Информатика

Учебный год 2021/2022.

Опрос в начале лекции

- ФИО.
- Группа.
- Электронный адрес (почта).
- Цель поступления на вашу образовательную программу (специальность).
- Ваши ожидания от курса «Информатика».
- Какие языки программирования вы изучали в школе?
- Какие языки программирования вы изучали самостоятельно?
- Изучали ли вы ранее систему компьютерной вёрстки TeX и системы счисления Бергмана, Цекендорфа и др.?

Административная информация

Лекции (раз в две недели):

- Посещать обязательно (почти).
- При себе иметь ручку.

Лабораторные занятия (раз в две недели):

- Выполняются дома, защищаются в университете.*
- Выполняются строго последовательно.
- При несвоевременной сдаче – штраф.

Контроль усвоения знаний:

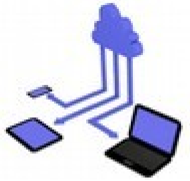
- Лекционные тестирования.
- 2 рубежных тестирования в ЦДО.
- Экзамен.
- Поощрение неординарных решений.
- Бонусы за обнаруженные ошибки.

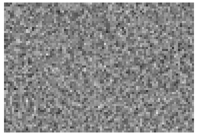
Балльно-рейтинговая система (БаРС)

Диапазон баллов	Оценка
[0; 60)	2F
[60;67]	3E
(67;74]	3D
(74;83]	4C
(83;90]	4B
(90;100]	5A

Важно: личностные качества имеют вес в оценке!

Краткое содержание курса





- Основы теории информации
- Представление чисел в ЭВМ
- Основы языка Python для обработки данных
- Основы форматов и языков разметки документов
- Работа с офисными пакетами
- Работа с системами вёрстки текста
- Программное обеспéчение профессионального программиста

Требования к слушателям: освоенный школьный курс информатики.

Дополнительный материал

Онлайн-курс «Информатика для втузов»

https://openedu.ru/course/ITMOUniversity/COMTEC/

Черновик методического пособия «Информатика»

https://vk.com/doc-31201840_566998093

Методическое пособие с лабраторными работами

https://books.ifmo.ru/file/pdf/2464.pdf

Лабораторные работы

Лабораторная работа №1 (Перевод чисел между различными системами счисления).

Лабораторная работа №2 (Помехоустойчивое кодирование).

Лабораторная работа №3 (Регулярные выражения - Python).

Лабораторная работа №4 (Разработка парсера — Python).

Лабораторная работа №5 (Работа с электронными таблицами и машинная арифметика).

Лабораторная работа №6 (Вёрстка документов в системе TeX. Подготовка шаблонов для формирования отчётов, курсовых и дипломных работ).

Список IT-ориентированных новостных ресурсов

3dnews.ru, 4pda.ru, android.com, betanews.com, blogs.intel.com, cam.ac.uk, cnews.ru, computerworld.com, dailytechinfo.org, datbaze.ru, discovery.com, extremetech.com, gizmodo.com, habrahabr.ru, hi-news.ru, hitech.vesti.ru, iksmedia.ru, it-news-world.ru, it-top.ru, it-world.ru, it.tut.by, itc.ua, itnews.com.ua, itupdate.ru, itworld.com, mobiledevice.ru, news-it.net, news.softpedia.com, novostiit.net, osp.ru, overclockers.ru, research.ibm.com, sciencedaily.com, sciencemag.org, singularityhub.com, thehackernews.com, theverge.com, thg.ru, usenix.org, wired.co.uk …

Определение термина «информатика»

Информатика – дисциплина, изучающая свойства и структуру информации, закономерности ее создания, преобразования, накопления, передачи и использования.

Англ: informatics = information technology + computer science + information theory

Важные даты

- 1956 – появление термина «информатика» (нем. Informatik, Штейнбух)
- 1968 – первое упоминание в СССР (информология, Харкевич)
- 197X – информатика стала отдельной наукой
- 4 декабря – день российской информатики

Терминология: информация и данные

Международный стандарт ISO/IEC 2382:2015
«Information technology – Vocabulary» (вольный пересказ):

> **Информация** – знания относительно фактов, событий, вещей, идей и понятий.
>
> **Данные** – форма представления информации в виде, пригодном для передачи или обработки.

- Что есть предмет информатики: информация или данные?
- Как измерить информацию? Как измерить данные?
  Пример: «Байкал — самое глубокое озеро Земли».

Терминология: информация и данные (2)

Измерение количества информации

Количество информации ≡ информационная энтропия – это численная мера непредсказуемости информации. Количество информации в некотором объекте определяется непредсказуемостью состояния, в котором находится этот объект.

Пусть i (s) — функция для измерения количеств информации в объекте s, состоящем из n независимых частей s_k, где k изменяется от 1 до n. Тогда **свойства меры количества информации i(s)** таковы:

- Неотрицательность: $i(s) \geq 0$.
- Принцип предопределённости: если об объекте уже все известно, то $i(s) = 0$.
- Аддитивность: $i(s) = \sum i(s_k)$ по всем k.
- Монотонность: i(s) монотонна при монотонном изменении вероятностей.

