Notatki z AiSD. Nr ?. 1 lipca 2022

Drzewa samoorganizujące się

IIUWr. II rok informatyki. *Opracował: Krzysztof Loryś*

1 Wprowadzenie

Drzewa samoorganizujące się są kolejnym przykładem struktury danych opartej na binarnych drzewach przeszukiwań. Przymiotnik "samoorganizujące" oznacza, że drzewa te w trakcie wykonywania na nich operacji zmieniają swoją strukturę automatycznie, stosując pewną prostą heurystykę. W przeciwieństwie do drzew zbalansowanych (AVL, czerwono-czarnych) heurystyka ta nie korzysta z żadnych dodatkowych informacji pamiętanych w wierzchołkach. Druga istotna różnica polega na tym, że teraz pojedyncze operacje słownikowe mogą być kosztowne. Jak jednak pokażemy, zamortyzowany koszt ciągu operacji jest niski.

2 Operacje na drzewach samoorganizujących się

Oprócz operacji słownikowych ($find(i, S)$, $insert(i, S)$, $delete(i, S)$, odpowiednio odszukiwania, wstawiania i usuwania klucza i w (do, z) drzewie S) rozważymy realizację następujących operacji:

- $join(S_1, S_2)$ - połącz drzewa S_1 i S_2 w jedno drzewo (przy założeniu, że każdy klucz w drzewie S_1 jest nie większy od każdego klucza z drzewa S_2),
- $split(i, S)$ - rozdziel S na dwa drzewa S_1 i S_2 takie, że każdy klucz w S_1 jest nie większy od i, a każdy klucz w S_2 jest nie mniejszy od i.

3 Implementacja operacji

Podstawowa idea drzew samoorganizujących się polega na tym, by wierzchołki drzewa zawierające klucz i (parametr operacji *insert, delete, find, split*) przesuwać serią rotacji do korzenia. Umiejętnie wykonywane rotacje będą powodować "spłaszczenie" drzewa.

Wygodnie jest nam wprowadzić operację *Splay*, w terminach której wyrazimy wszystkie interesujące nas operacje.

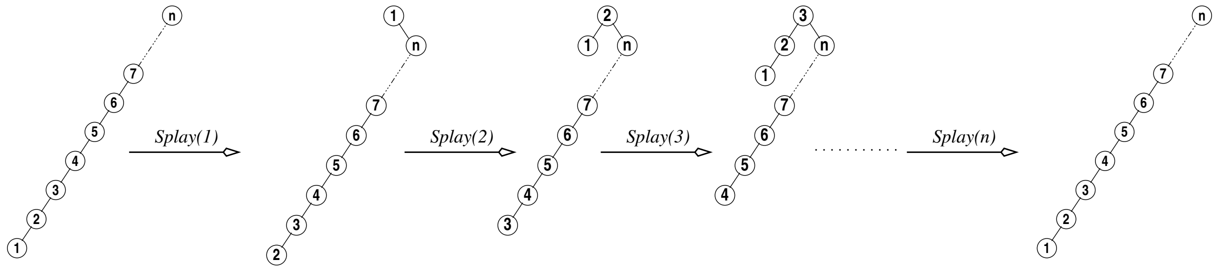
Definicja 1 *$Splay(j, S)$ - przeorganizuj S tak, by jego korzeniem stał się wierzchołek zawierający k takie, że w S nie ma elementu leżącego między k i j.*

Tak więc jeśli j znajduje się w S to operacja $Splay(j, S)$ przesunie j do korzenia. W przeciwnym razie w korzeniu znajdzie się $k = \min\{x \in S | x > j\}$ lub $k = \max\{x \in S | x < j\}$.

4 Implementacja Splay(x)

Splay łatwo jest zaimplementować przy pomocy rotacji. Jedną z możliwości jest stosowanie rotacji do elementu x tak długo, aż znajdzie się on w korzeniu. Jak jednak pokazuje poniższy przykład, taka implementacja powoduje, że niektóre ciągi operacji słownikowych byłyby wykonywane w czasie kwadratowym od długości ciągu.

