



Univerzitet u Novom Sadu  
Prirodno-matematički fakultet  
Departman za matematiku i informatiku



# Remzijeva teorija na hipergrafovima

Seminarski rad

Nenad Vuletić, Vladimir Krsmanović, Marko Polić

Mentor:  
**dr. Maja Pech**

Novi Sad, 2020

## Abstrakt

Cilj ovog rada je istraživanje i prikupljanje informacija, teorema i dokaza o primeni Remzijeve teorije na hipergrafove. Napisane su postavke i dokazi Remzijeve teoreme za hipergraf, u bihromatskom i polihromatskom bojenju.

Objašnjen je način dobijanja jedinog poznatog Remzijevog broja za hipergrafove, kao i važnost Remzijevih brojeva stepena 3. Takođe je prodiskutovana i Remzijeva teorija nad neuniformnim hipergrafovima.

## Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Notacije i osnovne defincije</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Postavka i dokaz Remzijeve teorije za hipergrafovima</b>	<b>4</b>
3.1	Postavka problema . . . . .	4
3.2	Dokaz Remzijeve teoreme za hipergrafove . . . . .	4
3.3	Dokaz Remzijeve teoreme za polihromatske hipergrafove . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Pregled stanja Remzijeve teorije nad hipergrafovima</b>	<b>8</b>
4.1	Poznati Remzijeve broj za hipergrafove . . . . .	8
4.2	Važnost Remzijevih brojeva za hipergrafove stepena 3 . . . . .	8
4.3	Remzijeva teorija nad neuniformnim hipergrafovima . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Bibliografija</b>	<b>10</b>

## 1 Uvod

Remzijeva teorija je u svojoj suštini neprestana potraga za postojanjem reda unutar haosa velikih sistema. U svojim postupcima deljenja sistema i potraga pravila, brzo je našla partnera u teoriji grafova. Skupovi diskretnih elemenata i uređenje oko strogih pravila relacija, grafovi su se ukazali kao fantastičan način da Remzijeva teorija, kao novo polje izučavanja, poveže sa ostalim poljima matematike. Kroz ovaj rad ćemo posmatrati kako se Remzijeva teorija povezala sa proširenjem grafova na hipergrafove, i sa raznim operacijama nad tim grafovima, poput bojenja grana.

## 2 Notacije i osnovne defincije

Sa obzirom da je ovo polje matematike dosta mlado, ni sama notacija nije ustaljena tako da se može primetiti velika razlika u zapisu između različitih radova. Zarad izbegavanja grešaka i zabune, u ovom poglavlju ćemo predstaviti i definisati pojmove i notaciju na koje ćemo se oslanjati u ovom radu.

### Grafovi i hipergrafovi

Prosti graf definišemo kao uređeni par  $G(V, E)$  gde je  $V$  konačan skup čvorova a skup grana  $E \subseteq [V]^2$ .

Hipergraf predstavlja proširenje pojma grafa gde kao elemente skupa  $E$  dozvoljavamo skupove sa više od dva elementa, čiji su elementi ponovo elementi skupa  $V$ .

U zavisnosti da li posmatramo uniformne ili neuniformne hipergrafove, kardinalnosti elemenata skupa  $E$  može biti neko proizvoljno konačno  $k$  (u slučaju  $k = 2$  radimo sa prostim grafovima) ili da su kardinalnosti elemenata  $E$  između 2 i nekog proizvoljnog konačnog  $k$ . Uniformne hipergrafove reda  $k$  ćemo zapisivati kao  $G(V, E)^k$  zarad lakšeg zapisa.

Elemente skupa  $E$  možemo definisati i preko operacije indukovanja gde povezujemo elemente skupa  $V$  sa elementima skupa  $E$ . Kažemo da neki čvorovi  $v_1, v_2 \dots v_i$  indukuju neku granu ako postoji neka grana  $e$  iz skupa  $E$  koja ih jedinstveno i potpuno sadrži.