Что такое вероятность события

- **Классическое определение** (существует только *n* равновозможных исходов эксперимента, из них *m* исходов приведут к событию A)

$$p(A)=m/n$$

- **Статистическое определение** (в результате проведённых *n* экспериментов события A возникло *m* раз)

$$p(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n}$$

- **Свойства вероятности**

$$0\leq p(A)\leq 1,$$

сумма вероятностей всех возможных несовместных событий равна 1

Мера количества информации по Хартли

Ральф Хартли (1880--1970)

Система S может находиться в одном из N равновероятных состояний. Вероятность каждого из состояний $p = 1/N$. Передадим сообщение о выпавшем состоянии S, используя двоичное сообщение длины d:

$$2^d \geq N \quad \rightarrow \quad d \geq \log_2 N$$

Значит, для однозначного описания системы требуется $\log_2 N$ бит. По определению Хартли, количество информации в системе S равно

$$i_\text{Н}(s) = \log_x N = -\log_x p.$$

Единицы измерения количества информации:

$i_\text{Н}$ = (lb N бит = lb N Шн = lb N Sh) = $\log_3 N$ трит = (lg N харт = lg N Hart = lg N дит) = ln N нат

Какова этимология названий единиц измерения? Сколько дит содержится в 33 битах?

Ответ 1: (bit → binary digit), (dit → decimal digit), (Шн → Шеннон), (харт → Хартли) и т. д.

Ответ 2: т. к. 33 бит = $\log_2 N$, то $\log_{10} N = x$ дит, отсюда найдём x через N: $x = \log_{10} 2^{33} \approx 9{,}9$ дит.

Пример применения меры Хартли на практике

Пример 1. Ведущий загадывает число от 1 до 64. Какое количество вопросов типа «да-нет» понадобится, чтобы гарантировано угадать число?

- <u>Первый</u> вопрос: «Загаданное число меньше 32?». Ответ: «Да».
- <u>Второй</u> вопрос: «Загаданное число меньше 16?». Ответ: «Нет».
- …
- <u>Шестой</u> вопрос (в худшем случае) точно приведёт к верному ответу.
- Значит, в соответствии с мерой Хартли в загадке ведущего содержится ровно $\log_2 64 = 6$ бит непредсказуемости (т. е. информации).

Пример 2. Ведущий держит за спиной ферзя и собирается поставить его на произвольную клетку доски. Насколько непредсказуемо его решение?

- Всего на доске 8х8 клеток, а цвет ферзя может быть белым или чёрным, т. е. всего возможно 8х8х2 = 128 равновероятных состояний.
- Значит, количество информации по Хартли равно $\log_2 128 = 7$ бит.

Анализ свойств меры Хартли

Экспериментатор одновременно подбрасывает монету (М) и кидает игральную кость (К). Какое количество информации содержится в эксперименте (Э)?

Аддитивность:

i(Э) = i(М) + i(К) => i(12 исходов) = i (2 исхода) + i (6 исходов): $\log_x 12 = \log_x 2 + \log_x 6$

Неотрицательность:

Функция $\log_x N$ неотрицательно при любом $x > 1$ и $N \geq 1$.

Монотонность:

С увеличением p(М) или p(К) функция i(Э) монотонно возрастает.

Принцип предопределённости:

При наличии всегда только одного исхода (монета и кость с магнитом) количество информации равно нулю: $\log_x 1 + \log_x 1 = 0$.

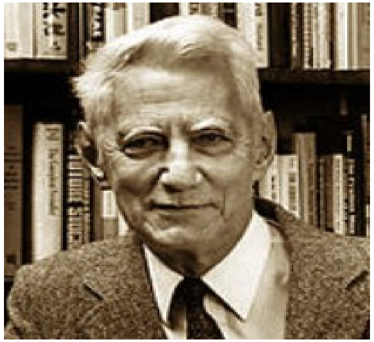
Мера количества информации по Шеннону

Мера Хартли подходит лишь для систем с равновероятными состояниями. Если состояния системы S не равновероятны, используют меру Шеннона:

$$i(S) = -\sum_{i=1}^{N} p_i \cdot \log_2 p_i ,$$

где N – число состояний системы,

p_i – вероятность того, что система S находится в состоянии i (сумма всех p_i равна 1).



Клод Шеннон
(1916--2001)

Формула Хартли является частным случаем формулы Шеннона!

Пример 1. Количество информации в акте подбрасывания обычной монеты по формуле Хартли равно $\log_2 2 = 1$ бит. По формуле Шеннона получим то же: $i_{s1} = -0{,}5 * \log_2 0{,}5 - 0{,}5 * \log_2 0{,}5 = 1$ бит.

Пример 2. При подбрасывании монеты со смещённым центром тяжести количество непредсказуемости становится меньше: $i_{s2} = -0{,}75 * \log_2 0{,}75 - 0{,}25 * \log_2 0{,}25 \approx 0{,}8$ бит.

Пример использования меры Шеннона

Шулер наугад вытаскивает одну карту из стопки, содержащей 9 известных ему карт: 3 джокера, 3 туза, 1 король, 1 дама и 1 валет. Какое количество информации для шулера содержится в этом событии s?

