บทเรียนประกอบการสอนออนไลน์
รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2
บทที่ 3 เรื่อง เส้นขนาน

ครูผู้สอน

คุณครู ถาวร ลาวช่าง
ตำแหน่ง ครู
โรงเรียนนาคำราษฎร์รังสรรค์
สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษานครพนม

CLICK

เมนูหลัก

1.เส้นขนาน

2.ความสัมพันธ์ระหว่างเส้นขนานและมุมภายใน

3.ความสัมพันธ์ระหว่างเส้นขนานและมุมแย้ง

4.ความสัมพันธ์ระหว่างเส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน

5. การนำทฤษฎีบทของเส้นขนานไปใช้แก้ปัญหา

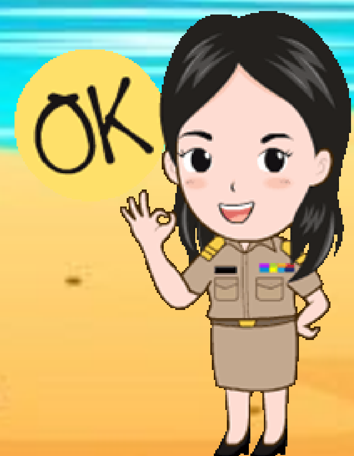
6.เส้นขนานและรูปสามเหลี่ยม

แหล่งเรียนรู้เพิ่มเติม

ผู้จัดทำ

ตัวชี้วัด

- นำความรู้เกี่ยวกับสมบัติของเส้นขนานและรูปสามเหลี่ยมไปใช้ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ (ค 2.2 ม.2/2)



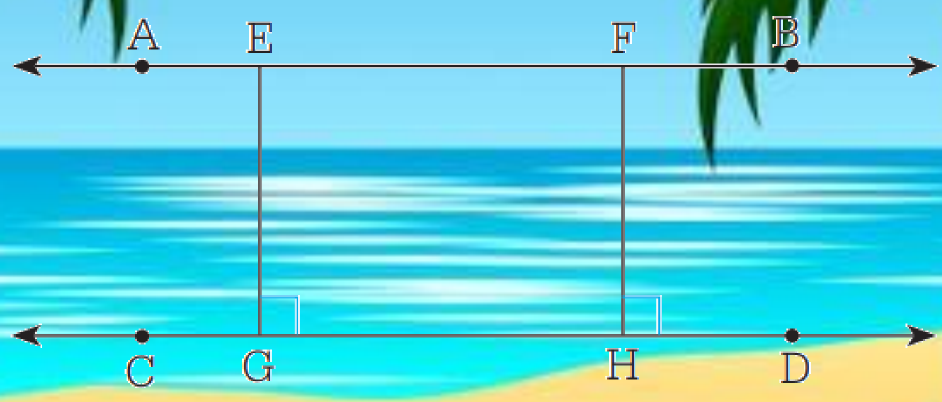
เส้นขนาน

บทนิยาม

เส้นตรงสองเส้นที่อยู่บนระนาบเดียวกัน ขนานกัน ก็ต่อเมื่อเส้นตรงทั้งสองเส้นนั้นไม่ตัดกัน

บทนิยามการขนานของเส้นตรง

กรณีที่ 1 ถ้าเส้นตรงสองเส้นที่อยู่บนระนาบเดียวกัน ขนานกัน แล้วเส้นตรงทั้งสองเส้นนั้นจะไม่ตัดกัน

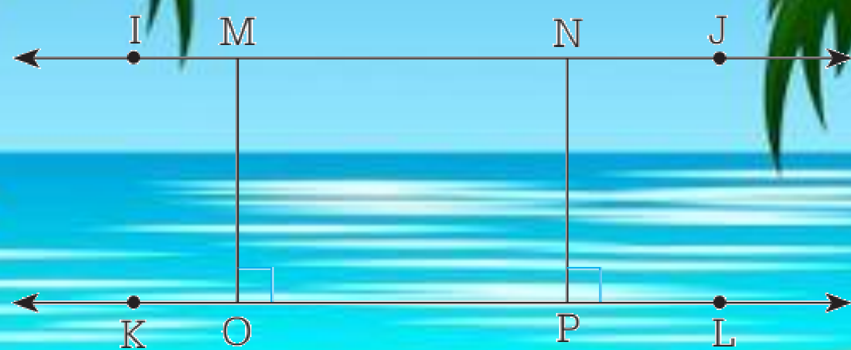


$\overleftrightarrow{AB}$ กับ $\overleftrightarrow{CD}$ ขนานกัน และ $EG = FH$

$\overleftrightarrow{AB}$ กับ $\overleftrightarrow{CD}$ จะไม่มีโอกาสตัดกัน

บทนิยามการขนานของเส้นตรง

กรณีที่ 2 ถ้าเส้นตรงสองเส้นที่อยู่บนระนาบเดียวกันไม่ตัดกัน แล้วเส้นตรงทั้งสองเส้นนั้นจะขนานกัน

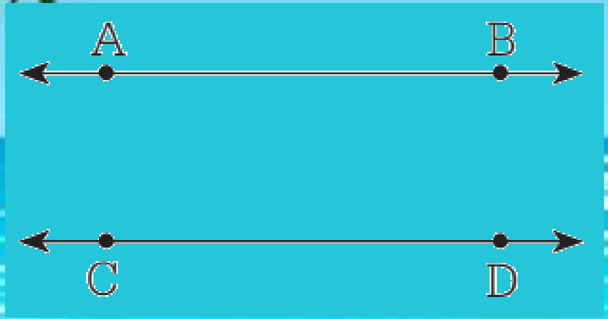


$MO = NP$ แสดงว่า $\overleftrightarrow{IJ}$ กับ $\overleftrightarrow{KL}$ ไม่มีโอกาสตัดกัน

$\overleftrightarrow{IJ}$ กับ $\overleftrightarrow{KL}$ จะขนานกัน

บทนิยามการขนานของเส้นตรง

กรณีที่ 2 ถ้าเส้นตรงสองเส้นที่อยู่บนระนาบเดียวกันไม่ตัดกัน แล้วเส้นตรงทั้งสองเส้นนั้นจะขนานกัน

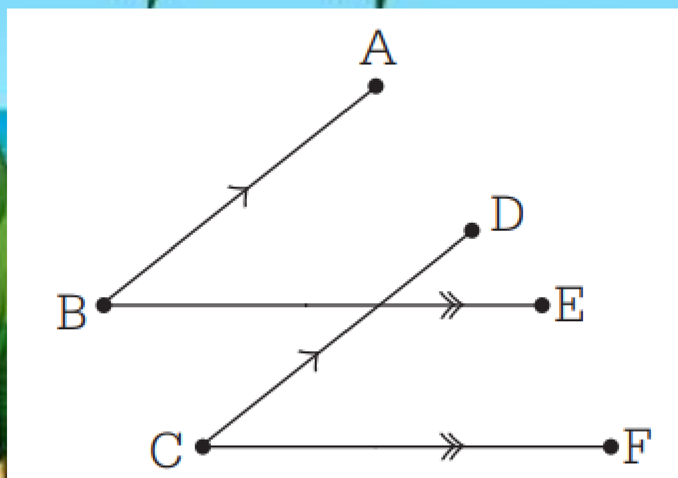


$\overleftrightarrow{AB}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{CD}$

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$

การเขียนรูปเส้นตรง

ในการเขียนรูปเส้นตรง ส่วนของเส้นตรง หรือรังสีที่ขนานกัน อาจใช้ลูกศรแสดงเส้นที่ขนานกัน ดังตัวอย่างในรูป