Zarad elegantnije notacije i lakšeg razumevanja pojavljivaće se zapis  $V = [n]$  koji predstavlja skup čvorova  $V$  koji sadrži  $n$  čvorova jedinstveno obeleženih sa vrednostima između 1 i  $n$ . Takođe ćemo definisati skup  $E$  preko broja  $n$ , i to notacijom  $[n]^k$  gde posmatramo grane reda  $k$  nad čvorovima definisanim na prethodni način.

Pošto ćemo se u ovom radu fokusirati na klasičnu Remzijevu teoriju, grafovi nad kojima ćemo raditi su potpuni (više diskusije tome u 3.1). Pošto su grafovi potpuni, veza između čvorova i grana postaje još tesnija tako da će se u ovom radu često ti pojmovi koristiti skoro ekvivalentno.

### Bojenja

Postupak bojenja je osnovan za Remzijevu teoriju pošto nam omogućava diskretne podele struktura koje posmatramo. Definišimo neko bojenje na sledeći način:

Neko bojenje  $\chi$  je transformacija koja skup  $E$  nekog Grafa  $G(V, E)^k$  preslikava u elemente nekog skupa  $B$ .

$$\chi : E \rightarrow B$$

U zavisnosti od naših potreba i postupka često ćemo menjati prikaz ova dva elementa, poput zapisa skupa grana preko čvorova, dok ćemo za pojam boja koristiti najčešće ili boje (gde ponovo vidamo notaciju  $\underline{n}$  gde  $n \in N$ , i to predstavlja skup boja indeksa od 1 do  $n$ ) ili kao neki definisani skup vrednosti.

**Remzijevi brojevi** Kako ćemo kasnije u radu videti, Remzijeve teorija se fokusira na pronalaženja minimalne kardinalnosti sistema da bismo mogli da uočimo neke pravilnosti. Važno je zapamtiti da su te vrednosti samo donje granice, i da uočena pravila važe i za sisteme sa više od minimalnog broja elemenata. Notacijom zapisujemo vrednosti tih minimalnih vrednosti nekog Remzijeveog broja  $m \in N$  koristeći notaciju  $m \rightarrow \chi$  gde  $\chi$  predstavlja neku operaciju podele (ili bojenja). Kažemo da je  $m$  dovoljno za bojenje  $\chi$ .

## 3 Postavka i dokaz Remzijeve teorije za hipergrafovima

### 3.1 Postavka problema

Notaciju za Remzijeve brojeve, bojenja i drugu notaciju kojom ćemo se baviti u ovom poglavlju možemo gledati iz nekoliko uglova. Iako se sama operacija bojenja vrši nad granama, možemo napraviti nekoliko apstrakcija zarad lakšeg razumevanja.

Kao prvo možemo odmah uočiti da se bavimo isključivo uniformnim i potpunim hipergrafovima. Remzijeve teorija nad neuniformnim hipergrafovima predstavlja poseban problem, koji je još uvek minimalno istražen i za koji još uvek nismo sigurni da li uopšte važi. O ovome ćemo diskutovati u kasnijem poglavlju 4.3. U fokusu rada su takođe i klasični Remzijevi brojevi, tj. gledamo Remzijeve brojeve samo za potpune hipergrafeve. U slučaju da posmatramo nepotpune grafove, uvek možemo definisati sve neprisutne grane nekom dodatnom bojom, a kako ćemo pokazati u kasnijem dokazu, Remzijeve teorema važi i za hipergrafeve sa bilo kojim proizvoljnim konačnim brojem boja. Takođe postoji i poseban deo Remzijeve teorije koji se bavi  $K_n - e$  grafovima [pregled], ali ta oblast je izvan opsega ovog rada.