Вероятность вытащить $\left\{\begin{matrix}\text{джокера}\\ \text{туза}\\ \text{короля}\\ \text{даму}\\ \text{валета}\end{matrix}\right\}$ равна $\left\{\begin{matrix}3/9 = 1/3\\ 3/9 = 1/3\\ 1/9\\ 1/9\\ 1/9\end{matrix}\right.$

Количество информации, выраженное в тритах, равно:

$$i(s) = -\left(\frac{1}{3}\cdot\log_3\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\log_3\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\cdot\log_3\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\cdot\log_3\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\cdot\log_3\frac{1}{9}\right) =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = 1\frac{1}{3} \approx \log_3 5 \quad vs \quad \log_3 14$$

Нестрогий вывод формулы Шеннона

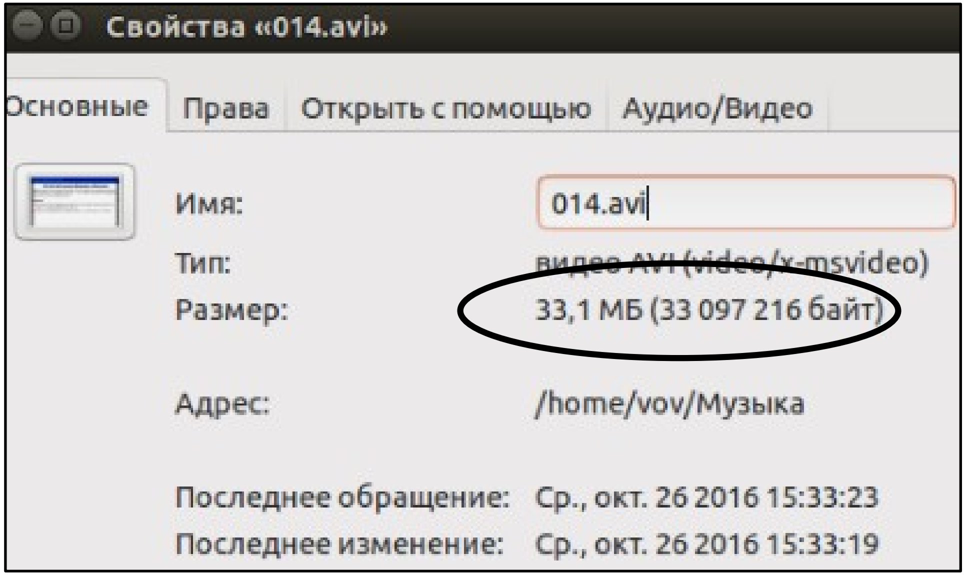
Задача. Монета имеет смещённый центр тяжести. Вероятность выпадения «орла» – 0,25, вероятность выпадения «решки» – 0,75. Какое количество информации содержится в одном подбрасывании?

Решение

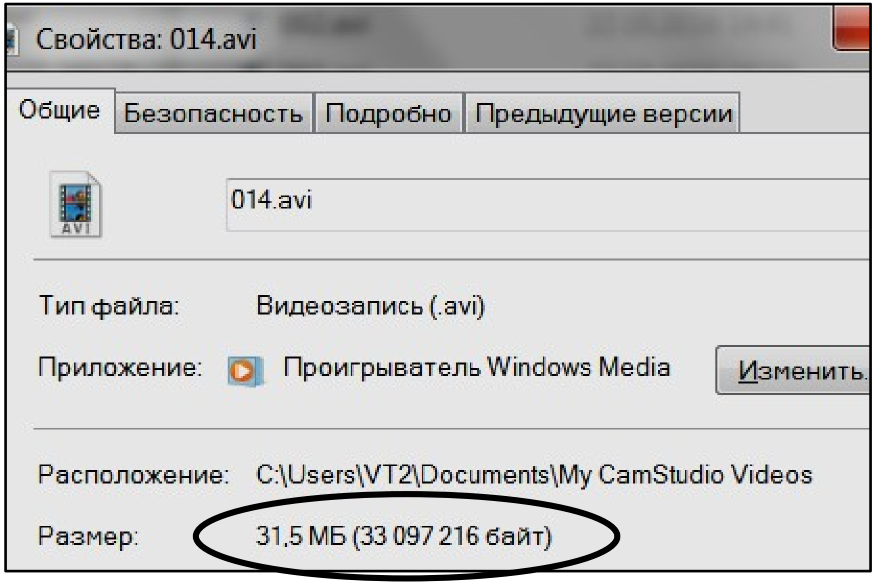
- Пусть монета была подброшена N раз ($N \to \infty$), из которых «решка» выпала M раз, «орёл» — K раз (очевидно, что $N = M + K$).
- Количество информации в N подбрасываниях: $i_N = M * i$(«решка») + $K * i$(«орёл»).
- Тогда среднее количество информации в одном подбрасывании:
  $i_1 = i_N/N = (M/N)*i$(«решка»)$+(K/N)*i$(«орёл») = p(«решка»)*i(«решка»)+p(«орёл»)*i(«орёл»).
- Подставив формулу Шеннона для i, окончательно получим:
  i_1 = -p(«решка»)*$\log_x$p(«решка») - p(«орёл»)*$\log_x$p(«орёл») ≈ 0,8 бит.