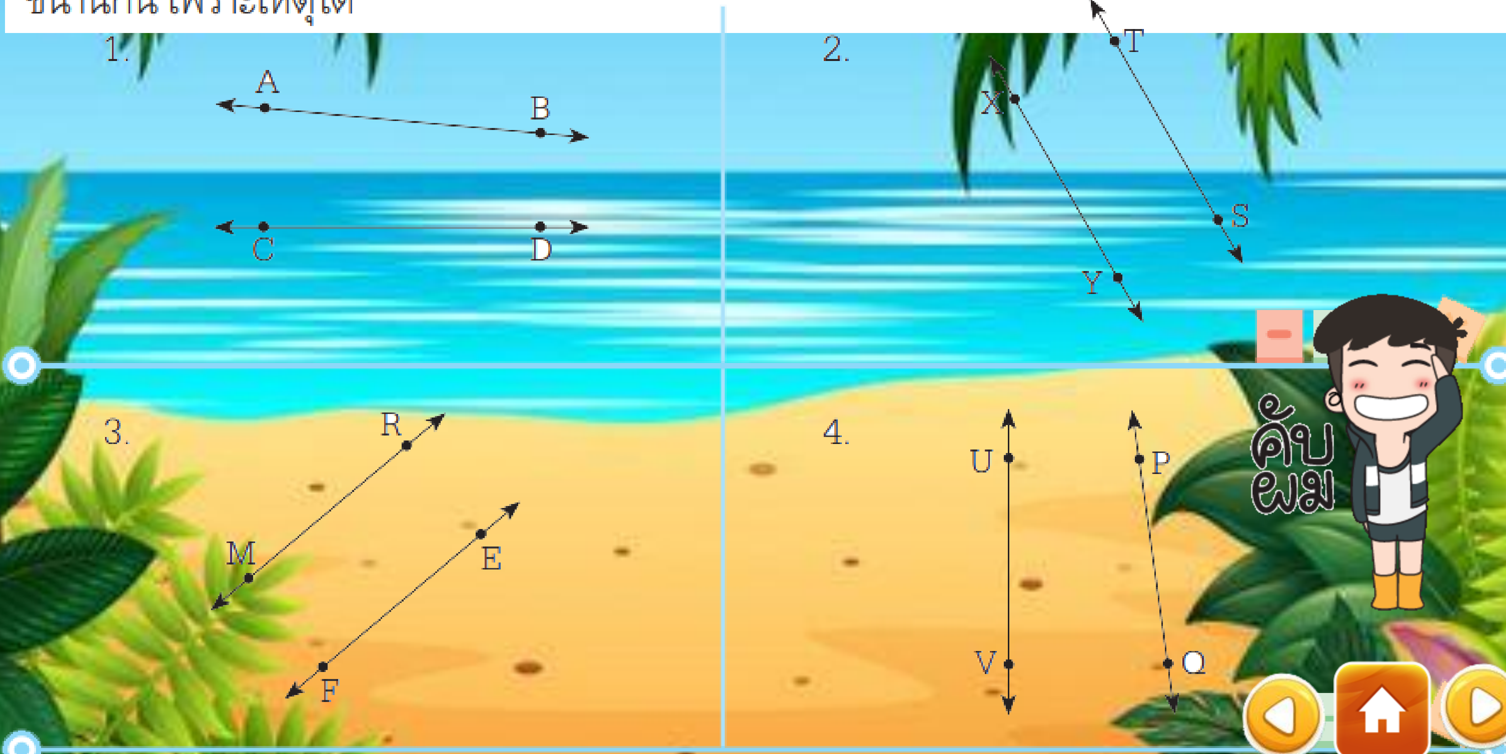
แสดงว่า $\overline{BA} // \overline{CD}$

และ $\overline{BE} // \overline{CF}$

“ถ้าเส้นตรงสองเส้นมีระยะห่างระหว่างเส้นตรงเท่ากันเสมอแล้ว เส้นตรงคู่นั้นจะขนานกัน

ตัวอย่างที่ 1

นักเรียนพิจารณาว่าเส้นตรงสองเส้นในแต่ละข้อต่อไปนี้อยู่บนระนาบเดียวกัน เส้นตรงคู่ใดขนานกัน เพราะเหตุใด



การตรวจสอบว่าเส้นตรงคู่ใดขนานกันโดยใช้ขนาดของมุมภายในและภายนอก

กำหนด $\overleftrightarrow{PQ}$ และ $\overleftrightarrow{RS}$ เป็นเส้นตรงคู่หนึ่ง ถ้า $\overleftrightarrow{AB}$ ตัด $\overleftrightarrow{PQ}$ และ $\overleftrightarrow{RS}$ ดังรูป

เรียก $\overleftrightarrow{AB}$ ว่า เส้นตัด ทำให้เกิดมุม 8 มุม

เรียก $\hat{2}$, $\hat{3}$, $\hat{6}$ และ $\hat{7}$ ว่า มุมภายใน

เรียก $\hat{2}$ และ $\hat{3}$ ว่า มุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด AB และ

เรียก $\hat{6}$ และ $\hat{7}$ ว่า มุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด AB

เรียก $\hat{2}$ และ $\hat{7}$ ว่า เป็นมุมแย้ง และ

เรียก $\hat{3}$ และ $\hat{6}$ ว่า เป็นมุมแย้ง

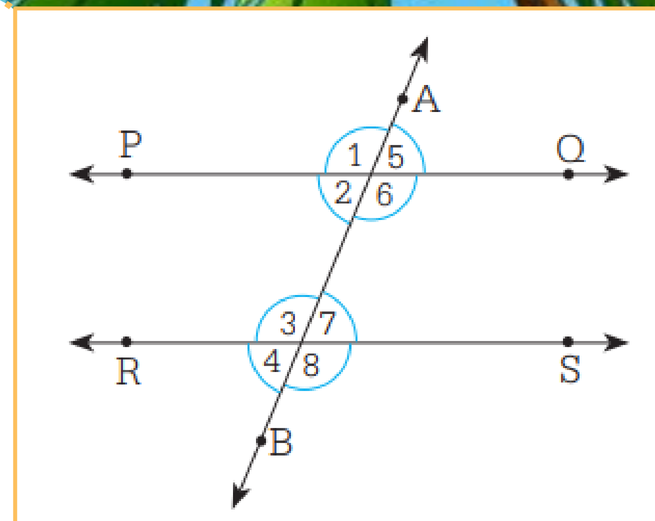
เรียก $\hat{1}$, $\hat{4}$, $\hat{5}$ และ $\hat{8}$ ว่า มุมภายนอก

เรียก $\hat{1}$ และ $\hat{4}$ ว่า มุมภายนอกที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด AB และ

เรียก $\hat{5}$ และ $\hat{8}$ ว่า มุมภายนอกที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด AB

เรียก $\hat{1}$ และ $\hat{3}$ ว่า เป็นมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้าม บนข้างเดียวกันของเส้นตัด AB

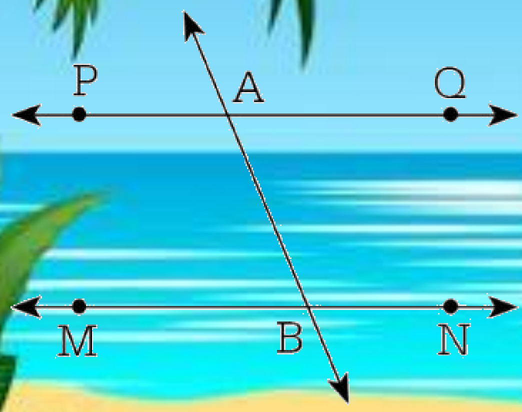
เรียก $\hat{5}$ และ $\hat{7}$ ว่า เป็นมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้าม บนข้างเดียวกันของเส้นตัด AB



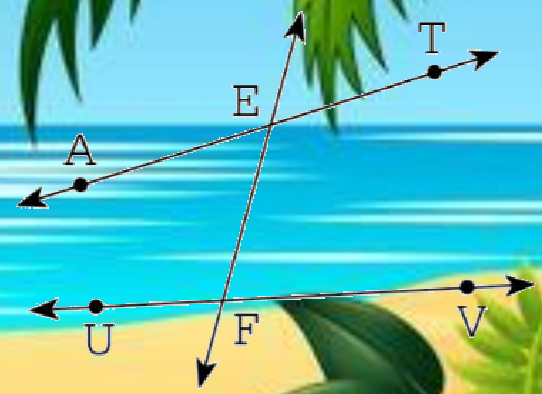
ตัวอย่างที่ 2

1. หาว่ามุมคู่ใดเป็นมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด

1)



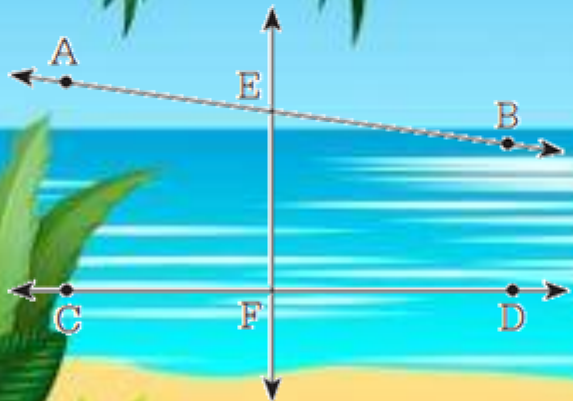
2)