Przykład 1



(A) (B) (C) (D) (E)

Drzewo (A) może powstać na skutek wykonania ciągu instrukcji: $insert(1)$, $insert(2)$, ..., $insert(n)$. Kolejne operacje: $Splay(1), Splay(2), \ldots Splay(n-1)$ wykonują odpowiednio: $n-1$, $n-1$, $n-2$, $n-3, \ldots, 1$ rotacji. Po wykonaniu $Splay(n)$ otrzymujemy z powrotem drzewo (A). $\square$

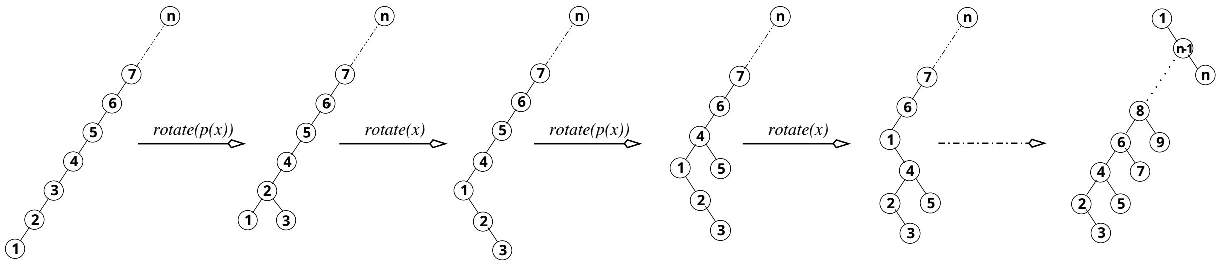
Wobec tego musimy zaproponować inny sposób implementacji. Rozważamy 3 przypadki:

(a) x ma ojca, ale nie ma dziadka $\rightarrow$ *rotate*(x),

(b) x ma ojca $p(x)$ i ma dziadka; x i $p(x)$ są obydwaj lewymi bądź obydwaj prawymi synami swoich ojców $\rightarrow$ *rotate*$(p(x))$; *rotate*(x),

(c) x ma ojca $p(x)$ i ma dziadka; x jest lewym a $p(x)$ prawym synem, bądź na odwrót $\rightarrow$ *rotate*(x); *rotate*(x).

Przykład 2



To samo zdegenerowane drzewo co w Przykładzie 1 po wykonaniu $Splay(1)$, w opisany powyżej sposób, zostaje istotnie spłaszczone - jego wysokość została zredukowana o połowę. $\square$

5 Analiza

Stosujemy analizę zamortyzowaną. Każdy wierzchołek drzewa przechowuje pewien depozyt. Operacja wykonywana na drzewie może zwiększać depozyty, bądź też może być opłacana przez kwoty z depozytów.

Oznaczenia

$S(x)$ - poddrzewo o korzeniu w x,

$|S|$ - liczba wierzchołków w drzewie S,

$\mu(S) = \lfloor \log(|S|) \rfloor$,

$\mu(x) = \mu(S(x))$.

Będziemy utrzymywać następujący niezmiennik:

Wierzchołek x ma zawsze co najmniej $\mu(x)$ jednostek na swoim koncie.

Insert daje wierzchołkowi pewien początkowy depozyt.

Lemat 1 *Każda operacja* Splay(x,S) *wymaga nie więcej niż* $3(\mu(S)-\mu(x))+1$ *jednostek do wykonania operacji i zachowania niezmiennika kredytowego.*

DOWÓD: Rozważamy trzy przypadki jakie możemy napotkać, przesuwając x w kierunku korzenia, podczas operacji *Splay*.

(a) W tym przypadku x nie ma dziadka i wykonujemy pojedynczą rotację *rotate(x)*. Niech y oznacza ojca x-a.

rysunek

Niech μ oznacza depozyty wierzchołków przed wykonaniem tej rotacji, a μ' - depozyty po jej wykonaniu.

Ponieważ jedynie poddrzewa zakorzenione w x i w y mogły zmienić swoją wielkość, aby utrzymać niezmiennik musimy zapłacić:

$$\mu'(x) + \mu'(y) - \mu(x) - \mu(y).$$

Łatwo zauważyć, że $\mu'(x) = \mu(y)$, $\mu'(x) \geq \mu(x)$ oraz $\mu'(y) \leq \mu'(x)$. Tak więc

$$\mu'(x) + \mu'(y) - \mu(x) - \mu(y) = \mu'(y) - \mu(x) \leq \mu'(x) - \mu(x) \leq 3(\mu'(x) - \mu(x)).$$

Mając do dyspozycji $3(\mu'(x) - \mu(x)) + 1$ jednostek jesteśmy w stanie utrzymać niezmiennik i pozostanie nam jeszcze jedna jednostka na opłacenie operacji niskiego poziomu związanych z wykonaniem rotacji (manipulacje wskaźnikami, porównania,...).

