Chapitre 1

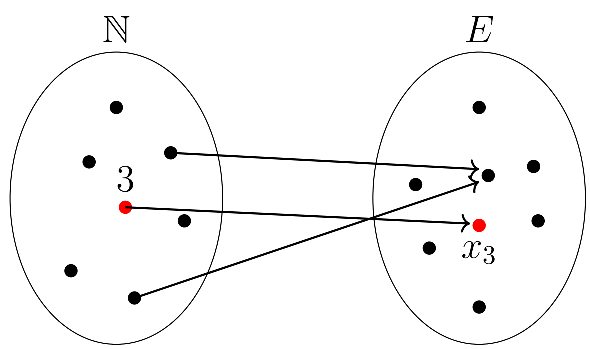
Suites numériques

1.1 Définition générale

Considérons un ensemble E dont on ne précise pas la nature et qui contient un nombre éventuellement infini de points. Si on imagine que cet ensemble est une urne dans laquelle on tire successivement, avec remise, N points, on peut alors construire une famille de points :

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_N\},$$

où le point x_1 est le premier point tiré, x_2 le deuxième, etc., j'usqu'au point x_N (avec $N \geqslant 1$, éventuellement infini). On dit alors que les points sont **indexés** par les nombres entiers.
Comme le tirage a été effectué avec remise, il est possible que, pour deux rangs différents $i \neq j$, on ait $x_i = x_j$, c'est-à-dire que le même point soit indexé par deux entiers distincts.



Une illustration de l'indexation des éléments de E

Si, pour l'ensemble E, on choisit l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ et que l'on applique ce même processus d'indexation, alors on aura définit une suite numérique (x_n) dont l'étude est tout l'objet de ce chapitre.

Définition 1.1.1

On appelle ***suite numérique*** *toute application de $D \subset \mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, c'est à dire une application de la forme :*

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u_n \end{array}$$

On notera cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou parfois simplement (u_n).

Notation. On fera attention à ne pas confondre l'objet $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, (c'est-à-dire un objet qui "transforme" un index en un nombre réel), avec l'objet u_n, qui désigne le nombre réel associé à l'index n.
On écrira donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (u_n) (toujours avec des parenthèses) pour désigner **la suite numérique** et on écrira u_n pour désigner **le terme de rang** n.

Remarque 1. On pourra rencontrer des suites dont le domaine de définition n'est pas $\mathbb{N}$ tout entier mais un sous ensemble de $\mathbb{N}$ (par exemple les entiers non nuls). Ce petit détail ne change néanmoins pas notre propos. Dans la suite de ce cours, on considèrera donc des suites dont le premier terme est u_0.

1.2 Expression d'une suite

On sait maintenant ce qu'est une suite, mais cette connaissance est entièrement abstraite, **c'est une application sur $\mathbb{N}$, d'accord, mais que fait-elle exactement ?** Pour répondre à cette question, on doit s'intéresser aux modes de définition d'une suite.

Définition 1.2.1 : Définition explicite

On dit qu'une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie de façon explicite lorsque l'on dispose d'une expression fonctionnelle permettant de calculer, pour tout index n, le réel u_n. En notant f cette expression, on a alors

$$u_n = f(n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Exemple 1.2.1. La suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n + 1$ est définie de façon explicite. On remarquera que $u_0 = 1, u_1 = 3, u_2 = 5$ etc. Cette suite est en fait la suite des nombres impairs.

1. ($\star\star\star$) Donner la définition explicite de la suite des nombres pairs. (solution p.??)

Définition 1.2.2 : Définition par récurrence

On dit qu'une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par récurrence lorsque sont donnés son premier terme u_0 et une relation permettant de calculer le terme de rang $n+1$ à partir du terme de rang n. On a alors

$$u_0 = x \in \mathbb{R} \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

Exemple 1.2.2. La suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2$ est définie par récurrence. On remarquera que $u_1 = 3, u_2 = 5$ etc. C'est à nouveau la suite des nombres impairs !

2. (⋆⋆⋆) Donner la définition par récurrence de la suite des nombres pairs. (solution p.??)

1.3 Suite arithmétique

Définition 1.3.1

On appelle suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ et de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$, une suite définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

3. (⋆⋆⋆) On considère la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 3. Tracer les termes $u_0, u_1, \ldots, u_5$ dans un repère orthonormé. Que constatez-vous ? (solution p.??)

