
$f : A \to \mathbb{R}$
$||f||_\infty = \sup_{x \epsilon A} |f(x)|$
Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$||f||_\infty = \sup_{x \epsilon \mathbb{R}} |f(x)|$
$\left|\left|f_{[a,b]}\right|\right|_\infty = \sup_{x \epsilon [a,b]} |f(x)|$
Recordar:
Si P, polinomio de grado n con $x_1, ..., x_n$ raices:
$\to P = a(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$ con a coeficiente principal de P.
Problema: $f \epsilon C^{n+1}([a, b])$ y P de grado n interpola a f en $x_0, ..., x_n$ distinto en $[a, b]$
$\to f(x) - P(x) = \frac{f^{n+1}(\theta(x))}{(n+1)!}(x - x_0)...(x - x_n) \qquad \forall x \epsilon [a, b]$
Pregunta: ¿Como elegir los x para poder acotar $w_{n+1}(x) = (x - x_0)...(x - x_n)$ de la mejor manera posible?
Respuesta: Tomar los x como ceros del polinomio de Tchebychev de grado n.
Def: Para $k \epsilon \mathbb{N}_0$, $T_k(x) = cos\left(kcos^{-1}(x)\right)$ define $T_k : [-1 : 1] \to [-1 : 1]$
vale que:

$$\begin{cases} T_0 = 1 & k = 0 \\ T_1 = x & k = 1 \\ T_{k+1} = 2xT_k - T_{k-1} & \forall k \epsilon \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

16.1.1. Propiedades de los T_k

1. $gr(T_k) = k \qquad \forall k \epsilon \mathbb{N}_0$
2. El coeficiente principal de $T_k$es 2^{k-1} para $k \epsilon \mathbb{N}$
3. $T_k$tiene k ceros distintos en $(-1, 1)$.
   a) $x_i = cos\left(\left(\frac{2i+1}{2k}\right)\pi\right)$ con $i = 0, 1, ..., k - 1$
   b) Lo de arriba sale igualando la ecuacion
4. $||T_k|| = 1$ y $|T_k(y_i)| = 1$ para $y_i = cos\left(\frac{i\pi}{k}\right)$ con $-1 = y_0 < x_0 < y_1...x_k < y_k = 1$

Teorema: Si P es un polinomio mónico de grado n+1 con n+1 raiz distintas en $[-1, 1]$
entonces:
$\frac{1}{2^n} = \left|\left|\frac{1}{2^n}T_{n+1}\right|\right|_{L^\infty([-1,1])} \leq ||P||_{L^\infty([-1,1])}$

$\left|\left|\frac{1}{2^{n+1}}\right|\right|_{L^{\infty}([-1,1])} < ||(x-\vec{x}_0)\dots(x-\vec{x}_n)||_{L^{\infty}([-1,1])}$ con $\vec{x}_0,\dots,\vec{x}_n\epsilon\,[-1,1]$ distintos entre sí.

Ejemplo: Elegir 3 nodos de interpolacion x_0, x_1, x_2 en $[-1,1]$ de modo que en general, una funcion $f\epsilon C^3\left([-1,1]\right)$ se aproxime de la mejor manera posible.

En general

$f(x) - P(x) = \frac{f^{(3)}(\theta(x))}{3!}(x-x_0)(x-x_3)(x-x_2)$

$T_0 = 1$

$T_1 = x$

$T_2 = 2x^2 - 1$

$T_3 = 4x^3 - 3x$

Si los x son los ceros de T_3 esto se acota de forma optima en norma infinita.

$T_3 = 4x\left(x^2 - \frac{3}{4}\right) = 4x\left(x - \sqrt{\frac{3}{4}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{3}{4}}\right)$

$x_0 = -\sqrt{\frac{3}{4}} \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = \sqrt{\frac{3}{4}}$

16.2. Todo esto pero para $[a, b]$

Respuesta rapida: llevar todo al $[-1,1]$con una funcion lineal.

