Anwendungen der Integralrechnung - Flächeninhalte

Grundsätzliche Bemerkungen:

Das bestimmte Integral einer Funktion f(x) mit den Integrationsgrenzen a und b liefert bei der Flächenberechnung immer die Größe des Flächeninhaltes zwischen dem Graphen der Funktion und der x-Achse innerhalb der Grenzen. Dieses Flächenstück kann oberhalb und unterhalb der x-Achse liegen. Es wird immer der dazwischen liegende Flächeninhalt berechnet. Entsprechend der Lagemöglichkeiten werden nun 4 Fälle besprochen.

1. Fall: Der Graph von f(x) verläuft durchgehend oberhalb der x-Achse im Intervall [a; b]

$f(x) \geq 0 \quad \forall\, (\text{"für alle"}) \; x \in [a;\, b]: \qquad A = \int_a^b f(x)dx \;=\; F(b) - F(a)$

siehe Bsp. 7.1, S.213

2. Fall: Der Graph von f(x) verläuft durchgehend unterhalb der x-Achse im Intervall [a; b]

$f(x) \leq 0 \quad \forall\, (\text{"für alle"}) \; x \in [a;\, b]: \qquad A = \left|\int_a^b f(x)\right| = |F(b) - F(a)|$

D.h., man muss den Betrag nehmen, da sonst ein negativer Flächeninhalt das Ergebnis wäre.

Eine weitere Möglichkeit wäre, man vertauscht die Grenzen, also $A = \int_b^a f(x)dx$

3. Fall: Der Graph von f(x) verläuft im Intervall [a; b] sowohl oberhalb als auch unterhalb der x-Achse

In diesem Fall muss man in Teilintervalle zerlegen. Die Zerlegung erfolgt entsprechend der innerhalb liegenden Nullstellen. Die Gesamtfläche erhält man durch Addition der berechneten Teilflächen. Würde man dies nicht tun, würden von den positiven Teilflächen die negativen Teilflächen abgezogen werden und man erhielte ein falsches Ergebnis.

Siehe Bsp. 7.2, S.213. Versuche probeweise das bestimmte Integral von 0 bis 5 der dort angegebenen Funktion ohne Zerlegung zu berechnen. Du wirst bemerken, dass dabei die Differenz der Teilflächen herauskommt.

4. Fall: Flächeninhalt zwischen 2 Kurven, wobei auch eine Gerade als Kurve gilt, also besser zwischen 2 Funktionsgraphen

Im Prinzip subtrahiert man dafür 2 Flächeninhalte. Der Flächeninhalt zwischen der oberen Kurve (Funktion) und der x-Achse minus den Flächeninhalt zwischen der unteren Kurve (Funktion) und der x-Achse. Dabei ist es unerheblich, ob beide Graphen oberhalb oder unterhalb der x-Achse verlaufen oder auch nur eine von den beiden. Überlege, warum! Es gilt immer: „obere Kurve (Funktion) minus untere Kurve (Funktion)“. Die Intervallgrenzen sind entweder vorgegeben oder sind die x-Werte der Schnittpunkte der Graphen (Schnittstellen), die dann extra durch Gleichsetzen ermittelt werden müssen. Entsprechend der Summenregel ist dabei die Differenz der Integrale der Funktionen gleich dem Integral der Differenz der Funktionen.

Liegt f(x) über g(x), gilt:

$f(x) \geq g(x) \quad \forall \quad x \in [a;\, b]: \qquad A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \;=\; \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

Liegt g(x) über f(x), so muss man entsprechend umkehren.

Siehe Bsp. 7.4, S. 215 und Anmerkung S.216

In jedem Fall ist die **Kenntnis des Kurvenverlaufs wichtig**, darum sollte er vor dem Rechnen skizziert werden! Dies erspart insbesondere bei symmetrisch zur y-Achse gelegenen Flächenstücken (gerade Fkt.) sowie bei punktsymmetrisch gelegenen Flächenstücken (ungerade Fkt.) einiges an Rechenarbeit. Siehe Bsp. 7.3a)b).

Übungsbsp.:

7.6a, b, e, f, g, (Rest freiwillig), 7.7b, f, (Rest freiwillig), 7.8b, (Rest frw.), 7.11, 7.12, 7.15b, c, d, 7.24