Proposition 1.3.1

On considère une suite arithmétique (u_n) de premier terme u_0 et de raison r. Alors, l'expression

$$u_n = u_0 + n \cdot r$$

est une définition explicite de la suite (u_n).

4. (⋆⋆⋆) Démontrez la proposition précédente. (solution p.??)

Remarque 2. On peut donc calculer n'importe quel terme d'une suite arithmétique sans connaissance explicite des termes de rang inférieur (mis à part le premier). Cette proposition parait intuitive lorsqu'on observe la représentation graphique de quelques termes successifs d'une suite arithmétique, comme ils sont alignés, il suffit de connaître deux paramètres (la pente de la droite et sa position pour une abscisse donnée) pour connaître toute la droite.

L'algorithme ci-dessous permet de calculer le terme de rang n d'une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

```
def suite_arithm(n, u0, r):
        return(u_0 + n*r)
```

On remarque que cet algorithme effectue seulement deux opérations.

Proposition 1.3.2

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 et soit $N \in \mathbb{N}$. La somme des $N+1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée par la formule

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n = \frac{N}{2} \cdot (u_0 + u_N).$$

Remarque 3. Attention, on somme bien $N+1$ termes (et non pas N) car le premier terme est indexé par 0 !

5. ($\star\star\star$) L'objet de cet exercice est de démontrer la proposition précédente. (solution p.??)

1. On souhaite étudier la somme définie par $s_n = 1 + 2 + \cdots + n$.
   (a) On commence par le cas particulier $n = 10$, en réorganisant l'expression on remarque que
   $$s_{10} = (1 + 10) + (2 + 9) + (3 + 8) + (4 + 7) + (5 + 6).$$
   En déduire la valeur de s_{10}.
   (b) En vous inspirant de la méthode présentée ci-dessus, proposer une formule pour calculer s_n pour un entier n quelconque.
2. On définit maintenant la suite u_n de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison r.
   (a) Soit n un entier, donner la définition explicite du terme u_n.
   (b) En utilisant cette définition, proposer une expression de la somme $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$.
   (c) En déduire que $S_N = \frac{N}{2} \cdot (v_0 + v_0 + (n+1)r)$.
   (d) En utilisant la définition explicite du terme u_{n+1} simplifier l'écriture de la formule donnée à la question précédente. Conclure.

1.4 Suite géométrique

Définition 1.4.1

On appelle suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ et de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$, une suite définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = q \cdot u_n.$$

6. ($\star\star\star$) On considère la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2. Tracer les termes u_0, u_1, u_2, u_3 dans un repère orthonormé. Que constatez-vous ? (solution p.??)

Proposition 1.4.1

On considère une suite géomérique (u_n) de premier terme u_0 et de raison q. Alors, l'expression

$$u_n = u_0 \cdot q^n$$

est une définition explicite de la suite (u_n).

7. ($\star\star\star$) Démontrez la proposition précédente. (solution p.??)

Remarque 4. Cette proposition est l'équivalent géométrique de la proposition déjà formulée pour les suites arithmétiques

8. ($\star\star\star$) On vous inspirant de l'algorithme proposé pour les suites arithmétiques, proposer un algorithme permettant de calculer le terme de rang n d'une suite géométrique quelconque. Combien d'opérations effectue votre algorithme ? (solution p.??)

Proposition 1.4.2

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 et soit $N \in \mathbb{N}$. La somme des $N+1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée par la formule

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n = u_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

9. ($\star\star\star$) L'objet de cet exercice est de démontrer la proposition précédente. On considère une suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 et de raison q. (solution p.??)

1. On commence par étudier le cas particulier $S_5 = u_0 + u_0 \cdot q + \cdots + u_0 \cdot q^5$. Démontrer que
$$S_5 = u_0 + S_4 \cdot q \qquad \text{et} \qquad S_5 = S_4 + u_0 \cdot q^5.$$
2. En vous inspirant de la question précédente, donner deux expressions par récurrence de S_{N+1} en fonction de S_N.
3. En égalisant les relations données précédemment, montrer que $S_N(1-q) = u_0(1-q^{N+1})$.
4. Conclure.

1.5 Manipulations des suites

10. (⋆⋆⋆) (solution p.??)

