Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Remzijeva teorija na hipergrafovima

Seminarski rad

Nenad Vuletić, Vladimir Krsmanović, Marko Polić

Mentor:
dr. Maja Peh

Novi Sad, 2020

Abstrakt
U ovom radu ćemo napraviti pregled Remzijeve teorije nad hipergrafovima, predstavićemo dokaze i primene ove matematičke teorije.

Contents

1 Uvod

Ubaciti Polićev tekst

2 Postavka i dokaz Remzijeve teorije za hipergrafovima

2.1 Postavka problema

2.2 Dokaz Remzijeve teoreme za hipergrafove

U ovom poglavlju dokazujemo Remzijevu teoriju za hipergraf $G_k(V, E)$ gde je V skup čvoreva, a E je skup skupova k-tog stepena čiji su elementi čvorovi iz skupa V.
Treba da pokažemo $m_3 + 1 \to (L_1, L_2)^k$. Matematičkom indukcijom dokazujemo:

$$m_3 + 1 \to (L_1, L_2)^k \tag{1}$$

Indukcijska baza

Radimo indukciju nad elementom k, i iz Remzijeve teoreme za obične grafove (gde je k = 2), dobijamo indukcijsku bazu.

Indukcijska hipoteza

Iz indukcijske hipoteze dobijamo da važi

$$m_1 \to (L_1 - 1, L_2)^k \tag{2}$$

$$m_2 \to (L_1, L_2 - 1)^k \tag{3}$$

$$m_3 \to (L_1, L_2)^{k-1} \tag{4}$$

Indukcijski korak

Konstruišimo prvo k-uniformni hipergraf P sa $n = m_3 + 1$ čvorova. Nad tim hipergrafom je definisano bojenje χ takvo da boji sve k-elementne hipergrane hipergrafa P ili u boju 1 ili u boju 2.

$$\chi : [\underline{n}]^k \to \underline{2} \tag{5}$$

Bez umanjenja opštosti onda možemo uočiti proizvoljan čvor a unutar skupa čvoreva hipergrafa P, i onda možemo uočiti hipergraf P' čiji je skup čvorova $[\underline{n} \backslash \{a\}]$, i njegova kardinalnost je stepena m_3. Po posledici 4 znamo da postoji k-1 uniformni hipergraf sa m_3 čvorova.
Na njemu onda definišemo bojenje $\overline{\chi}$ takvo da boji hipergrane stepena k-1 hipergrafa $P' \backslash \{a\}$ u istu boju kao što ih boji χ u P' dok je imalo a.

$$\overline{\chi} : [\underline{n} \backslash \{a\}]^{k-1} \to \underline{2} \tag{6}$$

Takodje definišemo preslikavanje M koje uzima sve hipergrane koje su imale a, i boji ih u istu boju kao χ dok su imale a.

$$M \to \chi(M \cup \{a\}) \tag{7}$$

Iz posledice 4 takodje sledi da postoji m_1 čvorova gde sve k-1 elementne hipergrane nad njima su obojene bojom 1 (po bojenju $\overline{\chi}$) Taj podskup čvorova nazivamo K_1, i njegova kardinalnost je m_1. [1].
Posmatrajmo sada ponovo bojenje χ. Konstruišimo sada restrikciju χ nad skupom čvoreva K_1.

$$\chi_1 : [K_1]^k \to \underline{2} \tag{8}$$

Iz posledice 2 sledi da na hipergrafu koji sadrži m_1 čvorova postoji skup k-elementnih hipergrana obojenih bojom 1. Neka skup koji sadrži te grane bude T_1, i po posledici 2 znamo da je njegova kardinalnost jednaka sa $L_1 - 1$. Analgonim postupkom dolazimo do skupa k-elementnih hipergrana boje 2 koji ćemo obeležiti sa T_2, i njegova kardinalnost (ponovo po posledici 2) je jednaka L_2.
Skupu T_1 sada možemo pridružiti čvor a, i tim proširenjem ponovo posmatramo k-elementne hipergrane nad novim skupom čvorova $T = T_1 \cup \{a\}$.
Posmatrajmo sada sve (k-elementne) grane tog skupa.
One mogu ili da

1. **Sadrže a**
   U tom slučaju se onda sve te grane boje isto kao što ih boji $\overline{\chi}$ kada ne bi imale čvor a. Pošto $\overline{\chi}$ boji sve k-1 elementne hipergrane K_1 u boju 1 . A pošto je T_1 podskup, onda dobijamo da

   $$[T_1]^{k-1} \subseteq \chi'(1) \tag{9}$$

   Potom možemo uključiti čvor a, i bojenje χ će ih isto bojiti u boju 1.

