§1 Алгоритм Евклида

Задача 1.1. Хромой кузнечик прыгает по прямой, причем вправо он может прыгать только на 15 см, а влево только на 21 см. (a) Сможет ли он оказаться на 3 см левее начальной позиции? Если да, то как ему прыгать? (b) А если на 2 см правее? (c) В каких точках прямой он вообще может оказаться, прыгая по правилам?

Задача 1.2. От прямоугольника 1365×165 начали отрезать квадраты, причем сторона квадрата каждый раз равна меньшей стороне прямоугольника, и после отрезания каждый раз остается снова прямоугольник. В конце концов остался квадрат. Чему равна его сторона?

Будем использовать следующие обозначения: НОД$(a, b) = (a, b)$, НОК$(a, b) = [a, b]$.

Задача 1.3. Пусть есть натуральные числа $a > b$ и $(a, b) = r$.

1. Докажите, что если большее из чисел заменить на их разность, то НОД не поменяется, то есть $(a - b, b) = (a, b) = r$.
2. Докажите, что $(a - b \cdot k, b) = (a, b) = r$, где k - целое.
3. Докажите, что если $a \,\vdots\, b$, то $(a, b) = b$.

Theorem 1.4 (Алгоритм Евклида)
Для того, чтобы найти НОД двух чисел $a > b$, необходимо выполнить последовательно несколько делений с остатком:

$$a = b \cdot q_1 + r_1$$

$$b = r_1 \cdot q_2 + r_2$$

$$r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3$$

$$r_2 = r_3 \cdot q_4 + r_4$$

$$\vdots$$

$$r_{n-1} = r_n \cdot q_{n+1} + 0$$

тогда НОД$(a, b) = r_n$

Задача 1.5. Найдите алгоритмом Евклида (a) $(1365, 165)$; (b) $(12751, 10537)$.

Задача 1.6. Докажите, что $r_1, r_2, \dots r_n$ можно представить в виде $a \cdot m + b \cdot k$, где m и k - целые.

Задача 1.7. Найдите какие-нибудь целые x и y для которых: $998x + 546y = 2$.

Задача 1.8. Докажите, что если a и b взаимно просты, то уравнение $ax + by = 1$ имеет решение в целых числах.

Задача 1.9 (Задача с IMO!)**.** Докажите, что дробь $\frac{21n+4}{14n+3}$ несократимая дробь $\forall n$.