FACE - Departamento de Economia

MICROECONOMIA BÁSICA

INTUIÇÃO E RIGOR

Rodrigo J. Raad e Juan P. Gama Torres

Belo Horizonte

2020

Conteúdo

Capítulo 1

Conceitos básicos

1.1 Modelos em economia

Um modelo é uma representação simplificada de um objeto real e é utilizado para explicar algum resultado observado ou obter alguma relação de causa e efeito em várias situações. A parcimônia de um modelo é considerada adequada quando as simplificações não comprometem o resultado procurado. Portanto, um modelo parcimonioso não precisa descrever com detalhes todas as características dessa realidade, apenas aquelas que são fundamentais para se obter um bom entendimento das relações de causa e efeito.

1. O túnel de vento é utilizado para testar modelos pequenos de aviões.

2. Usar um bem de consumo para entender a moeda em ambientes econômicos mais simples. O cigarro no campo de concentração Nazista foi utilizado como meio de troca por exemplo.

3. A Econometria tenta entender como relações complexas podem ser estudadas usando funções um pouco mais simples como as lineares ou da família exponencial.

Em um modelo é possível analisar o efeito isolado de cada uma das variáveis *ceteris paribus*, ou seja, com tudo o mais constante

Três modelos muito utilizados

1. Modelo de fronteira de possibilidades de produção: auxilia no entendimento dos trade-offs que o processo produtivo de cada empresa ou da

produção agreagada de uma economia enfrenta.[1] As características da oferta ficam bem caracterizadas neste modelo.

2. Modelo de escolhas individuais: estuda a forma com que um consumidor pode substituir dois bens de consumo ou então consumo por poupança. Neste modelo a demanda fica determinada de acordo com a restrição orçamentária.

3. Modelo de equilíbrio de mercado: ajuda na compreensão de como oferta e demanda se ajustam através de uma precificação adequada dos bens e ativos financeiros da economia.

1.2 Ciência econômica

A ciência econômica pode ser dividida em Microeconomia e Macroeconomia.

1. Microeconomia: estuda cada setor econômico separadamente, as decisões dos indivíduos e como estas decisões interagem entre si.

2. Macroeconomia: Estuda de forma agregada todos os setores da economia

A matemática tem grande importância para estudar modelos econômicos pois possibilita a definição precisa dos objetos e torna a discussão dos resultados mais objetiva.

1.3 Princípios da Ciência Econômica

Princípio fundamental da economia: Escolha individual. Qualquer questão econômica envolve escolha individual, o seja, decisões de um indivíduo sobre o que fazer e o que não fazer.

Princípios relativos à economia da escolha individual

1.3.1 Recursos escassos

Recurso é qualquer coisa que pode ser usada para produzir alguma outra coisa. Um recurso é escasso quando sua quantidade disponível não é suficiente

[1] Trade-offs: Escolhas mutamente exclusivas exemplo: consumir ou poupar.

para satisfazer todos os seus usos produtivos.

Exemplo: Existe uma quantidade limitada de terras disponíveis para plantação e criação de gado. Polêmica recente: o etanol concorre com a produção de alimentos uma vez que reduz a quantidade de terra disponível para produção de alimentos.

Em função da escassez os agentes precisam tomar decisões específicas: Plantar cana ou feijão? Por várias razões há algumas decisões que a sociedade decide que pode ser melhor não deixar livre à escolha individual. Exemplo: a prefeitura proíbe tráfego ou estacionamento algumas áreas.

1.3.2 Custo de oportunidade

Definição É tudo aquilo de que você fica impedido de obter ao fazer alguma escolha específica. Em geral são escolhas conflitivas e chamadas também de trade-offs.

Exemplo: Fazer ou não faculdade pode implicar em trabalhar ou não.

Exemplo: Aula de surf impede de fazer uma matéria eletiva da faculdade,

1.3.3 Análise marginal

Comparar custos e benefícios de um pouco mais em uma atividade ou escolha qualquer versus um pouco menos.

Exemplo: estou estudando há três horas, e então eu comparo o benefício e o custo de passar a próxima hora estudando ou jogando tênis.

1.3.4 Pessoas exploram a oportunidade de melhorar sua situação

Quando temos um supermercado e um shopping ao lado um do outro e o estacionamento do supermercado é bem mais caro que o do shopping, as pessoas irão estacionar no supermercado e andar até o shopping.

Uma economia é um sistema para coordenar as atividades produtivas de muitas pessoas. Em uma economia de mercado, a coordenação se dá sem qualquer intervenção externa: cada indivíduo toma suas decisões. Mas as decisões de um agente podem interferir na decisão do outro agente, portanto essas decisões interagem entre si.

Exemplo: decido fumar agora na sala de aula.

Exemplo: O comportamento dos agentes afetam os preços indiretamente.

Princípios relativos à interação entre as escolhas individuais

1.3.5 Há ganhos do comércio

As pessoas dividem as tarefas entre si e cada pessoa oferece um bem ou serviço que outras pessoas desejam em troca de bens e serviços que ela própria quer. Os ganhos de comércio surgem sobretudo da divisão de tarefas, também conhecida como especialização.

Exemplo: profissões diferentes.

1.3.6 Os mercados caminham para o equilíbrio

Uma alocação de recursos se caracteriza como um equilíbrio quando nenhum indivíduo está em melhor situação se fizesse algo diferente.

Exemplo: fila no trânsito. Quando alguém tenta mudar de faixa para tentar ultrapassar mais carros, na maioria das vezes não consegue.

Exemplo: mercado financeiro. O mesmo acontece quando alguém tenta ganhar dinheiro fácil no mercado financeiro.

1.3.7 Os recursos deveriam ser usados do modo mais eficiente

Os recursos de uma economia são usados eficientemente quando usados de modo a explorar plenamente todas as oportunidades de melhorar a situação de cada um sem piorar a de nenhum outro.

Exemplo: Alguém gosta de um bem que seu vizinho possui e ele, por sua vez, gosta de algum outro bem desse alguém. Nesse caso, o comércio desses dois bens entre eles leva a uma melhora de ambos.

1.3.8 Mercados competitivos em geral levam à eficiência

O mercado possibilita as trocas e, como a trocas levam a eficiência, então os mercados promovem a eficiência. Em uma situação eficiente todas as oportunidades de se melhorar algo foram exploradas e extintas.

1.3.9 No caso de ineficiência, uma intervenção pode trazer melhoras.

Os mercados podem ter falhas. Grosseiramente falando, temos alguns causas de falhas em alguns mercados:

1. As ações dos indivíduos têm efeitos colaterais que não são levados em conta devidamente pelo mercado. Exemplo: congestionamento de trânsito ou poluição.

2. Uma das partes impede que ocorram trocas mutuamente benéficas ao tentar capturar para si uma proporção maior de recursos. Exemplo: Empresa estatal de gás proibindo algumas empresas privadas de utilizarem seus gasodutos. Grandes bancos impedindo algumas Fintechs de fornecerem serviços referentes a lançamentos de boletos eletrônicos gratuitos para seus clientes.

3. Alguns bens, por sua própria natureza, não servem para uma administração eficiente pelos mercados pois não há um direito de propriedade bem definido, no sentido de que a utilização de um indivíduo não impede a utilização do outro indivíduo. Exemplo: bens públicos como viadutos, estradas, praias, parques. Neste caso, o desenho de contratos pode produzir uma alocação de bens semelhante à de um mercado competitivo, portanto, a mais eficiente possível dentro das restrições impostas pelas falhas.

1.3.10 Um aumento de oferta de moeda pode gerar inflação

Quando um certo bem de consumo fica abundante na economia, seu preço certamente cai. Isto acontece porque as pessoas têm menor predisposição para pagar por um bem que possuem em abundância em relação a outro bem, que por sua vez fica relativamente escasso. Assim funciona enquanto uma moeda desempenha alguma função de meio de troca ou reserva de valor. Neste caso, quando ela fica mais abundante seu preço fica menor em termos relativos, ou seja, os preços dos bens ficam maiores em unidades monetárias. A inflação em geral fica mais elevada nos mercados de bens necessários, ou seja, sobrecarrega os indivíduos de renda mais baixa.

Capítulo 2

Tecnologia

Neste capítulo, vamos estudar como os indivíduos podem se coordenar em uma economia com o objetivo de realizar tarefas complexas que proporcionam a criação de novos bens através da utilização de bens primários. A tecnologia descreve todas essas tarefas e a coordenação entre as mesmas levando a um objetivo comum.

2.1 Conceitos básicos

Porque existe uma firma? Essa é realmente uma questão difícil de se resolver nos dias atuais, principalmente com o grande avanço da tecnologia a qual permite com que a coordenação entre as atividades seja implementada com muito mais precisão e com custos relativamente baixos. De fato, não há muito consenso ainda na teoria econômica de como definir uma firma e, portanto, vamos nesse curso simplificar para facilitar o entendimento.

Em termos bem gerais podemos chamar de "firma" um grande conjunto de contratos entre pessoas. Algumas pessoas vão simplesmente executar as tarefas propostas pelos contratos e outras vão trabalhar para que esses contratos se realizem sem incertezas e com harmonia. Esses últimos serão os gestores da firma. Portanto, precisamos nos preocupar simplesmente com a atividade essencial da firma, ou seja, entender como ela transforma insumo em produto. Para começar, analisaremos firmas em que os insumos e os produtos são simples e tangíveis, ou seja, podem ser mensurados com facilidade.

Vamos assumir que a firma opera dentro de um grande mercado, de maneira com que suas decisões não afetam os preços em geral. Nessas condições, as firmas tomam todos os preços como dados. Vamos supor também que os preços dos insumos embutem os custos de oportunidade, ou seja, tudo aquilo que a firma deixa de ganhar ao utilizar aquele insumo. Por exemplo, quando a firma compra um espaço físico em vez de alugá-lo, vamos embutir no custo o aluguel que a firma está deixando de receber por esse espaço físico, caso a firma não o utilizasse, alugando-o para outra firma.

Os preços dos insumos, também chamados de custos unitários, em geral são dados em unidades monetárias por unidade do período. Por exemplo, o salário é dado em unidades monetárias por unidade de período (hora, dia, mês, ano). No caso de uma máquina alugada seu preço será dado pelo valor de seu aluguel por unidade de período. No caso de uma máquina comprada podemos convencionar uma precificação baseada em seu preço de compra menos seu preço de venda dividido pelo número de períodos em que a firma esteve com a posse dessa máquina.

Vamos descrever brevemente os passos para entendermos uma firma e suas escolhas de produção e demanda por insumos.

1. Tecnologia de produção: precisamos de uma maneira prática de descrever como insumos (como mão-de-obra, capital e matérias-primas) podem ser transformados em saídas (como carros e televisões).

2. Restrições de custo: As empresas devem levar em consideração os preços da mão de obra, do capital e de outros insumos. Assim como um consumidor é restrito por um orçamento limitado, a empresa se preocupa com seu custo de produção.

3. Opções de insumo: Dada a sua tecnologia de produção e os preços do trabalho, capital e outros insumos, a empresa deve escolher quanto de cada insumo usar em sua produção. Assim como um consumidor leva em consideração os preços de diferentes produtos ao decidir quanto de cada bem comprar, a empresa deve levar em conta os preços de diferentes insumos ao decidir quanto de cada insumo deve usar.

Pergunta levantada por Ronald Coase em um famoso artigo de 1937: se os mercados funcionam tão bem na alocação de recursos, por que precisamos de empresas? Pense em como seria difícil a existência de uma firma em que os trabalhadores decidem de maneira independente a divisão das tarefas e negociem os preços em que cada um cobrará por cada tarefa. E se houvesse alguma alteração no design do produto, todas essas tarefas e remunerações contratuais teriam de ser renegociadas. Quem realizaria este difícil trabalho?

As empresas oferecem um meio de coordenação que é extremamente importante e seria extremamente ausente se os trabalhadores operassem de forma independente. Por exemplo, o capital físico pode ser usado por vários trabalhadores ao mesmo tempo. As empresas eliminam a necessidade de todo trabalhador negociar todas as tarefas que ele ou ela executará e barganham as taxas que serão pagas por essas tarefas. Isto pode ser realizado através de um gerenciamento que direciona a produção de trabalhadores assalariados, ou seja, os trabalhadores simplesmente recebem a informação com respeito ao que devem fazer e quando fazer, e negociam um salário semanal ou mensal. Imagine o trabalho de um despachante. Nos dias atuais, já se pensa em se robotizar várias tarefas de coordenação de contratos. Em firmas de tecnologia, já existem softwares que organizam o trabalho de programação independente de cada programador concatenando os scripts automaticamente. A tecnologia coloca em dúvida vários pressupostos sobre existência de firmas.

2.2 Planta de Produção

Nesta seção, vamos entender como funcionam as diversas operações elementares que uma firma realiza em sua produção. Por exemplo: comprar mais material e reduzir o uso de certas máquinas. Ou então substituir um produto químico por outro para aumentar o rendimento de uma certa matéria prima. Estudaremos também as restrições tecnológicas. Por exemplo, dado um nível de emprego de capital e trabalho, qual seria a quantidade marginal de capital que a firma poderia substituir por horas trabalhadas sem reduzir o produto? Ou então par aumentar a receita sem aumentar custos? A esse prospecto de operações e restrições tecnológicas vamos dar o nome de planta de produção. Vamos considerar que as firmas possuem apenas um produto para simplificar a análise. Todos os resultados apresentados aqui podem ser adaptados para firmas com múltiplos produtos.

2.2.1 Insumos

Definimos os insumos, ou fatores de produção como qualquer bem econômico que pode ser utilizado na planta de produção. Podemos dividir os insumos de maneira ampla nas categorias trabalho, capital, matéria prima e energia. Cada um deles pode incluir subdivisões mais específicas. Dentre essas subdivisões, as do capital têm mais relevância aqui. Podemos dividir o capital basicamente em quatro categorias

1. Capital físico: conjunto de máquinas e equipamentos usados na produção.

2. Capital tecnológico: desenvolvimento de softwares e patentes que melhoram a eficiência da produção.

3. Capital humano: nível de conhecimento técnico e de gestão dos indivíduos que trabalham na firma.

4. Capital financeiro: forma com que todo seu passivo é financiado no mercado financeiro em forma de contratos lastreados em seu fluxo de caixa ou não. Exemplo: ações ou debêntures.

2.2.2 Função de produção

Operações mais simples entre insumos e produtos mensuráveis podem ser sumarizadas através de uma função de produção. Essa função relaciona a quantidade produzida para cada alocação de insumos empregada simultaneamente. Matematicamente, considere cada alocação de insumos descrita por um vetor $x = (x_1, \cdots, x_n)$ em que cada coordenada k de x representa a quantidade utilizada do insumo k na produção.

Exemplo se o Insumo 1 representa o tempo utilizado de capital alugado e o Insumo 2 o tempo trabalhado, então $x = (40.5, 100)$ significa que foram empregados 40.5 horas de aluguel de capital e 100 horas de trabalho.

Em geral, uma função de produção indica a máxima produção que uma empresa pode atingir para cada combinação especificada de insumos. Essa relação pode ser representada com uma função de produção $y = f(x_1, ..., x_n)$ que estabelece para cada alocação de insumos $(x_1, ..., x_n)$ um nível de produto y.

Podemos definir o conjunto de possibilidades de produção CP como todas as combinações de insumo produto que podem ser implementadas na planta de produção de uma firma, ou seja, em termos mais rigorosos

$$CP = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}_+ : y \leq f(x)\}$$

Em um gráfico tridimensional, o conjunto de produção é a parte inferior do gráfico. Com efeito, em todo ponto situado abaixo do gráfico temos que a alocação de produto é menor ou igual à máxima quantidade que pode ser produzida, ou seja, $y \leq f(x)$. As alocações de insumo produto que representam a máxima produção formam um conjunto que chamamos de fronteira de possibilidades de produção FP. Mais precisamente

$$FP = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}_+ : y = f(x)\}$$

Como exemplo, considere a função de produção

$$f(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{3/4}$$

em que x_1 representa o número de horas de aluguel de capital e x_2 o número de horas trabalhadas. Normalizamos o total de horas de cada insumo como unitário.

Exemplo. Suponha que o tempo de um mês, ou seja, 720 horas, seja o período total de duração da produção. Portanto, se $x_2 = 250/720$ então significa que a firma utiliza 250 horas de trabalho para produzir a quantidade desejada. Vamos considerar que os insumos sejam representados nos eixos do plano horizontal e o produto no eixo vertical.

Veja Figura 2.1 para o gráfico tridimensional. Notem que o gráfico representa exatamente a fronteira de possibilidades de produção.

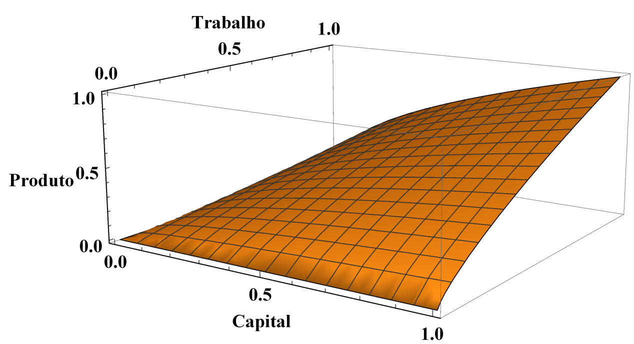


Figura 2.1: Gráfico 3D de uma função de produção

Vamos estudar três tipos de função de produção. Estes tipos diferem basicamente entre si pela capacidade que a tecnologia possui de substituir um insumo pelo outro, sem reduzir a produção.

Emprego de fatores em proporção fixa

Neste caso todos os insumos são empregados em uma quantidade constante para se produzir uma unidade de produto. Para exemplificar, vamos considerar a seguinte situação de produção de um sanduíche. Suponha que para se produzir uma unidade seja necessário o emprego dos insumos abaixo nas seguintes proporções fixas

1. 1 unidade de pão,
2. 3 fatias de tomate,
3. 2 pedaços de queijo,
4. 1 folha de alface,
5. 5 min de trabalho,
6. 8 unidades de energia,
7. 1 unidade de hamburguer.

Então, considerando as medidas dos insumos dadas nas unidades descritas acima, se queremos produzir 10 unidades de sanduíches, então basta multiplicar por 10 cada item acima. Porém a função de produção faz mais que isso, ela também calcula todas as possibilidades de desperdício que podem acontecer nessa produção. Neste caso a função de produção sera dada por

$$f(x) = \min\left\{\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{3}, \frac{x_3}{2}, \frac{x_4}{1}, \frac{x_5}{5}, \frac{x_6}{8}, \frac{x_7}{1}\right\} \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^7_+.$$

Por exemplo, $f(4, 10, 6, 4, 15, 25, 3) = 3$. Note que haverá desperdício dos insumos 1,2,4 e 6. Para esta tecnologia, em uma alocação sem desperdício, é impossível substituir na margem um insumo pelo outro sem reduzir o produto. Neste caso dizemos que a tecnologia não permite substituição, apenas complementariedade entre os insumos.

Mistura

O outro extremo desse tipo de tecnologia é a tecnologia de mistura ou de substituição perfeita. Suponha por exemplo que a firma utilize dois tipos de minério de ferro, dizemos, 1 e 2 como insumos para produzir aço e vamos considerar os outros insumos constantes para simplificar. O rendimento do minério 1 é de 3 para um, ou seja, cada 3 unidades do minério 1 produz uma unidade de aço. O rendimento do segundo tipo de minério de ferro é de 2 para um. Neste caso, dadas as quantidades $(10, 15)$ de insumos 1 e 2 então a quantidade total de aço produzida é de $3 \times 10 + 2 \times 15 = 60$. Em geral, uma função de produção do tipo mistura é descrita por

$$f(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n_+$$

em que os coeficientes $a_1, \cdots, a_n$ representam os rendimentos dos insumos. Neste caso, a firma pode substituir um insumo pelo outro sem reduzir o produto *independentemente da quantidade empregada dos insumos na produção*. Neste caso, para se manter a produção, a firma só precisa conhecer os rendimentos de cada insumo.

Substituição Imperfeita

O caso intermediário entre o emprego fixo de fatores e a mistura é o da tecnologia de substituição imperfeita. Esta tecnologia é a mais comum pois, em geral, o rendimento de um fator depende da intensidade em que é empregado na produção. De fato, no caso do trabalho por exemplo, temos uma característica importante. Quanto maior o tempo em que um trabalhador executa uma tarefa diária sem interrupção, menor é a quantidade que ele produz na margem, ou seja, com uma hora a mais de trabalho. O mesmo acontece com o capital pela depreciação, risco ou pelo desgaste de uma máquina. Para caracterizar esses efeitos, temos uma função muito importante denominada função Cobb-Douglas. Sua fórmula é dada por

$$f(x_1, x_2) = a x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

em que a é o coeficiente de mudança tecnológica e α e β os coeficientes de rendimento indireto dos fatores.

Exemplo Numérico

A Tabela 2.1 mostra alguns valores para a função de produção

$$f(k, l) = k^{1/4} l^{1/2}.$$

Considere os valores de capital, trabalho e produto dados em unidades de milhares. Pela tabela temos $f(3, 2) = 1.86$ e $f(4, 2) = 2$ por exemplo.

Insumos	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
$l=1$	1	1.19	1.32	1.41	1.5	1.57	1.63
$l=2$	1.41	1.68	1.86	2	2.11	2.21	2.3
$l=3$	1.73	2.06	2.28	2.45	2.59	2.71	2.82
$l=4$	2	2.38	2.63	2.83	2.99	3.13	3.25
$l=5$	2.24	2.66	2.94	3.16	3.34	3.5	3.64

Tabela 2.1: Valores de $f(k,l)$ para $k \in \{1,\cdots,7\}$ e $l \in \{1,\cdots,5\}$.

2.2.3 Isoquantas

Para entendermos como uma função de produção se comporta, devemos olhar para as curvas de nível do gráfico de uma função de produção. Neste caso, fica bem mais fácil a visualização das propriedades da tecnologia em questão. Podemos definir então uma isoquanta como o conjunto de todas as alocações de insumos $x = (x_1,\cdots,x_n)$ tais que geram o mesmo produto y, ou seja, $f(x) = y$.

Isoquanta da Cobb-Douglas

Voltando à Figura 2.1 podemos visualizar a curva de nível de produto 0.5 através dos gráficos 3D e 2D na Figura 2.2. Vamos supor que a função de produção seja dada por

$$f(x_1,x_2) = x_1^{1/2}x_2^{3/4}$$

para todo $x \in \mathbb{R}_+^2$. Na parte esquerda da figura, o plano em laranja representa o nível 0.5 e a superfície azul a função f. A curva em azul no gráfico da direita é a isoquanta, também representada pelo gráfico $x_2 = g(x_1)$ em que

$$g(x_1) = \left(\frac{0.5}{x_1^{1/2}}\right)^{4/3}.$$

Note que $f(x_1, g(x_1)) = 0.5$ qualquer que seja x_1. O gráfico bidimensional da Figura 2.3 abaixo mostra essa isoquanta. O gráfico da Figura 2.4 representa vários níveis da função Cobb-Douglas.

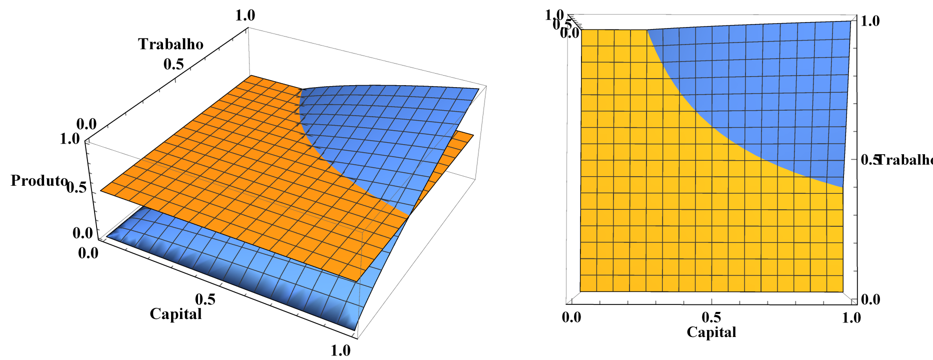


Figura 2.2: Gráfico de f em perspectiva e visto de cima

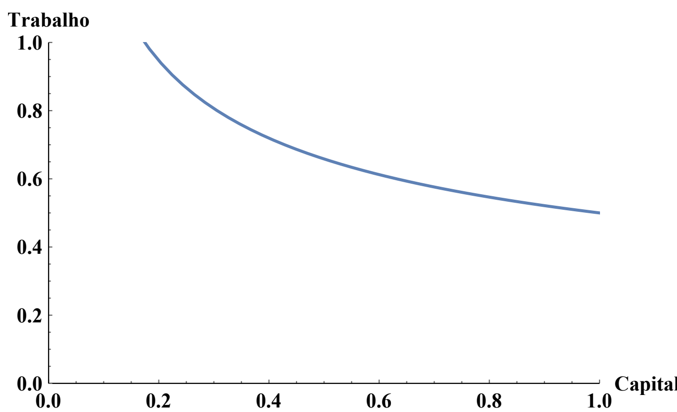


Figura 2.3: Curva de Nível 0.5 de f.

Isoquanta da tecnologia com emprego de fatores fixos

Para o caso da tecnologia que emprega os fatores de forma fixa, a função com dois insumos fica $f(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$. Fixando como exemplo $x_1 = 0.5$, temos que

$$f(0.5, x_2) = \begin{cases} 0.5 & \text{se } x_2 \geq 0.5 \\ x_2 & \text{se } x_2 < 0.5. \end{cases}$$

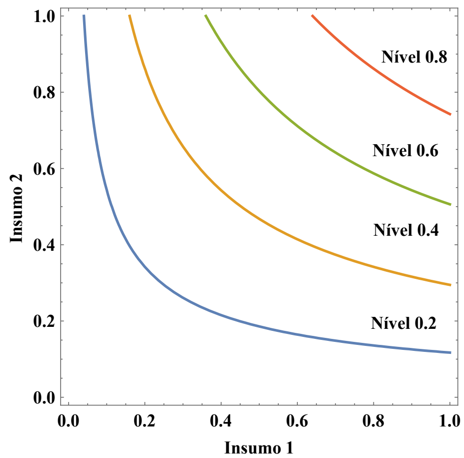


Figura 2.4: Curvas de níveis de produto $y = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$.

Reciprocamente

$$f(x_1, 0.5) = \begin{cases} 0.5 & \text{se } x_1 \geq 0.5 \\ x_1 & \text{se } x_1 < 0.5. \end{cases}$$

No caso tridimensional, o gráfico fica em forma de pirâmide. A curva de nível de $f = 0.5$ para o caso 3D fica bem clara de ser visualizada. Veja a Figura 2.5

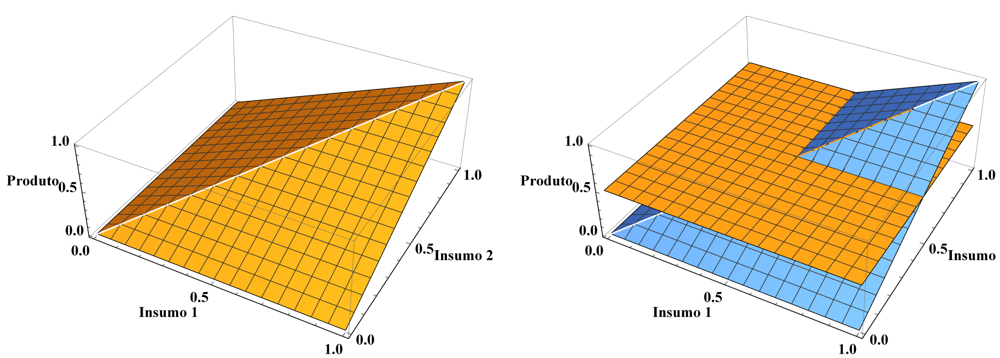


Figura 2.5: Gráfico 3D de f na direita e do nível $f = 0.5$ em perspectiva.

A curva de nível de $f = 0.5$ fica bem clara no gráfico 2D. O gráfico da

Figura 2.6 representa vários níveis ao mesmo tempo.

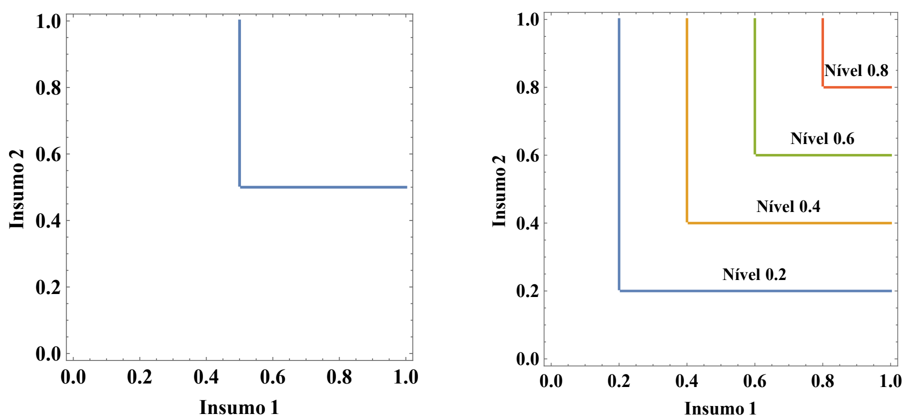


Figura 2.6: Isoquanta de nível 0.5 de f na direita e níveis 0.2,0.4,0.6,0.8 na direita.

O próximo exemplo refere-se a uma tecnologia com emprego de dois fatores em proporções fixas. Para se produzir uma unidade de produto é necessária a utilização de 2 unidades do Insumo 1 e 3 unidades do Insumo 2. Logo a função de produção fica $f(x_1, x_2) = \min\{x_1/2, x_2/3\}$. A região em que não há desperdício é chamada de reta de eficiência e está contida na fronteira de possibilidades de produção como mostrado no gráfico da Figura 2.7. É fácil ver que na reta de eficiência, temos que $x_1/2 = x_2/3$ ou seja $x_2 = 3x_1/2$.