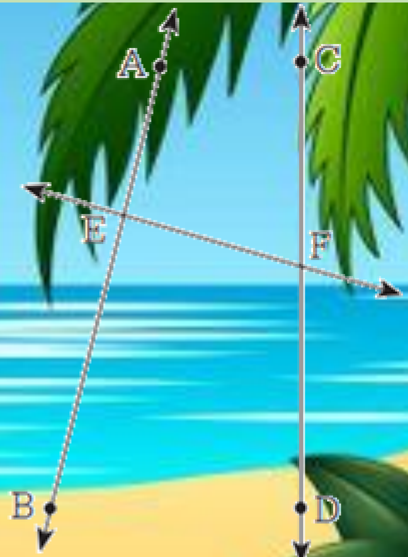
ตัวอย่างที่ 3

2. กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด สำรวจดูว่ามุมคู่ใดบ้าง เป็นมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด

1)



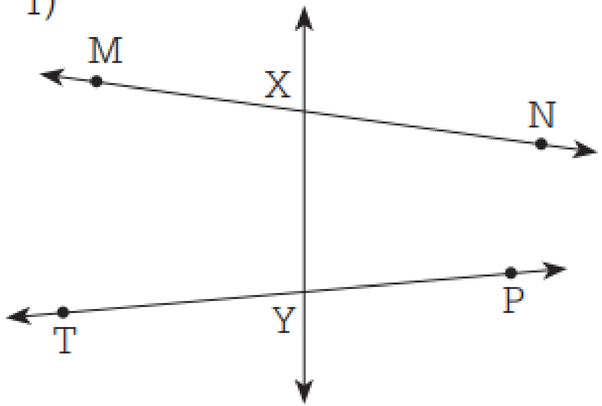
2)



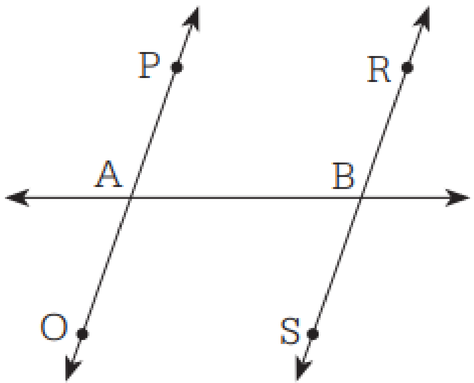
ตัวอย่างที่ 4

3. หาว่ามุมคู่ใดบ้างเป็นมุมแย้ง

1)



2)



2.ความสัมพันธ์ระหว่างเส้นขนานและมุมภายใน

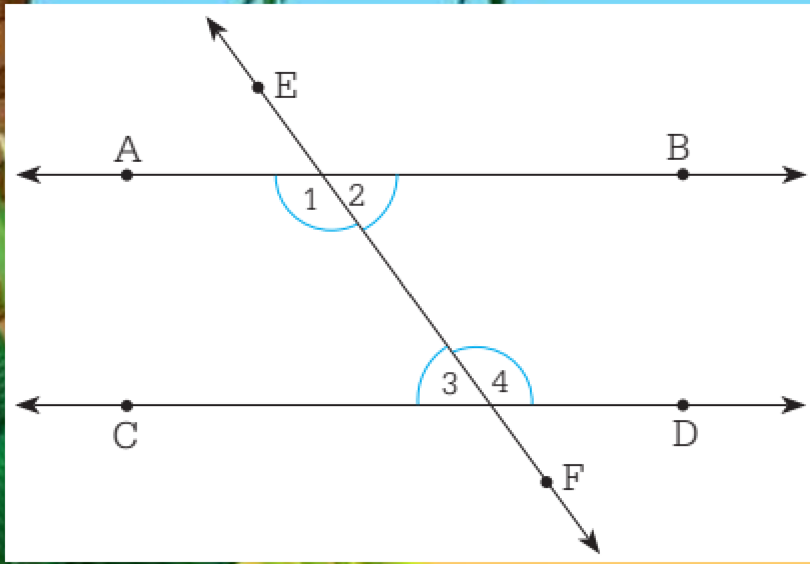
บทนิยาม

เส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180 องศา

การพิจารณาเส้นขนานโดยใช้ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด

กรณีที่ 1

ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน แล้วขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180 องศา



ถ้า $\overleftrightarrow{EF}$ ตัด $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$

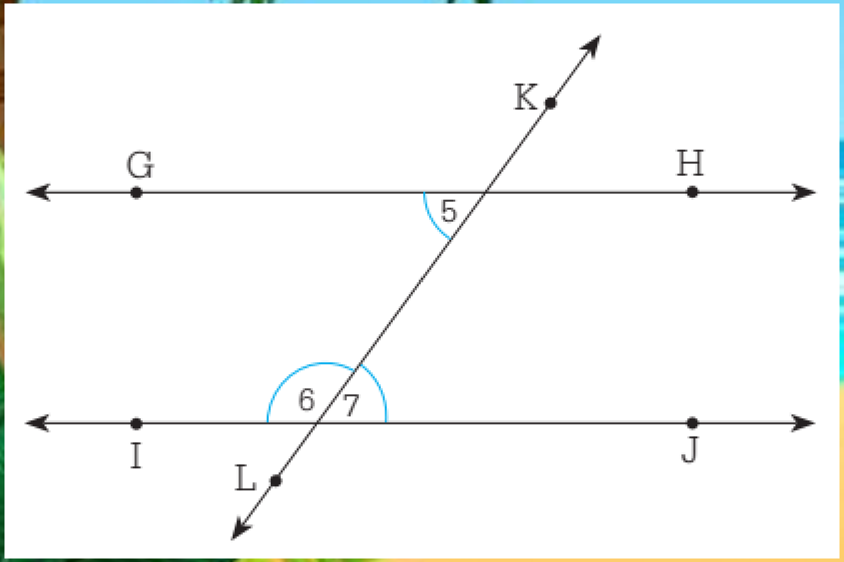
แล้ว จะได้ว่า $\hat{1} + \hat{3} = 180^\circ$

$\hat{2} + \hat{4} = 180^\circ$

การพิจารณาเส้นขนานโดยใช้ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด

กรณีที่ 2

เส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ถ้าขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180 องศา แล้วเส้นตรงคู่นั้นจะขนานกัน



ถ้า $\overleftrightarrow{KL}$ ตัด $\overleftrightarrow{GH}$ กับ $\overleftrightarrow{IJ}$

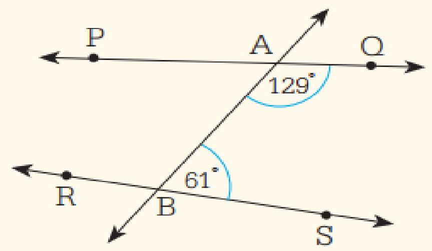
และ $\hat{5} + \hat{6} = 180^\circ$

แล้ว จะได้ว่า $\overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{IJ}$

ตัวอย่างที่ 1

$\overleftrightarrow{PQ}$ และ $\overleftrightarrow{RS}$ ในแต่ละข้อขนานกันหรือไม่ เพราะเหตุใด

1)



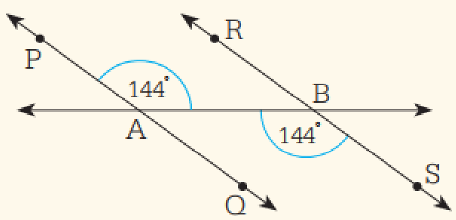
วิธีทำ

1) $\overleftrightarrow{PQ}$ และ $\overleftrightarrow{RS}$ ไม่ขนานกัน

เพราะว่า ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกัน

เท่ากับ $129^\circ + 61^\circ = 190^\circ$ ซึ่งไม่เท่ากับ 180°

2)



วิธีทำ

2) $\overleftrightarrow{PQ} // \overleftrightarrow{RS}$

เพราะว่า $R\hat{B}A + A\hat{B}S = 180^\circ$ (ขนาดของมุมตรง)

$R\hat{B}A + 144^\circ = 180^\circ$ (ขนาดของ $A\hat{B}S$ เท่ากับ 144°)

