

UNIwersytet Jagielloński

Wydział Matematyki i Informatyki
Kierunek: Matematyka Komputerowa
Studia Dienne

Numer indeksu: 1112059

Jakub Banaśkiewicz

**Potoki generowane przez kombinatoryczne
układy dynamiczne**

Promotor pracy magisterskiej:
prof. Marian Mrozek

Opracowano zgodnie z Ustawą o prawie autorskim i prawach pokrewnych z dnia 4 lutego 1994 r. (Dz.U. 1994 nr 24 poz. 83) wraz z nowelizacją z dnia 25 lipca 2003 r. (Dz.U. 2003 nr 166 poz. 1610) oraz z dnia 1 kwietnia 2004 r. (Dz.U. 2004 nr 91 poz. 869)

Spis treści

1	Wstęp	2
2	Kompleksy symplecticzne	3
2.1	Afiniczna niezależność	3
2.2	Kompleksy symplecticzne w \mathbb{R}^n	3
2.3	Abstrakcyjne kompleksy	5
2.4	Geometryczna realizacja kompleksów	5
2.5	Topologia w abstrakcyjnych kompleksach	6
2.6	Grupy homologii	7
3	Kombinatoryczne pola wektorowe	9
4	Index Conleya dla ciągłych układów dynamicznych	13
5	Pola wektorowe na kompleksach symplecticznych	18
5.1	Ciągłe układy dynamiczne pochodzące od dyskretnych pól wektorowych	18
5.2	Rzutowanie pól wektorowych	20
5.3	Przykłady dyskretnych i pochodzących od nich ciągłych układów dynamicznych	23
6	Listing kodu	26
7	Bibliografia	35

1 Wstęp

Pojęcie układów dynamicznych jest pojęciem pojawiającym się w matematyce w wielu odsłonach. Są one zwykle modelowane przez funkcje $\varphi : X \times T \rightarrow X$, gdzie X jest przestrzenią fazową a T zbiorem czasów. Funkcja ta pozwala nam zobaczyć ewolucję punktu $x \in X$ w dowolnym czasie t ze zbioru T . Zwykle wymagamy, żeby zbiór T rozsądnie modelował czas czyli do T powinno należeć 0 oraz jeśli $t, s \in T$ to także $t + s \in T$. Funkcja ta powinna spełniać własności:

- (i) $\varphi(x, 0) = x$,
- (ii) $\varphi(x, t + s) = \varphi(\varphi(x, t), s)$.

Jednymi z najbardziej rozpowszechnionych układów dynamicznych są układy pochodzące od równań różniczkowych zwyczajnych. Zakładając dostateczną regularność pola wektorowego oraz to, że rozwiązania nie wybuchają w skończonym czasie można otrzymać układ dynamiczny $\varphi(x, t) = y(t)$, gdzie $y(t)$ jest rozwiązaniem danego równania różniczkowego spełniającym $y(0) = x$. Spojrzenie w taki sposób na równania różniczkowe zwyczajne pozwala na badanie wielu ciekawych fenomenów dynamicznych jak punkty stałe i ich stabilność, orbity okresowe, chaotyczne zachowania. Innym przypadkiem układów dynamicznych są układy pochodzące od iteracji odwzorowań. Wtedy zbiorem T jest zbiór \mathbb{N} a odwzorowanie $\varphi(x, n)$ jest równe n -tej iteracji odwzorowania na x . W każdym z tych przypadków definiuje się podstawowe pojęcia związane z dynamiką takie jak orbita punktu czyli zbiór $o(x) = \{\varphi(x, t) | t \in T\}$ oraz zbiory niezmiennicze czyli takie, w których orbita dowolnego punktu z takiego zbioru zawiera się w tym zbiorze.

W pracy przedstawione zostaną układy dynamiczne pochodzące z dyskretnych struktur. Naszą przestrzenią X będzie skończony zbiór sympleksów czyli kompleks symplecjalny. Rolę funkcji φ będzie pełniła iteracja odwzorowania wielowartościowego czyli takiego, że dla $x \in X$ może przyjmować więcej niż jedną wartość. Odwzorowanie będzie to pochodziło od pewnej kombinatorycznej struktury na x , które będzie zwane kombinatorycznym (dyskretnym) polem wektorowym.

W dalszej części pracy przedstawiona zostanie konstrukcja ciągłego pola wektorowego, którego dynamika jest podobna do dynamiki zadanego dyskretnego pola wektorowego. Podobieństwo to polega na porównywaniu grafów Conleya-Morse'a, które to można zdefiniować dla dyskretnego pola wektorowego jak i dla układów dynamicznych pochodzących od równań różniczkowych.

Jeśli kompleks symplecjalny da się zanurzyć w przestrzeni \mathbb{R}^2 to równanie różniczkowe zwyczajne, które pochodzi od pewnego pola dyskretnego wektorowego na tym sympleksie powinno dać się stanąć przedstawić w postaci portretu fazowego zawartego w \mathbb{R}^2 . Jednak zaprezentowana konstrukcja zapisuje to równanie względem innych zmiennych niż standardowa baza \mathbb{R}^2 , a liczba zmiennych w tym równaniu zależy nie od wymiaru przestrzeni, w której kompleks symplecjalny jest zanurzony, a od liczby wierzchołków tego kompleksu. W tej pracy proponowane jest rzutowanie tego równania w taki sposób, by otrzymać pole wektorowe w \mathbb{R}^2 . Dzięki temu możliwe jest wykorzystanie oprogramowania Mathematica do narysowania portretu fazowego dla tego równania.

2 Kompleksy symplecjalne

2.1 Afiniczna niezależność

Niech $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Kombinacją wypukłą tych punktów będziemy nazywać wyrażenie postaci

$$\lambda_0 v_0 + \dots + v_n \lambda_n, \text{ gdzie } \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \text{ oraz } \lambda_i \in [0, 1].$$

Istnieje charakterystyka otoczki wypukłej skończonego zbioru $\{v_0, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$, która mówi, że dowolny punkt z tej otoczki daje się przedstawić jako kombinacja wypukła punktów v_0, \dots, v_n oraz dowolna kombinacja wypukła tych punktów leży w otoczce. Jeśli każdy element z otoczki wypukłej zbioru $\{v_0, \dots, v_n\}$ da się jednoznacznie zapisać za pomocą kombinacji wypukłej to punkty v_0, \dots, v_n nazywamy afinicznie niezależnymi.

2.2 Kompleksy symplecjalne w \mathbb{R}^n

Rozważmy zbiór punktów $v_0, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ i załóżmy, że są afinicznie niezależne. Wtedy otoczkę wypukłą punktów v_0, \dots, v_k oznaczmy $\langle v_0, \dots, v_k \rangle$ i nazywamy ją k wymiarowym sympleksem rozpiętym przez wierzchołki v_0, \dots, v_k . Z definicji afinicznej niezależności każdy punkt $x \in \langle v_0, \dots, v_k \rangle$ możemy jednoznacznie zapisać jako

$$x = \sum_{i=0}^k \lambda_{v_i}(x) v_i, \text{ gdzie } \sum_{i=0}^k \lambda_{v_i}(x) = 1 \text{ oraz } \lambda_{v_i}(x) \in [0, 1].$$

Funkcja $\lambda_{v_i} : \langle v_0, \dots, v_k \rangle \rightarrow [0, 1]$ zdefiniowana jako współczynnik przy v_i w powyższej kombinacji jest nazywana współrzędną barycentryczną względem wierzchołka v_i . Ścianą sympleksu nazywamy sympleks, który rozpięty jest przez podciąg v_{i_0}, \dots, v_{i_p} . Jeśli $p < k$ to ścianę tę nazywamy ścianą właściwą.

Definicja 2.1. Kompleksem symplecjialnym w \mathbb{R}^n nazywamy zbiór \mathcal{S} sympleksów spełniających warunki:

- (i) Dla każdego $s \in \mathcal{S}$ jego ściany także należą do \mathcal{S} ,
- (ii) Dla każdego $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$ część wspólna s_1 i s_2 jest ich wspólną ścianą.

Tak zdefiniowany kompleks symplecjialny nazywamy geometrycznym kompleksem symplecjialnym w odróżnieniu do abstrakcyjnego kompleksu symplecjialnego. Niech \mathcal{S} będzie kompleksem symplecjialnym. Wymiarem kompleksu \mathcal{S} nazywa się maksimum z wymiarów należących do niego sympleksów. Bryłą \mathcal{S} nazywamy zbiór

$$|\mathcal{S}| := \bigcup_{s \in \mathcal{S}} s.$$

Poprzez \mathcal{S}_k będziemy oznaczać zbiór k wymiarowych sympleksów. W szczególności zbiór \mathcal{S}_0 będzie zbiorem wierzchołków kompleksu symplecjialnego. Każdy punkt $x \in |\mathcal{S}|$ należy do pewnego sympleksu z \mathcal{S} . Co więcej, z definicji kompleksu symplecjialnego wynika, że jeśli x należy do dwóch różnych sympleksów to także musi leżeć w ich wspólnej ścianie. Co za tym idzie jeśli zapiszemy x we współrzędnych barycentrycznych względem dwóch różnych sympleksów z \mathcal{S} do których on należy, to muszą być one takie same. Możemy więc zapisać x w postaci

$$x = \sum_{v \in \mathcal{S}_0} t_v(x) v \text{ gdzie } \sum_{v \in \mathcal{S}_0} t_v(x) = 1 \text{ oraz } t_v(x) \in [0, 1].$$

Dla $x \in \langle v_0, \dots, v_k \rangle$ przyjmując

$$t_v(x) = \begin{cases} \lambda_v(x) & \text{dla } v \in \langle v_0, \dots, v_k \rangle \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

dostajemy powyższy rozkład x . Zauważmy, że powstały rozkład nie zależy od wyboru sympleksu do, którego x należy, co wynika z obserwacji poczynionej powyżej. Podobnie jak w przypadku sympleksu funkcje $t_v : |\mathcal{S}| \rightarrow [0, 1]$ nazywamy współrzędną barycentryczną względem wierzchołka v .

2.3 Abstrakcyjne kompleksy

Definicja 2.2. Niech X będzie dowolnym skończonym zbiorem. Jeśli \mathcal{X} jest niepustym zbiorem niepustych podzbiorów X oraz dla każdego $s \in \mathcal{X}$ wszystkie niepuste podzbiory s należą do \mathcal{X} , to \mathcal{X} nazywamy abstrakcyjnym kompleksem symplecjajalnym.

Niech \mathcal{X} będzie abstrakcyjnym kompleksem symplecjajalnym a s, u jego elementami. Wymiarem sympleksu s nazywamy liczbę $\dim s = |s| - 1$. Jeśli $s \subset u$ to mówimy, że s jest ścianą u , dodatkowo gdy $s \neq u$ to s jest nazywany właściwą ścianą u . Wymiarem całego kompleksu symplecjajalego będziemy nazywać się maximum z wymiarów sympleksów które należą do tego kompleksu symplecjajalnego. Jeśli $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ jest także kompleksem symplecjajalnym to \mathcal{A} jest nazywany podkompleksem \mathcal{X} . Poprzez \mathcal{X}_n będziemy oznaczać zbiór n -wymiarowych sympleksów ze zbioru \mathcal{X} .

Zobaczmy, że dowolny geometryczny kompleks symplecjajalny \mathcal{S} można przedstawić jako abstrakcyjny kompleks symplecjajalny. Jako X weźmy zbiór wierzchołków kompleksu \mathcal{S}_0 i utworzymy zbiór

$$\mathcal{X}_{\mathcal{S}} = \{s \cap \mathcal{S}_0 \mid s \in \mathcal{S}\}.$$

Zbiór ten jest abstrakcyjnym kompleksem symplecjajalnym nad X gdyż jeśli $\{v_0, \dots, v_n\}$ jest w $\mathcal{X}_{\mathcal{S}}$ to dowolna ściana sympleksu $\langle v_0, \dots, v_n \rangle$ jest w \mathcal{S} więc przecinając ją ze zbiorem wierzchołków dostaniemy dowolny podzbiór zbioru $\{v_0, \dots, v_n\}$. Dla danego sympleksu $s \in \mathcal{S}$ przez \mathcal{X}_s będziemy oznaczali odpowiadający mu element w abstrakcyjnym kompleksie symplecjajalnym czyli zbiór $s \cap \mathcal{S}_0$.