Isoquanta da tecnologia de mistura

Para o caso da tecnologia de mistura, as isoquantas serão retas pois a taxa de rendimento de cada insumo é constante. Vamos supor por exemplo que uma unidade do Insumo 1 produza 3 unidades de produto e uma unidade do Insumo 2 produza 3 unidades de produto. Então, a função de produção fica $f(x) = 3x_1 + 2x_2$ e o gráfico da Figura 2.8 representa a fronteira de possibilidades de produção, na cor laranja, interceptada com 2 níveis, em azul e verde, e as curvas de nível desta tecnologia.

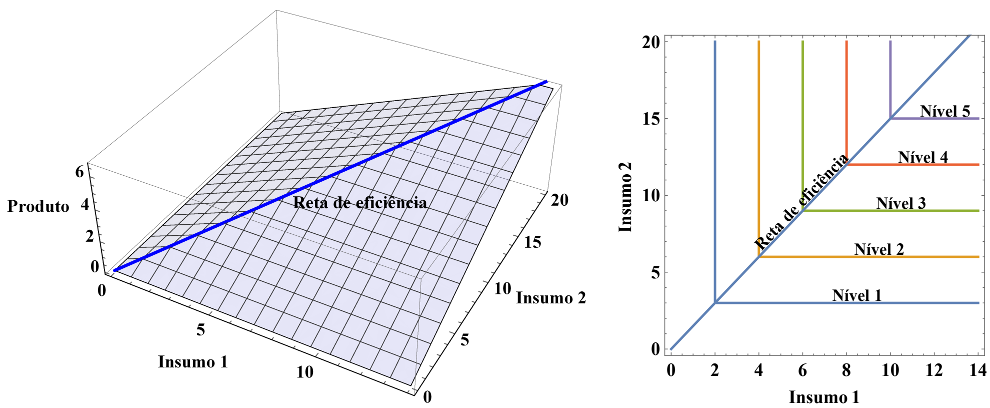


Figura 2.7: Conjunto FP na esquerda e níveis 1,2,3,4,5 na direita.

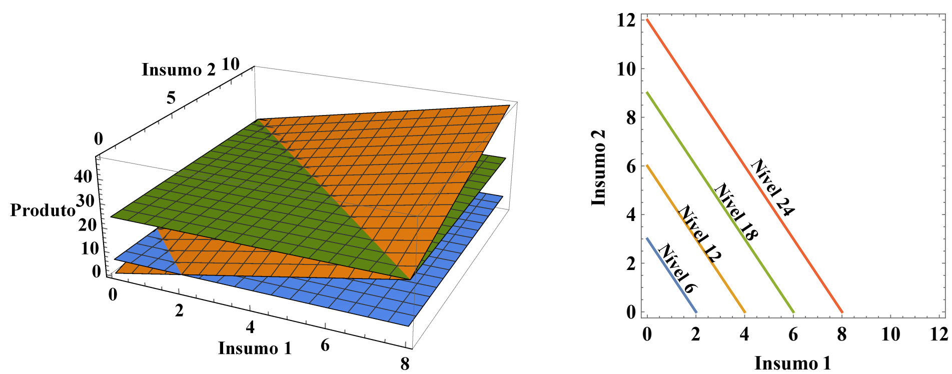


Figura 2.8: Conjunto FP na esquerda e curva de níveis 1,2,3,4,5 na direita.

2.2.4 Produto Marginal

Definimos o produto marginal de um insumo como a quantidade adicional produzida com uma unidade marginal a mais desse insumo. Em termos matemáticos, considerando $\partial_k f$ como a derivada parcial de uma função f em relação à variável k, então $Pmg_k(x) = \partial_k f(x)$. O produto marginal de um fator é chamado também de produtividade do fator.

Exemplo. Considere uma tecnologia Cobb-Douglas do tipo $f(k, l) = k^{1/4} l^{1/3}$ em que o Insumo 1 é o capital e o Insumo 2 o trabalho. Portanto, a produtividade do capital e do trabalho no nível de produção $k = 16$ e $l = 27$ são dadas respectivamente por

$$Pmg_k(k,l) = \frac{l^{1/3}}{4k^{3/4}} = \frac{3}{4 \times 2^3} = \frac{3}{32} \text{ e } Pmg_l(k,l) = \frac{k^{1/4}}{3l^{2/3}} = \frac{2}{3 \times 3^2} = \frac{2}{27}$$

Isto significa que um aumento de uma unidade marginal de capital leva a um aumento de $3/32 \approx 0.094$ unidades de produto e um aumento de uma unidade marginal de trabalho leva a um aumento de $2/27 \approx 0.074$ unidades de produto.

Exemplo Numérico

Para calcular o produto marginal numericamente, teremos que nos concentrar em valores próximos a uma certa alocação de capital e trabalho. Vamos considerar a função de produção

$$f(k,l) = k^{1/4}l^{1/2} \text{ para todo } (k,l) \in [1,7] \times [1,5]$$

e alocação $(k,l) = (4,2)$ para calcular os produtos marginais tanto do trabalho como do capital. Primeiramente, a Tabela 2.2 mostra os valores de f para alocações de trabalho próximas de 2 unidades de trabalho, ou seja, 2000 horas trabalhadas da equipe por exemplo.

Para se calcular o produto marginal do trabalho podemos usar uma razão que aproxima a taxa de crescimento da função de produção em relação a uma pequena variação da quantidade de horas trabalhadas. Vamos considerar variações de 0.1 unidades de milhares, ou seja, de 100 unidades de trabalho. Para obter uma aproximação melhor na alocação de $(k,l) = (4,2)$, vamos considerar uma variação de $0,01$, ou seja, de dez unidades. Uma precisão melhor ainda poderia ser considerada variando apenas uma unidade na quantidade trabalhada. Mas isto não faria muita diferença pois usamos um arredondamento com 3 casas decimais. Vamos considerar também, por motivos que veremos mais à frente, as alocações de capital tais que $f(k,l) = 2$, ou seja, contidos na isoquanta de nível 2. Portanto, os valores da diagonal da matriz correspondente à primeira parte da Tabela 2.2 são todos iguais a 2.

Mais detalhadamente, por exemplo, o produto médio do trabalho fixado o capital em $k = 5.536$ entre os pontos $l = 1.7$ e $l = 1.8$ pode ser calculado por

$$Pmed_l(5.536, 1.7) = \frac{f(5.536, 1.8) - f(5.536, 1.7)}{1.8 - 1.7} = \frac{2.058 - 2}{0.1} = 0.58$$

Trabalho	Capital				
	$k = 5.536$	$k = 4.938$	$k = 4.432$	$k = 4.000$	$k = 3.960$
	Valores de $f(k,l)$				
$l = 1.7$	2	1.944	1.892	1.844	1.839
$l = 1.8$	2.058	2	1.947	1.897	1.893
$l = 1.9$	2.114	2.055	2	1.949	1.945
$l = 2$	2.169	2.108	2.052	2	1.995
$l = 2.01$	2.175	2.113	2.057	2.005	2
Trabalho	Valores de $Pmg_k(k,l)$				
$l = 1.7$	0.094	0.102	0.111	0.116	-
$l = 1.8$	0.097	0.105	0.114	0.119	-
$l = 1.9$	0.1	0.108	0.117	0.122	-
$l = 2$	0.102	0.111	0.12	0.125	-
Trabalho	Valores de $Pmg_l(k,l)$				
$l = 1.7$	0.58	0.563	0.548	0.535	-
$l = 1.8$	0.564	0.548	0.533	0.52	-
$l = 1.9$	0.549	0.534	0.52	0.506	-
$l = 2$	0.542	0.526	0.512	0.5	-

Tabela 2.2: Produto marginal do capital e trabalho.

Outro exemplo seria o produto marginal do trabalho médio fixado o capital em $k = 4$ entre os pontos $l = 2.01$ e $l = 2$ dado por

$$Pmed_l(4,2) = \frac{f(4,2.01) - f(4,2)}{2.01 - 2} = \frac{2.005 - 2}{0.01} = 0.5$$

Observe que o produto marginal do trabalho aumenta quando o nível de capital empregado aumenta. Mas para cada nível de capital fixado o produto marginal do trabalho é decrescente, como se vê na tabela.[1]

Como outro exemplo, a Tabela 2.2 nos permite visualizar o produto marginal do capital em $l = 2$ entre os pontos $k = 3.960$ e $k = 4$. Basicamente temos

$$Pmed_k(4,2) = \frac{f(3.960,2) - f(4,2)}{3.960 - 4} = \frac{1.995 - 2}{-0.04} = 0.125$$

[1]Observe que os níveis de capital estão diminuindo da esquerda para a direita.

Observe que o produto marginal do capital aumenta quando o nível de trabalho empregado aumenta. Mas para cada nível de trabalho fixado o produto marginal do capital também é decrescente

2.2.5 Taxa Marginal de Substituição Técnica

A taxa marginal de substituição técnica do Insumo 2 pelo Insumo 1, denotada por $TMST_{21}(x)$, reflete como a firma consegue substituir o Insumo 2 pelo Insumo 1 sem reduzir seu produto quando x é o nível de emprego dos fatores. Mais rigorosamente temos as duas caracterizações abaixo:

1. A $TMST_{21}(x)$ representa a quantidade máxima do Insumo 2 que pode ser reduzida na alocação x de maneira a se aumentar uma unidade marginal do Insumo 1 *sem redução do produto.*

2. A $TMST_{21}(x)$ representa a quantidade mínima do Insumo 2 que deve ser acrescida na alocação x de maneira a se reduzir unidade marginal do Insumo 1 *sem redução do produto.*

Segundo esta definição, podemos caracterizar a $TMST_{21}(x)$ como a inclinação de uma isoquanta. De fato, veja o gráfico na Figura 2.9 que representa uma isoquanta g no nível de produto $(0.1)^{1/2}$ da função de produção $f(x) = x_1^{1/2}x_2^{1/2} = (0.1)^{1/2}$ em que o Insumo 1 representa o capital e o Insumo 2 o trabalho. Ou, seja, $x_2 = g(x_1) = 0.1/x_2$.

A taxa média de substituição ($TMEDST_{21}$) do Insumo 2 pelo Insumo 1 seria dada pela tangente (em módulo) do ângulo do vértice A no triângulo A, B e C. Note que nos pontos A e B a firma produz a mesma quantidade. Dessa maneira,

$$TMEDST_{21} = \frac{g(0.2) - g(0.4)}{0.4 - 0.2} \approx 1.25$$

Essa taxa pode ser aproximada pela taxa instantânea que é dada pela inclinação da reta tangente que passa por A, ou seja, o valor absoluto de $g'(0.4)$ que vale aproximadamente 0.625. Note que dependendo das variações consideradas nos insumos, devemos sempre utilizar a $TMST_{21}$ instantânea e não a média. Em geral, a taxa marginal de substituição técnica instantânea em x é o limite quando B aproxima de A, o que pelo gráfico representa exatamente a inclinação da reta tangente em A, ou seja,

$$TMST_{21}(x_1, g(x_1)) = -g'(x_1) \text{ para todo } x_1 \in \mathbb{R}_+.$$

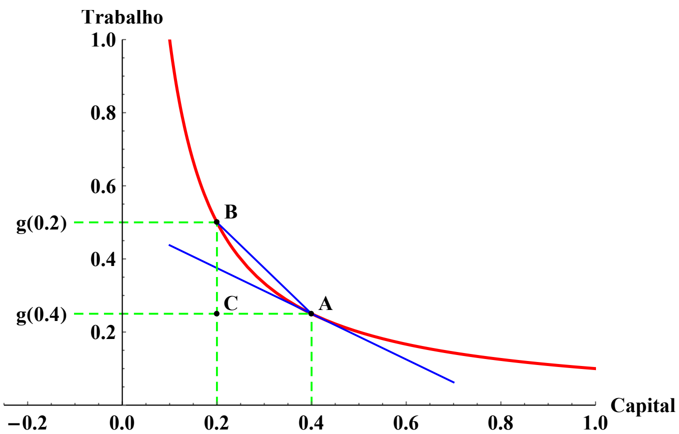


Figura 2.9: Isoquanta e $TMST_{21}$ média e instantânea.

Relação entre TMST e Produto Marginal

Existe uma relação importante entre a $TMST_{21}(x)$ e os produtos marginais. Por exemplo, suponha que os insumos possuam os seguintes produtos marginais

$$Pmg_1(x) = 10\frac{unid\, prod}{unid\, ins1} \text{ e } Pmg_2(x) = 2\frac{unid\, prod}{unid\, ins2}$$

Portanto, quando se aumenta uma unidade marginal do Insumo 1 temos um aumento de 10 unidades marginais de produto e quando se aumenta uma unidade marginal do Insumo 2 temos um aumento de 2 unidades marginais de produto. Portanto, se reduzimos 5 unidades do Insumo 2 e aumentamos uma unidade do Insumo 1 então a produção se mantém. O fato de que $5 = Pmg_1(x)/Pmg_2(x)$ não é simples coincidência. De fato, a relação

$$\frac{Pmg_1(x)}{Pmg_2(x)} = TMST_{21}(x) \text{ sempre vale.}$$

Podemos ver essa relação matematicamente usando a regra da cadeia. Com efeito, considere $x_2 = g(x_1)$ uma isoquanta. Defina $\hat{x}_1(t) = t$ e $\hat{x}_2(t) = g(t)$. Então $f(\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t)) = const$ para todo t. Logo, derivando essa equação em reação a t temos

$$\partial_1 f(\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t))\hat{x}_1'(t) + \partial_2 f(\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t))\hat{x}_2'(t) = 0.$$

Como $\hat{x}_1'(t) = 1$ e $\hat{x}_2'(t) = g'(t)$ então para $t = x_1$

$$\frac{\partial_1 f(x_1, g(x_1))}{\partial_2 f(x_1, g(x_1))} = -g'(x_1) = TMST_{21}(x_1, g(x_1))$$

Exemplo Numérico

Voltando ao exemplo com a função de produção $f(k,l) = k^{1/4}l^{1/2}$, calculamos a taxa marginal de substituição técnica pela Tabela 2.2 dividindo os valores elemento a elemento das matrizes de produto marginal do capital e do trabalho. A Tabela 2.3 mostra os valores resultantes das taxas marginais de substituição de trabalho por capital e capital por trabalho. Note que a diagonal se refere aos valores da taxa marginal de substituição técnica em cima da isoquanta de produto igual a 2 unidades de milhares.

Trabalho	Capital			
	$k = 5.536$	$k = 4.938$	$k = 4.432$	$k = 4.000$
	Valores de $TMST_{lk}(k,l)$			
$l = 1.7$	0.162	0.182	0.202	0.216
$l = 1.8$	0.172	0.192	0.214	0.229
$l = 1.9$	0.181	0.203	0.226	0.241
$l = 2$	0.189	0.211	0.235	0.25
Trabalho	Valores de $TMST_{kl}(k,l)$			
$l = 1.7$	6.154	5.502	4.948	4.621
$l = 1.8$	5.817	5.2	4.677	4.368
$l = 1.9$	5.514	4.93	4.434	4.141
$l = 2$	5.3	4.738	4.261	4

Tabela 2.3: Produto marginal do capital e trabalho.

Podemos observar que as taxas marginais de substituição técnica são decrescentes em ambos casos. Basta olhar para a diagonal de cada parte da Tabela 2.3 e notar que o capital está dado em valores decrescentes da esquerda para a direita.

2.2.6 Características das tecnologias de transformação

Nesta seção vamos estudar importantes características das tecnologias que geram implicações nas escolhas das firmas.

Tecnologias convexas

Dizemos que uma tecnologia é convexa quando duas alocações de insumos que geram o mesmo nível de produção podem ser combinadas de forma não reduzir a quantidade produzida. Uma combinação de duas alocações de insumos é o emprego de uma proporção fixa idêntica para todos os insumos.

Exemplo. Suponha que $x = (20, 4, 12)$ e $x' = (16, 40, 8)$. Então podemos empregar 75% de x e 25% de x' para obtermos x''. Neste caso, o vetor 75% de x é dado por $(15, 3, 9)$ e o vetor 25% de x' representa a alocação $(4, 10, 2)$. Logo,

$$x'' = 0.75x + 0.25x' = (15, 3, 9) + (4, 10, 2) = (19, 13, 11).$$

Em geral, dizemos que esse tipo de divisão em proporções idênticas para todos os insumos de duas alocações forma uma combinação convexa. Dizemos que um conjunto C é convexo quando qualquer combinação convexa entre dois elementos de C sempre pertence a C. Ou seja, dados dois pontos dentro do conjunto, então qualquer reta que liga esses dois pontos também está inteiramente contida nesse conjunto. Em termos matemáticos, dizemos que uma tecnologia é convexa quando o conjunto de produção é convexo (vide Figuras 2.1, 2.7 ou 2.8). Isto seria equivalente a dizer que a parte inferior dos gráficos tridimensionais ou a parte superior das isoquantas formam conjunto convexos, ou seja, conjuntos "sem buracos". Podemos facilmente ver que as três tecnologias descritas acima são convexas. O gráfico da Figura 2.10 representa uma isoquanta e a parte superior hachurada como contendo todas as alocações que são possíveis de serem produzidas. Notem que esse conjunto é convexo.

Produto marginal decrescente

Em geral, os fatores de produção possuem uma característica importante: *o produto marginal de um determinado insumo decresce com o aumento do emprego do mesmo, mantendo todos os outros insumos constantes*. No caso do capital, alguns fatores explicam esse fato. Com efeito, quando se aumenta

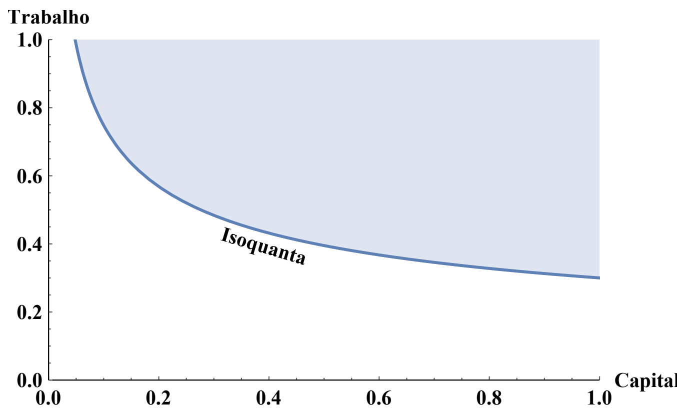


Figura 2.10: Conjunto superior da Cobb-Douglas.

uma hora de funcionamento de uma máquina que ainda foi pouco utilizada, o aumento de produto é maior do que quando se aumenta uma hora dessa máquina caso a mesma tenha sido muito utilizada. Problemas de depreciação e manutenção da máquina podem ocorrer. O capital humano também se deprecia no longo prazo devido às mudanças tecnológicas. O capital financeiro geralmente é lastreado pelo fluxo de caixa da firma, o que certamente deprecia pelos motivos anteriores.

No caso do trabalho, temos que a produtividade decresce com o aumento da carga de trabalho. Podemos visualizar isso no gráfico da função de produção do trabalho fixado o capital $\bar{k} = 1$. Neste caso a função de produção fica $\bar{f}(l) = f(1, l) = l^{1/3}$. A Figura 2.11 mostra como a sessão do gráfico tridimensional com o capital fixo unitário produz a curva descrita pela Figura 2.12

Em geral se produz mais quando se aumenta de uma para duas horas trabalhadas do que quando se aumenta de sete para oito horas trabalhadas. Além disso, olhando para um horizonte de longo prazo, a produtividade de um trabalhador certamente diminui quando ele vai ficando mais velho, caso ele não modifique seu capital humano.

Observe que a função de Cobb-Douglas satisfaz essa propriedade. No exemplo acima,

$$\partial_1 Pmg_k(k, l) = -\frac{3l^{1/3}}{16k^{7/4}} \text{ e } \partial_2 Pmg_l(k, l) = -\frac{2k^{1/4}}{9l^{5/3}}$$

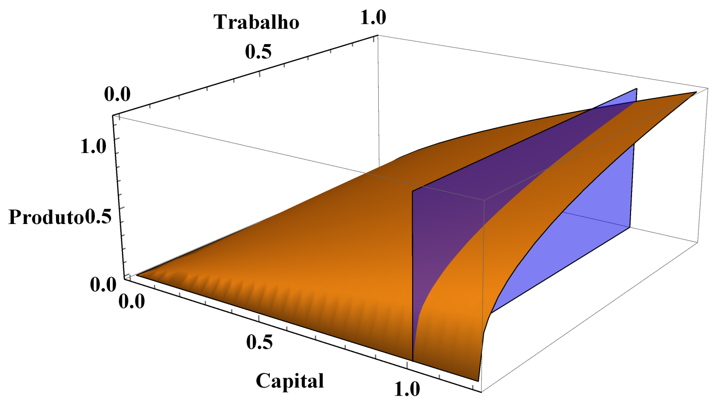


Figura 2.11: Gráfico tridimensional da função de produção do trabalho.

A Figura 2.12 mostra no plano a curva obtida pela seção do gráfico tridimensional. Veja como o produto marginal do trabalho é decrescente no nível de trabalho.

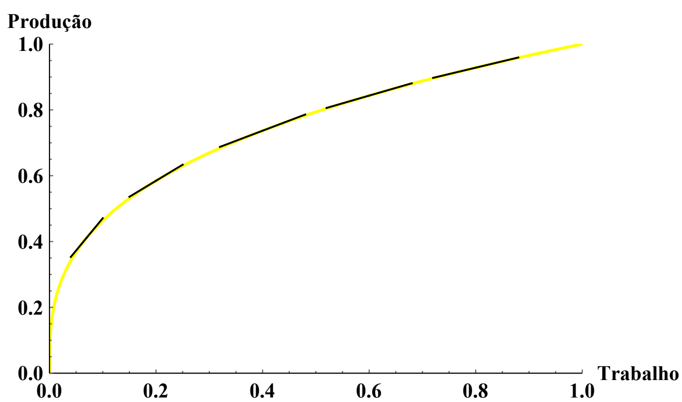


Figura 2.12: Função de produção do trabalho, com capital fixo.

A lei do produto marginal decrescente só se aplica caso um dos insumos se mantém fixo. Exemplo: Insumo fixo: terra e variável: agricultores.

Taxa marginal de substituição técnica decrescente

Em geral *a taxa marginal de substituição técnica é decrescente em cima da isoquanta*. Mais precisamente, a função $h(x_1) = TMST_{21}(x_1, g(x_1))$ é decrescente em x_1. Intuitivamente, essa propriedade vale por motivos parecidos com os da propriedade de produtividade decrescente. Imagine uma situação em que uma firma empregue muitos trabalhadores e poucas máquinas. Neste caso, pode-se substituir bastante mão de obra por uma máquina nova sem reduzir o produto. Porém, se essa substituição for realizada diversas vezes, a mão de obra começa a ficar escassa em relação ao número de máquinas. Neste caso, não mais se pode reduzir a mesma quantidade de mão de obra para se comprar um máquina sem reduzir a produção. O gráfico da Figura 2.13 mostra como a tangente à isoquanta vai diminuindo sua inclinação à medida que o Insumo 1 aumenta.

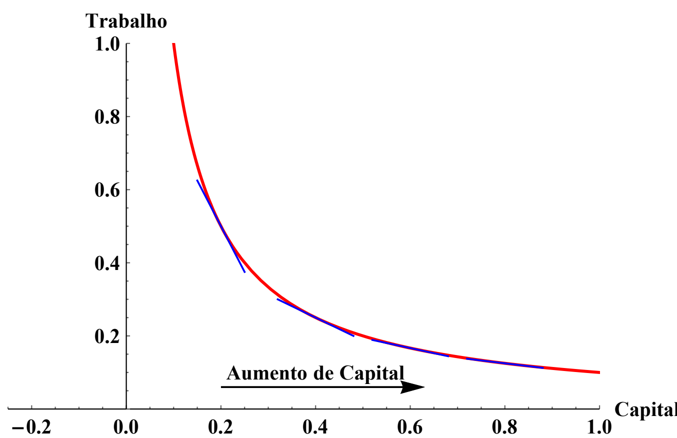


Figura 2.13: A $TMST_{21}$ é decrescente ao longo de uma isoquanta

Rendimentos de escala

As tecnologias também podem apresentar outra propriedade importante: os rendimentos de escala. Uma tecnologia pode indicar o que acontece com a produção quando se aumenta todos os insumos ao mesmo tempo e na mesma proporção. Por exemplo, se duplicarmos todos os insumos será que o produto também duplica? Ou mais que duplica? Ou será que a produção ficará menor que o dobro da anterior? Intuitivamente, quando os fatores estão sendo empregados com uma intensidade relativamente grande, um aumento proporcional da escala pode realmente levar a um aumento proporcional menor da produção. De fato, problemas de coordenação entre capital e trabalho são os mais relevantes para essa conclusão.

Outro fator importante que contribui fortemente para que os retornos de escala sejam decrescentes é o fato de que os trabalhadores mais eficientes são os que são contratados primeiro. Logo, quando as firmas aumentam sua escala de produção, irão contratar cada vez mais trabalhadores menos eficientes, e isso resulta em uma dificuldade em replicar a mesma planta de produção inicial, o que leva a produção a não crescer na mesma proporção do aumento da escala.

Quando os fatores estão sendo empregados com pouca intensidade, um aumento de escala pode realmente levar a um aumento igual ou maior ainda de produção. Mas este evento é bem mais improvável e exige características bem peculiares da planta de produção. Por exemplo, em uma empresa de transporte que usa o material para se construir oleodutos, ao se duplicar o material utilizado na tubulação, o diâmetro fica duplicado e a vazão se multiplica por quatro. Em resumo, a tecnologia pode apresentar rendimentos de escala variando com o nível de produção ou a capacidade ociosa. Se aumentarmos a atividade reduzindo a capacidade ociosa, os ganhos de escala podem se reduzir e a função de produção pode deixar de apresentar retornos constantes ou crescentes de escala. Mais precisamente temos a seguinte definição de rendimentos de escala usando a função de produção.

Dizemos que uma tecnologia apresenta

1. rendimentos crescentes de escala quando $f(tx) > tf(x)$ para todo x e todo $t > 1$;

2. rendimentos decrescentes de escala quando $f(tx) < tf(x)$ para todo x e todo $t > 1$;

3. rendimentos constantes de escala quando $f(tx) = tf(x)$ para todo x e todo $t > 1$.

Exemplo. Uma função Cobb-Douglas $f = Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}$ apresenta retornos crescentes, decrescentes ou constantes quando

$$\alpha + \beta > 1; \quad \alpha + \beta < 1; \quad \alpha + \beta = 1 \quad \text{respectivamente} .$$

Curto e Longo Prazo

Dizemos que uma firma opera no curto prazo quando alguns de seus insumos estão fixos. Como exemplo, podemos observar insumos que têm pouca facilidade de serem transacionados como espaço físico, capital humano, capital físico etc. Portanto, a firma vai operar nesse prazo escolhendo apenas os outros insumos. No longo prazo a firma consegue variar estes tipos de insumos, mesmo aqueles que possuem pouca liquidez de mercado.

2.3 Maximização de Lucro

Nesta seção, vamos entender como uma firma vai escolher entre as alocações de insumos e produtos levando em conta as diversas restrições tecnológicas em sua planta de produção. Para isso, primeiramente precisamos entender como a firma pode substituir um insumo pelo outro marginalmente, com o objetivo de melhorar seus custos de produção e, portanto, melhorar seus lucros. Exemplo. Uma firma que tem uma alocação de capital muito intensa, pode melhorar custos trocando um pouco de capital por trabalho sem reduzir sua produção e, portanto, reduzindo custos sem reduzir o faturamento.

Vamos relembrar que estamos considerando aqui a hipótese de que as firmas são pequenas em relação ao mercado e, portanto, elas tomam os preços dos insumos e dos produtos como fixos. Grosseiramente falando, as firmas podem ser de propriedade individual ou de sociedade anônima. Vamos considerar que não há problemas conflitivos nas escolhas de produção da firma no sentido de que as firmas sempre maximizarão lucro. Para o caso de firmas com um gerenciamento mais complexo isso pode não acontecer. Esse tópico é estudado na teoria de finanças corporativas.

Os preços nominais dos insumos, ou também chamados de remuneração dos fatores, serão tomados como dados pelo mercado e definidos como a quantidade monetária paga para cada unidade do insumo em questão. Representaremos esses preços como a matriz $w = (w_1, \cdots, w_n)$. Dentro destes preços estão o salário, o aluguel do capital, juros de ativos financeiros, etc. O preço do produto segue a mesma lógica e será denotado por p. Definimos o salário real como a quantidade de produto que se compra com uma unidade de trabalho e remuneração do capital real como a quantidade de produto que se pode comprar com o preço pago por uma unidade de capital. Portanto

$$\text{Remuneração real do insumo } k = \frac{w_k}{p}\,\frac{unid\,prod}{unid\,ins\,k}$$

pois a unidade de w_k é dada em unidades monetárias por unidade do insumo k e o preço do produto é dado em unidades monetárias por unidade do produto.

2.3.1 Propriedades da alocação ótima

Na maximização de lucro temos a seguinte situação. Enquanto a firma consegue substituir um insumo pelo outro sem reduzir o produto, ou seja, realizando essa troca olhando para a taxa marginal de substituição técnica, ela consegue aumentar lucro mantendo o faturamento e reduzindo custos. A firma continuará a fazer a troca até que a taxa marginal de substituição técnica se iguale ao custo que ela tem ao se substituir um insumo pelo outro.

Mais precisamente, o Lucro de uma firma será dado pela receita (ou faturamento) menos o seu custo. Logo o lucro de uma alocação de insumo x será denotado por $L(x)$ e, portanto,

$$L(x) = Rec(x) - Cust(x) = pf(x) - wx \text{ em que } wx = \sum_{k \leq n} w_k x_k$$

Quando a firma maximiza lucro temos $\partial_k R(x) = \partial_k Cust(x)$, ou seja, a receita marginal do insumo fica igual ao seu custo marginal. A intuição para esse fato vem da ideia de que se uma unidade marginal de produto gera uma receita maior que o custo na margem, então a firma continuará aumentando sua produção até que essas duas grandezas se igualem. Matematicamente,

$$\partial_k L(x) = 0 \text{ implica } \partial_k Rec(x) = \partial_k Cust(x) \text{ e } pPmg_k(x) = w_k \text{ para } k \leq n$$

A relação $pPmg_k(x) = w_k$ vem do fato de que $Pmg_k = \partial_k f(x)$. Considerando o caso de dois insumos para simplificar temos que

$$pPmg_1 = w_1 \text{ e } pPmg_2 = w_2$$

ou seja,

$$TMST_{21}(x) = w_1/w_2 \text{ e } Pmg_k = w_k/p \text{ para } k = 1, 2 \tag{2.1}$$

Neste caso, temos que a taxa marginal de substituição técnica é igual a razão dos preços dos fatores. E a remuneração real de um fator é dada pela sua produtividade.

