

# DRZEWY ZBALANSOWANE: B-DRZEWY

## 1 Wstęp

PRZYPOMNIENIE: *Słownikiem* nazywamy strukturę danych umożliwiającą pamiętanie zbioru pewnych elementów oraz wykonywanie na nim operacji wstawiania, wyszukiwania i usuwania elementu.

Gdy chcemy używać niewielkich słowników możemy przechowywać je w pamięci wewnętrznej. Strukturami danych nadającymi się do tego celu są przykładowo zbalansowane drzewa binarne (np. drzewa AVL, drzewa czerwono-czarne) i tablice hashujące.

Dla implementacji dużych słowników, nie mieszczących się w pamięci wewnętrznej idealnie nadają się B-drzewa. Są to zbalansowane drzewa przeszukiwań specjalnie zaprojektowane tak, by operacje na nich były efektywnie wykonywane wtedy gdy są one przechowywane w plikach dyskowych.

Cechy charakterystyczne B-drzew:

- Wszystkie liście B-drzewa leżą na tej samej głębokości.
- Każdy węzeł zawiera wiele elementów zbioru (są one uporządkowane).
- Nowe elementy zapamiętywane są w liściach.
- Drzewo rośnie od liści do korzenia: jeśli jakiś węzeł jest pełny to tworzony jest jego nowy brat, który przejmuje od niego połowę elementów a jeden z jego elementów (środkowy) wędruje wraz ze wskaźnikiem na nowego brata do ojca. Jeśli w ten sposób podzielony zostanie korzeń, to tworzony jest nowy korzeń, a stary będzie jednym z dwóch jego synów. Jest to jedyny moment, w którym może wzrosnąć wysokość B-drzewa.

## 2 Formalny opis

**Definicja.** *B-drzewo o minimalnym stopniu  $t$*  posiada następujące własności:

1. Każdy węzeł  $x$  ma następujące pola:
  - a.  $n[x]$  - liczba kluczy aktualnie pamiętanych w  $x$ ,
  - b.  $2t - 1$  pól  $key_i[x]$  na klucze (pamiętane są one w porządku niemalejącym:  $key_1[x] \leq key_2[x] \leq \dots \leq key_{n[x]}[x]$ ),
  - c.  $leaf[x]$  - pole logiczne = TRUE iff  $x$  jest liściem.
2. Jeśli  $x$  jest węzłem wewnętrznym to posiada ponadto  $2t$  pól  $c_i[x]$  - na wskaźniki do swoich dzieci.
3. Klucze pamiętane w poddrzewie o korzeniu  $c_i[x]$  są nie mniejsze od kluczy pamiętanych w poddrzewie o korzeniu  $c_j[x]$  (dla każdego  $j < i$ ) i nie większe od kluczy pamiętanych w poddrzewie o korzeniu  $c_k[x]$  (dla każdego  $i < k$ ).
4. Wszystkie liście mają tę samą głębokość (oznaczamy ją  $h$ ).
5.  $t \geq 2$  jest ustaloną liczbą całkowitą określającą dolną i górną granicę na liczbę kluczy pamiętanych w węzłach:

- a. Każdy węzeł różny od korzenia musi pamiętać co najmniej  $t - 1$  kluczy (a więc musi mieć co najmniej  $t$  dzieci). Jeśli drzewo jest niepuste, to korzeń musi pamiętać co najmniej jeden klucz.
- b. Każdy węzeł może pamiętać co najwyżej  $2t - 1$  kluczy ( a więc może mieć co najwyżej  $2t$  dzieci ). Mówimy, że węzeł jest *pełny* jeśli zawiera dokładnie  $2t - 1$  kluczy.