Приставки для единиц измерения количества информации/данных: проблема

Linux Ubuntu 14



Microsoft Windows 7



33 097 216 байт – это 33,1 МБ или 31,5 МБ?

Приставки для единиц измерения количества информации/данных: решение

1. **IEEE 1541-2002** – Институт инженеров по электротехнике и радиоэлектронике.
2. **ISO/IEC 80000-13:2008** – Международная организация по стандартизации.
3. **ГОСТ IEC 60027-2-2015** – Международная электротехническая комиссия.

Приставки единиц СИ	Новые двоичные префиксы	Δ,%
килобайт (kB) = 10^3 байт	кибибайт (KiB, КиБ) = 2^{10} байт	2
мегабайт (MB) = 10^6 байт	мебибайт (MiB, МиБ) = 2^{20} байт	5
гигабайт (GB) = 10^9 байт	гибибайт (GiB, ГиБ) = 2^{30} байт	7
терабайт (TB) = 10^{12} байт	тебибайт (TiB, ТиБ) = 2^{40} байт	10

Краткое обозначение битов и байтов: b = bit = бит, B = Б = байт

1024 B = 1024 Б = 8192 b = 8192 бит = 8 Кибит = 1 КиБ = 1 KiB

Приставки для единиц измерения количества информации/данных: детали

Полное произношение названий приставок

3 КиБ = «три кибибайта» = «три килобинарных (kilobinary) байта».
7 Гибит = «семь гибибитов» = «семь гигабинарных (gigabinary) битов».

Сложившаяся практика использования приставок

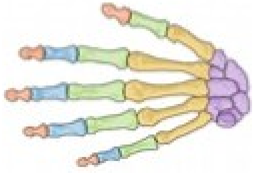
Объем памяти (HDD, RAM, Cache): 512 KiB = 524 288 bytes.
Скорость передачи данных: 512 kbps = 512 000 bps = 512 000 бит/с.

Типовая задача

Сколько мегабит содержится в двух гигабинарных байтах?

$$2\,\text{ГиБ} \;=\; 2\cdot 2^{30}\,\text{Б} \;=\; 16\cdot 2^{30}\,\text{бит} \;=\; \frac{16\cdot 2^{30}}{1000000}\,\text{Мбит} \;\approx\; 17180\,\text{Мбит (округл.)}$$

Системы счисления: историческая справка

Основание	Кто и как использовал	
нет	Австралийские племена	3=два-один, 4=два-два, 5=два-два-один, 6=два-два-два, 7=много
5	Африканские племена	
12	Тибетцы, нигерийцы	
20	Индейцы Майя, кельты	
60	Вавилоняне, шумеры	
10	5 век (Индия) 16 век (Европа) 17 век (Россия)	

Позиционные системы счисления (СС)

X = 2017,042 = 2*1000 + 0*100 + 1*10 + 7*1 + 4/100 + 2/1000

$$X_{(q)} = x_{n-1}x_{n-2}x_1x_0,x_{-1}x_{-2}x_{-m}$$

$X_{(q)}$ — запись числа в системе счисления с основанием q;

x_i — натуральные числа меньше q, т.е. цифры;

n — число разрядов целой части;

m — число разрядов дробной части.

$$X_{(q)}=x_{n-1}q^{n-1} + x_{n-2}q^{n-2} + \ldots + x_1q^1 + x_0q^0 + x_{-1}q^{-1} + x_{-2}q^{-2} + \ldots + x_{-m}q^{-m}$$

$$X_{(q)}=\sum_{i=-m}^{n-1} x_i \cdot q^i$$

ПРИМЕРЫ: $123_{(4)} = 1*4^2 + 2*4 + 3$ (если основание СС не указано => 10-ричная СС)

$456,78_{(10)} = 4*10^2 + 5*10^1 + 6*10^0 + 7*10^{-1} + 8*10^{-2}$

Перевод из одной СС в другую. Пример 1

$231_{(10)} = ABC_{(10)} = ...HGFE_{(8)} = ...+ H*8^3 + G*8^2 + F*8 + E$, при натуральных H, G, F, E < 8.

Как найти E, F, G, H?

Решение: $(...+ H*8^3 + G*8^2 + F*8 + E)/8 = ...+ H*8^2 + G*8^1 + F$ (плюс остаток E)

$\Rightarrow (...HGFE_{(8)})/8 = ...HGF_{(8)}$ (с остатком E)

Номер шага (*i*)	0	1	2	3	4	…
Частное от деления на 8	231	28	3	0	0	0
Остаток от деления на 8	0	7	4	3	0	0

