Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Remzijeva teorija na hipergrafovima

Seminarski rad

Nenad Vuletić, Vladimir Krsmanović, Marko Polić

Mentor:
dr. Maja Pech

Novi Sad, 2020

Abstrakt

U ovom radu ćemo napraviti pregled Remzijeve teorije nad hipergrafovima, predstavićemo dokaze i primene ove matematičke teorije.

Contents

1 Uvod

Ubaciti Polićev tekst FOrmulacija Remzijeve teorije za hipergrafove je veoma slična onoj za obične grafove (sama posledica toga da obične grafove možemo posmatati kao hipergrafove red 2), tako da se i većina pojmova koji su poznati iz teorije grafova mogu koristiti i u istraživanju nad hipergrafovima.

2 Notacije i osnovne defincije

Sa obzirm da je ovo polje matematike dosta mlado, ni sama notacija nije ustaljena tako da se može primetiti velika razlika u zapisu izmedju različitih radova. Zarad izbegavanja greški i zabune, u ovom poglavlju ćemo prestaviti i definisati pojmove i notaciju na koje ćemo se oslanjati u ovom radu.

Grafovi i hipergrafovi

Prosti graf definišemo kao uređeni par $G(V, E)$ gde je V konačan skup čvorova a skup grana $E \subseteq [V]^2$.

Hipergraf predstavlja proširenje pojma grafa gde kao elemente skupa E dozvoljavamo skupove sa više od dva elementa, čiji su elementi ponovo elementi skupa V.

U zavisnosti da lli posmatramo uniformne ili neunifomrne hipergrafove, kardinalnosti elemenata skupa E može biti neko proizvoljno konačno k (u slučaju $k = 2$ radimo sa prostim grafovima) ili da su kardinalnosti elemenata E izmedju 2 i nekog proizvoljnog konačnog k. Uniformne hipergrafove reda k ćemo zapisivati kao $G(V, E)^k$ zarad lakšeg zapisa.

Elemente skupa E možemo definisati i preko operacije indukovanja gde povezujemo elemente skupa V sa elementima skupa E. Kažemo da neki čvorovi $v_1, v_2 \dots v_i$ indukuju neku granu ako postoji neka grana e iz skupa E koja ih jedinstveno i potpuno sadrži.

Zarad elegantnije notacije i lakšeg razumevanja pojavljivaće se zapis $V = [\underline{n}]$ koji predstavlja skup čvorova V koji sadrži n čvorova jedinstveno obeleženih sa vrednostima između 1 i n. Takodje ćemo definisati skup E preko broja n, i to notacijom $[\underline{n}]^k$ gde posmatramo grane reda k nad čvorovima definisanim na prethodni način.

Pošto ćemo se u ovom radu fokusirati na klasične Remzijevu teoriju, grafovi nad kojima ćemo raditi su potpuni (više diskusije u tome u 3.1). Pošto su grafovi potpuni, veza izmedju čvorova i grana postaje još tesnija tako da se u radi često ti pojmovi koristiti skoro eklivalentno.

Bojenja

Postupak bojenja je osnovan za Remzijevu teoriju pošto nam omogućava diskretne podele struktura koje posmatramo. Definišimo neko bojenje na sledeći način.

Neko bojenje χ je transformacija koja skup E nekog Grafa $G(V, E)^k$ preslikava u elemente nekog skupa B.

$$\chi : E \to B$$

Uzavisnosti naših potreba i postupka često ćemo menjati priakz ova dva elementa , poput zapisa skupa grana preko čvoreva, dok ćemo za pojam boja koristiti najčešće ili boje (gde ponovo viđamo notaciju $\underline{n}$ gde $n \in N$, i to predstavlja skup boja indeksa od 1 do n) ili kao nkei definsiani skup vrednosti.

Remzijevi brojevi Kako ćemo kasnije u radu videti, Remzijeva teorija se vrti oko pronalaženja minimalne kardinalnosti sistema da bi mogli da uočimo neke pravilnosti. Važno je zapamtiti da su te vrednosti samo donje granice, i da uočena pravila važe i za sisteme sa više od minimalnog broja elemenata. Notacijom zapisujemo vrednosti tih minimalnih vrednosti nekog Remzijevog broja $m \in N$ koristeći notaciju $m \rightarrow \chi$ gde χ predstavlja neku operaciju podele (ili bojenja). Kažemo da je m dovoljno za bojenje χ.