¿Como elegir $[a, b]$?

- Construir funcion lineal que lleve de $[-1,1]$ al $[a,b]$.
- Elegir n+1 puntos como los ceros de T_{n+1} en $[-1,1]$
- TOmar $x_i = \phi\left(\vec{x_i}\right)$ para todo i.

Obs: Tomando asi los x:

$||(x-x_0)\dots(x-x_n)||_{L^{\infty}([a,b])} \leq \frac{1}{2^n}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}$

y si P de grado n interpola a f en los x

$||f-P||_{L^{\infty}([a,b])} \leq \frac{||f^{(n+1)}||_{L^{\infty}([a,b])}}{(n+1)!}\frac{1}{2^n}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}$

Ejemplo: Igual que antes pero en $[2,6]$

Resolviendo en $[-1,1]$ el problema

$x_0 = -\sqrt{\frac{3}{4}} \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = \sqrt{\frac{3}{4}}$

Calculo la funcion lineal.

$\phi(x) = (x-(-1))\frac{4}{2} + 2 = 2(x+1) + 2 = 2x + 4$

$\phi(x) = 2x + 4$

Veo las nuevas raices

$x_0 = \phi\left(\vec{x_0}\right) = 4 - \sqrt{3}$

$x_1 = \phi\left(\vec{x_1}\right) = 4$

$x_2 = \phi\left(\vec{x_2}\right) = 4 + \sqrt{3}$

Tomando así los x

$||f-P||_{L^{n}([2,6])} \leq \frac{||f^{(3)}||_{L^{n}([2,6])}}{3!}\frac{1}{2^2}\left(\frac{4}{2}\right)^3$

Obs:

$\frac{||f^{(n+1)}||_{\infty}}{(n+1)!}\frac{1}{2^n}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \underset{si\ ||f^{(n+1)}||_{\infty} controlador}{\rightarrow} 0$

$\frac{\alpha^n}{n!} \rightarrow 0$

16.3. Cosas de error de interpolacion segun distribucion de nodos.

Tenemos $f\epsilon C^{n+1}\left([a,b]\right)$ y P polinomio de grado n que interpola a f en $x_0,...,x_n$ puntos distintos de $[a,b]$ sabemos que para $x\epsilon\left[a,b\right]$
$f\left(x\right)-P\left(x\right)=\frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}\left(x-x_0\right)...\left(x-x_n\right)$

16.3.1. Nodos arbitrariamente distribuidos.

$$||f-P||_{L^{\infty}([a,b])}\leq\frac{||f^{(n+1)}||_{L^{\infty}([a,b])}}{(n+1)!}\left(b-a\right)^{n+1}$$

16.3.2. Nodos uniformemente distribuidos.

(Ejercicio 12)recomm
$$||f-P||_{L^{\infty}([a,b])}\leq\frac{||f^{(n+1)}||_{L^{n}([a,b])}}{(n+1)!}\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}}$$

16.3.3. Nodos distribuidos como los ceos de T_{n+1}.

$$||f-P||_{L^{\infty}([a,b])}\leq\frac{||f^{(n+1)}||_{L^{\infty}([a,b])}}{(n+1)!}\frac{1}{2^n}\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}}$$

16.4. Octave

#Como programar Polinomios de Tchebychev en octave, que paja escribir

17. 01/11

17.1. Interpolacion de Hermite

Sea $x_1,...,x_n$, utiliza valores de la derivada de f en los puntos dados:
$P\left(x_j\right)=f\left(x_j\right)$
$P'\left(x_j\right)=f'\left(x_j\right)$

17.1.1. Ejercicio:

Busco in polinomio interpolado $P_3\left(x\right)$ tal que: $\begin{array}{c}P\left(-1\right)=1=f\left(-1\right)\\P'\left(-1\right)=1=f'\left(-1\right)\\P\left(2\right)=1=f\left(2\right)\\P'\left(1\right)=2=f'\left(1\right)\end{array}$