Takođe zarad lakšeg razumevanja same oblasti, pomoću veze između grana i čvorova možemo koristiti činjenicu da je naša potraga Remzijeve brojeva za bojenja grana zapravo ekvivalentna sa potragom za grupom čvorova koji indukuju potpune monohromatske hipergrafeve. Ova apstrakcija je posebno korisna za rad sa hipergrafovima gde je intuicija vezana za pojam grana mnogo slabija u odnosu na obične grafove

### 3.2 Dokaz Remzijeve teoreme za hipergrafeve

U ovom poglavlju dokazujemo Remzijeve teoriju za hipergraf  $G_k(V, E)$  gde je  $V$  skup čvorova, a  $E$  je skup skupova  $k$ -tog stepena čiji su elementi čvorovi iz

skupa  $V$  (tj. hipergrane reda  $k$ ).

Matematičkom indukcijom treba da pokažemo:

$$m_3 + 1 \rightarrow (L_1, L_2)^k \quad (1)$$

#### Indukcijska baza

Radimo indukciju nad elementom  $k$ , i iz Remzijeve teoreme za obične grafove (gde je  $k = 2$ ), dobijamo induksijsku bazu.

#### Indukcijska hipoteza

Iz induksijske hipoteze dobijamo da važi

$$m_1 \rightarrow (L_1 - 1, L_2)^k \quad (2)$$

$$m_2 \rightarrow (L_1, L_2 - 1)^k \quad (3)$$

$$m_3 \rightarrow (m_1, m_2)^{k-1} \quad (4)$$

#### Indukcijski korak

Konstruišimo prvo  $k$ -uniformni hipergraf  $P$  sa  $n = m_3 + 1$  čvorova. Nad tim hipergrafom je definisano bojenje  $\chi$  takvo da boji sve  $k$ -elementne hipergrane hipergrafa  $P$  ili u boju 1 ili u boju 2.

$$\chi : [\underline{n}]^k \rightarrow \underline{2} \quad (5)$$

Bez umanjjenja opštosti onda možemo uočiti proizvoljan čvor  $a$  unutar skupa čvorova hipergrafa  $P$ , i onda možemo uočiti hipergraf  $P'$  čiji je skup čvorova  $\underline{n} \setminus \{a\}$ , i njegova kardinalnost je stepena  $m_3$ . Po posledici 4 znamo da postoji  $k - 1$  uniformni hipergraf sa  $m_3$  čvorova.

Na njemu onda definišemo bojenje  $\bar{\chi}$  takvo da boji hipergrane stepena  $k - 1$  hipergrafa  $P'$  u istu boju kao što ih boji  $\chi$  u  $P$  dok je imalo  $a$ .

$$\bar{\chi} : [\underline{n} \setminus \{a\}]^{k-1} \rightarrow \underline{2} \quad (6)$$

$$\bar{\chi} : M \rightarrow \chi(M \cup \{a\}) \quad (7)$$

Iz posledice 4 takođe sledi da postoji  $m_1$  čvorova gde sve  $k-1$  elementne hipergrane nad njima su obojene bojom 1 (po bojenju  $\bar{\chi}$ ) Taj podskup čvorova nazivamo  $K_1$ , i njegova kardinalnost je  $m_1$ .<sup>1</sup>

Posmatrajmo sada ponovo bojenje  $\chi$ . Konstruišimo sada restrikciju  $\chi$  nad skupom čvoreva  $K_1$ .

$$\chi_1 : [K_1]^k \rightarrow \underline{2} \quad (8)$$

Iz posledice 2 sledi da na hipergrafu koji sadrži  $m_1$  čvorova postoji skup  $k$ -elementnih hipergrana obojenih bojom 1. Neka skup koji sadrži čvorove koji indukuju te grane bude  $T_1$ , i po posledici 2 znamo da je njegova

---

<sup>1</sup>Postupak je analogan za grane obojene bojom 2, gde nastaje podskup  $K_2$ .

kardinalnost jednaka sa  $L_1 - 1$ . Analognim postupkom dolazimo do skupa čvorova koje indukuju hipergrane boje 2 koji ćemo obeležiti sa  $T_2$ , i njegova kardinalnost (ponovo po posledici 2) je jednaka  $L_2$ .

