Laboratorio recuperativo - Algoritmos Numéricos

Christofer Rodríguez Allup
Universidad de Santiago de Chile, Santiago, Chile

***Resumen*—Este documento muestra un análisis de algoritmos numéricos para la solución de sistemas de ecuaciones de diferentes dimensiones programados en la herramienta computacional Matlab. Este análisis consiste en la comparación de eficacia a través de los errores mínimos obtenidos, la eficiencia mediante el costo temporal y espacial para cada uno de los métodos.**

I. Introducción

Un método numérico es un procedimiento con el cual se espera obtener la solución a determinados problemas mediante la utilización de cálculos matemáticos y lógicos, los cuales se llevan a cabo en diversas herramientas computacionales.[1]
El presente documento tiene como objetivo mostrar el desarrollo y análisis del laboratorio recuperativo de algoritmos numéricos, enfocado en algoritmos de solución para sistemas de ecuaciones de diferentes dimensiones. Para esto se programarán los diferentes métodos para la solución de sistemas de ecuaciones y luego se comprarán sus errores, costos temporales y costos espaciales.

II. Antecedentes

Para un correcto entendimiento del presente documento, es necesario comprender los conceptos explicados en la siguiente subsección.

II-A. *Marco teórico*

- Tolerancia: Tolerancia hace referencia al valor deseado para el error durante la implementación de los métodos numéricos. Para la implementación de los métodos que utilizan la tolerancia como una condición de paro, se utilizó una tolerancia de $1 * 20^{-20}$ para las matrices de dimensiones 289x289 y 1089x1089, a su vez para la matriz de 4225x4225 se utilizó una tolerancia de $1 * 20^{-8}$ con el objetivo de que se demore tanto al encontrar la solución para un sistema de un tamaño tan elevado.

- Error: En los métodos numéricos, error se refiere a la exactitud que posee cada uno de estos métodos. Para el cálculo del error en la implementación se utilizó la forma $|ax - b|$.

- Costo temporal: Hace referencia a la cantidad de tiempo empleada por cada uno de los métodos numéricos en encontrar una solución al sistema de ecuaciones entregado al momento de ejecutarlos.

- Costo espacial: Hace referencia a la cantidad aproximada de operaciones aritméticas realizadas por cada uno de los métodos numéricos al resolver los problemas planteados. Para esta medición se llevó a cabo estableciendo costos para ciertas operaciones de manera arbitraría, siendo estas:

  - 1 de costo: Asignaciones, comparaciones y operaciones básicas (+, -, *, /).
  - 6 de costo: Llamado de funciones.
  - Para las operaciones sobre matrices, se modificarán los costos según la cantidad de filas y/o columnas involucradas en las operaciones.

III. Metodologia

III-A. *Métodos*

Los métodos programados y utilizados para resolver los sistemas de ecuaciones, son los siguientes:

- Método LU.
- Método Cholesky.
- Método QR.
- Método Jacobi. [2]
- Método Jacobi-Seidel. [2]
- Método SOR.

IV. Resultados

Después de haber implementado los diversos algoritmos solicitados, se procede a resolver los sistemas de ecuaciones de dimensiones 289x289, 1089x1089 y 4225x4225. Con el objetivo de poder identificar el método más eficaz, se confeccionaron los siguientes gráficos en los cuales se compara el error mínimo obtenido para cada uno de los sistemas, con cada uno de los métodos. Estos se pueden observar en la Figura 1, Figura 2 y Figura 3 respectivamente.

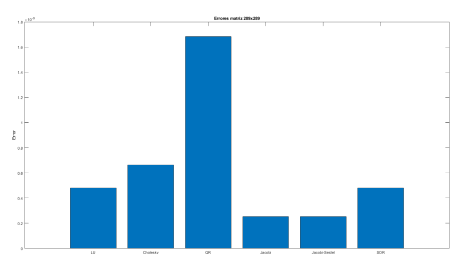

Figura 1: Errores obtenidos para el sistema de 289x289.

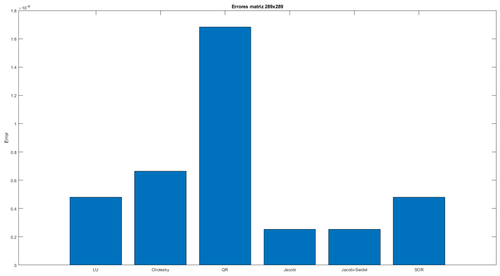

Figura 2: Errores obtenidos para el sistema de 1089x1089.

