Lista 7

Magdalena Jarecka 308730

19 czerwca 2020

Zadanie 2

Po pierwsze, uściślimy w jaki sposób będziemy przechowywać kwadraty. Możemy to zrobić za pomocą słownika, której kluczem będą współrzędne kwaratu (lewy górny wierzchołek, prawy dolny wierzchołek), a wartością wektor przechowujący punkty, które się w nim znajdują. Oczekiwany czas działania słownika wynosi O(1).

W rozwiązaniu brutalnym dokładając kolejny punkt, po prostu porównywalibyśmy go ze wszystkimi pozostałymi w poszukiwaniu lepszego wyniku. W momencie gdy podzielimy sobie naszą przestrzeń na kwadraty o boku d (najlepszej dotychczas znalezionej odległości) i dodamy nowy punkt, wystarczy, że przejrzymy tylko te punkty, które należą do naszego kwadratu i sąsiednich (w sumie 9 kwadratów), albowiem inne z pewnością będą miały już odległość większą niż d. W takim kwadracie nie będzie więcej niż 4 punkty (gdyby tak było, to już wcześniej wykrylibyśmy, że dwa z nich mają odległość mniejszą niż d). Więc ilość sprawdzeń będzie wystarczająco mała.

W momencie gdy znajdziemy odległość mogącą poprawić wynik, musimy jeszcze raz podzielić przestrzeń, tym razem na mniejsze kwadraty, co będzie działało liniowo. Problem zaczyna się gdy przy każdym dodaniu nowego punktu będziemy znajdywać krótszą odległość. Wtedy przy liczbie n punktów, należałoby przerobić słownik n razy, co ma już kwadratowy czas działania.

W tym momencie możemy wprowadzić do algorytmu jeszcze jeden krok - randomowe przesortowanie elementów na wejściu. W ten sposób szansa na to, że kolejny i-ty punkt da nam mniejszą odległość będzie wynosiła $\frac{2}{i}$ $(i \geqslant 2)$.

Podsumowując, przy każdym dodaniu punktu mamy $\frac{2}{i}$ szansy, że będziemy musieli zbudować słownik na nowo w czasie O(i). Biorąc pod uwagę, że liczba porównań punktów jest mała (nie więcej niż 4 pkt w kwadracie) to oczekiwana czas działania będzie wynosić:
$\sum_{i=2}^{n} O(1) + \frac{2}{i} \cdot O(i) = O(n)$

Dopisek: Dlaczego $\frac{2}{i}$?

Możemy spróbować łatwiej wyobrazić sobie co się dzieje w algorytmie. W momencie kiedy dodajemy punkt, mamy dwie możliwości. Albo zmieni on nam najmniejszą odległość (czyli stworzy nową najbliższą parę z punktem, już znajdującym się w zbiorze), albo nie zmieni, ponieważ dwa najbliższe punkty, już tam istniały. Jest to podobna sytuacja, jak gdybyśmy mieli k kapsli, pomalowali wszystkie na czarno a dwa na czerwono. Te dwa czerwone będą symbolizowały najbliżej oddaloną parę punktów. Kiedy wylosujemy jeden kapsel, szansa na to, że będzie należał do tej pary, wynosi $\frac{2}{k}$.