$R\hat{B}A = 180^\circ - 144^\circ$

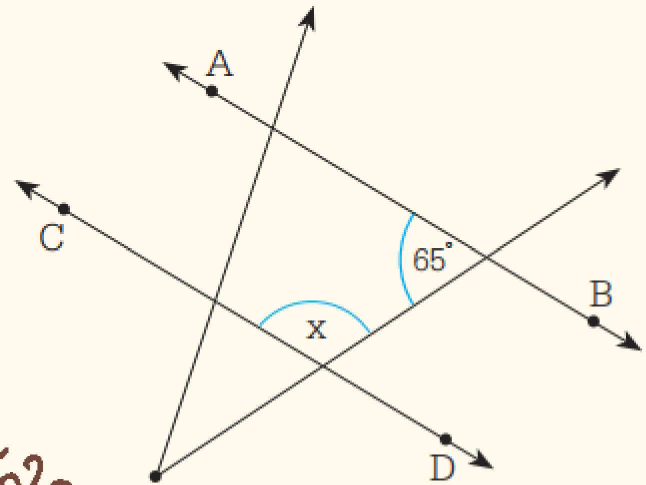
$R\hat{B}A = 36^\circ$

ผลบวกของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด เท่ากับ ขนาดของมุม PAB รวมกับขนาดของมุม RBA = $144^\circ + 36^\circ = 180^\circ$ ดังนั้น $\overleftrightarrow{PQ} // \overleftrightarrow{RS}$

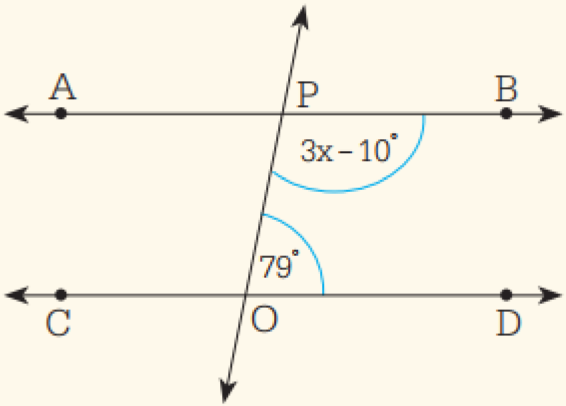
ตัวอย่างที่ 2

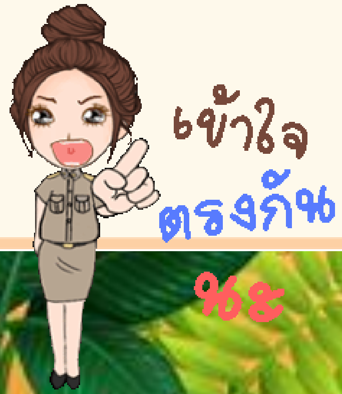
กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ หาค่าของ x ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1)



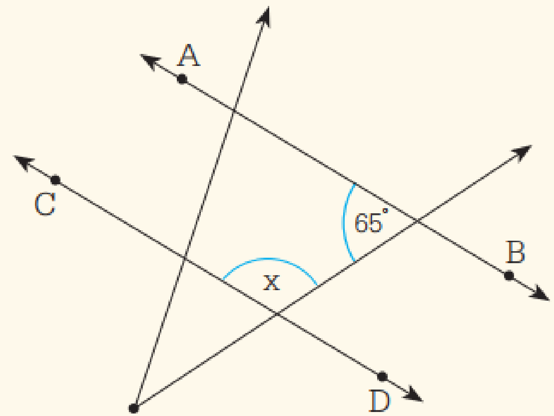
2)





ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ หาค่าของ x ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1)



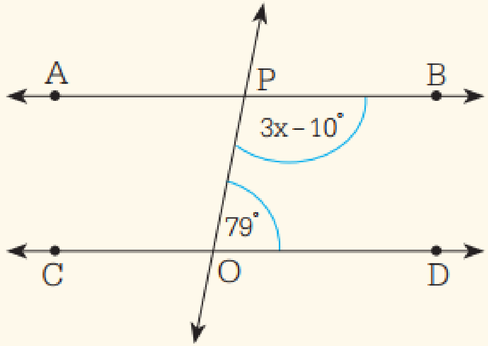
วิธีทำ 1) เนื่องจาก $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ จะได้ $x + 65^\circ = 180^\circ$ (ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดเส้นขนานรวมกันเท่ากับ 180°)

$$x = 180^\circ - 65^\circ$$

ดังนั้น $x = 115^\circ$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ หาค่าของ x ในแต่ละข้อต่อไปนี้

2)



วิธีทำ 2) เนื่องจาก $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ จะได้ $3x - 10^\circ + 79^\circ = 180^\circ$ (ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดเส้นขนานรวมกันเท่ากับ 180°)

$$3x + 69^\circ = 180^\circ$$

$$3x = 180^\circ - 69^\circ$$

$$x = \frac{111^\circ}{3}$$

ดังนั้น $x = 37^\circ$

3.ความสัมพันธ์ระหว่างเส้นขนานและมุมแย้ง

บทนิยาม

ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน

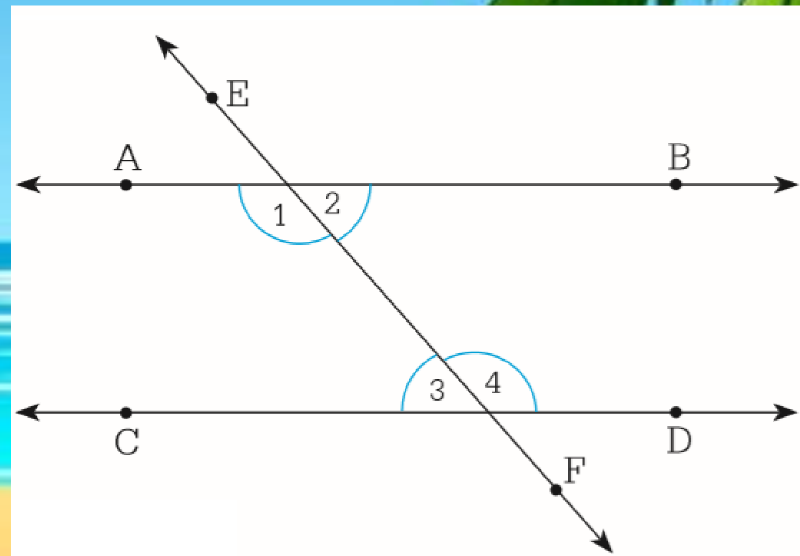
การพิจารณาเส้นขนานโดยใช้มุมแย้ง

กรณีที่ 1 ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน แล้วมุมแย้งจะมีขนาดเท่ากัน

ถ้า $\overleftrightarrow{EF}$ ตัด $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

แล้ว จะได้ว่า $\hat{1} = \hat{4}$

$\hat{2} = \hat{3}$



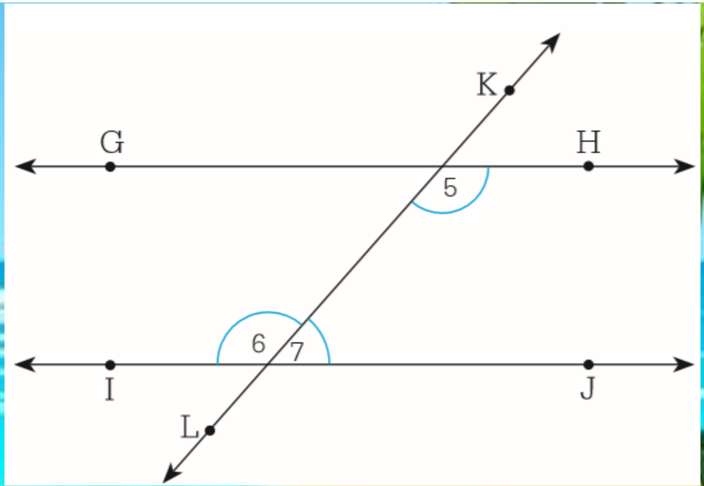
การพิจารณาเส้นขนานโดยใช้มุมแย้ง

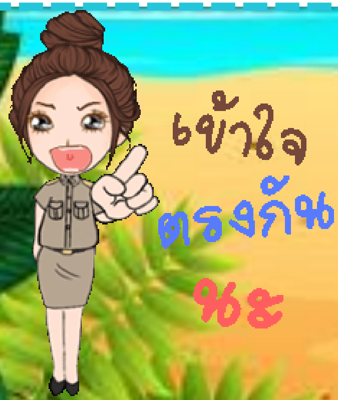
กรณีที่ 2 เส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ถ้ามุมแย้งมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นจะขนานกัน

ถ้า $\overleftrightarrow{KL}$ ตัด $\overleftrightarrow{GH}$ กับ $\overleftrightarrow{IJ}$