A Tabela 2.4 mostra para a função de produção $f(k,l) = k^{1/4}l^{1/2}$ em unidades de milhares e para o preço do produto $p = 8$ unidades de milhares por unidade de produto. Vamos considerar também o salário como $w = 4$

Trabalho	Capital						
	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
	Valores de Receita $pf(k,l)$						
$l=1$	8	9.51	10.53	11.31	11.96	12.52	13.01
$l=2$	11.31	13.45	14.89	16	16.92	17.71	18.4
$l=3$	13.86	16.48	18.24	19.6	20.72	21.69	22.54
$l=4$	16	19.03	21.06	22.63	23.93	25.04	26.03
$l=5$	17.89	21.27	23.54	25.3	26.75	28	29.1
Trabalho	Valores de custo total $ct(k,l)$						
$l=1$	5	6	7	8	9	10	11
$l=2$	9	10	11	12	13	14	15
$l=3$	13	14	15	16	17	18	19
$l=4$	17	18	19	20	21	22	23
$l=5$	21	22	23	24	25	26	27
Trabalho	Valores de Lucro $L(k,l)$						
$l=1$	3	3.51	3.53	3.31	2.96	2.52	2.01
$l=2$	2.31	3.45	3.89	4	3.92	3.71	3.4
$l=3$	0.86	2.48	3.24	3.6	3.72	3.69	3.54
$l=4$	-1	1.03	2.06	2.63	2.93	3.04	3.03
$l=5$	-3.11	-0.73	0.54	1.3	1.75	2	2.1

Tabela 2.4: Tabela de lucro global

unidades de milhares de reais por período trabalhado da equipe e a remuneração do capital como $r = 1$ unidades de milhares de reais por período de aluguel do capital. Portanto, os valores da receita, do custo e do lucro estão dados em unidades de milhões de reais. Para fixar as ideias, nesse exemplo numérico assumimos por convenção que o Insumo 1 é o capital e o Insumo 2 é o trabalho.

Podemos ver na Tabela 2.2 que na alocação $(k, l) = (4, 2)$ o maior lucro possível no valor de 4 milhões. Além disso, o lucro decresce quando se aumenta o capital e o trabalho fora do intervalo considerado no exemplo. Pela Tabela 2.2 temos que

$$Pmg_k(4,2) = 0.125 = \frac{1}{8} = \frac{r}{p} \quad \text{e} \quad Pmg_l(4,2) = 0.5 = \frac{4}{8} = \frac{w}{p}.$$

Podemos também observar na Tabela 2.3 que

$$TMST_{lk}(4,2) = 0.25 = \frac{w}{r} \quad \text{e} \quad TMST_{kl}(4,2) = 4 = \frac{r}{w}.$$

Vamos considerar um exemplo bem simples. Suponha que uma firma produza chocolates, para adoçar um pouco essa conversa polêmica, e que o preço do chocolate seja 4 reais por unidade e o salário 20 reais por hora. Então considerando o insumo 1 como o trabalho

$$\frac{w_1}{p} = \frac{20 reais/hora\,trab}{4 reais/unid\,choc} = 5\frac{unid\,choc}{hora\,trab}$$

ou seja, o salário real é o salário do trabalhador medido em unidades de chocolates. Em outras palavras, w_1/p é igual a quantos chocolates o trabalhador *recebe* por hora.

Por outro lado, a grandeza $Pmg_1(x)$ representa o produto marginal do trabalho, ou seja, quantas unidades de chocolate o trabalhador *produz* por hora. Como a firma maximiza lucro, então ela vai escolher a quantidade empregada de trabalho de maneira com que

$$Pmg_1(x) = \frac{w_1}{p} = 5\frac{unid\,choc}{hora\,trab}$$

ou seja, *o salário pago é exatamente o que o trabalhador produz medido em unidades de produto!* Isto também pode ser explicado pelo fato de que em um mercado competitivo, se uma firma optar por pagar um salário menor ao de mercado ela vai perder os trabalhadores mais produtivos para as outras firmas que estão também maximizando lucro, e portanto, têm ganhos marginais ao contratar um trabalhador mais produtivo. Neste caso, a firma inicial não conseguirá sobreviver no mercado ou terá que produzir algum outro produto de qualidade inferior. Olhando para a relação abaixo

$$p\frac{unid\,monet}{unid\,prod}Pmg_1(x)\frac{unid\,prod}{hora\,trab} = 4 \times 5\frac{unid\,monet}{hora\,trab}$$

chegamos a conclusão de que a firma, ao maximizar o lucro, deixa o trabalhador produzir exatamente 20 reais em chocolates por hora, o que representa exatamente seu salário/hora.

Para o caso do capital, que vamos chamar de insumo 2, o resultado é análogo. Com efeito, a relação entre a produtividade do capital e sua remuneração é dada na escolha ótima da firma por

$$Pmg_2(x) = \frac{w_2}{p} \frac{unid\, choc}{hora\, alug}$$

ou seja, a remuneração do capital é exatamente o seu rendimento. Em mercados competitivos, o capital físico não fica remunerado acima de seu rendimento. Isto também vale de maneira análoga para o capital financeiro e humano.

Vamos fazer um exemplo com uma função Cobb-Douglas $f(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/4}$ com o preço do produto igual a 8 e os preços dos insumos 1 e 2 dados por 2 e 4 respectivamente. Então O lucro será dado por

$$L(x) = 8x_1^{1/2} x_2^{1/4} - 2x_1 - 4x_2.$$

As condições de primeira ordem implicam que

$$\frac{4x_2^{1/4}}{x_1^{1/2}} = 2 \qquad \text{e} \qquad \frac{2x_1^{1/2}}{x_2^{3/4}} = 4$$

cuja solução é dada por $x_1 = 4$ e $x_2 = 1$ e o lucro ótimo é positivo e igual a 4. A pergunta que fica agora seria essa: como a firma tem lucro positivo se ela paga exatamente a produtividade do trabalhador e do capital? A resposta está nos dois gráficos da Figura 2.14

Observe que na área hachurada do gráfico, o trabalhador além de receber o salário igual à sua produtividade, ele recebe acima de seu produto médio. Note também que o trabalhador mais eficiente recebe um salário acima do produto médio em uma região maior do que o trabalhador menos eficiente. Para ver que o lucro é positivo, suponha que a firma empregue o nível de trabalho no ponto A. O trabalhador empregou suas horas iniciais de 0 até A, com uma produtividade maior que a produtividade paga pela firma.[2] Para ver isto, note que a produtividade é a inclinação do gráfico a qual é maior à esquerda do ponto A. Logo a firma pode ter um lucro menor no

[2] Que neste caso é exatamente o produto médio mas vale para qualquer outra situação.

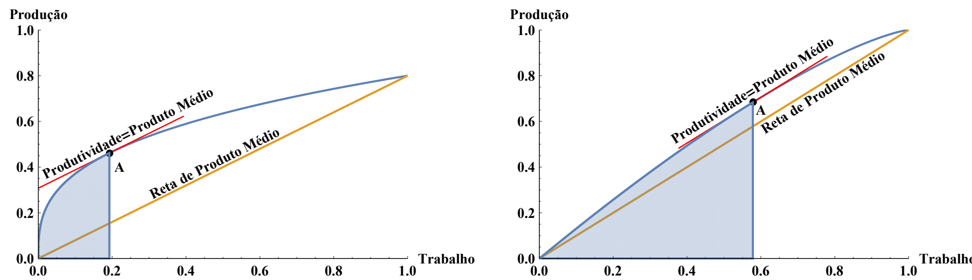


Figura 2.14: Trabalhador menos eficiente (esquerda) mais eficiente (direita).

caso de trabalhadores mais eficientes, dependendo das condições de oferta e demanda pois o trabalhador mais eficiente leva o salário de mercado a ficar bem próximo do produto médio, qualquer que seja o nível de horas médias empregadas na produção. Note que no exemplo o trabalhador menos eficiente tem um produto médio 0.8 enquanto o trabalhador mais eficiente um produto médio 1.

Portanto, em um mercado competitivo, as questões de remuneração estão relacionadas intrinsecamente às características da produtividade do trabalhador e têm pouca relação com as características da firma, apenas com as questões de oferta e demanda, as quais vão determinar o nível de emprego do trabalho.

2.3.2 Alocações Ineficientes

Suponha que a firma esteja utilizando uma alocação que não satisfaça as condições de ótimo descritas pelas equações dadas em (2.1). Nesta seção vamos entender como a firma vai se comportar na margem para se aproximar do lucro ótimo. Na Figura 2.15 temos duas isoquantas e podemos ver que a $TMST_{21}(A)$ é a inclinação da reta vermelha tangente à isoquanta azul. Supondo que o segmento AD tenha a inclinação em módulo dada por w_1/w_2, então $TMST_{21}(A) > w_1/w_2$ e, portanto, a alocação A não maximiza lucro. Para entender o que a firma fará neste caso, note que escrevendo A=$(x_1^{\text{A}}, x_2^{\text{A}})$ e B=$(x_1^{\text{B}}, x_2^{\text{B}})$ então por definição

$$TMST_{21}(A) > \frac{w_1}{w_2} = \frac{x_2^{\text{A}} - x_2^{\text{B}}}{x_1^{\text{B}} - x_1^{\text{A}}}$$

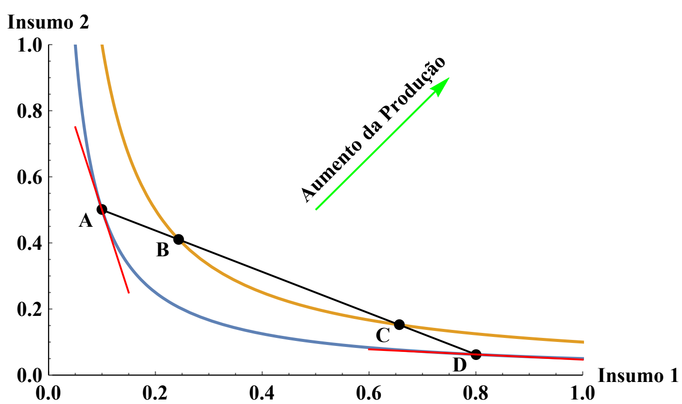


Figura 2.15: Alocações Ineficientes B e C

Logo a função de lucro fica

$$\begin{aligned} luc(B) - luc(A) &= p(f(B) - f(A)) - w_1(x_1^{\text{B}} - x_1^{\text{A}}) - w_2(x_2^{\text{B}} - x_2^{\text{A}}) \\ &= p(f(B) - f(A)) > 0 \end{aligned}$$

ou seja, a firma vai trocar a alocação A por B. Isso significa que a firma trocará o insumo 2 pelo insumo 1. Mais precisamente, se a firma no curto prazo só puder realizar as mudanças na margem em seus estoques, então ela comprará 1 unidade marginal do insumo 1 e venderá w_1/w_2 unidades marginais do insumo 2. Como $TMST_{21}(A)$ é o máximo que se pode reduzir do insumo 2 mantendo a produção e $w_1/w_2 < TMST_{21}(A)$ na margem, então a produção necessariamente vai aumentar.

No caso inverso temos as alocações C e D. Graficamente $TMST_{21}(D) < w_1/w_2$ e, portanto, a alocação D não maximiza lucro. Para entender o que a firma fará neste caso, note que escrevendo D$=(x_1^{\text{D}}, x_2^{\text{D}})$ e C$=(x_1^{\text{C}}, x_2^{\text{C}})$ então por definição, nesse exemplo,

$$TMST_{21}(D) > \frac{w_1}{w_2} = \frac{x_2^{\text{C}} - x_2^{\text{D}}}{x_1^{\text{D}} - x_1^{\text{C}}}$$

Logo a função de lucro fica

$$\begin{aligned} luc(C) - luc(D) &= p(f(C) - f(D)) - w_1(x_1^{\text{C}} - x_1^{\text{D}}) - w_2(x_2^{\text{C}} - x_2^{\text{D}}) \\ &= p(f(C) - f(D)) > 0 \end{aligned}$$

Isso significa que a firma trocará o insumo 1 pelo insumo 2. Mais precisamente, se a firma só puder realizar as mudanças na margem no curto prazo, então ela venderá 1 unidade marginal do insumo 1 e comprará w_1/w_2 unidades marginais do insumo 2. Como $TMST_{21}(A)$ é o mínimo que se deve acrescentar do insumo 2 mantendo a produção e $w_1/w_2 > TMST_{21}(A)$ então a produção necessariamente vai aumentar.

2.4 Minimização de Custos

Nas seções anteriores, analisamos como uma firma vai escolher suas alocações de insumos com a finalidade de maximizar lucro. Usando a função de produção, a firma pode maximizar lucro apenas realocando seus insumos. Nesta seção, vamos mostrar que a firma pode maximizar lucro através de realocações de sua produção. O resultado do lucro será o mesmo, porém, os resultados mostram que, dada a quantidade ofertada de equilíbrio de mercado, as firmas precisam apenas de se preocupar com seus custos. Portanto, iremos estudar como funciona as minimização de custo quando a firma toma como dada a quantidade competitiva de mercado que ela produzirá.

2.4.1 Retas de Isocusto

Antes de entender como a firma vai minimizar custos, primeiramente vamos entender como a firma organiza as alocações de insumo que levam ao mesmo custo. O conjunto de alocações que levam ao mesmo custo é chamado de conjunto de isocusto I é definido por

$$I(c) = \{(x_1, \cdots, x_n) : w_1x_1 + \cdots + w_nx_n = c\}$$

Para o caso de dois insumos essas alocações para cada c estão na reta

$$I(c) = \{(x_1, x_2) : w_1x_1 + w_2x_2 = c\}$$

Observe que a inclinação dessas retas é a mesma e dada por w_1/w_2 em módulo. A Figura 2.16 mostra como essas retas se deslocam com o aumento do custo. Considere $w_1 = 3$ e $w_2 = 2$. As curvas de isocusto serão dadas por $3x_1 + 2x_2 = const.$

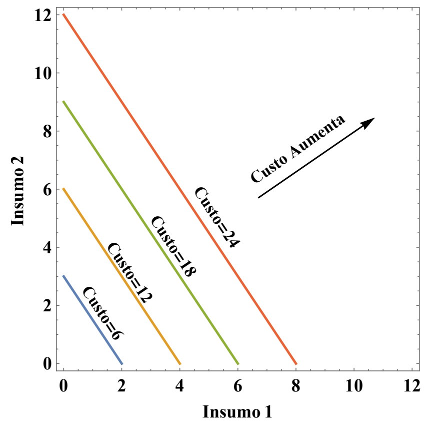


Figura 2.16: Retas de isocusto iguais a 6,12,18,24.

2.4.2 Curto e Longo Prazo

Supondo que a firma toma como dada a quantidade produzida y, então no longo prazo, ou seja, quando a firma consegue realocar todos os seus insumos, a firma vai escolher a alocação de insumos que minimiza o custo com a restrição de que a produção não se reduza, ou seja, ela continuará produzindo y. Mais precisamente, a firma resolve o seguinte problema

$$\hat{c}(w, y) = \min\{w_1x_1 + \cdots + w_nx_n : f(x_1, \cdots x_n) \geq y\}$$

A função $\hat{c}(w, y)$ é conhecida como função de custo contingente à produção, ou somente função de custo contingente. O termo contingente refere-se ao fato de que a firma estabelece um prospecto de todos os custos que ela poderia atingir para todos os possíveis cenários de produção que ela pode enfrentar no mercado. Assim, quando a firma observar alocação de produção correspondente ao equilíbrio de mercado, ela vai saber qual o custo terá de incorrer. A função de demanda contingente por insumos será dada por

$$\hat{x}(w, y) = \text{argmin}\{w_1x_1 + \cdots + w_nx_n : f(x_1, \cdots x_n) \geq y\}.$$

em que argmin representa ponto de mínimo.

No curto prazo, a firma deve considerar algum dos insumos fixo e, então, as funções de custo e demanda por insumos serão definidas da mesma maneira, apenas fixando um dos insumos. Suponha que o insumo capital físico, por exemplo, esteja fixo no curto prazo. Então, a firma somente se preocupará em realocar a matéria prima e o trabalho para aumentar lucro. Mais precisamente, se o Insumo k está fixo em $\bar{x}_k$, então as funções de custo e demanda por insumos ficam

$$\hat{c}(w,y,\bar{x}_k) = \min\{w_1x_1 + \cdots + w_1\bar{x}_k + \cdots + w_nx_n : f(x_1,\cdots,\bar{x}_k,\cdots x_n) \geq y\}$$

e

$$\hat{x}(w,y,\bar{x}_k) = \text{argmin}\{w_1x_1 + \cdots + w_1\bar{x}_k + \cdots + w_nx_n : f(x_1,\cdots,\bar{x}_k,\cdots x_n) \geq y\}.$$

Observe que no longo prazo temos $w\hat{x}(w,y) = \hat{c}(w,y)$ e $f(\hat{x}(w,y)) = y$.

2.4.3 Condições de Otimalidade

O problema de minimização de custo pode ser resolvido utilizando-se o método de Lagrange. Voltando ao problema da firma, o Lagrangeano correspondente fica[3]

$$\ell(x) = w_1x_1 + \cdots + w_nx_n + \lambda(y - f(x_1,\cdots,x_n)).$$

Derivando e igualando a zero temos que na alocação ótima $\bar{x}$

$$w_k = \lambda\partial_k f(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n) \text{ para todo } k = 1,\cdots n$$

Escolhendo duas coordenadas arbitrárias, dizemos, k e l e dividindo as duas equações acima, chegamos à mesma relação fundamental na maximização de lucro.

$$\frac{w_k}{w_l} = \frac{\partial_k f(\bar{x})}{\partial_l f(\bar{x})} = TMST_{lk}(\bar{x})$$

Exemplo. Considere a função de produção $f(x_1,x_2) = x_1x_2$ e o nível de produção igual a 6 tomado como dado no mercado. O gráfico da Figura 2.17 representa as retas de isocusto e a região hachurada como o conjunto de restrição tecnológica no nível de produção eficiente igual a 6.

Note que a curva de menor nível que intercepta a região é a reta amarela. A reta azul, por exemplo, contém alocações que sempre produzem uma quantidade inferior. Observe que no ótimo $A = (2,3)$ a reta de isocusto (na cor bege) e a isoquanta são tangentes.

[3] Como no apêndice tratamos apenas do caso de maximização, então para aplicar o teorema de lagrange seria melhor maximizar o lagrangeagno escrito da seguinte maneira

$$\ell(x) = -wx + \lambda(f(x_1,\cdots,x_n) - y).$$

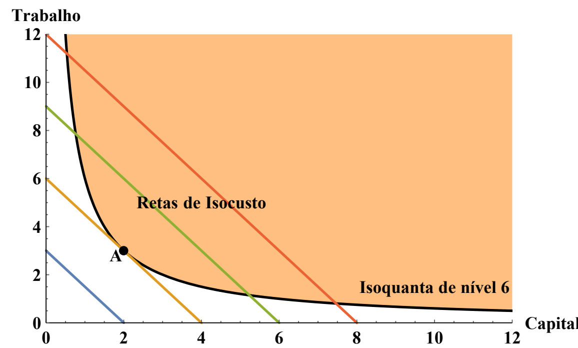


Figura 2.17: Condições para minimização de custos.

2.4.4 Alocações Ineficientes

Como mostrado na seção de maximização de lucro, a firma no curto prazo pode alocar fatores de maneira sub-ótima. Para entender como a firma vai mudar suas alocações, suponha que a firma esteja utilizando uma alocação que não satisfaça as condições de ótimo. Na Figura 2.18 temos uma isoquanta e uma isocusto e podemos ver que a $TMST_{21}(A)$ é a inclinação da reta vermelha tangente à isoquanta. Como o segmento AD tem inclinação em módulo dada por w_1/w_2, então $TMST_{21}(A) > w_1/w_2$ e, portanto, a alocação A não minimiza custo.

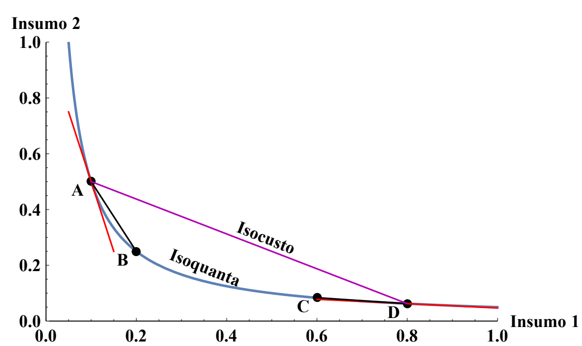


Figura 2.18: Mudanças nas alocações sub-ótimas

Para entender o que a firma fará neste caso, escrevendo A= (x_1^A, x_2^A) e

B$= (x_1^{\text{B}}, x_2^{\text{B}})$ então

$$\frac{x_2^{\text{A}} - x_2^{\text{B}}}{x_1^{\text{B}} - x_1^{\text{A}}} = \text{ inclinação do segmento AB} > \frac{w_1}{w_2}$$

Logo a função de lucro fica

$$\begin{aligned} L(B) - L(A) &= p(f(B) - f(A)) - w_1(x_1^{\text{B}} - x_1^{\text{A}}) - w_2(x_2^{\text{B}} - x_2^{\text{A}}) \\ &= w_2(x_1^{\text{B}} - x_1^{\text{A}}) \left(\frac{x_2^{\text{A}} - x_2^{\text{B}}}{x_1^{\text{B}} - x_1^{\text{A}}} - \frac{w_1}{w_2} \right) > 0 \end{aligned}$$

ou seja, a firma vai trocar a alocação A por B. Isso significa que a firma trocará o Insumo 2 pelo Insumo 1. Mais precisamente, se a firma no curto prazo só puder realizar mudanças em seus estoques na margem, então ela comprará 1 unidade marginal do Insumo 1 e venderá $TMST_{21}(A)$ unidades do Insumo 2. Como $TMST_{21}(A)$ é taxa marginal exata que mantém a produção então a receita se manterá e os custos se reduzirão.

No caso inverso temos as alocações C e D. Graficamente $TMST_{21}(D) < w_1/w_2$ e, portanto, a alocação D não maximiza lucro. Para entender o que a firma fará neste caso, escrevendo C$= (x_1^{\text{C}}, x_2^{\text{C}})$ e D$= (x_1^{\text{D}}, x_2^{\text{D}})$ então

$$\frac{x_2^{\text{C}} - x_2^{\text{D}}}{x_1^{\text{D}} - x_1^{\text{C}}} = \text{ inclinação do segmento CD} < \frac{w_1}{w_2}$$

Logo a função de lucro fica

$$\begin{aligned} L(C) - L(D) &= p(f(C) - f(D)) - w_1(x_1^{\text{C}} - x_1^{\text{D}}) - w_2(x_2^{\text{C}} - x_2^{\text{D}}) \\ &= w_2(x_1^{\text{C}} - x_1^{\text{D}}) \left(\frac{x_2^{\text{D}} - x_2^{\text{C}}}{x_1^{\text{C}} - x_1^{\text{D}}} - \frac{w_1}{w_2} \right) > 0 \end{aligned}$$

ou seja, a firma vai trocar a alocação D por C. Isso significa que a firma trocará o Insumo 2 pelo Insumo 1. Mais precisamente, se a firma no curto prazo só puder realizar mudanças em seus estoques na margem, então ela comprará 1 unidade marginal do Insumo 1 e venderá $TMST_{21}(C)$ unidades do Insumo 2. Como $TMST_{21}(C)$ é taxa marginal exata que mantém a produção então a receita se manterá e os custos se reduzirão.

Em geral temos que $TMST_{21}(x)$ é medido em unidades do Insumo 2 por unidades do Insumo 1. Essa gradeza representa o poder que o Insumo 1 tem de maximizar lucro ou reduzir custos, calculado em termos do Insumo 2. Ou seja, reflete grosseiramente um certo benefício que Insumo 1 tem para firma maximizar lucro calculado em unidades do Insumo 2. A grandeza w_1/w_2 precisamente representa o preço de mercado do Insumo 1 calculado em unidades do Insumo 2. A razão w_1/w_2 é também conhecida como preço relativo do bem 1. Em suma, as escolhas da firma com respeito ao Insumo 1 estão determinadas comparando o benefício do Insumo 1 com seu preço de mercado, tudo medido em unidades do Insumo 2.

2.4.5 Retornos de Escala e a Função de Custo

Nesta seção, vamos mostrar como as relações de retornos de escala da tecnologia pode ser representada pela função de custo. A intuição vem do fato de que, por exemplo, quando uma tecnologia possui retornos decrescentes de escala, se a firma decide produzir duas vezes mais ela só consegue fazê-lo com um custo maior que o dobro do custo anterior. Para as outras tecnologias, o raciocínio é análogo.

Retornos Decrescentes de Escala

Vamos mostrar o resultado enunciado acima mais formalmente. Suponha que a tecnologia apresente retornos decrescentes de escala, ou seja, $f(tx) < tf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n_+$ e todo $t > 1$. Então $\hat{c}(w, ty) \geq t\hat{c}(w, y)$ para todo $y \in \mathbb{R}_+$. Para ver isso, considere $x' = \hat{x}(w, ty)/t$ em que $\hat{x}$ é a demanda contingente por insumos resultante da minimização de custo. Então $f(tx') < tf(x')$, ou seja, $f(x') \geq f(tx')/t$. Portanto, $f(\hat{x}(w, ty)/t) \geq f(\hat{x}(w, ty))/t = y$, ou seja, a alocação x' é suficiente para produzir y. Logo $\hat{c}(w, y) \leq wx' = \hat{c}(w, ty)/t$. Portanto, se a tecnologia apresenta retornos decrescentes de escala, então a função de custo apresenta retornos crescentes de escala. Esse raciocínio vale de forma análoga para o caso de retornos constantes de escala.

Retornos Crescentes de Escala

Neste caso, se a firma decide produzir duas vezes mais ela pode fazê-lo com um custo menor que o dobro do custo anterior. Mais formalmente, considere $x' = \hat{x}(w, y)$. Então $f(tx') > tf(x') = ty$ pois f tem retornos crescentes de escala. Logo $\hat{c}(w, ty) \leq twx' = t\hat{c}(w, y)$.

2.5 Dualidade Lucro e Custo

O contingenciamento de custos permite com que a firma consiga determinar $\hat{c}(w,y)$. Com isso, a firma também pode maximizar lucro variando sua produção. Quando o lucro é calculado através dessas duas operações, dizemos que temos uma função de lucro em dois estágios. Dizemos que o problema de otimização é dual quando pode ser resolvido de duas maneiras, ou seja, através de uma maximização ou minimização. É o que acontece no caso da firma. Mais precisamente, o problema da firma fica

$$L(w,p) = \max\{pf(x) - wx : x \in \mathbb{R}^n_+\} \text{ e } L_c(w,p) = \max\{py - \hat{c}(w,y) : y \in \mathbb{R}_+\}.$$

em que L é o lucro em um estágio e L_c o lucro em dois estágios, ou seja, calculando-se primeiramente o contingenciamento de custos. As demandas contingentes por insumo e produto respectivamente serão dadas por

$$\hat{x}(w,p) = \max\{pf(x) - wx : x \in \mathbb{R}^n_+\}$$

$$\hat{y}_c(w,p) = \text{argmax}\{py - \hat{c}(w,y) : y \in \mathbb{R}_+\}$$

e o custo mínimo contingente dado por

$$\hat{c}(w,y) = \min\{wx : f(x) \geq y\}$$

e a demanda contingente

$$\hat{x}_c(w,y_c) = \text{argmin}\{wx : f(x) \geq y_c\}.$$

Vamos agora entender como os conceitos de maximização de lucro e minimização de custos se correlacionam. Para entender como uma firma chega na mesma alocação ótima maximizando lucro em um ou dois estágios, vamos mostrar que a alocação ótima de insumos da minimização de custos contingente à alocação ótima de produto é exatamente a alocação ótima da função de lucro em um estágio.

Mais rigorosamente, considere $\bar{y}_c = \hat{y}_c(w,p)$ a alocação de produção ótima que maximiza a função de lucro em dois estágios $L_c(w,p)$. Considere também $\bar{x}_c = \hat{x}_c(w,\bar{y}_c)$ a alocação de insumos que minimiza custos no nível de produção $\bar{y}_c$ e $\bar{x} = \hat{x}(w,p)$ a alocação de insumos que maximiza o lucro em um estágio. Vamos mostrar que o lucro ótimo da alocação $\bar{x}_c$ é $L(w,p)$, ou seja, $pf(\bar{x}_c) - w\bar{x}_c = L(w,p)$. Primeiramente, observe que as condições de eficiência na minimização de custos implicam que $\hat{c}(w, y) = w\bar{x}_c$ e $f(\bar{x}_c) \geq \bar{y}_c$. Além disso, pela definição de máximo, $L_c(w, p) = p\bar{y}_c - \hat{c}(w, \bar{y}_c)$. Em resumo, precisamos mostrar que $L(w, p) = L_c(w, p)$, o que pode ser feito mostrando que $L(w, p) \leq L_c(w, p)$ e $L(w, p) \geq L_c(w, p)$ simultaneamente.

Vamos mostrar primeiro que $L(w, p) \geq L_c(w, p)$. Com efeito, como $f(\bar{x}_c) \geq \bar{y}_c$ então

$$L(w, p) \geq pf(\bar{x}_c) - w\bar{x}_c \geq p\bar{y}_c - \hat{c}(w, \bar{y}_c) = L_c(w, p)$$

Por outro lado, para mostrar que $L(w, p) \leq L_c(w, p)$, considere $\bar{y} = f(\bar{x})$ em que $\bar{x}$ é a alocação ótima da função de lucro em um estágio, ou seja, $pf(\bar{x}) - w\bar{x} = L(w, p)$. Temos que $\hat{c}(w, \bar{y}) \leq w\bar{x}$ pois como $\bar{x}$ produz $\bar{y}$ então seu custo $w\bar{x}$ tem de ser maior ou igual ao custo mínimo para se produzir $\bar{y}$. Logo

$$L_c(w, p) \geq p\bar{y} - \hat{c}(w, \bar{y}) \geq pf(\bar{x}) - w\bar{x} = L(w, p)$$

De maneira análoga, podemos mostrar também que $pf(\bar{x}) - w\bar{x} = L_c(w, p)$.