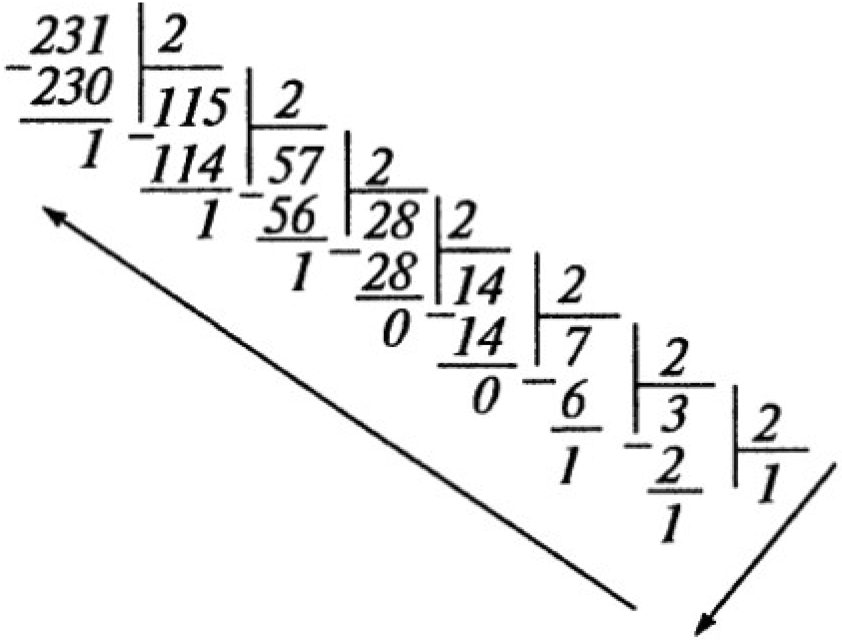
Ответ: E=7, F=4, G=3, H=0.

$231_{(10)} = 347_{(8)}$

Перевод из одной СС в другую. Пример 2

Задача: $231_{(10)} = ?_{(2)}$

Ход решения →



Ответ: $231_{(10)} = 11100111_{(2)}$

Перевод из одной СС в другую. Пример 3

Задача: $0{,}15_{(10)} = ?_{(3)} = 0{,}ABCD..._{(3)} = A/3^1 + B/3^2 + C/3^3 + D/3^4 + ...$

Решение: $(A/3^1 + B/3^2 + C/3^3 + D/3^4 + ...)*3 = A*3^0 + (B/3^1 + C/3^2 + D/3^3 + ...)$

$$=> 3*0{,}ABCD..._{(3)} = A{,}BCD..._{(3)}$$

Номер шага (*i*)	0	1	2	3	4	5	...
Целая часть после умножения дробной части на 3	0	0	1	1	0	0	...
Дробная часть после умножения на 3	0,15	0,45	0,35	0,05	0,15	0,45	...

Ответ: $0{,}15_{(10)} = 0{,}011001100..._{(3)} = 0{,}(0110)_{(3)}$

Перевод из одной СС в другую. Пример 4

Задача: $0{,}8125_{(10)} = ?_{(2)}$

Ход решения →

0	, 8125 2
1	, 625 2
1	, 25 2
0	, 5 2
1	0

Ответ: $0{,}8125_{(10)} = 1 * 2^{-1} + 1 * 2^{-2} + 1 * 2^{-4} = 0{,}1101_{(2)}$

Перевод из одной СС в другую. Пример 5

$$231_{(10)} = 11100111_{(2)}$$

$$0,8125_{(10)} = 0,1101_{(2)}$$

$$\Downarrow$$

$$231,8125_{(10)} = 11100111,1101_{(2)}$$

Перевод из СС с основанием 2 в СС с основанием 4

Сложный путь: 1) СС-2 -> СС-10: $10100_{(2)} = 20_{(10)}$

2) СС-10 -> СС-4: $20_{(10)} = 110_{(4)}$ => $10100_{(2)} = 110_{(4)}$

Примечание: «СС-*N*» означает «система счисления с основанием *N*»

Простой путь:

$$x_{i+1}2^{i+1} + x_i 2^i + \cdots + x_3 2^3 + x_2 2^2 + x_1 2^1 + x_0 2^0$$

$$x_{2k+1}2^{2k+1} + x_{2k}2^{2k} + \cdots + x_3 2^{2*1+1} + x_2 2^{2*1} + x_1 2^1 + x_0 2^0$$

$$2^{2k}(x_{2k+1}2^1 + x_{2k}) + \cdots + 2^2(x_3 2^1 + x_2) + 2^0(x_1 2^1 + x_0)$$

$$4^k(x_{2k+1}2^1 + x_{2k}) + \cdots + 4^1(x_3 2^1 + x_2) + 4^0(x_1 2^1 + x_0)$$

Преобразование из СС-2 в СС-2^k и обратно

Двоичная <-> Четверичная	Двоичная <-> Восьмеричная	Двоичная <-> Шестнадцатеричная
00 <-> 0	000 <-> 0	0000 <-> 0
01 <-> 1	001 <-> 1	0001 <-> 1
10 <-> 2	010 <-> 2	0010 <-> 2
11 <-> 3	011 <-> 3	0011 <-> 3
	100 <-> 4	…
	101 <-> 5	1101 <-> D
	110 <-> 6	1110 <-> E
	111 <-> 7	1111 <-> F

Пример: $1111110001{,}1110001_{(2)} = 0011\ 1111\ 0001{,}1110\ 0010_{(2)} = 3F1{,}E2_{(16)}$

Преобразование из СС-N в СС-N^k и обратно

Из СС-*N* в СС-N^k

- дополнить число, записанное в СС с основанием *N*, незначащими нулями так, чтобы количество цифр было кратно *k*;
- разбить полученное число на группы по *k* цифр, начиная от нуля;
- заменить каждую такую группу эквивалентным числом, записанным в СС с основанием N^k.