$P_3\left(x\right)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$
$P_3\left(-1\right)=a_0-a_1+a_2-a_3=1$
$P_3\left(2\right)=a_0+2a_1+4a_2+8a_3=1$
$P_3'\left(-1\right)=a_1-2a_1+3a_3=1$
$P_3'\left(1\right)=a_1+2a_2+3a_3=2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & | & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & | & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & | & 1 \end{pmatrix} f_2 - f_1 \to f_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & | & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -9 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & | & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & | & 1 \end{pmatrix} - \frac{f_2}{3} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & | & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & | & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & | & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_3 - f_2 \to f_3 \\ f_4 - f_2 \to f_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Queda inderterminado ☻

17.1.2. Hermite:

$x_0, ..., x_n$puntos $\neq$ y buscamos $P \epsilon P_{2n+1}/$

$$\begin{matrix} P(x_j) = f(x_j) \\ P'(x_j) = f'(x_j) \end{matrix} \to \exists! P \epsilon P_{2n+1} \text{ que sastiface lo que pedimos.}$$

17.1.3. Ejercicio:

Busco un polinomio:

$P(1) = 0 = f(1)$

$P(2) = 0.7 = f(2)$

$P'(1) = 1 = f'(1)$

$P'(2) = 0.5 = f'(2)$

Puedo resolver de 3 formas diferentes:

1. Coeficientes indeterminados
2. Forma de Lagrange
3. Dif divididas

1) Coef Indet.

$P_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

$P_3(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$

$P_3(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$

$P_3(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 0.7$

$P_3'(-1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 1$

$P_3'(2) = a_1 + 4a_2 + 12a_3 = 0.5$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&4&8\\0&1&2&3\\0&1&4&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0.7\\1\\0.5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&|&0\\1&-1&1&-1&|&0.7\\0&1&2&3&|&1\\0&1&-2&3&|&0.5\end{pmatrix} f_2-f_1\to f_2 \begin{pmatrix}1&2&4&8&|&0\\0&1&&-9&|&0.7\\0&1&2&3&|&1\\0&1&-2&3&|&0.5\end{pmatrix} \begin{matrix}f_3-f_2\to f_3\\f_4-f_2\to f_4\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&|&0\\0&1&3&7&|&0.7\\0&0&-1&-4&|&0.3\\0&0&1&5&|&0.2\end{pmatrix} f_4+f_3\to f_4 \begin{pmatrix}1&1&1&1&|&0\\0&1&3&7&|&0.7\\0&0&-1&-4&|&0.3\\0&0&0&1&|&1\end{pmatrix}$$

El determinante es diferente de 0 entonces es determinada con solucion unica.