Exemplo Numérico

Considere novamente o problema com a função de produção $f(k, l) = k^{1/4}l^{1/2}$ em unidades de milhares e para o preço do produto $p = 8$ unidades de milhares por unidade de produto e os preços dos insumos dados por $w = 4$ e $r = 1$ unidades de milhares por unidade de insumo referente aos custos em cima da respectiva isoquanta. A Tabela 2.5 fornece alguns valores dos insumos e produtos.

Note que na parte superior da tabela temos uma matriz cujas colunas representam os valores de custos condicionados ao nível de produto fixado pela respectiva linha. A diagonal contém os valores de custo mínimo para cada nível fixado de produto. A matriz intermediária contém os valores da receita em cada coluna referente a cada nível de produto vendido na linha correspondente. Finalmente, a terceira matriz refere-se ao lucro como receita menos o custo condicionado a cada nível de produto.

Observe que o máximo do lucro ocorre exatamente quando a quantidade produzida é igual a duas mil unidades, a quantidade de capital e trabalho 4 e 2 mil unidades respectivamente. O custo ótimo seria dado por 12 milhões de unidades monetárias e o lucro 4 milhões de unidades monetárias. O faturamento neste caso seria de 16 milhões, o que implicaria em um lucro de 25 por cento do faturamento.

Produto	Insumos				
	$k = 3.221$ $l = 1.61$	$k = 3.476$ $l = 1.738$	$k = 3.736$ $l = 1.868$	$k = 4$ $l = 2$	$k = 4.027$ $l = 2.013$
	Valores do Custo Condicional $c(k, l, y)$				
$y = 1.7$	9.662	9.717	9.865	10.088	10.114
$y = 1.8$	10.489	10.427	10.48	10.624	10.643
$y = 1.9$	11.467	11.266	11.207	11.258	11.268
$y = 2$	12.611	12.249	12.057	12	12.001
$y = 2.01$	12.736	12.356	12.15	12.081	12.08
Produto	Valores da Receita py				
$y = 1.7$	13.6	13.6	13.6	13.6	13.6
$y = 1.8$	14.4	14.4	14.4	14.4	14.4
$y = 1.9$	15.2	15.2	15.2	15.2	15.2
$y = 2$	16	16	16	16	16
$y = 2.01$	16.08	16.08	16.08	16.08	16.08
Produto	Valores de Lucro $L(y)$				
$y = 1.7$	3.938	3.883	3.735	3.512	3.486
$y = 1.8$	3.911	3.973	3.92	3.776	3.757
$y = 1.9$	3.733	3.934	3.993	3.942	3.932
$y = 2$	3.389	3.751	3.943	4	3.999
$y = 2.01$	3.344	3.724	3.93	3.999	3.999

Tabela 2.5: Tabela de Lucro em dois Estágios

O mais importante na primeira primeira parte da tabela seria o custo marginal na alocação ótima $(k^*, l^*, y^*) = (4, 2, 2)$. Temos

$$cmg(y^*) = \frac{c(4.027, 2.013, 2.01) - c(4, 2, 2)}{2.01 - 2} = \frac{12.08 - 12}{0.01} = 8.00$$

ou seja, a firma irá cobrar o preço do produto exatamente igual ao seu custo marginal. Mesmo quando exibe lucros positivos.

2.5.1 Curvas de Custo Médio, Custo Marginal e Oferta

Definimos o custo médio como o custo total dividido pelo total produzido. Mais precisamente,

$$\hat{c}_{med}(w,y) = \hat{c}(w,y)/y \text{ para todo } y \in \mathbb{R}_+.$$

o custo marginal é dado pela taxa marginal de aumento do custo quando se aumenta uma unidade marginal do produto. Em notação matemática $\hat{c}_{mg}(w,y) = \partial_2 \hat{c}(w,y)$. Quando a tecnologia apresenta retornos constantes de escala então o custo médio é constante. De fato, $\hat{c}(w,y)/y = y\hat{c}(w,1)/y = \hat{c}(w,1)$.

No curto prazo, alguns insumos podem estar fixos e representam um custo fixo na produção, ou seja, não variam com o total produzido. Neste caso, a função de custo se divide em dois termos: o custo fixo e o custo variável. Definimos então o custo variável médio como sendo $c_{vmed}(w,y) = cvar(w,y)/y$ para qualquer nível de produção y.

Relação entre o curto e longo prazo. Suponha para simplificar que a tecnologia empregue dois insumos. Se $\bar{x}_2 = \hat{x}_2(w,y)$ é a escolha ótima do Insumo 2 no longo prazo e $\bar{x}_{1cp} = \hat{x}_{1cp}(w,\bar{x}_2,y)$ é a escolha ótima do Insumo 1 no curto prazo, então claramente $\hat{c}(w,y) = \hat{c}_{cp}(w,y,\bar{x}_2)$ em que $\hat{c}_{cp}$ é a função de custo de curto prazo. Com efeito,

$$\hat{c}(w,y) \leq w_1\bar{x}_{1cp} + w_2\bar{x}_2 = \hat{c}_{cp}(w,\bar{x}_2,y)$$

pois $f(\bar{x}_{1cp},\bar{x}_2) \geq y$. Além disso, se $\bar{x}_1 = \hat{x}_1(w,y)$ representa a escolha ótima do Insumo 1 no longo prazo então $f(\bar{x}_1,\bar{x}_2) \geq y$, ou seja $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ é factível e, portanto,

$$\hat{c}_{cp}(w,\bar{x}_2,y) \leq w_1\bar{x}_1 + w_2\bar{x}_2 = \hat{c}(w,y)$$

A Figura 2.19 mostra as curvas de custo médio de curto prazo e, tangenciando por baixo, a curva de custo médio de longo prazo. Graficamente podemos ver nos pontos A, B e C a propriedade mostrada acima. O ponto E é definido como a escala mínima de eficiência.

No ponto de mínimo do custo médio, temos que o custo médio é igual ao custo marginal. A intuição para este resultado vem do fato de que no intervalo em que o custo marginal é menor que o custo médio, ao se acrescentar uma unidade marginal na produção, o custo médio se reduzirá. Logo o custo médio tem de ser decrescente nesse intervalo. Utilizando o raciocínio

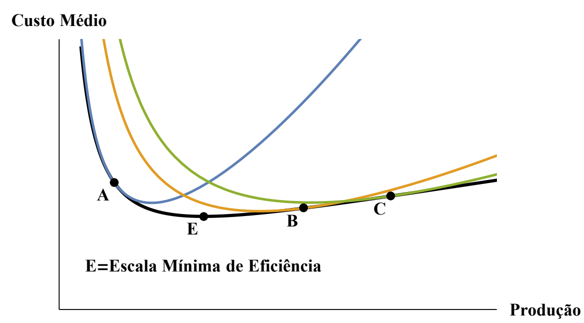


Figura 2.19: Curvas de custo médio no curto e longo prazo.

inverso, vemos que o custo médio tem de ser crescente no outro intervalo. Matematicamente

$$\partial_2 \hat{c}_{med}(w, y) = \frac{y\hat{c}_{mg}(y) - c(y)}{y^2} = \frac{\hat{c}_{mg}(y) - \hat{c}_{med}(y)}{y} = 0$$

e obtemos o resultado.

Curva de oferta da firma

Quando a firma maximiza a função de lucro de dois estágios ela chega na seguinte relação em sua escolha ótima $\bar{y}$

$$L'(y) = p - \partial_2 \hat{c}(w, y) = 0 \text{ ou seja } p = \hat{c}_{mg}(w, y).$$

A relação $p = \hat{c}_{mg}(w, y)$ define a curva de oferta da firma em ordem inversa de causa e efeito. Essa curva define a quantidade máxima que a firma tem potencial para produzir para cada nível de preço. A intuição vem do fato de que se $p > \hat{c}_{mg}(w, y)$ então a firma consegue aumentar lucro aumentando uma unidade marginal na produção. Quando $p < \hat{c}_{mg}(w, y)$ a firma reduz a produção em um raciocínio análogo. O gráfico 2.20 mostra como as curvas de custo médio e de custo marginal se posicionam.

O gráfico da Figura 2.21 mostra que, dado um preço de mercado, o lucro será exatamente a área do retângulo indicado com as retas pontilhadas. De fato,

$$L(y) = py - \hat{c}(w, y) = y(p - \hat{c}(w, y)/y) = y(p - \hat{c}_{med}(w, y))$$

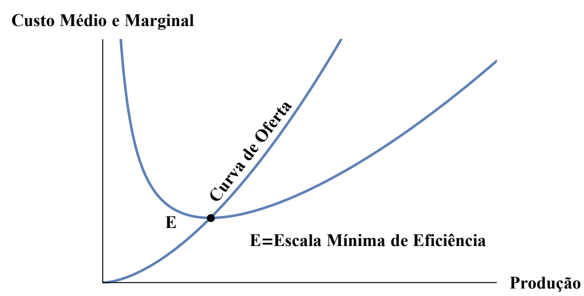


Figura 2.20: Curvas de custo médio e custo marginal.

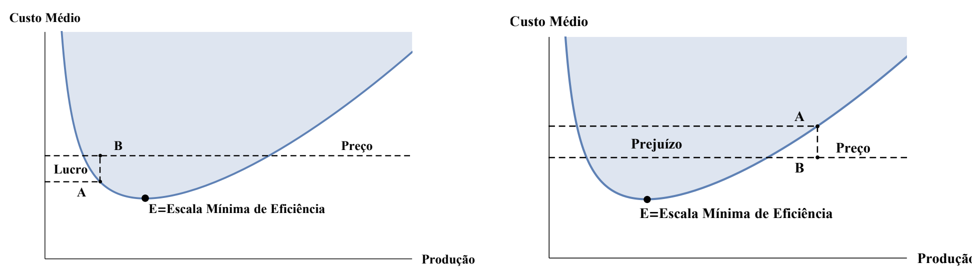


Figura 2.21: Lucro e prejuízo na curva de custo médio.

que é positivo ou negativo conforme o preço for maior ou menor que o custo médio respectivamente. Isto mostra que a região hachurada delimita onde a firma terá lucros positivos. A escala mínima de eficiência tem um papel fundamental para situações em que o preço de mercado fica próximo do valor mínimo da curva de custo médio, ou seja, do custo médio para se produzir a escala mínima de eficiência, como descrito no ponto E da Figura 2.22. Neste caso, a firma terá de possuir uma planta de produção com o tamanho suficiente para operar entre A e B como na região hachurada da Figura 2.22, caso contrário, ela terá que sair do mercado por auferir prejuízos econômicos persistentes no longo prazo. Em geral, as firmas que têm potencial de operar na escala mínima de eficiência sobrevivem às variações de lucro naturais de um mercado.

Note que firma não irá operar no mercado quando a curva de custo marginal estiver abaixo da curva de custo variável médio. Isto se dá pelo fato de que $\pi(y) = y(p - c_{vmed} - c_{fmed})$ e, portanto, o lucro será inferior a $-c_{fmed}$

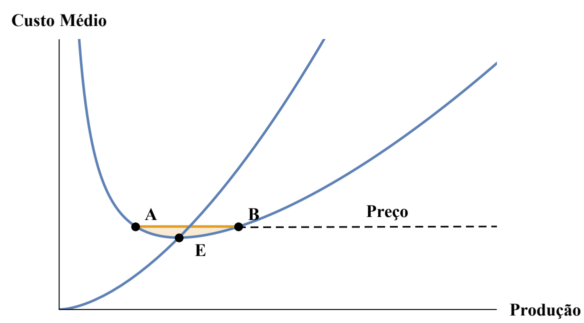


Figura 2.22: Lucro na curva de custo médio.

quando $p - c_{vmed} \leq 0$, pois a firma não conseguirá diluir seu custo fixo para nenhum nível de produção. Se $p - c_{vmed} > 0$ então a firma pode obter lucros positivos no longo prazo aumentando sua produção até que $c_{fmed} \leq p - c_{vmed}$. Logo, no longo prazo, com a livre entrada e saída de firmas, a curva de oferta tem de ficar acima da curva de custo variável médio.

2.5.2 Elasticidade da Oferta

Dada uma função qualquer, definimos a elasticidade média como sendo a variação percentual dessa função como resultado de uma variação percentual de sua variável. Matematicamente, a elasticidade média é dada por

$$\epsilon_{mf}(x) = \frac{(f(x+s) - f(x))/f(x)}{s/x} = \frac{x}{f(x)} \frac{f(x+s) - f(x)}{s}.$$

Tomando o limite quando $s \to 0$ temos então a elasticidade infinitesimal de f como

$$\epsilon_f(x) = xf'(x)/f(x) \text{ para todo } x \in X.$$

Elasticidade da inversa. Suponha que g seja a inversa de f no sentido de que $g(f(x)) = x$ para todo x. Então

$$g'(f(x))f'(x) = 1 \text{ para todo } x \in X$$

logo,

$$\frac{xf'(x)}{f(x)} = \frac{x}{f(x)g'(f(x))} = \frac{g(f(x))}{f(x)g'(f(x))}.$$

Logo, $\epsilon_f(x) = 1/\epsilon_g(f(x))$.

Considere a equação que define a oferta $p = cmg(y)$. Vamos escrever $\hat{p}(y) = cmg(y)$ como a função de oferta em ordem inversa de causa e efeito e $\hat{y}(p)$ como a função de oferta na ordem direta de causa e efeito. Então a elasticidade da oferta é dada simplesmente por $\epsilon_{\hat{y}}$. Porém, de acordo com o resultado acima podemos obter a elasticidade de $\hat{p}$ como

$$\epsilon_{\hat{p}}(y) = \frac{1}{\epsilon_{\hat{y}}(\hat{p}(y))} \tag{2.2}$$

Intuitivamente, para mercados em que as empresas são ineficientes, a elasticidade da oferta é muito alta. Isto se dá pelo fato de que uma pequena redução no preço recebido pela firma leva a uma grande redução da oferta. Com efeito, as empresas operam bem próximas da insolvência devido ao alto nível de restrições tecnológicas. Em geral, em países com deficiência de infra estrutura de qualidade e políticas fiscais que levam à instabilidade, a elasticidade da oferta é bastante alta na maioria dos mercados.

2.6 Plantas de Produção com Vários Produtos

Nesta seção, vamos descrever um modelo de planta de produção em que as firmas podem produzir vários produtos e até mesmo utilizar um produto como intermediário de outro produto final. Todas as definições para as plantas de produção com um único produto podem ser reescritas de maneira análoga.

Para fixar a notação, vamos considerar qualquer alocação de insumo ou produto em formato de matriz coluna e qualquer preço como uma matriz linha, de forma com que o produto de um preço por uma alocação seja de fato o produto matricial correspondente. Convencionamos também que duas matrizes coluna $z \in \mathbb{R}^p$ e $z' \in \mathbb{R}^p$ satisfazem $z \geq z'$ quando cada coordenada satisfaz a desigualdade, ou seja, $z_l \geq z'_l$ para todo $l \leq p$. Finalmente, vamos convencionar que $(z_1, \cdots, z_p) \in \mathbb{R}^p$ é a matriz coluna $p \times 1$ e $[z_1, \cdots, z_p] \in \mathbb{R}^p$ é a matriz linha $1 \times p$.

2.6.1 Definições

Vamos começar com a definição de função de transformação. Suponha que uma planta de produção utilize n insumos e produza m produtos. A função de transformação estabelece todas as restrições tecnológicas que a firma tem para alocar insumos e produtos. Mais precisamente, uma função de transformação é definida como uma função contínua $F : \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}^p$ com elemento típico denotado por $z = F(x, y)$ em que y é uma matriz coluna $m \times 1$ de quantidades produzidas, x é uma matriz coluna $n \times 1$ de quantidades de insumos empregados e p é o número de restrições que define a operação de transformação. Uma planta de produção com um único produto e uma função de produção f configura-se como um caso particular em que $F(x, y) = f(x) - y$.

Podemos definir analogamente o conjunto de possibilidades de produção CP como todas as combinações de insumo e produto que podem ser implementadas na planta de produção de uma firma, ou seja, em termos mais rigorosos

$$CP = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+ : F(x, y) \geq 0\}.$$

As alocações de insumo produto eficientes, ou seja, aquelas em que não há desperdício de recursos e que efetivamente podem ser escolhidas pelas firmas, formam o conjunto que chamamos de fronteira de possibilidades de produção FP. Mais precisamente

$$FP = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+ : F(x, y) = 0\}.$$

A função de lucro em um estágio será dada por

$$L(x, y, p, w) = Rec(p, y) - Cust(w, x) = py - wx$$

em que $p \in \mathbb{R}^m_+$ é a matriz $1 \times m$ de preços dos produtos e $w \in \mathbb{R}^n_+$ é a matriz $1 \times n$ de preços dos insumos. A função de alocação ótima de insumos e produtos é dada por

$$(\hat{x}(p, w), \hat{y}(p, w)) = \text{argmax}\{L(x, y, p, w) \text{ tal que } F(x, y) \geq 0\}. \qquad (2.3)$$

A função de custo contingente será dada por

$$\hat{c}(w, y) = \min\{wx : x \in \mathbb{R}^n_+ \text{ é tal que } F(x, y) \geq 0\}.$$

A função de demanda contingente por insumos dada por

$$\hat{x}(w, y) = \text{argmin}\{wx : x \in \mathbb{R}^n_+ \text{ é tal que } F(x, y) \geq 0\}.$$

Finalmente a função de lucro ótimo em dois estágios será dada por

$$\hat{L}(p, w) = \max\{py - \hat{c}(w, y) \text{ tal que } y \in \mathbb{R}^m_+\}.$$

2.6.2 Remuneração Idêntica nos Setores

Considere uma planta de produção em que a firma produz dois bens nos setores A e B utilizando os insumos trabalho T e matéria prima M em proporções fixas com as seguintes razões. Para produzir A são necessárias $r_{\mathrm{T}}^{\mathrm{A}}$ unidades de T e $r_{\mathrm{M}}^{\mathrm{A}}$ unidades de M. Para produzir B são necessárias $r_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}$ unidades de T e $r_{\mathrm{M}}^{\mathrm{B}}$ unidades de M. A firma dispõe de uma restrição de e_{T} de unidades de T e e_{M} unidades de M.

Para definir a função de transformação, note primeiramente que temos dois produtos, ou seja, $m = 2$ e quatro[4] insumos, ou seja, $n = 4$. Denote por

1. $x_{\mathrm{M}}^{\mathrm{A}}$ a quantidade utilizada de matéria prima para se produzir A;
2. $x_{\mathrm{T}}^{\mathrm{A}}$ a quantidade utilizada de trabalho para se produzir A;
3. $x_{\mathrm{M}}^{\mathrm{B}}$ a quantidade utilizada de matéria prima para se produzir B;
4. $x_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}$ a quantidade utilizada de trabalho para se produzir B;
5. y_{A} a quantidade produzida do bem A;
6. y_{B} a quantidade produzida do bem B;
7. $x = (x_{\mathrm{M}}^{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{M}}^{\mathrm{B}}, x_{\mathrm{T}}^{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}) \in \mathbb{R}_+^4$ e $y = (y_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{B}}) \in \mathbb{R}_+^2$.

Denote também a função de produção $F : \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}^4$ com 4 funções coordenadas representando as 4 restrições tecnológicas definidas a seguir. Escreva portanto $F = (F_{\mathrm{A}}, F_{\mathrm{B}}, F_{\mathrm{M}}, F_{\mathrm{T}})$ em que

$$
\begin{array}{ll}
F_{\mathrm{A}}(x,y) = \min\{x_{\mathrm{M}}^{\mathrm{A}}/r_{\mathrm{M}}^{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{T}}^{\mathrm{A}}/r_{\mathrm{T}}^{\mathrm{A}}\} - y_{\mathrm{A}} & F_{\mathrm{B}}(x,y) = \min\{x_{\mathrm{M}}^{\mathrm{B}}/r_{\mathrm{M}}^{\mathrm{B}}, x_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}/r_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}\} - y_{\mathrm{B}} \\
F_{\mathrm{M}}(x,y) = e_{\mathrm{M}} - x_{\mathrm{M}}^{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{M}}^{\mathrm{B}} & F_{\mathrm{T}}(x,y) = e_{\mathrm{T}} - x_{\mathrm{T}}^{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}
\end{array}
$$

Suponha agora que os preços unitários de A e B sejam dados por p_{A} e p_{B} unidades monetárias por unidade respectivamente, e que uma unidade de trabalho custe w_{T} e uma unidade de matéria prima w_{M}. Para encontrar a função de lucro ótimo em um estágio, basta aplicar a Definição 2.3. Porém, podemos ver que a função de transformação não é diferenciável e portanto não podemos aplicar a derivada para encontrar o ponto de máximo. Para se

[4]Nesse problema é importante considerar, por objetivos didáticos, um insumo utilizado para produzir A como distinto do mesmo para produzir B.

resolver esse problema, utilizaremos a função de lucro em dois estágios. A função de custo mínimo fica

$$\hat{c}(w,y) = \min\{w_{\text{M}}(x_{\text{M}}^{\text{A}} + x_{\text{M}}^{\text{B}}) + w_{\text{T}}(x_{\text{T}}^{\text{A}} + x_{\text{T}}^{\text{B}}) : F(x,y) \geq 0\}. \tag{2.4}$$

Vamos reescrever a relação $F(x,y) \geq 0$ para esse exemplo. Como não há desperdício no emprego ótimo dos recursos, então

$$\min\{x_{\text{M}}^{\text{A}}/r_{\text{M}}^{\text{A}}, x_{\text{T}}^{\text{A}}/r_{\text{T}}^{\text{A}}\} = y_{\text{A}} \text{ e } \min\{x_{\text{M}}^{\text{B}}/r_{\text{M}}^{\text{B}}, x_{\text{T}}^{\text{B}}/r_{\text{T}}^{\text{B}}\} = y_{\text{B}}$$

ou seja, $F_{\text{A}}(x,y) = 0$ e $F_{\text{B}}(x,y) = 0$ implicam

$$x_{\text{M}}^{\text{A}} = r_{\text{M}}^{\text{A}} y_{\text{A}} \qquad x_{\text{T}}^{\text{A}} = r_{\text{T}}^{\text{A}} y_{\text{A}} \qquad x_{\text{M}}^{\text{B}} = r_{\text{M}}^{\text{B}} y_{\text{B}} \qquad x_{\text{T}}^{\text{B}} = r_{\text{T}}^{\text{B}} y_{\text{B}}. \tag{2.5}$$

Usando essas relações acima, temos que as condições

$$x_{\text{M}}^{\text{A}} + x_{\text{M}}^{\text{B}} \leq e_{\text{M}} \text{ e } x_{\text{T}}^{\text{A}} + x_{\text{T}}^{\text{B}} \leq e_{\text{T}}$$

podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} r_{\text{M}}^{\text{A}} y_{\text{A}} + r_{\text{M}}^{\text{B}} y_{\text{B}} &\leq e_{\text{M}} \\ r_{\text{T}}^{\text{A}} y_{\text{A}} + r_{\text{T}}^{\text{B}} y_{\text{B}} &\leq e_{\text{T}} \end{aligned}$$

Defina a matriz de coeficientes técnicos[5]

$$\text{R} = \begin{bmatrix} r_{\text{M}}^{\text{A}} & r_{\text{M}}^{\text{B}} \\ r_{\text{T}}^{\text{A}} & r_{\text{T}}^{\text{B}} \end{bmatrix}$$

e escreva

$$y = \begin{bmatrix} y_{\text{A}} \\ y_{\text{B}} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad e = \begin{bmatrix} e_{\text{M}} \\ e_{\text{T}} \end{bmatrix}$$

logo, $F_{\text{M}}(x,y) \geq 0$ e $F_{\text{T}}(x,y) \geq 0$ implicam $\text{R}y \leq e$. O conjunto de possibilidades de produção será dado por

$$CP = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^4 \times \mathbb{R}_+^2 : F(x,y) \geq 0\}$$

e usando as relações dadas em (2.5) podemos reescrever esse conjunto em função apenas das variáveis de produto. Ou seja

$$CP = \{(r_{\text{M}}^{\text{A}} y_{\text{A}}, r_{\text{M}}^{\text{B}} y_{\text{B}}, r_{\text{T}}^{\text{A}} y_{\text{A}}, r_{\text{T}}^{\text{B}} y_{\text{B}}, y_{\text{A}}, y_{\text{B}}) : y \in \mathbb{R}_+^2 \text{ e } \text{R}y \leq e\}$$

[5]Também conhecida como matriz de insumo produto.

A função de custo mínimo dada em (2.4) fica

$$\hat{c}(w,y) = \min\{w\mathrm{R}y : x \in \mathbb{R}^4_+ \text{ e } \mathrm{R}y \leq e\}$$

em que $w = [w_{\mathrm{M}}, w_{\mathrm{T}}]$ é a matriz linha de preços dos insumos. Como y está fixo então

$$\hat{c}(w,y) = w\mathrm{R}y$$

Finalmente, a função de lucro em dois estágios fica

$$\hat{L}(p,w) = \operatorname{argmax}\{py - w\mathrm{R}y \text{ tal que } y \in \mathbb{R}^2_+ \text{ e } \mathrm{R}y \leq e\}.$$

Este problema é conhecido como um problema de programação linear.

Vamos resolver um exemplo com

$$\mathrm{R} = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 12 & 2 \end{bmatrix} \qquad e = \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \end{bmatrix} \qquad w = [4,8] \qquad p = [100,150]$$

Neste caso podemos aplicar o Teorema 7.1 no apêndice para resolver.

Considere

$$\begin{aligned} f(y) &= py - w\mathrm{R}y \\ (g_1(y), g_2(y)) &= \mathrm{R}y \\ g_3(y) &= y_{\mathrm{A}} \\ g_4(y) &= y_{\mathrm{B}}. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \partial_j f(\bar{x}) + \sum_{i \leq m} \lambda_i \partial_j g_i(\bar{x}) = 0 & \text{para } j \in \{1,2\} \\ \lambda_i g_i(\bar{x}) = 0 \quad \text{e} \quad g_i(\bar{x}) \geq 0 & \text{para } i \in \{1,2,3,4\}. \end{cases}$$

Temos

$$\begin{cases} -10\lambda_1 - 12\lambda_2 + \lambda_3 - 36 = 0 \\ -5\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_4 + 114 = 0 \\ \lambda_1(300 - 10y_{\mathrm{A}} + 5y_{\mathrm{B}}) = 0 \\ \lambda_2(200 - 12y_{\mathrm{A}} + 2y_{\mathrm{B}}) = 0 \\ \lambda_3 y_{\mathrm{A}} = 0 \\ \lambda_4 y_{\mathrm{B}} = 0 \end{cases}$$

A solução deste sistema fica $y_{\text{A}} = 0$ e $y_{\text{B}} = 60$ fazendo que a firma terceirize o bem A e só produza o bem B. A firma utilizará um total de 120 unidades de trabalho e 300 unidades de matéria prima. Logo não empregará o total de mão de obra disponível.

Para facilitar a resolução do problema, temos que estudar os casos[6] em que $\lambda_i > 0$ e $\lambda_i = 0$ para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Primeiramente, resolvemos as equações em λ_i para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Assim pode ser mais fácil descartar vários casos ao mesmo tempo. As duas primeiras equações do sistema de equações fica

$$\begin{cases} -10\lambda_1 - 12\lambda_2 + \lambda_3 - 36 = 0 \\ -5\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_4 + 114 = 0 \end{cases}$$

o que permite concluir que $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 0$ não pode ser solução do problema pois leva a $\lambda_4 < 0$. cuja solução em λ_1 e λ_2 fica

$$\lambda_1 = \frac{-\lambda_3 + 6\lambda_4 + 720}{20} \text{ e } \lambda_2 = \frac{\lambda_3 - 2\lambda_4 - 264}{8}$$

Notem que essas equações já excluem todos os casos em que $\lambda_3 = 0$ pois λ_2 fica menor que zero.

[6]Observe que λ_i tem que ser sempre não negativo para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

A Tabela abaixo representa os casos e a solução

Tabela de casos

Ramo da Árvore	Condição	Solução
1	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0, \lambda_4 > 0$	$\nexists$
2	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0, \lambda_4 = 0$	$\nexists$
3	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 > 0$	$\nexists$
4	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 0$	$\nexists$
5	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 > 0, \lambda_4 > 0$	$\nexists$
6	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 > 0, \lambda_4 = 0$	$(0, 60)$
7	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 > 0$	$\nexists$
8	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 0$	$\nexists$
9	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0, \lambda_4 > 0$	$\nexists$
10	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0, \lambda_4 = 0$	$\nexists$
11	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 > 0$	$\nexists$
12	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 0$	$\nexists$
13	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 > 0, \lambda_4 > 0$	$\nexists$
14	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 > 0, \lambda_4 = 0$	$\nexists$
15	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 > 0$	$\nexists$
16	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 0$	$\nexists$

Os casos então podem ser sumarizados pela árvore da Figura 2.23 abaixo.

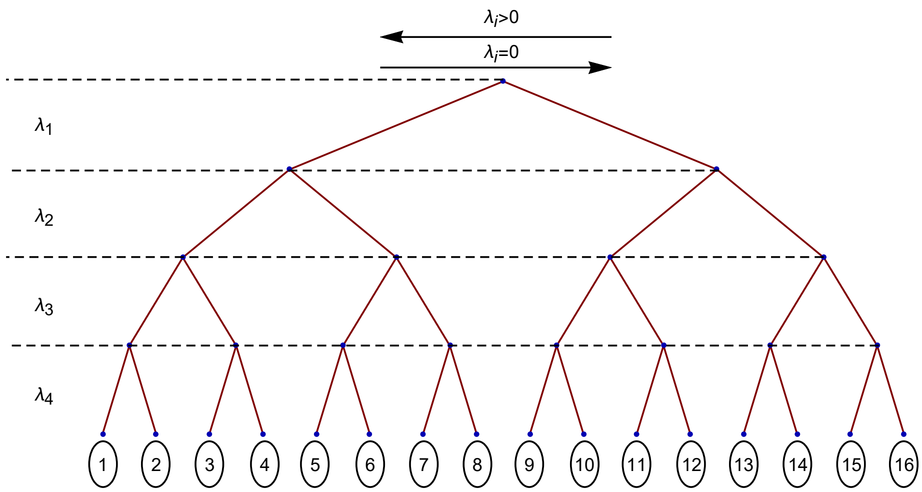


Figura 2.23: Árvore de casos para o problema de 2 setores.