Łatwo zobaczyć, że pojęcia zdefiniowane dla abstrakcyjnego kompleksu symplecjajalnego pokrywają się z analogicznymi pojęciami zdefiniowanego dla geometrycznego kompleksu symplecjajalnego. Wymiary sympleksów w geometrycznym i utworzonym od niego abstrakcyjnym kompleksie są takie same. Dodatkowo s_1 jest ścianą (ścianą właściwą) s_2 w geometrycznym kompleksie symplecjajalnym to \mathcal{X}_{s_1} jest ścianą (ścianą właściwą) sympleksu \mathcal{X}_{s_2} .

2.4 Geometryczna realizacja kompleksów

Zadajmy teraz pytanie czy dla dowolnego abstrakcyjnego kompleksu symplecjajalnego jesteśmy w stanie znaleźć jego geometryczny odpowiednik. Najpierw jednak zdefiniujemy co będziemy rozumieć przez geometryczną realizację kompleksu symplecjajalnego. Rozważmy abstrakcyjny kompleks symplecjajalny \mathcal{X} oraz funkcję $\eta : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$. Przyjmiemy konwencję, że dla sympleksu

$\{v_0, \dots, v_k\}$ przez $\eta(\{v_0, \dots, v_k\})$ będziemy oznaczać otoczkę wypukłą punktów $\eta(v_0), \dots, \eta(v_k)$.

Definicja 2.3. Dla kompleksu symplecjalego \mathcal{X} jego geometryczną realizacją nazywamy funkcję $\eta : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ która dla każdego $s, u \in \mathcal{X}$ spełnia:

- (i) $\eta(v_0), \dots, \eta(v_k)$ są afiniczne nie zależne gdy $\{v_0, \dots, v_k\} \in \mathcal{X}$,
- (ii) $\eta(s \cap v) = \eta(s) \cap \eta(u)$.

Niech $\mathcal{X}_0 = \{v_0, \dots, v_n\}$ i ustalmy $\eta_j(v_i) = \delta_{ij}$, gdzie δ_{ij} jest deltą Kroneckera i przyjmijmy $\eta(v_i) = (\eta_0(v_i), \dots, \eta_n(v_i))$. Zaobserwujemy, że dla dowolnego kompleksu symplecjalego \mathcal{X} , dla którego zbiorem wierzchołków jest zbiór \mathcal{X}_0 tak zdefiniowane η jest geometryczną realizacją tego sympleksu. Ponieważ $\eta(v_0), \dots, \eta(v_n)$ tworzy bazę standardową w przestrzeni \mathbb{R}^{n+1} to dowolny układ z $\eta(v_{i_0}), \dots, \eta(v_{i_p})$ jest liniowo niezależny. Łatwo zauważyć, że implikuje to, że układ $\eta(v_{i_0}), \dots, \eta(v_{i_p})$ jest także afiniczne niezależny co pociąga za sobą, że punkt (i) jest spełniony. By pokazać (ii) ustalmy $x \in \eta(s \cap u)$ gdzie s, u są sympleksami z \mathcal{X} . Wtedy x można przedstawić jako kombinację wypukłą $\sum_{v \in s \cap u} \lambda_i \eta(v)$, więc dopisując zera można zapisać x jako kombinację wypukłą wierzchołków z s oraz u , co pokazuje, że $x \in \eta(s) \cap \eta(u)$. Jeśli $x \in \eta(s)$ i $x \in \eta(u)$ to zapisując x jako kombinację wypukłą względem tych zbiorów i korzystając z tego, że $\eta(v_0), \dots, \eta(v_n)$ jest układem liniowo niezależnym dostajemy, że współczynniki przy wyrazach $\eta(v)$ są zerowe jeśli v nie należy do $s \cap u$ i co za tym idzie $x \in \eta(u \cap v)$ co pokazuje (ii).

Zaobserwujemy, że jeśli \mathcal{S} jest geometrycznym kompleksem to konstrukcja ta zwykle umieszcza kompleks $\mathcal{X}_{\mathcal{S}}$ w przestrzeni więcej wymiarowej niż pierwotnie leżał kompleks symplecjalny \mathcal{S} , ponieważ każdemu wierzchołkowi przypisuje oddzielny wymiar. Warto na tę konstrukcję spojrzeć przy pomocy współrzędnych barycentrycznych. Jeśli v_0, \dots, v_n są wierzchołkami \mathcal{S} i $x \in |\mathcal{S}|$ to odpowiadającym mu punktem w powyższej konstrukcji będzie punkt $(t_{v_0}(x), \dots, t_{v_n}(x))$ więc każda barycentryczna współrzędna została potraktowana jako osobna współrzędna w \mathbb{R}^{n+1} .

2.5 Topologia w abstrakcyjnych kompleksach

Niech \mathcal{X} będzie abstrakcyjnym kompleksem symplecjalnym i $s \in \mathcal{X}$. Domknięciem sympleksu s nazywamy zbiór

$$\text{cl } s = \{u \in \mathcal{X} | u \subset s\}.$$

Jest to zbiór składający się z wszystkich ścian s . Jeśli \mathcal{A} jest podzbiorem abstrakcyjnego kompleksu \mathcal{X} to domknięciem \mathcal{A} będziemy nazywać sumę

domknięć wszystkich sympleksów do niego należących i oznaczamy je przez $\text{cl } \mathcal{A}$. Równoważnie można powiedzieć, że jest to najmniejszy podkompleks \mathcal{X} , który zawiera sympleksy z \mathcal{A} . Jeśli spełniona jest równość $\text{cl } \mathcal{A} = \mathcal{A}$ to zbiór \mathcal{A} będziemy nazywali zbiorem domkniętym. Zauważmy, że zbiór domkniętych zbiorów spełnia standardowe aksjomaty topologiczne. Domknięcie zbioru pustego \emptyset jest zbiorem pustym a domknięcie zbioru \mathcal{X} jest zbiorem \mathcal{X} czyli zbiór pusty i cała przestrzeń jest domknięta. Jeśli $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ są domknięte to ich suma i iloczyn także. Ponieważ zbiór \mathcal{X} jest skończony implikuje to, że dowolny iloczyn dowolnej rodziny zbiorów domkniętych jest domknięty. Zatem rodzina dopełnień zbiorów domkniętych stanowi topologię.

2.6 Grupy homologii

Niech \mathcal{X} będzie abstrakcyjnym kompleksem symplecjajalnym. Grupą n -wymiarowych łańcuchów nad \mathbb{Z}_2 nazywamy zbiór

$$C_n(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2) := \{\sigma : \mathcal{X}_n \rightarrow \mathbb{Z}_2\}$$

wraz z operacją dodawania daną wzorem $(\sigma_1 + \sigma_2)(x) := (\sigma_1(x) + \sigma_2(x)) \bmod 2$. Zauważmy, że grupa ta stanowi przestrzeń wektorową z bazą złożoną z funkcji

$$\sigma_s(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } s = x \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases} \quad \text{dla } s \in \mathcal{X}_n.$$

Dla uproszczenia notacji funkcje te utożsamimy z n -wymiarowymi sympleksami z kompleksu. Korzystając z tej konwencji każdy łańcuch $c \in C_n(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$ można zapisać w postaci

$$c = \sum_{s \in \mathcal{X}_n} \alpha_s s, \quad \text{gdzie } \alpha_s \in \mathbb{Z}_2.$$

Dodatkowo przyjmujemy, że jeśli \mathcal{X}_n jest zbiorem pustym to $C_n(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2) = \{0\}$.

Odwzorowanie $\partial_n : C_n(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2) \rightarrow C_{n-1}(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$ dane dla bazowych elementów wzorem

$$\partial_n s = \sum_{v \in s} s \setminus \{v\}$$

i liniowo rozszerzone na całe $C_n(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$ jest nazywane operatorem brzegu. Intuicyjnie dla danego n -wymiarowego sympleksu s zwraca on nam łańcuch złożony z jego $(n-1)$ -wymiarowych ścian. Operator ten spełnia równość $\partial_{n-1} \partial_n = 0$. Dla $s \in \mathcal{X}_n$ mamy

$$\partial_n \partial_{n-1}(s) = \sum_{v_1 \in s} \sum_{v_2 \in s \setminus \{v_1\}} s \setminus \{v_1, v_2\}.$$

Wyrazami tej sumy są $(n-2)$ -wymiarowe ściany postaci $s \setminus \{v_a, v_b\}$, gdzie $v_a, v_b \in s$ i $v_a \neq v_b$. Każdą z takich ścian występuje w powyższej sumie dwa razy co powoduje, że współczynnik przy tej ścianie w łańcuchu wynosi zero.

Grupą cykli nazywamy grupę $Z_n(\mathcal{X}, \mathbb{Z}^2) = \ker \partial_n$ a grupą brzegów grupę $B_n(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2) = \text{im } \partial_{n+1}$. Ponieważ $\partial_{n-1}\partial_n = 0$ to grupa brzegów stanowi podgrupę grupy cykli. Możemy zatem utworzyć grupę ilorazową

$$H_n(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2) := Z_n(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)/B_n(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2).$$

Grupę tą nazywamy n -wymiarową grupą homologii. Dla geometrycznego kompleksu sympleksyjnego \mathcal{S} przez $H_n(\mathcal{S}, \mathbb{Z}_2)$ będziemy oznaczać grupy homologii kompleksu \mathcal{S} . Zaskakującym faktem jest to, że dla dwóch geometrycznych kompleksów sympleksyjnych $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ jeśli realizują one te same bryły czyli $|\mathcal{S}_1| = |\mathcal{S}_2|$ to grupy homologii $H_n(\mathcal{S}_1, \mathbb{Z}_2)$ i $H_n(\mathcal{S}_2, \mathbb{Z}_2)$ są izomorficzne dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Co więcej jeśli bryły $|\mathcal{S}_1|$ i $|\mathcal{S}_2|$ są homeomorficzne to ich grupy homologii także są takie same.

Jeśli \mathcal{A} stanowi podkompleks \mathcal{X} to $C_n(\mathcal{A}, \mathbb{Z}_2)$ stanowi podgrupę $C_n(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)$. Zdefiniujemy grupę ilorazową

$$C_n(\mathcal{X}/\mathcal{A}, \mathbb{Z}_2) := C_n(\mathcal{X}, \mathbb{Z}_2)/C_n(\mathcal{A}, \mathbb{Z}_2),$$

którą nazywamy relatywną grupą n -wymiarowych łańcuchów. Dzięki temu, że \mathcal{A} jest podkompleksem \mathcal{X} , wzór

$$\widetilde{\partial}_n[s] = [\partial_n s] \text{ gdzie } [s] \in C_n(\mathcal{X}/\mathcal{A}, \mathbb{Z}_2)$$

zadaje poprawną funkcję $\widetilde{\partial}_n : C_n(\mathcal{X}/\mathcal{A}, \mathbb{Z}_2) \rightarrow C_{n-1}(\mathcal{X}/\mathcal{A}, \mathbb{Z}_2)$ nazywaną relatywnym operatorem brzegu. W tym przypadku także zachodzi równość $\widetilde{\partial}_n \widetilde{\partial}_{n-1} = 0$ więc powtarzając konstrukcje grup homologii definiujemy odpowiednio relatywną grupę cykli $Z_n(\mathcal{X}/\mathcal{A}, \mathbb{Z}_2) := \ker \widetilde{\partial}_n$ oraz relatywną grupę brzegów $B_n(\mathcal{X}/\mathcal{A}, \mathbb{Z}_2) := \text{im } \widetilde{\partial}_{n+1}$. Relatywną n wymiarową grupą homologii będziemy nazywać grupę

$$H_n(\mathcal{X}/\mathcal{A}, \mathbb{Z}_2) := Z_n(\mathcal{X}/\mathcal{A}, \mathbb{Z}_2)/B_n(\mathcal{X}/\mathcal{A}, \mathbb{Z}_2).$$

Poprzez pominięcie n przy $H(\mathcal{X}/\mathcal{A}, \mathbb{Z}_2)$ będziemy oznaczać ciąg grup homologii relatywnych $(H_n(\mathcal{X}/\mathcal{A}, \mathbb{Z}_2))_{n \in \mathbb{N}}$. Wielomianem Poincaré dla grup homologii relatywnych $H(\mathcal{X}/\mathcal{A}, \mathbb{Z}_2)$ nazywamy wyrażenie

$$P(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\dim H_n(\mathcal{X}/\mathcal{A}, \mathbb{Z}_2)) t^n.$$

Tylko skończona liczba grup homologii jest niezerowa więc powyższe wyrażenie jest wielomianem.

