$b_2 = (1, 0, 0)$

$b_3 = (0, 0, 2, 5)$

$\boxed{f_4 = f_3 - f_2 - f_1}$ — линейно зависимы!

Д/з №1

① Исследовать на линейную зависимость:

$f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = 1$, $f_3(x) = x + 1$, $f_4(x) = x - e^x$

1) $\alpha_1 e^x + \alpha_2 + \alpha_3 x + \alpha_3 + \alpha_4 x - \alpha_4 e^x = 0$

$(\alpha_1 - \alpha_4) \cdot e^x + \alpha_2 + \alpha_3 + (\alpha_3 + \alpha_4) x = 0$

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_4 = 0 & \Rightarrow \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 & \\ \alpha_3 = 0 & \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 0 & \Rightarrow \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

~~Ответ: линейная комбинация векторов $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ — линейно независимы, т.к. все $\lambda_k = 0$ | $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$~~

(2) $f_1(x)=2$
$f_2(x)=x$
$f_3(x)=x^2$
$f_4(x)=(x+1)^2=$
$=x^2+2x+1$

$2\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 x^2+\alpha_4 x^2+2\alpha_4 x+\alpha_4=0$

$2\alpha_1+\left(\frac{1}{2}\alpha_2+\alpha_4\right)\cdot 2x+(\alpha_3+\alpha_4)x^2+\alpha_4=0$

$$\begin{cases} 2\alpha_1=0 \\ \frac{1}{2}\alpha_2+\alpha_4=0 & \to \alpha_2=0 \\ \alpha_3+\alpha_4=0 & \Rightarrow \alpha_3=0 \\ \alpha_4=0 \end{cases}$$

$f_4=f_3+2f_2+\frac{1}{2}f_1$ – линейно зависимы.

Ответ: ~~Комбинация векторов линейно независима, т.к. $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$.~~

(3) Найти координаты вектора $x=(2,3,5)\in R^3$ в базисе:
$b_1=(0,0,10)$
$b_2=(2,0,0)$
$b_3=(0,1,0)$

$x=(2,3,5)_{b_i}=\left(\frac{1}{2}b_1+b_2+3b_3\right)=$
$=\left(\frac{1}{2},1,3\right)_{b_i}$

(4) Найти координаты вектора $3x^2-2x+2\in R^3[x]$:
а) в базисе $(1,x,x^2)$
Ответ: $(2,-2,3)$

б) в базисе $(x^2, x-1, 1)$
Ответ: $(3;-2;0)$

(5) 5. а) $(0,a,b)+(c,0,d)=(c,a,b+d)$
Полученный вектор не принадлежит указ. в задании множеству всех векторов вида $(0,a,b)$ и $(c,0,d)$, т.е. данное множество не явл. подпространством линейного пространства R^3.

5. б) является ли линейным подпростр. все вектора, являющиеся линейными комбинациями данных векторов $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$

<u>Ответ</u>: совокупность всех линейных комбинаций этих векторов образует некоторое подпространство исходного лин. пространства. Она наз-ся линейной оболочкой этого множества.

Д/З к уроку 2.

(4) Ортонормированный базис:
- все вектора ортогональны ($\angle = 90°$)
- все нормированы (длина каждого = 1)

а) $(1,0,0)$, $(0,0,1)$

$(a,b) = 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0$

$|x_1| = 1$; $|x_2| = 1$

Ответ: вектора образуют ортонормир. базис

г) $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$

$(a,b,c) = 1\cdot 0\cdot 0 + 0\cdot 1\cdot 0 + 0\cdot 0\cdot 1 = 0$

$|x_1| = 1$, $|x_2| = 1$; $|x_3| = 1$

Ответ: образуют ортонормир. базис.

в) $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$, $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(0,0,1)$

$(a,b,c) = \frac{1}{2}\cdot 0 + (-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}) + 0\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

Ответ: вектора не образуют ортонормир. базис

б) $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $(0,0,1)$

$(a,b,c) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + (-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}) + 0\cdot 0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

$|x_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \cancel{1} = 1$

$|x_2| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$

$|x_3| = 1$ Ответ: вектора образуют ортонормир. базис

③ б) утроенное обычное скалярное произведение векторов — линейное простр-во будет евклидовым.

а) произведение длин векторов — не будет