2.6.3 Remuneração Distinta nos Setores

Considere uma planta de produção em que a firma produz dois bens no setores A e B utilizando os insumos trabalho T e matéria prima M em proporções fixas com as seguintes razões. Para produzir A são necessárias $r_{\mathrm{T}}^{\mathrm{A}}$ unidades de T e $r_{\mathrm{M}}^{\mathrm{A}}$ unidades de M. Para produzir B são necessárias $r_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}$ unidades de T e $r_{\mathrm{M}}^{\mathrm{B}}$ unidades de M. A firma dispõe de uma restrição de e_{T} de unidades de T e e_{M} unidades de M.

Para definir a função de transformação, note primeiramente que temos dois produtos, ou seja, $m = 2$ e quatro[7] insumos, ou seja, $n = 4$. Denote por

1. $x_{\mathrm{M}}^{\mathrm{A}}$ a quantidade utilizada de matéria prima para se produzir A;

2. $x_{\mathrm{T}}^{\mathrm{A}}$ a quantidade utilizada de trabalho para se produzir A;

[7]Nesse problema é importante considerar, por objetivos didáticos, um insumo utilizado para produzir A como distinto do mesmo para produzir B.

3. $x_{\mathrm{M}}^{\mathrm{B}}$ a quantidade utilizada de matéria prima para se produzir B;
4. $x_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}$ a quantidade utilizada de trabalho para se produzir B;
5. y_{A} a quantidade produzida do bem A;
6. y_{B} a quantidade produzida do bem B;
7. $x = (x_{\mathrm{M}}^{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{T}}^{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{M}}^{\mathrm{B}}, x_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}) \in \mathbb{R}_+^4$ e $y = (y_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{B}}) \in \mathbb{R}_+^2$.

Denote também a função de produção $F : \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}^4$ com 4 funções coordenadas representando as 4 restrições tecnológicas definidas a seguir. Escreva portanto $F = (F_{\mathrm{A}}, F_{\mathrm{B}}, F_{\mathrm{M}}, F_{\mathrm{T}})$ em que

$$\begin{array}{ll} F_{\mathrm{A}}(x,y) = \min\{x_{\mathrm{M}}^{\mathrm{A}}/r_{\mathrm{M}}^{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{T}}^{\mathrm{A}}/r_{\mathrm{T}}^{\mathrm{A}}\} - y_{\mathrm{A}} & F_{\mathrm{B}}(x,y) = \min\{x_{\mathrm{M}}^{\mathrm{B}}/r_{\mathrm{M}}^{\mathrm{B}}, x_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}/r_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}\} - y_{\mathrm{B}} \\ F_{\mathrm{M}}(x,y) = e_{\mathrm{M}} - x_{\mathrm{M}}^{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{M}}^{\mathrm{B}} & F_{\mathrm{T}}(x,y) = e_{\mathrm{T}} - x_{\mathrm{T}}^{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}} \end{array}$$

Suponha agora que os preços unitários de A e B sejam dados por p_{A} e p_{B} unidades monetárias por unidade respectivamente, e que uma unidade de trabalho empregado nos setores A e B custem $(w_{\mathrm{T}}^{\mathrm{A}}, w_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}})$ e uma unidade de matéria prima empregada nos setores A e B custem $(w_{\mathrm{M}}^{\mathrm{A}}, w_{\mathrm{M}}^{\mathrm{B}})$. Escreva

$$w = [w_{\mathrm{M}}^{\mathrm{A}}, w_{\mathrm{M}}^{\mathrm{B}}, w_{\mathrm{T}}^{\mathrm{A}}, w_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}].$$

A função de custo mínimo fica

$$\hat{c}(w,y) = \min\{w_{\mathrm{M}}^{\mathrm{A}}x_{\mathrm{M}}^{\mathrm{A}} + w_{\mathrm{M}}^{\mathrm{B}}x_{\mathrm{M}}^{\mathrm{B}} + w_{\mathrm{T}}^{\mathrm{A}}x_{\mathrm{T}}^{\mathrm{A}} + w_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}x_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}} : F(x,y) \geq 0\}.$$

ou seja,

$$\hat{c}(w,y) = \min\{wx : F(x,y) \geq 0\}. \tag{2.6}$$

Vamos reescrever a relação $F(x,y) \geq 0$ para esse exemplo. Como não há desperdício no emprego ótimo dos recursos, então

$$\min\{x_{\mathrm{M}}^{\mathrm{A}}/r_{\mathrm{M}}^{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{T}}^{\mathrm{A}}/r_{\mathrm{T}}^{\mathrm{A}}\} = y_{\mathrm{A}} \text{ e } \min\{x_{\mathrm{M}}^{\mathrm{B}}/r_{\mathrm{M}}^{\mathrm{B}}, x_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}/r_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}\} = y_{\mathrm{B}}$$

ou seja, $F_{\mathrm{A}}(x,y) = 0$ e $F_{\mathrm{B}}(x,y) = 0$ implicam

$$x_{\mathrm{M}}^{\mathrm{A}} = r_{\mathrm{M}}^{\mathrm{A}}y_{\mathrm{A}} \qquad x_{\mathrm{T}}^{\mathrm{A}} = r_{\mathrm{T}}^{\mathrm{A}}y_{\mathrm{A}} \qquad x_{\mathrm{M}}^{\mathrm{B}} = r_{\mathrm{M}}^{\mathrm{B}}y_{\mathrm{B}} \qquad x_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}} = r_{\mathrm{T}}^{\mathrm{B}}y_{\mathrm{B}}. \tag{2.7}$$

Defina a matriz de coeficientes técnicos e o vetor de insumos como

$$\mathrm{R} = \begin{bmatrix} r^{\mathrm{A}}_{\mathrm{M}} & 0 \\ 0 & r^{\mathrm{B}}_{\mathrm{M}} \\ r^{\mathrm{A}}_{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & r^{\mathrm{B}}_{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad x = \begin{bmatrix} x^{\mathrm{A}}_{\mathrm{M}} \\ x^{\mathrm{B}}_{\mathrm{M}} \\ x^{\mathrm{A}}_{\mathrm{T}} \\ x^{\mathrm{B}}_{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

e escreva

$$y = \begin{bmatrix} y_{\mathrm{A}} \\ y_{\mathrm{B}} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad e = \begin{bmatrix} e_{\mathrm{M}} \\ e_{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

Temos que as relações dadas em (2.7) podem ser escritas como $x = \mathrm{R}y$.

As restrições de matéria prima e trabalho podem ser escritas como

$$x^{\mathrm{A}}_{\mathrm{M}} + x^{\mathrm{B}}_{\mathrm{M}} \leq e_{\mathrm{M}} \text{ e } x^{\mathrm{A}}_{\mathrm{T}} + x^{\mathrm{B}}_{\mathrm{T}} \leq e_{\mathrm{T}}.$$

Em notação matricial elas podem ser reescritas como $\mathrm{D}x \leq e$ em que

$$\mathrm{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, $F_{\mathrm{M}}(x, y) \geq 0$ e $F_{\mathrm{T}}(x, y) \geq 0$ implicam $\mathrm{DR}y \leq e$. Notem que estamos assumindo que a matéria prima empregada no setor A não pode ser usada para produzir B e que trabalho empregado no setor A não pode ser usado no setor B. O conjunto de possibilidades de produção será dado por

$$CP = \{(x, y) \in \mathbb{R}^4_+ \times \mathbb{R}^2_+ : F(x, y) \geq 0\}$$

e usando as relações dadas em (2.7) podemos reescrever esse conjunto em função apenas das variáveis de produto. Ou seja

$$CP = \{(r^{\mathrm{A}}_{\mathrm{M}} y_{\mathrm{A}}, r^{\mathrm{B}}_{\mathrm{M}} y_{\mathrm{B}}, r^{\mathrm{A}}_{\mathrm{T}} y_{\mathrm{A}}, r^{\mathrm{B}}_{\mathrm{T}} y_{\mathrm{B}}, y_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{B}}) : y \in \mathbb{R}^2_+ \text{ e } \mathrm{DR}y \leq e\}$$

A função de custo mínimo dada em (2.6) fica

$$\hat{c}(w, y) = \min\{w\mathrm{R}y : x \in \mathbb{R}^4_+ \text{ e } \mathrm{DR}y \leq e\}$$

em que $w = [w^{\mathrm{A}}_{\mathrm{M}}, w^{\mathrm{B}}_{\mathrm{M}}, w^{\mathrm{A}}_{\mathrm{T}}, w^{\mathrm{B}}_{\mathrm{T}}]$ é a matriz linha de preços dos insumos. Como y está fixo então

$$\hat{c}(w, y) = w\mathrm{R}y$$

Finalmente, a função de lucro em dois estágios fica

$$\hat{L}(p, w) = \operatorname{argmax}\{py - w\mathrm{R}y \text{ tal que } y \in \mathbb{R}^2_+ \text{ e } \mathrm{DR}y \leq e\}.$$

Este problema é conhecido como um problema de programação linear.

Vamos resolver um exemplo com

$$\mathrm{R} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \\ 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad e = \begin{bmatrix} 40 \\ 50 \end{bmatrix} \qquad w = [1, 2, 2, 1] \qquad p = [100, 80]$$

Neste caso podemos aplicar o Teorema 7.1 no apêndice para resolver.

Considere

$$\begin{aligned} f(y) &= py - w\mathrm{R}y \\ (g_1(y), g_2(y)) &= \mathrm{DR}y \\ g_3(y) &= y_{\mathrm{A}} \\ g_4(y) &= y_{\mathrm{B}}. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \partial_j f(\bar{x}) + \sum_{i \leq m} \lambda_i \partial_j g_i(\bar{x}) = 0 & \text{para } j \in \{1, 2\} \\ \lambda_i g_i(\bar{x}) = 0 \quad \text{e} \quad g_i(\bar{x}) \geq 0 & \text{para } i \in \{1, 2, 3, 4\}. \end{cases}$$

Temos

$$\begin{cases} 90 - 2\lambda_1 - 4\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 70 - 4\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1(40 - 2y_{\mathrm{A}} - 4y_{\mathrm{B}}) = 0 \\ \lambda_2(50 - 4y_{\mathrm{A}} - 2y_{\mathrm{B}}) = 0 \\ \lambda_3 y_{\mathrm{A}} = 0 \\ \lambda_4 y_{\mathrm{B}} = 0 \end{cases}$$

A solução deste sistema fica $y_{\mathrm{A}} = 10$ e $y_{\mathrm{B}} = 5$ logo a firma não irá terceirizar nenhum setor. Vai utilizar um total de 40 unidades de matéria prima sendo 20 em cada setor e 50 unidades de trabalho sendo 40 unidades para fabricar A e 10 unidades para fabricar B. O lucro total será dado por R$ 1250.

Para facilitar a resolução do problema, temos que estudar os casos[8] em que $\lambda_i > 0$ e $\lambda_i = 0$ para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Primeiramente, resolvemos as equações em λ_i para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Assim pode ser mais fácil descartar

[8] Observe que λ_i tem que ser sempre não negativo para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

vários casos ao mesmo tempo. As duas primeiras equações do sistema de equações fica

$$\begin{cases} 90 - 2\lambda_1 - 4\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 70 - 4\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

o que permite concluir que $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 0$ não pode ser solução do problema pois leva a $\lambda_3 < 0$ ou $\lambda_4 < 0$. cuja solução em λ_1 e λ_2 fica

$$\lambda_1 = \frac{50 - \lambda_3 + 2\lambda_4}{6} \text{ e } \lambda_2 = \frac{110 + 2\lambda_3 - \lambda_4}{6}$$

Infelizmente, nesse exemplo essas equações não permitem visualizar a exclusão direta de algum caso.

A Tabela abaixo representa os casos e a solução

Tabela de casos

Ramo da Árvore	Condição	Solução
1	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0, \lambda_4 > 0$	$\nexists$
2	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0, \lambda_4 = 0$	$\nexists$
3	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 > 0$	$\nexists$
4	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 0$	$(10, 15)$
5	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 > 0, \lambda_4 > 0$	$\nexists$
6	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 > 0, \lambda_4 = 0$	$\nexists$
7	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 > 0$	$\nexists$
8	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 0$	$\nexists$
9	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0, \lambda_4 > 0$	$\nexists$
10	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0, \lambda_4 = 0$	$\nexists$
11	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 > 0$	$\nexists$
12	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 0$	$\nexists$
13	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 > 0, \lambda_4 > 0$	$\nexists$
14	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 > 0, \lambda_4 = 0$	$\nexists$
15	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 > 0$	$\nexists$
16	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 0$	$\nexists$

Capítulo 3

Teoria do Consumidor

A teoria do consumidor estuda como os consumidores vão escolher as quantidades dos bens de consumo de maneira a maximizar seu benefício dentre as diversas quantidades que podem adquirir. Essa teoria se parece bastante com a teoria da firma pois as questões que envolvem as escolhas do consumidor também são determinadas pela forma com que um bem pode substituir o outro mantendo um certo benefício.

3.1 Restrição Orçamentária

Para começar vamos primeiro definir uma cesta de consumo como uma matriz $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ em que x_k representa a quantidade do bem k consumida. Vamos considerar sempre que x_k pode ser um número fracionário. Isto pode significar duas coisas. Primeiramente, significa que o bem em questão é divisível, como por exemplo quilos de arroz. Em segundo lugar, podemos considerar um consumidor como um grupo de indivíduos com características muito parecidas, e no caso de um bem não divisível, a quantidade x_k pode representar a quantidade consumida pelo grupo inteiro. Por exemplo, caso o grupo de consumidores possua 1000 pessoas, se $x_k = 0.75$ automóveis então este número nos diz que 750 pessoas desse grupo adquiriram um automóvel. Como outro exemplo, $x_k = 1.25$ automóveis significa que todas as pessoas desse grupo adquiriram um automóvel e, além disso, 250 pessoas desse grupo adquiriram 2 automóveis.

Um preço de um bem pode ser descrito em unidades monetárias ou em unidades de outros bens. Neste caso, dizemos que esse preço é um preço relativo. Um preço é sempre uma taxa. Quando um preço de um bem é medido em unidades monetárias então sua unidade fundamental é dada por *unid monet/unid do bem.*

Dados os preços dos bens como a matriz $(p_1, \cdots, p_n)$ e a renda em montante monetário m definimos a restrição orçamentária como o conjunto de todas as cestas $x \in \mathbb{R}^n$ que são factíveis de serem compradas. Mais precisamente, a restrição orçamentária é dada pelo conjunto

$$R_o(p, m) = \{x \in \mathbb{R}^n : p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n \leq m\}$$

e escrevemos simplificadamente $\sum_{k \leq n} p_k x_k$ como px. A reta orçamentária é a fronteira desse conjunto, ou seja,

$$R_o(p, m) = \{x \in \mathbb{R}^n : p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n = m\}.$$

Para simplificar nossa análise por motivos didáticos vamos considerar dois bens. Com efeito, dois bens bastam quando se quer comparar a escolha de um determinado bem em relação a todos os outros somados. Além disso, todos os resultados obtidos em nossa análise valem para o caso de muitos bens de consumo. Para o caso de dois bens, a reta orçamentária pode ser medida em termos do bem 1. Ou seja, dividindo a restrição orçamentária original por p_1 temos

$$R(p, m) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_1 + \frac{p_2}{p_1} x_2 \leq \frac{m}{p_1} \right\}$$

o preço

$$q_2 = \frac{p_2 \, unid\, monet/unid\, bem\, 2}{p_1 \, unid\, monet/unid\, bem\, 1}$$

fica dado em $unid\, bem\, 1/unid\, bem\, 2$. Isto significa a quantidade do bem 1 que o consumidor deve vender para comprar uma unidade do bem 2. Em outras palavras, a taxa

$$q_2 \frac{unid\, bem\, 1}{unid\, bem\, 2}$$

é o preço do bem 2 medido em unidades do bem 1, e não mais em unidades monetárias. O preço q_2 é também conhecido como preço relativo do bem 2. A renda $r = m/p_1$ é dada em unidades do bem 1 e representa a renda do consumidor em termos do bem 1. A renda r é também conhecida como renda real.

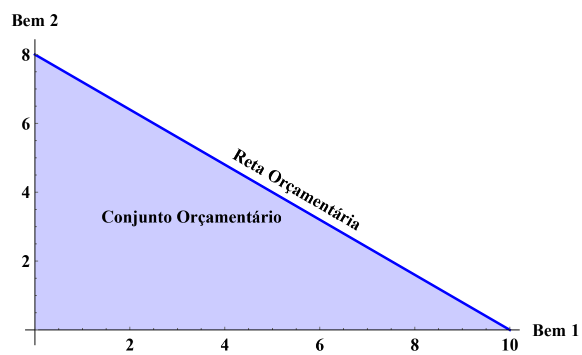


Figura 3.1: Conjunto de restrição orçamentária.

A figura 3.1 mostra um conjunto de restrição orçamentária para dois bens e preços $p_1 = 4$ e $p_2 = 5$ e renda monetária dada por $m = 20$. Notem que a inclinação da reta orçamentária é dada em módulo por p_1/p_2. Essa reta então será dada nesse exemplo por $4x_1 + 5x_2 = 20$.

A inclinação p_1/p_2 é o preço relativo do bem 1 e mede a taxa com que o mercado está disposto a substituir o bem 1 pelo bem 2. Em particular, se $p_1 = 10$ e $p_2 = 2$ então dizemos que o preço (relativo) do bem 1 é $p_1/p_2 = 5$ unidades do bem 2.

3.1.1 Deslocamentos da Reta Orçamentária

Para compreendermos bem como o consumidor reagirá às mudanças nos preços e na renda, precisamos entender primeiro como essas mudanças afetam a restrição orçamentária. É importante entender as mudanças separadamente. A Figura 3.2 permite uma boa visualização dessas mudanças pelo movimento da reta orçamentária.

Note pela figura que quando a renda diminui a reta orçamentária se desloca para a esquerda e quando a renda aumenta a reta orçamentária se desloca para a direita. Esse deslocamento é sempre paralelamente à reta inicial, já que os preços não variam, apenas a renda. No caso do aumento do preço do bem 1 temos que a reta orçamentária se desloca para a esquerda mas através de uma rotação em torno do ponto A no sentido horário. De fato, como o preço do bem 2 não varia, o consumidor sempre vai conseguir comprar a mesma quantidade quando não consome o bem 1.

Note que um aumento simultâneo dos preços em proporção fixa é equiva-

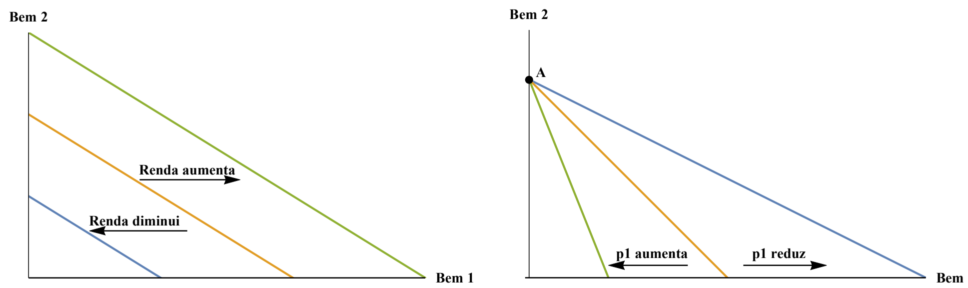


Figura 3.2: Variações da renda na esquerda e do preço do bem 1 na direita.

lente à uma redução da renda na mesma proporção. Para ver isto, basta multiplicar a restrição orçamentária pela proporção determinada. Com efeito, para $\alpha > 1$

$$p_1x_1 + p_2x_2 \leq m/\alpha \text{ se e somente se } \alpha p_1x_1 + \alpha p_2x_2 \leq m.$$

3.1.2 Impostos

Vamos estudar duas categorias de impostos. Impostos sobre quantidade, mais raros, e sobre valor, bem mais comuns. O imposto sobre quantidade define uma quantidade monetária para cada unidade comprada. Logo o custo de x_1 unidades do bem 1 tributadas por uma taxa t por unidade resulta em um custo de p_1x_1 mais um acréscimo de tx_1 de imposto. Logo a restrição orçamentária fica

$$R_o(p, m) = \{x \in \mathbb{R}^n : (p_1 + t)x_1 + \cdots + p_nx_n \leq m\}.$$

o imposto sobre quantidade em geral é utilizado para inibir a demanda de um bem que causa algum tipo de malefício social como o cigarro.

Vantagens do imposto sobre quantidade para o governo: previsibilidade, redução de custos de administração e auditoria, valor de fácil determinação.

Desvantagens do imposto sobre quantidade: a inflação pode reduzir a receita real, o imposto pode ser pago de maneira reduzida mudando as características do produto. Exemplo, pode-se aumentar o tamanho do cigarro, aumentando seu preço mas mantendo a unidade padrão como o maço.

O imposto sobre valor define uma fração do preço o para cada unidade comprada. Logo o custo de x_1 unidades do bem 1 tributadas por uma taxa

t proporcional resulta em um custo de p_1x_1 mais um acréscimo de tp_1x_1 de imposto. Logo a restrição orçamentária fica

$$R_o(p,m) = \{x \in \mathbb{R}^n : (1+t)p_1x_1 + \cdots + p_nx_n \leq m\}.$$

Exemplos desse imposto: IPI, ICMS, IPVA, IPTU.

Vantagens: ajuste automático para a inflação, margem de lucro mais alta contribui mais para a receita tributária.

Desvantagens: fluxo menos previsível, fiscalização ou auditoria mais cara, incentivo a produção de bens com preço mais baixo.

Subsídio: é um imposto negativo, ou seja, uma transferência do governo. Pode incidir sobre quantidade ou sobre valor.

-Imposto sobre um montante fixo ou sobre montante em valor. É o famoso imposto de renda. Pode incidir sobre a renda proporcionalmente ou em um montante fixo.

Exemplo: suponhamos que a equação orçamentária seja $p_1x_1+p_2x_2 = m$. O governo decide impor um subsídio de montante fixo de s, um imposto $\tau\%$ sobre o valor do bem 1 e um imposto t sobre a quantidade do bem 2. Qual será a nova fórmula da reta orçamentária?

Resposta: $(1+\tau/100)p_1x_1 + (p_2+t)x_2 = m+s$

3.2 Preferências

Os consumidores podem ter vários tipos de gosto com relação aos bens de consumo. Tentar inferir qual seria a preferência do consumidor entre dois bens seria uma tarefa muito difícil. Porém, quando consideramos que os indivíduos escolhem entre cestas de consumo e não entre os bens separadamente, então fica factível de se construir uma teoria que descreve o comportamento do consumidor. De fato, neste caso, o objetivo do estudo seria entender como o consumidor vai reagir diante de objetos que diferem apenas em quantidade e não em características intrínsecas, tornando o benefício do consumo algo mensurável. Vamos então caracterizar as preferências dos consumidores em relação a um conjunto de cestas de consumo, cada qual contendo pelo menos uma pequena quantidade de cada bem, permitindo uma comparação.

Uma preferência é uma relação binária $\succeq$ que compara duas cestas de consumo arbitrárias. Temos a seguinte convenção

1. Quando $x \succ x'$ então dizemos[1] que x é preferível a x'.

[1] ou estritamente preferível para reforçar.

2. Quando $x \succeq x'$ então dizemos que x é pelo menos tão bom quanto x' ou é preferível fracamente a x'

3. Quando $x \sim x'$ então dizemos que x é indiferente a x', ou seja, $x \succeq x'$ e $x' \succeq x$.

3.2.1 Pressuposto das Preferências

Podemos assumir que os consumidores se guiam por um senso comum quando se deparam diante de duas cestas de consumo. Essas características das preferências dos consumidores podem se resumir em duas principais básicas.

1. Completude: o consumidor sempre consegue comparar duas cestas quaisquer. Mais precisamente, dados x e x' quaisquer então ou $x \succeq x'$ ou $x' \succeq x$.

2. Transitividade: o consumidor ordena as cestas de consumo de maneira consistente, ou seja, se $x \succeq x'$ e $x' \succeq x''$ então $x \succeq x''$.

A completude, em particular, nos diz que se uma cesta é melhor que outra, e essa outra também é melhor que uma terceira, então o bom senso vai dizer que o consumidor será bem comportado se ele considerar que a primeira cesta também será melhor que a terceira cesta. Caso as preferências não fossem transitivas, haveria um conjunto de cestas em que o consumidor não teria capacidade de escolher uma melhor alternativa. Dizemos que uma preferência é racional quando satisfaz a propriedade de completude e transitividade.

3.2.2 Curvas de Indiferença

Antes de entender as curvas de indiferença, primeiramente vamos olhar para o conjunto de cestas que são melhores que uma certa cesta fixada. Esse conjunto é chamado de conjunto fracamente preferido ou conjunto superior. Sua importância está no fato de que se o consumidor está escolhendo uma cesta x então o conjunto superior descreve todas as cestas que o consumidor pode escolher caso não haja mudança nos preços e na renda. A figura 3.3 descreve esse conjunto com dois bens de consumo. A fronteira desse conjunto é a curva azul da Figura 3.3 e é chamada de curva de indiferença. Em cima dessa curva, o consumidor considera quaisquer alocações como gerando o mesmo benefício de consumo. O formato convexo do conjunto superior

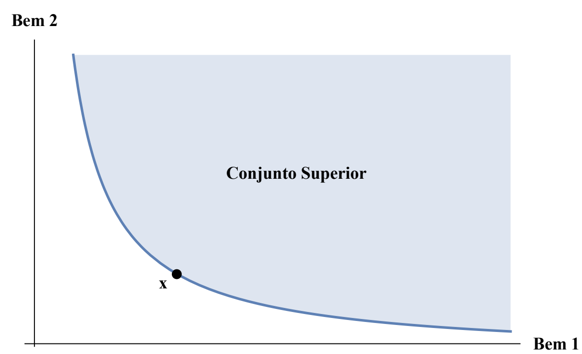


Figura 3.3: Conjunto Superior de Escolha

caracteriza a propriedade de saciedade dos bens. Essa propriedade diz que se o consumidor possui muito de um bem então ele está disposto a substituir muito desse bem por uma unidade marginal do outro bem. A figura 3.4 mostra esse fato. Se escrevermos $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ e

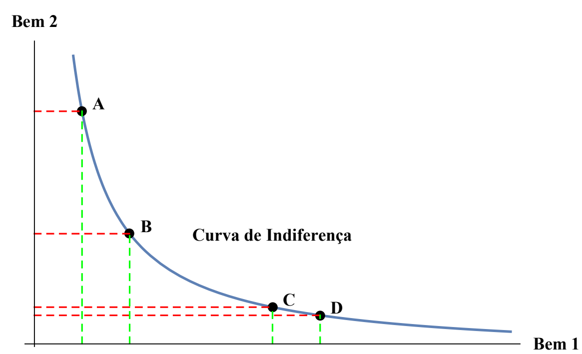


Figura 3.4: Curva de Indiferença

$D = (d_1, d_2)$ então pela figura temos que $b_1 - a_1 = d_1 - c_1 = 1$ e $a_2 - b_2 < c_2 - d_2$. Nos pontos C e D temos o inverso. Como o indivíduo terá muito do bem 1, ele está disposto a trocar uma quantidade menor do bem 2 por uma unidade marginal de referência do bem 1.

Uma propriedade importante das preferências racionais diz que duas curvas de indiferença não podem se cruzar pois contradiz a propriedade de transitividade. A Figura 3.5 ilustra esse fato. Com efeito, suponha que as alocações

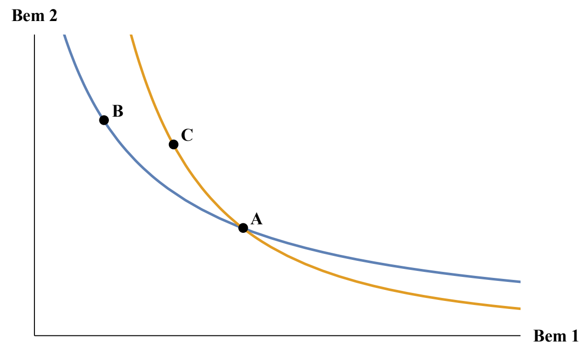


Figura 3.5: Curva de Indiferença

da curva amarela gerem um benefício maior que o benefício das alocações da curva azul. Então, a alocação C seria melhor que B para o consumidor. Como o consumidor é indiferente entre A e B e também indiferente entre A e C, então ele teria de ser indiferente também entre B e C, uma contradição.

Características de preferências bem comportadas.

1. Monotonicidade fraca: se acrescentarmos uma quantidade positiva em todos os bens de uma cesta então esta cesta será estritamente preferível.

2. Monotonicidade forte: se acrescentarmos uma quantidade positiva a pelo menos um dos bens de uma cesta então esta cesta será estritamente preferível.

3. Convexidade: preferência por combinações em proporções fixa entre todos os bens de uma cesta. Mais precisamente,

$$x \succeq x' \Rightarrow \alpha x + (1 - \alpha)x \succeq x \text{ para qualquer } \alpha < 1.$$

O gráfico da Figura 3.6 mostra como as curvas de indiferença de uma preferência bem comportada devem se posicionar.

3.2.3 Taxa Marginal de Substituição

A principal característica das preferências que pode ajudar no entendimento da escolha individual é a forma com que o consumidor substitui os bens entre si. Como na firma, podemos quantificar essa substituição. Definimos então a taxa marginal de substituição como segue.