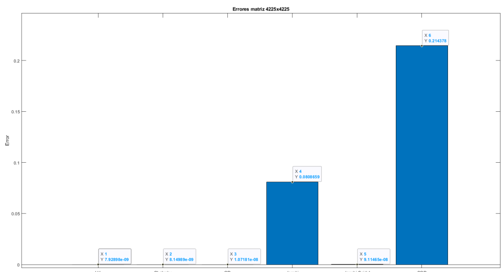

Figura 3: Errores obtenidos para el sistema de 4225x4225.

Luego, con el objetivo de conocer el método más eficiente, se construye una gráfica con el costo temporal y espacial para cada uno de los métodos, con cada uno de los sistemas. Se pueden apreciar los datos de los costos temporales en la Figura 4, 5 y 6, mientras que los costos temporales en la Figura 7, Figura 8 y la Figura 9

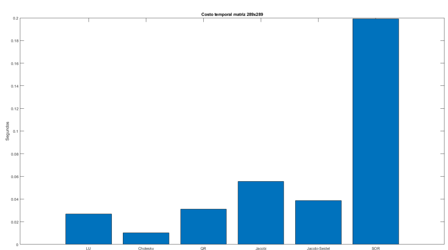

Figura 4: Tiempos obtenidos para el sistema de 289x289.

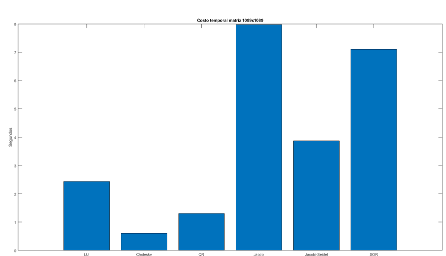

Figura 5: Tiempos obtenidos para el sistema de 1089x1089.

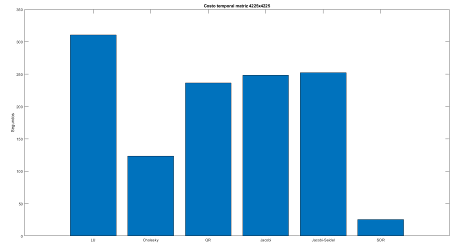

Figura 6: Errores obtenidos para el sistema de 4225x4225.

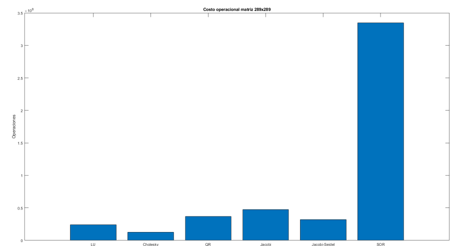

Figura 7: Costo operacional para el sistema de 289x289.

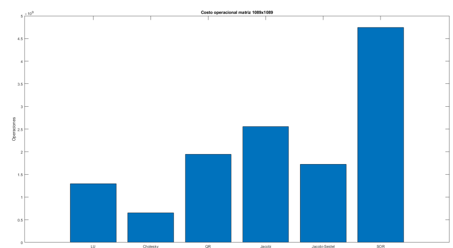

Figura 8: Costo operacional para el sistema de 1089x1089.

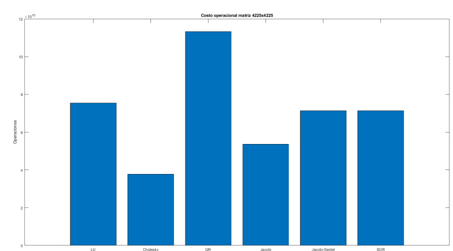

Figura 9: Costo operacional para el sistema de 4225x4225.

V. DISCUSIÓN

A continuación, se realizará el análisis de los resultados presentados en la sección anterior, con el objetivo de conocer el método más eficaz, el más eficiente para cada uno de los sistemas de ecuaciones utilizados.