$P_3(x)=-\frac{3}{2}+\frac{21}{10}x+\frac{7}{10}x^2+\frac{1}{10}x^3$

2) Resolvemos usando la forma de Lagrange

$P(x_j)=y_i=f(x_j)$

$P'(x_j)=y_j'=f'(x_j)$

$P(x)=\sum_{j=0}^{n} y_jQ_j(x)+\sum_{j=0}^{n} y_j'R_j(x)$

Grados 2n+1

$Q_j(x_k)=\delta_{jk}$

$Q_j'(x_k)=0$

$R_j(x_k)=0$

$R_j'(x_k)=\delta_{jk} \qquad 0\le k\le n$

Se definen como

$Q_j(x)=\left(1-2(x-x_j)\,l_j'(x_j)\right)l_j^2(x)$

$R_j(x)=(x-x_j)\,l_j^2(x)$

En el ejercicio: $P_3(x)=0$

En este ejemplo n =1

$P_3(x)=0Q_0(x)+0.7Q_1(x)+1R_0(x)+0.5R_1(x)$

$l_0(x)=\frac{(x-2)}{1-2}=\frac{x-2}{-1}=2-x$

$l_1(x)=\frac{x-1}{2-1}=x-1$

$l_0'(x)=-1$

$l_1'(x)=1$

$Q_0(x)=(1-2(x-x_0)\,l_0'(x_0))\,l_0^2(x)$

$Q_0(x)=(2x-1)(2-x)^2$

$Q_1(x)=(1-2(x-x_1)\,l_1'(x))\,l_1^2(x)=(-2x+5)(x-1)^2$

$R_0(x)=(x-x_0)\,l_0^2(x)=(x-1)(2-x)^2$

$R_1(x)=(x-x_1)\,l_1^2(x)=(x-2)(x-1)^2$

$P_3(x)=0.7(-2x+5)(x-1)^2+(x-1)(2-x)^2+0.5(x-2)(x-1)^2$

$P_3(x)=(x-1)\left[0.7(-2x+5)(x-1)+(2-x)^2+0.5(x-2)(x-1)\right]$

$=0.7\left(-2x^2+7x-5\right)+4-4x+x^2+0.5\left(x^2-3x+2\right)=$

$=-1.4x^2+4.9x-3.5+4-4x+x^2+0.5x^2-\frac{3}{2}x+1$

$=-1.4x^2+x^2+0.5x^2+4.9x-\frac{3}{2}x-4x+1.5$

$= 0.1x^2 - 0.6x + 1.5$
$(x-1)\left(0.1x^2 - 0.6x + 1.5\right) = 0.1x^3 - 0.6x^2 + 1.5x - 0.1x^2 + 0.6x - 1.5$
$= 0.1x^3 - 0.7x^2 + 2.1x - 1.5 = \frac{1}{10}x^3 - \frac{7}{10}x^2 + \frac{21}{10}x - \frac{3}{2}$
3)Diferencias finitas:
$\rightarrow P\epsilon P_3$es de la forma
$P(x) = f[x_0] + f[x_0,x_0](x-x_0) + f[x_0,x_0,x_1](x-x_0)^2 + f[x_0,x_0,x_1,x_1](x-x_0)^2(x-x_1)$
Se define:
$f[x_i,x_i] = f'(x_i)$
$f[x_i,x_i,x_j] = \frac{f[x_i,x_j]-f[x_i,x_i]}{x_j-x_i}$

z_i	$f[z_i]$	$f[z_{i-1},z_i]$	$f[z_{i-2},z_{i-1},z_i]$	$f[z_{i-3},z_{i-2},z_{i-}$
$x_0 1$	$f(x_0) = f[x_0]$	$1 = f'(x_0)$		
$x_0 1$	$f(x_0) = f[x_0]$	$f[x_0,x_0] = f'(x_0)$		
$x_1 2$	$f(x_1) = f[x_1]$	$f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$	$f[x_0,x_0,x_1] = \frac{f[x_0,x_1]-f[x_0,x_0]}{x_1-x_0}$	
$x_1 2$	$f(x_1) = f[x_1]$	$f[x_1,x_1] = f'(x_1)$	$f[x_0,x_1,x_1] = \frac{f[x_1,x_1]-f[x_0,x_1]}{x_1-x_0}$	$f[x_0,x_0,x_1,x_1] = f[x_0,x_1$

z_i	$f[z_i]$	$f[z_{i-1},z_i]$	$f[z_{i-2},z_{i-1},z_i]$	$f[z_{i-3},z_{i-2},z_{i-1},z_i]$
1	0			
1	0	1		
2	0.7	0.7	-0.3	
2	0.7	0.5	-0.2	0.1

$P(x) = 0 + (x-1) - 0.3(x-1)^2 + 0.1(x-1)^2(x-2)$
$= x - 1 - 0.3\left(x^2 - 2x + 1\right) + 0.1\left(x^2 - 2x + 1\right)(x-2)$
$= x - 1 - 0.3x^2 + 0.6x - 0.3 + 0.1\left(x^3 - 4x^2 + 5x - 2\right)$
$= x - 1 - 0.3x^2 + 0.6x - 0.3 + 0.1x^3 - 0.4x^2 + 0.5x - 0.2$
$= 0.1x^3 - 0.7x^2 + 2.1x - 1.5$