Задача: $1020101_{(3)} = ?_{(27)}$

Решение: $1020101_{(3)} = 001\ 020\ 101_{(3)} = 16A?_{(27)}$

Из СС-N^k в СС-*N*

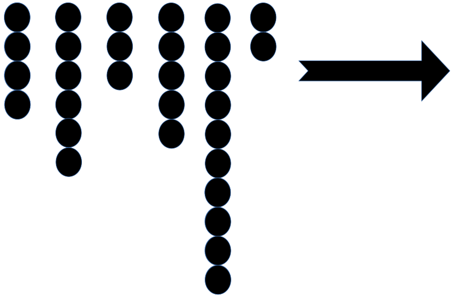
- заменить каждую цифру числа, записанного в СС с основанием N^k, эквивалентным набором из *k* цифр СС с основанием *N*.

Задача: $2345_{(125)} = ?_{(5)}$

Решение: $2345_{(125)} = 002\ 003\ 004\ 010_{(5)} = 2003004010_{(5)}$

Задача. Робинзон Крузо нашёл на острове 60 камней. Сколько прошедших дней можно ими закодировать в разных СС?

Пример СС-10:

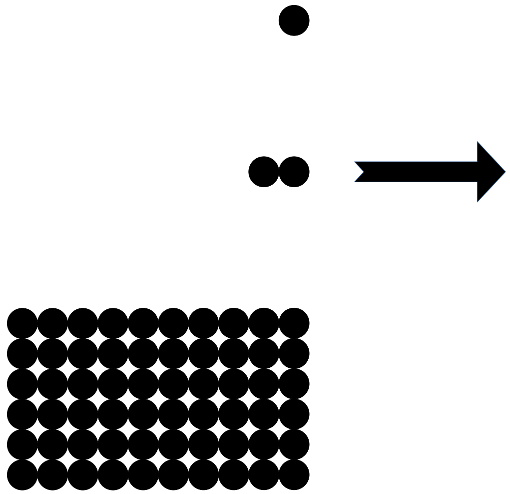


463502-й день из 999999 возможных, где $999999 = 10^6 - 1$

Оптимальная система счисления (2)

Пример СС-60:

0 камней = 0 дней
1 камень = 1 день
2 камня = 2 дня
…
60 камней = 60 дней



1 день

2 дня

60 дней

Пример СС-30:

0 камней ≠ 0 дней
1 камень = 0 дней
2 камня = 1 день или 30 дней
…
60 камней = 29*30 + 29 =
= 899 дней

● 0	● 0	0 дней
● 0	●● 1	1 день
● 0	●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●● 29	29 дней
●● 30	● 0	30 дней
●●● 60	●● 1	61 день

Оптимальная система счисления (4)

Пример СС-20:

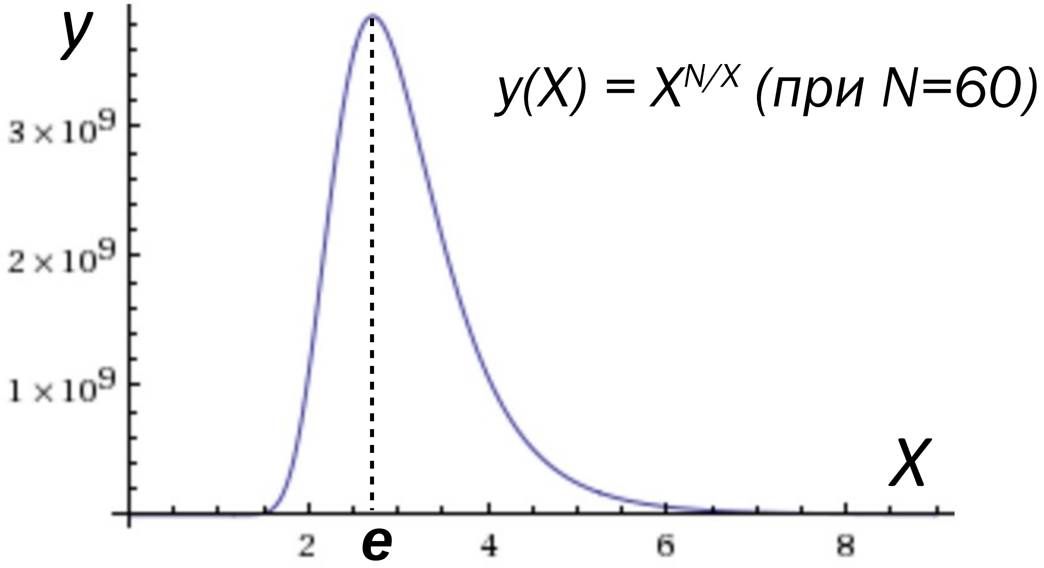
0 камней ≠ 0 дней
1 камень = 0 дней
2 камня = 1 день
или 20 дней
или 400 дней
…
60 камней =
= 19*400 +
+ 19*20 + 19 =
= 7999 дней

● 0	● 0	● 0	0 дней
● 0	● 0	●● 1	1 день
● 0	● 0	●●●●●●●●●●●●●●●●●●●● 19	19 дней
● 0	●● 20	● 0	20 дней
●● 400	●● 20	●● 1	421 день

Возможные варианты в других СС:

2^{30}, 3^{20}, 4^{15}, 5^{12}, 6^{10}, 7^{8}, 8^{7}, 9^{6}, 10^{6}, 11^{5}, 12^{5}, …, 20^{3}, …, 30^{2}, …, 60^{1}

Если взять *N* камней, а за основание СС принять число *X*, то получится *N/X* разрядов, которыми можно закодировать $y=X^{N/X}$ дней (для простоты полагаем, что количество разрядов может быть нецелым).