3 Postavka i dokaz Remzijeve teorije za hipergrafovima

3.1 Postavka problema

Notaciju za Remzijeve brojeve, bojenja i drugu notaciju kojom ćemo se baviti u ovom poglavlju možemo gledati iz nekolik ugolova. Iako se sama operacija bojenja vrši nad granama, možemo napraviti nekoliko apstrakcija zarad lakšeg razumevanja.
Kao prvo možemo omdah uočiti da se bavimo isključivo uniformnim i potpunim hipergrafovima. Remzijeva teorija nad neuuniformnim hipergrafovima predstavlja poseban problem, koji je još uvek minimalno istražen i za koji još uvek nismo sigurni da li uopšte važi. O ovome ćemo diskutovati u kasnijem poglavlju 4.2. U fokusu rada su takodje i klasični Remzijevi brojevi, tj. gledamo Remzijeve brojeve samo za potpune hipergrafove. U slučaju da posmatramo nepotpune grafove, uvek možemo definisati sve neprisutne grane nekom dodatnom bojom, a kako ćemo pokazati u kasnijem dokazu, Remzijeva teorema važi i za hipergrafove sa bilo kojim proizvoljnim konačnim brojem broja. Takodje postoji i poseban deo Remzijeve teorije koji se bavi $K_n - e$ grafovima [**pregled**], ali ta oblast je izvan opsega ovog rada.
Takodje zarad lakšeg razumevanja same oblasti, pomoću veze između grana i čvorova možemo koristiti činjenicu naša je naša potraga Remzijevih brojeva za bojenja grana zapravo eklivalentna sa potargom za grupom čvorova koji indukuju potpune monohromatske hipergrafove. Ova abstrakcija je posebno korisna za rad sa hipergrafovima gde je intuicija vezana za pojama grana mnogo slabija u odnosu na obične grafove

3.2 Dokaz Remzijeve teoreme za hipergrafove

U ovom poglavlju dokazujemo Remzijevu teoriju za hipergraf $G_k(V, E)$ gde je V skup čvoreva, a E je skup skupova k-tog stepena čiji su elementi čvorovi iz skupa V (tj. hipergrane red k).
Matematičkom indukcijom treba da pokažemo:

$$m_3 + 1 \rightarrow (L_1, L_2)^k \tag{1}$$

Indukcijska baza
Radimo indukciju nad elementom k, i iz Remzijeve teoreme za obične grafove (gde je k = 2), dobijamo indukcijsku bazu.

Indukcijska hipoteza
Iz indukcijske hipoteze dobijamo da važi

$$m_1 \rightarrow (L_1 - 1, L_2)^k \tag{2}$$

$$m_2 \to (L_1, L_2 - 1)^k \tag{3}$$

$$m_3 \to (L_1, L_2)^{k-1} \tag{4}$$

Indukcijski korak

Konstruišimo prvo k-uniformni hipergraf P sa $n = m_3 + 1$ čvorova. Nad tim hipergrafom je definisano bojenje χ takvo da boji sve k-elementne hipergrane hipergrafa P ili u boju 1 ili u boju 2.

$$\chi : [\underline{n}]^k \to \underline{2} \tag{5}$$

Bez umanjenja opštosti onda možemo uočiti proizvoljan čvor a unutar skupa čvoreva hipergrafa P, i onda možemo uočiti hipergraf P' čiji je skup čvorova $\underline{n}\backslash\{a\}$, i njegova kardinalnost je stepena m_3. Po posledici 4 znamo da postoji $k-1$ uniformni hipergraf sa m_3 čvorova.
Na njemu onda definišemo bojenje $\overline{\chi}$ takvo da boji hipergrane stepena $k-1$ hipergrafa $P'\backslash\{a\}$ u istu boju kao što ih boji χ u P' dok je imalo a.

$$\overline{\chi} : [\underline{n}\backslash\{a\}]^{k-1} \to \underline{2} \tag{6}$$

