



Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku



Remzijeve teorija na hipergrafovima

Seminarski rad

Nenad Vuletić, Vladimir Krsmanović, Marko
Polić

Mentor:
dr. Maja Pech

Novi Sad, 2020

Abstrakt

U ovom radu ćemo napraviti pregled Remzijeve teorije nad hipergrafovima, predstaviti dokaze i primene ove matematičke teorije.

Contents

1	Uvod	4
2	Postavka i dokaz Remzijeve teorije za hipergrafovima	4
2.1	Postavka problema	4
2.2	Dokaz Remzijeve teoreme za hipergrafove	4
2.3	Dokaz Remzijeve teoreme za polihromatske hipergrafove	6
3	Pregled stanja Remzijeve teorije nad hipergrafovima	7
3.1	Poznati remzijeve broj za hipergrafove	8
3.1.1	Važnost Remzijeve brojeva za hipergrafove stepena 3	8
3.2	Remzijeve teorija nad stablima	8
3.3	Remzijeve teorija nad neuniformnim hipergrafovima	9
3.3.1	Problemi	9
4	Bibliografija	9

1 Uvod

Ubaciti Polićev tekst FOrmulacija Remzijeve teorije za hipergrafove je veoma slična onoj za obične grafove (sama posledica toga da obične grafove možemo posmatati kao hipergrafove red 2), tako da se i većina pojmova koji su poznati iz teorije grafova mogu koristiti i u istraživanju nad hipergrafovima.

2 Postavka i dokaz Remzijeve teorije za hipergrafovima

2.1 Postavka problema

Notaciju za Remzijeve brojeve, bojenja i drugu notaciju kojom ćemo se baviti u ovom poglavlju možemo gledati iz nekoliko ugolova. Iako se sama operacija bojenja vrši nad granama, možemo napraviti nekoliko apstrakcija zarad lakšeg razumevanja.

Kao prvo možemo omdah uočiti da se bavimo isključivo uniformnim i potpunim hipergrafovima. Remzijeve teorije nad neuuniformnim hipergrafovima predstavlja poseban problem, koji je još uvek minimalno istražen i za koji još uvek nismo sigurni da li uopšte važi. O ovome ćemo diskutovati u kasnijem poglavlju 3.3. U fokusu rada su takodje i klasični Remzijeve brojevi, tj. gledamo Remzijeve brojeve samo za potpune hipergrafove. U slučaju da posmatramo nepotpune grafove, uvek možemo definisati sve neprisutne grane nekom dodatnom bojom, a kako ćemo pokazati u kasnijem dokazu, Remzijeve teoreme važi i za hipergrafove sa bilo kojim proizvoljnim konačnim brojem boja. Takodje postoji i poseban deo Remzijeve teorije koji se bavi $K_n - e$ grafovima [pregled], ali ta oblast je izvan opsega ovog rada.

Takodje zarad lakšeg razumevanja same oblasti, pomoću veze između grana i čvorova možemo koristiti činjenicu naša je naša potraga Remzijeve brojeva za bojenja grana zapravo ekvivalentna sa potragom za grupom čvorova koji indukuju potpune monohromatske hipergrafove. Ova abstrakcija je posebno korisna za rad sa hipergrafovima gde je intuicija vezana za pojama grana mnogo slabija u odnosu na obične grafove

2.2 Dokaz Remzijeve teoreme za hipergrafove

U ovom poglavlju dokazujemo Remzijeve teorije za hipergraf $G_k(V, E)$ gde je V skup čvorova, a E je skup skupova k -tog stepena čiji su elementi čvorovi iz skupa V .

Treba da pokažemo $m_3 + 1 \rightarrow (L_1, L_2)^k$. Matematičkom indukcijom dokazujemo:

$$m_3 + 1 \rightarrow (L_1, L_2)^k \quad (1)$$

Indukcijska baza

Radimo indukciju nad elementom k , i iz Remzijeve teoreme za obične grafove (gde je $k = 2$), dobijamo induksijsku bazu.