Przykład 2.4. Policzmy relatywne grupy homologii dla $\mathcal{S} = \text{cl } ABC$ i $\mathcal{A} = \text{cl } \{AB, AC, BC\}$. Mamy:

$$C_0(\mathcal{S}/\mathcal{A}, \mathbb{Z}_2) = \text{span}(\{A, B, C\})/\text{span}(\{A, B, C\}) = \{0\},$$

$$C_1(\mathcal{S}/\mathcal{A}, \mathbb{Z}_2) = \text{span}(\{AB, AC, BC\})/\text{span}(\{AB, AC, BC\}) = \{0\},$$

$$C_2(\mathcal{S}/\mathcal{A}, \mathbb{Z}_2) = \text{span}(\{ABC\})/\{0\} = \text{span}(\{ABC\}).$$

Zatem

$$Z_0(\mathcal{S}/\mathcal{A}, \mathbb{Z}_2) = \{0\},$$

$$Z_1(\mathcal{S}/\mathcal{A}, \mathbb{Z}_2) = \{0\},$$

$$Z_2(\mathcal{S}/\mathcal{A}, \mathbb{Z}_2) = \text{span}(\{ABC\}), \text{ ponieważ}$$

$$\partial_2(ABC) = AB + AC + BC \in C_1(\mathcal{A}, \mathbb{Z}_2) \text{ więc } \widetilde{\partial}_n(ABC) = 0,$$

$$B_0(\mathcal{S}/\mathcal{A}, \mathbb{Z}_2) = \{0\},$$

$$B_1(\mathcal{S}/\mathcal{A}, \mathbb{Z}_2) = \{0\},$$

$$B_2(\mathcal{S}/\mathcal{A}, \mathbb{Z}_2) = \{0\},$$

Więc grupy homologii relatywnej wynoszą

$$H_0(\mathcal{S}/\mathcal{A}, \mathbb{Z}_2) = \{0\},$$

$$H_1(\mathcal{S}/\mathcal{A}, \mathbb{Z}_2) = \{0\},$$

$$H_2(\mathcal{S}/\mathcal{A}, \mathbb{Z}_2) = \text{span}(ABC).$$

W tym przypadku wielomian Poincaré wynosi t^2 .

3 Kombinatoryczne pola wektorowe

Definicja 3.1. Niech \mathcal{X} będzie abstrakcyjnym kompleksem symplecjajalnym. Podział \mathcal{V} zbioru \mathcal{X} nazywamy kombinatorycznym (dyskretnym) polem wektorowym gdy dla każdego $v \in \mathcal{V}$ zachodzi jeden z poniższych warunków:

- (i) $v = \{s\}$, gdzie $s \in \mathcal{X}$,
- (ii) $v = \{s_1, s_2\}$, gdzie $s_1, s_2 \in \mathcal{X}$ oraz $s_1 \subset s_2$ i $\dim s_1 + 1 = \dim s_2$.

Niech \mathcal{V} będzie kombinatorycznym polem wektorowym. Elementy \mathcal{V} będziemy nazywać (kombinatorycznymi, dyskretnymi) wektorami. Każdy z wektorów jest singletonem lub dubletonem, które nazywane są odpowiednio wektorem krytycznym i regularnym. W przypadku singletona początkiem i końcem wektora będziemy nazywać sympleks zawarty w tym wektorze. Natomiast gdy wektor jest dwuelementowy to początkiem tego wektora będziemy nazywali sympleks o mniejszej mocy natomiast końcem sympleks o większej mocy. Dla danego wektora $v \in \mathcal{V}$ przez v^- oznaczamy początek wektora v a przez v^+ jego koniec. Jeśli $s \in \mathcal{X}$ to poprzez $[s]_{\mathcal{V}}$ będziemy oznaczać wektor, który zawiera sympleks s . Potokiem generowanym przez kombinatoryczne pole wektorowe nazywamy odwzorowanie wielowartościowe $\Pi_{\mathcal{V}} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{X})$,

które zdefiniowane jest następująco

$$\Pi_{\mathcal{V}}(s) = \begin{cases} \text{cl } s & \text{gdy } [s]_{\mathcal{V}}^- = s = [s]_{\mathcal{V}}^+ \\ \text{cl } s \setminus [s]_{\mathcal{V}} & \text{gdy } [s]_{\mathcal{V}}^- \neq s = [s]_{\mathcal{V}}^+ \\ \{[s]_{\mathcal{V}}^+\} & \text{gdy } [s]_{\mathcal{V}}^- = s \neq [s]_{\mathcal{V}}^+ \end{cases}$$

Obrazem zbioru $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ będziemy nazywać zbiór

$$\Pi_{\mathcal{V}}(\mathcal{A}) := \bigcup_{s \in \mathcal{A}} \Pi_{\mathcal{V}}(s),$$

natomiast jego przeciwobrazem nazywamy zbiór

$$\Pi_{\mathcal{V}}^{-1}(\mathcal{A}) := \{s \in \mathcal{X} \mid \Pi_{\mathcal{V}}(s) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset\}.$$

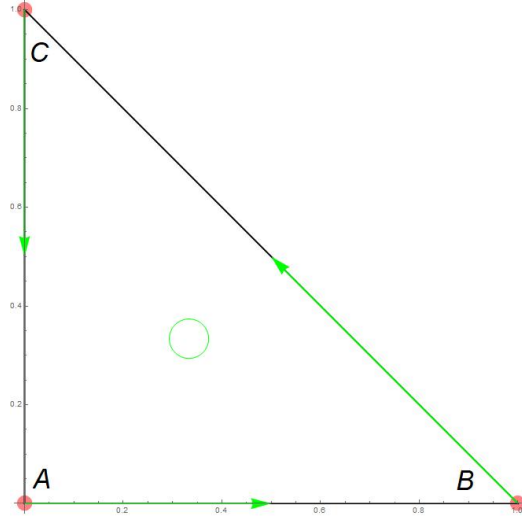
Trajektorią nazywamy funkcje $\varrho : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{X}$, która dla każdego $i \in \mathbb{Z}$ spełnia $\varrho(i+1) \in \Pi_{\mathcal{V}}(\varrho(i))$. Jeśli zbiór $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ da się przedstawić w postaci

$$\mathcal{A} = \bigcup_{v \in \mathcal{V}_1} v, \quad \text{gdzie } \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}$$

to \mathcal{A} nazywamy zbiorem \mathcal{V} -kompatybilnym. Poprzez $\mathcal{V}^-(\mathcal{A})$ będziemy oznaczać największy zbiór \mathcal{V} -kompatybilny zawarty w \mathcal{A} a poprzez $\mathcal{V}^+(\mathcal{A})$ najmniejszy \mathcal{V} -kompatybilny nadzbiór \mathcal{A} . Zbiór

$$\text{inv}(\mathcal{A}) := \{x \in \mathcal{A} \mid \text{istnieje } \varrho \text{ trajektoria taka, że } x \in \text{im } \varrho \subset \mathcal{V}^-(\mathcal{A})\}$$

nazywamy niezmienniczą częścią zbioru \mathcal{A} . Zbiór $S \subset \mathcal{X}$ nazywamy zbiorem niezmienniczym jeśli zachodzi $S = \text{inv}(S)$. Ujściem zbioru $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ nazywamy zbiór $\text{mo } \mathcal{A} := \text{cl } \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}$. Jeśli ujście zbioru jest domknięte to zbiór ten nazywamy właściwym. Jeśli zbiór niezmienniczy \mathcal{A} jest zbiorem właściwym to nazywamy go izolowanym zbiorem niezmienniczym.



Rysunek 1: Kombinatoryczne pole wektorowe na kompleksie symplecjajalnym $\mathcal{S} = \text{cl } ABC$. Zielone strzałki oznaczają wektory regularne a zielone kółka reprezentują wektory krytyczne.

Przykład 3.2. Rysunek 1 przedstawia prosty dyskretny układ. Polem wektorowym w tym przypadku jest zbiór

$$\mathcal{V} = \{\{ABC\}, \{A, AB\}, \{B, BC\}, \{C, AC\}\}.$$

Potokiem generowanym przez to pole wektorowe jest funkcja wielowartościowa $\Pi_{\mathcal{V}}$ zdefiniowana następująco:

$$\Pi_{\mathcal{V}}(ABC) = \text{cl } ABC = \{ABC, AB, AC, BC, A, B, C\},$$

$$\Pi_{\mathcal{V}}(A) = \{AB\},$$

$$\Pi_{\mathcal{V}}(AB) = \{B\},$$

$$\Pi_{\mathcal{V}}(B) = \{BC\},$$

$$\Pi_{\mathcal{V}}(BC) = \{C\},$$

$$\Pi_{\mathcal{V}}(C) = \{AC\},$$

$$\Pi_{\mathcal{V}}(AC) = \{A\}.$$

Przykładowymi trajektoriami są trajektoria stała

$$\dots, ABC, ABC, ABC \dots$$

oraz trajektoria okresowa

$$\dots, A, AB, B, BC, C, CA, A, AB, B, \dots$$

Niech S będzie izolowanym zbiorem niezmienniczym. Wtedy parę (P_1, P_2) domkniętych zbiorów $P_2 \subset P_1$ nazywamy parą indeksową dla S gdy zachodzą warunki:

- (i) $\text{inv}(P_1 \setminus P_2) = S$,
- (ii) $P_1 \cap \Pi_{\mathcal{V}}(P_2) \subset P_2$,
- (iii) $P_1 \cap \Pi_{\mathcal{V}}^{-1}(X \setminus P_1) \subset P_2$.

Homologicznym indeksem Conleya dla zbioru niezmienniczego S nazywamy relatywne grupy homologii $H(P_1/P_2, \mathbb{Z}_2)$. Pokazuje się, że grupy te są izomorficzne dla wszystkich możliwych par indeksowych dla S . Można pokazać, że jeśli S jest niezmienniczym zbiorem izolowanym to para $(\text{cl } S, \text{mo } S)$ stanowi parę indeksową dla S .

Niech $\sigma_l(i) = i - 1$ i $\sigma_r(i) = i + 1$ dla $i \in \mathbb{Z}$ będą odpowiednio przesunięciami w lewo i w prawo. Dla trajektorii ϱ oznaczmy przez ϱ_+ , ϱ_- odpowiednio zawężenie trajektorii do liczb dodatnich i ujemnych. Niech ϱ będzie trajektorią. Zbiorem ω -granicznym dla trajektorii ϱ nazywamy zbiór

$$\omega(\varrho) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{inv } \mathcal{V}^+(\text{im } (\varrho \circ \sigma_r^n)_+).$$

Natomiast zbiorem α -granicznym zbiór

$$\alpha(\varrho) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{inv } \mathcal{V}^+(\text{im } (\varrho \circ \sigma_l^n)_-).$$

Niech \mathcal{M} będzie zbiorem rozłącznych oraz izolowanych zbiorów niezmienniczych. Jeśli istnieje częściowy porządek \leq na \mathcal{M} spełniający warunki:

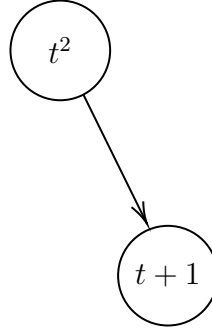
- (i) Jeśli $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ oraz istnieje trajektoria ϱ taka, że jeśli $\omega(\varrho) \subset M_1$ i $\alpha(\varrho) \subset M_2$ to $M_1 \leq M_2$,
- (ii) Jeśli dla $M \in \mathcal{M}$ i pewnej trajektorii ϱ zachodzi $\alpha(\varrho) \cup \omega(\varrho) \subset M$ to $\text{im } \varrho \subset M$

to \mathcal{M} nazywamy rozkładem Morse'a.

Niech \mathcal{M} będzie rozkładem Morse'a i $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$. Wtedy relacja

$$M_1 \leq M_2 \Leftrightarrow \text{istnieje trajektoria } \varrho \text{ taka, że } \omega(\varrho) \subset M_1 \text{ i } \alpha(\varrho) \subset M_2$$

jest najmniejszym porządkiem, która spełnia warunki (i), (ii). Przedstawiając ją za pomocą diagramu Hassego każdy wierzchołek w tym grafie jest izolowanym zbiorem niezmienniczym. Można zatem policzyć jego indeks Conleya oraz odpowiadający mu wielomian Poincaré. Etykietując każdy wierzchołek tego diagramu odpowiadającym mu wielomianem Poincaré dostajemy graf Conleya-Morse'a dla rozkładu \mathcal{M} .



Rysunek 2: Graf Conleya-Morse'a dla rysunku nr. 1.