### 3 Operacje na B-drzewach

Zakładamy, że B-drzewo pamiętane jest na dysku. Jego węzły sprowadzane są do pamięci wewnętrznej operacją *disc-read*. Każdorazowo w pamięci wewnętrznej znajduje się tylko niewielka liczba węzłów. Tylko te węzły mogą być modyfikowane przez program. Po każdorazowej modyfikacji węzeł zapisywany jest operacją *disc-write* na dysk. Przyjmujemy, że operacja *disc-read* nie powoduje żadnej akcji gdy wydana jest do węzła znajdującego się aktualnie w pamięci.

#### 3.1 PRZESZUKIWANIE

Wykonuje się w podobny sposób jak w binarnych drzewach przeszukiwań. Jedyna różnica polega na tym, że przechodząc wierzchołki drzewa dokonujemy wyboru między wieloma synami.

W poniższej procedurze  $k$  jest poszukiwanym kluczem a  $x$  jest adresem węzła, od którego rozpoczynamy szukanie.

```

procedure B-Tree-Search( $x, k$ )
   $i \leftarrow 1$ 
  while  $i \leq n[x]$  and  $k > key_i[x]$  do  $i \leftarrow i + 1$ 
  if  $i \leq n[x]$  and  $k = key_i[x]$  then return ( $x, i$ )
  if  $leaf[x]$  then return NIL
  else disc-read( $c_i[x]$ )
  return B-Tree-Search( $c_i[x], k$ )

```

W przypadku gdy  $n[x]$  jest duże zamiast liniowego przeszukiwania kluczy w wierzchołku, może opłacić się zastosowanie przeszukiwania binarnego.

#### 3.2 TWORZENIE PUSTEGO B-DRZEWIA

```

procedure B-Tree-Create( $T$ )
   $x \leftarrow \text{Allocate-Node}()$ 
   $leaf[x] \leftarrow \text{TRUE}$ 
   $n[x] \leftarrow 0$ 
  Disc-Write( $x$ )
   $root[T] \leftarrow x$ 

```

#### 3.3 ROZDZIELANIE WĘZŁA W B-DRZEWIE

Znaczenie parametrów:

$y$  - pełny wierzchołek, tj. zawierający  $2t - 1$  kluczy, który należy rozdzielić;

$x$  - ojciec  $y$ -ka, procedura *B-Tree-Split-Child* będzie wywoływana dla  $x$ -a, który jest niepełny;

$i$  - określa, którym synem  $x$ -a jest  $y$ .

```

procedure B-Tree-Split-Child( $x, i, y$ )
 $z \leftarrow \text{Allocate-Node}()$ 
 $\text{leaf}[z] \leftarrow \text{leaf}[y]$ 
 $n[z] \leftarrow t - 1$ 
for  $j \leftarrow 1$  to  $t - 1$  do  $\text{key}_j[z] \leftarrow \text{key}_{j+t}[y]$ 
if not  $\text{leaf}[y]$  then for  $j \leftarrow 1$  to  $t$  do  $c_j[z] \leftarrow c_{j+t}[y]$ 
 $n[y] \leftarrow t - 1$ 
for  $j \leftarrow n[x] + 1$  downto  $i + 1$  do  $c_{j+1}[x] \leftarrow c_j[x]$ 
 $c_{i+1}[x] \leftarrow z$ 
for  $j \leftarrow n[x]$  downto  $i$  do  $\text{key}_{j+1}[x] \leftarrow \text{key}_j[x]$ 
 $\text{key}_i[x] \leftarrow \text{key}_i[y]$ 
 $n[x] \leftarrow n[x] + 1$ 
 $\text{Disc-Write}(y)$ ;  $\text{Disc-Write}(z)$ ;  $\text{Disc-Write}(z)$ 