Indukcijska hipoteza

Iz induksijske hipoteze dobijamo da važi

$$m_1 \rightarrow (L_1 - 1, L_2)^k \quad (2)$$

$$m_2 \rightarrow (L_1, L_2 - 1)^k \quad (3)$$

$$m_3 \rightarrow (L_1, L_2)^{k-1} \quad (4)$$

Indukcijski korak

Konstruišimo prvo k -uniformni hipergraf P sa $n = m_3 + 1$ čvorova. Nad tim hipergrafom je definisano bojenje χ takvo da boji sve k -elementne hipergrane hipergrafa P ili u boju 1 ili u boju 2.

$$\chi : [n]^k \rightarrow \underline{2} \quad (5)$$

Bez umanjenja opštosti onda možemo uočiti proizvoljan čvor a unutar skupa čvorova hipergrafa P , i onda možemo uočiti hipergraf P' čiji je skup čvorova $[n] \setminus \{a\}$, i njegova kardinalnost je stepena m_3 . Po posledici 4 znamo da postoji $k-1$ uniformni hipergraf sa m_3 čvorova.

Na njemu onda definišemo bojenje $\bar{\chi}$ takvo da boji hipergrane stepena $k-1$ hipergrafa $P' \setminus \{a\}$ u istu boju kao što ih boji χ u P' dok je imalo a .

$$\bar{\chi} : [n \setminus \{a\}]^{k-1} \rightarrow \underline{2} \quad (6)$$

Takodje definišemo preslikavanje M koje uzima sve hipergrane koje su imale a , i boji ih u istu boju kao χ dok su imale a .

$$M \rightarrow \chi(M \cup \{a\}) \quad (7)$$

Iz posledice 4 takodje sledi da postoji m_1 čvorova gde sve $k-1$ elementne hipergrane nad njima su obojene bojom 1 (po bojenju $\bar{\chi}$) Taj podskup čvorova nazivamo K_1 , i njegova kardinalnost je m_1 .¹

Posmatrajmo sada ponovo bojenje χ . Konstruišimo sada restrikciju χ nad skupom čvorova K_1 .

$$\chi_1 : [K_1]^k \rightarrow \underline{2} \quad (8)$$

Iz posledice 2 sledi da na hipergrafu koji sadrži m_1 čvorova postoji skup k -elementnih hipergrana obojenih bojom 1. Neka skup koji sadrži te grane bude T_1 , i po posledici 2 znamo da je njegova kardinalnost jednaka sa $L_1 - 1$. Analognim postupkom dolazimo do skupa k -elementnih hipergrana boje 2 koji ćemo obeležiti sa T_2 , i njegova kardinalnost (ponovo po posledici 2) je jednaka L_2 .

Skupu T_1 sada možemo pridružiti čvor a , i tim proširenjem ponovo posmatramo k -elementne hipergrane nad novim skupom čvorova $T = T_1 \cup \{a\}$. Posmatrajmo sada sve (k -elementne) grane tog skupa.

One mogu ili da

1. Sadržje a

U tom slučaju se onda sve te grane boje isto kao što ih boji $\bar{\chi}$ kada

¹Postupak je analogan za grane obojene bojom 2, gde nastaje podskup K_2 . Analogni postupak je isplan u appendixu

ne bi imale čvor a. Pošto $\bar{\chi}$ boji sve k-1 elementne hipergrane K_1 u boju 1. A pošto je T_1 podskup, onda dobijamo da

$$[T_1]^{k-1} \subseteq \chi'(1) \quad (9)$$

Potom možemo uključiti čvor a, i bojenje χ će ih isto bojiti u boju 1.

$$[T_1 \cup \{a\}]^k \subseteq \chi'(1) \quad (10)$$

Odatle dolazimo do zaključka

$$[T]^1 \subseteq \chi'(1) \quad (11)$$

2. Ne sadrže a

Onda sve k-elementne hipergrane T_1 su već boje 1, time direktno dobijamo

$$[T]^k \subseteq \chi'(1) \quad (12)$$

Ovime smo pokazali da se sve k-elementne hipergrane iz T boje bojom 1. Time zaključujemo da postoji potpun podhiperhgraf koji sadrži L_1 čvorova, i da su sve njegove hipergrane obojene bojom 1. Time ispunjavamo uslov za L_1 iz početne pretpostavke $m_3 + 1 \rightarrow (L_1, L_2)^k$.²
Q.E.D.