Posmatramo i bojenjenje M koje nema pokazuje kako bojenje $\overline{\chi}$ boji naš graf u odnosu sa bojenjem χ.

$$\overline{\chi} : M \to \chi(M \cup \{a\}) \tag{7}$$

Iz posledice 4 takodje sledi da postoji m_1 čvorova gde sve k-1 elementne hipergrane nad njima su obojene bojom 1 (po bojenju $\overline{\chi}$) Taj podskup čvorova nazivamo K_1, i njegova kardinalnost je m_1. [1].
Posmatrajmo sada ponovo bojenje χ. Konstruišimo sada restrikciju χ nad skupom čvoreva K_1.

$$\chi_1 : [K_1]^k \to \underline{2} \tag{8}$$

Iz posledice 2 sledi da na hipergrafu koji sadrži m_1 čvorova postoji skup k-elementnih hipergrana obojenih bojom 1. Neka skup koji sadrži čvorove koji indukuju te grane bude T_1, i po posledici 2 znamo da je njegova kardinalnost jednaka sa $L_1 - 1$. Analgonim postupkom dolazimo do skupa čvorova koje indukuju hipergrane boje 2 koji ćemo obeležiti sa T_2, i njegova kardinalnost (ponovo po posledici 2) je jednaka L_2.
Skupu T_1 sada možemo pridružiti čvor a, i tim proširenjem ponovo posmatramo k-elementne hipergrane nad novim skupom čvorova $T = T_1 \cup \{a\}$. Pošto smo skupu T dodali još jedan čvor, njegova kardinalnost je sada L_1
Posmatrajmo sada sve (k-elementne) grane tog skupa i inverzno bojenje χ'.
One mogu ili da

[1] Postupak je analogan za grane obojene bojom 2, gde nastaje podskup K_2. Analogni postupak je ispisan u appendixu

1. **Sadrže a**
   U tom slučaju se onda sve te grane boje isto kao što ih boji $\overline{\chi}$ kada ne bi imale čvor a. Pošto $\overline{\chi}$ boji sve k-1 elementne hipergrane K_1 u boju 1 . A pošto je T_1 podskup, onda dobijamo da

   $$[T_1]^{k-1} \subseteq \chi'(1) \tag{9}$$

   Potom možemo uključiti čvor a, i bojenje χ će ih isto bojiti u boju 1.

   $$[T_1 \cup \{a\}]^k \subseteq \chi'(1) \tag{10}$$

   Odatle dolazimo do zaključka

   $$[T]^1 \subseteq \chi'(1) \tag{11}$$

2. **Ne sadrže a**
   Onda sve k-elementne hipergraneT_1 su već boje 1, time direktno dobijamo

   $$[T]^k \subseteq \chi'(1) \tag{12}$$

Ovime smo pokazali da se sve k-elementne hipergrane iz T boje bojom 1. Time zaključujemo da postoji potpun podhiperhgraf koji sadrži L_1 čvorova, i da su sve njegove hipergrane obojene bojom 1. Time ispunjavamo uslov za L_1 iz početne pretpostavke $m_3 + 1 \rightarrow (L_1, L_2)^k$.[2]
Q.E.D.

3.3 Dokaz Remzijeve teoreme za polihromatske hipergrafove

Pokažimo sada Remzijevu teoremu za hipergrafove gde imamo neki konačan, r broj boja. Treba da pokažemo da važi

$$n \rightarrow (l_1, l_2 \dots l_r)^k \tag{13}$$

Da bi ovo dokazali, koristićemo postupak matematičke indukcije, oslanjajući se na prethodno pokazano tvrdjenje 1 koja će nam predstavljati bazu naše indukcije.

Indukcijska baza
Tvrdjenje 1 nam predstavlja indukcijsku pozu, pokazujući da naša teorema važi za slučaj r = 2.

Indukcijska hipoteza
Prateći postupak matematičke indukcije, pretpostavićemo da naše tvrdjenje važi za neko proizvoljno r.

Indukcijski korak
Pokažimo sada da će naša teorema važiti za r +1 boju. Pokazujemo da postoji konačan broj čvorova n za koji će svako bojenje nad tim hipergrafom bojiti boju i nad l_i grana.

$$n \rightarrow (l_1, l_2 \dots l_r, l_{r+1})^k \tag{14}$$

[2]Analognim postpukom za K_2 ispunjavamo uslov uz L_2.