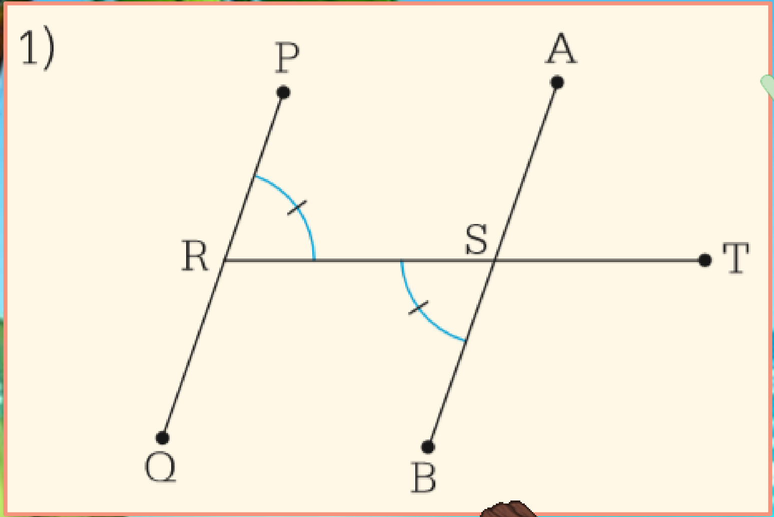
และ $\hat{5} = \hat{6}$

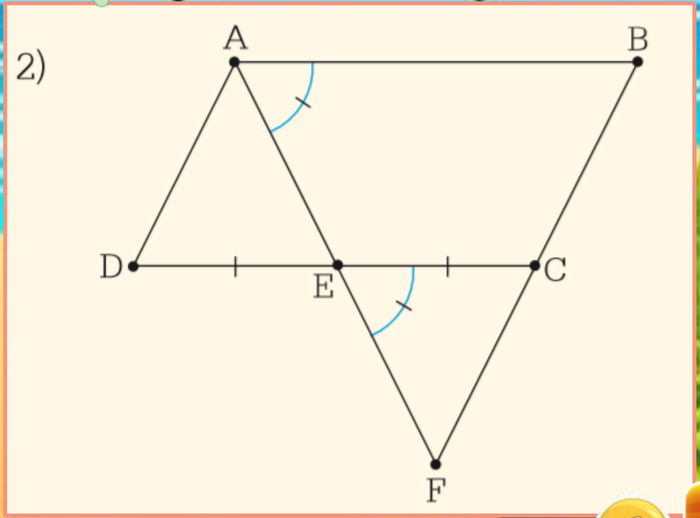
แล้ว จะได้ว่า $\overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{IJ}$



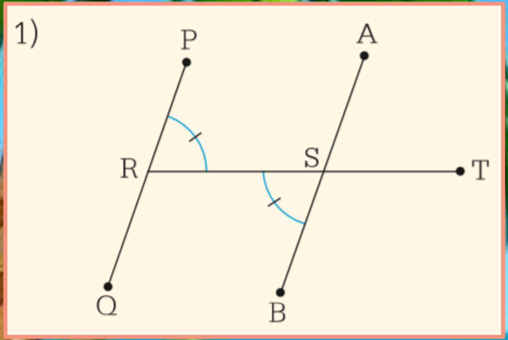


ตัวอย่างที่ 1 จากรูปที่กำหนด หาว่าส่วนของเส้นตรงคู่ใดขนานกัน





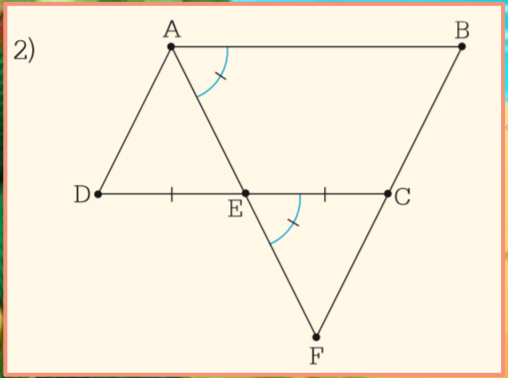
ตัวอย่างที่ 1 จากรูปที่กำหนด หาว่าส่วนของเส้นตรงคู่ใดขนานกัน



วิธีทำ

1) $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$

เพราะ $P\hat{R}S = B\hat{S}R$ (มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน)



วิธีทำ

2) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

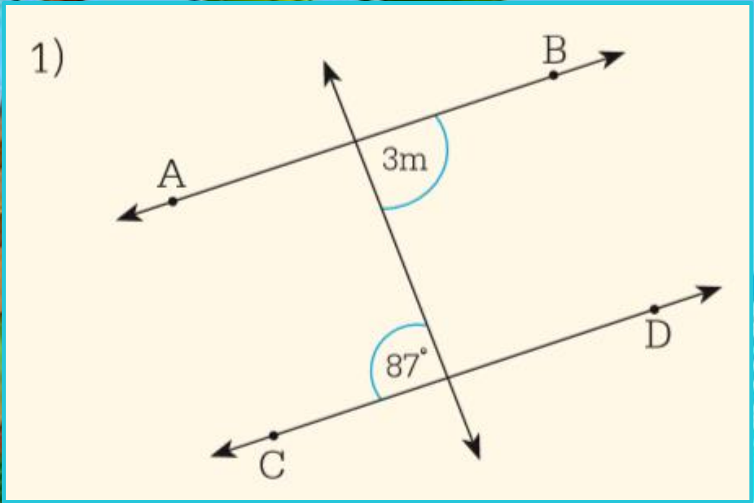
เพราะ $B\hat{A}E = C\hat{E}F$ (กำหนดให้)

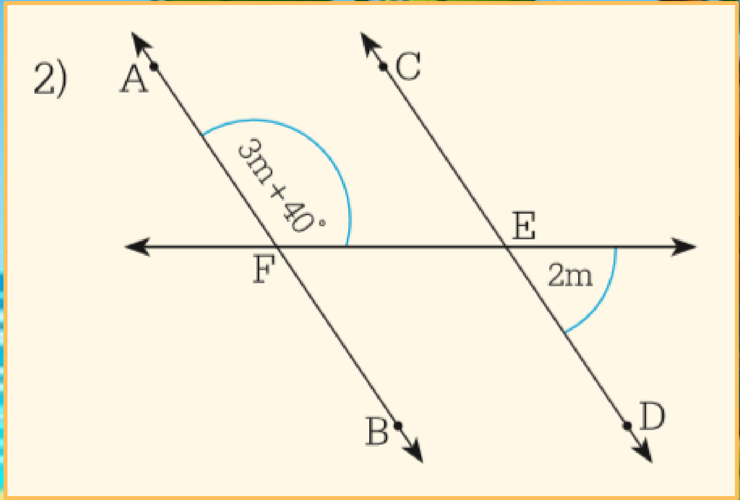
$D\hat{E}A = C\hat{E}F$ (มุมตรงข้ามเท่ากัน)

$B\hat{A}E = D\hat{E}A$ (ต่างเท่ากับมุม $C\hat{E}F$)

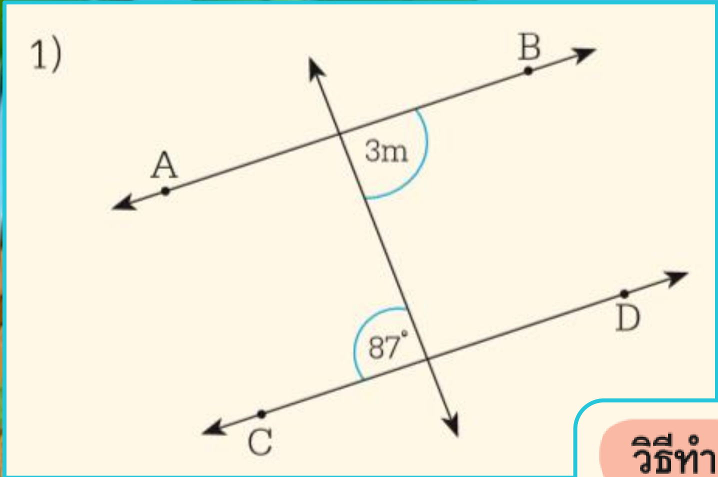
ดังนั้น $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ (มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน)

ตัวอย่างที่ 2 จากรูปในแต่ละข้อ กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ หาค่าของ m





ตัวอย่างที่ 2 จากรูปในแต่ละข้อ กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ หาค่าของ m