2.3 Dokaz Remzijeve teoreme za polihromatske hipergrafove

Pokažimo sada Remzijevu teoremu za hipergrafove gde imamo neki konačan, r broj boja. Treba da pokažemo da važi

$$n \rightarrow (l_1, l_2 \dots l_r)^k \quad (13)$$

Da bi ovo dokazali, koristićemo postupak matematičke indukcije, oslanjajući se na prethodno pokazano tvrdjenje 1 koja će nam predstavljati bazu naše indukcije.

Indukcijska baza

Tvrdjenje 1 nam predstavlja indukcijsku pozu, pokazujući da naša teorema važi za slučaj $r = 2$.

Indukcijska hipoteza

Prateći postupak matematičke indukcije, pretpostavićemo da naše tvrdjenje važi za neko proizvoljno r.

Indukcijski korak

Pokažimo sada da će naša teorema važiti za $r + 1$ boju. Pokazujemo da postoji konačan broj čvorova n za koji će svako bojenje nad tim hipergrafom bojiti boju i nad l_i grana.

$$n \rightarrow (l_1, l_2 \dots l_r, l_{r+1})^k \quad (14)$$

²Analognim postupkom za K_2 ispunjavamo uslov uz L_2 . Analogni postupak je ispisan u appendixu

Posmatrajmo prvo bojenje iz Indukcijske hipoteze, gde znamo da postoji broj čvorova dovoljan za bojenje hipergrafa sa nekih r boja. Uymimo da je taj dovoljan broj neko m . Postojanje konačne vrednosti ovog broja znamo kao posledicu naše pretpostavke iz **Indukcijske hipoteze**

Konstruišimo sada novu brojčanu vrednost n , koja predstavlja broj čvorova dovoljan za bihromatsko bojenje nad nekim hipergrafom tako da ono ili boji m (broj dobijen iz prethodnog koraka) hipergrana nekom bojom A ili da boji l_{r+1} hipergrana bojom $r+1$. Postojanje konačne vrednosti ovog broja dobijamo iz **Indukcijske baze**.

Konstruišimo sada novi graf G koji će imati n čvorova i nad kojim ćemo posmatrati 2 bojenja. Pošto pokazujemo Indukcijski korak naše hipoteze, posmatraćemo bojenje χ i da bi pokazali konačnost indukcijskog koraka (14) mi zapravo treba da pokažemo egzistenciju ovakvog bojenja.

$$\chi : [n]^k \rightarrow r + 1 \quad (15)$$

Da bi važila Remzijeva teorema za polihromatske hipergrafove, treba da pokažemo da će za bilo koje bojenje nekom bojom i postojati potpuni podhipergraf čije su sve grane obojene bojom l_i (za i koje pripada od 1 do l_{r+1}) Konstruišimo sada novo bojenje

$$\bar{\chi} : [n]^k \rightarrow \{A, r + 1\} \quad (16)$$

Ovo bojenje boji grane grafa G u odnosu na to kojom bojom je ta grana obojena u bojenju χ . Ako je neka grana u G bojenjem χ obojena bojom $r+1$, onda i tu granu u bojenju $\bar{\chi}$ bojimo bojom $r+1$. U suprotnom ako je ta grana u bojenju χ bojena nekom drugom bojom (od 1 do r) onda tu granu bojimo bojom A .

Posmatrajmo sada ponovo bojenje 15.

Pokazujemo da uvek možemo naći potpun podhipergraf boje i i kardinalnosti l_i . Ukoliko bojenje $\bar{\chi}$ boji bar l_{r+1} grane u boju $r+1$ onda direktno imamo ispunjenje potrebnog uslova.

U suprotnom slučaju, imamo da bojenje $\bar{\chi}$ boji bar m čvorova boje A . Na osnovu našeg indukcijskog koraka znamo da broj m predstavlja Remzijev broj za bojenje r boja. A pošto ovaj podhipergraf koji posmatramo ne može da sadrži boju $r+1$ (po samoj konstrukciji bojenja $\bar{\chi}$), znamo da unutar ovih m čvorova postoje grane najviše r različitih boja. Time, pošto je m Remzijev broj za r boja, znamo da će se u ovom podhipergrafu pojaviti nekim potpun podhipergraf obojen jednom bojom potrebne kardinalnosti. Time smo pokazali da postoji Remzijev broj za svako remzijevo bojenje nad proizvoljnim konačnim brojem boja.

