§1 Теорема Безу

Определение. Многочленом степени n называется формальная запись вида $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$, где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ — действительные числа называемые *коэффициентами многочлена*, $a_n \neq 0$, x — формальная переменная. Число a_n называется *старшим коэффициентом*, a_0 называется *свободным членом*. Степень многочлена f обозначается $deg\, f$.

Определение. Многочлен A **делится** на ненулевой многочлен B, если существует многочлен Q, называемый *частным* такой, что $A = B \cdot Q$.

Определение. Разделить многочлен A на ненулевой многочлен B с остатком — это найти многочлены Q, R такие, что выполнено равенство $A = B \cdot Q + R$, причем $degR < degB$ или $R = 0$. Многочлен Q называется *неполным частным*, многочлен R называется *остатком*.

Задача 1.1. Найдите все натуральные n, при которых число $n^3 + 2n^2 + 4n + 3$ делится на число $n^2 + 1$.

Задача 1.2. Найдите все натуральные $n > 2$, для которых многочлен $x^n + x^2 + 1$ делится на многочлен $x^2 + x + 1$.

Theorem 1.3 (Теорема Безу)

Докажите, что остаток от деления многочлена P на $(x - a)$ равен $P(a)$:

$$P(x) = H(x)(x - a) + P(a).$$

Theorem 1.4 (Следствие)

Число a является корнем многочлена $P(x)$ тогда и только тогда, когда $P(x)$ делится на $(x - a)$.

Задача 1.5. (a) При каких значениях параметра a многочлен $P(x) = x^n + ax^{n-2}$ $(n > 2)$ делится на $x - 2$?

(b) При каких a и b многочлен $x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + b$ делится на $(x - 1)(x - 2)$?

Задача 1.6. (a) Многочлен $x^2 + px + q$ имеет на интервале $(0, 2)$ два корня. Докажите, что $-2 < p + q < 0$.

(b) Многочлен $x^3 + px^2 + qx + r$ имеет на интервале $(0, 2)$ три корня. Докажите, что $-2 < p + q + r < 0$.

Задача 1.7. Дан многочлен $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$. Известно, что каждое из уравнений $f(x) = 1$ и $f(x) = 2$ имеет четыре корня. Докажите, что если для корней первого уравнения выполняется равенство $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$, то и для корней второго уравнения выполняется аналогичное равенство.

Задача 1.8. Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три различных действительных корня, а многочлен $P(Q(x))$, где $Q(x) = x^2 + x + 2019$, действительных корней не имеет. Докажите, что $P(2019) > \frac{1}{64}$.