V-A. *Errores*

Observando las Figuras 1, 2 y 3 se puede apreciar que para la matriz de dimensiones 289x289 y 1089x1089 son los métodos iterativos los que presentan un menor error, siendo el método Jacobi el más eficiente para estos sistemas. Por su parte, para el sistema de dimensiones 4225x4225 los métodos iterativos son aquellos que presentan un mayor error, siendo el método QR el más eficiente y SOR el menos eficiente. El suceso anteriormente descrito puede ser ocasionado debido a que estos métodos iterativos utilizan como condición de parada un número determinado de iteraciones o una tolerancia, debido al tamaño del tercer sistema, la tolerancia fue reducida para disminuir el costo temporal en los experimentos, lo cual perjudicó directamente la eficiencia de los métodos iterativos. Además, es interesante analizar lo sucedido con el método SOR el cual presenta un error demasiado alto, ya que en la simulación con el sistema de 4225x4225 terminó en la iteración 154, por lo que debe haber llegado a la tolerancia muy rápido.

V-B. Costo temporal

Como bien se puede observar en las Figuras 4, 5 el método más eficaz para las matrices de dimensiones 289x289 y 1089x1089 es el método directo Cholesky, el cual factoriza la matriz A en una matriz triangular inferior y una superior que será la traspuesta de la inferior y luego utilizando tanto la sustitución progresiva como la regresiva obtiene la solución del sistema. A pesar de que en la Figura 6 se puede apreciar que el método más eficaz es el método SOR, diremos que Cholesky también es el método más eficaz para la matriz de 4225x4225 debido a lo discutido en la subsección de errores. A su vez, el método SOR es el menos eficaz para la matriz de 289x289, el método Jacobi para el sistema de 1089x1089 y el método LU para la matriz de 4225x4225. En general, son los métodos iterativos aquellos que tienen un mayor costo temporal, debido a la gran cantidad de iteraciones que deben realizar para encontrar la solución del sistema.

V-C. Costo espacial

Observando las Figuras 7, 8 y 9 el método más eficaz para las en costo espacial es el método Cholesky, mientras que para los sistemas de 289x289 y 1089x1089 en menos eficaz es el método SOR, por su parte el método QR fue el menos eficaz para la matriz de 4225x4225. Para el sistema de mayores dimensiones, los métodos directos, a excepción de Cholesky, aumentan considerablemente la cantidad de operaciones realizadas, esto se puede deber a que inicialmente deben factorizar tanto la matriz triangular superior como inferior, para luego utilizar la sustitución progresiva y/o regresiva, funciones que suman una gran cantidad de operaciones a la factorización inicial.

VI. Conclusiones

Habiendo terminado el laboratorio, es posible concluir que se cumplieron satisfactoriamente los objetivos de esta experiencia, se pudieron implementar los diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones en Matlab para luego con los datos obtenidos identificar los métodos más eficientes y eficaces para cada uno de los sistemas de ecuaciones. Se pudo observar mediante el análisis que el método directo Cholesky se destaca como el más eficiente, mientras que los métodos iterativos, específicamente Jacobi son los que destacan como los más eficientes, a pesar de los elevados errores presentados en el sistema de 4225x4225. Una de las principales complicaciones durante el desarrollo de este laboratorio, fue trabajar con un sistema de ecuaciones de 4225x4225, ya que, por su elevada dimensión, provocaba que para obtener los resultados de las simulaciones se debía esperar cerca de 30 minutos, misma razón por la que se decidió reducir la tolerancia al momento de simular este sistema. Cabe destacar que tanto esta complicación como los costos temporales están totalmente relacionados con la maquina en la que se efectúan las simulaciones. Como posibles mejoras al trabajo se puede mencionar qué, con el análisis realizado, se puede notar que el método SOR, probablemente; no fue correctamente implementado, lo que provocó el elevado error en la simulación con el sistema de mayores dimensiones, por lo que sería necesario identificar posibles problemas con las condiciones de parada y el cálculo interno del error.

Referencias

[1] R. S. Vasquez. Metodos numericos para ingenieros. [Online]. Available: https://disi.unal.edu.co/~lctorress/MetNum/LiMetNu2.pdf

[2] C. G. Argos. Apuntes de métodos numéricos 2° e.t.s.i. telecomunicación universidad de málaga. [Online]. Available: http://www.telecos-malaga.com/descargas/apuntes/2Curso/MN/MN-Apuntes.pdf