   $$[T_1 \cup \{a\}]^k \subseteq \chi'(1) \tag{10}$$

   Odatle dolazimo do zaključka

   $$[T]^1 \subseteq \chi'(1) \tag{11}$$

2. **Ne sadrže a**
   Onda sve k-elementne hipergraneT_1 su već boje 1, time direktno dobijamo

   $$[T]^k \subseteq \chi'(1) \tag{12}$$

Ovime smo pokazali da se sve k-elementne hipergrane iz T boje bojom 1. Time zaključujemo da postoji potpun podhiperhgraf koji sadrži L_1 čvorova, i da su sve njegove hipergrane obojene bojom 1. Time ispunjavamo uslov za L_1 iz početne pretpostavke $m_3 + 1 \to (L_1, L_2)^k$.[2]
Q.E.D.

[1] Postupak je analogan za grane obojene bojom 2, gde nastaje podskup K_2. Analogni postupak je ispisan u appendixu

[2] Analognim postpukom za K_2 ispunjavamo uslov uz L_2. Analogni postpuak je ispisan u appendixu

2.3 Dokaz Remzijeve teoreme za polihromatske hipergrafove

Pokažimo sada Remzijevu teoremu za hipergrafove gde imamo neki konačan, r broj boja. Treba da pokažemo da važi

$$n \to (l_1, l_2 \dots l_r)^k \tag{13}$$

Da bi ovo dokazali, koristićemo postupak matematičke indukcije, oslanjajući se na prethodno pokazano tvrdjenje 1 koja će nam predstavljati bazu naše indukcije.

Indukcijska baza

Tvrdjenje 1 nam predstavlja indukcijsku pozu, pokazujući da naša teorema važi za slučaj r = 2.

Indukcijska hipoteza

Prateći postupak matematičke indukcije, pretpostavićemo da naše tvrdjenje važi za neko proizvoljno r.

Indukcijski korak

Pokažimo sada da će naša teorema važiti za r +1 boju. Pokazujemo da postoji konačan broj čvorova n za koji će svako bojenje nad tim hipergrafom bojiti boju i nad l_i grana.

$$n \to (l_1, l_2 \dots l_r, l_{r+1})^k \tag{14}$$

Posmatrajmo prvo bojenje iz Indukcijske hipoteze, gde znamo da postoji broj čvorova dovoljan za bojenje hipergrafa sa nekih r boja. Uymimo da je taj dovoljan broj neko m. Postojanje konačne vrednosti ovog broja znamo kao posledicu naše pretpostavke iz **Indukcijske hipoteze**
Konstruišimo sada novu brojčanu vrednost n, koja prestavlja broj čvorova dovoljan za bihromatsko bojenje nad nekim hipergrafom tako da ono ili boji m (broj dobijen iz prethdonog koraka) hipergrana nekom bojom A ili da boji l_{r+1} hipergrana bojom r+1. Postojanje konačne vrednosti ovog broja dobijamo iz **Inudkcijske baze**.
Konstruišimo sada novi graf G koji će imati n čvorova i nad kojim ćemo posmatrati 2 bojenja. Pošto pokazujemo Indukcijski korak naše hipoteze , posmatraćemo bojenje χ i da bi pokazali konačnost indukcijskog koraka (14) mi zapravo treba da poažemo egzistenciju ovakvog bojenja.

$$\chi : [\underline{n}]^k \to r + 1 \tag{15}$$

Da bi važila Remzijeva teorema za polihromatske hipergrafove, treba da pokažemo da će za bilo koje bojenje nekom bojom i postojati potpuni podhipergraf čije su sve grane obojene bojom l_i (za i koje pripada od 1 do l_{r+1}) Konstruišimo sada novo bojenje

$$\overline{\chi} : [\underline{n}]^k \to \{A, r + 1\} \tag{16}$$

Ovo bojenje boji grane grafa G u odnosu na to kojom bojom je ta grana obojena u bojenju χ. Ako je neka grana u G bojenjem χ obojenja bojom

r+1, onda i tu granu u bojenju $\overline{\chi}$ bojimo bojom r+1. U suprotnom ako je ta grana u bojenju χ bojena nekom drugom bojom (od 1 do r) onda tu granu bojimo bojom A.
Posmatrajmo sada ponovo bojenje 15.
Pokazujemo da uvek možemo naći potpun podhipergraf boje i i kardinalnosti l_i. Ukoliko bojenje $\overline{\chi}$ boji bar l_{r+1} grane u boju r+1 onda direktno imamo ispunjenje potrebnog uslova.
U suprotnom slučaju, imamo da bojenje $\overline{\chi}$ boji bar m čvorova boje A. Na osnovu našeg indukcijskog koraka znamo da broj m predstavlja Remzijev broj za bojenje r boja. A pošto ovaj podhipergraf koji posmatramo ne može da sadrži boju r+1 (po smaoj konstrukciji bojenja $\overline{\chi}$), znamo da unutar ovih m čvorova postoje grane najviše r različitih boja. Time, pošto je m Remzijev broj za r boja, znamo da će se u ovom podhipergrafu pojaviti nekim potpuni podhipergraf obojen jednom bojom potrebne kardinalnosti.
Time smo pokazali da postoji Remzijev broj za svako remzijeve bojenje nad proizvoljnim konačnim borojem boja.
Q.E.D.