Q.E.D.

3 Pregled stanja Remzijeve teorije nad hipergrafovima

Pošto su i polja grafova i Remzijeve teorije oba poprilično mlada, posebno u poredjenju sa ustaljenijim matematičkim disciplinama, još uvek je slabo istražena. I to posebno u poljima hipergrafova.

Većina radova na ovom polju se bavi primarno sa uniformnim hipergrafovima,

upravo zbog kompleksnosti rada se neunifomnim hipergrafovima.

Kao posledica težine izučavajna Remzijeve teorije, matematičari su pribegli generelizacijama problema i kompjuteskim simulacijama. Iako su oba van osnovne teme ovog rada, o kompjuteskim simulacijama i jedinom poznatom remzijevoj broju za hipergrafe ćemo diskutovati u sledećem poglavlju, dok ćemo o generelizacijama problema pričati u kasnijem poglavlju (Gallai - Remzijevim bojenjima).

3.1 Poznati remzijevoj broj za hipergrafe

Trenutno jedini poznati remzijevoj broj za hipergrafe (u klasičnom smislu, posmatrajući potpune indukovane podhipergrafe)[[pregled](#)] je dobijen uz pomoć računara. Brendan D. McKay i Stanisław P. Radziszowski, su 1991 godine objavili svoj rad **HGremzibroj** gde su odredili broj tačaka potreban da se bihromatskim bojenje trouglova nad skupom od 13 tačaka mora uvek mora pronaći monohromatski četvorougao.

$$R(4, 4; 3) = 13 \quad (17)$$

Na osnovu već poznatih granica ($R(4, 4; 3) \leq 15$ Giraud)), kao i veze između Turánovih sistema³ i Remzijevih brojeva, McKay i Radziszowski su uspeli prvo da spuste granicu na $R(4, 4; 3) \leq 13$, a onda i da pomoću kompjutera pronadju taj graf, kroz proces u kojem su generisali preko 200,000 grafova. Ovaj problem možemo loako posmatrati kroz prizmu hipergrafova (slično kao i kod Erdős-Szekeres problema), gde tražimo koliko je potrebno čvorova za 3-uniformni hipergraf tako da on uvek ima ili potpun podhipergraf indukovano sa 4 čvora, ili 4 nezavisna čvora.

3.1.1 Važnost Remzijevih brojeva za hipergrafe stepena 3

U polju Remzijske teorije poseban značaj nose upravo remzijevoi brojevi za uniformne grafove reda 3. Značaj tih brojeva je posledica "stepenaste" leme iz rada Erdős i Hajnala [[posledice3remzi](#)] u kojoj je pokazana direktna veza između donjih granica grafa uniformnosti k i $k+1$ (važi za svako k veće jednako od 3). Posledica tvrdi da za svako $k \geq 3$; $n \not\rightarrow (l)^k$ onda važi. [[matoraknjigajedvanadjena](#)]

$$2^n \not\rightarrow (2l + k - 4)^{k-1} \quad (18)$$

To nam omogućuje da poznajući samo jedan remzijevoj broj odmah znatno sužimo polje pretrage drugi remzijevih brojeva.

3.2 Remzijska teorija nad stablima

izbaciti?

³Donekle slični remzijevim brojevima, Turánovi brojevi predstavljaju minimalni broj grana koje ispunjavaju uslov da onda za bilo koji podskup čvorova tog hipergrafa uvek sadrži bar jednu granu. Ali pošto je to van opsega ovog rada, nećemo ulaziti dublje u teoriju Turánovih sistema

3.3 Remzijeva teorija nad neuniformnim hipergrafovima

3.3.1 Problemi

Kako su i sama polja grafova i Remzijeve teorije poprilično mlada, tako su mlada i izučavanja Remzijeve teorije nad hipergrafovima. A istraživanja nad neuniformnim hipergrafovima su još uvek pokrivena u plaštu tame, i ostaju manje više neistražena.

Jedan od razloga manjka interesovanje je samo pitanje validnosti remzijeve teorije nad neuniformnim hipergrafovima

4 Bibliografija