Spomnimo se: $\mathbb{R}^n$ je prostor n dimenzionalnih vektorjev, $\mathbb{R}^{m\times n}$ prostor $m \times n$ matrik. Matrika je simetrična, če je $A^\top = A$. Kvadratna matrika A je obrnljiva, če obstaja matrika X, da je $AX = I$. Sled $\mathrm{tr}(A) = \sum a_{ii}$. Vektorje gledamo kot pokončne $n \times 1$ matrike.

12. 10. 2016

Ugotovi in dokaži formule! Ugotovi tudi dimenzije posameznih matrik in rezultatov (nekatere moraš seveda smiselno predpostaviti).

$$
\begin{aligned}
(AB)^\top &= ? \\
(A_1A_2\dots A_n)^\top &= ? \\
(AB)^{-1} &= ? \\
(A_1A_2\dots A_n)^{-1} &= ? \\
(A^\top)^{-1} &= ? \\
\mathrm{tr}(ABC) &= \mathrm{tr}(CAB) = \mathrm{tr}(BCA) \neq \mathrm{tr}(BAC) \\
AB &\neq BA
\end{aligned}
$$

Zapiši skalarni produkt vektorjev a in b kot produkt dveh matrik. $\langle a, b\rangle = ?$.

Pokaži, da velja $\langle Aa, b\rangle = \langle a, A^\top b\rangle$.

Def: Hadamardov ali "produkt po komponentah" je definiran kot $(A \odot B)_{ij} = a_{ij}b_{ij}$

Def: Matrika je diagonalna, če je $a_{ij} = 0$ za $i \neq j$.

Def: Označimo z $\mathrm{diag}(a)$ diagonalno matriko, ki ima komponente vektorja a po diagonali.

Naj bosta a in b vektorja. Dokaži:

$$
\begin{aligned}
a \odot b &= \mathrm{diag}(a)b \\
a \odot b &= b \odot a \\
a \odot (b \odot c) &= (a \odot b) \odot c \\
a \odot b &= a^\top \mathrm{diag}(b) \\
(A \odot B)^\top &= ?
\end{aligned}
$$

Določi časovno zahtevnost naslednjih operacij v odvisnosti od dimenzij vektorjev in matrik, ki nastopajo:

$$Aa, AB, \langle a, b\rangle, A \odot B, A^\top, A^{-1}, a^\top(bc^\top), (a^\top b)c^\top, \mathrm{diag}(a)b, \mathrm{tr}(A)$$

Z besedami opiši kaj pomenita naslednji operaciji: $\mathrm{diag}(a)^\top A$, $A\,\mathrm{diag}(a)$.

Izračunaj 1, 2 in ∞ norme naslednjih vektorjev (morda napiši program?). Kaj opaziš?

$$\begin{aligned}(0, 0, 0, 0, 0)\\(1, 1, 1, 1, 1)\\(1, 2, 3, 4, 5)\\(14, 0, 0, 0, 1)\\(0, 0, 0, 0, 1)\\(-100, 5, 4, 3, 2)\\(-100, 1, 1, 1, 1)\end{aligned}$$

Naj bo $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza $\mathbb{R}^n$ in E $n \times n$ matrika iz vektorjev e_i:

$$E = [e_1 \ldots e_n].$$

Kaj velja za $E^\top E$? Tako matriki rečemo ortogonalna.

Težje naloge:
Pokaži, da za ortogonalno matriko Q velja $\|Qx\| = \|x\|$.

Def: Definirajmo matrično normo inducirano z vektorsko normo $\|\cdot\|_2$:

$$\|A\|_2 = \max_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2$$

Za različne vektorske norme dobimo različne matrične norme, mesto 2 lahko zgoraj pišemo 1, p, ∞. Posebej definiramo še Frobeniusovo normo

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{ij} a_{ij}^2}.$$

Interpretiraj Frobeniusovo normo kot vektorsko normo.

Dokaži da je ekvivalentna definicija matrične norme $\|A\| = \max_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

Ugotovi, kako izračunati $\|A\|_1$ in $\|A\|_\infty$.

26. 10. 2016
Nariši graf $f(x, y) = (x-2)^2 + (y+1)^2$. Kje ima globalni minimum?

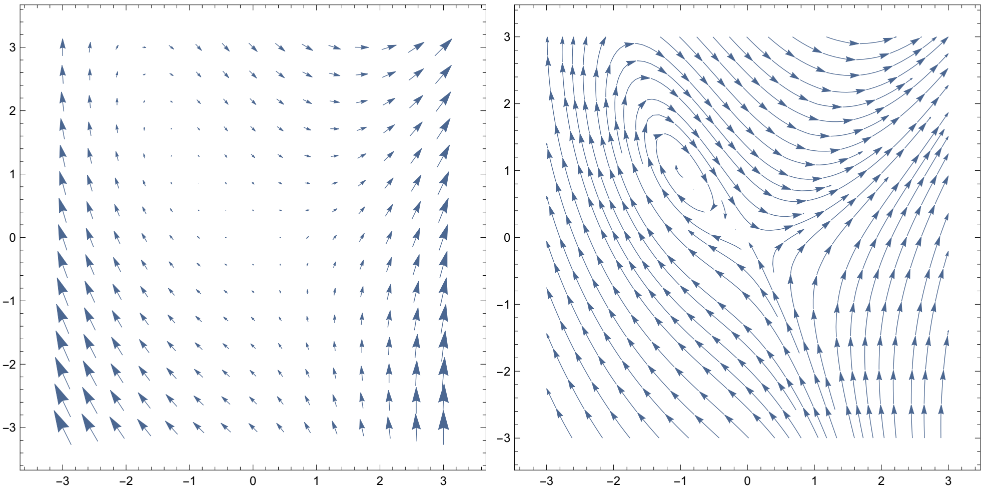
Def: Vektorsko polje je funkcija, ki vsaki točki v prostoru/ravnini priredi nek vektor. Vektorska polja narišemo kot puščice ali tokovnice.

Spomnimo se, da je gradient funkcije $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiran kot

$$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right],$$

torej je vektorsko polje (ekvivalentno za n spremenljivk).

Ilustriraj gradientno polje funkcije f od zgoraj. Interpretiraj si delovanje gradientnega spusta in razmisli, zakaj preveliki skoki niso dobri (premajhni pa tudi ne).



Slika 1: Vektorko polje $(x + y, x^2 - y)$ narisano kot puščice in tokovnice.

Nariši vektorsko polje $f(x, y) = (x, -y)$. Kako bi tukaj delovala metoda spusta? Kaj pa na $(-y, x)$? Ali pa $(2x \cos(x^2 + y^2), 2y \cos(x^2 + y^2))$? Najdi funkcije, ki dajo te gradiente in si interpretiraj različne težave, na katere lahko naletiš.

Izračunaj gradient $f(x, y) = \frac{\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}$ in nariši vektorsko polje, ki ga dobiš. Ali te na kaj spominja?

Namig: sila na enotski delec je v fiziki definirana kot $\vec{F} = -\operatorname{grad} U$, kjer je f na primer gravitacijski ali električni potencial. Ali dobiš silo enotskega naboja na enotski naboj, če namesto α pišeš ε_0?

Naj bo

$$g(x) = x^2 - \frac{15}{(x-1)^4 + y^2 + 3} + 2\sin(xy) + y^2.$$

Izračunaj njen gradient in poskušaj izračunati njen minimum na roko. Obupaj, in dokončaj delo s Pythonom z uporabo gradientnega spusta.

Rešitev: $x_{min} = 0.529935, y_{min} = -0.204974, f(x_{min}, y_{min}) = -4.74703.$