т.е. что произведение gf абсолютно интегрируемо на отрезке
[a, b].$\square$

Всё сказанное в этом пункте естественный образом переносится и на несобственные интегралы других видов, рассмотренных в п. 29.1, т.е. на интегралы вида (29.6), а также на интегралы общего типа (29.8).

29.6 Исследование сходимости интегралов

Докажем один достаточный признак сходимости интегралов, называемый обычно *признаком Дирихле.*

ТЕОРЕМА 5 (признак Дирихле). Пусть:

1) *функция f непрерывна и имеет ограниченную первообразную F при* $x \geq a$ **;**

2) *функция g непрерывно дифференцируема и убывает при* $x \geq a$ **;**

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0.$

Тогда сходится интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx. \qquad (\mathbf{29.34})$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что, в силу сделанных предположений, функция fg непрерывна, а значит, и интегрируема по Риману на любом отрезке $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, $\mathrm{a} < \mathrm{b} < +\infty$, (29.34). Проинтегрировав по частм произведение $f(x)g(x)$ на отрезке $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, получим

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = \int\limits_a^b g(x)\,dF(x)|_a^b - \int\limits_a^b F(x)g'(x)\,dx. \qquad (\mathbf{29.35})$$

Исследуем поведение обоих слагаемых правой части при $\mathrm{b}\to +\infty. F(.1), M = sup|F(x)| < +\infty.$Из условий 2 и 3 теоремы следует, что функция g не отрицательна для всех $x{\geq}a$, в частности $g(b) \geq 0$; поэтому

$$|g(b)F(b)| \geq Mg(b).$$