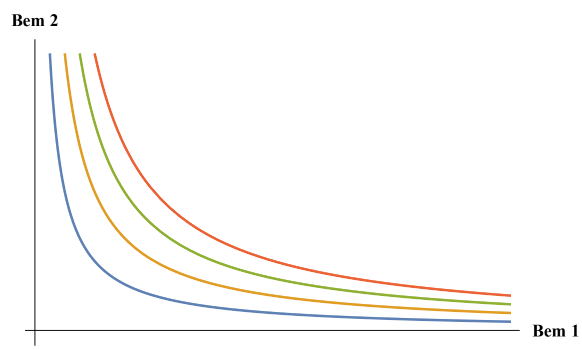


Figura 3.6: Curvas de Indiferença

1. A $TMS_{21}(x)$ representa a quantidade máxima do bem 2 que pode ser reduzida na alocação x de maneira a se aumentar uma unidade marginal do bem 1 *sem redução do benefício do consumidor.*

2. A $TMS_{21}(x)$ representa a quantidade mínima do bem 2 que deve ser acrescida na alocação x de maneira a se reduzir uma unidade marginal do bem 1 *sem redução benefício do consumidor.*

Como análogo à teoria da firma a $TMS_{21}(x)$ é a inclinação da curva de indiferença no ponto x. A taxa marginal de substituição caracteriza como são as preferências do consumidor, através do formato de suas curvas de indiferença. Pelo gráfico da Figura 3.7 vemos que a taxa média de substituição é próxima da inclinação da curva de indiferença, que seria exatamente a $TMS_{21}(x)$. Se escrevermos $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ então pela figura temos que uma redução de $b_2 - a_2$ do bem 2 e um aumento de $a_1 - b_1$ do bem 1 mantém o benefício do consumidor pois, ele se situa na mesma curva de indiferença. O valor $(b_2 - a_2)/(a_1 - b_1)$ é exatamente a inclinação da secante que passa por A e B. Logo, quando B se aproxima de A temos a TMS no ponto A.

A taxa marginal de substituição também é chamada de propensão marginal a pagar. Quanto estaríamos propensos a pagar em unidades do bem 2 por uma unidade adicional do bem 1. Isto constitui apenas um aspecto da preferência do consumidor, e não está diretamente relacionado com os preços de mercado. Com relação à propensão a substituir um bem pelo outro, vamos estudar basicamente 3 situações.

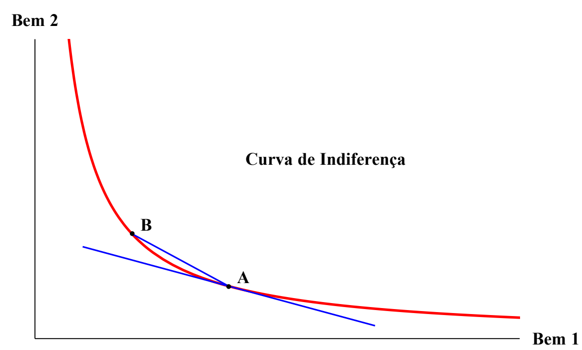


Figura 3.7: A TMS é a inclinação da curva de Indiferença

Bens Substitutos Perfeitos

Podemos ter uma relação de preferências em que o consumidor sempre está disposto a substituir um bem pelo outro na mesma proporção, ou seja, a $TMS_{21}(x)$ é constante em x. Neste caso, dizemos que os bens são substitutos perfeitos. Um exemplo bem claro é a escolha entre os combustíveis gasolina e álcool. As curvas de indiferença ficam como no gráfico da Figura 3.8

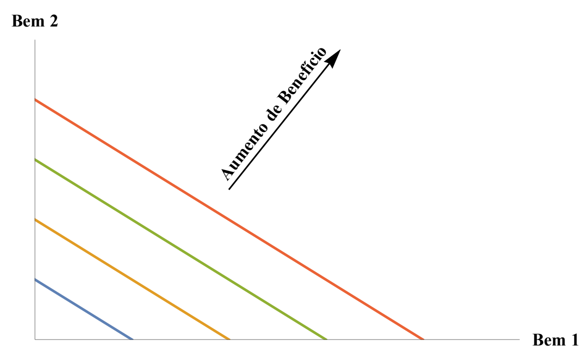


Figura 3.8: Curvas de Indiferença Substitutos Perfeitos.

Bens Complementares Perfeitos

Dois bens são considerados complementares perfeitos se o consumidor atinge o benefício do consumo apenas se esse bens forem alocados em uma proporção fixa. Exemplo: um par de sapatos, uma xícara de café e dois sachês de açúcar, etc. Neste caso as curvas de indiferença ficam com o formato dado na figura 3.9.

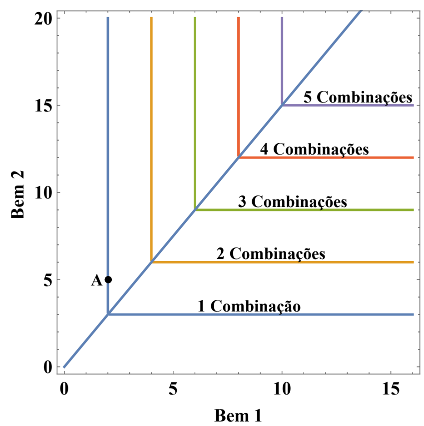


Figura 3.9: Curvas de indiferença de bens complementares perfeitos.

Note que essa curvas representam o caso e que o consumidor obtém benefício apenas quando consome os bens 1 e 2 nas proporções 2 e 3 respectivamente. Observe que a diagonal tem inclinação 3/2 e representa as alocações nas quais não há desperdício. No ponto A por exemplo, temos $x = (2, 5)$ e portanto o benefício será o mesmo que em $x' = (2, 3)$ ou seja, o consumidor simplesmente desprezará 2 unidades do bem 2 na alocação x e consumirá 1 combinação de 2 unidades do bem 1 e 3 unidades do bem 2 .

Bens Substitutos Imperfeitos

Nesta seção, vamos estudar o caso intermediário entre os bens complementares perfeitos e substitutos perfeitos. neste caso dizemos que a substituição é imperfeita, ou seja, a taxa com que um bem é substituído pelo outro varia conforme o consumo muda. Em geral essa variação respeita o conceito de saciedade, ou seja, o consumidor tem mais propensão a substituir bens que ele possui em maior quantidade em termos relativos. Isto reflete o fato da TMS ser decrescente como destacado anteriormente. A figura 3.10 mostra claramente este fato As retas em azul representam a inclinação do gráfico em módulo. Claramente essa inclinação diminui com o aumento do consumo do bem 1.

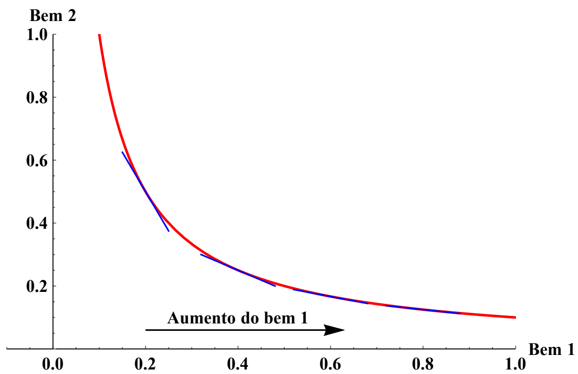


Figura 3.10: Taxa marginal de substituição decrescente.

3.3 Função Utilidade

Pela teoria da firma com dois insumos, notamos que as isoquantas na verdade são curvas de nível de uma certa função de produção com gráfico tridimensional. No caso de dois bens de consumo, como as curvas de indiferença e as isoquantas têm características parecidas, então a intuição gráfica nos diz que podemos construir uma função cujas curvas de nível são as curvas de indiferença. O gráfico da Figura 3.11 ilustra este fato.

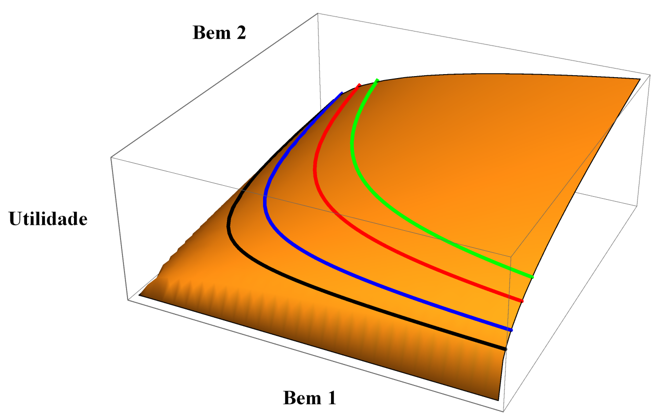


Figura 3.11: Gráfico tridimensional de uma função de utilidade.

Mais ainda, uma função que aumenta com o aumento dos níveis de indiferença. Dessa maneira, temos uma função índice que representa um benefício de uma cesta de consumo, e que é consistente com as propriedades das preferências do consumidor. Essa função é conhecida como função utilidade.

Em resumo, uma função utilidade é uma maneira de atribuir valores às cestas de consumo que são consistentes com a preferência do consumidor, ou seja, cestas com valores maiores são preferíveis àquelas com valores menores. Essa propriedade é denominada propriedade ordinal da função utilidade.

Existem várias formas de se definir uma função utilidade. Dada uma função $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ representado as preferências sobre $x \in \mathbb{R}^n$, então $2u$ também é uma função utilidade, ou $g(u)$ para qualquer função g estritamente crescente. Logo, transformações monotônicas de uma função utilidade não alteram a forma com que os indivíduos fazem suas escolhas. Isto é o mesmo que dizer que uma função de utilidade tem apenas a função de ordenar cestas de consumo e não caracterizar um benefício absoluto. Essa propriedade é conhecida como propriedade ordinal da função utilidade.

Dizemos que a utilidade é cardinal quando o nível da utilidade é levado em conta além da simples ordenação das cestas. Exemplo: utilidade definida como quanto o consumidor está disposto a pagar por um bem. Podemos dizer neste caso que o consumidor prefere uma cesta duas vezes mais que a outra (conceito impreciso para desenvolver teoria da escolha).

Mais precisamente, dizemos que uma função utilidade representa a preferência $\succeq$ quando $x \succeq x' \Leftrightarrow u(x) \geq u(x')$. Isto mostra que a relação de ordem $\succeq$ se parece muito com a relação de ordem dos números reais $\geq$.

Definimos também a utilidade marginal de um certo bem como sendo a variação marginal do benefício total devido a uma variação marginal desse bem. Matematicamente,

$$umg_k(x) = \partial_k u(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

3.3.1 Principais Funções de Utilidade

Nesta seção, vamos caracterizar a função de utilidade para os três principais tipos de preferência caracterizados nas seções anteriores.

Bens Substitutos Perfeitos

A função de utilidade para o caso de bens substitutos perfeitos é dada por

$$u(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n$$

claramente para dois bens vemos que a utilidade marginal do insumo k é exatamente a_k, o coeficiente de benefício. Além disso, as curvas de utilidade constante são dadas pelas retas $a_1x_1 + a_2x_2 = const$ coincidindo exatamente com as curvas de indiferença para o caso de substitutos perfeitos.

Bens Complementares Perfeitos

A função de utilidade para o caso de bens complementares perfeitos é dada por

$$u(x) = \min\left\{\frac{x_1}{a_1}, \frac{x_2}{a_2}, \cdots, \frac{x_n}{a_n}\right\} \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n_+.$$

Claramente para dois bens vemos que as curvas de utilidade constante coincidem exatamente com as curvas de indiferença para o caso de complementares perfeitos.

Bens Substitutos Imperfeitos

Para o caso de bens substitutos imperfeitos, a função de utilidade Cobb-Douglas

$$u(x) = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n} \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n_+$$

possui curvas de indiferença bem parecidas com a descrita pela figura 3.10 para o caso de dois bens. A propriedade de substituição decrescente está bem caracterizada pela hipótese $\alpha_k < 1$ para $k, 1, \cdots n$.

3.3.2 TMS e Utilidade Marginal

Existe uma relação importante entre a $TMS_{21}(x)$ e as utilidades marginais. Por exemplo, suponha que os bens possuam as seguintes utilidades marginais

$$umg_1(x) = 10\frac{unid\,benef}{unid\,bem1} \text{ e } umg_2(x) = 2\frac{unid\,benef}{unid\,bem2}$$

Portanto, quando se aumenta uma unidade marginal do bem 1 temos um aumento de 10 unidades marginais de benefício e quando se aumenta uma unidade marginal do bem 2 temos um aumento de 2 unidades marginais de benefício. Logo, se reduzimos 5 unidades do bem 2 e aumentamos uma unidade do bem 1 então o benefício se mantém. O fato de que $5 = umg_1(x)/umg_2(x)$ não é simples coincidência. De fato, a relação

$$\frac{umg_1(x)}{umg_2(x)} = TMS_{21}(x) \text{ sempre vale.}$$

Podemos ver essa relação matematicamente usando a regra da cadeia. Com efeito, considere $x_2 = g(x_1)$ uma curva de indiferença. Defina $\hat{x}_1(t) = t$ e $\hat{x}_2(t) = g(t)$. Então $f(\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t)) = const$ para todo t. Logo, derivando essa equação em reação a t temos

$$\partial_1 f(\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t))\hat{x}_1'(t) + \partial_2 f(\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t))\hat{x}_2'(t) = 0.$$

Como $\hat{x}_1'(t) = 1$ e $\hat{x}_2'(t) = g'(t)$ então para $t = x_1$

$$\frac{\partial_1 f(x_1, g(x_1))}{\partial_2 f(x_1, g(x_1))} = -g'(x_1) = TMS_{21}(x_1, g(x_1))$$

devido ao fato de que a inclinação da curva de indiferença no ponto x ser exatamente a taxa marginal de substituição.

3.4 Escolha Ótima e Alocações Ineficientes

Definidas as preferências e a restrição orçamentária, podemos agora definir a escolha ótima. Como os consumidores tomam como dada a sua renda e os preços, então a demanda vai ser definida como uma função de consumo contingente a cada preço e cada renda.

Definimos então a função de demanda mais formalmente como

$$\hat{x}(p, m) = \text{argmax}\{u(x) : px \leq m\} \text{ para todo } (p, m) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$$

em que "argmax" representa o ponto de máximo. A utilidade indireta fica definida como o valor ótimo atingido com o consumo da cesta ótima.

$$\hat{v}(p, m) = max\{u(x) : px \leq m\} \text{ para todo } (p, m) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$$

3.4.1 Condições de Primeira Ordem

Considerando a função de utilidade como estritamente côncava, as condições de primeira ordem saem da maximização do Lagrangeano

$$\ell(x) = u(x_1, \cdots, x_n) + \lambda(m - p_1 x_1 - \cdots - p_n x_n).$$

Derivando em x e igualando a zero temos

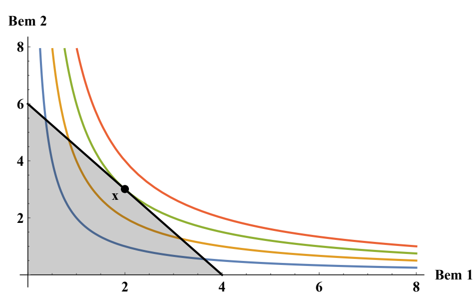
$$\partial_k u(x_1, \cdots, x_n) = \lambda p_k \text{ para todo } k = 1, \cdots, n$$

dividindo essas equações duas a duas, temos que para quaisquer k, l

$$\frac{umg_k(x)}{umg_l(x)} = TMS_{lk}(x) = \frac{p_k}{p_l}.$$

Temos então que na escolha ótima, a taxa marginal de substituição se iguala à razão dos preços. Para dois bens por exemplo, a TMS_{21} representa o valor intrínseco do bem 1 contabilizado em unidades do bem 2, também conhecido como preço de reserva. Além disso, p_1/p_2 representa o preço de mercado do bem 1 também medido em unidades do bem 2. Temos então que, na escolha ótima, os indivíduos atingirão a satisfação máxima quando conseguirem igualar os valores intrínsecos e o valor de mercado do bem.

A Figura 3.12 mostra como as escolhas ótimas se situam no gráfico para o consumidor A e o consumidor B.



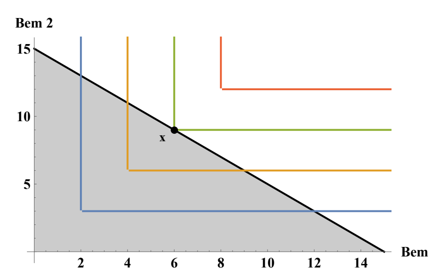


Figura 3.12: Escolha ótima de A na esquerda e B na direita.

O consumidor A possui função utilidade $u_{\text{B}}(x) = x_1 x_2$ e os preços $p_1 = 3$ e $p_2 = 2$. O consumidor B possui função utilidade $u_{\text{B}}(x) = \min\{x_1/2, x_2/3\}$ e os preços $p_1 = 1$ e $p_2 = 1$. As escolhas ótimas de A e B são $(2, 3)$ e $(6, 9)$ respectivamente.

3.4.2 Alocações Ineficientes

Como na teoria da a firma, no curto prazo os consumidores também podem alocar fatores de maneira sub-ótima. Para entender o comportamento dos indivíduos nesses casos, suponha que o consumidor esteja utilizando uma alocação que não satisfaça as condições de ótimo. Na Figura 3.13 temos uma curva de indiferença e a reta orçamentária e podemos ver que a $TMS_{21}(A)$ é a inclinação da reta vermelha tangente à curva de indiferença. Como o segmento AD tem inclinação em módulo dada por p_1/p_2, então $TMS_{21}(A) > p_1/p_2$ e portanto a alocação A não maximiza a utilidade. Para entender o que

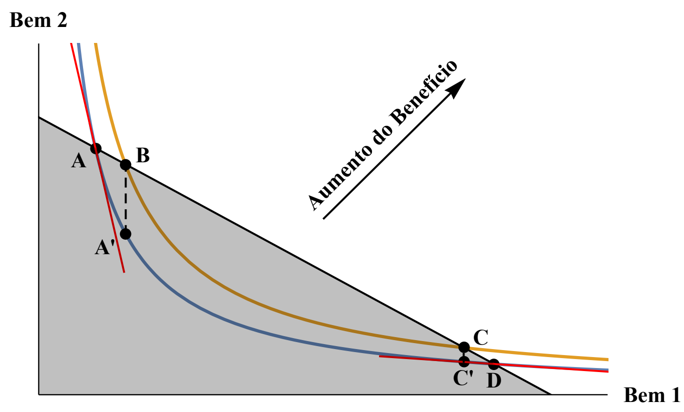


Figura 3.13: Mudanças nas alocações sub-ótimas

o consumidor fará na margem neste caso, basta observar que ao passar de A para A', basta o consumidor aumentar uma unidade marginal do bem 1 e reduzir $TMS_{21}(A)$ unidades marginais do bem 2. Esta cesta continua factível mas mantém o benefício pois está localizada na mesma curva de indiferença. Se, em vez disso, o consumidor aumentar uma unidade marginal do bem 1 e reduzir p_1/p_2 unidades marginais do bem 2 então ele consumirá a cesta B, que gera um benefício maior que o da cesta A pois $p_1/p_2 < TMS_{21}(A)$, ou seja, o consumidor reduziu do bem 2 menos que o máximo que poderia reduzir para manter seu benefício.

No caso inverso temos as alocações C e D. ao passar de D para C', basta o consumidor reduzir uma unidade marginal do bem 1 e aumentar $TMS_{21}(A)$ unidades marginais do bem 2. Esta cesta continua factível mas mantém o benefício pois está localizada na mesma curva de indiferença. Se, em vez disso, o consumidor reduzir uma unidade marginal do bem 1 e aumentar p_1/p_2 unidades marginais do bem 2 então ele consumirá a cesta C, que gera um benefício maior que o da cesta D pois $p_1/p_2 > TMS_{21}(A)$, ou seja, o consumidor aumentou mais do bem 2 que o mínimo que deveria aumentar para manter seu benefício.

Em geral temos que $TMS_{21}(x)$ é medido em unidades do bem 2 por unidades do bem 1. Essa gradeza representa o poder que o bem 1 tem de maximizar utilidade, calculado em termos do bem 2. É também chamado de preço de reserva relativo do consumidor para o bem 1, ou seja, quanto ele está disposto a pagar pelo bem 1 em unidades do bem 2. A grandeza p_1/p_2 precisamente representa o preço de mercado do bem 1 calculado em unidades do bem 2. O valor p_1/p_2 é também conhecido como preço relativo. Logo as escolhas do consumidor com respeito ao bem 1 estão determinadas comparando o benefício intrínseco do bem 1 com seu preço de mercado, tudo medido em unidades do bem 2.

3.5 Escolha Intertemporal

Nesta seção vamos estudar como os indivíduos escolhem entre poupar e consumir usando a teoria do consumidor. Em resumo, vamos considerar um bem de poupança e um bem de consumo no modelo e usar toda a teoria anterior de maneira análoga. Vamos considerar o bem de poupança como um ativo financeiro bem simples para facilitar o entendimento. Um ativo aqui será definido aqui como um contrato em que se paga um preço unitário e um determinado valor é prefixado como pagamento. Vamos assumir para simplificar também que o agente escolhe entre consumir e poupar no período 1 e consome toda renda no período 2. Imagine por exemplo que os dois períodos representam a juventude e a velhice.

Primeiramente vamos definir o bem de poupança. Denomina-se ativo financeiro real um contrato em que 1 unidade de ativo fornece o direito de receber d unidades do bem de consumo de juros (ou dividendos) no período seguinte, além de seu valor de propriedade. Imagine, por exemplo, que o ativo é um imóvel adquirido para ser alugado, ou então o capital físico de uma firma. Vamos considerar que todos os bens de consumo podem ser representados por um único bem que seria uma espécie de bem médio, ou uma cesta média. Os índices de preços desempenham esse papel, por exemplo. Isto é equivalente a dizer que o preço do bem de consumo representa uma média ponderada dos preços de vários bens de uma cesta fixada. Portanto, podemos entender o modelo como possuindo apenas um bem para simplificar. Além disso, o fato de que o ativo paga juros em unidades desse bem significa que o contrato é corrigido por algum índice de preços.

Temos para o período $t = 1, 2$

1. q_t: preco do ativo dado em *unid monet/unid ativo*
2. p_t: preco do bem dado em *unid monet/unid bem*
3. e_t: dotacao do bem em *unid monet*
4. a_t: quantidade do ativo
5. c_t: quantidade consumida
6. $r_t = q_t/p_t$: preco real do ativo dado em *unid bem/unid ativo*

Restrição orçamentária no período 1

$$p_1c_1 + q_1a_1 \leq p_1e_1.$$

Dividindo essa equação por p_1 obtemos a restrição dada em unidades do bem

$$c_1 + r_1a_1 + \leq e_1 \tag{3.1}$$

Chamamos essa conta de normalização, ou seja, o preço do bem fica unitário em todos os períodos. Na realidade, essa restrição seria contabilizada via indexação a algum índice de preços. Por exemplo, valor do aluguel corrigido pelo IGP-M, etc.

Restrição orçamentária no período 2

$$p_2c_2 \leq p_2e_2 + q_2a_1 + p_2a_1d.$$

Note que p_2a_1d representa a quantidade monetária recebida de juros pela compra de a_1 unidades do ativo no período 1. O termo q_2a_1 representa a quantidade monetária recebida pela propriedade do ativo, o que seria equivalente à diferença entre o valor de face e os juros reais no período 2. Imagine novamente que o ativo é um imóvel alugado para clarear sempre o entendimento. Normalizando temos: $c_2 \leq e_2 + r_2a_1 + a_1d$

Logo, na escolha ótima a restrição do período 2 fica:

$$a_1 = (c_2 - e_2)/(r_2 + d)$$

e, portanto, substituindo na restrição do período 1 dada pela equação (3.1) temos:

$$c_1 + (c_2 - e_2)r_1/(r_2 + d) \le e_1$$

ou seja

$$c_1 + r_1 c_2/(r_2 + d) \le e_1 + e_2 r_1/(r_2 + d).$$

Essa equação é similar a restrição orçamentária do consumidor com o bem sendo diferenciado em dois períodos e o preço do bem no período 1 como sendo 1 e o do bem no período 2 como sendo $r_1/(r_2 + d)$. Essa restrição é chamada de restrição a valor presente.

As preferências do consumidor são dadas pela função utilidade $\hat{u}(c_1, c_2) = u_1(c_1) + \beta u_2(c_2)$ em que $\beta < 1$ é conhecida como taxa de desconto intertemporal. Quando $u_1 = u_2$, então essa taxa representa como o consumidor desconta seu futuro, o seja, sua impaciência para consumir o bem no presente em vez de consumir no futuro. Quando β é próximo de zero, então o consumidor é impaciente pois valoriza pouco o benefício futuro do consumo $\beta u_2(c_2)$ e quando β é próximo de 1 o consumidor é muito paciente e poupa mais.

O exemplo que segue ilustra melhor esse fato. A demanda com a função de utilidade dada por $u(c_1, c_2) = \ln(c_1) + \beta \ln(c_2)$ fica

$$\hat{c}_1(r) = \frac{e_2 r_1 + e_1(d + r_2)}{(1 + \beta)(d + r_2)} \text{ e } \hat{c}_2(r) = \frac{\beta((d + r_2)e_1 + e_2 r_1)}{(1 + \beta)r_1}$$

além disso,

$$\hat{a}_1(r) = \frac{\hat{c}_2(r) - e_2}{r_2 + d} = \frac{\beta e_1(d + r_2) - e_2 r_1}{(\beta + 1)r_1(d + r_2)}.$$

Logo, quando β está próximo de zero, o consumo no segundo período fica próximo de zero. Note também que quando o preço do ativo no período 1 dado por r_1 aumenta, seu retorno no período 2 cai e os agentes consomem mais no período 1. O inverso acontece com o preço do ativo no período 2, dado por r_2.

Para entender a relação entre taxas de juros reais e nominais e a inflação, considere as taxas de juros real d e nominal d'. Uma unidade monetária investida no período 1 dá direito a $1 + d'$ unidades monetárias no período 2.

A quantidade do bem comprada com uma unidade monetária no período 1 é dada por $1/p_1$ e a quantidade do bem recebida no período 2 dada por $(1 + d')/p_2$. Além disso, a inflação é dada por

$$\pi = (p_2 - p_1)/p_1 = p_2/p_1 - 1.$$

O retorno bruto da aquisição de $1/p_1$ unidades do bem no período 1 é dado por $(1+d')/p_2$. Como d é a taxa líquida real de juros do ativo temos que

$$\frac{(1+d')/p_2}{1/p_1} = 1+d$$

ou seja, $1+d = (1+d')p_1/p_2$. Usando que $1+\pi = p_2/p_1$, concluímos então que a relação entre os juros reais, nominais e a inflação é dada pela equação

$$d = (d'-\pi)/(1+\pi).$$

3.6 Escolha sob Risco

Vamos trabalhar aqui com dois conceitos básicos de imperfeição na informação dos agentes econômicos: risco e incerteza

Vamos definir uma economia com risco como um ambiente em que as escolhas são feitas diante de eventos que têm probabilidades definidas objetivamente, ou que podem ser estimadas através de cálculos estatísticos. Por exemplo, lançamento de um dado, sinistros de automóvel, etc.

Consideraremos uma economia com incerteza como um ambiente em que as escolhas são feitas diante de eventos que tem probabilidades atribuídas subjetivamente. Por exemplo: inadimplência, preços futuros, política, etc. Em uma corrida de cavalos, por exemplo, temos uma incerteza quanto às probabilidades dos resultados, o que é diferente para uma loteria.

Desenvolvemos um arcabouço teórico baseado no modelo de demanda de seguro privado de Rothshild and Stiglitz (1976). Vamos assumir que as crenças dos agentes são contaminadas exogenamente por uma incerteza latente subjetiva. Basicamente, os agentes antecipam imprecisamente a probabilidade que governa os estados da natureza, o que incorpora uma contaminação em suas crenças.

3.6.1 Incerteza

A incerteza é caracterizada por um conjunto finito S que descreve estados da natureza. Exemplo: em um seguro de automóvel, podemos considerar três estados tais como perda total, perda parcial e perda nula. Considere um espaço de probabilidade subjacente em que $\pi = (\pi_s)_{s \in S}$ é o vetor representando a probabilidade objetiva. Os consumidores estão sujeitos a um dano d_s e negociam um contrato de seguro em que cada unidade dá o direito de receber uma transferência t_s em cada estado $s \in S$. Além disso, assumimos que todas as realizações de estados são observadas pelas seguradoras.[2] Há um único bem de consumo e a tabela de indenização da apólice, digamos, $\{t_s\}_{s \in S}$ é dada em unidades deste bem. O preço observado para cada unidade de seguro, denotado por p, é considerado dado.

As empresas escolhem o valor do seguro que maximiza o lucro esperado. Assumimos que uma empresa representativa escolhe a oferta agregada de seguro, denotada por α. O problema da empresa é então dado por

$$v_f = \max \left\{ \alpha \left(p - \sum_{s \in S} \pi_s t_s \right) : \alpha \in [0, 1] \right\}. \tag{3.2}$$

Portanto, a empresa representativa oferece uma oferta positiva se e somente se $p \geq \sum_{s \in S} \pi_s t_s$. A restrição $\alpha \in [0, 1]$ significa que a quantidade total de unidades de seguro disponíveis é finita e normalizada para um. Essa suposição é consequência de alguma regulamentação que estabelece que as empresas devem ser solventes em eventos extremos. O preço atuarialmente justo é dado por $p = \sum_{s \in S} \pi_s t_s$. Este preço tem a característica interessante que garante que os consumidores vão se assegurar completamente, mesmo considerando os riscos baixos. Quando o preço do seguro está acima do atuarialmente justo, isto pode não acontecer. Vamos mostrar isso mais adiante. Finalmente, suponha que os custos de gerenciamento sejam insignificantes.[3]

Suponha um agente genérico com função de utilidade $u : C \to \mathbb{R}$ representando o benefício de consumo onde $C \subset \mathbb{R}_+$. A dotação de riqueza dos agentes é denotada por r. Supomos que u é duas vezes diferenciável com u' e u'' contínuos e não nulos. Cada escolha de consumo é definida em um conjunto fechado e limitado C e depende dos estados de natureza e das realizações da variável subjetiva que representa uma proxy para as crenças dos agentes sobre os eventos relacionados ao seguro. Vamos supor os agentes econômicos fazem um plano de contingenciamento antes de tomarem suas decisões. Após este estágio as negociações surgem, as variáveis aleatórias são observadas e os indivíduos fazem suas escolhas. Dizemos que um plano de

[2] Este modelo incorpora o caso do cosseguro.