18. 05/11

18.1. Error en Hermite:

Recordar: error de interpolacion: $x_0 < ... < x_n,\ f\epsilon C^{n+1}([x_0,x_n])$ y $P\epsilon P_n$ interpola a f en $x_0,...,x_n$ si $f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta(x))}{(n+1)!}(x-x_0)...(x-x_n)$

Para $x\epsilon[x_0,x_n]$ con $\theta(x)\epsilon[x_0,x_n]$

18.1.1. Caso Hermite:

$x_0 < x_1 < ... < x_n$, si $f\epsilon C^1([x_0,x_n])$ existe un unico $P\epsilon P_{2(2n+1)}$ tal que:
$P(x_i) = f(x_i),\ P'(x_i) = f'(x_i)\ 0 < i < n$
Si $f\epsilon C^{2(n+1)}([x_0,x_n]) \rightarrow f(x) - p(x) = \frac{f^{(2(n+1))}(\theta(x))}{(2(n+1))!}(x-x_0)^2...(x-x_n)^2$
para $x\epsilon[x_0,x_n]$ y $\theta(x)\epsilon[x_0,x_n]$

18.1.2. Hermite Caso General:

Sea f con una cantidad suficiente de derivadas en $[x_0,x_n]$con $x_0 < ... < x_n$

Si $m_0, m_1, ..., m_n \epsilon \mathbb{N}$ y $N+1 = m_0 + ... + m_n$, existe unico $P \epsilon P_n$ tal que
$P(x_0) = f(x_0)\,,\ P'(x_o) = f'(x_0)\,, ..., P^{(m_0-1)}(x_o) = f^{(m_0-1)}$
$P(x_1) = f(x_1)\,,\ P'(x_1) = f'(x_1)\,, ..., P^{(m_1-1)}(x_1) = f^{(m_1-1)}$
$P(x_n) = f(x_n)\,,\ P'(x_n) = f'(x_n)\,, ..., P^{(m_n-1)}(x_n) = f^{(m_n-1)}$
Además, si $f \epsilon C^{N+1}([x_0, x_n])$
$f(x) - P(x) = \frac{f^{(N+1)}(\theta(x))}{(N+1)!}(x-x_0)^{m_0} ... (x-x_n)^{m_n}$
Ejercicio: Pensar cotas para error de interpolacion si se combina Hermite con Eleccion de nodos de Tchebychev. Caso mas facíl: $m_0 = m_1 = ... = m_n$

18.2. Splines Cúbicas

Problema: quiero interpolar f en muchos puntos $x_1 < ... < x_{n+1}$.
Lo malo: si n es muy grande P puede terner oscilacion espurias.
Posibles soluciones:

1. Mantener el grado bajo para P pero usar minimos cuadrados.NO INTERPOLA.

2. Interpolar de a pedazos y pegar las interpolaciones →Splines

Tomo P_i de grado a lo sumo 3 en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$. Si los P_i se eligen bien la interpolacion queda $C^2 en\,[x_1, x_{n+1}]$
Cada P_i es: $P_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$
Entonces has a lo sumo 4n incognitas.
Ecuaciones: $y_i = f(x_i)$
$P_i(x_i) = y_i$, $P_i(x_i+1) = y_{i+1}$ 2n ecuaciones
$P'_{i+1}(x_{i+1}) = P'_{i+1}(x_{i+1})$
$P''_{i+1}(x_{i+1}) = P''_{i+1}(x_{i+1})$ 2(n-1) ecuaciones
Quedan $4n-2$ ecuacuiones, 2 grados de libertad.

18.3. Formas de obtener unicidad

1. Dar derivadas en los bordes: $P'_1(x_1)\,, P'_n(x_{n+1})$

2. Dar derivadas segundas en los bordes.

3. Periodica: $P'_1(x_1) = P'_n(x_{n+1})$, $P''_1(x_1) = P''_n(x_{n+1})$