3 Pregled stanja Remzijeve teorije nad hipergrafovima

Pošto su i polja grafova i Remzijeve teorije oba popriličino mlada, posebno u poredjenju sa ustaljenijim matematičkim disciplinama, još uvek je slabo istražena. I to posebno u poljima hipergrafova.
Većina radova na ovom polju se bavi primarno sa uniformnim hipergrafovima, upravo zbog kompleksnosti rada se neunifomrnim hipergrafovima.
Kao posledica težine izučavajna Remzijeve teorije, matematičari su pribegli generelizacijama problema i kompjuteskim simulacijama. Iako su oba van osnovne teme ovog rada, o kompjuteskim simulacijama i jedinom poznatom remzijevom broju za hipergrafove ćemo diskutovati u sledećem poglavlju, dok ćemo o generelizacijama problema pričati u kasnijem poglavlju (Gallai - Remzijevim bojenjima).

3.1 Poznati remzijev broj za hipergrafove

Trenutno jedini poznati remzijev broj za hipergrafove (u klasičnom smislu, posmatrajući potpune indukovane podhipergrafove)[**pregled**]je dobijen uz pomoć računara. Brendan D. McKay i Stanislaw P. Radziszowski, su 1991 godine objavili svoj rad **HGremzibroj** gde su odredili broj tačaka potreban da se bihromatskim bojenje trouglova nad skupom od 13 tačaka mora uvek mora pronaći monohromatski četvorougao.

$$R(4,4;3) = 13 \tag{17}$$

Na osnovu već poznatih granica ($R(4,4;3) \leq 15$ Giraud)), kao i veze izmedju Turánovih sistema[3] i Remzijevih brojeva, McKay i Radziszovski su uspeli prvo

[3]Donekle slični remzijevim brojevima, Turánovi brojevi predstavljaju minimalni broj grana koje ispunjavaju uslov da onda za bilo koji podskup čvoreva tog hipergrafa uvek sadrži bar jendu granu. Ali pošto je to van opsega ovog rada, nećemo ulaziti dublje u teoriju Turánovih sistema

da spuste granicu na $R(4, 4; 3) \leq 13$, a onda i da pomoću kompjutera pronadju taj graf, kroz proces u kojem su generisali preko 200,000 grafova. Ovaj problem možemo loako posmatrati kroz prizmu hipergrafova (slično kao i kod Erdös-Szekeres problema), gde tražimo koliko je potrebno čvorova za 3-uniformni hipergraf tako da on uvek ima ili potpun podhipergraf indukovan sa 4 čvora, ili 4 nezavisna čvora.

3.1.1 Važnost Remzijevih brojeva za hipergrafove stepena 3

U polju Remzijeve teorije poseban značaj nose upravo remzijevi brojevi za uniformne grafove reda 3. Značaj tih brojeva je posledica "stepenaste" leme iz rada Erdös i Hajnala [**posledice3remzi**] u kojoj je pokazana direktna veza izmedju donjih granica grafa unifomnoti k i k +1 (važi za svako k veće jednako od 3). Posledica tvrdi da za svako $k \geq 3; n \not\to (l)^k$ onda važi. [**matoraknjigajedvanadjena**]

$$2^n \not\to (2l + k - 4)^{k-1} \tag{18}$$

To nam omogućuje da poznajući samo jedan remzijev broj odmah znatno sužimo polje pretrage drugi remzijevih brojeva.

3.2 Remzijeva teorija nad stablima

izbaciti?

3.3 Remzijeva teorija nad neuniformnim hipergrafovima

3.3.1 Problemi

Kako su i sama polja grafova i Remzijeve teorije poprilično mlada, tako su mlada i izučavanja Remzijeve teorije nad hipergrafovima. A istraživanja nad ne unifomrnim hipergrafovima su još uvek pokrivena u plaštu tame, i ostaju manje više neistražena.
Jedan od razloga manjka interesovanje je samo pitanje validnosti remzijeve teorije nad neunifomnim hipergrafovima

4 Bibliografija