4 Index Conleya dla ciągłych układów dynamicznych

Definicja 4.1. Niech X będzie domkniętym podzbiorem \mathbb{R}^n . Ciągłą funkcję $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy potokiem gdy dla wszystkich $x \in X$ i $t, s \in \mathbb{R}$ spełnia ona warunki:

- (i) $\varphi(x, 0) = x$,
- (ii) $\varphi(x, s + t) = \varphi(\varphi(x, s), t)$.

Niech φ będzie układem dynamicznym. Orbitą $x \in X$ nazywamy zbiór $o(x) := \{\varphi(x, t) | t \in \mathbb{R}\}$. Analogicznie zbiór $o^+(x) := \{\varphi(x, t) | t \in [0, +\infty]\}$ nazywamy orbitą dodatnią punktu x a zbiór $o^-(x) := \{\varphi(x, t) | t \in [-\infty, 0]\}$ orbitą ujemną punktu x . Zbiór S nazywamy zbiorem niezmienniczym jeśli dla wszystkich $x \in S$ orbita x zawiera się w S . Zauważmy, że suma i iloczyn mnogościowy dwóch zbiorów niezmienniczych jest także zbiorem niezmienniczym. Jeśli $N \subset X$ to częścią niezmienniczą N nazywamy zbiór

$$\text{inv}(N) := \{x \in N | o(x) \subset N\}.$$

Jest to największy zbiór niezmienniczy, który zawiera się w N . Przypuśćmy, że $\text{inv}(N)$ nie jest niezmienniczy. Istnieje zatem x należący do niezmienniczej części zbioru N , dla którego $y = \varphi(x, t_1) \notin \text{inv}(N)$. Więc $o(y) \not\subset N$ czyli po pewnym czasie t_2 , punkt y opuści zbiór N . Wtedy jednak $\varphi(x, t_1 + t_2) = \varphi(y, t_2) \notin N$ co jest sprzeczne z tym że, x był w niezmienniczej części zbioru N co pokazuje, że $\text{inv}(N)$ jest zbiorem niezmienniczym. Zobaczmy także, że dowolny zbiór niezmienniczy zawarty w N musi zawierać się w jego części niezmienniczej.

Jeśli zwarty zbiór N spełnia zależność

$$\text{inv}(N) \subset \text{int } N$$

to jest on nazywany otoczeniem izolującym dla zbioru niezmienniczego $\text{inv}(N)$. Zbiór niezmienniczy S będziemy nazywali izolowanym zbiorem niezmienniczym jeśli istnieje otoczenie izolujące N takie, że $\text{inv}(N) = S$. Dla $x \in X$ zbiory

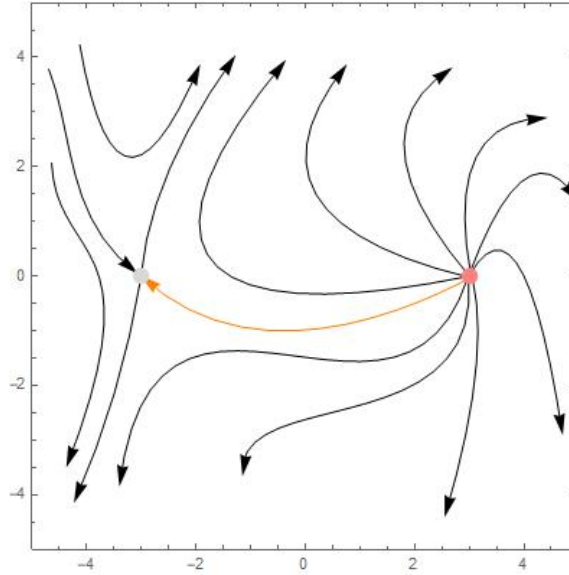
$$\omega(x) := \bigcup_{t>0} \text{cl}(o^+(\varphi(x, t))),$$

$$\alpha(x) := \bigcup_{t<0} \text{cl}(o^-(\varphi(x, t)))$$

będziemy nazywali odpowiednio zbiorami omega i alfa granicznymi punktu x .

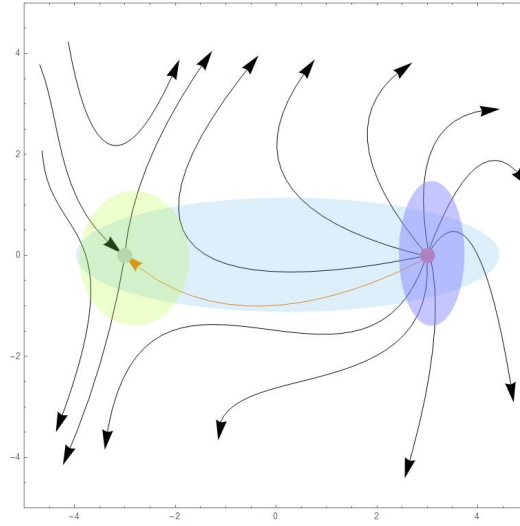
Rozważmy izolowany zbiór niezmienniczy S . Niech \mathcal{M} będzie kolekcją rozłącznych izolowanych zwartych zbiorów niezmienniczych zawierających się w S . Jeśli istnieje częściowy porządek \leq taki, że dla każdego $x \in S$ spełniony jest jeden z warunków:

- (i) x leży w pewnym zbiorze niezmienniczym $M \in \mathcal{M}$,
 - (ii) Jeśli $\omega(x) \subset M_1 \in \mathcal{M}$ i $\alpha(x) \subset M_2 \in \mathcal{M}$ to $M_1 < M_2$,
- to \mathcal{M} nazywamy rozkładem Morse'a zbioru S .



Rysunek 3: Układ dynamiczny z punktem odpychającym po prawej stronie i siodłem po lewej.

Przykład 4.2. Na rysunku 3 widać układ dynamiczny w którym znajduje się zbiór niezmienniczy złożony z różowego punktu po prawej stronie, szarego punktu po lewej stronie i pomarańczowej trajektorii, która je łączy. Łatwo zauważyć, że jest to zbiór niezmienniczy izolowany ponieważ w jego otoczeniu nie ma żadnych innych zbiorów niezmienniczych. Same punkty także są izolowane. Przykładowe zbiory izolujące możemy zobaczyć na rysunku 4. Pomarańczowa trajektoria bez różowego i szarego punktu stanowi zbiór niezmienniczy ale nie jest on zbiorem izolowanym ponieważ niezmiennicza część każdego zwartego otoczenia tej trajektorii zawiera dodatkowo różowy i szary punkt.



Rysunek 4: Przykładowe otoczenia izolujące dla zbiorów niezmienniczych.

Niech S będzie izolowanym zbiorem niezmienniczym. Parę (P_1, P_2) zwartych zbiorów takich, że $P_2 \subset P_1$ nazywamy parą indeksową gdy zachodzą warunki:

- (i) $\text{inv}(\text{cl}(P_1 \setminus P_2)) = S$ oraz $N \setminus L$ jest otoczeniem S ,
- (ii) Jeśli $x \in P_2$ i trajektoria $\varphi(x, [0, t])$ zawiera się w P_1 to trajektoria $\varphi(x, [0, t])$ zawiera się także P_2 (P_2 jest pozytywnie niezmienniczy w P_1),
- (iii) Jeśli dla $x \in P_1$ i pewnego $t_0 > 0$ zachodzi $\varphi(x, t_0) \notin P_1$ wtedy istnieje $t_1 \in [0, t_0]$ takie, że $\varphi(x, t_1) \in P_2$ (P_2 jest zbiorem wyjścia dla P_1).

Jeśli (P_1, P_2) jest parą indeksową to możemy utworzyć przestrzeń topologiczną z wyróżnionym punktem przez konstrukcję

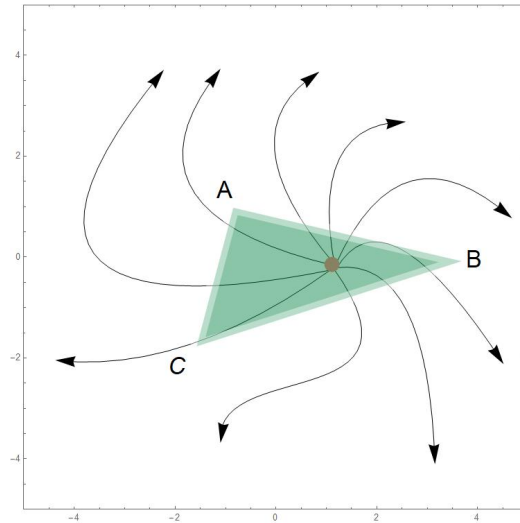
1. Rozważyć topologie \mathcal{T}_1 indukowaną przez zbiór P_1 w X .

2. Z topologii \mathcal{T}_1 utworzyć topologię ilorazową \mathcal{T}_2 powstałą przez relację, która utożsamia punkty ze zbioru P_2 .
3. W topologii \mathcal{T}_2 wyróżnić punkt powstały z utożsamienia punktów zbioru P_2 .

Indeksem Conleya nazywamy klasę homotopii powstałej z tej konstrukcji topologii. Pokazuje się, że ta klasa jest taka sama dla wszystkich par indeksowych. Ponieważ klasa homotopii jest ciężka do algorytmicznego policzenia to definiuje się homologiczny indeks Conleya, który to jest niezmiennikiem klasy homotopii. W pracy ograniczymy definicję homotopijnego indeksu Conleya do par (P_1, P_2) spełniających warunki:

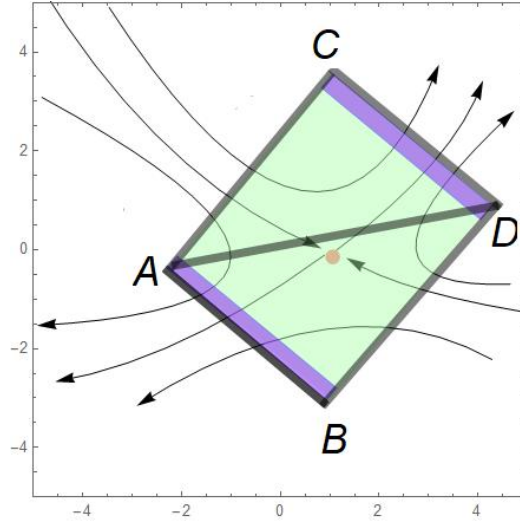
- (i) Istnieje kompleks \mathcal{S}_1 i jego podkompleks \mathcal{S}_2 , których bryły stanowią tę parę czyli $P_1 = |\mathcal{S}_1|$ oraz $P_2 = |\mathcal{S}_2|$,
- (ii) Istnieje U otoczenie P_2 w P_1 , dla którego P_2 jest retraktem deformacyjnym U .

Wtedy homologicznym indeksem Conleya zbioru S nazywamy kolekcję relatywnych grup homologii $H(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2, \mathbb{Z}_2)$.



Rysunek 5: Para izolująca dla źródła.

Przykład 4.3. Na rysunku 5 jest przedstawiona przykładowa para izolująca dla źródła. Zbiorem P_1 jest sympleks rozpięty przez punkty A, B, C a P_2 składa się z jego brzegu. Jeśli oznaczymy przez $\mathcal{S}_1 := \text{cl } ABC$ oraz przez $\mathcal{S}_2 := \text{cl } \{AB, AC, BC\}$ to możemy policzyć homologiczny indeks Conleya licząc homologie relatywne $H(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2, \mathbb{Z}_2)$. W tym przypadku wielomian Poincaré wynosi t^2 .



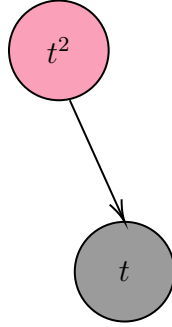
Rysunek 6: Para izolująca dla siodła.

Przykład 4.4. Na rysunku 5 jest przedstawiona przykładowa para izolująca dla siodła. Zbiorem P_1 są sympleksy rozpięte przez punkty A, B, D i A, C, D a P_2 składa się z krawędzi AB i CD . Jeśli oznaczymy przez $\mathcal{S}_1 := \text{cl} \{ABD, ACD\}$ oraz przez $\mathcal{S}_2 := \text{cl} \{AB, DC\}$ to możemy policzyć homologiczny indeks Conleya licząc homologie relatywne $H(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2, \mathbb{Z}_2)$. W tym przypadku wielomian Poincaré wynosi t .

