PEP N°1 - Algoritmos Numéricos

Christofer Rodríguez Allup
Universidad de Santiago de Chile, Santiago, Chile

***Resumen*—Este documento muestra un análisis de algoritmos numéricos para la solución de sistemas de ecuaciones programados en la herramienta computacional Matlab. Este análisis consiste en la comparación de eficacia a través de los errores mínimos obtenidos, la eficiencia mediante el costo temporal y espacial, además del valor promedio de las soluciones obtenidas con cada uno de los métodos.**

I. INTRODUCCIÓN

Un método numérico es un procedimiento con el cual se espera obtener la solución a determinados problemas mediante la utilización de cálculos matemáticos y lógicos, los cuales se llevan a cabo en diversas herramientas computacionales.[1]
El presente documento tiene como objetivo mostrar el desarrollo y análisis de la PEP N°1 de algoritmos numéricos, enfocada en algoritmos de solución de sistemas de ecuaciones aplicados a simulación de fenómenos físicos. Para esto se programarán los diferentes métodos para la solución de sistemas de ecuaciones y luego se comprarán sus errores, costos temporales, costos espaciales y medías de sus soluciones.

II. ANTECEDENTES

Para un correcto entendimiento del presente documento, es necesario comprender los conceptos explicados en la siguiente subsección.

II-A. *Marco teórico*

- Tolerancia: Tolerancia hace referencia al valor deseado para el error durante la implementación de los métodos numéricos. Para la implementación, solo uno de los métodos utiliza la tolerancia para el cálculo de las soluciones, la cual utilizó una tolerancia de $1 * 10^{-10}$.

- Error: En los métodos numéricos, error se refiere a la exactitud que posee cada uno de estos métodos. Para el cálculo del error en la implementación se utilizo la forma $|ax - b|$.

- Costo temporal: Hace referencia a la cantidad de tiempo empleada por cada uno de los métodos numéricos en encontrar una solución al sistema de ecuaciones entregado al momento de ejecutarlos.

- Costo espacial: Hace referencia a la cantidad aproximada de operaciones aritméticas realizadas por cada uno de los métodos numéricos al resolver los problemas planteados. Para esta medición se llevó a cabo estableciendo costos para ciertas operaciones de manera arbitraría, siendo estas:

  - 1 de costo: Asignaciones, comparaciones, operaciones aritméticas básicas como: +, -, /, *

  - 3 de costo: Llamado de funciones.

Cabe destacar que se realiza una sobre simplificación del cálculo de operaciones, puesto que principalmente se realizan operaciones entre matrices, las cuales internamente realizan más operaciones dependiendo de sus dimensiones.

III. METODOLOGIA

III-A. *Métodos*

Los métodos programados y utilizados para resolver los sistemas de ecuaciones, son los siguientes:

- Método iterativo: Método Jacobi. [2]

- Método directo: Método Crout. [2]

- Método ortogonal: Método Gram-Schmidt modificado. [2]

IV. RESULTADOS

Después de haber implementado los algoritmos iterativos, directos y ortogonales, se procede a resolver 100 sistemas de ecuaciones con una dimensión de 1089x1089. Con el objetivo de identificar el método más eficaz, se construye una gráfica con el error obtenido por cada uno de los métodos durante durante las 100 iteraciones, esto se puede observar en la Figura 1.

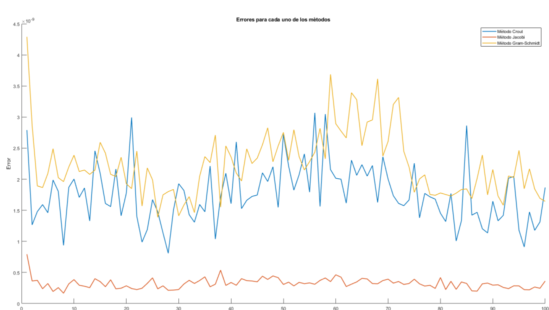

Figura 1: Errores obtenidos con los 3 métodos durante 100 iteraciones.

Luego, con el objetivo de conocer el método más eficiente, se construye una gráfica con el costo temporal y espacial para cada uno de los métodos durante las 100 iteraciones, esto se puede apreciar en las Figuras 2 y 3 respectivamente.

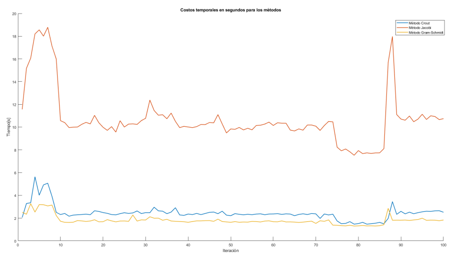

Figura 2: Costos temporales obtenidos con los 3 métodos durante 100 iteraciones.