Вывод: оптимальная система счисления имеет основание *e*=2,7183….

Каким может быть основание позиционной СС?

$$\boxed{X_{(q)} = \sum_{k=-m}^{n-1} d_k \cdot q^k}$$

m — количество цифр справа от запятой,
n — количество цифр слева от запятой,
d_k — цифра числа, стоящая на *k*-й позиции,
q — основание системы счисления.

Пример: $\mathbf{789{,}13_{10}} = \mathbf{7}{*}10^2 + \mathbf{8}{*}10^1 + \mathbf{9}{*}10^0 + \mathbf{1}{*}10^{-1} + \mathbf{3}{*}10^{-2}$

Что если *q* отрицательно? иррационально? переменно?

Система счисления Бергмана

Джорж
Бергман
(р. 1943)

Любое действительное число можно представить в виде

$$x=\sum_{k=-m}^{n-1} d_k \cdot z^k, \quad \text{где } d_k \in \{0,1\},\ z=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

m — количество цифр справа от запятой, n — количество цифр слева от запятой, d_k — цифра числа, стоящая на k-й позиции, z — число золотой пропорции. Запись числа x в системе Бергмана имеет вид : $x_{(Б)}=d_{n-1}\ldots d_2 d_1 d_0, d_{-1} d_{-2} d_{-3}\ldots d_{-m\ (Б)}$

$2_{(10)} = 10{,}01_{(Б)} = z^1+z^{-2}$

$3_{(10)} = 11{,}01_{(Б)} = z^1+z^0+z^{-2}$

$3_{(10)} = 100{,}01_{(Б)} = z^2+z^{-2}$

Чтобы исключить неоднозначность, используют запись с наибольшим количеством разрядов, т. е. $3_{(10)} = 100{,}01_{(Б)}$

Применение: запись иррациональных чисел конечным числом цифр: $10_{(Б)} = 1{,}618033998\ldots$, контроль арифметических операций, коррекция ошибок, самосинхронизация кодовых последовательностей при передаче по каналу связи.

Примеры использования системы счисления Бергмана

```
z^5 := 1.618033988749895^5 =  11.090169943749476
z^4 := 1.618033988749895^4 =  6.854101966249686
z^3 := 1.618033988749895^3 =  4.23606797749979
z^2 := 1.618033988749895^2 =  2.618033988749895
z^1 := 1.618033988749895^1 =  1.618033988749895
z^0 := 1.618033988749895^0 =  1.0
z^(-1) := 1.618033988749895^(-1) =  0.6180339887498948
z^(-2) := 1.618033988749895^(-2) =  0.38196601125010515
z^(-3) := 1.618033988749895^(-3) =  0.23606797749978967
z^(-4) := 1.618033988749895^(-4) =  0.14589803375031543
z^(-5) := 1.618033988749895^(-5) =  0.09016994374947422
z^(-6) := 1.618033988749895^(-6) =  0.0557280900008412
```

Примеры использования системы счисления Бергмана (2)

16 = 11.090169943749476 + 4.23606797749979 +

+ 0.6180339887498948+ + 0.05572809000008412 =

= z^5 + z^3 + z^(-1) + z^(-6) = $101000.100001_{(B)}$

7 = 6.854101966249686 + 0.1458980337503154З =

= z^4+z^(-4) = $10000.0001_{(B)}$

Система счисления Цекендорфа (фибоначчиева СС)

Эдуард Цекендорф (1901–1983)

Любое целое число можно представить в виде

$$x=\sum_{k=1}^{n} d_k F_k, \text{ где } d_k \in \{0,1\}, \text{ а } F_k - \text{ числа Фибоначчи (ЧФ)}$$

n — количество цифр в записи числа, d_k — цифра числа, стоящая на k-й позиции, каждое ЧФ есть сумма двух предыдущих ЧФ: F_i = {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...} , где i = 0, 1,... .

Запись числа x в системе Цекендорфа будет иметь вид $x_{(\text{Ц})} = d_n d_{n-1} \ldots d_{1(\text{Ц})}$

Проблема неуникальности: 16 = 8+5+2+1 = 13+3, т.е. 16 = $11011_{(\text{Ц})}$ = $100100_{(\text{Ц})}$. Чтобы исключить неоднозначность, введён запрет на использование двух единиц подряд: т. е. $16_{(10)}$= $100100_{(\text{Ц})}$, а запись $11011_{(\text{Ц})}$ считается ошибочной!