```

### 3.4 UMIESZCZANIE KLUCZA W B-DRZEWIE

Umieszczenie klucza  $k$  w drzewie dokonuje się w procedurze *B-Tree-Insert-Nonfull*. Procedura *B-Tree-Insert* sprawdza jedynie czy  $T$  nie ma pełnego korzenia i jeśli tak jest, to tworzy nowy korzeń, a stary rozdziela na dwa węzły, które stają się synami nowego korzenia.

```

procedure B-Tree-Insert( $T, k$ )
 $r \leftarrow \text{root}[T]$ 
if  $n[r] = 2t - 1$ 
then  $s \leftarrow \text{Allocate-Node}()$ 
 $\text{root}[T] \leftarrow s$ 
 $\text{leaf}[s] \leftarrow \text{FALSE}$ 
 $n[s] \leftarrow 0$ 
 $c_1[s] \leftarrow r$ 
 $\text{B-Tree-Split-Child}(s, 1, r)$ 
 $\text{B-Tree-Insert-Nonfull}(s, k)$ 
else  $\text{B-Tree-Insert-Nonfull}(r, k)$ 

```

Procedura *B-Tree-Insert-Nonfull* przechodzi ścieżkę od korzenia do odpowiedniego liścia, rozdzielając wszystkie pełne wierzchołki, które ma przejść. Chodzi o to, by w momencie wywołania tej procedury węzeł  $x$  był niepełny.

```

procedure B-Tree-Insert-Nonfull( $x, k$ )
 $i \leftarrow n[x]$ 
if  $\text{leaf}[x]$  then
while  $i \geq 1$  and  $k < \text{key}_i[x]$ 
do  $\text{key}_{i+1}[x] \leftarrow \text{key}_i[x]$ 
 $i \leftarrow i - 1$ 
 $\text{key}_{i+1}[x] \leftarrow k$ 
 $n[x] \leftarrow n[x] + 1$ 
 $\text{Disc-Write}(x)$ 
else while  $i \geq 1$  and  $k < \text{key}_i[x]$  do  $i \leftarrow i - 1$ 
 $i \leftarrow i + 1$ 
 $\text{Disc-Read}(c_i[x])$ 
if  $n[c_i[x]] = 2t - 1$ 
then  $\text{B-Tree-Split-Child}(x, i, c_i[x])$ 
if  $k > \text{key}_i[x]$  then  $i \leftarrow i + 1$ 
 $\text{B-Tree-Insert-Nonfull}(c_i[x], k)$ 

```

### 3.5 USUWANIE KLUCZA Z B-DRZEWA

**procedure** *B-Tree-Delete*( $x, k$ )  
(\* zadanie domowe \*)

## 4 Koszt operacji

**Twierdzenie 1** *Jeśli  $n \geq 1$ , to dla każdego B-drzewa o wysokości  $h$  i stopniu minimalnym  $t \geq 2$  pamiętającego  $n$  kluczy:  $h \leq \log_t \frac{n+1}{2}$ .*

PRZYKŁAD Jeśli przyjmiemy  $t = 100$ , to wówczas B-drzewo zawierające do 2000000 elementów ma wysokość nie większą niż 3. Tak więc wszystkie omawiane operacje na takim B-drzewie będą wymagały dostępu do co najwyżej trzech węzłów (a więc trzeba będzie wykonać co najwyżej sześć operacji dyskowych).

Niech  $n$  będzie liczbą węzłów w B-drzewie a  $h = \Theta(\log_t n)$  - wysokością drzewa.

procedura	liczba operacji dyskowych	koszt pozostałych operacji
<i>B-Tree-Search</i>	$O(h)$	$O(th)$
<i>B-Tree-Create</i>	$O(1)$	$O(1)$
<i>B-Tree-Split-Child</i>	$O(1)$	$O(t)$
<i>B-Tree-Insert</i>	$O(h)$	$O(th)$
<i>B-Tree-Delete</i>	$O(h)$	$O(th)$

## 5 Rada praktyczna

Należy rozważnie dobrać wartość  $t$ . Trzeba pamiętać, że wraz ze wzrostem  $t$  rośnie liczba operacji wykonywanych w pamięci wewnętrznej i może zniweczyć korzyści wynikające ze zmniejszenia liczby operacji dyskowych.