Jeśli \mathcal{M} jest rozkładem Morsa dla pewnego zbioru niezmienniczego S to relacja

$$M_1 \leq M_2 \Leftrightarrow \text{istnieje } x \in S \text{ taki, że } \omega(x) \subset M_1 \text{ i } \alpha(x) \subset M_2$$

jest najmniejszym porządkiem na \mathcal{M} dla, którego spełnione są warunki rozkładu Morse'a. Rozważając diagram Hassego dla tego porządku i etykietując każdy wierzchołek za pomocą wielomianu Poincaré otrzymanego z homologicznego indeksu Conleya dla tego wierzchołka dostajemy graf Conleya-Morse'a rozkładu \mathcal{M} .



Rysunek 7: Graf Conleya-Morse'a dla rysunku nr. 3.

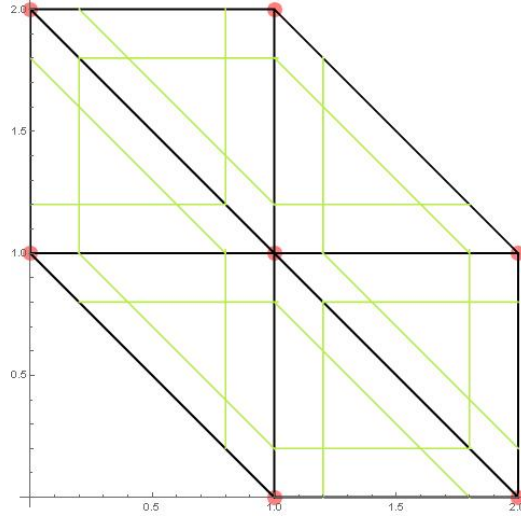
5 Pola wektorowe na kompleksach symplijalnych

5.1 Ciągłe układy dynamiczne pochodzące od dyskretnych pól wektorowych

Niech \mathcal{S} będzie geometrycznym kompleksem symplecjajalnym a s należącym do niego sympleksem. Dla $\epsilon > 0$ zbiór

$$\langle s \rangle_\epsilon := \{x \in |\mathcal{S}| : \forall v \in \mathcal{S}_0 \cap s \ t_v(x) > \epsilon \text{ i } \forall v \in \mathcal{S}_0 \setminus s \ t_v(x) < \epsilon\}$$

nazywamy ϵ -komórką dla sympleksu s . Jeśli $\epsilon < \frac{1}{\dim \mathcal{S} + 1}$ to dla każdego sympleksu s z \mathcal{S} jego ϵ -komórka jest niepusta. Wtedy także, dla dowolnych dwóch sympleksów ϵ -komórki są rozłączne a ich brzegi przecinają się tylko wtedy gdy jeden z tych sympleksów jest ścianą drugiego.



Rysunek 8: Podział kompleksu symplecjonalnego na ϵ -komórki.

Niech \mathcal{S}_0 będzie postaci $\{v_1 \dots, v_d\}$, przyjmijmy konwencję, że dla $x \in \mathbb{R}^d$ poprzez x_{v_i} będziemy oznaczać i -tą współrzędną wektora x . Ustalmy kombinatoryczne pole wektorowe \mathcal{V} na kompleksie $\mathcal{X}_{\mathcal{S}}$. Niech $p \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^d$, $A \subset \mathcal{S}_0$, $\epsilon > 0$ oraz $\omega \in \mathcal{V}$. Definiujemy funkcje pomocnicze:

$$\begin{aligned}
g(s) &:= \sqrt[3]{\epsilon^2 s}, \\
\eta^\omega(s, x) &:= \begin{cases} 1 & \text{gdy } \sum_{v \notin \omega^+} x_v^2 = 0 \text{ i } s \in [0, \frac{\epsilon}{8d}], \\ \frac{8d}{\epsilon} |s| & \text{wpp,} \end{cases} \\
h(s) &:= \begin{cases} 1 & \text{dla } s \in [-\infty, \frac{\epsilon}{2}] \cup [\frac{3\epsilon}{2}, \infty), \\ 1 + \frac{\epsilon+2}{2} - \frac{\epsilon+2}{\epsilon} s & \text{dla } s \in [\frac{\epsilon}{2}, \epsilon], \\ -2 - \frac{3\epsilon}{2} + \frac{\epsilon+2}{\epsilon} s & \text{dla } s \in [\epsilon, \frac{3\epsilon}{2}], \end{cases} \\
\zeta^\omega(s, x) &:= \begin{cases} \eta^\omega(s, x) & \text{dla } s \in (-\infty, \frac{\epsilon}{8d}], \\ h(s) & \text{dla } s \in [\frac{\epsilon}{8d}, \infty), \end{cases} \\
\theta^\omega(x) &:= \min \left(\{\epsilon\} \cup \{x_v - \epsilon \mid v \in \omega^-\} \right), \\
S_A(x) &:= -1 + \sum_{v \in A} x_v.
\end{aligned}$$

Ustalmy wektor $\omega \in \mathcal{V}$, i określmy zbiory

$$V_\omega := \bigcup_{s \in \omega} \{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall v \in \mathcal{S}_0 \cap s \ x_v > \epsilon \text{ i } \forall v \in \mathcal{S}_0 \setminus s \ x_v < \epsilon\},$$

$$D_\delta := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall v \in \mathcal{S}_0 \ x_v > -\delta \text{ i } \left| \sum_{v \in \mathcal{S}_0} x_v - 1 \right| < \delta\}.$$

Zdefiniujmy pole wektorowe $f^\omega : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ wzorem

$$f_v^\omega(x) = \begin{cases} -g(x_v) & \text{dla } v \notin \omega^+, \\ \zeta^\omega(x_v, x) + \theta^\omega(x) - \sum_{u \notin \omega^+} x_u & \text{dla } v \in \omega^+ \setminus \omega^-, \\ x_v + \frac{1}{|\omega^-|} \left(\sum_{u \notin \omega^-} x_u - \sum_{u \notin \omega^-} f_u^\omega(x) - 1 - S_V(x) \right) & \text{dla } v \in \omega^-. \end{cases}$$

Pole to jest określone na zbiorze $V_\omega \cap D_\delta$ gdzie δ jest odpowiednio małe. Zbiór ten stanowi pogrubienie sumy mnogościowej ϵ -komórek sympleksów z wektora ω . Otrzymane w ten sposób pole wektorowe odpowiada dynamice zadawanej przez dyskretny wektor ω . By otrzymać pole wektorowe odpowiadające dynamice \mathcal{V} łączymy te pola wektorowe sklejając funkcje f^ω wzdłuż brzegów obszarów $V_\omega \cap D_\delta$. Na brzegach obszarów $V_\omega \cap D_\delta$ sklejenie to jest niejednoznaczne. Okazuje się, że wykorzystując teorię inkluzji równikowych możemy dostać semipotok czyli ciągłą funkcję $\varphi : D_\delta \rightarrow \mathbb{R}^+$, która poza tym, że orbita punktu x jest zdeterminowana jednoznacznie tylko dla czasów nieujemnych to spełnia wszystkie inne własności zwykłego układu dynamicznego. Dla semipotoków możliwe jest zdefiniowanie grafów Conleya-Morse'a w podobny sposób jak dla zwykłych układów dynamicznych. W pracy [4] pokazano, że zbiór $W := \{(t_{v_1}(x), \dots, t_{v_d}(x)) : x \in |S|\}$ jest zbiorem niezmienniczym dla semipotoku pochodzącą od funkcji f^ω dla dostatecznie małych ϵ i δ . Pokazano także dla każdego rozkładu Morse'a \mathcal{M} w dyskretnym polu wektorowym i odpowiadającemu mu grafowi Conleya-Morse'a G można znaleźć odpowiadający mu rozkład Morse'a \mathcal{M}' zbioru W wraz z grafem Conleya-Morse'a G' dla którego G jest izomorficzny z G' . Dodatkowo istnieje izomorfizm pomiędzy G i G' , który zachowuje wielomiany Poincaré. Pokazuje to, że otrzymany semipotok jest podobny do dyskretniej dynamiki zadanej przez \mathcal{V} .

5.2 Rzutowanie pól wektorowych

Niech \mathcal{S} będzie geometrycznym kompleksem symplecjajalnym, oraz niech v_1, \dots, v_n będą wierzchołkami z kompleksu \mathcal{S} . Będziemy rozważać pole wektorowe $y'(t) = f(y(t))$ dla którego zbiór $W = \{(t_{v_1}(x), \dots, t_{v_n}(x)) \mid x \in |\mathcal{S}|\}$ jest zbiorem niezmienniczym dla tego równania. Jest to warunek konieczny na to, aby równanie różnikowe zadane dla współrzędnych barycentrycznych mogło reprezentować pewne kombinatoryczne pole wektorowe. Jeśli zbiór W nie jest zbiorem niezmienniczym musi istnieć punkt w bryle tego kompleksu symplecjajalego taki, że jego współrzędne barycentryczne po pewnym czasie przestaną sumować się do 1 więc przestanie reprezentować punkt w bryle kompleksu symplecjajalego. Oznacza to, że jeśli trajektoria $y(t) \in W$

dla wszystkich t to musi ona spełniać równanie $y_1(t) + \dots + y_n(t) = 1$ dla wszystkich t . Po zróżniczkowaniu tego wyrażenia względem t dostajemy $y'_1(t) + \dots + y'_n(t) = 0$ i podstawiając $y'_i(t) = f_i(y(t))$ mamy

$$f_1(y(t)) + \dots + f_n(y(t)) = 0.$$

Zobaczmy także, że jeśli $y \in W$ oraz $y = (t_{v_1}(x), \dots, t_{v_n}(x))$ dla $x \in |\mathcal{S}|$ to musi istnieć sympleks $s \in \mathcal{S}$ taki, że dla wszystkich wierzchołków v_i które nie leżą w s wartość pola wektorowego $f_i(y)$ musi wynosić 0. Gdyby taki sympleks nie istniał to pole wektorowe w punkcie y wskazywało by na zewnątrz zbioru W i musiał by on opuścić ten zbiór.

Zajmiemy się teraz problemem rzutowania pola wektorowego f zapisanego w współrzędnych barycentrycznych kompleksu sympleksyjnego \mathcal{S} na pole wektorowe, które jest zdefiniowane na bryle kompleksu sympleksyjnego. Dla prostoty zawężmy nasze rozważania do kompleksu, który jest zanurzony w przestrzeni \mathbb{R}^2 . Niech $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \subset \mathbb{R}^2$ będzie krzywą taką, że jej współrzędne barycentryczne spełniają równanie różniczkowe zadane przez funkcję f . Mamy zatem

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}[t_{v_1}(\gamma(t))] = f_1(t_{v_1}(\gamma(t)), \dots, t_{v_n}(\gamma(t))), \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}[t_{v_n}(\gamma(t))] = f_n(t_{v_1}(\gamma(t)), \dots, t_{v_n}(\gamma(t))). \end{cases}$$

Zgodnie z naszymi wcześniejszymi rozważaniami dla danego $\gamma(t_0) \in |\mathcal{S}|$ możemy znaleźć taki sympleks $s \in \mathcal{S}$ rozpięty na wierzchołkach v_a, v_b, v_c , że dla wszystkich barycentrycznych współrzędnych z poza tego sympleksu $f(t_{v_1}(\gamma(t_0)), \dots, t_{v_n}(\gamma(t_0)))$ wynosi 0. Pomijając te równania dostajemy układ

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}[t_{v_a}(\gamma(t))] = f_a(t_{v_1}(\gamma(t_0)), \dots, t_{v_n}(\gamma(t_0))), \\ \frac{d}{dt}[t_{v_b}(\gamma(t))] = f_b(t_{v_1}(\gamma(t_0)), \dots, t_{v_n}(\gamma(t_0))), \\ \frac{d}{dt}[t_{v_c}(\gamma(t))] = f_c(t_{v_1}(\gamma(t_0)), \dots, t_{v_n}(\gamma(t_0))). \end{cases}$$

Korzystając z reguły łańcuchowej dostajemy układ

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}t_{v_a}|_{(\gamma(t_0))} \frac{d}{dt}(\gamma_1(t_0)) + \frac{d}{dy}t_{v_a}|_{(\gamma(t_0))} \frac{d}{dt}(\gamma_2(t_0)) = f_a(t_{v_1}(\gamma(t_0)), \dots, t_{v_n}(\gamma(t_0))), \\ \frac{d}{dx}t_{v_b}|_{(\gamma(t_0))} \frac{d}{dt}(\gamma_1(t_0)) + \frac{d}{dy}t_{v_b}|_{(\gamma(t_0))} \frac{d}{dt}(\gamma_2(t_0)) = f_b(t_{v_1}(\gamma(t_0)), \dots, t_{v_n}(\gamma(t_0))), \\ \frac{d}{dx}t_{v_c}|_{(\gamma(t_0))} \frac{d}{dt}(\gamma_1(t_0)) + \frac{d}{dy}t_{v_c}|_{(\gamma(t_0))} \frac{d}{dt}(\gamma_2(t_0)) = f_c(t_{v_1}(\gamma(t_0)), \dots, t_{v_n}(\gamma(t_0))). \end{cases}$$

Zobaczmy, że jedno z tych równań jest redundantne ponieważ dodając do siebie wszystkie równania dostaniemy równanie $0 = 0$.