Факториальная СС: определение

Любое целое число можно представить в виде

$$x=\sum_{k=1}^{n} d_k k!, \quad \text{где} \quad 0 \leqslant d_k \leqslant k, \quad k!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k.$$

n — количество цифр в записи числа,
d_k — цифра числа, стоящая на k-й позиции,

Запись числа x в факториальной системе счисления будет иметь вид:

$$x_{(\Phi)}=d_n d_{n-1} \ldots d_{1(\Phi)}.$$

Примеры: $310_{(\Phi)} = 3*3! + 1*2! + 0*1! = 20_{(10)}$

$106_{(10)} = d_5*5! + d_4*4! + d_3*3! + d_2*2! + d_1*1! =$ ...подбор d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 ...=

$= 0 *5! + 4 *4! + 1 *3! + 2 *2! + 0 *1! = 4120_{(\Phi)}$

Перевод чисел из СС-10 в факториальную СС

Дано: $x = d_4 d_3 d_2 d_{1(\Phi)} = (2\cdot3\cdot4)\,d_4 + (2\cdot3)\,d_3 + (2)\,d_2 + (1)\,d_1.$

1) $(x \operatorname{div} 2) \;=\; (3\cdot4)\,d_4 + (3)\,d_3 + d_2$ (и остаток, равный d_1).

2) $(x \operatorname{div} 2) \operatorname{div} 3 \;=\; (4)\,d_4 + d_3$ (и остаток, равный d_2).

3) $((x \operatorname{div} 2) \operatorname{div} 3) \operatorname{div} 4 \;=\; d_4$ (и остаток, равный d_3).

4) $(((x \operatorname{div} 2) \operatorname{div} 3) \operatorname{div} 4) \operatorname{div} 5 \;=\; 0$ (и остаток, равный d_4).

Примечание: «*A* div *B*» означает целочисленное деление *A* на *B*.

«*A* mod *B*» означает остаток от деления *A* на *B*.

Пример: $106_{(10)} = ?_{(\Phi)}$

1) 106 div 2 = 53, d_1 = 106 mod 2 = 0
2) 53 div 3 = 17, d_2 = 53 mod 3 = 2
3) 17 div 4 = 4, d_3 = 17 mod 4 = 1
4) 4 div 5 = 0, d_4 = 4 mod 5 = 4

$$x_{(\Phi)} = d_4 d_3 d_2 d_{1(\Phi)} = 4120_{(\Phi)}$$

Факториальная СС: применение

Проблема: как упорядочить перестановки букв АБВ: 1-АБВ, 2-АВБ, 3-ВБА, 4-ВАБ, 5-БАВ, 6-БВА.

Пример. Пусть имеется n=5 чисел (1,2,3,4,5) и нужно найти все их перестановки. Известно, что всего существует n! = 5! =120 таких перестановок. Как найти перестановку, если задан её номер *k*?

Решение. Найдём 21-ю перестановку (*k* = 21). Переведём *k* в факториальную систему:
$21 = 3*3! + 1*2! + 1*1! = 311_{(Ф)}$. Дополним его до (*n-1*) разрядов: $311_{(Ф)} \rightarrow 0311_{(Ф)}$.

Расставим символы по местам:

1) **справа** от «5» есть <u>0</u> меньших цифр (_ _ _ _ 5)
2) **справа** от «4» есть <u>3</u> меньшие цифры (4 _ _ _ 5)
3) **справа** от «3» есть <u>1</u> меньшая цифра (4 _ 3 _ 5)
4) **справа** от «2» есть <u>1</u> меньшая цифра (4 2 3 _ 5)

ОТВЕТ: 42315

Значение k	**0**	1	2	3	...	21	...	**119**
k-я перестановка	12345	21345	13245	23145	...	42315	...	54321

СС с отрицательным основанием или цифрами

1. Нега-позиционные (с отрицательным основанием). Примеры в нега-десятичной СС:
   - $123_{(-10)} = 1\cdot(-10)^2 + 2\cdot(-10)^1 + 3\cdot(-10)^0 = 100 - 20 + 3 = 83_{(10)}$
   - $58_{(-10)} = 5\cdot(-10)^1 + 8\cdot(-10)^0 = -50 + 8 = -42_{(10)}$

   Числа с чётным количеством цифр — отрицательные.

2. Симметричные (с отрицательными цифрами). Например, в симметричной пятеричной СС вместо привычных цифр {0, 1, 2, 3, 4} используются {-2, -1, 0, 1, 2}:
   - $20\bar{2}10_{(5С)} = (2)\cdot5^4 + (0)\cdot5^3 + (-2)\cdot5^2 + (1)\cdot5^1 + (0)\cdot5^0 = 1250 - 50 + 5 = 1205_{(10)}$
   - $\bar{2}02\bar{1}0_{(5С)} = (-2)\cdot5^4 + (0)\cdot5^3 + (2)\cdot5^2 + (-1)\cdot5^1 + (0)\cdot5^0 = -1250 + 50 - 5 = -1205_{(10)}$

   Симметричные СС определены только для нечётных оснований!

Применение. В негапозиционных и симметричных СС не требуется специального знака для обозначения отрицательных чисел. Это позволяет использовать их для представления отрицательных чисел в компьютерах.