Posmatrajmo prvo bojenje iz Indukcijske hipoteze, gde znamo da postoji broj čvorova dovoljan za bojenje hipergrafa sa nekih r boja. Uymimo da je taj dovoljan broj neko m. Postojanje konačne vrednosti ovog broja znamo kao posledicu naše pretpostavke iz **Indukcijske hipoteze**
Konstruišimo sada novu brojčanu vrednost n, koja prestavlja broj čvorova dovoljan za bihromatsko bojenje nad nekim hipergrafom tako da ono ili boji m (broj dobijen iz prethdonog koraka) hipergrana nekom bojom A ili da boji l_{r+1} hipergrana bojom r+1. Postojanje konačne vrednosti ovog broja dobijamo iz **Inudkcijske baze**.
Konstruišimo sada novi graf G koji će imati n čvorova i nad kojim ćemo posmatrati 2 bojenja. Pošto pokazujemo Indukcijski korak naše hipoteze , posmatraćemo bojenje χ i da bi pokazali konačnost indukcijskog koraka (14) mi zapravo treba da poažemo egzistenciju ovakvog bojenja.

$$\chi : [\underline{n}]^k \to r + 1 \tag{15}$$

Da bi važila Remzijeva teorema za polihromatske hipergrafove, treba da pokažemo da će za bilo koje bojenje nekom bojom i postojati potpuni podhipergraf čije su sve grane obojene bojom l_i (za i koje pripada od 1 do l_{r+1}) Konstruišimo sada novo bojenje

$$\overline{\chi} : [\underline{n}]^k \to \{A, r + 1\} \tag{16}$$

Ovo bojenje boji grane grafa G u odnosu na to kojom bojom je ta grana obojena u bojenju χ. Ako je neka grana u G bojenjem χ obojenja bojom r+1, onda i tu granu u bojenju $\overline{\chi}$ bojimo bojom r+1. U suprotnom ako je ta grana u bojenju χ bojena nekom drugom bojom (od 1 do r) onda tu granu bojimo bojom A.
Posmatrajmo sada ponovo bojenje 15.
Pokazujemo da uvek možemo naći potpun podhipergraf boje i i kardinalnosti l_i. Ukoliko bojenje $\overline{\chi}$ boji bar l_{r+1} grane u boju r+1 onda direktno imamo ispunjenje potrebnog uslova.
U suprotnom slučaju, imamo da bojenje $\overline{\chi}$ boji bar m čvorova boje A. Na osnovu našeg indukcijskog koraka znamo da broj m predstavlja Remzijev broj za bojenje r boja. A pošto ovaj podhipergraf koji posmatramo ne može da sadrži boju r+1 (po smaoj konstrukciji bojenja $\overline{\chi}$), znamo da unutar ovih m čvorova postoje grane najviše r različitih boja. Time, pošto je m Remzijev broj za r boja, znamo da će se u ovom podhipergrafu pojaviti nekim potpuni podhipergraf obojen jednom bojom potrebne kardinalnosti.
Time smo pokazali da postoji Remzijev broj za svako remzijeve bojenje nad proizvoljnim konačnim borojem boja.
Q.E.D.

4 Pregled stanja Remzijeve teorije nad hipergrafovima

Pošto su i polja grafova i Remzijeve teorije oba poprilično mlada, posebno u poredjenju sa ustaljenijim matematičkim disciplinama, još uvek je slabo istražena. I to posebno u poljima hipergrafova.
Većina radova na ovom polju se bavi primarno sa uniformnim hipergrafovima,

upravo zbog kompleksnosti rada se neunifomrnim hipergrafovima.
Kao posledica težine izučavajna Remzijeve teorije, matematičari su pribegli generelizacijama problema i kompjuteskim simulacijama. I ono što možemo primetiti prilikom pregleda radova nad ovim poljem je okretanje matematičara ka uopštenjima i sličnim problemima, kao način da dobijemo bolji uvod u Remzijevu teoriju nad hiipergrafovima.