Zapisując dwa pierwsze równania w postaci macierzowej dostajemy równanie

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dx}t_{v_a}|_{(\gamma(t_a))} & \frac{d}{dy}t_{v_a}|_{(\gamma(t_0))} \\ \frac{d}{dx}t_{v_b}|_{(\gamma(t_a))} & \frac{d}{dy}t_{v_b}|_{(\gamma(t_0))} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}(\gamma_1(t_0)) \\ \frac{d}{dt}(\gamma_2(t_0)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_a(t_{v_1}(\gamma(t_0)), \dots, t_{v_n}(\gamma(t_0))) \\ f_b(t_{v_1}(\gamma(t_0)), \dots, t_{v_n}(\gamma(t_0))) \end{pmatrix}.$$

Widzimy teraz, że jeśli możemy wyznaczyć pochodne cząstkowe dla funkcji t_{v_i} to odwracając macierz bylibyśmy w stanie policzyć pole wektorowe, które zadaje krzywą γ . Obliczymy teraz te pochodne oraz wzory na rzutowanie dla dwóch przykładowych sympleksów.

Przypuśmy, że $v_a = (1, 0)$, $v_b = (0, 1)$, $v_c = (0, 0)$. Jeśli punkt $(x, y) \in \langle (0, 0), (1, 0), (0, 1) \rangle$ to przedstawiając go w postaci kombinacji wypukłej tego wierzchołka otrzymamy

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) + (1 - x - y)(0, 0).$$

Zatem współrzędne barycentryczne są dane wzorami

$$\begin{aligned} t_{(1,0)}(x, y) &= x, \\ t_{(0,1)}(x, y) &= y, \\ t_{(0,0)}(x, y) &= (1 - x - y). \end{aligned}$$

Różniczkując dostajemy równość

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dx}t_{(1,0)}|_{(\gamma(t_a))} & \frac{d}{dy}t_{(1,0)}|_{(\gamma(t_0))} \\ \frac{d}{dx}t_{(0,1)}|_{(\gamma(t_a))} & \frac{d}{dy}t_{(0,1)}|_{(\gamma(t_0))} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mamy równanie

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}(\gamma_1(t_0)) \\ \frac{d}{dt}(\gamma_2(t_0)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_a(t_{v_1}(\gamma(t_0)), \dots, t_{v_n}(\gamma(t_0))) \\ f_b(t_{v_1}(\gamma(t_0)), \dots, t_{v_n}(\gamma(t_0))) \end{pmatrix}.$$

Zatem w tym przypadku dostaliśmy wzór na pole wektorowe zrzutowane na \mathbb{R}^2 .

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie, jeśli

$v_a = (-1, 0)$, $v_b = (0, -1)$, $v_c = (0, 0)$ to dostaniemy wzór

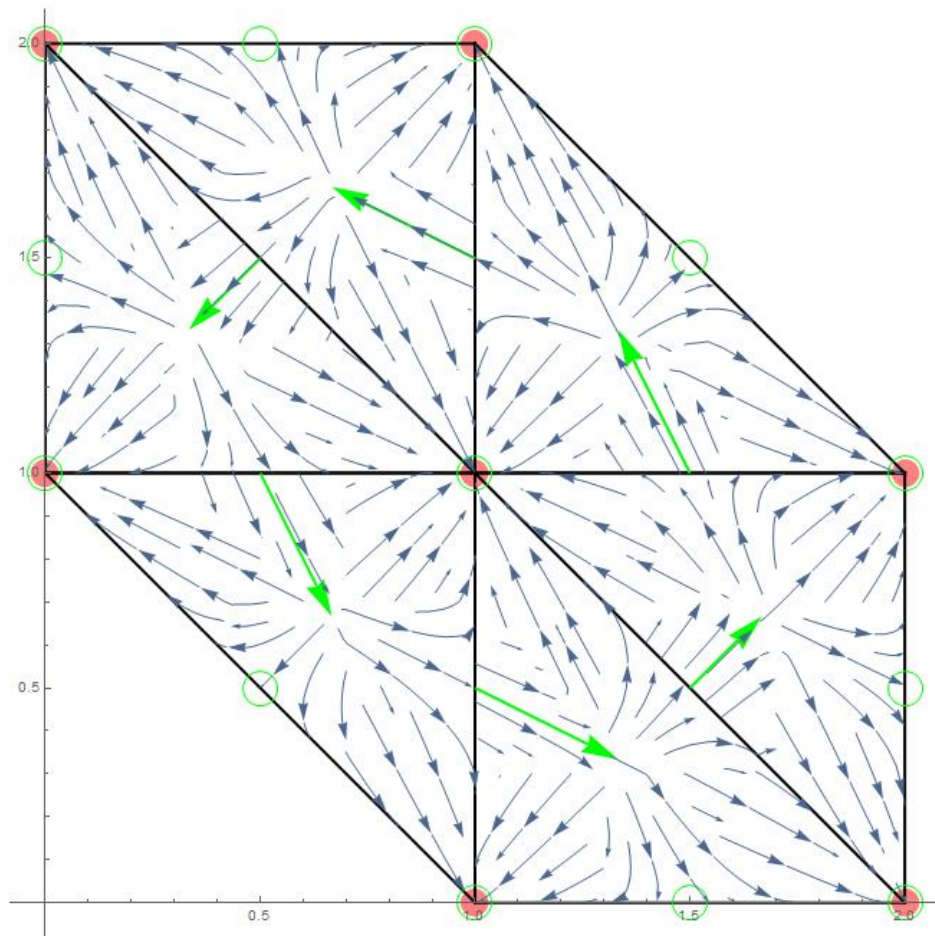
$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}(\gamma_1(t_0)) \\ \frac{d}{dt}(\gamma_2(t_0)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_a(t_{v_1}(\gamma(t_0)), \dots, t_{v_n}(\gamma(t_0))) \\ -f_b(t_{v_1}(\gamma(t_0)), \dots, t_{v_n}(\gamma(t_0))) \end{pmatrix}.$$

Dodatkowo zauważmy, że jeśli przesuniemy wszystkie punkty rozpinające sympleks o ten sam wektor to wzory na zrzutowane pole pozostaną takie same. Możemy zatem rzutować pola wektorowe na kompleksach, które składają się z sympleksów postaci $\langle (i, j), (i + 1, j), (i, j + 1) \rangle$

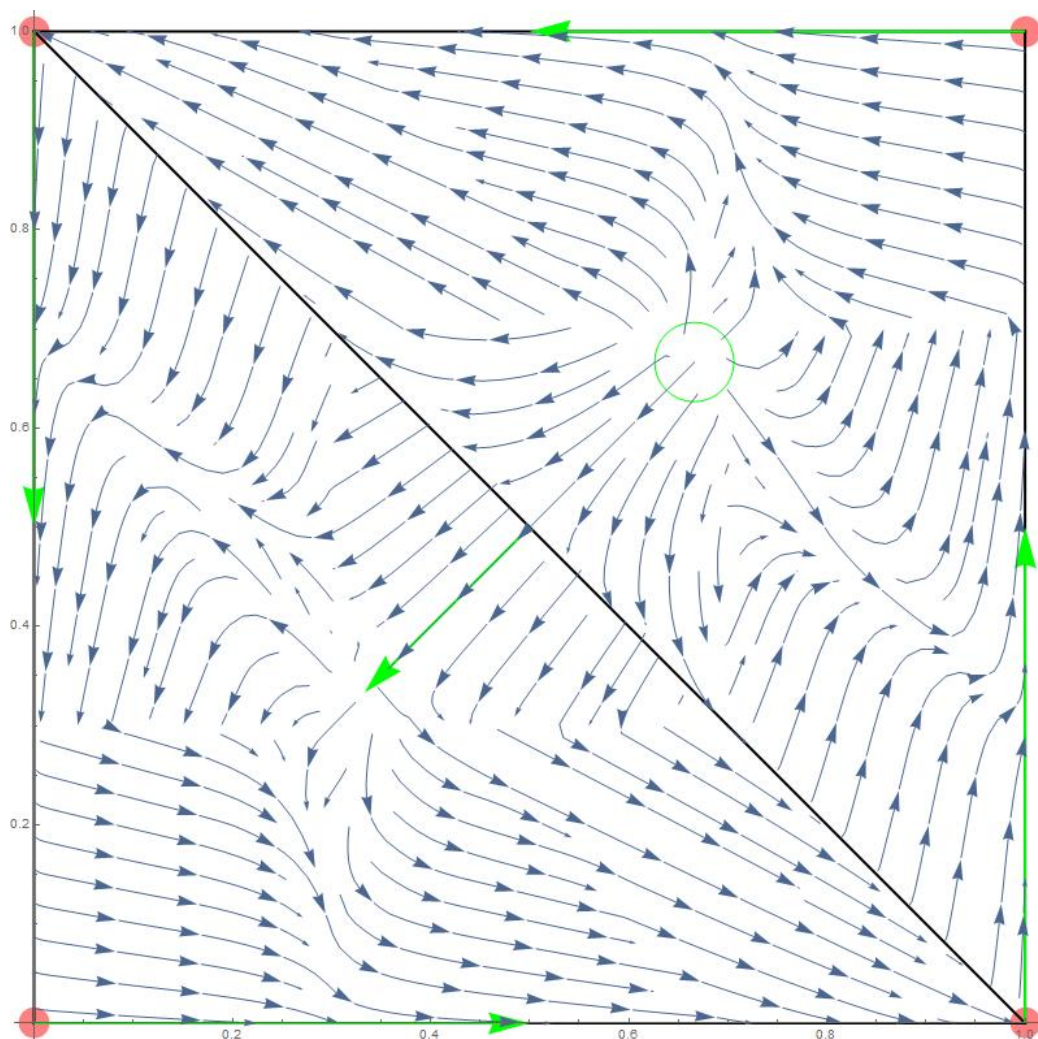
i $\langle (i + 1, j + 1), (i + 1, j), (i, j + 1) \rangle$, gdzie $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ oraz ich ścian.