วิธีทำ 1) เนื่องจาก $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

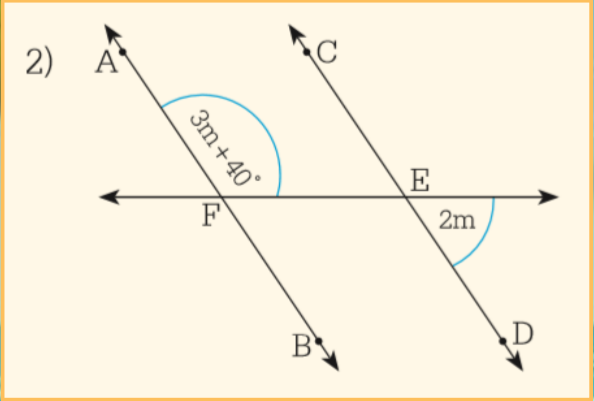
จะได้ $3m = 87^\circ$ (มุมแย้งจะมีขนาดเท่ากัน)

$$m = \frac{87^\circ}{3}$$

$$m = 29^\circ$$

ดังนั้น ค่าของ m เท่ากับ 29°

ตัวอย่างที่ 2 จากรูปในแต่ละข้อ กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ หาค่าของ m



2) จากรูป

$$D\hat{E}F + 2m = 180^\circ \quad \text{(ขนาดของมุมตรง)}$$

$$D\hat{E}F = 180^\circ - 2m$$

แต่ $$D\hat{E}F = 3m + 40^\circ \quad (\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \text{ มุมแย้งจะมีขนาดเท่ากัน})$$

ดังนั้น $$3m + 40^\circ = 180^\circ - 2m \quad \text{(สมบัติของการเท่ากัน)}$$

$$3m + 2m = 180^\circ - 40^\circ$$

$$5m = 140^\circ$$

$$m = \frac{140^\circ}{5}$$

$$m = 28^\circ$$

นั่นคือ ค่าของ m เท่ากับ 28°

4.ความสัมพันธ์ระหว่างเส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน

บทนิยาม

เส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน

การพิจารณาเส้นขนานโดยอาศัยมุมภายนอกกับมุมภายใน

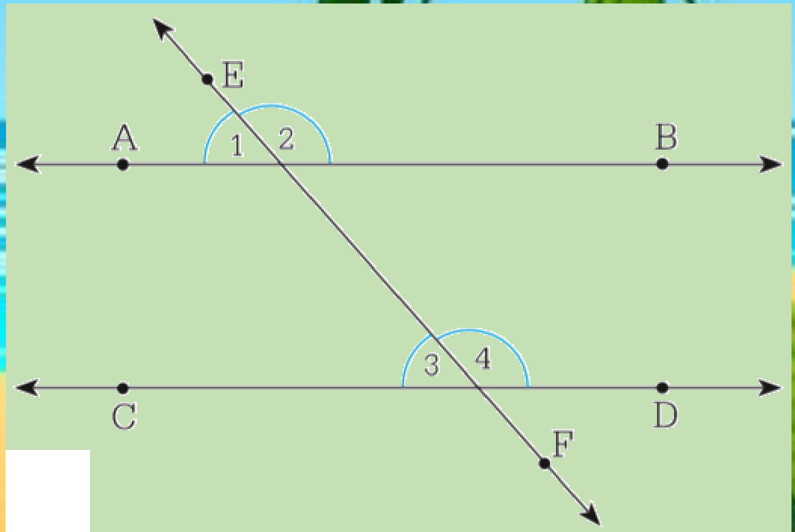
กรณีที่ 1

ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน แล้วมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน

ถ้า $\overleftrightarrow{EF}$ ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ // $\overleftrightarrow{CD}$

แล้ว จะได้ว่า $\hat{1} = \hat{3}$

$\hat{2} = \hat{4}$



การพิจารณาเส้นขนานโดยอาศัยมุมภายนอกกับมุมภายใน

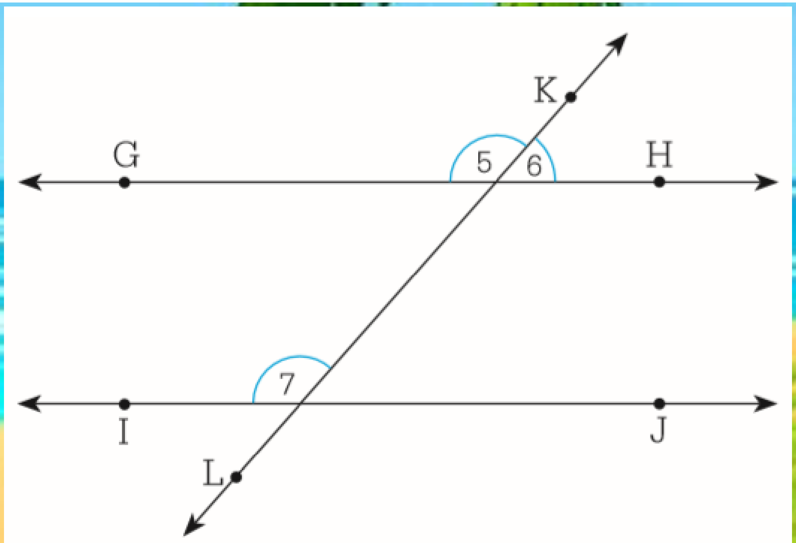
กรณีที่ 2

เส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ถ้ามุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นจะขนานกัน

ถ้า $\overleftrightarrow{KL}$ ตัด $\overleftrightarrow{GH}$ กับ $\overleftrightarrow{IJ}$

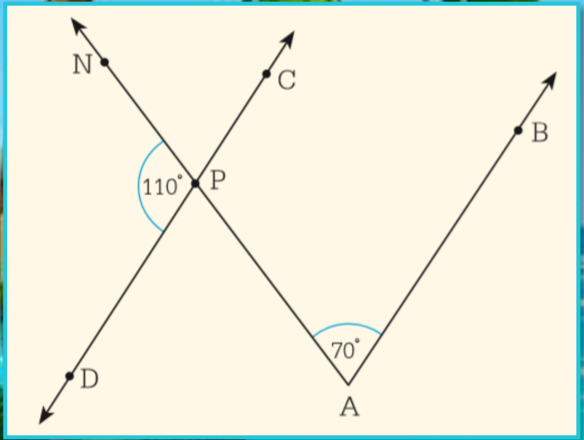
และ $\hat{5} = \hat{7}$

แล้ว จะได้ว่า $\overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{IJ}$



ตัวอย่างที่ 1

จากรูปที่กำหนด หาว่าส่วนของเส้นตรง รังสี หรือเส้นตรงคู่ใดขนานกัน เพราะเหตุใด



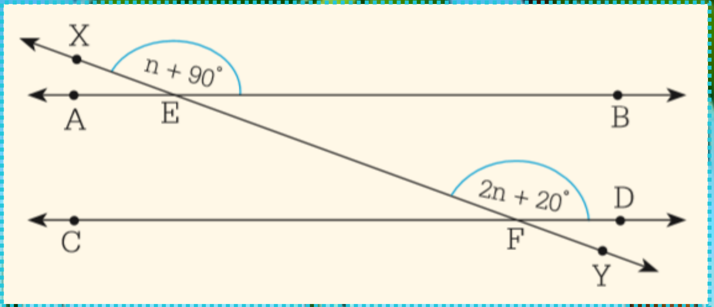
วิธีทำ

เนื่องจาก	$N\hat{P}D + N\hat{P}C$	$=$	180°	(ขนาดของมุมตรง)
	$110^\circ + N\hat{P}C$	$=$	180°	(ขนาดของ $N\hat{P}D$ เท่ากับ 110°)
	$N\hat{P}C$	$=$	$180^\circ - 110^\circ$	
	$N\hat{P}C$	$=$	70°	
แต่	$B\hat{A}P$	$=$	70°	(กำหนดให้)
จะได้	$N\hat{P}C$	$=$	$B\hat{A}P$	(สมบัติของการเท่ากัน)

ดังนั้น $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{AB}$

ตัวอย่างที่ 2

กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ และมี $\overleftrightarrow{XY}$ เป็นเส้นตัดดังรูป หาค่าของ n



วิธีทำ เนื่องจาก $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{XY}$ เป็นเส้นตัด

จะได้ $X\hat{E}B = E\hat{F}D$ (ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน)

