Spomnimo se: $\mathbb{R}^n$ je prostor n dimenzionalnih vektorjev, $\mathbb{R}^{m \times n}$ prostor $m \times n$ matrik. Matrika je simetrična, če je $A^\mathsf{T} = A$. Kvadratna matrika A je obrnljiva, če obstaja matrika X, da je $AX = I$. Sled $\mathrm{tr}(A) = \sum a_{ii}$. Vektorje gledamo kot pokončne $n \times 1$ matrike.

12. 10. 2016

Ugotovi in dokaži formule! Ugotovi tudi dimenzije posameznih matrik in rezultatov (nekatere moraš seveda smiselno predpostaviti).

$$
\begin{aligned}
(AB)^\mathsf{T} &= ? \\
(A_1 A_2 \dots A_n)^\mathsf{T} &= ? \\
(AB)^{-1} &= ? \\
(A_1 A_2 \dots A_n)^{-1} &= ? \\
(A^\mathsf{T})^{-1} &= ? \\
\mathrm{tr}(ABC) &= \mathrm{tr}(CAB) = \mathrm{tr}(BCA) \neq \mathrm{tr}(BAC) \\
AB &\neq BA
\end{aligned}
$$

Zapiši skalarni produkt vektorjev a in b kot produkt dveh matrik. $\langle a, b \rangle = ?$.

Pokaži, da velja $\langle Aa, b \rangle = \langle a, A^\mathsf{T} b \rangle$.

Def: Hadamardov ali "produkt po komponentah" je definiran kot $(A \odot B)_{ij} = a_{ij} b_{ij}$

Def: Matrika je diagonalna, če je $a_{ij} = 0$ za $i \neq j$.

Def: Označimo z $\mathrm{diag}(a)$ diagonalno matriko, ki ima komponente vektorja a po diagonali.

Naj bosta a in b vektorja. Dokaži:

$$
\begin{aligned}
a \odot b &= \mathrm{diag}(a) b \\
a \odot b &= b \odot a \\
a \odot (b \odot c) &= (a \odot b) \odot c \\
a \odot b &= a^\mathsf{T} \,\mathrm{diag}(b) \\
(A \odot B)^\mathsf{T} &= ?
\end{aligned}
$$

Določi časovno zahtevnost naslednjih operacij v odvisnosti od dimenzij vektorjev in matrik, ki nastopajo:

$$
Aa, AB, \langle a, b \rangle, A \odot B, A^\mathsf{T}, A^{-1}, a^\mathsf{T}(bc^\mathsf{T}), (a^\mathsf{T} b)c^\mathsf{T}, \mathrm{diag}(a)b, \mathrm{tr}(A)
$$

Z besedami opiši kaj pomenita naslednji operaciji: $\mathrm{diag}(a)^\mathsf{T} A$, $A\,\mathrm{diag}(a)$.

Izračunaj 1, 2 in ∞ norme naslednjih vektorjev (morda napiši program?). Kaj opaziš?

$$\begin{aligned}(0,0,0,0,0)\\(1,1,1,1,1)\\(1,2,3,4,5)\\(14,0,0,0,1)\\(0,0,0,0,1)\\(-100,5,4,3,2)\\(-100,1,1,1,1)\end{aligned}$$

Naj bo $\{e_1,\ldots,e_n\}$ ortonormirana baza $\mathbb{R}^n$ in E $n\times n$ matrika iz vektorjev e_i:

$$E=[e_1\ldots e_n].$$

Kaj velja za $E^\mathsf{T}E$? Tako matriki rečemo ortogonalna.

Težje naloge:
Pokaži, da za ortogonalno matriko Q velja $\|Qx\|=\|x\|$.

Def: Definirajmo matrično normo inducirano z vektorsko normo $\|\cdot\|_2$:

$$\|A\|_2=\max_{x\in\mathbb{R}^n,\|x\|_2=1}\|Ax\|_2$$

Za različne vektorske norme dobimo različne matrične norme, mesto 2 lahko zgoraj pišemo 1, p, ∞. Posebej definiramo še Frobeniusovo normo

$$\|A\|_F=\sqrt{\sum_{ij}a_{ij}^2}.$$

Interpretiraj Frobeniusovo normo kot vektorsko normo.

Dokaži da je ekvivalentna definicija matrične norme $\|A\|=\max_{x\in\mathbb{R}^n,x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

Ugotovi, kako izračunati $\|A\|_1$ in $\|A\|_\infty$.

26. 10. 2016
Nariši graf $f(x,y)=(x-2)^2+(y+1)^2$. Kje ima globalni minimum?

