Д/з 4

1. Найти собств. вектора и собств. значения для линейного оператора:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

1) $\begin{vmatrix} -1-\lambda & -6 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(-1-\lambda)\cdot(6-\lambda) - (-6\cdot 2) = 0$

$-6 + \lambda - 6\lambda + \lambda^2 + 12 = 0$

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ $\qquad D = 25 - (4\cdot 6) = 1$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{5 \mp 1}{2}$

$\lambda_1 = \dfrac{6}{2} = 3$

— собственные значения

$\lambda_2 = \dfrac{4}{2} = 2$

2) $Ax = \lambda_x$:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

a) $\begin{cases} -1\cdot x_1 + (-6x_2) = 3x_1 \\ 2x_1 + 6x_2 = 3x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 - 6x_2 = 3x_1 \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} -x_1 - 3x_1 - 6x_2 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x_1 - 6x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$x_1 = 1{,}5x_2$

$x_1 = 3$;

$x_2 = -2$

б) $\begin{cases} -x_1 - 6x_2 = 2x_1 \\ 2x_1 + 6x_2 = 2x_2 \end{cases}$

$\begin{cases} -x_1 - 2x_1 - 6x_2 = 0 \\ -2x_2 + 6x_2 + 2x_1 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} -3x_1 - 6x_2 = 0 \\ 4x_2 + 2x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -2x_2$

$x_2 = -1$

$x_1 = 2$

Ответ: $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 3$; $\vec{a}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{b}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

(2) Дан оператор поворота на $180°$, задаваемый матрицей $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Показать, что любой вектор для него собственный.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(-1-\lambda)\cdot(-1-\lambda) = 0$ $\qquad D = b^2 - 4ac$

$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ $\qquad D = 4 - 4 = 0$

$\lambda = \lambda_1 = \frac{-2}{2} = -1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

$\begin{cases} -x_1 = -x_1 \\ -x_2 = -x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

Ответ: любой вектор для оператора A явл. собственным.

③ Установить, явл. ли вектор $\vec{x} = (1, 1)$ собств. вектором лин. оператора
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = \lambda \\ -1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

Ответ: $\vec{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ явл. собств. вектором лин. оператора A.

④ Явл. ли $\vec{x} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ собств. вектором лин. оператора $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3 \cdot (-3) = 3\lambda \\ 9 = -3\lambda \\ -12 = -4\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -3 \\ \lambda = -3 \\ \lambda = 3 \end{cases} \Rightarrow$$ система не имеет смысла

Ответ: $\bar{x} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ не явл собств. вектором линейного оператора A.