Skupu  $T_1$  sada možemo pridružiti čvor  $a$ , i tim proširenjem ponovo posmatramo  $k$ -elementne hipergrane nad novim skupom čvorova  $T = T_1 \cup \{a\}$ . Pošto smo skupu  $T$  dodali još jedan čvor, njegova kardinalnost je sada  $L_1$ . Posmatrajmo sada sve ( $k$ -elementne) grane tog skupa i inverzno bojenje  $\chi'$ .

One mogu ili da

#### 1. Sadrže $a$

U tom slučaju se onda sve te grane boje isto kao što ih boji  $\bar{\chi}$  kada ne bi imale čvor  $a$ . Pošto  $\bar{\chi}$  boji sve  $k-1$  elementne hipergrane  $K_1$  u boju 1. A pošto je  $T_1$  podskup, onda dobijamo da

$$[T_1]^{k-1} \subseteq \bar{\chi}'(1) \quad (9)$$

Potom možemo uključiti čvor  $a$ , i bojenje  $\chi$  će ih isto bojiti u boju 1.

$$[T_1 \cup \{a\}]^k \subseteq \chi'(1) \quad (10)$$

Odatle dolazimo do zaključka

$$[T]^k \subseteq \chi'(1) \quad (11)$$

#### 2. Ne sadrže $a$

Onda sve  $k$ -elementne hipergrane  $T_1$  su već boje 1, time direktno dobijamo

$$[T]^k \subseteq \chi'(1) \quad (12)$$

Ovime smo pokazali da se sve  $k$ -elementne hipergrane iz  $T$  boje bojom 1. Time zaključujemo da postoji potpun podhiperhgraf koji sadrži  $L_1$  čvorova, i da su sve njegove hipergrane obojene bojom 1. Time ispunjavamo uslov za  $L_1$  iz početne pretpostavke  $m_3 + 1 \rightarrow (L_1, L_2)^k$ .<sup>2</sup>  
Q.E.D.

### 3.3 Dokaz Remzijeve teoreme za polihromatske hipergrafove

Pokažimo sada Remzijevu teoremu za hipergrafove gde imamo neki konačan,  $r$  broj boja. Treba da pokažemo da važi

$$n \rightarrow (l_1, l_2 \dots l_r)^k \quad (13)$$

Da bi ovo dokazali, koristićemo postupak matematičke indukcije, oslanjajući se na prethodno pokazano tvrđenje 1 koja će nam predstavljati bazu naše indukcije.

#### Indukcijska baza

Tvrđenje 1 nam predstavlja indukcijsku pozu, pokazujući da naša teorema važi za slučaj  $r = 2$ .

---

<sup>2</sup>Analognim postupkom za  $K_2$  ispunjavamo uslov uz  $L_2$ .

### Indukcijska hipoteza

Prateći postupak matematičke indukcije, pretpostavićemo da naše tvrdnje važi za neko proizvoljno  $r$ .

### Indukcijski korak

Pokažimo sada da će naša teorema važiti za  $r + 1$  boju. Pokazujemo da postoji konačan broj čvorova  $n$  za koji će svako bojenje nad tim hipergrafom bojiti boju  $i$  nad  $l_i$  grana.

$$n \rightarrow (l_1, l_2 \dots l_r, l_{r+1})^k \quad (14)$$

Posmatrajmo prvo bojenje iz **Indukcijske hipoteze**, gde znamo da postoji broj čvorova dovoljan za bojenje hipergrafa sa nekih  $r$  boja. Uzmimo da je taj dovoljan broj neko  $m$ . Postojanje konačne vrednosti ovog broja znamo kao posledicu naše pretpostavke iz **Indukcijske hipoteze**. Konstruišimo sada novu brojčanu vrednost  $n$ , koja predstavlja broj čvorova dovoljan za bihromatsko bojenje nad nekim hipergrafom tako da ono ili boji  $m$  (broj dobijen iz prethodnog koraka) hipergrana nekom bojom  $A$  ili da boji  $l_{r+1}$  hipergrana bojom  $r+1$ . Postojanje konačne vrednosti ovog broja dobijamo iz **Indukcijske baze**.