ดังนั้น $n + 90^\circ = 2n + 20^\circ$ (ขนาดของ $X\hat{E}B$ เท่ากับ $n + 90^\circ$ และขนาดของ $E\hat{F}D$ เท่ากับ $2n + 20^\circ$)

$$90^\circ - 20^\circ = 2n - n$$

$$70^\circ = n$$

$$n = 70^\circ$$

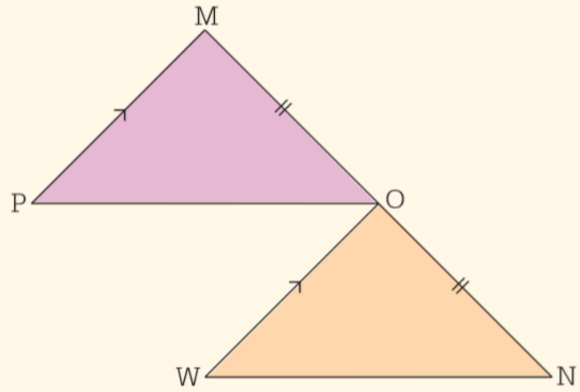
นั่นคือ ค่าของ n เท่ากับ 70°

5.การนำทฤษฎีบทของเส้นขนานไปใช้แก้ปัญหา

ผลจากทฤษฎีบทของเส้นขนาน สามารถนำไปใช้อ้างอิงในการพิสูจน์ และการแก้ปัญหา

ตัวอย่างที่ 1

จากรูปที่กำหนด $\overline{MP} \parallel \overline{OW}$, MO = ON และ MP = OW พิสูจน์ว่า $\overline{PO} \parallel \overline{WN}$



กำหนดให้ $\overline{MP} \parallel \overline{OW}$, MO = ON และ MP = OW

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{PO} \parallel \overline{WN}$

พิสูจน์ พิจารณา $\triangle$ MPO และ $\triangle$ OWN

MO = ON (กำหนดให้)

MP = OW (กำหนดให้)

$P\hat{M}O = W\hat{O}N$ (ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด มีขนาดเท่ากัน)

ดังนั้น $\triangle$ MPO $\cong$ $\triangle$ OWN (ด.ม.ด.)

จะได้ $M\hat{O}P = O\hat{N}W$ (มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการจะมีขนาดเท่ากัน)

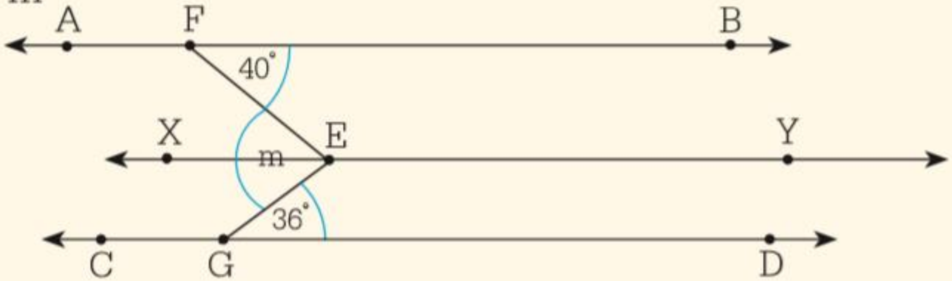
นั่นคือ $\overline{PO} \parallel \overline{WN}$ (ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด มีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน)

ตัวอย่างที่ 2

จากรูปที่กำหนด $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{XY}$ ผ่านจุด E และ $\overleftrightarrow{XY} // \overleftrightarrow{AB}$

1) พิสูจน์ว่า $\overleftrightarrow{XY} // \overleftrightarrow{CD}$

2) หาค่าของ m



กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ และ $\overleftrightarrow{XY} // \overleftrightarrow{AB}$

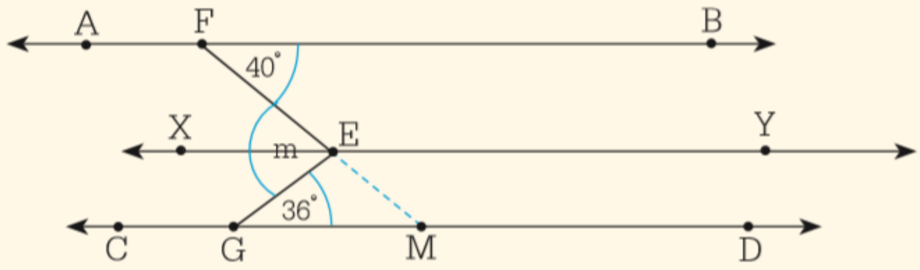
ต้องการพิสูจน์ว่า 1) $\overleftrightarrow{XY} // \overleftrightarrow{CD}$

2) หาค่าของ m

ตัวอย่างที่ 2

จากรูปที่กำหนด $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{XY}$ ผ่านจุด E และ $\overleftrightarrow{XY} // \overleftrightarrow{AB}$

1) จากรูป ต่อ $\overline{FE}$ ออกไปทางจุด E ตัด $\overleftrightarrow{CD}$ ที่จุด M



เนื่องจาก $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ (กำหนดให้)

$B\hat{F}M + D\hat{M}F = 180^\circ$ (ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดเส้นขนานรวมกันเท่ากับ 180°)

$40^\circ + D\hat{M}F = 180^\circ$ (ขนาดของ $B\hat{F}M$ เท่ากับ 40°)

$D\hat{M}F = 180^\circ - 40^\circ$

$D\hat{M}F = 140^\circ$

ตัวอย่างที่ 2 จากรูปที่กำหนด $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{XY}$ ผ่านจุด E และ $\overleftrightarrow{XY} \,//\, \overleftrightarrow{AB}$

เนื่องจาก $\overleftrightarrow{XY} \,//\, \overleftrightarrow{AB}$ (กำหนดให้)

$B\hat{F}E + F\hat{E}Y = 180^\circ$ (ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดเส้นขนานรวมกันเท่ากับ 180°)

$40^\circ + F\hat{E}Y = 180^\circ$ (ขนาดของ $B\hat{F}E$ เท่ากับ 40°)

$F\hat{E}Y = 180^\circ - 40^\circ$

$F\hat{E}Y = 140^\circ$

เนื่องจาก $F\hat{E}Y$ และ $D\hat{M}F$ เป็นมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามของ $\overleftrightarrow{XY}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ และมี $\overline{FM}$ เป็นเส้นตัด

ดังนั้น $\overleftrightarrow{XY} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$ (ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน)

ตัวอย่างที่ 2 จากรูปที่กำหนด $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{XY}$ ผ่านจุด E และ $\overleftrightarrow{XY} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

2) เนื่องจาก $F\hat{E}X = B\hat{F}E$ (มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน)

$F\hat{E}X = 40^\circ$ (ขนาดของ $B\hat{F}E$ เท่ากับ 40°)

และ $X\hat{E}G = E\hat{G}D$ (มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน)

$X\hat{E}G = 36^\circ$ (ขนาดของ $E\hat{G}D$ เท่ากับ 36°)

แต่ $m = F\hat{E}X + X\hat{E}G$

$m = 40^\circ + 36^\circ$ (ขนาดของ $F\hat{E}X$ เท่ากับ 40° และ ขนาดของ $X\hat{E}G$ เท่ากับ 36°)

$m = 76^\circ$

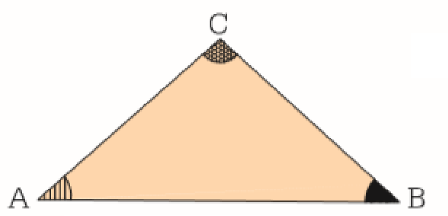
ดังนั้น ค่าของ m เท่ากับ 76°

6.เส้นขนานและรูปสามเหลี่ยม

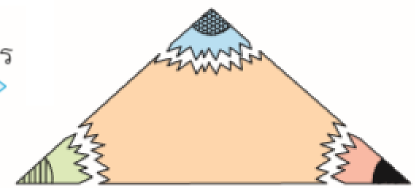
บทนิยาม

มุมภายในรูปสามเหลี่ยม

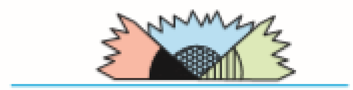
ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันได้ 180 องศา



ตัดด้วยกรรไกร



แล้วนำส่วนที่ตัดมาต่อกัน



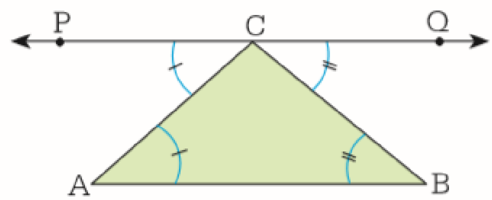
เห็นไหมว่า

มุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมรวมกันได้ 180°

เพิ่มความเข้าใจ

นักเรียนสามารถศึกษาเกี่ยวกับมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมผ่านไฟล์ .GSP เปิดด้วยโปรแกรม The Geometer's Sketchpad ได้จาก bit.ly/2tAE1oB

การพิสูจน์มุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมรวมกันได้ 180 องศา โดยใช้ทฤษฎีของเส้นขนาน



จากรูป $\overline{AB} // \overleftrightarrow{PQ}$ มี $\overline{AC}$ และ $\overline{BC}$ เป็นเส้นตัด