[3] Assumimos que as seguradoras podem investir o prêmio em um mercado com uma taxa de juros suficiente para cobrir todos os custos operacionais.

consumo contingente $c = (c_s)_{s \in S}$ é viável quando há uma escolha de seguro $\alpha \in \mathbb{R}_+$ satisfazendo

$$c_s + p\alpha \leq r - d_s + \alpha t_s \text{ para todo } s \in S. \tag{3.3}$$

A definição abaixo caracteriza os estados com perda alta e os estados com perda baixa usando a função de transferências líquidas do seguro. Um plano de consumo viável pode ser escrito como

$$c_s = r - d_s + \alpha(t_s - p) \text{ para todo } s \in S$$

A função utilidade indireta dos agentes[4] é então dada pelo máximo entre os valores esperados da utilidade sob os planos de consumo.

$$v_a(p) = \max\left\{\sum_{s \in S} \pi_s u(r - d_s + \alpha(t_s - p))\right\} \tag{3.4}$$

sobre todos os planos de consumo viáveis $\{c_s\}_{s \in S}$. A função $v_a(p)$ representa o valor ótimo esperado para o benefício avaliado em todos os planos de consumo viáveis.

A definição abaixo caracteriza uma medida de aversão ao risco absoluta conhecida como medida Arrow-Pratt de aversão absoluta ao risco. Essa medida também pode ser vista como a elasticidade consumo da utilidade marginal. Grosseiramente falando, um indivíduo é averso ao risco quando ele prefere o valor médio certo de um pagamento aleatório a escolher entrar no evento incerto e ter a chance de obter valores maiores mas incertos.

Definição 3.1. *Considere a medida Arrow-Pratt de aversão ao risco absoluta $a : C \to \mathbb{R}_+$ dada por $a(c) = -u''(c)/u'(c)$ para todo $c \in C$.*

O gráfico da figura 3.14 mostra como um indivíduo averso ao risco se comporta quando olha para o benefício esperado de um consumo incerto. Suponha que o indivíduo consome um bem que pode ter esses dois estados $\{s_1, s_2\}$. Exemplo: um automóvel com perda parcial ou nula. Suponha que os eventos sejam equiprováveis, ou seja, $\pi_1 = 1/2$ e $\pi_2 = 1/2$. Considere a função de utilidade dada por $u(c) = c^{1/2}$. Pelo gráfico, o ponto C=(20,u(20)) representa a utilidade do consumo médio D entre A=(4,2) e B=(36,6), ou seja, D=(A+B)/2. Portanto, o consumidor averso ao risco prefere consumir o valor 20 sem incerteza e obter $u(20)$ a aceitar o risco e obter um valor esperado de beneficio $\pi_1 u(4) + \pi_2 u(36) = 4 < u(20)$.

[4]Ou seja, a utilidade avaliada no nível de consumo ótimo.

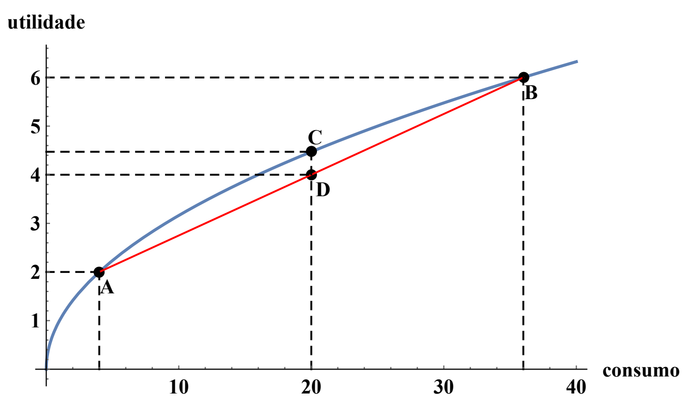


Figura 3.14: Utilidade de um consumidor averso ao risco

3.6.2 Resultado

No caso de uma solução interior, o seguinte lema é válido.

Lema 3.2. *Considere o problema dos agentes* (3.4). *Então, em uma solução interior* $\alpha \in \mathbb{R}_+$

$$\sum_{s \in S} \pi_s (t_s - p) u'((t_s - p)\alpha + r - d_s) = 0 \tag{3.5}$$

Demonstração: Basta derivar a Equação 3.4 em relação a α e igualar a zero. $\square$

O resultado abaixo mostra que para o caso em que o preço é atuarialmente justo, então o consumidor escolhe se assegurar completamente. Considere um ambiente com dois eventos em que $S = \{1, 2\}$ em a perda total de uma unidade do bem $d_2 = 1$ é concretizada no segundo evento e a transferência de $\alpha \leq 1$ unidades de seguro é dada por αt_2 com $t_2 = 1$. Suponha que não há perda no primeiro evento, ou seja, $d_1 = 1$. Além disso, suponha que não há pagamento no primeiro evento, ou seja, $t_1 = 0$. Logo o preço atuarialmente justo é dado por $p = \pi_1 t_1 + \pi_2 t_2 = \pi_2$.

Temos então o seguinte resultado:

Suponha que o preço do seguro satisfaça $p = \pi_2$ em que s_2 é o estado da perda. Então $\alpha = 1$ representa a escolha ótima.

Demonstração: Basta ver que $c_s = r - d_s + \alpha(t_s - p)$ para $s \in \{1, 2\}$. Portanto

$$\begin{aligned} c_1 &= r - d_1 + \alpha(t_1 - p) = r - 0 + \alpha(0 - p) = r - \alpha p \\ c_2 &= r - d_2 + \alpha(t_2 - p) = r - 1 + \alpha(1 - p) \end{aligned}$$

Logo, se $\alpha = 1$ então $c_1 = c_2$. Além disso, se $p = \pi_2$ então a Equação (3.5) é satisfeita pois para $\alpha = 1$ e $\pi_1 = 1 - \pi_2 = 1 - p$

$$\pi_1(t_1 - p)u'(c_1) = -p(1 - p)u'(r - p) = -\pi_2(t_2 - p)u'(c_2)$$

$\square$

Capítulo 4

Equilíbrio de Mercado

Neste capítulo, vamos sintetizar a teoria do consumidor e da firma para entender como um as fricções de mercado entre a oferta e a demanda podem levar a um equilíbrio. Estudaremos também algumas propriedades de eficiência e bem estar desse equilíbrio.

O objetivo seria entender as iterações entre os agentes econômicos em um mercado competitivo, ou de concorrência perfeita. Em geral, esse é um mercado que possui muitos compradores e vendedores do mesmo bem ou serviço. Essa hipótese garante que a ação de um indivíduo não tem efeito sobre o preço ou sobre as ações dos outros indivíduos.

O modelo de oferta e demanda consiste em 4 princípios básicos:

1. curva de demanda,
2. curva de oferta,
3. deslocamento dessas curvas,
4. preço de equilíbrio.

4.1 Curva de Demanda

A curva de demanda individual basicamente é dada pela função inversa da demanda $\hat{x}_k^i(p,m)$ do consumidor i fixados os preços diferentes de p_k e a renda m. A curva de demanda agregada é dada pela função inversa da soma de todas as demandas individuais. Descrevemos esta curva com o preço no eixo das ordenadas e a quantidade demandada no eixo das abscissas. Observação: o gráfico está na ordem inversa de causa e efeito ou de causalidade. A Figura 4.1 mostra a demanda agregada. A quantidade q representa o total demandado por todos os consumidores com disponibilidade para pagar o preço p ou mais, representados pela região hachurada.

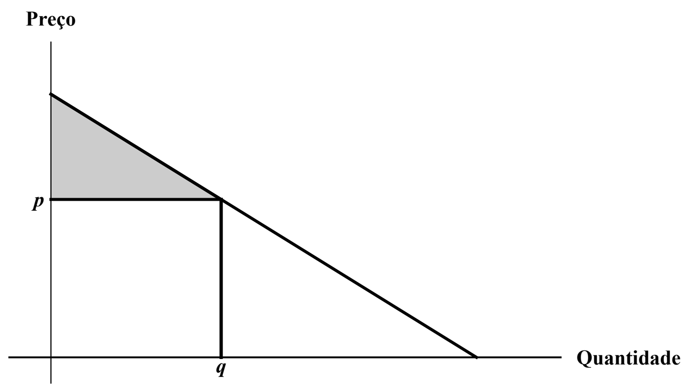


Figura 4.1: Curva de demanda agregada

A demanda pode sofrer choques externos positivos e negativos. Em geral um choque externo faz com que haja uma alteração da demanda qualquer que seja o preço. Isto significa que houve um deslocamento paralelo do gráfico. Portanto, dizer que a demanda se reduziu significa falar que a curva de demanda se deslocou para a esquerda. Analogamente para o evento inverso.

Exemplo. Um aumento do preço do álcool combustível pode ocasionar um aumento da demanda por gasolina, independente de qual seja o preço da gasolina. A Figura 4.2 mostra como choques positivos ou negativos podem deslocar a demanda agregada.

Fatores que contribuem para o deslocamento de uma curva de demanda:

1. mudança nos preços dos bens relacionados;
2. a queda do preço de um bem substituto a um bem produz um deslocamento da curva de demanda desse bem para a esquerda, ou seja, diminuição de demanda;
3. mudança de renda;
4. mudança nas expectativas. As expectativas sobre os lucros futuros de uma empresa podem mudar a demanda por uma ação dessa empresa.

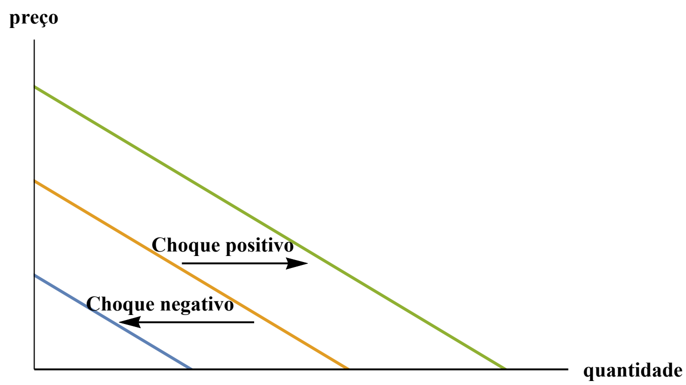


Figura 4.2: Deslocamentos da curva de demanda

4.2 Curva de Oferta

A curva de oferta individual basicamente é dada pela função inversa da oferta $\hat{y}^j(p, w)$ da firma j fixados os preços dos insumos w. A curva de oferta agregada é dada pela função inversa da soma de todas as ofertas individuais. Descrevemos esta curva com o preço no eixo das ordenadas e a quantidade ofertada no eixo das abscissas. Observação: o gráfico está na ordem inversa de causa e efeito ou de causalidade. A Figura 4.3 mostra a oferta agregada. A quantidade q representa o total ofertado por todas as firmas com disponibi-

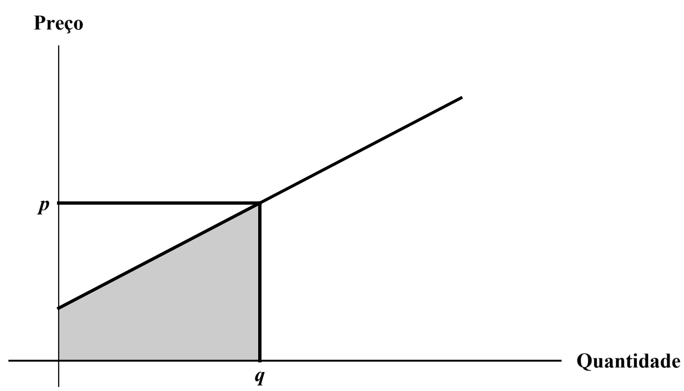


Figura 4.3: Curva de oferta agregada

lidade para receber o preço p ou menos, representadas pela região hachurada.

A oferta pode sofrer choques externos positivos e negativos. Em geral um choque externo faz com que haja uma alteração da oferta qualquer que seja o preço. Isto significa que houve um deslocamento paralelo do gráfico. Portanto, dizer que a oferta se reduziu significa falar que a curva de oferta se deslocou para a esquerda. Analogamente para o evento inverso.

Exemplo. Um aumento do custo do trabalho reduz a oferta do produto, independente de qual seja o preço do produto. A Figura 4.4 mostra como choques positivos ou negativos podem deslocar a oferta agregada.

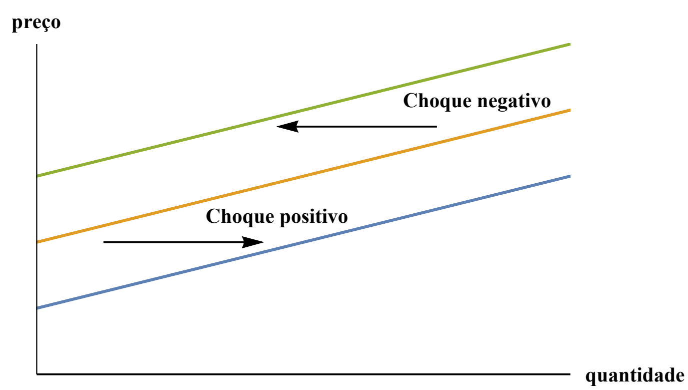


Figura 4.4: Deslocamentos da curva de oferta

Fatores que contribuem para o deslocamento de uma curva de oferta:

1. mudança nos preços dos insumos relacionados;
2. mudança de estrutura de custos;
3. mudanças tecnológicas;
4. mudança nas expectativas. As expectativas sobre os lucros futuros de uma empresa podem mudar a oferta por uma ação dessa empresa.

4.3 Excedente do Consumidor e do Produtor

Para entender como as iterações entre os agentes econômicos podem levar a uma melhora de bem estar social, primeiramente, precisamos construir uma medida que seja coerente. Uma das propostas seria a quantidade monetária que os agentes "economizam" ao observar um preço de mercado. Essa economia seria dada como a diferença entre o preço de equilíbrio e o preço que o agente econômico acharia desejável.

A Figura 4.5 mostra como fica a sensação de economia que os compradores possuem ao observar um preço de mercado.

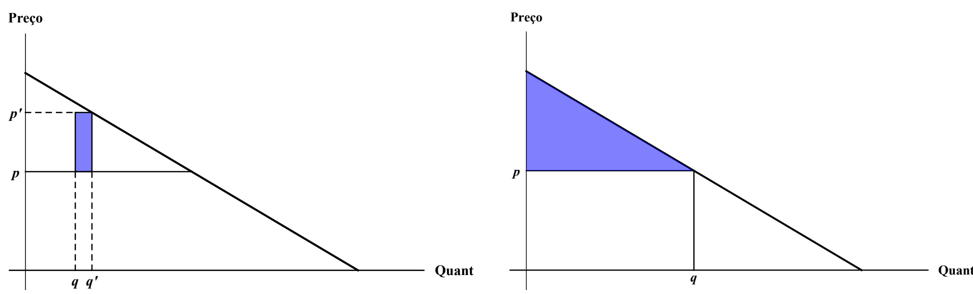


Figura 4.5: Excedente do Consumidor

Na parte esquerda, a área hachurada corresponde à diferença entre o preço p' que um certo grupo de consumidores está disposto a pagar e o preço de mercado p multiplicado pela quantidade consumida por esse grupo que será dada por $q' - q$. Essa medida é dada em unidades monetárias e representa o valor que os consumidores desse grupo "economizou" indiretamente. A parte direita corresponde a soma de todos os retângulos da esquerda, agregando assim todo o bem estar dos consumidores.

A Figura 4.6 mostra como fica a sensação de receita adicional que as firmas possuem ao observar um preço de mercado.

Na parte esquerda, área hachurada corresponde à diferença entre o preço de mercado p e o preço p' que um certo grupo de produtores está disposto a ofertar multiplicado pela quantidade produzida por esse grupo que será dada por $q - q'$. Essa medida também é dada em unidades monetárias. A parte direita corresponde a soma de todos os retângulos da esquerda, agregando assim todo o bem estar dos produtores.

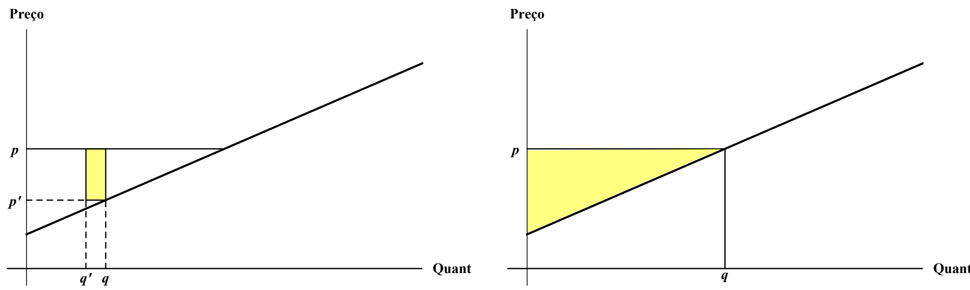


Figura 4.6: Excedente do Produtor

O excedente total será dado pela soma dos excedentes dos produtores e dos consumidores. A Figura 4.7 mostra o excedente total de um preço de mercado.

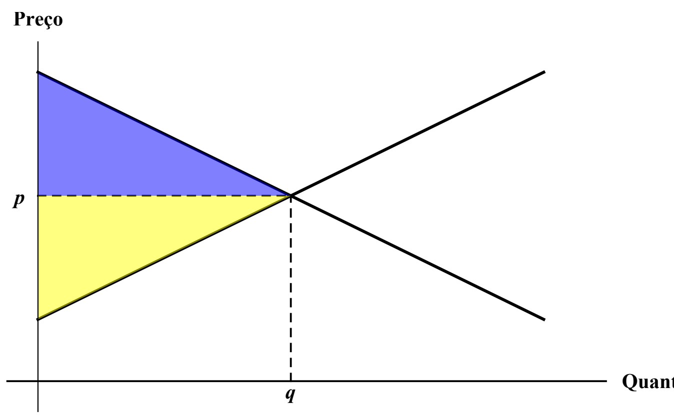


Figura 4.7: Excedente total da economia

4.4 Equilíbrio

A teoria do consumidor e da firma desempenham um papel fundamental para o estudo de como um mercado pode precificar um bem de forma com que todas a as oportunidades de explorar alguma transação mutuamente benéfica estejam exauridas. Neste caso, nenhum agente econômico possui incentivo a se desviar de suas escolhas, ou seja, todos os vendedores encontram seus respectivos compradores. Esta situação é denominada equilíbrio de mercado.

Para entender o equilíbrio de mercado, primeiro temos que entender a situação de desequilíbrio inicial em que há ou excesso de oferta ou de demanda. A Figura 4.8 mostra três regiões formadas por dois preços. O preço

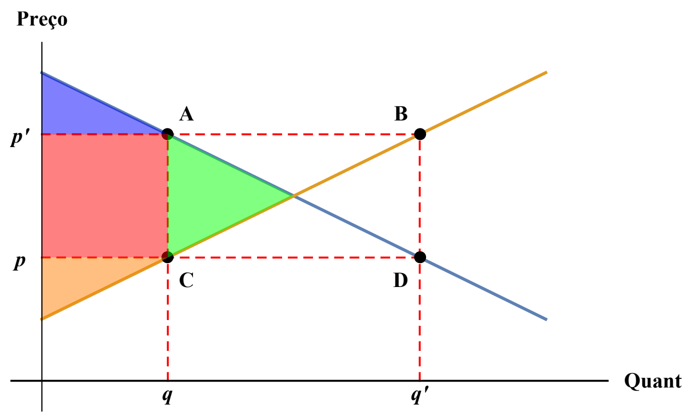


Figura 4.8: Excedente total da economia

p leva a uma demanda q' e oferta q. Logo temos um excesso de demanda $q' - q$ e uma pressão para aumento de preços. O preço p' leva a uma demanda q e oferta q'. Logo temos um excesso de oferta $q' - q$ e uma pressão para redução de preços. Em ambos casos, os preços podem convergir para um preço de equilíbrio caso não haja nenhum impedimento para isso. O gráfico ilustra esse fato. Notem que para o preço p, o excedente do produtor é a área do triângulo bege e o do consumidor a área do retângulo vermelho mais a área do triângulo azul. Note que o excedente total não inclui o triângulo verde, que representa várias oportunidades de negociação entre compradores e vendedores que poderiam negociar por um preço diferente de p ou p'. Portanto, novas rodadas de negociações podem levar os dois preços p e p' a convergirem. Esse será o preço de mercado.

A Figura 4.9 mostra esse preço. Observe que as áreas verde e vermelha não exitem mais. Portanto, na situação anterior, não havia um bem estar máximo. A área verde representava uma medida de oportunidades que ainda não tinham sido exploradas, portanto nos dois casos de p e p', o excedente total sempre ficava abaixo do excedente total dado no equilíbrio, representado

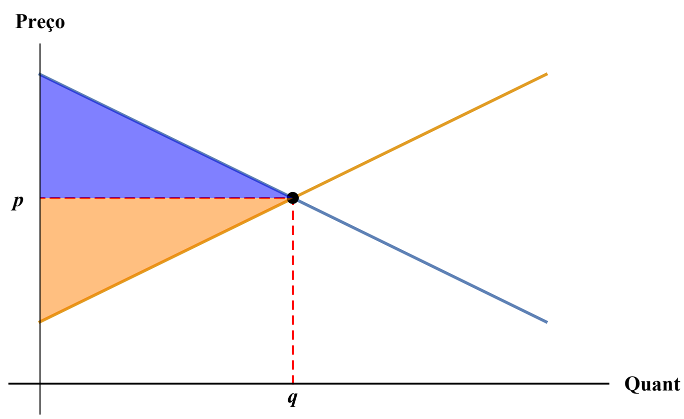


Figura 4.9: Excedente total da economia

pelas áreas dos triângulos azul e bege da Figura 4.9, que se torna maximizado. Portanto, um equilíbrio de mercado maximiza o bem estar social.

Para se calcular um equilíbrio, basta igualar a oferta e a demanda e obter um sistema de equações que leva a solução de preços e quantidades demandadas.

4.5 Equilíbrio e Imposto

Para entender o que acontece quando se coloca um imposto em um mercado de concorrência perfeita, vamos considerar para simplificar nossa análise que o imposto incide sobre o vendedor e esse imposto é calculado sobre quantidade. Temos então que a curva de oferta irá ficar deslocada para a esquerda (ou para cima) na magnitude exatamente igual ao imposto. De fato, dado um preço de negociação no mercado p, a quantidade ofertada será fornecida pelas firmas que estão dispostas a oferecer o produto por um preço igual ou menor que p menos o imposto. Logo para um preço qualquer de negociação no mercado, a oferta se reduz com um imposto.

Mais precisamente, considere a função de oferta $p = \hat{p}(q)$ em que p é o preço negociado com os compradores na situação em que não há imposto. Suponha agora que seja aplicada uma taxa de imposto t. Como p é o preço negociado com os compradores, ele contém o imposto t. Logo o preço efetivamente recebido será $p - t$ e a quantidade ofertada q será correspondente ao preço p descontado, ou seja, q satisfaz $p - t = \hat{p}(q)$. Portanto, a nova equação de oferta fica

$$p - t = \hat{p}(q) \text{ ou seja } p = \hat{p}(q) + t \text{ para todo } q \in \mathbb{R}_+.$$

A Figura 4.10 mostra claramente este fato para o caso de oferta e demanda lineares. O segmento AB tem exatamente a magnitude do imposto. Temos

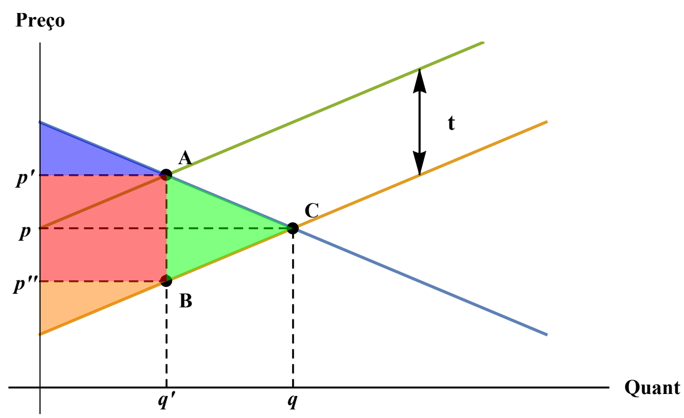


Figura 4.10: Deslocamento da oferta com o imposto.

que (p, q) representa o equilíbrio sem imposto e (p', q') representa o equilíbrio com o imposto t. Observe que p'' não pode ser o preço de equilíbrio com o imposto pois os consumidores com disponibilidade para pagar p serão aqueles que negociarão mais intensamente pelo bem, levando o preço de equilíbrio de p para p'. O valor de $p' - p''$ então representa a magnitude do imposto. Podemos ver também que que $p' - p$ é a parte do imposto que recai sobre o consumidor e $p - p''$ a parte do imposto que recai sobre o produtor, o qual efetivamente recebe $p'' = p' - t$.

Observe que a área do retângulo vermelho representa a arrecadação do imposto e as áreas dos triângulos azul e laranja[1] os excedentes do consumidor e do produtor respectivamente. Somando-se essas áreas, não teremos a área verde. Vimos anteriormente que essa área fica incluída no excedente total da economia pois em um mercado livre o bem estar é maximizado. Portanto, mesmo que o governo redistribuísse o imposto de forma eficiente para o mercado, o que não ocorre na prática, o bem estar não seria igual à situação

[1] Ou bege, não fique assustado se o professor for daltônico.

de livre mercado. A área do triângulo verde é chamada de peso morto do imposto e representa a distorção causada por um imposto.

4.5.1 Equilíbrio, Imposto e Elasticidades

Vamos entender agora as condições que fazem com que o imposto possa recair mais sobre o produtor ou o comprador. A forma com que o imposto se divide entre ambos está diretamente relacionada com a elasticidade da oferta e da demanda.

A Figura 4.11 ilustra bem como será a distribuição da carga tributária. Observe que a elasticidade da oferta fica inversamente proporcional à inclinação do gráfico, pois a função de oferta está invertida. Veja equação (2.2) para entender esse fato. Para o caso no qual a oferta possui elasticidade maior que a da demanda, vemos que o imposto que recai sobre o consumidor $p' - p$ é bem maior que o imposto que recai sobre o produtor $p - p''$. Para o caso no qual a oferta possui elasticidade menor que a da demanda, vemos que o imposto que recai sobre o consumidor $p' - p$ é bem menor que o imposto que recai sobre o produtor $p - p''$. Observe também que o peso morto do imposto nos dois casos é dado por $(q - q')t/2$. Na Figura 4.11, visualmente podemos notar que a variação $q - q'$ é menor no gráfico da esquerda do que no gráfico da direita. Podemos concluir então que, no caso em que a oferta possui elasticidade maior que a da demanda, a perda do peso morto é menor, ou seja, a distorção do imposto fica menor.

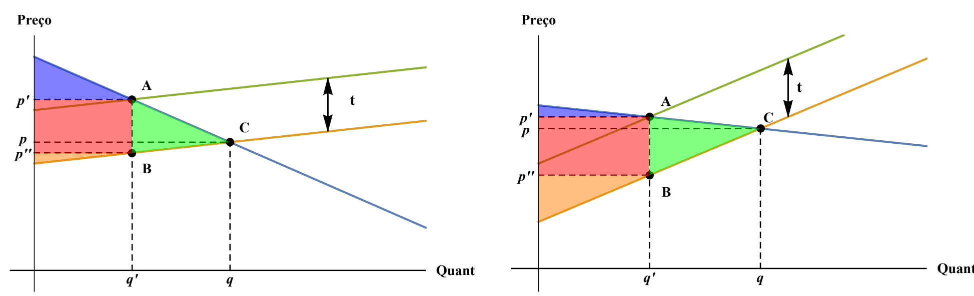


Figura 4.11: Oferta com elasticidade alta na esquerda e com elasticidade baixa na direita.

Intuitivamente, quando a elasticidade da oferta é alta em relação à da demanda, uma pequena redução no preço recebido pelas firmas faz com que a oferta agregada se reduza em larga escala, e o mesmo não acontece com a demanda quando os preços aumentam, gerando uma escassez do bem no mercado. Portanto, os consumidores com maior disponibilidade para pagar pelo bem preferem reduzir seu excedente e pagar mais pelo imposto. O oposto acontece quando a elasticidade da oferta é baixa em relação à da demanda. Note que em ambos casos, o produtor não consegue repassar todo o imposto para os consumidores.

Para o caso da inflação, temos um problema mais sério. Segundo os modelos de Ramsey e os resultados acima, podemos entender a inflação como um imposto, também chamado de imposto inflacionário. Ele não é cobrado diretamente por uma autoridade central, mas é alocado pelas fricções de mercado através do aumento heterogêneo dos preços. Neste caso, vemos pela Figura 4.11 que os mercados com elasticidade da demanda relativamente mais baixa receberão maior parte do imposto. Isto se dá pelo fato que as forças de mercado levam à minimização das distorções causadas pelo imposto. Como argumentado anteriormente, o peso morto do imposto é menor para o caso em que a elasticidade da oferta é maior que a da demanda. Isto mostra como a inflação é um imposto que sobrecarrega os consumidores de baixa renda, já que os mesmos consomem uma fração alta da renda em bens necessários. Com efeito, os bens necessários estão em mercados com elasticidade da demanda mais baixa em relação à elasticidade da oferta.

4.5.2 Equilíbrio, Quotas e Tetos

Quando o governo quer favorecer certos setores da economia estabelecendo um nível fixo de preços em um certo mercado, ele pode realizar um controle de preços.

Exemplo: o governo estabelece um limite inferior para o preço do algodão para favorecer os agricultores.

Exemplo: limite máximo de preços para remédios, também conhecido como tabelamento.

Exemplo: controle do preço do aluguel.

A interferência do governo em mercados competitivos pode facilitar o surgimento de mercados paralelos.

Teto nos preços

Limite superior para o pagamento de um bem ou serviço.

Teto nos preços gera ineficiência: duas pessoas podem melhorar negociando entre si.