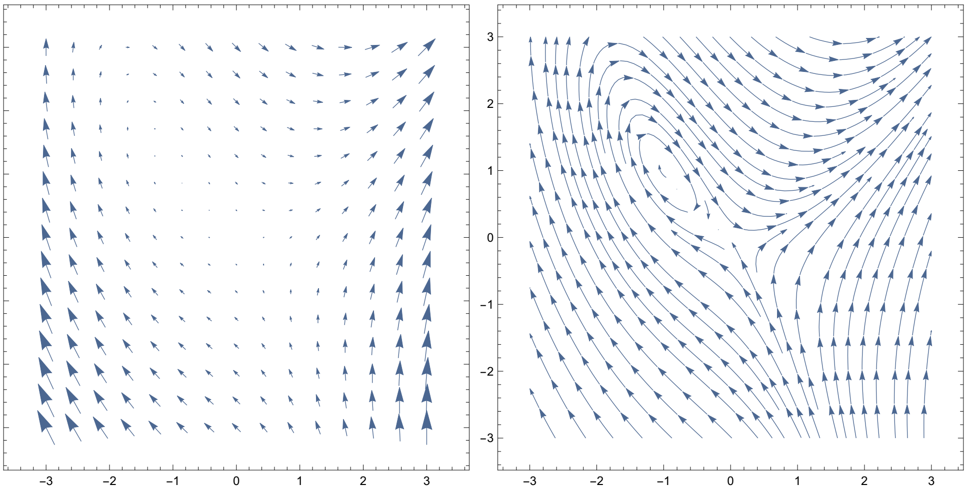
Def: Vektorsko polje je funkcija, ki vsaki točki v prostoru/ravnini priredi nek vektor. Vektorska polja narišemo kot puščice ali tokovnice.

Spomnimo se, da je gradient funkcije $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definiran kot

$$\operatorname{grad} f(x,y,z)=\left[\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right],$$

torej je vektorsko polje (ekvivalentno za n spremenljivk).

Ilustriraj gradientno polje funkcije f od zgoraj. Interpretiraj si delovanje gradientnega spusta in razmisli, zakaj preveliki skoki niso dobri (premajhni pa tudi ne).



Slika 1: Vektorko polje $(x + y, x^2 - y)$ narisano kot puščice in tokovnice.

Nariši vektorsko polje $f(x, y) = (x, -y)$. Kako bi tukaj delovala metoda spusta? Kaj pa na $(-y, x)$? Ali pa $(2x \cos(x^2 + y^2), 2y \cos(x^2 + y^2))$? Najdi funkcije, ki dajo te gradiente in si interpretiraj različne težave, na katere lahko naletiš.

Izračunaj gradient $f(x, y) = \frac{\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}$ in nariši vektorsko polje, ki ga dobiš. Ali te na kaj spominja?

Namig: sila na enotski delec je v fiziki definirana kot $\vec{F} = -\operatorname{grad} U$, kjer je U na primer gravitacijski ali električni potencial. Ali dobiš silo enotskega naboja na enotski naboj, če namesto α pišeš ε_0?

Naj bo

$$g(x) = x^2 - \frac{15}{(x-1)^4 + y^2 + 3} + 2\sin(xy) + y^2.$$

Izračunaj njen gradient in poskušaj izračunati njen minimum na roko. Obupaj, in dokončaj delo s Pythonom z uporabo gradientnega spusta.

Rešitev: $x_{min} = 0.529935, y_{min} = -0.204974, f(x_{min}, y_{min}) = -4.74703$.

9. 11. 2016

Dana je datoteka `meritve.txt` z meritvami neke količine, odvisne od ene spremenljivke. Nariši podatke, oceni vrsto odvisnosti in postavi model. Minimiziraj napako z metodo gradientnega spusta. Preiskusi metodo na 10, 100, 1000, 10000 podatkih in primerjaj kvaliteto ocene.

Izračunaj rešitev še po metodi, ki smo jo delali pred tablo. Ali je rezultat enak? Kaj pa če želimo minimizirati kakšno drugo normo? Poizkusi še z minimizacijo 1 ali ∞ norme. Ali metoda s table tukaj deluje? Kaj pa gradientni spust? Katera je bolj zahtevna?

Danih je nekaj meritev asteroida v kartezičnih koordinatah:

```
{{-1.3669, 5.06791}, {-1.51623, 5.10966}, {-1.66176, 5.13864},
 {-1.80315, 5.15478}, {-1.94002, 5.15803}, {-2.07205, 5.14838},
 {-2.1989, 5.12587}, {-2.32025, 5.09055}, {-2.43581, 5.0425},
```

```
{-2.54527, 4.98185}, {-2.64837, 4.90875}, {-2.74486, 4.82338},
{-2.83448, 4.72595}, {-2.91702, 4.61671}, {-2.99227, 4.49594},
{-3.06003, 4.36392}, {-3.12015, 4.22099}}
```

Določi njegov tir!

Kaj pa če so nekatere meritve bolj pomembne/imajo večjo stopnjo zaupanja od drugih? Kako bi rešil ta problem? Razvij metodo, ki minimizira uteženo 2-normo

$$\|x\|_{2,w} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i^2},$$

kjer so w_i pozitivne uteži.

23. 11. 2016

Nariši graf *sigmoide*

$$\sigma(z) = \frac{1}{1 - e^{-z}}.$$

Primerjaj graf s step funkcijo

$$\vartheta(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 1 & z \geq 0 \end{cases}.$$

Izračunaj odvod sigmoide in ga izrazi s σ samo.

Izračunaj odvod (matriko parcialnih odvodov) splošne vektorizirane funkcije

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (f(x_1), \ldots, f(x_n)).$$

Konkretno izračunaj tudi odvod vektorizirane sigmoide.