จะได้ $P\hat{C}A = C\hat{A}B$ (ต่างเป็นมุมแย้ง)

และ $Q\hat{C}B = A\hat{B}C$ (ต่างเป็นมุมแย้ง)

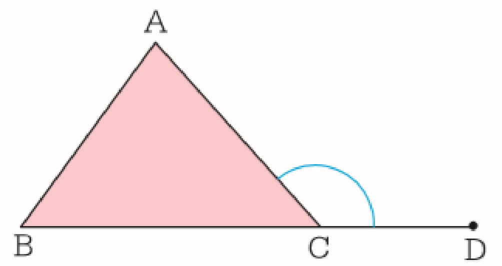
$P\hat{C}A + A\hat{C}B + Q\hat{C}B = 180^\circ$ (ขนาดของมุมตรง)

$C\hat{A}B + A\hat{C}B + A\hat{B}C = 180^\circ$ (ขนาดของ $P\hat{C}A$ เท่ากับ $C\hat{A}B$ และ ขนาดของ $Q\hat{C}B$ เท่ากับ $A\hat{B}C$)

ดังนั้น $C\hat{A}B + A\hat{B}C + B\hat{C}A = 180^\circ$ (สมบัติการเท่ากัน)

นั่นคือ ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180 องศา

ทฤษฎีบทข้างต้น สามารถนำมาใช้พิสูจน์ทฤษฎีบทเกี่ยวกับขนาดของมุมภายนอกและขนาดของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมได้ ดังต่อไปนี้



จากรูป กำหนด $\triangle$ ABC ต่อ $\overline{BC}$ ออกไปทางจุด C ถึงจุด D

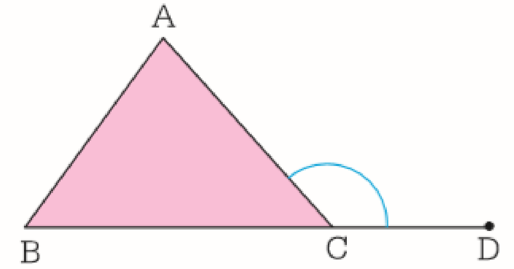
เรียก $A\hat{C}D$ ว่า มุมภายนอกของ $\triangle$ ABC

เรียก $A\hat{C}B$ ว่า เป็นมุมประชิดของ $A\hat{C}D$

บทนิยาม

ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น

การพิสูจน์ทฤษฎีบท



กำหนดให้ $\triangle ABC$ มี $A\hat{C}D$ เป็นมุมภายนอกที่ได้จากการต่อ $\overline{BC}$ ออกไปทางจุด C

ต้องการพิสูจน์ว่า $A\hat{C}D = A\hat{B}C + C\hat{A}B$

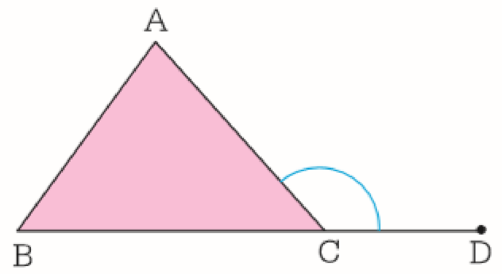
พิสูจน์ เนื่องจาก $A\hat{C}D + B\hat{C}A = 180^\circ$ (ขนาดของมุมตรง)

และ $A\hat{B}C + B\hat{C}A + C\hat{A}B = 180^\circ$ (ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันได้ 180 องศา)

จะได้ $A\hat{C}D + B\hat{C}A = A\hat{B}C + B\hat{C}A + C\hat{A}B$ (สมบัติของการเท่ากัน)

$A\hat{C}D = A\hat{B}C + C\hat{A}B$ (นำขนาดของ $B\hat{C}A$ มาลบทั้งสองข้างของสมการ)

การพิสูจน์ทฤษฎีบท

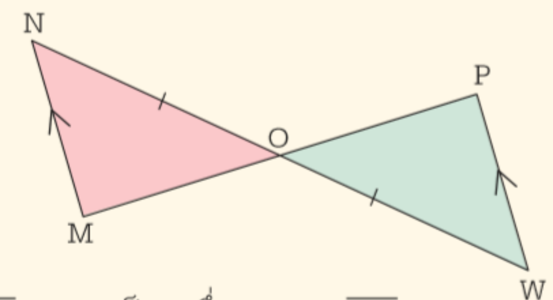


นั่นคือ มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจากการต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป จะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น

ถ้ากำหนดให้รูปสามเหลี่ยมสองรูปมีขนาดของมุมเท่ากันสองคู่ และมีด้านยาวเท่ากันหนึ่งคู่เป็นด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันแล้ว นักเรียนคิดว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนี้เท่ากันทุกประการหรือไม่

ตัวอย่างที่ 1

จากรูปที่กำหนด $\overline{MN} \parallel \overline{PW}$ และ O เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{NW}$
พิสูจน์ว่า $\triangle$ MNO เท่ากันทุกประการกับ $\triangle$ PWO



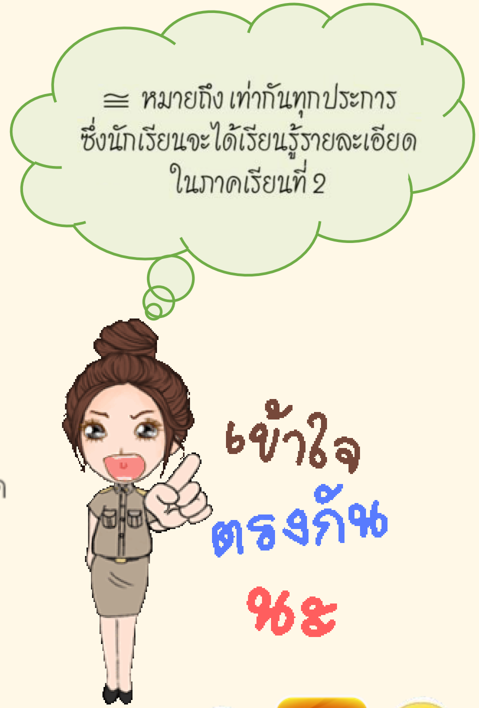
กำหนดให้ $\overline{MN} \parallel \overline{PW}$ และ O เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{NW}$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle MNO \cong \triangle PWO$

พิสูจน์

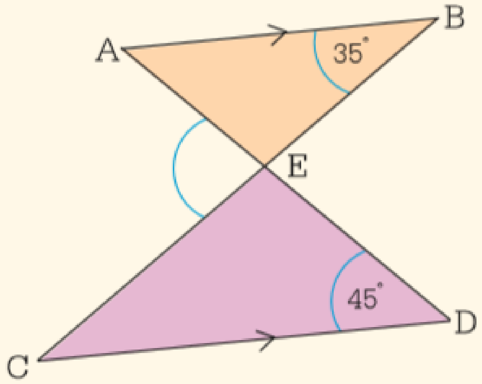
$\overline{MN} \parallel \overline{PW}$		(กำหนดให้)
$N\hat{M}O = O\hat{P}W$		(ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกัน และมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน)
$M\hat{O}N = P\hat{O}W$		(มุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน)
$NO = WO$		(กำหนดให้)

ดังนั้น $\triangle MNO \cong \triangle PWO$



ตัวอย่างที่ 2

กำหนดให้ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ถ้า $A\hat{B}E = 35^\circ$ และ $E\hat{D}C = 45^\circ$ หาขนาดของ $A\hat{E}C$



วิธีทำ เนื่องจาก $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ มี $\overline{BC}$ เป็นเส้นตัด

จะได้ $E\hat{C}D = A\hat{B}E$ (ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกัน และมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน)

$E\hat{C}D = 35^\circ$ (ขนาดของ $A\hat{B}E$ เท่ากับ 35°)

เนื่องจาก $A\hat{E}C = E\hat{C}D + E\hat{D}C$ (มุมภายนอกของสามเหลี่ยมจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น)

$A\hat{E}C = 35^\circ + 45^\circ$ (ขนาดของ $E\hat{C}D$ เท่ากับ 35° และขนาดของ $E\hat{D}C$ เท่ากับ 45°)

ดังนั้น $A\hat{E}C = 80^\circ$

นักเรียนได้รับความรู้เกี่ยวกับ “เส้นขนาน”
อย่างครบถ้วนแล้ว หวังว่านักเรียนจะนำความรู้ไปใช้ในชีวิตจริงได้นะคะ

แหล่งเรียนรู้เพิ่มเติม

วิดีโอ สอนออนไลน์ เรื่อง เส้นขนาน

ผู้จัดทำ