Д/з 4 (часть 1)

① $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ \quad -x_2 + x_3 + 5x_4 = -2 \\ \qquad -2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases} \Rightarrow \quad x_4 = c \Rightarrow$

$-2x_3 + 3c = 4$

$x_3 = \frac{4-3c}{-2} \Rightarrow$

$x_3 = -2 + \frac{3}{2}c$

$-x_2 + \left(-2 + \frac{3}{2}c\right) + 5c = -2$

$-x_2 - 2 + \frac{3}{2}c + 5c = -2$

$-x_2 = -\cancel{2} + \cancel{2} - \frac{3}{2}c - 5c$

$x_2 = 6{,}5c$

$x_1 + 6.5c + 2 - 1{,}5c - 2c = 0$

$x_1 = -5c + 2c - 2 = -3c - 2$

Ответ: $x_1 = -3c - 2$, $x_2 = 6{,}5c$, $x_3 = -2 + 1{,}5c$, $x_4 = c$

② $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & -3 & -17 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$

решение в файле .ipynb

(4) $\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 1 & 0 & b-2a \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 1 & 0 & b-2a \\ 4 & 2 & 0 & c-3a \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 1 & 0 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & c-3a-(2b-4a) \end{array}\right)$$

$$c-3a-2b+4a = c-2b+a$$

Если $c-2b+a \neq 0$, то система явл. несовмест-ной.

В иных случаях система имеет бесконечное множество решений.

Д/З (часть 2)

① Метод Крамера

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 = 7 \end{cases}$

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4 - (-6) = 2 \neq 0$

$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = -4 - (-14) = 10$

$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 3 = 4$

$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{10}{2} = 5$

$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{4}{2} = 2$

б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} =$

$= 2 \cdot (1 + 12) + (1 + 6) + 5(4 - 2) = 26 + 7 + 10 = 43$

$\det A_1 = \begin{vmatrix} 10 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} =$

$= 10 \cdot (1 + 12) + (-2 + 3) + 5(-8 - 1) = 130 + 1 - 45 = 86$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 10 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-2+3) - 10(1+6) + 5(1+4) = 2 - 70 + 25 = -43$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 10 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (1+8) + (1+4) + 10(4-2) = 18 + 5 + 20 = 43$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{86}{43} = 2$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-43}{43} = -1$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{43}{43} = 1$$

② Найти L-матрицу

а) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 12 \\ 3 & 26 & 30 \end{pmatrix} \begin{matrix} II-(2)\cdot(I) \Rightarrow \\ III-(3)\cdot I \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 20 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{III-(4)\cdot II} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{U\text{-матрица}}$$

$$L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

б) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 9 \\ 3 & 18 & 29 & 18 \\ 4 & 22 & 53 & 33 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 15 & 23 & 6 \\ 4 & 22 & 53 & 33 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 18 & 45 & 17 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 21 & 11 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - U \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$