5.3 Przykłady dyskretnych i pochodzących od nich ciągłych układów dynamicznych

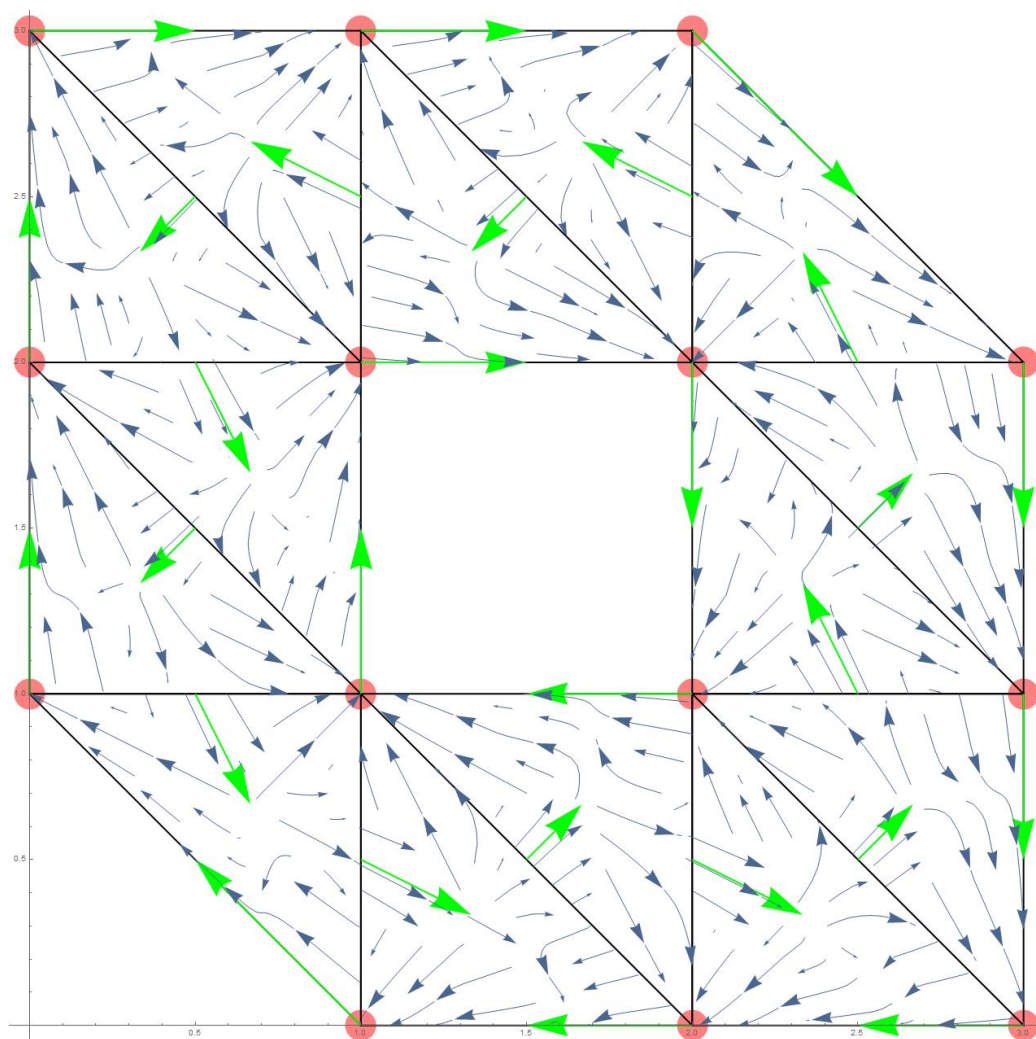
W tej sekcji przedstawione będą rysunki kombinatorycznych pól wektorowych i odpowiadającym im ciągłym potoków rzutowanych na \mathbb{R}^2 . Rysunki te zostały wykonane w Wolfram Mathematica 11.3. Listing napisanego w tym celu kodu znajduje się w rozdziale 6.



Rysunek 9: Rysunek przedstawia dyskretne pole wektorowe oraz pochodzący od niego potok. Wszystkie zero wymiarowe sympleksy czyli punkty stanowią wektory krytyczne. Z rysunku widzimy, że stanowią one ujścia dla narysowanego potoku. Każda krawędź na brzegu bryły jest krawędzią krytyczną. W barycentrycznym środku tych krawędzi znajduje się punkt stały dla potoku, który jest punktem siodłowym. W środku bryły znajduje się trajektoria okresowa.



Rysunek 10: Rysunek przedstawia dyskretne pole wektorowe oraz pochodzący od niego potok. Jedynym krytycznym sympleksem jest górny trójkąt. Z rysunku możemy zobaczyć, że w barycentrycznym środku tego trójkąta znajduje się źródło. Boki kwadratu tworzą trajektorie okresowe. Na tym przykładzie możemy zobaczyć, że otrzymany potok jest semi-potokiem ponieważ do tej trajektorii okresowej (boków kwadratu) możemy dostać się z wnętrza kwadratu.



Rysunek 11: Rysunek przedstawia dyskretne pole wektorowe oraz pochodzący od niego potok. W tym przypadku kombinatoryczne pole wektorowe nie ma żadnych wierzchołków krytycznych.

6 Listing kodu

W programie tablica n na m , której elementami są pary (a, b) , gdzie $a, b \in \{0, 1\}$, będzie reprezentować pewien kompleks symplecjalny \mathcal{S} . Jeśli w tej tablicy na pozycji (i, j) znajduje się para (a, b) , to $a = 1$ wtedy i tylko wtedy gdy $\langle (i-1, j-1), (i-1, j), (i, j-1) \rangle \in \mathcal{S}$. Analogicznie $b = 1$ wtedy i tylko wtedy gdy $\langle (i, j), (i-1, j), (i, j-1) \rangle \in \mathcal{S}$. W poniższym kodzie zmienna 'grid' będzie oznaczała tablice reprezentującą kompleks symplecjalny \mathcal{S} . Dodatkowo zmienne 'n', 'm' będą wymiarami tej tablicy. Wektor będący elementem kombinatorycznego pola wektorowego jest reprezentowany w postaci pary (s_1, s_2) gdzie s_1 jest początkiem a s_2 końcem wektora. W kodzie kombinatoryczne pole wektorowe będzie oznaczane przez zmienną 'vectorField'. Zmienna 'eps' będzie oznaczała parametr ϵ , który określa wielkość ϵ -komórek.

Listing 1: funkcja getFullGrid.

```
1 getFullGrid [n_, m_] := Table[{1, 1}, {i, n}, {j, m}]
```

Powyższa funkcja zwraca tablice n na m , która reprezentuje kompleks symplecjalny. Elementy tej tablicy to pary $(1, 1)$.

Listing 2: funkcja getGridSymplex.

```
1 getGridSymplex[{x_, y_}] :=
2 With[{a = Floor[x], b = Floor[y]},
3 {{a, b}, Boole[Not[(1 - (x - a) >= y - b)] + 1]}]
```

Powyższa funkcja dla pary $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ zwraca sympleks do którego należy (x, y) . Jest on zapisany w postaci $((i, j), a)$ gdzie $i, j \in \mathbb{N}$, $a \in \{1, 2\}$. Jeśli $a = 1$ to ta postać reprezentuje sympleks $\langle (i, j), (i+1, j), (i, j+1) \rangle \in \mathcal{S}$, natomiast gdy $a = 2$ to reprezentuje ona sympleks $\langle (i+1, j+1), (i+1, j), (i, j+1) \rangle \in \mathcal{S}$.

Listing 3: funkcja isInGrid.

```
1 isInGrid [grid_, n_, m_, {x_, y_}] :=
2 Module[{p, i, j, q},
3   If[0 <= x <= n && 0 <= y <= m,
4     If[(
5       p = getGridSymplex[{x, y}];
6       i = p[[1, 1]];
7       j = p[[1, 2]];
8       q = p[[2]];
9       grid[[i + 1, j + 1, q]] == 1), 1, 0],
10    0]
11 ]
```

Funkcja 'isInGrid' sprawdza czy $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ leży w bryle kompleksu \mathcal{S} .

Listing 4: funkcja getBarycetricCoordinates.

```

1 getBarycetricCoordinates [p_, {v_, 1}] :=
2   Module[{x = p - v, a, b},
3     (a = x[[1]]; b = x[[2]]; {1 - a - b, a, b})]
4 getBarycetricCoordinates [p_, {v_, 2}] :=
5   Module[{x = p - v - {1, 1}, a, b},
6     (a = x[[1]]; b = x[[2]]; {1 + a + b, -a, -b})]

```

Powyższa funkcja zwraca współrzędne barycentryczne punktu $p \in \mathbb{R}^2$ względem sympleksu w postaci $((i, j), a)$.

Listing 5: 5

```

1 getSimplexVertexForm[{{a_, b_}, 1}] := {{a, b}, {a + 1, b}, {a, b + 1}}
2 getSimplexVertexForm[{{a_, b_}, 2}] := {{a + 1, b + 1}, {a + 1, b}, {a, b + 1}}

```

Powyższa funkcja zamienia sympleks w postaci $((i, j), a)$ na reprezentację w postaci zbioru wierzchołków tego sympleksu.

Listing 6: funkcja turnSimplexToGridForm.

```

1 turnSimplexToGridForm[{v1_, v2_, v3_}] := getGridSimplex[(v1 + v2 + v3)*(1/3)]

```

Powyższa funkcja zamienia sympleks w postaci zbioru wierzchołków na sympleks w postaci $((i, j), a)$.

Listing 7: funkcja getAllSimplexes.

```

1 getAllSimplexes[grid_, n_, m_] :=
2   Module[{f, ver, edges},
3     (ver[{{x1_, x2_}, {y1_, y2_}, {z1_, z2_}}] :=
4       {{{x1, x2}}, {{y1, y2}}, {{z1, z2}}};
5     edges[{{x1_, x2_}, {y1_, y2_}, {z1_, z2_}}] :=
6       {{{x1, x2}, {y1, y2}}, {{y1, y2}, {z1, z2}}, {{x1, x2}, {z1, z2}}};
7     f[{{i_, j_}, {0, 0}}] := {};
8     f[{{i_, j_}, {1, 0}}] :=
9       Union[
10        {{{i - 1, j - 1}, {i, j - 1}, {i - 1, j}}},
11        ver[{{i - 1, j - 1}, {i, j - 1}, {i - 1, j}}],
12        edges[{{i - 1, j - 1}, {i, j - 1}, {i - 1, j}}]];
13     f[{{i_, j_}, {0, 1}}] :=
14       Union[{{{i, j}, {i, j - 1}, {i - 1, j}}},
15        ver[{{i, j}, {i, j - 1}, {i - 1, j}}],
16        edges[{{i, j}, {i, j - 1}, {i - 1, j}}]];
17     f[{{i_, j_}, {1, 1}}] := Union[f[{{i, j}, {0, 1}}, f[{{i, j}, {1, 0}}]];
18     DeleteDuplicates[
19       Flatten[Map[f[#, grid[[#][1]], #][[2]]], &,
20       Flatten[Table[{i, j}, {i, n}, {j, m}], 1], 1]
21   )]

```

Funkcja 'getAllSimplexes' zwraca wszystkie sympleksy z kompleksu \mathcal{S} reprezentowane przez listy ich wierzchołków.

Listing 8: funkcja getAll2Dsimplexes.

```

1 getAll2Dsimplexes[grid_, n_, m_] :=
2   Select[getAllSimplexes[grid, n, m], Length[#] == 3 &]

```

Powyższa funkcja zwraca wszystkie 2-wymiarowe sympleksy z kompleksu \mathcal{S} reprezentowane przez listy ich wierzchołków.

Listing 9: funkcja getFullDiscreateVectorField.

```

1 getFullDiscreateVectorField [grid_, n_, m_] :=
2   Map[{#, #} &, getAllSimplexes[grid, n, m]]
3 getFullDiscreateVectorField [vectors_, grid_, n_, m_] :=
4   Module[
5     {s = getAllSimplexes[grid, n, m],
6     w = DeleteDuplicates[Flatten[vectors, 1]],
7     rest },
8     (rest = Complement[s, w,
9       SameTest -> (SubsetQ[#1, #2] && SubsetQ[#2, #1] &)]);
10    Union[vectors, Map[{#, #} &, rest]]
11  )
12 ]

```

W powyższej funkcji argument 'vectors' zawiera zbiór kombinatorycznych wektorów. Funkcja ta zwraca kombinatoryczne pole wektorowe, które zawiera wektory ze zbioru 'vectors' oraz wektory krytyczne złożone z sympleksów, które nie zawierają się w wektorach ze zbioru 'vectors'.

Listing 10: funkcja getCommonVectors.

```

1 getCommonVectors[vectorField_, simplex_] := Module[{f},
2   (
3     f[{head_, tail_}] := SubsetQ[simplex, head];
4     Select[vectorField, f])
5 ]

```

Powyższa funkcja zwraca wektory z 'vectorField', który zawiera sympleks 'simplex' reprezentowany przez listę jego wierzchołków.

Listing 11: funkcja fieldForDiscreateVect.

```

1 fieldForDiscreateVector [x_, w_, eps_, d_] :=
2   Module[{h, g, theta, dzeta, eta, tailCom, headCom, f, f1, tail, head},
3     (
4       tail = w[[1]];
5       head = w[[2]];
6       tailCom = Complement[{1, 2, 3}, tail];
7       headCom = Complement[{1, 2, 3}, head];
8       g[s_] := CubeRoot[eps^2*s];
9       eta[s_, p_] :=
10        If[0 <= s <= eps/(8*d) && Total[p[[headCom]]^2] == 0,
11          1, ((8*d)/eps)*Abs[s]];
12       h[s_] := 1 /; (s <= eps/2) || (eps*(3/2) <= s);
13       h[s_] := 1 + (eps + 2)/2 - ((eps + 2)/eps)*s /; eps*(1/2) <= s <= eps;
14       h[s_] := -2 - (3/2)*eps + ((eps + 2)/eps)*s;
15       dzeta[s_, p_] := eta[s, p] /; s <= eps/(8*d);
16       dzeta[s_, p_] := h[s];
17       theta[p_] := Min[Union[{eps}, p[[tail]] - eps]];
18       f[verNum_, p_] := -1*g[p[[verNum]]] /; MemberQ[headCom, verNum];
19       f[verNum_, p_] := dzeta[p[[verNum]], p] + theta[p] - Total[p[[headCom]]];
20       f1[verNum_, p_] :=
21        If[MemberQ[tail, verNum],
22          p[[verNum]] + (1/Length[tail])*(Total[p[[tailCom]]] -
23            Total[Map[f[#, p] &, tailCom]] - 1), f[verNum, p]];
24       {f1[1, x], f1[2, x], f1[3, x]}
25     )
26
27 ]

```

W powyższej funkcji ' x ' jest trójką $(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$, ' w ' jest dyskretnym wektorem, który składa się z sympleksów, które to są podzbiorami zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$. Zmienna ' d ' jest dodatkowym parametrem, który oznacza liczbę wierzchołków w kompleksie \mathcal{S} . Ponieważ jednak ' x ' jest 3-wymiarowy to zwykle przyjmujemy ' d ' = 3. Funkcja ta zwraca wektor $f^w(x)$, gdzie f^w jest funkcją zdefiniowaną w rozdziale 5.1.