Konstruišimo sada novi graf  $G$  koji će imati  $n$  čvorova i nad kojim ćemo posmatrati 2 bojenja. Pošto pokazujemo Indukcijski korak naše hipoteze, posmatraćemo bojenje  $\chi$  i da bi pokazali konačnost indukcijskog koraka (14) mi zapravo treba da poažemo egzistenciju ovakvog bojenja.

$$\chi : [\underline{n}]^k \rightarrow r + 1 \quad (15)$$

Da bi važila Remzijeva teorema za polihromatske hipergrafove, treba da pokažemo da će za bilo koje bojenje nekom bojom  $i$  postojati potpuni podhipergraf čije su sve grane obojene bojom  $l_i$  (za  $i$  koje pripada od 1 do  $l_{r+1}$ ) Konstruišimo sada novo bojenje

$$\bar{\chi} : [\underline{n}]^k \rightarrow \{A, r + 1\} \quad (16)$$

Ovo bojenje boji grane grafa  $G$  u odnosu na to kojom bojom je ta grana obojena u bojenju  $\chi$ . Ako je neka grana u  $G$  bojenjem  $\chi$  obojena bojom  $r+1$ , onda i tu granu u bojenju  $\bar{\chi}$  bojimo bojom  $r+1$ . U suprotnom ako je ta grana u bojenju  $\chi$  bojena nekom drugom bojom (od 1 do  $r$ ) onda tu granu bojimo bojom  $A$ .

Posmatrajmo sada ponovo bojenje 15.

Pokazujemo da uvek možemo naći potpun podhipergraf boje  $i$  i kardinalnosti  $l_i$ . Ukoliko bojenje  $\bar{\chi}$  boji bar  $l_{r+1}$  grane u boju  $r+1$  onda direktno imamo ispunjenje potrebnog uslova.

U suprotnom slučaju, imamo da bojenje  $\bar{\chi}$  boji bar  $m$  čvorova boje  $A$ . Na osnovu našeg indukcijskog koraka znamo da broj  $m$  predstavlja Remzijev broj za bojenje  $r$  boja. A pošto ovaj podhipergraf koji posmatramo ne može da sadrži boju  $r+1$  (po samoj konstrukciji bojenja  $\bar{\chi}$ ), znamo da unutar ovih  $m$  čvorova postoje grane najviše  $r$  različitih boja. Time, pošto je  $m$  Remzijev broj za  $r$  boja, znamo da će se u ovom podhipergrafu pojaviti neki potpuni podhipergraf obojen jednom bojom potrebne kardinalnosti. Time smo pokazali da postoji Remzijev broj za svako bojenje nad proizvoljnim konačnim brojem boja.

Q.E.D.

## 4 Pregled stanja Remzijeve teorije nad hipergrafovima

Pošto su i polja grafova i Remzijeve teorije oba poprilično mlada, posebno u poređenju sa ustaljenijim matematičkim disciplinama, još uvek je slabo istražena. I to posebno u poljima hipergrafova.

Većina radova na ovom polju se bavi primarno sa uniformnim hipergrafovima, upravo zbog kompleksnosti rada se neuniformnim hipergrafovima.

Kao posledica težine izučavajna Remzijeve teorije, matematičari su pribegli generalizacijama problema i kompjuterskim simulacijama. I ono što možemo primetiti prilikom pregleda radova nad ovim poljem je okretanje matematičara ka uopštenjima i sličnim problemima, kao način da dobijemo bolji uvid u Remzijeve teoriju nad hipergrafovima.