4.1 Poznati remzijev broj za hipergrafove

Trenutno jedini poznati remzijev broj za hipergrafove (u klasičnom smislu, posmatrajući potpune indukovane podhipergrafove)[**pregled**]je dobijen uz pomoć računara. Brendan D. McKay i Stanislaw P. Radziszowski, su 1991 godine objavili svoj rad **HGremzibroj** gde su odredili broj tačaka potreban da se bihromatskim bojenje trouglova nad skupom od 13 tačaka mora uvek mora pronaći monohromatski četvorougao.

$$R(4,4;3) = 13 \tag{17}$$

Na osnovu već poznatih granica ($R(4,4;3) \leq 15$ Giraud)), kao i veze izmedju Turánovih sistema[3] i Remzijevih brojeva, McKay i Radziszovski su uspeli prvo da spuste granicu na $R(4,4;3) \leq 13$, a onda i da pomoću kompjutera pronadju taj graf, kroz proces u kojem su generisali preko 200,000 grafova. Ovaj problem možemo loako posmatrati kroz prizmu hipergrafova (slično kao i kod Erdös-Szekeres problema), gde tražimo koliko je potrebno čvorova za 3-uniformni hipergraf tako da on uvek ima ili potpun podhipergraf indukovan sa 4 čvora, ili 4 nezavisna čvora.

4.1.1 Važnost Remzijevih brojeva za hipergrafove stepena 3

U polju Remzijeve teorije poseban značaj nose upravo remzijevi brojevi za uniformne grafove reda 3. Značaj tih brojeva je posledica "stepenaste" leme iz rada Erdös i Hajnala [**posledice3remzi**] u kojoj je pokazana direktna veza izmedju donjih granica grafa unifomnoti k i k +1 (važi za svako k veće jednako od 3). Posledica tvrdi da za svako $k \geq 3; n \not\to (l)^k$ onda važi. [**matoraknjigajedvanadjena**]

$$2^n \not\to (2l + k - 4)^{k-1} \tag{18}$$

To nam omogućuje da poznajući samo jedan remzijev broj odmah znatno sužimo polje pretrage drugi remzijevih brojeva.

4.2 Remzijeva teorija nad neuniformnim hipergrafovima

Kako su i sama polja grafova i Remzijeve teorije poprilično mlada, tako su mlada i izučavanja Remzijeve teorije nad hipergrafovima. A istraživanja nad ne unifomrnim hipergrafovima su još uvek pokrivena u plaštu tame, i ostaju manje više neistražena.
Jedan od razloga manjka interesovanje je samo pitanje validnosti remzijeve

[3]Donekle slični remzijevim brojevima, Turánovi brojevi predstavljaju minimalni broj grana nekog grafa tako da je ispunjen uslov da onda za bilo koji podskup čvoreva tog hipergrafa uvek sadrži bar jendu granu. Ali pošto je to van opsega ovog rada, nećemo ulaziti dublje u teoriju Turánovih sistema

teorije nad neunifomnim hipergrafovima.
Posmatrajmo na primer neki neuniformni hipergraf G reda n koji sadrži hipergrane kardinalnosti od 1 do n. Posmatrajmo onda dva podskupa njegovih grana, gde je prvi podskup sačinjen od hipergrana reda s, a drugi podskup od hipergrana reda t (gde uzimamo da nevaži $s = t$). Uočavamo problem da čim je neka hipergrana u t obojena drugačije od neke grane iz t nad zajedničkim čvorovima, odmah imamo problem zbog gubljenja mogućnosti potpunih monohromatsklih hipergrafova nad tim čvorovima. [4]
Ovo polje istraživanje je još uvek mlado, tako da se dosta matematičara okrenulo uopštenju Remzijeve teorije za problem nad ne unifomrnim hipergrafovima. U tim radovima, ne posmatraj use stroge monohromatske podele, već se gledaju podele gde podhipergrafovi koriste najvise k boja, ili neke drugačije podele, poput Gallai-Remzi bojenja koja posmatraju bojenja stranica n-touglova unutar hipergrafa (Gallai - Remzi bojenja se izučavaju i za uniformne hipergrafove).

5 Bibliografija

[4]Ovaj problem nam je predstavljen od strane Mark Buddena