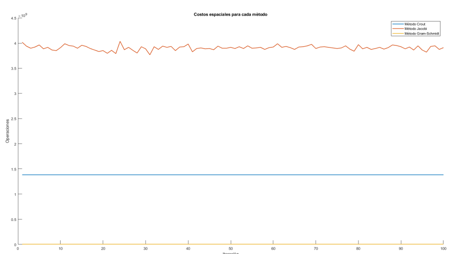

Figura 3: Costos espaciales obtenidos con los 3 métodos durante 100 iteraciones.

Posteriormente, con el fin de comparar el promedio de los vectores solución para los 3 métodos durante las 100 iteraciones, se realiza una gráfica con los valores obtenidos, esto se puede observar en la Figura 4.

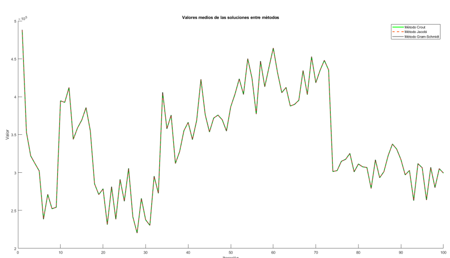

Figura 4: Medias de los vectores solución obtenidos con los 3 métodos durante 100 iteraciones.

V. Discusión

A continuación, se realizará el análisis de los resultados presentados en la sección anterior, con el objetivo de conocer el método más eficaz, el más eficiente y comparar la media de sus soluciones.

Como podemos apreciar en la Figura 1, el método más eficaz de entre los 3 métodos implementados, es el método iterativo Jacobi, el cual posee un error significativamente inferior a los otros 2 métodos. A su vez el método menos eficaz es el método que resuelve el sistema de ecuaciones mediante ortogonalización, el método Gram-Schmidt, el cual, si bien posee un error similar al del método Crout, comienza con un error elevado y se mantiene generalmente superior al de Gram-Schmidt durante las 100 iteraciones.

Si bien se puede observar en la Figura 1 que el método Jacobi es el más eficaz, debido a que la condición de parada para las iteraciones es que se llegue a la tolerancia esperada o alcance el límite de iteraciones máximas establecido, al apreciar tanto la Figura 2 como la Figura 3, podemos ver que lo que hace tan eficaz al método Jacobi también lo hace el menos eficiente.

Debido a la gran cantidad de iteraciones que debe realizar para alcanzar la tolerancia deseada, aumenta enormemente la cantidad de operaciones y a su vez el tiempo que demora en obtener las soluciones, llegando a demorarse tiempos cercanos a los 20 segundos en algunas iteraciones. A su vez, es posible observar que tanto en costo temporal como en costo espacial, el método más eficiente es el método de Gram-Schmidt, el cual no toma más de 4 segundos en encontrar la solución y posee un costo espacial tan bajo en comparación al método Jacobi, que en la Figura 3 se puede ver un valor muy cercano a 0.

Finalmente, observando la Figura 4 podemos notar una sola recta de varios colores, esto ya que la recta que representa la media de las soluciones de los 3 métodos se superponen. Con esto ponemos conjeturar que, los 3 métodos a pesar de tener diferentes errores al momento de solucionar los distintos sistemas de ecuaciones, las soluciones obtenidas por cada uno de estos se distribuyen de manera muy similar.

VI. Conclusiones

Una vez finalizada esta experiencia, es posible concluir que todos los objetivos propuestos fueron cumplidos de manera satisfactoria, se realizaron las implementaciones de los métodos en Matlab, se identificó los métodos más eficientes y eficaces, además de poder analizar la media de las soluciones obtenidas.

Si bien a través de la media de las soluciones fue posible observar que las soluciones de los 3 métodos se distribuyen de manera similar, el método Jacobi fue el que destacó por su gran eficacia, pero a su vez destacó por su baja eficiencia, siendo el método Gram-Schmidt modificado el más eficiente según los gráficos expuestos.

Si bien los algoritmos fueron consultados desde las bibliografías, es importante conocer sus ventajas, desventajas y limitaciones, para así saber que método es más adecuado a la situación en futuras experiencias como ingeniero informático.

REFERENCIAS

[1] R. S. Vasquez. Metodos numericos para ingenieros. [Online]. Available: https://disi.unal.edu.co/~lctorress/MetNum/LiMetNu2.pdf

[2] C. G. Argos. Apuntes de métodos numéricos 2° e.t.s.i. telecomunicación universidad de málaga. [Online]. Available: http://www.telecos-malaga.com/descargas/apuntes/2Curso/MN/MN-Apuntes.pdf