Listing 12: funkcja isInVector.

```

1 isInVector [x_, {tail_, head_}, eps_] :=
2   AllTrue[x[[tail]], (# >= eps) &] &&
3   AllTrue[x[[Complement[{1, 2, 3}, head]]], (# <= eps) &]

```

Powyższa funkcja sprawdza czy ' x ' należy do domknięcia ϵ -komórki jakiegoś elementu dyskretnego wektora '{tail, head}'.

Listing 13: funkcja GetVectorFieldForSymplex.

```

1 GetVectorFieldForSymplex[x_, {w_}, eps_, d_] :=
2   fieldForDiscreateVector [x, w, eps, d]
3 GetVectorFieldForSymplex[x_, l_, eps_, d_] :=
4   With[{w = First[l], r = Rest[l]},
5     If[isInVector [x, w, eps], fieldForDiscreateVector [x, w, eps, d],
6       GetVectorFieldForSymplex[x, r, eps, d]]]

```

W powyższej funkcji ' x ' jest trójką $(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$ a ' l ' jest listą dyskretnych wektorów, które składają się z sympleksów, które to są podzbiorami zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$. Funkcja ta wybiera wektor w z listy ' l ' taki, że ' x ' należy do domknięcia ϵ -komórki jakiegoś sympleksu należącego do wektora w i zwraca wartość $f^w(x)$.

Listing 14: funkcja getVectorsDictionary.

```

1 getVectorsDictionary [vectorField_, grid_, n_, m_] :=
2   Module[{f, g},
3     (
4       g[x_] := Module[{h}, 1];
5       f[{vectors_, {origin_, 1}}] := Module[{h},
6         (h[{0, 0}] = 1;
7          h[{1, 0}] = 2;
8          h[{0, 1}] = 3;
9          h[{1, 1}] = 4;
10        Map[h[# - origin] &, vectors, {3}]
11      );
12      f[{vectors_, {origin_, 2}}] := Module[{h},
13        (h[{1, 1}] = 1;
14         h[{0, 1}] = 2;
15         h[{1, 0}] = 3;
16         h[{0, 0}] = 4;
17        Map[h[# - origin] &, vectors, {3}]
18      );
19      Association [
20        Map[turnSymplexToGridForm[#] ->
21          f[{getCommonVectors[vectorField, #] ,
22            turnSymplexToGridForm[#]}] &, getAll2Dscomplexes[grid, n, m]]]
23    )
24  ]

```

Powyższa funkcja zwraca słownik, którego kluczami są 2-wymiarowe sympleksy w postaci $((i,j),a)$, które należą do kompleksu \mathcal{S} . Wartością klucza jest lista wektorów z kombinatorycznego pola wektorowego, które zawierają jakąś ścianę tego klucza. Wierzchołki sympleksów należących do tych wektorów zostają przekształcone do zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ zgodnie z funkcją ' h '.

Listing 15: funkcja GetVectorField.

```

1 GetVectorField[grid_, vectorField_, eps_, d_] :=
2 Module[{n = Length[grid], m = Length[grid[[1]]], vectorsList , vectorsDictionary },
3   (vectorsList = getFullDiscreateVectorField [ vectorField , grid , n , m];
4     vectorsDictionary = getVectorsDictionary[ vectorsList , grid , n , m];
5     Function[{x},
6       Module[{gridSymplex, type, vectors},
7         (gridSymplex = getGridSymplex[x];
8           type = gridSymplex[[2]];
9           vectors = Lookup[vectorsDictionary, Key[gridSymplex], {}];
10          If[vectors != {}
11            , If[type == 1,
12              GetVectorFieldForSymplex[
13                getBarycetricCoordinates [x, gridSymplex], vectors , eps,
14                d][[{2, 3}]]
15            ,
16              (-1)*GetVectorFieldForSymplex[
17                getBarycetricCoordinates [x, gridSymplex], vectors , eps,
18                d][[{2, 3}]]
19            ]
20            , {0., 0.}
21          ]
22        )
23      ]
24    ]
25  )
26 ]

```

Powyższa funkcja zwraca funkcje, która oblicza pole wektorowe dla $x \in \mathbb{R}^2$ pochodzące od zadanego kombinatorycznego pola wektorowego. Wykorzystuje ona metodę rzutowań pól wektorowych danych w współrzędnych barycentrycznych przedstawioną w sekcji 5.2.

Listing 16: pomocnicze funkcje do wizualizacji kompleksów symplecjajnych.

```

1 getPoints[S_] := DeleteDuplicates[Flatten[S, 1]]
2 getEdges[S_] := Module[{f},
3   (f[{a_, b_, c_}] := {{a, b} , {a, c}, {c, b}};
4     DeleteDuplicates[Flatten[Map[f[#] &, S], 1]]
5   )
6
7 ]
8 getBarycentricCentre[s_] := Total[s]/Length[s]
9 show2DSymplicialComplex[S_] := Module[{points, edges},
10  points = Map[Point[#] &, getPoints[S]];
11  edges = Map[(Line[#]) &, getEdges[S]];
12  Show[{
13    Graphics[{PointSize[0.03], Pink, points}, Axes -> True],
14    Graphics[{Thick, edges}, Axes -> True]
15  }]

```

Listing 17: funkcja show2DVectorField.

```

1 show2DVectorField[V_] := Module[{showVector},
2 (
3   showVector[{tail_, head_}] :=
4     If[tail != head,
5       Graphics[
6         {Green, Thick, Arrowheads[0.04],
7           Arrow[{getBarycentricCentre[tail],
8                 getBarycentricCentre[head]}]}, Axes -> True],
9       Graphics[{Green, Circle[getBarycentricCentre[tail], 0.04]},
10      Axes -> True]
11 ];
12 Show[Map[showVector[#] &, V]]
13 )
14 ]

```

Powyższa funkcja rysuje kombinatoryczne wektory ze zbioru 'V'.

Listing 18: funkcja drawFullPlot.

```

1 drawFullPlot[grid_, vectorField_, eps_] := Module[
2   {n = Length[grid],
3     m = Length[grid[[1]]],
4     fullVectorField,
5     P1,P2,P3,
6     f},
7   ( fullVectorField = getFullDiscreateVectorField [ vectorField , grid , n, m];
8     P1 = show2DSymplecialComplex[getAll2DSymplexes[grid, n, m]];
9     P2 = show2DVectorField[ fullVectorField ];
10    f = GetVectorField[grid, vectorField, eps, 3];
11    P3 = StreamPlot[f[{x, y}], {x, 0, n}, {y, 0, m},
12      StreamPoints -> Fine,
13      RegionFunction ->
14      Function[{x, y, vx, vy, n}, isInGrid [grid, n, m, {x, y}]]];
15    Show[P1, P2, P3]
16  )]
17 drawFullPlot[grid_, vectorField_] := drawFullPlot[grid, vectorField, 9/30]

```

Powyższa funkcja rysuje kombinatoryczne pole wektorowe i pochodzący od niego ciągły układ dynamiczny za pomocą funkcji 'StreamPlot'.

Listing 19: funkcja drawCellDecoposition.

```

1 drawCellDecoposition[simplex_, eps_, n_, m_] := Module[{
2   s = turnSymplextToGridForm[simplex], reg},
3   (reg = Function[{x, y},
4     AllTrue[ getBarycetricCoordinates [{x, y}, s], (0 <= # <= 1) &]];
5   Show[
6     {
7       ContourPlot[
8         getBarycetricCoordinates [{x, y}, s][[1]] == eps, {x, 0, n}, {y,
9         0, m}, RegionFunction -> reg, ColorFunction -> "NeonColors",
10        ContourShading -> Red],
11      ContourPlot[
12        getBarycetricCoordinates [{x, y}, s][[2]] == eps, {x, 0, n}, {y,
13        0, m}, RegionFunction -> reg, ColorFunction -> "NeonColors",
14        ContourShading -> Red],
15      ContourPlot[
16        getBarycetricCoordinates [{x, y}, s][[3]] == eps, {x, 0, n}, {y,
17        0, m}, RegionFunction -> reg, ColorFunction -> "NeonColors",
18        ContourShading -> Red]]]]

```

Powyższa funkcja rysuje brzegi ϵ -komórek znajdujące się we wnętrzu 2-wymiarowego sympleksu 'simplex', który jest reprezentowany przez listę jego wierzchołków.

Listing 20: funkcja drawFullPlotWithCels.

```

1 drawFullPlotWithCels[grid_, vectorField_, eps_] := Module[
2   {n = Length[grid], m = Length[grid][[1]]},
3   fullVectorField ,
4   P1,P2,P3,P4,
5   f},
6   ( fullVectorField = getFullDiscreateVectorField [ vectorField , grid , n, m];
7   P1 = show2DSymplicialComplex[getAll2DSymplexes[grid, n, m]];
8   P2 = show2DVectorField[ fullVectorField ];
9   f = GetVectorField[grid , vectorField , eps, 3];
10  P3 = StreamPlot[f[{x, y}], {x, 0, n}, {y, 0, m},
11    StreamPoints -> Fine,
12    RegionFunction ->
13    Function[{x, y, vx, vy, n}, isInGrid [grid , n, m, {x, y }]]];
14  P4 = Show[
15    Map[drawCellDecoposition[#, eps, n, m] &,
16    getAll2DSymplexes[grid , n, m ]]];
17  Show[P1, P2, P3, P4]
18  )]

```

Powyższa funkcja rysuje kombinatoryczne pole wektorowe i pochodzący od niego ciągły układ dynamiczny za pomocą funkcji 'StreamPlot'. Rysunek pokazuje także brzegi ϵ -komórek wewnątrz bryły kompleksu \mathcal{S} .

Listing 21: Kod rysujący rysunek 9.

```
1 gridb = getFullGrid [2, 2];
2 gridb [[1, 1]] = {0, 1};
3 gridb [[2, 2]] = {1, 0};
4 v1b = {{{{1, 0}, {1, 1}}, {{1, 0}, {1, 1}, {2, 0}}}};
5 v2b = {{{{1, 1}, {2, 0}}, {{1, 1}, {2, 0}, {2, 1}}}};
6 v3b = {{{{1, 1}, {2, 1}}, {{1, 1}, {2, 1}, {1, 2}}}};
7 v4b = {{{{1, 1}, {1, 2}}, {{1, 1}, {1, 2}, {0, 2}}}};
8 v5b = {{{{1, 1}, {0, 2}}, {{1, 1}, {0, 2}, {0, 1}}}};
9 v6b = {{{{1, 1}, {0, 1}}, {{1, 1}, {0, 1}, {1, 0}}}};
10 Vb = {v1b, v2b, v3b, v4b, v5b, v6b};
11 drawFullPlot [gridb, Vb]
```

7 Bibliografia

- [1] R. Duda, *Wprowadzenie do topologii* część I i II, PWN, Warszawa, 1986.
- [2] M. Mrozek, *Conley-Morse-Forman theory for combinatorial multivector fields on Lefschetz complexes*, Foundations of Computational Mathematics 17 (2017), 1585–1633. DOI: 10.1007/s10208-016-9330-z.
- [3] Tomasz Kaczynski, Marian Mrozek, Thomas Wanner, *Towards a Formal Tie Between Combinatorial and Classical Vector Field Dynamics*, DOI: 10.3934/jcd.2016002
- [4] Tomasz Kaczynski, Marian Mrozek, Thomas Wanner, *Creating Semi-flows on Simplicial Complexes from Combinatorial Vector Fields* (Praca w przygotowaniu)
- [5] Konstantin Mischaikow, *The Conley index theory: A brief introduction*, Banach Center Publications 47 (1999), 9-19 DOI: 10.4064/-47-1-9-19