### 4.1 Poznati Remzijeve broj za hipergrafove

Trenutno jedini poznati Remzijeve broj za hipergrafove (u klasičnom smislu, posmatrajući potpune hipergrafove) [pregled] je dobijen uz pomoć računara. Brendan D. McKay i Stanislaw P. Radziszowski, su 1991. godine objavili svoj rad **HGremzibroj** gde su odredili broj tačaka potreban da se bihromatskim bojenjem trouglova nad skupom tačaka uvek mora pronaći monohromatski četvorougao.

$$R(4, 4; 3) = 13 \quad (17)$$

Na osnovu već poznatih granica ( $R(4, 4; 3) \leq 15$  Giraud)), kao i veze između Turánovih sistema<sup>3</sup> i Remzijeve brojeva, McKay i Radziszowski su uspeli prvo da spuste granicu na  $R(4, 4; 3) \leq 13$ , a onda i da pomoću kompjutera pronađu taj graf, kroz proces u kojem su generisali preko 200,000 grafova. Ovaj problem možemo lako posmatrati kroz prizmu hipergrafova (slično kao i kod Erdős-Szekeres problema), gde tražimo koliko je potrebno čvorova za 3-uniformni hipergraf tako da on uvek ima ili potpun podhipergraf indukovani sa 4 čvora, ili 4 nezavisna čvora.

### 4.2 Važnost Remzijeve brojeva za hipergrafove stepena 3

U polju Remzijeve teorije poseban značaj nose upravo Remzijeve brojevi za uniformne grafove reda 3. Značaj tih brojeva je posledica „stepenaste“ leme iz rada Erdős i Hajnala [posledice3remzi] u kojoj je pokazana direktna veza između donjih granica grafa uniformnosti  $k$  i  $k + 1$  (važi za svako  $k$  veće jednako od 3). Posledica tvrdi da za svako  $k \geq 3; n \not\rightarrow (l)^k$  onda važi. [matoraknjigajedvanadjena]

$$2^n \not\rightarrow (2l + k - 4)^{k-1} \quad (18)$$

To nam omogućuje da poznajući samo jedan Remzijeve broj odmah znatno sužimo polje pretrage drugih Remzijeve brojeva.

<sup>3</sup>Donekle slični Remzijeve brojevima, Turánovi brojevi predstavljaju minimalni broj grana nekog grafa tako da je ispunjen uslov da onda za bilo koji podskup čvorova tog hipergraфа uvek sadrži bar jednu granu. Ali pošto je to van opsega ovog rada, nećemo ulaziti dublje u teoriju Turánovih sistema



### 4.3 Remzijeva teorija nad neuniformnim hipergrafovima

Kako su i sama polja grafova i Remzijeve teorije poprilično mlada, tako su mlada i izučavanja Remzijeve teorije nad hipergrafovima.

Jedan od problema je i samo pitanje validnosti Remzijeve teorije nad neuniformnim hipergrafovima.

Posmatrajmo na primer neki neuniformni hipergraf  $G$  reda  $n$  koji sadrži hipergrane kardinalnosti od 1 do  $n$ . Posmatrajmo onda dva podskupa njegovih grana, gde je prvi podskup sačinjen od hipergrana reda  $s$ , a drugi podskup od hipergrana reda  $t$  (gde uzimamo da ne važi  $s = t$ ). Uočavamo problem da čim je neka hipergrana u  $t$  obojena drugačije od neke grane iz  $s$  nad zajedničkim čvorovima, odmah imamo problem zbog gubljenja mogućnosti potpunih monohromatskih hipergrafova nad tim čvorovima (ovaj problem nam je predstavljen od strane Mark Buddena, University of West Virginia kroz ličnu komunikaciju).

Ovo polje istraživanja je još uvek mlado, tako da se dosta matematičara okrenulo uopštenju Remzijeve teorije za problem nad neuniformnim hipergrafovima.

U tim radovima, ne posmatraju se stroge monohromatske podele, već se gledaju podele gde podhipergrafovi koriste najviše  $k$  boja, ili neke drugačije podele, poput Gallai-Remzi bojenja koja posmatraju bojenja stranica  $n$ -touglova unutar hipergrafa (Gallai-Remzi bojenja se izučavaju i za uniformne hipergrafeve).

## 5 Bibliografija