(b) Niech y i z oznaczają odpowiednio ojca i dziadka x-a.

rysunek

Pokażemy, że *rotate*(y)*; rotate*(x) oraz utrzymanie niezmiennika kosztują nie więcej niż $3(\mu'(x) - \mu(x))$. Ponieważ jedynie poddrzewa zakorzenione w x, y i z mogły zmienić swoją wielkość, aby utrzymać niezmiennik potrzebujemy

$$(*) = \mu'(x) + \mu'(y) + \mu'(z) - \mu(x) - \mu(y) - \mu(z)$$

jednostek. Ponieważ po wykonaniu tych rotacji w poddrzewie o korzeniu x znajdują się dokładnie te same wierzchołki, które przed wykonaniem rotacji znajdowały się w poddrzewie o korzeniu z, mamy $\mu'(x) = \mu(z)$. Stąd

$$(*) = \mu'(y) + \mu'(z) - \mu(x) - \mu(y) = [\mu'(y) - \mu(x)] + [\mu'(z) - \mu(y)] \leq$$

$$\leq [\mu'(x) - \mu(x)] + [\mu'(x) - \mu(y)] \leq 2[\mu'(x) - \mu(x)].$$

Mając $3[\mu'(x) - \mu(x)]$ jednostek do dyspozycji, na opłacenie operacji niskiego poziomu wykonywanych przy tych dwóch rotacjach pozostaje nam $\mu'(x) - \mu(x)$ jednostek. Może się jednak okazać, że $\mu'(x) = \mu(x)$. Wówczas operacje niskiego rzędu będziemy mogli opłacić uszczuplając depozyty, ponieważ (jak pokażemy w poniższym fakcie), równość $\mu'(x) = \mu(x)$ implikuje, że suma nowych depozytów w x, y i z jest mniejsza niż suma depozytów w tych wierzchołkach przed wykonaniem rotacji.

Fakt 1 *Jeśli* $\mu'(x) = \mu(x)$, *to* $\mu'(x) + \mu'(y) + \mu'(z) - \mu(x) - \mu(y) - \mu(z) < 0$.

DOWÓD:

Załóżmy nie wprost, że

$$\mu'(x) = \mu(x) \text{ oraz } \mu'(x) + \mu'(y) + \mu'(z) \geq \mu(x) + \mu(y) + \mu(z).$$

Ponieważ $\mu(x) \leq \mu(y) \leq \mu(z) = \mu'(x) = \mu(x)$, więc

$$\mu(x) = \mu(y) = \mu(z).$$

Stąd

$$\mu'(x) + \mu'(y) + \mu'(z) \geq 3\mu(z).$$

Z tego, że zarówno $\mu'(y)$ jak i $\mu(z)$ są nieujemne i nie większe od $\mu'(x)$ wnioskujemy, że

$$\mu'(x) = \mu'(y) = \mu'(z)$$

i ostatecznie

$$\mu(x) = \mu(y) = \mu(z) = \mu'(x) = \mu'(y) = \mu'(z).$$

Zauważmy teraz, że zbiór wierzchołków znajdujących się przed rotacjami w drzewie o korzeniu x jest rozłączny ze zbiorem wierzchołków znajdujących się po rotacjach w drzewie o korzeniu w z. Oznaczmy moce tych zbiorów przez a i b. Ponadto wszystkie te wierzchołki i jeszcze wierzchołek y znajdowały się przed rotacjami w drzewie o korzeniu w z. Stąd, wobec powyższej równości, mamy

$$\lfloor \log(a) \rfloor = \lfloor \log(a+b+1) \rfloor = \lfloor \log(b) \rfloor.$$

Ale $\lfloor \log(a+b+1) \rfloor \geq \lfloor \log(2\min\{a,b\}) \rfloor > \lfloor \log(\min\{a,b\}) \rfloor$, więc otrzymujemy sprzeczność. □

(c) Podobnie jak (b).

W trakcie operacji *Splay(x,S)* x zajmuje coraz wyższe pozycje. Niech $S_1, S_2, \ldots, S_k$ będą drzewami zakorzenionymi w x w momencie gdy x zajmuje te pozycje. Wówczas całkowity koszt *Splay(x,S)* wynosi

$$3(\mu(S_1) - \mu(x)) + 3(\mu(S_2) - \mu(S_1)) + \ldots + 3(\mu(S_k) - \mu(S_{k-1}) + 1 =$$

$$3(\mu(S_k) - \mu(x)) + 1 = 3(\mu(S) - \mu(x)) + 1$$

□

Literatura

[1] D.Sleator, R.E.Tarjan, *Self-adjusting binary trees,* JACM, 32(1985), s. 652-686.

[2] R.E.Tarjan, *Data Structures and Network Algorithms,* SIAM, 1983.