Exemplo: teto de 800 no aluguel de um apartamento.

Indivíduo 1: Disposto a pagar 1500 de aluguel em um apartamento.

Indivíduo 2: Paga 800 e está disposto a pagar no máximo 850 (proprietário de um apartamento alugado a 800 por exemplo)

Se fosse possível, o Indivíduo 1 proporia ao Indivíduo 2 o pagamento de um aluguel de 1200. Neste caso os dois melhorariam.

Problemas com controle de preços:

1. Ineficiência: No caso do exemplo acima muitas pessoas querem alugar apartamento mas não conseguem.

2. Desperdício de recursos. Quando as pessoas estão procurando imóvel para alugar poderiam estar gastando seu tempo com atividades mais produtivas: custo de oportunidade.

3. Baixa qualidade: No caso dos aluguéis, os locadores não têm incentivos para oferecer melhores condições de moradia.

4. Atividades ilegais. Um inquilino (indivíduo 2 do exemplo) pode fazer um contrato ilegal alugando o apartamento por um preço maior para o outro indivíduo (indivíduo 1 por 1200 reais.)

Quando o teto dos preços está acima do nível de equilíbrio então nada acontece

Piso para os preços

Controle em que um nível mínimo de pagamento deve ser realizado por um bem ou serviço. Exemplo: no mercado de trabalho pode-se estabelecer um valor mínimo para o salário do trabalhador contratado conforme os parâmetros da lei.

Exemplo: o governo estabelece um preço mínimo de uma mercadoria agrícola para incentivar a população do campo e diminuir o êxodo rural.

Problemas no piso de preços

1. Piso nos preços gera ineficiência. Exemplo: uma pessoa disposta a trabalhar por menos que o salário mínimo deixa de produzir.

2. Desperdício de recursos: o excedente de oferta às vezes é destruído para evitar mercados paralelos.

3. Qualidade elevada por ineficiência. Exemplo: Luxo nos aviões.

4. Atividade ilegal.

Controle de quantidades

Limite inferior para a quantidade ofertada, também conhecido como quotas.

Exemplo: emissão de licenças no mercado de transporte por táxi.

Renda da cota: diferença entre o preço de oferta e demanda dada a quantidade estabelecida pelo governo.

Problemas com o controle das quantidades:

1. Ineficiência;

2. Oportunidades perdidas;

3. Incentivo à ilegalidade.

Os gráficos da Figura 4.12 mostram o que acontece com um mercado quando se interfere diretamente no preços. Note que quando há um teto

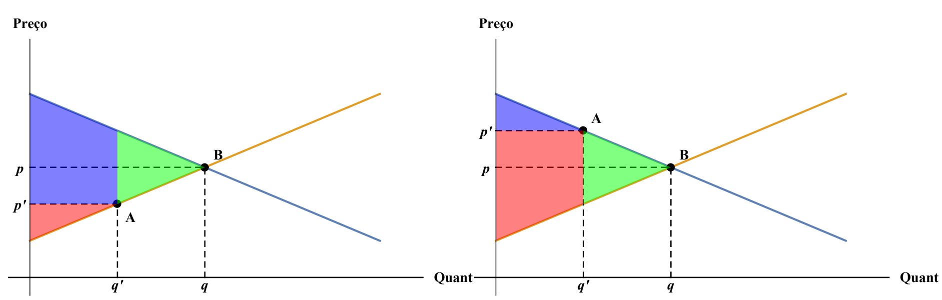


Figura 4.12: Teto de preços na esquerda e quota na direita.

nos preços, o equilíbrio será no preço p' que se situa abaixo de p no gráfico da esquerda. O excedente do consumidor fica bem elevado e o excedente total, que é a soma da região azul com a vermelha, não inclui a área verde. Portanto, o bem estar social não fica maximizado.

Quando há um quota, o equilíbrio será no preço p' que se situa acima de p no gráfico da direita. Esse preço surge pois o mercado vai selecionar os consumidores que têm maior disposição a pagar pelo bem já que não há oferta para todos os indivíduos que estão dispostos a pagar até o preço p sem a quota. O excedente do consumidor fica bem elevado e o excedente total, que é a soma da região azul com a vermelha, não inclui a área verde. Portanto, o bem estar social não fica maximizado.

Em geral os modelos econômicos mais completos mostram os mesmos resultados. Mesmo para situações mais gerais, interferências externas em mercados de concorrência perfeita levam a uma perda de bem estar econômico que não pode ser compensada com o retorno dos recursos para a economia em forma de investimentos, subsídios, etc. Existe um arcabouço teórico que tenta balancear os benefícios e os custos de alguma intervenção quando os mercados possuem falhas, geram problemas exteriores como poluição, congestionamento, etc ou deixam de gerar algum benefício exterior ao mercado. Exemplo: a educação primária reduz a violência. Neste caso, as distorções do imposto podem compensar de alguma maneira as intervenções que amenizam os diversos problemas ou estimulam as qualidades de transações benéficas que não são levadas em consideração pelo mercado.

Capítulo 5

Teria dos Jogos

5.1 Introdução

A teoria dos jogos é um arcabouço de definições e resultados envolvendo a iteração de agentes econômicos em que as hipóteses de competição perfeita não valem. Essa teoria nasceu para explicar fatos estilizados que podem acontecer quando há falhas de mercado.[1] A principal falha de mercado observada na prática seria o caso em que pelo menos um agente econômico possui algum poder de mercado, no sentido de controlar diretamente alguma escolha de um outro agente econômico no ambiente competitivo.

Felizmente, neste caso podemos entender vários comportamentos usando modelos matemáticos. A principal caracterização neste ambiente seria a de equilíbrio. Informalmente, em um certo ambiente econômico, dizemos que uma alocação de bens e ativos constitui um equilíbrio quando ela tem a propriedade de que um agente qualquer não tem incentivo a desviar de suas escolhas dado o que os outros estão escolhendo. Vamos então a partir de agora detalhar como funciona um jogo.

Vamos primeiramente estudar os jogos simultâneos, em que os jogadores observam apenas sua própria escolha, ou então quando todos executam suas jogadas simultaneamente. Depois vamos estudar o caso de jogos sequenciais em que os jogadores excetuam suas jogadas em períodos diferentes do tempo e portanto alguma informação sobre as jogadas de um determinado jogador pode ser observada pelos jogadores que jogam posteriormente.

[1] Por exemplo, nem sempre as alocações escolhidas podem ser eficientes, ou até mesmo pode não haver equilíbrio.

Vamos definir mais formalmente um jogo como um conjunto de jogadores $I = \{1, 2, \cdots, n\}$, cada um com um conjunto de jogadas ou ações A_i e de estratégias S_i. Uma estratégia é um planejamento de jogadas de maneira com qualquer agente pode jogar em seu lugar e o resultado do jogo será o mesmo. Vamos detalhar melhor o conceito de estratégia na parte de jogos sequenciais. Para cada rodada de jogadas os jogadores conseguem observar um ganho para cada um que gera um benefício dado por uma função de utilidade $u_i : R \to \mathbb{R}$ que discrimina o beneficio do jogador i em cada resultado $r \in R$ do jogo. Em resumo, um jogo pode ser descrito com as premissas $\{I, A_i, S_i, u_i, R\}_{i \in I}$. Como cada perfil de jogadas entre os jogadores define um resultado para o jogo, então podemos entender o conjunto de resultados como contido no produto cartesiano $S_1 \times \cdots \times S_n$ ou seja $R \subset \prod_{i \in I} S_i$.

5.2 Jogos Simultâneos

Quando temos um jogo simultâneo, então ele pode ser escrito de maneira mais sucinta. Isto se dá pelo fato de que neste caso uma estratégia é simplesmente escolher uma jogada. Como os jogadores não observam as jogadas dos outros jogadores, eles não conseguem realizar planejamento de jogadas contingenciadas ao que fazem os outros jogadores. Em resumo temos $A_i = S_i$ para todo $i \in I$. Temos então a seguinte definição.

Definição 5.1. *Um jogo de I jogadores na forma normal é representado por um conjunto de estratégias $\{S_i\}_{i \in I}$ um conjunto de função de ganhos $\{u_i : R \to \mathbb{R}\}_{i \in I}$.*

5.2.1 Jogos de Soma Zero

Para exemplificar um jogo, vamos considerar a seguinte partida de par ou ímpar utilizando-se uma das mãos apenas. Temos $n = 2$ jogadores, o conjunto de resultados $R = \{par, impar\}$ e a seguinte regra de ganhos. Se o resultado for par então o jogador 1 recebem um real do jogador 2 e se o resultado for ímpar então o jogador 2 recebem um real do jogador 1. Como cada jogador utiliza somente uma das mãos então o conjunto de estratégias do jogador 1 é dado por $S_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e o conjunto de estratégias do jogador é idêntico ao do jogador 1. Suponha que o benefício de cada real ganho a mais é exatamente 1 ou seja $u_1(par) = 1$ e $u_1(impar) = -1$. Para o jogador 2 teremos o inverso, ou seja, $u_1(par) = -1$ e $u_1(impar) = 1$. Este jogo pode ser resumido com a seguinte matriz de ganhos[2]

		Jog 2	
	Estrat	par	imp
Jog 1	par	(1,-1)	(-1,1)
	imp	(-1,1)	(1,-1)

Figura 5.1: Jogo de par ou ímpar

Essa matriz de ganhos é definida da seguinte maneira. Cada elemento da matriz é dado por um par ordenado (u_1, u_2) que estabelece os ganhos do jogador 1 (número da esquerda) e do jogador 2 (número da direita) para cada estratégia conjunta especificada na parte externa da matriz.

5.2.2 Dilema dos prisioneiros

Um jogo importante de ser considerado se chama dilema dos prisioneiros. Este jogo dá uma idéia de como funciona o instituto da delação premiada. Considere uma situação em que dois parceiros em um crime serão interrogados em salas separas. Os criminosos em potencial são informados sobre todas as regras do processo de delação premiada. Cada prisioneiro tem a opção de confessar o crime, e implicando assim o outro, ou negando que ele tenha participado no crime. Se apenas um prisioneiro confessar, ele terá uma pena reduzida para um ano e as autoridades incriminariam o outro prisioneiro com 6 anos de prisão. Se ambos prisioneiros negarem estar envolvidos, então ambos serão detidos por 2 anos, e se ambos os prisioneiros confessarem, ambos serão detidos por 3 anos. As regras do interrogatório são reveladas para cada criminoso antes de ser interrogado e claramente premiam o criminoso que contribui com a polícia. É bem parecido com o instituto da delação premiada. A tabela abaixo resume como será esse jogo, em que c e nc são as abreviações das estratégias confessa e não confessa respectivamente.

[2] Esse jogo é também conhecido como jogo competitivo, ou de soma zero.

		Jog 2	
	Estrat	c	nc
Jog 1	c	(-3,-3)	(-1,-6)
	nc	(-6,-1)	(-2,-2)

Figura 5.2: Jogo do Dilema dos Prisioneiros

5.2.3 Racionalidade

Nesta seção descreveremos como a racionalidade pode tornar o resultado de um jogo previsível. Dizemos que um jogo não cooperativo possui jogadores racionais quando eles sempre escolhem as decisões melhores para si e assumem que os outros jogadores também façam o mesmo.

Vamos escrever as definições formais apenas com dois jogadores. Neste caso o espaço de resultados fica $R = S_1 \times S_2$. Vamos definir os conceitos para o jogador 1. Para o jogador 2 as definições são idênticas apenas trocando-se os índices.

Primeiramente para facilitar vamos definir uma função de melhor resposta. Informalmente uma estratégia é uma melhor resposta para um certo jogador quando dado uma estratégia fixa do outro jogador, ela define qual a estratégia que leva ao maior ganho. Formalmente para o jogador 1

Definição 5.2. *A função de melhor resposta $\hat{m}_1 : S_2 \to S_1$ para o Jogador 1 é definida por*

$$\hat{m}_1(s_2) = \operatorname{argmax}\{u_1(s_1, s_2) \textit{ tal que } s_1 \in S_1\}.$$

em que argmax *representa o conjunto contendo os pontos de máximo de uma função.*

A Definição 5.2 acima nos diz em termos formais que dado qualquer $s_2 \in S_2$ fixo temos

$$u_1(\hat{m}_1(s_2), s_2) \geq u_1(s_1, s_2) \text{ para todo } s_1 \in S_1.$$

Um conceito importante na racionalidade é o de estratégia estritamente dominante e estritamente dominada. Dizemos que uma estratégia é estritamente dominada quando existe uma outra estratégia que leva a maiores ganhos independentemente do que os outros jogadores façam. Dizemos que uma estratégia é estritamente dominante quando domina todas as outras. Neste caso o melhor para ambos jogadores é jogar a estratégia estritamente dominante.

Definição 5.3. *A estrategia s_1 é estritamente dominada para o Jogador 1 quando existe alguma outra estratégia $s_1' \in S_1$ tal que*

$$u_1(s_1, s_2) < u_1(s_1', s_2) \text{ para todo } s_2 \in S_2.$$

Neste caso dizemos que s_1' domina a estratégia s_1 para o Jogador 1.

Para a estratégia estritamente dominante formalmente dizer que ela domina todas as outras significa dizer que ela é a melhor estratégia independentemente do que os outros jogadores façam. Mais formalmente

Definição 5.4. *A estratégia s_1 é estritamente dominante para o Jogador 1 quando para qualquer estratégia arbitrária $s_2 \in S_2$ temos que*

$$u_1(s_1, s_2) > u_1(s_1', s_2) \text{ para todo } s_1' \in S_1$$

Utilizando-se a notação de melhor resposta, então uma estratégia é estritamente dominada quando ela é a melhor resposta para qualquer jogada do adversário. Mais formalmente, se s_1 é estritamente dominante então

$$s_1 \in \hat{m}_1(s_2) \text{ para todo } s_2 \in S_2.$$

Vamos analisar se o jogo do dilema dos prisioneiros possui alguma estratégia estritamente dominante ou dominada para Jogador 1.

Primeiramente, note que dado que o Jogador 2 confessa, a melhor resposta para o Jogador 1 também é confessar pois é condenado a 3 anos em vez de 6. Dado que o Jogador 2 não confessa, a melhor resposta para o Jogador 1 é confessar pois é condenado a 1 ano em vez de 2. Logo, confessar é uma estratégia estritamente dominante para o Jogador 1 pois domina a única estratégia restante e, analogamente, podemos ver que não confessar é uma estratégia estritamente dominada. Por simetria podemos concluir, utilizando um raciocínio análogo, que confessar é uma estratégia estritamente dominante para o Jogador 2 e não confessar uma estratégia estritamente dominada. Mais formalmente

$$u_1(c, c) = -3 > -6 = u_1(nc, c) \qquad u_1(c, nc) = -1 > -2 = u_1(nc, nc)$$

$$u_2(c,c) = -3 > -6 = u_2(c,nc) \qquad u_2(nc,c) = -1 > -2 = u_2(nc,nc)$$

Utilizando a racionalidade dos jogadores, podemos obter o resultado de um jogo removendo as estratégias estritamente dominadas quando isto for possível. No caso do dilema dos prisioneiros, a racionalidade leva à confissão mútua dos prisioneiros. Este é um resultado bastante previsível do jogo e bem observado na prática do instituto da delação premiada. Este perfil de estratégias que leva ao resultado do jogo é conhecido como equilíbrio em estratégias estritamente dominadas.

Informalmente, um perfil de estrategias $\{s_1^*, s_2^*\}$ constitui-se um equilíbrio em estratégias estritamente dominadas quando s_1^* é a estratégia de melhor resposta para o Jogador 1, ou seja, leva ao maior ganho independentemente do que o Jogador 2 faça e s_2^* é a estratégia de melhor resposta para o Jogador 2, ou seja, leva ao maior ganho independentemente do que o Jogador 1 faça. Temos então a seguinte definição formal

Definição 5.5. *Um perfil de estratégias $\{s_1^*, s_2^*\}$ é um equilíbrio em estratégias estritamente dominantes quando*

$$s_1^* \in \hat{m}_1(s_2) \text{ para todo } s_2 \in S_2 \quad e \quad s_2^* \in \hat{m}_2(s_1) \text{ para todo } s_1 \in S_1$$

5.2.4 Equilíbrio de Nash (EN)

Como podemos ver no jogo de par ou ímpar na Figura 5.1, nem sempre um jogador possui estratégias estritamente dominantes. Mais ainda, em jogos competitivos ou semi competitivos em geral as estratégias estritamente dominantes são muito raras. Mesmo assim podemos ter um grau de previsibilidade para os resultados do jogo. O grande pioneiro nesta percepção foi grande matemático e prêmio Nobel em economia John Forbes Nash Jr. Sua idéia se originou na tentativa de encontrar estratégias em que nenhum jogador tenha incentivo a se desviar dado o que os outros jogadores estejam fazendo. Ele mostrou também que se cada jogador atribui crenças probabilísticas sobre a frequência com que os outros jogadores irão jogar, então haverá sempre um equilíbrio no jogo.

Vamos começar exemplificando com o jogo descrito pela Figura 5.3. Nela observamos os ganhos de um duopólio que compete através de níveis de produção. Em determinado período, as duas firmas escolherão quanto produzir simultaneamente. Portanto, uma estratégia para cada firma seria a quantidade produzida naquele período. Notem que as firmas podem escolher em

		Firma 2	
	Estr	2	5
Firma 1	2	(25,40)	(15,25)
	5	(30,20)	(20,30)

Figura 5.3: Jogo evolvendo um duopólio.

produzir 2 ou 5 mil unidades no período anterior e os lucros refletem o excesso ou a escassez de oferta do produto no mercado. Se as firmas escolhem produzir pouco, então elas dividirão uma quantidade maior de lucro no mercado pois o efeito do aumento de preços supera o efeito da redução da quantidade agregada.

Porém essa situação não corresponde a uma alocação estável de produção no período corrente. Com efeito, se a Firma 1 resolve unilateralmente aumentar sua produção para 5 mil unidades, então ela aumentará seu lucro. Certamente essa é uma ameaça crível da Firma 1 que a Firma 2 deve levar em consideração ao fazer suas escolhas. Portanto a alocação $(25, 40)$ apresenta incentivo a desvios.

A pergunta que J. Nash fez quando analisou esse tipo de jogo foi: será que não existe outro perfil de alocações em que nenhum jogador teria incentivo a se desviar de suas escolhas dado o que o outro esteja fazendo? A resposta foi que sim. Suponha que, no passado, as firmas estejam escolhendo produzir 5 mil unidades cada uma. Então qualquer mudança unilateral de estratégia no período corrente leva a uma perda de lucros, como podemos ver claramente na Figura 5.3. Esse conceito é definido como equilíbrio de Nash, em homenagem a esse grande gênio que mudou a forma de se pensar em economia no século XX. Informalmente, um equilíbrio de Nash é um perfil de estratégias em que, dado o que os outros jogadores estejam fazendo, nenhum outro jogador tem incentivo a se desviar de suas escolhas. Mais precisamente temos a definição abaixo

Definição 5.6. *Um perfil de estratégias $\{s_1^*, s_2^*\}$ é um E.N. quando*

$$s_1^* \in \hat{m}_1(s_2^*) \qquad e \qquad s_2^* \in \hat{m}_2(s_1^*)$$

ou seja

$$s_1^* \in \operatorname{argmax}\{u_1(s_1, s_2^*) : s_1 \in S_1\} \ e \ s_2^* \in \operatorname{argmax}\{u_2(s_1^*, s_2) : s_2 \in S_2\}$$

5.3 Jogos Sequenciais

Na seção anterior estudamos uma situação em que um jogador não consegue obter nenhuma informação a respeito das jogadas dos outros, o que é o caso de quando eles jogam simultaneamente. Vamos agora estudar jogos em que os jogadores podem obter algumas informações sobre as jogadas dos outros. Neste caso, os jogadores não podem jogar simultaneamente. Portanto, vamos supor que eles jogam em sequência um após o outro.

5.3.1 Diagrama de um jogo sequencial

Para exemplificar, vamos estudar um jogo de comércio internacional em que se quer avaliar a possibilidade de reduzir tarifas de importação e abrir o mercado para empresas estrangeiras. Suponha que dentro do país exista um mercado com várias firmas parecidas que podem ser representadas apenas por uma. Suponha a mesma situação para as firmas estrangeiras. A Figura 5.4 mostra o jogo em forma de árvore, resumindo os resultados em função das escolhas dos jogadores. Cada bifurcação da árvore deriva de um ponto

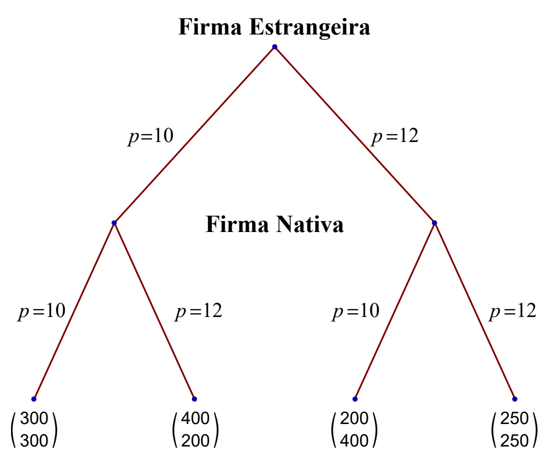


Figura 5.4: Jogo sequencial em uma abertura comercial

que é chamado de nó. Os nós localizados na parte inferior da árvore são denominados nós terminais. Os ganhos estão resumidos na parte inferior da árvore, em que o ganho do primeiro jogador sempre será dado pela primeira linha da matriz de ganhos de cada nó terminal da árvore. O ganho do segundo jogador localiza-se na segunda linha e assim por diante. O jogo será detalhado como segue.

Nesse jogo, a firma nativa já está operando, portanto podemos dizer que a firma estrangeira (FE) seria o primeiro jogador, ou seja, a que joga primeiro. A firma estrangeira vai escolher entrar com preço baixo ou alto no mercado do país em questão, dependendo de qual preço a firma nativa (FN) representativa estará praticando no mercado na abertura do país. Cada firma pode escolher em competir com preço $p = 10$ ou $p = 12$ reais por unidade. Logo o conjunto de ações é dado por $A_i = \{10, 12\}$ para cada firma $i \in \{1, 2\}$. A firmas podem escolher preços baixos para tentar expulsar a outra firma do mercado e depois praticar preços de monopólio ou então aceitar em dividir o mercado com a firma estrangeira representativa mantendo preços competitivos.

Vamos supor que quando as duas firmas escolhem $p = 10$, ambas têm um lucro de 300 milhões. Se a FE escolhe $p = 10$ e a FN $p = 12$ então a FE obtém uma fatia do mercado que era ocupada pela firma nativa e o efeito do aumento da demanda compensa o efeito da redução nos preços. Logo seu lucro passa de 300 milhões para 400. A FN tem seu lucro reduzido para 200 pelo raciocínio inverso. Por outro lado se a FE escolhe $p = 12$ e a FN $p = 10$ os ganhos se invertem pelo mesmo motivo anterior. Caso as firmas escolham preços idênticos $p = 12$ então ambas perdem uma fatia de mercado e têm lucro reduzido de 300 para 250 em relação à situação em que elas cobravam $p = 10$. A próxima seção discrimina como podemos prever um resultado para esse jogo.

5.3.2 Equilíbrio em um jogo sequencial

Antes de entendermos o conceito de equilíbrio em um jogo sequencial, precisamos primeiramente entender como se define uma estratégia no jogo sequencial. Como já visto anteriormente, uma estratégia é um planejamento contingente às escolhas dos outros jogadores. Para o caso de dois jogadores uma estratégia é simplesmente uma ação ou então uma função que estabelece uma ação para cada ação jogada pelo outro jogador. Essa função serve como planejamento de escolhas do jogador, de maneira com que se este último decidir colocar outro jogador para jogar em seu lugar escolhendo a mesma estratégia, ou resultado do jogo será o mesmo.

Voltando ao nosso exemplo de comércio internacional, as estratégias da firma estrangeira são $p = 10$ ou $p = 12$. Porém, para a firma nativa temos as seguintes estratégias

a) Jogar $p = 10$ sempre;

b) Jogar $p = 10$ se a FE jogar $p = 10$ e jogar $p = 12$ se a FE jogar $p = 12$;

c) Jogar $p = 12$ se a FE jogar $p = 10$ e jogar $p = 10$ se a FE jogar $p = 12$;

d) Jogar $p = 12$ sempre.

Para entendermos como será o equilíbrio do jogo, devemos considerar que a racionalidade leva a FE a considerar que a FN, ao tomar suas decisões, irá observar suas escolhas. Portanto, a FE sabe que se ela escolher $p = 10$ o melhor para a FN fazer é escolher $p = 10$ pois assim a FN lucra 300 milhões em vez de 200 e se ela escolher $p = 12$ então o melhor para a FN fazer é escolher $p = 10$ pois a FN lucra 400 milhões em vez de 250. Então o jogo para a FE fica sintetizado pelo diagrama da Figura 5.5

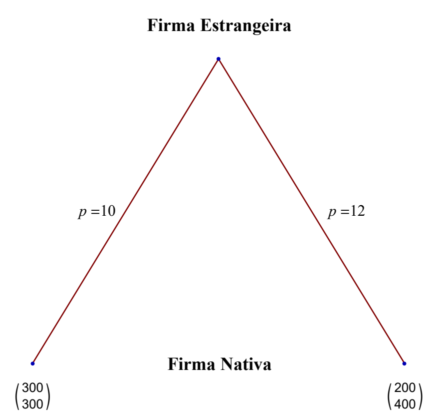


Figura 5.5: Resolvendo um jogo por indução retroativa.

Portanto a FE escolherá $p = 10$ e a FN também e ambas lucram 300 milhões. Essa maneira de se resolver um jogo é definida como indução retroativa. O equilíbrio resultante desse jogo pode ser chamado de equilíbrio de Nash em jogos sequenciais.

Note que o resultado desse jogo mostra que pode ser vantajosa a abertura de mercado já que as firmas decidem competir de maneira a dividir o mercado, mantendo os empregos e, além disso, reduzindo os preços praticados anteriormente ($p = 12$).

Note que para o Jogador 2 a estratégia b) consiste em seguir o Jogador 1 e a estratégia c) consiste em se opor ao Jogador 1. Portanto o Jogador 2 possui 4 estratégias que podem ser representadas pelas funções $s_1^a, s_1^b, s_1^c, s_1^d$ definidas por

1. $s_1^a(10) = 10$ e $s_2^a(12) = 10$;
2. $s_1^b(10) = 10$ e $s_2^b(12) = 12$;
3. $s_1^c(10) = 12$ e $s_2^c(12) = 10$;
4. $s_1^d(10) = 12$ e $s_2^d(12) = 12$.

Mais formalmente, temos a definição abaixo.

Definição 5.7. *Em um jogo sequencial de dois jogadores em que o Jogador 1 joga primeiro, uma estratégia para o Jogador 1 é uma ação $a_1 \in A_1$ e uma estratégia para o Jogador 2 é uma função $s_2 : A_1 \to A_2$.*

Podemos também escrever o conceito de equilíbrio mais formalmente como segue.

Definição 5.8. *Em um jogo sequencial de dois jogadores em que o Jogador 1 joga primeiro, um perfil de estratégias (s_1^*, s_2^*) consiste em um EN se e somente se*

$$s_2^*(s_1) = \text{argmax}\{u_2(s_1, s_2) \textit{ tal que } s_2 \in S_2\}$$

$$e$$

$$s_1^* = \text{argmax}\{u_1(s_1, s_2^*(s_1)) \textit{ tal que } s_1 \in S_1\}$$

Note que se os conjuntos de jogadas A_1 e A_2 são finitos, então sempre existe EN em jogos sequenciais.

Voltando ao exemplo em que $A_i = \{10, 12\}$ temos que o EN será dado por $s_1^* = 10$ e $s_2^* : A_1 \to A_2$ a função definida por

$$s_2^*(10) = 10 \text{ e } s_2^*(12) = 10.$$

Capítulo 6

Falhas de Mercado

6.1 Monopolio e Oligopolio

6.2 Competição Monopolística

Bibliografia

Rothshild, M. and J. Stiglitz (1976). Equilibrium in competitive insurance markets: An essay on the economics of imperfect information. *Quarterly Journal of Economics 90*(4), 629–647.

Capítulo 7

Apêndice

7.1 Principais Teoremas

Theorem 7.1. *Considere $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g_i : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ para todo $i \in \{1, \cdots, m\}$ côncavas em que A é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Suponha que $\bar{x} \in A$ satisfaça*[1] *o sistema abaixo para algum $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$*

$$\begin{cases} \partial_j f(\bar{x}) + \sum_{i \le m} \lambda_i \partial_j g_i(\bar{x}) = 0 & \text{para } j \in \{1, \cdots, n\} \\ \lambda_i g_i(\bar{x}) = 0 \quad \text{e} \quad g_i(\bar{x}) \ge 0 & \text{para } i \in \{1, \cdots, m\}. \end{cases}$$

Então $\bar{x}$ satisfaz

$$\max\{f(x) \text{ para todo } x \in A \subset \mathbb{R}^n \text{ tal que } g_i(x) \ge 0 \text{ para } i \in \{1, \cdots, m\}\}.$$

Demonstração: Como f e g são côncavas e a derivada do lagrangeano côncavo $\ell : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definido por

$$\ell(x) = f(x) + \sum_{i \le m} \lambda_i g_i(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n$$

se anula em $\bar{x}$, então $\bar{x}$ satisfaz para $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$

$$\max\left\{ f(x) + \sum_{i \le m} \lambda_i g_i(x) \text{ para todo } x \in A \subset \mathbb{R}^n \right\}.$$

[1] Escreva $\partial_k f(x)$ a derivada parcial de f em relação à k-ésima variável no ponto x

Logo, considere $x \in A \subset \mathbb{R}^n$ arbitrário tal que $g_i(x) \geq 0$ para $i \in \{1, \cdots, m\}$. Vamos mostrar que $f(x) \leq f(\bar{x})$. Com efeito,

$$f(x) \leq f(x) + \sum_{i \leq m} \lambda_i g_i(x) \leq f(\bar{x}) + \sum_{i \leq m} \lambda_i g_i(\bar{x}) = f(\bar{x}).$$

$\square$