§1 GGWP

Задача 1.1. Пусть $n > 4$ — составное число. Докажите, что число $(n-1)!$ делится на $2n$ нацело.

Задача 1.2. Докажите, что для $k \in \mathbb{Z}^+$

$$k(k+1)(k+2)(k+3)$$

не является полным квадратом.

Задача 1.3. Найдите все тройки простых чисел p, q, r, для которых верно равенство

$$\frac{p}{q} - \frac{4}{r+1} = 1$$

§2 Модули

Задача 2.1. Существует ли такое целое m что $m^2 + 2 \vdots 5$

Отметим сразу, что в этой задаче у нас появилось одно очень важное наблюдение: мы увидели, что квадраты целых чисел при делении на 5 дают остатки 0, 1 и 4. Подобные наблюдения – наблюдения о том, какие остатки дают точные степени (вторые, третьи, четвертые) – являются одним из ключевых подходов к решению различного рода задач по теории числе. В особенности эти наблюдения помогают при решении уравнений в целых и натуральных числах.

Задача 2.2. Можно ли найти такие целые числа a и b что

$$a^2 + b^2 = 2019$$

Задача 2.3. Существуют ли такие натуральные числа m, n такие, что

$$5^m + 1 \vdots 5^n - 1$$

Задача 2.4. Докажите, что сумма квадратов трех целых чисел не может давать остаток 7 при делении на 8.

Задача 2.5. Про $a, b, c \in \mathbb{N}$ известно, что

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Докажите, что $ab \vdots 3$.

Задача 2.6. Пусть $S(n)$ – сумма цифр числа n. Решите уравнение

$$n + S(n) + S(S(n)) = 2020$$

в натуральных числах

Задача 2.7. Докажите, что из любых пяти целых чисел можно найти три, сумма которых делится на 3.

Задача 2.8. Докажите, что уравнение неразрешимо в натуральных числах

$$m^3 + n^3 = 4(m^2n + n^2m + 1)$$

Задача 2.9. Для $n \in \mathbb{N}$ докажите, что

$$(2^n - 1)^n - 3 \vdots (2^n - 3)$$

Задача 2.10. Find all positive integers n such that

$$2^n + 12^n + 2011^n$$

is a perfect square.