Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Remzijeva teorija na hipergrafovima

Seminarski rad

Nenad Vuletić, Vladimir Krsmanović, Marko Polić

Mentor:
dr. Maja Peh

Novi Sad, 2020

Contents

1 Uvod

Ubaciti Polićev tekst

2 Postavka i dokaz Remzijeve teorije za hipergrafovima

2.1 Postavka problema

2.2 Dokaz Remzijeve teoreme za hipergrafove

U ovom poglavlju dokazujemo Remzijevu teoriju za hipergraf $G_k(V, E)$ gde je V skup čvoreva, a E je skup skupova k-tog stepena čiji su elementi čvorovi iz skupa V.
Treba da pokažemo $m_3 + 1 \rightarrow (L_1, L_2)^k$. Matematičkom indukcijom dokazujemo:

$$m_3 + 1 \rightarrow (L_1, L_2)^k \tag{1}$$

Indukcijska baza

Radimo indukciju nad elementom k, i iz Remzijeve teoreme za obične grafove (gde je k = 2), dobijamo indukcijsku bazu.

Indukcijska hipoteza

Iz indukcijske hipoteze dobijamo da važi

$$m_1 \rightarrow (L_1 - 1, L_2)^k \tag{2}$$

$$m_2 \rightarrow (L_1, L_2 - 1)^k \tag{3}$$

$$m_3 \rightarrow (L_1, L_2)^{k-1} \tag{4}$$

Indukcijski korak

Konstruišimo prvo k-uniformni hipergraf P sa $n = m_3 + 1$ čvorova. Nad tim hipergrafom je definisano bojenje χ takvo da boji sve k-elementne hipergrane hipergrafa P ili u boju 1 ili u boju 2.

$$\chi : [\underline{n}]^k \rightarrow \underline{2} \tag{5}$$

Bez umanjenja opštosti onda možemo uočiti proizvoljan čvor a unutar skupa čvoreva hipergrafa P, i onda možemo uočiti hipergraf P' čiji je skup čvorova $[\underline{n} \backslash \{a\}]$, i njegova kardinalnost je stepena m_3. Po posledici 4 znamo da postoji k-1 uniformni hipergraf sa m_3 čvorova.
Na njemu onda definišemo bojenje $\overline{\chi}$ takvo da boji hipergrane stepena k-1 hipergrafa $P' \backslash \{a\}$ u istu boju kao što ih boji χ u P' dok je imalo a.

$$\overline{\chi} : [\underline{n} \backslash \{a\}]^{k-1} \rightarrow \underline{2} \tag{6}$$

Takodje definišemo preslikavanje M koje uzima sve hipergrane koje su imale a, i boji ih u istu boju kao χ dok su imale a.

$$M \rightarrow \chi(M \cup \{a\}) \tag{7}$$

Iz posledice 4 takodje sledi da postoji m_1 čvorova gde sve k-1 elementne hipergrane nad njima su obojene bojom 1 (po bojenju $\overline{\chi}$) Taj podskup čvorova nazivamo K_1, i njegova kardinalnost je m_1. [1].
Posmatrajmo sada ponovo bojenje χ. Konstruišimo sada restrikciju χ nad skupom čvoreva K_1.

$$\chi_1 : [K_1]^k \to \underline{2} \tag{8}$$

Iz posledice 2 sledi da na hipergrafu koji sadrži m_1 čvorova postoji skup k-elementnih hipergrana obojenih bojom 1. Neka skup koji sadrži te grane bude T_1, i po posledici 2 znamo da je njegova kardinalnost jednaka sa $L_1 - 1$. Analgonim postupkom dolazimo do skupa k-elementnih hipergrana boje 2 koji ćemo obeležiti sa T_2, i njegova kardinalnost (ponovo po posledici 2) je jednaka L_2.
Skupu T_1 sada možemo pridružiti čvor a, i tim proširenjem ponovo posmatramo k-elementne hipergrane nad novim skupom čvorova $T = T_1 \cup \{a\}$.
Posmatrajmo sada sve (k-elementne) grane tog skupa.
One mogu ili da

1. **Sadrže a**
   U tom slučaju se onda sve te grane boje isto kao što ih boji $\overline{\chi}$ kada ne bi imale čvor a. Pošto $\overline{\chi}$ boji sve k-1 elementne hipergrane K_1 u boju 1 . A pošto je T_1 podskup, onda dobijamo da

   $$[T_1]^{k-1} \subseteq \chi'(1) \tag{9}$$

   Potom možemo uključiti čvor a, i bojenje χ će ih isto bojiti u boju 1.

   $$[T_1 \cup \{a\}]^k \subseteq \chi'(1) \tag{10}$$

   Odatle dolazimo do zaključka

   $$[T]^1 \subseteq \chi'(1) \tag{11}$$

2. **Ne sadrže a**
   Onda sve k-elementne hipergraneT_1 su već boje 1, time direktno dobijamo

   $$[T]^k \subseteq \chi'(1) \tag{12}$$

Ovime smo pokazali da se sve k-elementne hipergrane iz T boje bojom 1. Time zaključujemo da postoji potpun podhiperhgraf koji sadrži L_1 čvorova, i da su sve njegove hipergrane obojene bojom 1. Time ispunjavamo uslov za L_1 iz početne pretpostavke $m_3 + 1 \to (L_1, L_2)^k$.[2]
Q.E.D.

[1] Postupak je analogan za grane obojene bojom 2, gde nastaje podskup K_2. Analogni postupak je ispisan u appendixu

[2] Analognim postpukom za K_2 ispunjavamo uslov uz L_2. Analogni postpuak je ispisan u appendixu