02/06/2020
Время: 13:00-17:00
Рейтинговая олимпиада.
Каждая задача оценивается в 7 баллов.

Задача 1 *Расул, Абданур и Алихан выбрали по одному простому числу и возвели их в третью степень. Оказалось, что один из попарных разностей кубов равен числу Расула* ($HeKnowsThat!$). *Найдите эти простые числа.*

Задача 2 *Для приведенного многочлена четвертой степени* $f(x)$ *выполняются следующие равенства:* $f(1) = 5, f(2) = 10, f(3) = 15$. *Вычислите* $f(6) + f(-2)$.

Задача 3 *Имеются кубики пронумерованные от* 1 *до* 9 *(Один кубик со всех сторон пронумерован только одной цифрой). Алихан, Илияс и Алишер поделили кубики между собой. Каждый из ребят перемножил числа со своих кубиков. У кого получится число не меньше чем* 72, *тот выигрывает. Всегда ли будет победитель?*

Задача 4 *Учитель нарисовал на доске равносторонний треугольник* PQR *и окружность, описанный около треугольника. Улан выбрал произвольную точку* E *на дуге* PQ. *Докажите, что* $RE = PE + QE$.

Ответы и решения.

Задача 1 *Расул, Абданур и Алихан выбрали по одному простому числу и возвели их в третью степень. Оказалось, что один из попарных разностей кубов равен числу Расула* ($HeKnowsThat!$). *Найдите эти простые числа.*

Ответ: $2, 3$ и 19.
Решение:
Пучть эти числа a, b и c где c — число Расула. Тогда:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2).$$

Так как

$$a^2+ab+b^2 > 1$$

то

$$a - b = 1.$$

Отсюда

$$a = 3, b = 2.$$

Несложно найти, что

$$c = 19$$

Задача 2 *Для приведенного многочлена четвертой степени $f(x)$ выполняются следующие равенства: $f(1) = 5, f(2) = 10, f(3) = 15$. Вычислите $f(6) + f(-2)$.*

Ответ: 500.
Решение:
По условию:

$$f(x) - 5x = (x-1)(x-2)(x-3)(x-c).$$

Отсюда

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-c) + 5x.$$

Вычислим:

$$f(6) + f(-2)$$

$$[(6-1)(6-2)(6-3)(6-c) + 5 \cdot 6] + [((-2)-1)((-2)-2)((-2)-3)((-2)-c) + 5 \cdot (-2)] = 500$$

Задача 3 *Имеются кубики пронумерованные от 1 до 9 (Один кубик со всех сторон пронумерован только одной цифрой). Алихан, Илияс и Алишер поделили кубики между собой. Каждый из ребят перемножил числа со своих кубиков. У кого получится число не меньше чем 72, тот выигрывает. Всегда ли будет победитель?*

Ответ: Да.
Решение:
Пусть после того как ребята перемножили числа со своих кубиков Алихан получил число X, Илияс число Y а Алишер число Z. Предположим что нет выигравшего. Тогда:

$$XYZ \leq 71^3.$$

Так же:

$$XYZ = 9! > 71^3.$$

Противоречие. Тогда неверно и наше предположение, значит победитель всегда найдется.

Задача 4 *Учитель нарисовал на доске равносторонний треугольник PQR и окружность, описанный около треугольника. Улан выбрал произвольную точку E на дуге PQ. Докажите, что $RE = PE + QE$.*

Доказательство:

Отложим на луче RE отрезок RE_1, равный отрезку PE. Тогда треугольники RQE_1 и PEQ равны по двум сторонам и углу между ними. В треугольнике QEE_1 $QE = QE_1$, $\angle QEE_1 = \angle QER = \angle QPR = 60°$. Поэтому $EE_1 = QE$. Следовательно, $RE = RE_1 + E_1E = PE + QE$.