1. On considère une suite arithmétique (u_n) de premier terme u_0 et de raison $r > 0$. On cherche le plus petit rang $N \in N$ tel que $u_N \geqslant x$ où x est un réel positif arbitraire.
   (a) Que vaut $u_1 - u_0$? $u_{25} - u_{20}$?
   (b) En déduire l'expression de $u_n - u_0$ puis conclure.
   (c) Proposer un algorithme (python ou language naturel) permettant de calculer le rang N.
2. On considère maintenant une suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 et de raison $q > 0$. On cherche à nouveau le plus petit rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geqslant x$ où x est un réel positif arbitraire.
   (a) Que vaut $\frac{u_1}{u_0}$? $\frac{u_{25}}{u_{20}}$?
   (b) En déduire l'expression de $\frac{u_n}{u_0}$.
   (c) On est maintenant face à une difficulté technique (on ne connaît pas la fonction réciproque de la fonction "puissance n"). On va donc devoir faire une recherche "à la main" du seuil N. Proposer un algorithme effectuant cette recherche.

1.6 Applications des suites

11. (⋆⋆⋆) Milon de Crotone était un athléte de la Grèce antique (né aux alentours de 550 avant Jésus Christ). Un mythe à son propos explique que, pour son entraînement, il décida de soulever un jeune veau tous les jours. Le veau grandissant, la charge soulevée par Milon augmentait progressivement. Lorsque le veau devint adulte, Milon pouvait toujours le soulever, par son entraînement il avait acquis, petit à petit, une force Herculéenne. (solution p.??)

1. On suppose que le veau de Milon pesait 40 kg à sa naissance et gagnait 1 kg chaque jour. Quel outil mathématiques permet de modéliser la croissance du veau ? Expliquer votre choix.
2. Milon s'entraîne ainsi durant une année entière. Quel charge est-il capable de soulever à l'issue de son entraînement ?
3. Quelle charge cumulée (i.e. la somme des charges journalières) Milon a-t-il soulevé durant cette année d'entraînement ?

12. (⋆⋆⋆) Le taux de reproduction du premier variant du SARS-COV-2 était d'environ 3, ce qui signifie qu'une personne contaminée infectait en moyenne 3 nouvelles personnes. On suppose que le cluster souche (l'ensemble des premiers infectés) contenait dix individus. (solution p.??)

1. Quel outil mathématiques permet de modéliser la propagation du virus dans la population ? Expliquer votre choix.

2. On supposera qu'un individu contaminé infecte 3 nouveaux individus en un jour. Proposer une estimation du nombre de contaminés après 100 jours.
3. On estime la population française à 70 millions d'habitant. En reprenant les hypothèses de la question précédente, estimer le nombre de jours nécessaire à la transmission du virus à l'intégralité de la population.

13. ($\star\star\star$) Supposons qu'une oportunité financière permette de rémunérer un placement de capital à hauteur de $x\%$ (avec x un réel positif). Le capital ainsi placé raportera donc $x\%$ d'intérêt après un temps t (par exemple, 2% tous les ans). Le principe des intérêts composés est de réinvestir systématiquement les gains du capital à chaque versement des intérêts, ainsi, les intérêts de la période suivante ne porteront pas uniquement sur le capital de départ mais sur ce dernier additionné des intérêts précédemment générés. (solution p.??)

1. Pour étudier le principe des intérêts composés, on considère un capital initial noté u_0 et une rémunération notée q (q n'est pas exprimé en pourcentage, il correspond à $1 + x$, par exemple une rémunération de 2% correspond à une multiplication par $1,02$).
   (a) On note u_1 le capital total (i.e. le capital initial additionné des intérêts perçus) après un versement d'intérêt. Exprimer u_1 en fonction de u_0 et de q.
   (b) On suppose que les intérêts générés sont systématiquement réinvestis, exprimer u_2 en fonction de u_1. En déduire une expression par récurrence de u_{n+1} en fonction de u_n pour $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Quel outil mathématiques permet de simuler des intérêts composés ?
   (d) On dispose de 1000 que l'on investit sur les marchés financiers. Ce placement est rémunéré à hauteur de 2% tous les ans. Serons nous milliardaire en moins de 10 ans ?
2. On suppose maintenant que l'investisseur est en capacité de verser régulièrement un capital donné (par exemple 200). Ainsi, au capital initial viendront non seulement s'additionner les intérêts perçus mais aussi des versements réguliers.
   (a) On note u_0 le capital initial, c la capacité d'investissement de l'investisseur (i.e. le montant de ses versements réguliers) et q la rémunération du capital. Exprimer u_1 puis u_2 en fonction de c et de q.
   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de c, q et n. Que remarquez-vous ? Utiliser le cours pour simplifier cette formule.